

République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
جامعة الجيلالي بونعامة خميس مليانة
Université Djilali Bounaâma de Khemis Miliana
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département des Sciences de la Matière



Mémoire de fin d'étude

Spécialité physique

Option: Physique théorique

Titre :

*Les effets de désordre sur un gaz dipolaire de
bosons à deux dimensions*

Devant le jury composé de :

- *Président:* Dr Bentriddi Salah Eddine
- *Encadreur:* Dr Redaouia Keltoum
- *Examineur:* Dr Yezli Mohamed

Présenté par : Yahia Mahammed El Amine

Année Universitaire 2022/2023

Remerciements

Je tiens tout d'abord à exprimer ma gratitude à Dieu le tout puissant pour sa guidance et sa lumière qui ont illuminé mon chemin tout au long de cette aventure académique.

Je souhaite adresser mes sincères remerciements à mon encadreur, le docteur k.Redouia, pour son soutien inestimable et ses précieux conseils tout au long de mon travail. Madem, je tiens à renouveler mes remerciements les plus sincères et mon profond respect à votre égard.

Je voudrais également exprimer ma reconnaissance envers le Dr Bentridi Salah Eddine, qui a accepté d'être le président du jury et m'a honoré de sa présence.

Un remerciement spécial à l'enseignante Yezli Mohamed pour avoir accepté d'examiner ce mémoire. Votre expertise et vos commentaires ont été d'une grande valeur pour moi.

Je souhaite exprimer ma profonde gratitude envers mes parents, mes frères et sœurs, ainsi que mes amis proches pour leur soutien indéfectible et leurs encouragements tout au long de mon parcours. Leur présence et leur amour ont été des sources d'inspiration inépuisables.

Enfin, je tiens à remercier mes enseignants qui m'ont transmis leurs connaissances et m'ont guidé durant toutes ces années d'études.

Leur dévouement et leur passion pour l'enseignement ont joué un rôle essentiel dans ma formation académique.

Je suis profondément reconnaissant envers toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail de recherche.

Veillez accepter mes remerciements les plus sincères.

Résumé :

Nous étudions les effets d'un faible désordre avec une fonction de corrélation gaussienne sur un condensat de Bose dipolaire dilué quasi-bidimensionnel avec des interactions de contact à deux et trois corps en utilisant la théorie de Hartree-Fock-Bogoliubov. Nous analysons numériquement les effets de l'interaction à trois corps sur le spectre d'énergie, les fluctuations quantiques de désordre dans l'appauvrissement du condensat et l'énergie de désordre du système. Nous montrons qu'une augmentation des interactions de contact à trois corps entraîne l'apparition de rotonisation et d'une instabilité du condensat à une interaction dipôle-dipôle plus forte. Nous montrons également que l'interaction intrigante entre le désordre, les interactions dipôle-dipôle et les interactions à trois corps joue un rôle fondamental dans la physique du système. De manière intéressante, nous constatons que les interactions à trois corps libèrent des atomes localisés dans les minima respectifs du potentiel aléatoire.

Abstract :

We study effects of weak disorder with Gaussian correlation function on a dilute quasi-two-dimensional dipolar Bose-condensate with two- and three-body contact interactions using the Hartree-Fock-Bogoliubov theory. We analyze numerically the effects of three-body interaction on the energy spectrum, the quantum disorder fluctuations to the condensate depletion and the disorder energy, of the system. We show that increasing the three-body contact interactions leads to the appearance of rotonization and condensate instability at stronger dipole-dipole interaction. We also show that the intriguing interplay of the disorder, dipole-dipole interactions and three-body interactions plays a fundamental role in the physics of the system. Interestingly, we find that the three-body interactions release atoms localized in the respective minima of the random potential.

ملخص

ندرس تأثيرات الاضطراب الضعيف ذي الدالة الترابط الغاوسية على تجمع بوز المتجانس بالأبعاد ذو القطبية في وسط ثنائي البعد كاذب بواسطة التفاعلات ذات الاتصال ذات الجسمين والثلاثة نحلل بالطرق العددية تأثير التفاعلات ذات بوغوليوبوف-فوك-أجسام باستخدام نظرية هارترتي الأجسام الثلاثة على طيف الطاقة وتذبذبات الاضطراب الكمونية واستنفاد التجمع وطاقة نظهر أن زيادة تفاعلات الاتصال بالأجسام الثلاثة يؤدي إلى ظهور التروتونية. الاضطراب للنظام نظهر أيضاً أن التداخل المثير بين الاضطراب وعدم استقرار التجمع عند تفاعل القطبية الأقوى ولاحظ أننا نجد. وتفاعلات القطبية وتفاعلات الأجسام الثلاثة يلعب دوراً أساسياً في فيزياء النظام. أن تفاعلات الأجسام الثلاثة تطلق الذرات المتمركزة في الحد الأدنى المتناظر للمحتوى العشوائي

Mots clé

Condensation de Bose Einstein

Théorie de Bogoliubov

Systeme désordonné

Equation de Gros Pitaevskii

Table des matières

Introduction	3
1 Dipolaire du condensat de Bose-Einstein	7
1.1 Condensat de Bose-Einstein	7
1.1.1 Statistique de Bose Einstein :	8
1.1.2 La température du condensat de Bose Einstein	10
1.2 Condensat de Bose Einstein et l'équation de Gross-Pitaevskii	11
1.2.1 Généralisée de l'équation de Gross-Pitaevskii	11
1.2.2 Obtention de l'équation de Gross-Pitaevski	11
1.3 Réalisations expérimentales du condensat de BE	13
1.4 Interaction dipôle-dipôle	15
2 La théorie de Bogliubov-Huang-Meng	20
2.1 Théorie de Bogoliubov	20
2.2 L'équations de Bogoliubov de Gennes	20
2.3 Excitations de Bogoliubov :	24
2.4 La théorie de Bogliubov-Huang-Meng	27
2.5 Propriétés statistique du potentiel de désordre :	31
2.5.1 Fonction de corrélation	31
2.5.2 Les formulaires standards	32

3	Dipolaire d'un gaz bosonique à deux dimensions dans un potentiel de désordre faible	34
3.1	Gaz de Bose homogènes et bidimensionnels :	35
3.2	Gaz de Bose dipolaire à deux dimensions avec interactions à trois corps en faible désordre	37
3.3	Déplétion du condensat	42
3.3.1	Quantités thermodynamiques	45
3.4	Conclusion	46
	Conclusion	48

Introduction générale

En 1924, Albert Einstein a publié un article dans lequel il postulait le comportement des gaz bosoniques dilués ultradilués [1] qui généralise les travaux de Bose sur le comportement statistique des photons [2]. Albert Einstein prédit qu'un ensemble de bosons (particules de spin entier) sans interactions devra développer une population macroscopique dans l'état de plus basse énergie en dessous d'une température critique, qui dépend du nombre total d'atomes et de la géométrie du système. Cette transition de phase a lieu quand la longueur d'onde de Broglie thermique des particules Λ devient comparable à la distance moyenne interparticulaire. La théorie d'Einstein est restée dans les tiroirs pendant des années, jusqu'à être reconsidérée en 1937 par F. London lors de la découverte de la superfluidité de l'hélium liquide en dessous d'une certaine température [3]. London remarque que la température de transition de l'hélium liquide vers son état superfluide était très proche de la température critique de condensation d'un gaz parfait de même densité, ce qui suggère que les deux phénomènes sont liés.

A cause des fortes interactions dans l'hélium superfluide, une description microscopique du système est ardue. Au contraire, elle est beaucoup plus facile dans le cas des gaz dilués, dans lesquels les interactions restent faibles. Dans le cas des condensats de Bose-Einstein, l'équation de Gross-Pitaevskii [4] décrit bien le système en prenant en compte les interactions qui agissent sur une particule par un terme de champ moyen. Pour atteindre le seuil de condensation dans un gaz dilué, il faut le refroidir à des températures jamais atteintes, de l'ordre de 100 nK. Plusieurs dizaines d'années sont écoulées depuis la prédiction de la condensation de Bose-Einstein jusqu'à la réalisation des premiers condensats avec des atomes ultra-froids. En 1995, la condensation de Bose-Einstein a été réalisée par

Eric Cornell et Carl Wieman sur des atomes de rubidium 87 [5], puis par le groupe de Wolfgang Ketterle [6] sur des atomes de sodium, en leur valant le prix Nobel de physique 2001. Jusqu'à nos jours, des condensats de nombreuses espèces atomiques ont été produits, ainsi que des condensats de molécules [7], de polarisatons [8] et de photons [9].

Depuis la réalisation des condensats de Bose-Einstein avec des atomes ultra-froids, la recherche dans ce domaine a connu un énorme progrès. En effet, le grand contrôle qu'on peut avoir sur le système offre une variété de branches de recherche. Par exemple, En exploitant des résonances de Feshbach, il est possible de contrôler les interactions entre les atomes [10], ce qui rend possible la condensation du rubidium 85 [11] entre autres espèces atomiques, l'étude de l'effondrement contrôlé d'un condensat en interaction attractive [12], l'étude de solutions brillantes [13] et des condensats sans interactions [14]. Le régime d'interaction forte peut rendre les condensats instables en raison des collisions inélastiques. Cependant, il peut être utilisé de manière bénéfique avec un gaz de fermions fortement corrélés. Dans ce type de gaz, les collisions inélastiques sont inhibées grâce au principe d'exclusion de Pauli. Ainsi, le régime d'interaction forte peut être exploité sans compromettre la stabilité du système [15]-[17].

Depuis la première observation des gaz de Bose dipolaires ultrasolides, l'effet de l'interaction à longue portée, qui induit de fortes corrélations dans ces systèmes, a attiré une grande attention dans les études théoriques et expérimentales [18]-[20]. Sur la base des recherches précédentes, l'approximation de diffusion s-wave néglige les détails microscopiques de l'interaction à deux particules et remplace l'interaction réelle par une interaction pseudopotentielle de contact. Pour décrire les effets de la structure microscopique du potentiel à deux corps sur les propriétés de ces systèmes, il est nécessaire de dépasser l'approximation s-wave.

Les gaz ultrafroids de particules dipolaires, qui interagissent via un potentiel dipôle-dipôle anisotrope à longue portée, ont considérablement modifié la nature des régimes quantiques dégénérés et des perspectives intéressantes pour l'observation de nouveaux phénomènes physiques [21]. Dans le système dipolaire bidimensionnel de Bose, où les dipôles bosoniques sont orientés perpendiculairement au plan de leur mouvement de translation, une transition de phase vers la condensation de Bose-Einstein (BEC) peut se

produire. De plus, en raison de la dépendance en impulsion de l'interaction dipôle-dipôle (DDI), ce système peut également présenter un spectre d'excitation roton-maxon, similaire à celui observé dans la physique de l'hélium liquide. Cette dépendance en impulsion de l'interaction DDI donne lieu à des propriétés particulières du système dipolaire de Bose bidimensionnel, offrant ainsi une riche gamme de phénomènes physiques à explorer [22]-[23]

D'autre part, en plus des interactions à deux corps, les interactions à trois corps (TBI) jouent également un rôle important dans une grande variété de phénomènes physiques intéressants et offrent une nouvelle physique par rapport aux interactions à deux corps. Les TBI sont réalisées dans un gaz de Bose ultrasolides par des méthodes expérimentales et théoriques [24]-[25]. L'interaction entre l'attraction à deux corps et la grande répulsion des TBI peut conduire à de nouveaux phénomènes dans les gaz de Bose et de Fermi faiblement interactifs [26].

Une autre orientation des études concerne les gaz piégés dans des réseaux optiques, créés par des ondes stationnaires formées avec des faisceaux très désaccordés selon une ou plusieurs directions de l'espace. Avec ce type de piège, il est possible de placer les atomes dans un potentiel périodique. Le système est alors décrit par l'hamiltonien de Bose-Hubbard [27]. Dans ce modèle, les atomes peuvent changer de site par effet tunnel. Dans un tel système, la transition entre l'état superfluide et l'état d'isolant de Mott a été mise en évidence [28]. Une découverte plus récente dans les systèmes d'atomes froids est la localisation d'Anderson [29]. Elle se produit quand le désordre est ajouté au système par l'utilisation d'un potentiel de spectre ou d'un réseau bichromatique, par exemple. Ce phénomène a été observé en dimension un [30] et trois (3D) [31]. Enfin, les récents progrès des potentiels géométriques permettent maintenant de produire sur les atomes, l'équivalent d'un champ magnétique pour des particules chargées [32]. L'ensemble de ces résultats montre que les gaz quantiques sont arrivés à une phase de maturité où ils peuvent servir de systèmes modèles à d'autres systèmes moins facilement contrôlables ou observables. L'idée de Feynman du simulateur quantique [33], système simple qui réalise un hamiltonien très difficile à calculer, et qui fournit les grandeurs d'intérêt par une simple mesure, est en passe d'être réalisée [34].

L'étude des condensats de Bose-Einstein a suscité de nombreux travaux à la fois théoriques et expérimentaux. Malgré l'abondance de résultats obtenus, ces condensats, ainsi que le comportement général des gaz à basse température, présentent des caractéristiques peu communes, et il reste encore beaucoup à découvrir. C'est pourquoi nous nous sommes intéressés à l'étude du comportement du condensat de Bose-Einstein dipolaire en deux dimensions, piégé dans un environnement désordonné, et à la manière de maintenir sa stabilité.

Ce travail est présenté comme suit :

Dans le premier chapitre nous étudions quelques propriétés de statistique quantique et le phénomène de condensation de Bose Einstein. Nous étudions aussi la condensation de Bose Einstein avec interaction, en utilisant l'équation de Gross Pitaevskii GPE. Nous rappelons ainsi les réalisations expérimentaux de la condensation. nous terminons ce chapitre par l'étude le phénomène des interaction long porté dans les condensats ce produit d'après DDI.

Nous étudions dans le second chapitre la théorie de Bogoliubov relatif à l'équation de Gross Pitaevskii GPE pour un gaz dilué à basse température. Nous calculons l'énergie de spèctre de Bogoliubov à partir de l'équation de bogliubov de Gennes. Nous allons calculer aussi la densité non-condensé à température finie. Nous nous basons à étudier ainsi la théorie de Bogliubov-Huang-Meng pour un systeme désordonné. Nous nous intéressons à étudier le potentiel de désordre avec ses propriétés statistiques

Dans le troisième chapitre nous allons étudier le comportement du condensat de Bose Einstein dipolaire dans un piège désordonné avec des interactions a trois corps, On propose des calculs analytiques et numériques pour déterminer l'énergie du spectre de Bogoliubov et la diminution du condensat de Bose-Einstein, et les quantités thermodynamiques telque que le potentiel chimique, l'énergie de désordre. Et nous étudions aussi les effets des interaction à trois corps sur la condensation de Bose Einstein dipolaire et désordonné. Nous démontrons que les interaction à trois corps jouent un role très important de stabiliter la condensations pour les systeme de 2D. De plus, elles ont été observées dans les systèmes 3D [35]

Chapitre 1

Dipolaire du condensat de Bose-Einstein

1.1 Condensat de Bose-Einstein

La condensation de Bose-Einstein est un état quantique qui se forme à des températures extrêmement basses proches du zéro absolu ($-273,15$ °C ou 0 K) [36]. Un grand nombre de particules (principalement des bosons) existent dans le même état quantique, et le concept d'un condensat de Bose-Einstein a été proposé par Albert Einstein sur la base des recherches de Satyendra Nath Bose en 1924[1]. Il a fallu cependant attendre les années 1990 pour que les scientifiques parviennent à créer un tel état en laboratoire, en refroidissant le gaz boson à de très basses températures [37].

Un condensat de Bose-Einstein possède plusieurs propriétés, notamment sa cohérence de phase, sa superfluidité et sa capacité à former des interférences.

Le comportement d'un gaz parfait quantique peut être décrit à l'aide de la mécanique quantique et d'outils mathématiques tels que la fonction d'onde, qui décrit la probabilité de trouver une particule à une position ou à un état énergétique donné. Les propriétés d'un gaz parfait quantique sont souvent étudiées à l'aide d'expériences impliquant des atomes refroidis à de très basses températures, appelés gaz atomiques très froids. Ces particules sont des bosons.

1.1.1 Statistique de Bose Einstein :

La statistique de Bose-Einstein s'applique aux systèmes quantiques décrits par des fonctions d'onde symétriques, où plusieurs particules peuvent occuper le même état quantique en même temps. Cette statistique s'applique aux systèmes de particules indiscernables ayant un spin entier, tels que les bosons.

La fonction de distribution de Bose-Einstein décrit la probabilité qu'une particule donnée se trouve dans un état quantique

L'entropie est une mesure de la quantité de désordre ou de chaos dans un système. Elle est souvent utilisée en physique, en thermodynamique et en information pour décrire la quantité d'énergie inutilisable dans un système ou la quantité d'incertitude dans un ensemble de données. L'entropie est représentée par la lettre S et est mesurée en joules par kelvin (J/K) en thermodynamique et en bits en théorie de l'information.

Nous avons un système composé d'un grand nombre de particules tel que ρ L'opérateur de densité

Si $\{|\varphi_m\rangle\}$ est une base des états à une particule et ;

$$\rho = \sum_m \rho_m |\varphi_m\rangle\langle\varphi_m| \text{ avec } \sum_m \rho_m = 1 \text{ et } \langle\varphi_m|\varphi_n\rangle = \delta_{mn} \quad (1.1)$$

À partir de là, nous écrivons l'équation d'entropie de la forme :

$$S(\rho) = -K_B \sum_m \rho_m \ln(\rho_m) \quad (1.2)$$

ρ_m : la population de l'état $|\varphi_m\rangle$

k_B : Constante de Boltzmann

Pour des particules sans interaction "gaz parfait" dont l'hamiltonien à une particule \hat{h}

$$Z_{GC} = \prod_i \zeta_i \quad (1.3)$$

avec

$$\zeta_i = \sum_i e^{-(\alpha+\beta\varepsilon_i)N_i} \quad (1.4)$$

La somme porte sur toutes les valeurs de $N_i = 1, 2, 3, 4$ On a alors

$$\zeta_i = \sum_i e^{-(\alpha+\beta\varepsilon_i)N_i} = \frac{1}{1 - e^{-(\alpha+\beta\varepsilon_i)}} \quad (1.5)$$

soit $\ln(Z_{GC} = \sum \ln \zeta_i)$ On a en particulier $N = -\sum_i \left(\frac{\partial \ln \zeta_i}{\partial \alpha} \right)_{\beta v} = \sum_i n_i$ avec $n_i = \left(\frac{\partial \ln \zeta_i}{\partial \alpha} \right)_{\beta v}$ est le nombre d'occupation moyen de l'état i d'énergie ε_i

On peut le déduire

$$\dot{n}_i = \frac{e^{-(\alpha+\beta\varepsilon_i)}}{1 - e^{-(\alpha+\beta\varepsilon_i)}} = \frac{1}{e^{-\beta(-\mu+\varepsilon_i)} - 1} \quad (1.6)$$

Où $\alpha = -\beta\mu$ avec $\beta = \frac{1}{k_B T}$ et μ : Le potentiel chimique

Le potentiel chimique appartient au domaine $[-\infty, \varepsilon_{\min}]$ où ε_{\min} représente l'énergie du niveau fondamental de \hat{h} , pour un potentiel chimique supérieur à cette valeur, la population de ce niveau fondamental deviendrait négative, ce qui n'a aucun sens. Comme pour le gaz de Fermi, les valeurs grandes et négative de μ correspondent à un gaz bien décrit par la physique classique (distribution de Boltzman)

$$\mu \rightarrow -\infty$$

$$\dot{n}_i \simeq z e^{-\beta\varepsilon_i} \quad (1.7)$$

Lorsque la condition $\mu \rightarrow \varepsilon_0$ est remplie et que le nombre de particules est une valeur finie dans le système, il est pris à la valeur la plus basse.

La valeur des particules est donnée par la relation suivante :

$$\dot{n}_i = \frac{1}{e^{-\beta(\varepsilon_i+\varepsilon_0)} - 1} \quad (1.8)$$

1.1.2 La température du condensat de Bose Einstein

A la limite thermodynamique, il est possible de définir la température critique T_c pour laquelle le phénomène de condensation se produit dans un gaz idéal. Dans un piège harmonique V_{ext} , cette température critique de condensation est égale

$$k_B T_c = \hbar \omega \left(\frac{N}{1.202} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (1.9)$$

avec $\omega = (\omega_x \omega_y \omega_z)^{\frac{1}{3}}$ et N le nombre d'atomes du gaz. Le nombre d'atomes condensés N_0 occupant macroscopiquement l'état fondamental du système, suit l'équation

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^3 \quad (1.10)$$

La figure 1.1 présente plusieurs images d'un nuage d'atome de Rubidium refroidi à une température supérieure puis inférieure à la température critique de condensation T_c .

La transition de phase vers la phase condensée apparaît lorsqu'une partie centrale du nuage devient très dense. La transition de phase vers la phase condensée apparaît lorsque une partie centrale du nuage devient très dense. La dernière image correspond à celle d'un condensat de Bose presque pur ($T = 0, 2T_c$)

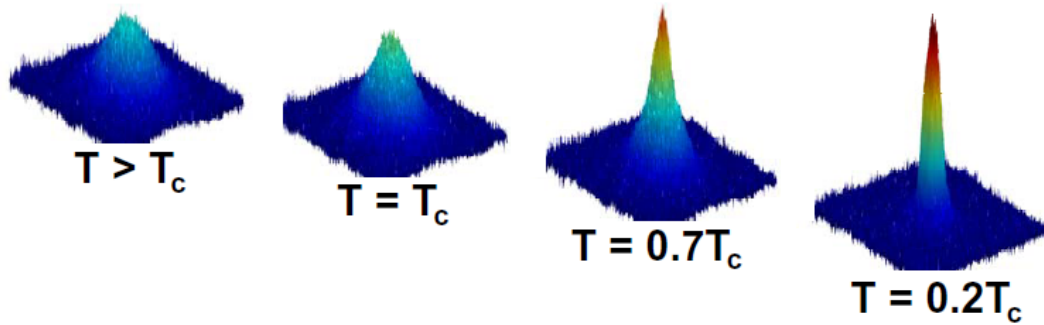


FIG. 1-1 – Les images d'absorption montrent un gaz d'atomes de rubidium lors de la transition de phase vers la condensation. [38].

1.2 Condensat de Bose Einstein et l'équation de Gross-Pitaevskii

1.2.1 Généralisée de l'équation de Gross-Pitaevskii

L'équation de Gross-Pitaevskii (GP) est une équation de Schrödinger non-linéaire (Gross 1961 ; Pitaevskii 1961), qui régit l'état et la dynamique d'un gaz de bosons ultra-froids (condensat de Bose-Einstein) sous l'approximation d'Hartree Fock. Sa forme indépendante du temps s'écrit [39] :

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V_{ext}(\vec{r}) + g|\Phi(r)|^2 \right) \phi(r) = \mu\phi(r). \quad (1.11)$$

1.2.2 Obtention de l'équation de Gross-Pitaevskii

Nous considérons un gaz dilué de N bosons ultra-froids dans un potentiel de confinement $V_{ext}(\vec{r})$, interagissant entre eux via un potentiel ne dépendant que de la distance entre 2 bosons $V(\vec{r}, \vec{r}')$. L'hamiltonien canonique du système peut être écrit sous la forme :

$$H = \int d\vec{r} \hat{\psi}^\dagger(\vec{r}, t) h^{sp} \hat{\psi}(\vec{r}, t) + \frac{1}{2} \int \int d\vec{r} d\vec{r}' \hat{\psi}^\dagger(\vec{r}, t) \hat{\psi}^\dagger(\vec{r}', t) V(\vec{r}, \vec{r}') \hat{\psi}(\vec{r}', t) \hat{\psi}(\vec{r}, t), \quad (1.12)$$

avec $h^{sp} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V_{ext}(\vec{r})$ est l'hamiltonien à une particule. Et $\hat{\psi}^\dagger(\vec{r})$ et $\hat{\psi}(\vec{r})$ sont les opérateurs de champ de création et d'annihilation satisfaisant les relations de commutation habituelles,

$$\left[\hat{\psi}(\vec{r}), \hat{\psi}(\vec{r}') \right] = 0 \quad \text{et} \quad \left[\hat{\psi}(\vec{r}), \hat{\psi}^\dagger(\vec{r}') \right] = \delta(\vec{r}, \vec{r}').$$

L'hamiltonien(1.12) est le point de départ de tous les traitements théoriques des gaz de Bose dilués et comprend les fluctuations thermiques et quantiques. Toutes les théories

figurant dans la littérature découlent d'approximations distinctes pour cet hamiltonien. Pour les gaz dilués à très basse température, la procédure habituelle consiste à établir une approximation de l'interaction de contact [40] :

$$V(\vec{r}, \vec{r}') = g\delta(\vec{r} - \vec{r}'). \quad (1.13)$$

avec $g = 4\pi\hbar^2 a/m$ est la constante de couplage de deux corps interagissants, où a est la longueur de diffusion de l'onde, qui peut être déterminée à partir d'expériences.

l'Hamiltonien du système devient.

$$\begin{aligned} H = & \int d\vec{r} \hat{\psi}^\dagger(\vec{r}, t) h^{sp} \hat{\psi}(\vec{r}, t) \\ & + \frac{g}{2} \int d\vec{r} \hat{\psi}^\dagger(\vec{r}, t) \hat{\psi}^\dagger(\vec{r}, t) \hat{\psi}(\vec{r}, t) \hat{\psi}(\vec{r}, t). \end{aligned} \quad (1.14)$$

Il faut écrire l'évolution temporelle de l'opérateur de champ $\hat{\psi}(r, t)$ en utilisant l'équation de Heisenberg.

$$i\hbar \frac{d}{dt} \hat{\psi}(\vec{r}, t) = [\hat{\psi}(\vec{r}, t), \hat{H}]. \quad (1.15)$$

Pour l'hamiltonien (1.14), cela fait évoluer l'équation du mouvement.

$$i\hbar \frac{d}{dt} \hat{\psi}(\vec{r}, t) = h^{sp} \hat{\psi}(\vec{r}, t) + g \hat{\psi}^\dagger(\vec{r}, t) \hat{\psi}(\vec{r}, t) \hat{\psi}(\vec{r}, t). \quad (1.16)$$

Pour extraire des informations de cette équation, il convient de séparer la contribution du condensat, qui correspond à l'occupation macroscopique. d'un seul état quantique, à partir de la partie restante de l'opérateur de champ Bose, composé de deux parties.

$$\hat{\psi}(\vec{r}, t) = \phi(\vec{r}, t) + \delta\hat{\psi}(\vec{r}, t). \quad (1.17)$$

Correspondant respectivement à un opérateur de champ pour le condensat, et un pour les atomes non condensés, $\delta\hat{\psi}(\vec{r}, t)$. Celles-ci pourraient correspondre à des atomes

excités thermiquement, à des fluctuations de la mécanique quantique ou à des atomes excités dans des états d'énergie plus élevés en raison d'interactions. Il est important de noter à ce niveau que le condensat est décrit par une fonction classique et non par un opérateur de champ. Cette approximation est bien justifiée puisque l'état fondamental est occupé macroscopiquement.

En remplaçant (1.17) dans l'équation (1.16) et on prend le zéro ordre de l'équation résultante, on trouve l'équation (1.11). avec $\phi(\vec{r}, t) = \phi(r)e^{-\frac{i\mu}{\hbar}t}$, où $\phi(r)$ est la fonction d'onde à une particule.

1.3 Réalisations expérimentales du condensat de BE

On peut commencer ici par rappeler les "doutes existentiels" d'Einstein. En effet, Einstein, pris de doute, écrivit à son ami Ehrenfest à propos de la condensation de Bose-Einstein :

"Cette théorie est belle mais contient-elle une vérité?[46]".

Nous ne ferons pas ici un long catalogue de résultats expérimentaux, nous nous contenterons simplement de montrer quelques résultats qui répondent par l'affirmative à la question d'Einstein. Nous allons commencer par montrer l'une des premières et plus célèbres images d'un condensat obtenu par Anderson et al en 1995 [5] .

La réalisation expérimentale des condensats a été possible grâce au développement des techniques de refroidissement d'atomes par laser. Les très basses températures obtenues ont permis d'atteindre le régime de condensation pour des gaz suffisamment dilués pour que les interactions ne masquent pas le phénomène de condensation. En 1995, une équipe du laboratoire NIST/JILA (Boulder, Colorado, États-Unis), dirigée par Eric Cornell et Carl Wieman, est parvenue à obtenir pendant quelques secondes un condensat de Bose-Einstein[46]. Il était constitué de quelques milliers d'atomes de rubidium prérefroidis par laser, puis refroidis davantage par "évaporation" dans un piège magnétique. La température du gaz était alors de l'ordre de 100 nK. Un autre chercheur Wolfgang Ketterle étudie également, de son côté, "le refroidissement par laser et le piégeage des atomes froids" ainsi que la superfluidité dans les gaz à « basse température ». Il réalise avec son équipe

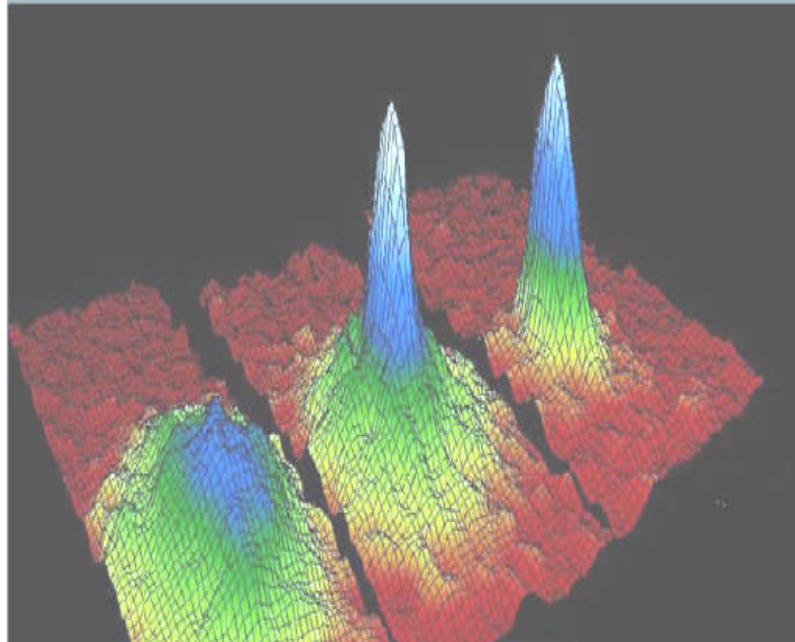


FIG. 1-2 – Cette image représente la densité atomique de rubidium dans les expériences d'Anderson, prise en coupant le piège et en laissant s'étendre le condensât. L'image de gauche correspond à un gaz juste au-dessus de la température critique, celle du milieu, juste après l'apparition du condensat et celle de droite au condensat quasi pur. La taille de l'image est de $200\mu m_270\mu m$ et correspond à une situation où les atomes se sont déplacés pendant un temps de $1/20s$.

la condensation de Bose Einstein pour des atomes de sodium[46]. Ces trois chercheurs (Wieman, Cornell et Ketterle), recevront en 2001, le prix Nobel de physique "pour la découverte de la condensation de Bose-Einstein dans les gaz et pour des avancées dans l'étude des propriétés de ces condensats". Ainsi, aujourd'hui, on sait que la théorie de la condensation de Bose Einstein est importante car elle a permis, après l'obtention de très basses températures (grande utilité dans les horloges atomiques) de réaliser expérimentalement des condensats. Une des applications futures de ces condensats est la réalisation de lasers atomiques, qui sont supposés avoir un impact important dans l'industrie, à l'image de la place qu'occupe actuellement le laser photonique.

1.4 Interaction dipôle-dipôle

Les progrès dans le refroidissement et le piégeage des molécules polaires ont donné lieu à l'étude des gaz dipolaires [41]. La première réalisation expérimentale réussie dans cette direction a été, en raison de son grand moment dipolaire magnétique [42], le condensat de Bose-Einstein du chrome (^{52}Cr) en 2005. Une avancée majeure a été réalisée en utilisant une combinaison de techniques de piégeage magnéto-optique [43] et avec une méthode optique entièrement différente en 2008 [44]. Récemment, des condensats d'erbium (^{168}Er) [9] et de dysprosium (^{164}Dy) [45] ont été observés, présentant des moments dipolaires plus importants. L'interaction dipolaire a introduit des caractéristiques spectaculaires grâce à son caractère anisotrope et à longue portée, tandis que son homologue de contact est isotrope et à courte portée. L'anisotropie et le caractère à longue portée de l'interaction dipolaire permettent de contrôler les interactions entre les particules en ajustant le champ externe à l'aide de résonances de Feshbach ou en réajustant l'anisotropie du piège.

Contrairement aux interactions de contact, le signe et la force de l'interaction dipolaire dépendent fortement de la géométrie du piège. L'avènement des gaz dipolaires quantiques dégénérés ouvre la porte à un large éventail d'explorations scientifiques. Les mesures de précision, les réactions chimiques contrôlées quantiquement et les nouvelles phases de la matière sont parmi quelques exemples remarquables fournis par un gaz ultrafroid de molécules polaires.

Dans cette section, nous examinons les interactions à deux corps dans un condensat dipolaire de Bose-Einstein (BEC). Nous introduisons les interactions entre deux dipôles qui, contrairement aux interactions considérées dans la sous-section précédente, ne peuvent pas être décrites par le potentiel d'interaction de pseudo-contact en raison de la nature à longue portée du potentiel d'interaction dipôle-dipôle (DDI). Le potentiel DDI prend la forme suivante :

$$V_b(r - \hat{r}) = \frac{\mu_0 \mu_m (1 - 3 \cos^2 \theta)}{4\pi |r - \hat{r}|^3} \quad (1.18)$$

avec .

μ_m :est le moment dipolaire magnétique permanent.

θ :est l'angle entre la direction de polarisation et le rapport position des dipôles r

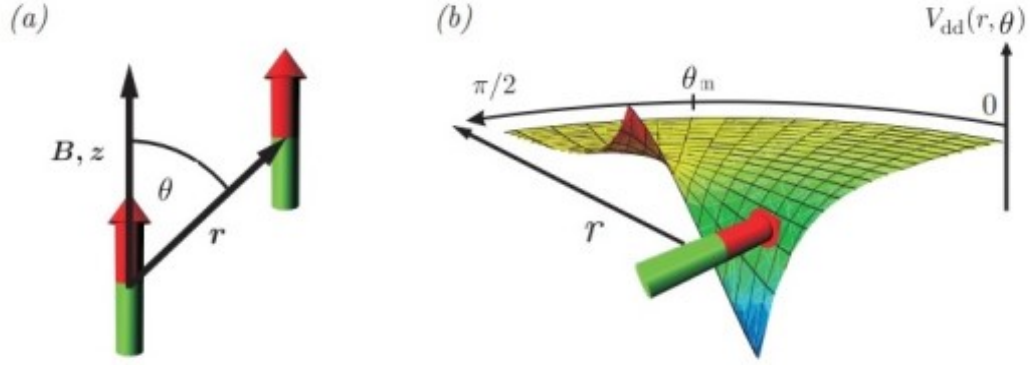


FIG. 1-3 – Interaction dipôle-dipôle (DDI) : (a) Deux dipôles polarisés par un champ magnétique externe B le long de la direction z . La séparation $r = |r|$ et l'angle θ entrent dans le potentiel DDI donné par l'équation 1.18. (b) L'interaction entre deux dipôles est attractive dans une configuration tête-bêche ($\theta = 0$), répulsive dans une configuration côte-à-côte ($\theta = \pi/2$), et elle s'annule à l'angle magique $\theta = \theta_m$. [46]

où

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Tm}{A}$ est la perméabilité dans l'espace libre

θ est l'angle entre la direction de polarisation et la position relative des dipôles r comme illustré dans la Figure. 1.3 (a).

Nous considérons le cas où $r > 0$, ce qui est important car V_d diverge lorsque r tend vers zéro.

Comme mentionné précédemment, l'interaction dipolaire peut être caractérisée soit par un moment dipolaire électrique, soit par un moment dipolaire magnétique. Ces deux types d'interactions présentent des propriétés fondamentalement différentes par rapport aux interactions de contact

L'interaction dipolaire présente une anisotropie qui peut entraîner une attraction ou une répulsion selon l'orientation relative des deux dipôles. Les particules côte à côte interagissent par un DDI répulsif, comme illustré dans la figure 1.3, tandis qu'une configuration tête-bêche correspond à une configuration attractive, également illustrée dans la figure 1.3. À une valeur spécifique de $\theta = \arccos(1/\sqrt{3}) \approx 54.7$ de l'angle magique, l'interaction dipôle-dipôle disparaît. Cette interaction anisotrope conduit à une série de

phénomènes intéressants même en physique classique, un exemple fascinant étant l'instabilité de Rosensweig. Pour les gaz quantiques dipolaires, L'interaction dipôle-dipôle (DDI) est étroitement liée à l'observation d'un spectre maxon-roton et à la stabilité du système.

Globalement, le cas où $r > 0$ est un aspect crucial de l'étude des gaz dipolaires, et il est essentiel de considérer cette condition lors de l'analyse du comportement de ces systèmes. Ce faisant, les chercheurs peuvent mieux comprendre les propriétés uniques des gaz dipolaires et développer de nouvelles techniques pour manipuler ces systèmes.

les interactions dipolaires entre particules possèdent deux propriétés importantes : la nature à longue portée et une forte anisotropie. Ces propriétés conduisent à des comportements uniques tels que la formation d'un ordre à longue distance et de cristaux dipolaires avec des orientations de réseau spécifiques. L'anisotropie de l'interaction dipolaire provoque également l'alignement des dipôles dans un champ extérieur.

Le pseudo-potentiel complet décrivant le contact binaire et les interactions dipolaires se lit :

$$V(r - r') = g\delta(r) + \frac{\mu_0 \mu_m^2}{4\pi} \frac{1 - 3 \cos^2 \theta}{|r - r'|^3} \quad (1.19)$$

Pour décrire les BEC dipolaires, nous définissons maintenant quelques paramètres clés. Par analogie avec la longueur de diffusion a , on définit une longueur dipolaire caractéristique :

$$r^* = \frac{\mu_0 \mu_m^2 m}{4\pi 3\hbar^2} \quad (1.20)$$

La force de couplage dipolaire est une interaction électromagnétique entre deux dipôles électriques ou magnétiques. Cette force peut être attractive ou répulsive en fonction de l'orientation relative des dipôles. Elle est due à l'interaction entre les charges électriques positives et négatives des dipôles électriques ou entre les pôles nord et sud des dipôles magnétiques. Cette force est importante dans de nombreuses applications en chimie et en physique car elle peut affecter la structure, la stabilité et les propriétés des molécules, des cristaux et des matériaux magnétiques. Elle est également essentielle dans les interactions entre les molécules et les champs électromagnétiques, qui ont des applications en spec-

troscopie, en imagerie médicale et en télécommunications. Elle est donnée par la relation suivante :

$$g_{dd} = \frac{4\pi\hbar^2}{m} = \frac{\mu_0\mu_m^2}{3} \quad (1.21)$$

Il est crucial de noter que l'échelle de longueur dipolaire, représentée par r_μ , ne correspond pas à une distance d'interaction définie pour les interactions dipolaires. En d'autres termes, l'interaction entre particules à moments dipolaires ne s'annule pas brutalement au-delà d'une certaine distance, comme c'est le cas pour les interactions de contact.

Pour caractériser davantage la force des interactions dipolaires, nous définissons la force relative comme le rapport de la force de couplage dipolaire à la force de couplage de contact. Ceci fournit une mesure quantitative de l'importance des interactions dipolaires dans un système donné. Dans de nombreux cas, la force relative des interactions dipolaires peut être ajustée en ajustant la distance entre les particules ou la force d'un champ externe appliqué.

Dans l'ensemble, la compréhension de la force et de la gamme des interactions dipolaires est cruciale pour prédire et contrôler le comportement des systèmes dipolaires, qui ont un large éventail d'applications potentielles dans divers domaines de la physique et de l'ingénierie.

$$\varepsilon_{dd} = \frac{g_{dd}}{g} = \frac{r^*}{a} = \frac{\mu_0\mu_m^2}{4\pi} \frac{m}{3\hbar^2} \quad (1.22)$$

Species	$a_s(a_0)$	$\mu_m(\mu_B)$	$a_{dd}(a_0)$	ε_{dd}	References
⁸⁷ Rb	100.4(1)	1	0.7	0.007	[147]
⁵² Cr	102.5(4)	6	15.1	0.15	[148]
¹⁶² Dy	122(10)	9.93	129.2	1.06	[149]
¹⁶⁴ Dy	92(8)	9.93	130.8	1.42	[149, 150]
¹⁶⁶ Er	72(13)	6.98	65.5	0.91	[151]
¹⁶⁸ Er	137(1)	6.98	66.2	0.48	[152]
¹⁷⁰ Er	-221(22)	6.98	67.0	-0.3	[151]

Tableau 1.1 : Les forces dipolaires sont représentées par des teintes de gris indique une force plus forte. Les longueurs sont présentées ici en unités du rayon de Bohr, $a_0 = 5,3 \times 10^{-10}$ m. [46]

L'interaction dipolaire doit être au moins aussi forte que l'interaction de contact, produisant $\varepsilon_{dd} \geq 1$, pour qu'un BEC soit dominé par des effets dipolaires. Le caractère anisotrope de DDI est évident à partir de la dépendance angulaire dans l'équation 1.22.

Nous fournissons ces valeurs pour tous les isotopes bosoniques qui ont été produits expérimentalement jusqu'à présent dans le tableau 1.1. Ce tableau inclut le rubidium, dont la valeur de $\varepsilon_{dd} = 0,007$ indique qu'il est prudent d'ignorer les interactions dipolaires lors de la modélisation de cette espèce. Les seules espèces qui sont principalement dipolaires sont les isotopes du dysprosium, bien que l'on puisse entrer dans ce régime en raccourcissant la longueur de diffusion de ^{166}Er , comme ce fut le cas avec ^{52}Cr [46]. Ici, il est important de noter que la valeur correspondante pour dd des dimères alcalins dépasse celle du tableau 1.1 d'au moins un ordre de grandeur. Par exemple, la molécule KRb a une valeur ε_{dd} de 37, alors que NaRb a une valeur ε_{dd} de 229 [46].

Chapitre 2

La théorie de Bogliubov-Huang-Meng

2.1 Théorie de Bogoliubov

En 1947, Bogoliubov a montré comment la présence du condensat influence les propriétés du gaz dilué de Bose, ce qui conduit à l'équation de Gross Pitaevskii pour la dynamique du condensat à température nulle. dans ce chapitre nous allons montrer comment cela s'étend au cas d'une température non nulle, lorsque le condensat persiste.

2.2 L'équations de Bogoliubov de Gennes

Dans cette section, nous abordons les solutions de l'équation de GGP en utilisant les équations de Bogoliubov-de-Gennes (BdGE) pour décrire les excitations de quasi-particules. Cette approche alternative met en évidence une caractéristique générale des gaz ultra-froids de Bose, à savoir que les spectres d'excitation élémentaire et de mode collectif sont identiques lorsqu'on linéarise autour de la valeur d'équilibre statique de la fonction d'onde de condensat tout en la maintenant fixe.

$$\Phi(r,t) = e^{-\frac{i\mu t}{\hbar}} [\Phi(r) + \delta\Phi(r,t)] \quad (2.1)$$

avec $\delta\Phi \ll 0$

En introduisant la transformation 2.1 en 1.16, on obtient pour 1^{er} ordre de l'équation retrouvée .:

$$i\hbar \frac{d}{dt} \delta\Phi(r,t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V_{ext}(r) + 2gn + \mu \right] \delta\Phi(r,t) + g\Phi^2 \delta\Phi^*(r,t) \quad (2.2)$$

Utilisons cette transformation ;

$$\delta\Phi(r,t) = u_k(r)e^{-i\omega_k t} - v_k(r)e^{i\omega_k t} : \quad (2.3)$$

nous trouvons deux BdGE couplés pour les amplitudes u_k et v_k

$$\begin{pmatrix} F & T \\ -T & -F \end{pmatrix} \begin{bmatrix} u_k(r) \\ v_k(r) \end{bmatrix} = \varepsilon_k \begin{bmatrix} u_k(r) \\ v_k(r) \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Cette équation s'appelle equation de Bogoliubove de Gennes de gaz dilué avec

$$F = \frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V_{ext}(r) + 2gn - \mu \quad (2.5)$$

et

$$T = g(\Phi^2 + F) \quad (2.6)$$

$\varepsilon_k = \hbar\omega_k$:est une énergie de spectre de Bogoliubov.

Des solutions numériques ont été obtenues pour les équations 2.5 avec différents potentiels de piège [47], et les fréquences d'oscillation observées correspondent bien aux valeurs propres d'énergie prédites ε_k .

doù :

$n_c = |\Phi|^2$ est la densité totale du système.

$\mu = n_c g$:st le potentielle chimique on applique ce formalisme dans un gaz de Bose uniforme c'est-dire $v_{ext}(r) = 0$.

On peut choisir des ondes planes car le gaz boson est homogène.

$$u(r) = u_k e^{ikr} \quad (2.7)$$

$$v(r) = v_k e^{ikr} \quad (2.8)$$

En remplaçant (2.12) en (2.11), on obtient respectivement le spectre de Bogoliubov et les amplitudes de quasiparticules [48].

$$\varepsilon_k = [(E_k + 2n_c g - \mu)^2 + g^2 n_c^2]^{\frac{1}{2}} \quad (2.9)$$

$$u_k^2 v_k^2 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{E_k + n_c g}{\varepsilon_c}} \quad (2.10)$$

ou $E_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ est l'énergie de particule libre suppose que $n_c \ll 1$ on a alors.

$$\varepsilon_k = \sqrt{(E_k)^2 + 2n_c g E_k} : \quad (2.11)$$

La forme de dispersion linéaire de type phonon est une bonne approximation de la loi de dispersion de Bogoliubov pour des petits moments $k \ll mc_s$. Cela signifie que pour des vecteurs d'onde proches de zéro, la relation entre l'énergie et le vecteur d'onde d'une excitation élémentaire (quasiparticule) dans un système de Bose-Einstein condensé peut être décrite de manière linéaire et proportionnelle à la vitesse du son dans le condensat. Cette simplification est due au fait que les fluctuations du condensat sont faibles pour des petits moments k . Pour des vecteurs d'onde plus grands, la loi de dispersion de Bogoliubov doit être utilisée dans sa forme complète pour décrire la relation entre l'énergie et le vecteur d'onde de l'excitation élémentaire.

$$\varepsilon_k = \hbar c_s k \quad (2.12)$$

avec : $c_s = \sqrt{\frac{gn_c}{m}}$ est la vitesse du son. Dans la limite opposée $k \gg mc_s$ la loi de dispersion de Bogoliubov (2.15) se réduit la forme de free particule $\varepsilon_k \approx E_k$ La transition du régime des phonons au régime des particules libres a peut conduire a $\frac{\hbar^2 k^2}{2m} = n_c g$ Si

nous utilisons $K = \frac{1}{\varsigma}$

avec $\varsigma = \frac{\hbar}{\sqrt{2gn_cm}}$ ou est appelée la longueur de relaxation (healing length). La densité non condensées peut être obtenue par les transformations homogènes de Bogoliubov suivantes [49] :

$$\hat{\Psi} = \sum_k u_k b_k \exp(i\vec{k}\vec{r}) - u_k b_k^+(-i\vec{k}\vec{r}) \quad (2.13)$$

$$\hat{\Psi}^+ = \sum_k u_k b_k^+ e^{(-i\vec{k}\vec{r})} - u_k b_k(i\vec{k}\vec{r}) \quad (2.14)$$

en utilisant les propriétés suivantes :

$$\langle \hat{b}_k^+ \hat{b}_k \rangle = N_k = F_{BE} = \frac{1}{e^{\frac{\epsilon_k}{T}} - 1} \quad (2.15)$$

$$\langle \hat{b}_k^+ \hat{b}_k^+ \rangle = \langle \hat{b}_k \hat{b}_k \rangle = 0 \quad (2.16)$$

$$\langle \hat{b}_k \hat{b}_k^+ \rangle = 1 + N_k = \coth\left(\frac{\epsilon_k}{2T}\right) \quad (2.17)$$

Nous remplaçons 2.12 et 2.13 dans les dénitions de n , on obtient :

$$\tilde{n} = \langle \hat{\Psi}^+ \hat{\Psi} \rangle = \sum_k v_k^2 + (u_k^2 + v_k^2) N_k \quad (2.18)$$

dans la limite thermodynamique ou on peut remplacer la somme sur k par une intègre $\sum k = \int \frac{\partial^3 k}{(2\pi)^3}$, Donc la densites non condensées peut s'écrire

$$\tilde{n}_0 = \frac{1}{2} \int \frac{\partial k}{(2\pi)^3} \left[\frac{E_K + n_c g}{\epsilon_k} - 1 \right] = \frac{8}{3} n_c \left(\frac{n_c a^3}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.19)$$

Le second terme représente la fluctuation thermique notée par

$$\tilde{n}_T = \frac{1}{2} \int \frac{\partial k}{(2\pi)^3} \frac{E_K + n_c g}{\epsilon_k} \left[\coth\left(\frac{\epsilon_k}{2T}\right) - 1 \right] \quad (2.20)$$

À basse température, la quantité de moment est faible lorsque k tend vers zéro, c'est-à-dire que k au carré tend vers zéro. De plus, l'énergie du spectre de Bogoliubov devient

proportionnelle à la vitesse de phase $\varepsilon_k = \hbar c_s k$ lorsque k tend vers zéro. Pour calculer cette énergie, nous utilisons l'intégrale suivante

$$\int x^{2j-1} [\coth(x) - 1] \partial x = \frac{\pi^{2j} |B_{2j}|}{2j\alpha^{2j}} \quad (2.21)$$

On trouve

$$\tilde{n}_T = \frac{2}{3} n \left(\frac{n_c a^3}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\pi T^2}{ng} \right)^2 \quad (2.22)$$

2.3 Excitations de Bogoliubov :

Prenons un gaz composé de bosons en interaction qui occupe un volume v et une dimension d , et l'expression hamiltonienne est donnée par la relation suivante [49] :

$$\hat{H} = \sum_k \frac{\hbar^2 k^2}{2m} a_k^+ a_k + \sum_{kpq} \frac{1}{2L^d} f(p) \tilde{a}_{k+p}^+ \tilde{a}_{q-p}^+ \tilde{a}_q \tilde{a}_k \quad (2.23)$$

et

$$[\tilde{a}_k \tilde{a}_{k'}^+] = \delta_{kk'} \quad (2.24)$$

$$\tilde{a}_k^+ \tilde{a}_{k'}^+ = \tilde{a}_k \tilde{a}_{k'} = 0 \quad (2.25)$$

Dans l'hamiltonien décrit par (2.23) , le premier terme de la partie mono-particule correspond à l'énergie cinétique des particules et le deuxième terme décrit l'hamiltonien d'interaction à deux corps de la force dipolaire.

Selon l'idée de Bogoliubov, le nombre moyen de particules dans le condensat de Bose N_c à l'état $K = 0$ est proche du nombre total de particules dans le gaz N et les opérateurs à moment nul a_0^+ et a_0 opérant sur l'état fondamental obéissent aux relations.

$$\tilde{a}_0^+ |N_c\rangle = \sqrt{N_c} |N_c - 1\rangle \quad (2.26)$$

et

$$|\tilde{a}_0\rangle = \sqrt{N_c + 1} |N_c + 1\rangle \quad (2.27)$$

pour $N_C \gg 1$ c'est possible d'écrire $\sqrt{N_c + 1} \approx \sqrt{N_C}$ de remplacer chacun des opérateurs \tilde{a}_0^+ et \tilde{a}_0 par le nombre $\sqrt{N_C}$ qui conduit à $[\tilde{a}_0; \tilde{a}_0^+] = 0$ L'application de la théorie des perturbations signifie que :

qu'il est nécessaire de décomposer le dernier terme de l'équation 2.23 en termes de puissances des petites quantités \tilde{a}_k^+ et \tilde{a}_k , avec K différent de 0. Ainsi, l'hamiltonien (2.23) peut être divisé en trois parties distinctes en fonction du nombre d'opérateurs \tilde{a}_k^+ et \tilde{a}_k présents dans les produits :

$$\hat{H} = \sum_{n=0}^2 H^{(n)} \quad (2.28)$$

Le terme d'ordre zéro ne contient pas de petite quantité ou de terme linéaire en a_k^+ et a_k . Cela signifie que le terme d'ordre zéro ne dépend pas des fluctuations quantiques et peut être considéré comme la contribution classique à l'hamiltonien. En d'autres termes, il représente l'énergie du système dans l'état fondamental ou l'état classique. Les termes d'ordre supérieur, en revanche, incluent des contributions quantiques dues aux fluctuations des opérateurs a_k^+ et a_k .

$$H^{(0)} = \frac{1}{2V} \tilde{a}_0^+ a_0^+ a_0 a_0 \tilde{V}(0) \quad (2.29)$$

En utilisant de la relation de normalisation :

$$a_0^+ a_0 = N_c = N - \sum_{k \neq 0} \tilde{a}_0^+ \tilde{a}_0 \implies (a_0^+ a_0)^2 = N^2 - 2N \sum_{k \neq 0} \tilde{a}_0^+ \tilde{a}_0 \quad (2.30)$$

L'hamiltonien de 2.29 devient :

$$H^0 = \frac{1}{2} n N V(0) - n V(0) \sum_{k \neq 0} \tilde{a}_k^+ \tilde{a}_k \quad (2.31)$$

Le terme du premier d'ordre est zero

$$H = 0 \quad (2.32)$$

Le terme de second ordre est donné par

$$H^2 = \sum_{k \neq 0} \left[E_k + n_c \tilde{V}(k) + n_c \tilde{V}(0) \right] \tilde{a}_k^+ \tilde{a}_k + \frac{1}{2} n_c \sum_{k \neq 0} \tilde{V}(k) \left[\tilde{a}_{-k} \tilde{a}_k + \tilde{a}_k^+ \tilde{a}_{-k}^+ \right] \quad (2.33)$$

La densité des atomes condensés $(n)_c = \frac{N_c}{V}$ est utilisée ici avec la conservation de l'impulsion $k = -k$.

Ces composants ont une interprétation physique :

- $V(0)\hat{a}_k^+\hat{a}_k$ représente l'énergie de Hartree qui résulte de l'interaction directe entre une particule à l'état k et N_c atomes dans le condensat.

- $V(k)a_k^+a_k$ est le terme d'échange, également connu sous le nom de terme de Fock, dans lequel un atome à l'état k est dispersé dans l'état d'impulsion nulle, tandis que dans l'autre sens, un atome est dispersé du condensat à l'état k . Notez que l'interaction de contact dissimule la présence des contributions directes et d'échanges.

- $V(k) [a_{-k}a_k + a_k^+a_{-k}^+]$ représente la diffusion de deux atomes dans le condensat vers des états avec une impulsion k en sens inverse.

L'approche de Bogliubov suppose que l'épuisement est faible, c'est-à-dire que N_c est proche de N ou que n_c est proche de n , et ne prend en compte que les termes du second ordre H^2 pour l'interaction. En sommant (2.30) avec (2.33) , l'hamiltonien (2.23) peut être réduit à un terme quadratique en termes d'opérateurs a_k^+ et a_k

:

$$H = \frac{1}{2} n N \tilde{V}(0) + \sum_{k \neq 0} \left[E_k + n_c \tilde{V}(k) \tilde{a}_k^+ \tilde{a}_k + \frac{1}{2} n V(k) (\tilde{a}_{-k} \tilde{a}_k + \tilde{a}_k^+ \tilde{a}_{-k}^+) \right] \quad (2.34)$$

Afin de calculer les niveaux d'énergie du système, il faut diagonaliser le hamiltonien (2.23) . cela peut être fait en utilisant les transformations canoniques de Bogliubov

$$\tilde{a}_k^+ = u_k \tilde{b}_k^+ - v_k \tilde{b}_{-k} \quad (2.35)$$

$$\tilde{a}_k = u_k \tilde{b}_k - v_k \tilde{b}_k^+ \quad (2.36)$$

Où $(\tilde{b})_k^+$ et $(\tilde{b})_k$ sont des opérateurs d'excitations élémentaires qui doivent satisfaire les meme règles de commutation que les opérateurs $(\tilde{a})_k^+$ et $(\tilde{a})_k$.

$$[\tilde{b}_k \tilde{b}_{k'}^+] = \delta_{kk'} \text{ et } [\tilde{b}_k \tilde{b}_{k'}] = 0 \quad (2.37)$$

Les règles de commutation de (2.37) montrent que les coefficients doivent satisfaire la condition : $u_k^2 - v_k^2 = 1$. Mettre à zéro le coefficient du terme proportionnel à $\tilde{b}_k \tilde{b}_k$ ou $\tilde{b}_k^+ \tilde{b}_k^+$. on obtient pour les fonctions de bogliubov :

$$u_k; v_k$$

2.4 La théorie de Bogliubov-Huang-Meng

Huang et Meng ont développé la théorie de Bogoliubov des gaz de Bose ultrafroids dans des potentiels aléatoires en 1992 afin d'étudier les caractéristiques du soi-disant problème du boson sale. Ici, nous examinons les gaz de Bose dipolaires désordonnés à température limitée dans les deux géométries $2D$ en utilisant la théorie de Bogoliubov-Huang-Meng [50]. Nous sommes capables de dépasser le problème GP à température nulle résolu par une technique perturbative grâce à cette théorie [51, 53]. Contrairement à l'équation GP avec traitement perturbatif, cette extension fournit des informations approfondies sur l'interaction entre les fluctuations thermiques et les effets de désordre dans l'anisotropie de la superfluidité. Nous prenons en compte l'impact d'un champ aléatoire externe sur un gaz de Bose dipolaire $3D$ dilué avec des dipôles parallèles au plan.

avec des dipôles orientés perpendiculairement au plan. Écrivons l'hamiltonien (2.23) sous la forme :

$$\hat{H} = \sum_k \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \tilde{a}_k^+ \tilde{a}_k + \frac{1}{V} \sum_{k,p} U_{k-p} \tilde{a}_k^+ \tilde{a}_p + \frac{1}{2V} \sum_{k,q,p} \tilde{a}_{k+q}^+ \tilde{a}_{k-q}^+ \tilde{a}_{k+q} \tilde{a}_{k-q} \quad (2.38)$$

où nous avons inclus le potentiel externe U , V est un volume de quantification et le

potentiel d'interaction dans l'espace des impulsions est donné par [54]

$$V(k) = g[1 + \varepsilon_{dd}(3\cos^2\theta_k - 1)] \quad (2.39)$$

ici $\varepsilon_{dd} = \frac{C_{dd}}{3g}$ est la force relative sans dimension qui décrit l'interaction entre la DDI et l'interaction à courte portée.

En supposant le régime d'interaction faible où $r_* \ll \xi$ avec $\xi = \hbar\sqrt{mg\bar{n}}$ étant la longueur de guérison et n étant la densité totale, nous pouvons utiliser l'approche de Bogoliubov. En rappelant que la prescription de Bogoliubov suppose que $\tilde{a}^+ = \tilde{a}_0 = \sqrt{N_c}$, et a_k pour $k \neq 0$ comme de petites perturbations. Au second ordre en \tilde{a}_k^+ et \tilde{a}_k , le terme de potentiel externe peut être évalué comme :

$$\sum_{k,p} U_{k-p} a_k^+ a_p = N_c U_0 + \sqrt{N_c} \sum_k (a_k^+ U_k + a_k U_{-k}) \quad (2.40)$$

Le terme $N_c U_0$ doit être calculé dans la deuxième approximation de Born. En l'absence de potentiel externe, l'hamiltonien (2.23) peut être diagonalisé par la transformation standard de Bogoliubov (2.35) et (2.36).

Pour diagonaliser l'hamiltonien complet (2.23), nous appliquons les transformations de Huang-Meng [50] :

$$\begin{aligned} \tilde{a}_k &= u_k \tilde{b}_k - v_k \tilde{b}_{-k}^+ - \beta_k \\ \tilde{a}_k^+ &= u_k \tilde{b}_k - v_k \tilde{b}_{-k}^+ - \beta_k^* \end{aligned} \quad (2.41)$$

où b_k^+ et b_k sont des opérateurs d'excitations élémentaires. La transformation (2.41) ne modifie pas les règles de commutation et les opérateurs de quasi-particules b_k^+ et b_k satisfont les relations de commutation bosoniques habituelles.

Les fonctions de Bogoliubov u_k ; v_k sont exprimées de manière standard :

$$u_k; v_k = \frac{(\sqrt{\frac{\varepsilon_k}{E_k}} \pm \sqrt{\frac{E_k}{\varepsilon_k}})}{2} \text{ où } E_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \text{ est l'énergie d'une particule libre, et}$$

$$\beta_k = \sqrt{\frac{n}{V}} \frac{E_K}{\varepsilon_K} U_k \quad (2.42)$$

L'énergie des excitations de Bogoliubov est donnée par

$$\varepsilon_k = \sqrt{E_k^2 + 2\mu_{0d}(\theta)E_k} \quad (2.43)$$

où $\mu_{0d} = \lim_{k \rightarrow 0} f(k)$ est le potentiel chimique d'ordre zéro.

Il est important de noter que le spectre (2.43) est indépendant du potentiel aléatoire. Cette indépendance n'est en réalité vraie qu'à l'ordre zéro de la théorie des perturbations ; inversement, des calculs d'ordre supérieur rendent le spectre dépendant du potentiel aléatoire en raison de la contribution des termes anormaux (voir ci-dessous). Pour $k \rightarrow 0$, les excitations sont des ondes sonores $\varepsilon_k = \hbar c_{sd}(\theta)k$, où $c_{sd}(\theta) = c_{sp}\sqrt{1 + \varepsilon_{dd}(3\cos^2\theta - 1)}$ avec $c_s = \sqrt{\frac{gm}{m}} = m$ est la vitesse du son sans interaction dipolaire-dipolaire. En raison de l'anisotropie de l'interaction dipolaire, la vitesse du son acquiert une dépendance de la direction de propagation, qui est fixée par l'angle θ entre la direction de propagation et l'orientation dipolaire. Cette dépendance angulaire de la vitesse du son a été confirmée expérimentalement [55]. Par conséquent, la forme diagonale de l'hamiltonien du gaz de Bose dipolaire sale (2.38) peut être écrite comme :

$$\hat{H} = E + \sum_{\vec{k}} \varepsilon_k \tilde{b}_k^+ \tilde{b}_k \quad (2.44)$$

où $E = E_{0d} + \delta E + E_R$,

$E_{0d}(\theta) = \mu_{0d}(\theta)\frac{N}{2}$ où N est le nombre total de particules.

$$\delta E = \frac{1}{2} \sum_k [\varepsilon_k - E_k - n f(k)] \quad (2.45)$$

est la correction d'énergie de l'état fondamental due aux fluctuations quantiques

$$E_R = - \sum_k n \langle |U_k|^2 \rangle \frac{E_k}{\varepsilon_k^2} = - \sum_k n R_k \frac{E_k}{\varepsilon_k^2} \quad (2.46)$$

donne la correction à l'énergie de l'état fondamental due au potentiel aléatoire externe.

Et la densité non condensée s'écrit ;

$$\tilde{n} = \tilde{n}_0 + \tilde{n}_{th} + n_R \quad (2.47)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \int \frac{dk}{(2\pi)^3} \left[\frac{E_k + \tilde{V}(K) n_c}{\varepsilon_k} - 1 \right] \\
&\quad + \frac{1}{2} \int \frac{dk}{(2\pi)^3} \left[\frac{E_k + \tilde{V}(K) n_c}{\varepsilon_k} \right] \left[\coth \frac{\varepsilon_k}{2T} - 1 \right] + n_c \int \frac{dk}{(2\pi)^3} R_K \frac{E_k^2}{\varepsilon_k^4}
\end{aligned} \tag{2.48}$$

Le premier terme principal dans l'équation (2.48) désigne la contribution à la densité non condensée à température nulle, Le seconde terme représente les corrections de fluctuations thermiques à la densité non condensée et le troisième terme représente la contribution du potentiel aléatoire connu également sous le nom de fraction vitreuse est analogue à l'ordre d'Edwards-Anderson paramètre d'un verre de spin [56, 58] . Elle provient de l'accumulation de densité près de les minima potentiels et l'épuisement de la densité autour des maxima. La densité anormale est donnée par :

$$\tilde{m} = \tilde{m}_0 + \tilde{m}_{th} + \tilde{m}_R \tag{2.49}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2} \int \frac{dk}{(2\pi)^3} \left[\frac{E_k + \tilde{V}(K) n_c}{\varepsilon_k} \right] \\
&\quad - \frac{1}{2} \int \frac{dk}{(2\pi)^3} \left[\frac{E_k + \tilde{V}(K) n_c}{\varepsilon_k} \right] \left[\coth \frac{\varepsilon_k}{2T} \right] + n_c \int \frac{dk}{(2\pi)^3} R_K \frac{E_k^2}{\varepsilon_k^4}
\end{aligned} \tag{2.50}$$

Le premier terme de température zéro dans l'équation (2.50) dans la densité anormale est divergent en ultraviolet. Cette la divergence vient des interactions de contact. Pour surmonter un tel problème, il faut utiliser la régularisation dimensionnelle qui est valable pour les gaz très dilués, et donne pour l'intégrale $\int_0^\infty dx \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right) = -1$ [59, 61]. Le second terme comptabilise les contributions thermiques à la densité anormale.

2.5 Propriétés statistique du potentiel de désordre :

On suppose que le potentiel désordonné est spatialement homogène, c'est-à-dire que la distribution de probabilité en un point est indépendante de sa position. En conséquence, on a

$$R_n(r_1 + \sigma, r_2 + \sigma, \dots, r_n + \sigma) = \langle U(r_1) U(r_2) \dots U(r_n) \rangle \quad (2.51)$$

et ne dépendent que de $n - 1$ coordonnées relatives.

2.5.1 Fonction de corrélation

L'une des hypothèses clés du potentiel aléatoire est la disparition des corrélations entre les valeurs du potentiel aux points avec une séparation infiniment grande. Dans ce qui suit, nous supposons pour le potentiel de désordre qu'il est homogène après la moyenne d'ensemble de troubles, c'est-à-dire après avoir effectué la moyenne $\langle \rangle$ sur tous les réalisations. Ainsi, la valeur moyenne du potentiel de trouble, sans perte de généralité, sera supposé disparaître

$$\langle U(r) \rangle = 0 \quad (2.52)$$

à cause de l'homogénéité, la moyenne d'ensemble de désordre $\langle U(r) \rangle$ représente une constante, qui peut être absorbé dans le potentiel chimique dans une description grand-canonique. De plus, un potentiel de désordre homogène a une fonction de corrélation, qui dépend sur la différence des points de l'espace

$$R(r, \hat{r}) = \langle U(r) U(\hat{r}) \rangle \quad (2.53)$$

L'hypothèse d'homogénéité implique les symétries :

$$R(r) = R(-r) \quad (2.54)$$

et

$$R(k) = R(-k) \quad (2.55)$$

où la transformée de Fourier de la fonction de corrélation à deux points, également appelée la spectre de puissance du désordre, est défini par :

$$R(k) = \int d^d r R(r) \exp^{-ikr} \quad (2.56)$$

Dans de nombreux cas, le désordre est en outre supposé isotrope, ce qui signifie que $R(r) = R(r)$ est une fonction radiale (ainsi que sa transformée de Fourier).

2.5.2 Les formulaires standards

Le désordre peut prendre différentes formes. Ci-dessous, nous présentons quelques exemples de potentiels aléatoires qui sont les plus pertinents.

Le désordre du bruit blanc

Un désordre à bruit blanc (ou non corrélé) est un désordre gaussien dont la fonction d'autocorrélation est delta-corrélée,

$$R(r, \dot{r}) = R \delta(r, \dot{r}) \quad (2.57)$$

où $\delta(r, \dot{r})$ est la fonction de Dirac de dimension-d, et paramètre la force de la potentiel. Notez que R a une dimension $(\text{énergie})^2(\text{longueur})^d$, où d est la dimension spatiale. Les troubles de bruit blanc sont largement utilisés dans le cas du régime de trouble faible qui est d'intérêt ici, principalement parce qu'à basse énergie, de nombreux potentiels aléatoires continus peuvent être remplacé par un potentiel de bruit blanc.

Désordre du speckle

Expérimentalement, un speckle 3D isotrope, peut être produit comme le motif d'interférence de nombreux vecteurs d'onde à l'intérieur d'une cavité optique fermée voir la figure 2.1 [62].

Une autre réalisation de configuration de speckle désordonnée 3D a été proposée dans [63], où le speckle se forme au foyer d'une cavité optique ellipsoïdale vide.

La fonction d'autocorrélation du speckle laser isotrope 3D est donnée par $R(r) = R |C_A(r)|^2$ [63] ou :

$$C_A(y) = \left| \left(\frac{3}{y^3} \right) (\sin y - y \cos y) \right|^2. \quad (2.58)$$

ou $y = \frac{\pi r}{\sigma}$

Une autre forme de fonction d'autocorrélation pour le speckle isotrope 3D a été proposée dans [62]

$$C_A(r) = \sin \left(\frac{r}{\sigma} \right). \quad (2.59)$$

Les potentiels de speckle sont facilement réglés en amplitude, géométrie et longueur de corrélation.

Désordre corrélé gaussien

Les propriétés statistiques d'un potentiel aléatoire gaussien sont donc entièrement déterminées par le corrélateur à deux points. Dans d dimensions spatiales, il prend la forme

$$R(r, r') = R \frac{\exp^{-(r-r')^2 \frac{\sigma^2}{2}}}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{d}{2}}}. \quad (2.60)$$

où sa longueur de corrélation peut être identifiée avec l'extension moyenne [64]. A la limite d'une longueur de corrélation nulle, on obtient un modèle qualitatif pour les bosons désordonnés avec une corrélation delta de éq (2.60).

Tout au long de cette thèse, nous utilisons le trouble corrélé gaussien. Ce modèle de désordre est particulièrement pratique car il peut être facilement traité analytiquement dans le Bogoliubov théorie d'un gaz de Bose dilué

Chapitre 3

Dipolaire d'un gaz bosonique à deux dimensions dans un potentiel de désordre faible

La recherche de gaz bidimensionnels surfondus [65] a suscité un grand intérêt au cours des deux dernières décennies en raison des différences significatives entre ces derniers et les liquides tridimensionnels [66]. Les fluctuations thermiques empêchent la production de condensats dans un gaz de Bose 1D homogène à toutes les températures et dans un gaz de Bose 2D homogène à toute température non nulle [67]. Les dipôles ou quasi-dipôles de gaz ont récemment fait l'objet de beaucoup d'attention en raison de leur propriétés de dispersion étonnantes. Cela inclut la présence d'un faible minimum de roton dans le spectre d'excitation et le potentiel d'effondrement du gaz [68]. Les bulles solides se cristallisent dans une superstructure en treillis et produit une phase solide agrégée [69]. Des études théoriques des fluctuations et des propriétés de diffusion et thermodynamiques associées ont été réalisées depuis les travaux antérieurs de Schick [66] et Popov [67]. Dans ce chapitre, une étude des propriétés d'un gaz dipolaire de Bose quasi bidimensionnel exposé à un petit potentiel aléatoire avec une corrélation gaussienne est réalisée en utilisant la théorie de Huang-Meng-Bogoliubov. Des formules analytiques pour les fluctuations de condensat, les paramètres thermodynamiques, le potentiel chimique, l'énergie de l'état fondamental et la vitesse du son sont fournies pour le potentiel de perturbation gaussienne cohérente dans

le système Roton. Des corrections pour la vitesse du son due à la turbulence associée et la fraction superfluide ont également été déterminées. Les fluctuations, la thermodynamique et la superfluidité sont grandement améliorées par la présence d'une tension turbulente dans la région où le roton apparaît dans le spectre d'excitation.

3.1 Gaz de Bose homogènes et bidimensionnels :

Nous supposons que le mouvement translationnel atomique dans le plan x, y est libre et étudions un gaz condensé de Bose dilué de bosons dipolaires qui est fortement restreint dans la direction axiale z par un potentiel externe. $V(r) = \frac{m\omega^2 z^2}{2}$. Le plan $(x; y)$ est perpendiculaire à la direction des moments dipolaires, d . La représentation de l'impulsion du potentiel d'interaction de deux corps ($r_* = \frac{md^2}{\hbar}$) dans la limite ultra-froid ($kr_* \ll 1$), qui est une région typique de la DDI, est donnée comme [70]

$$V(k) = g_{2D}(1 - C |k|) \quad (3.1)$$

$C = \frac{2\pi d^2}{g_{2D}}$, $g_{2D} = g_{3D}\sqrt{2\pi l_0}$ où $g_{3D} = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m}$ avec a est la longueur de dispersion de sonde ($a > 0$ dans cette section), et ($l_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$) est la constante de couplage d'interaction de contact, qui dépend en grande partie de la force de confinement transversal. Dans [46] un autre modèle pour le potentiel quasi-2D effectif a été présenté.

$v(k) = g[1 - Ckl_0 \exp(\frac{k^2 l_0^2}{2}) \text{Erfc} \frac{kl_0}{\sqrt{2}}]$ est la fonction d'erreur complémentaire dans l'équation (5). Augmenter ce potentiel qui pourrait

$$v(k) = g(1 - l_0 ck) \quad (3.2)$$

avec l_0 permet d'ajuster l'échelle pour la force du terme linéaire et peut être réglé à l'unité puisque le ratio entre la longueur dipolaire et la durée du piège est le facteur le plus crucial. Il est obtenu en intégrant l'interaction dipolaire 3D complète sur l'oscillateur harmonique transversal à petit moment. Par conséquent, lors du calcul des corrections de champ au-delà de la moyenne pour les deux potentiels. Les deux potentiels ont un comportement de grande dynamique différent ; le potentiel dans la référence [70] est constante ($-\sqrt{\frac{2}{\pi}}$) pour

le grand (k), alors que le potential est linéaire en (k).

Nous dérivons le spectre des excitations [70] en utilisant la théorie traditionnelle de Bogoluibov qui a été utilisée dans le chapitre2.

$$\varepsilon_k = \sqrt{E_k^2 + ng_{2D}E_k(1 - ck)} \quad (3.3)$$

En ordre zéro, le potentiel chimique est ($\mu = ng_{2D}$) Pour les petits moments les excitations sont des ondes sonores ($\varepsilon_k = \sqrt{\frac{ng_{2D}}{mk}}$) La dépendance de (ε_k sur k) reste monotone avec l'augmentation k ($c \leq \frac{\sqrt{8}}{3}\xi$) Pour la constante C dans l'intervalle :

$$\frac{\sqrt{8}}{3}\xi \leq C \leq \xi \quad (3.4)$$

Le spectre d'excitation a une structure roton-maxon. Il est alors convenable de représenter ε_k

sous la forme :

$$\varepsilon_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \sqrt{(k - k_r)^2 + k_\Delta^2} \quad (3.5)$$

où $k_r = \frac{2C}{\xi^2}$ et $k_\Delta = \sqrt{\frac{4}{\xi^2 - k_r^2}}$ Si le roton est proche de zéro, alors k_r est le position du roton, et :

$$\Delta = \frac{\hbar^2 k_r k_\Delta}{2m} = 2ng_{2D}C \sqrt{\frac{mnng_{2D}}{\hbar^2} - c^2 \left(\frac{mnng_{2D}}{\hbar^2}\right)^2} \quad (3.6)$$

est la hauteur du roton minimum (figure 3.1). Pour $C = \xi$ les touches minimales du roton zéro, et à C plus grand, le condensat de Bose uniforme devient dynamiquement instable.

Il convient de noter que la constante de couplage g_{2D} peut être réglée en utilisant des résonances de Feshbach. ou en modifiant la fréquence de confinement serré ω_0 . Par conséquent, bien que la plage de valeurs de C donnée par (3.4) est assez étroite, elle peut être atteinte sans difficultés majeures.

La condition ($C = \frac{2\pi d^2}{g_{2D}}$) est réduite à ($\frac{mg_{2D}}{2\pi\hbar^2} = \frac{a}{\sqrt{2}l_0} \simeq 2\pi nr_*^2$) Pour l'atomes dysprosium nous avons la distance dipole-dipole $r_* \simeq 200 \text{ \AA}$, et à des densités $2D \sim 10^9 \text{ cm}^{-2}$ le spectre roton-maxon est réalisé pour la longueur de dispersion ($3D$) une de plusieurs dizaines

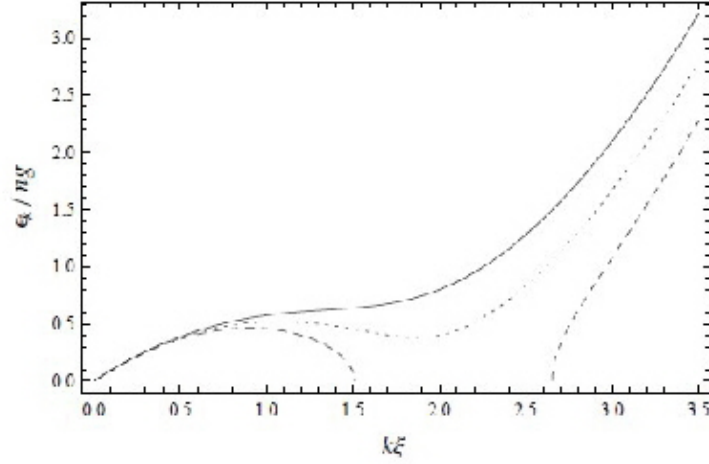


FIG. 3-1 – Énergie d'excitation ε_K du BEC dipolaire quasi-2D en fonction du moment k pour plusieurs valeurs de k_r . La courbe continue ($k_r \approx 1,84$) montre une dépendance monotone de ε_K , la courbe en pointillés ($k_r \approx 1,96$) présente une structure roton-maxon pour ε_K , et la courbe en tirets ($k_r \approx 2,08$) correspond à un BEC dynamiquement instable [46].

d'angstroms à la fréquence de la confinement étroit de $10kHz$ conduisant à la durée de confinements l_0 environ 1000 \AA .

3.2 Gaz de Bose dipolaire à deux dimensions avec interactions à trois corps en faible désordre

On considère un gaz dilué de bosons dipolaires condensés avec des interactions à deux et trois corps, le condensat étant confiné dans une direction (z) et les moments dipolaires d'orientés perpendiculairement au plan x - y . Où l'expression de l'hamiltonien du système est donnée comme suit :

$$\begin{aligned}
 H = & \frac{1}{2} \int d^2r [\Psi^+(r) \left(-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} - \mu + U(r) \right) \Psi(r) \\
 & + \frac{1}{2} \int d^2r' V_{2D}(r-r') \Psi^+(r) \Psi^+(r') \Psi(r') \Psi(r) \\
 & + \frac{g_3}{6} \Psi^+(r) \Psi^+(r) \Psi^+(r) \Psi(r) \Psi(r) \Psi(r)]
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

où $\Psi^+(r)$ et $\Psi(r)$ sont les opérateurs usuels de création et d'annihilation, μ est le potentiel chimique et g_3 est la force d'interaction pulsée dans un contact ternaire. in $2D$ Le potentiel d'interaction $V_{2D}(r)$ incluant les interactions de contact, dipôle-dipôle.

$$V_{2D}(r) = g_{2D} \delta(r) + U_{2D}^{dd}(r) \tag{3.8}$$

où g_{2D} est la constante de couplage à courte portée en $2D$, $U_{2D}^{dd}(r)$ est l'interaction dipôle-dipôle en $2D$. En général, la constante de couplage à trois corps g_3 est un nombre complexe, dont la partie imaginaire décrit la perte de recombinaison à trois corps et sa partie réelle contient le paramètre de diffusion à trois corps. Nous utilisons le traitement habituel pour les systèmes de Bose avec une symétrie de jauge brisée et décomposons l'opérateur bosonique en une somme de deux parties.

$$\Psi(r) = \Phi(r) + \acute{\Psi}(r) \tag{3.9}$$

où $\Phi(r) = \langle \Psi(r) \rangle$ est la fonction d'onde du condensat, et l'opérateur $\acute{\Psi}(r)$ agit sur les particules non condensées qui, par définition, ont la propriété $\langle \acute{\Psi}(r) \rangle = 0$. En appliquant la décomposition (3.9) dans l'équation (3.7) et en développant l'expression obtenue et en ne considérant que les termes quadratiques et quartiques dans les opérateurs de non-condensat et en ignorant toutes les moyennes des produits cubiques des opérateurs de non-condensat, le hamiltonien correspondant pour les atomes non condensés peut être écrit comme suit :

$$\begin{aligned}
H_{nc} = & \int d^2r \Psi^+(r) \left[-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} - \mu + U(r) \right] \Psi(r) \\
& + \frac{1}{2} \int d^2r d^2r' V_{2D}((r-r')) [\Phi(r)\Phi(r')\Psi^+(r)\Psi^+(r') \\
& + \Phi^*(r)\Phi^*(r')\Psi(r')\Psi(r)\Phi^*(r)\Phi(r')\Psi^+(r')\Psi(r) + \Phi(r)\Phi^+(r')\Psi^+(r)\Psi(r') \quad (3.10) \\
& + \Phi(r')\Phi^*(r')\Psi^+(r)\Psi(r) + \Phi(r)\Phi^*(r)\Psi^+(r')\Psi(r') + \Psi^+(r)\Psi^+(r')\Psi(r')\Psi(r)] \\
& + \frac{g_3}{6} \int d^2r [3\Phi^2(r)\Psi^+(r)\Psi^+(r)\Psi^+(r)\Psi(r) + 3\Phi^{*2}(r)\Psi^+(r)\Psi(r)\Psi(r)\Psi(r) \\
& + 3\Phi(r)\Phi^*(r)\Psi(r)\Psi(r) + 3\Phi^3(r)\Phi^*(r)\Psi^+(r)\Psi^+(r) \\
& + 9\Phi(r)\Phi^*(r)\Psi^+(r)\Psi^+(r)\Psi(r)\Psi(r) + 9\Phi^2(r)\Phi^{*2}(r)\Psi^+(r)\Psi(r) \\
& + \Psi^+(r)\Psi^+(r)\Psi^+(r)\Psi(r)\Psi(r)\Psi(r)].
\end{aligned}$$

Les densités non condensées, normales et anormales sont définies comme :

$$\begin{aligned}
n_c(r) &= \langle \Phi^*(r)\Phi(r) \rangle \\
n(r) &= \langle \Psi^+(r)\Psi(r) \rangle \\
n(r', r) &= \langle \Psi^+(r')\Psi(r) \rangle \\
m(r', r) &= \langle \Psi(r')\Psi(r) \rangle
\end{aligned} \quad (3.11)$$

Dans l'approximation du champ moyen, le produit quartique et d'ordre supérieur des opérateurs de non-condensat peut être écrit comme suit :

$$\begin{aligned}
\Psi^+\Psi^+\Psi\Psi &= \langle \Psi^+\Psi^+ \rangle \Psi^+\Psi + \langle \Psi^+\Psi \rangle \Psi^+\Psi + \langle \Psi^+\Psi \rangle \Psi^+\Psi + \langle \Psi^+\Psi \rangle \Psi^+\Psi \\
\Psi^+\Psi^+\Psi\Psi &= 4\langle \Psi^+\Psi \rangle \Psi^+\Psi \\
\Psi^+\Psi^+\Psi^+\Psi\Psi\Psi &= 36\langle \Psi^+\Psi \rangle^2 \Psi^+\Psi \\
\Psi^+\Psi\Psi\Psi &= 3\langle \Psi^+\Psi \rangle \Psi\Psi \\
\Psi^+\Psi^+\Psi^+\Psi &= 3\langle \Psi^+\Psi \rangle \Psi^+\Psi^+
\end{aligned} \quad (3.12)$$

Pour obtenir les factorisations du champ moyen 3.10, nous avons négligé les termes proportionnels à la densité anormale de non-condensat $m(\acute{r}, r) = \langle \Psi(\acute{r})\Psi(r) \rangle$ et à son conjugué complexe. Cette approximation correspond à ce qu'on appelle l'approximation de Popov [71] et est censée être appropriée à la fois à des températures élevées, où $n(r) \gg m(r)$, et à des températures basses où les deux densités sont du même ordre, mais toutes deux négligeablement petites pour les systèmes très dilués [70]. Ici, nous supposons que $\Phi(r)$ est réelle sans perte de généralité [72]. Ensuite, le Hamiltonien 3.12 peut être écrit comme suit :

$$\begin{aligned}
 H_{nc} = & \int d^2r \Psi^+(r) \hat{L}_0 \Psi(r) + \frac{1}{2} \int d^2r d^2r' V_{2D}(r-r') \{ n_{tot}(r, r') [\Psi^+(r')\Psi(r) + \Psi^+(r)\Psi(r')] \\
 & + \Phi(r)\Phi(r') [\Psi^+(r)\Psi^+(r') + \Psi(r')\Psi(r)] \} \\
 & + \int d^2r [9n_c(r)n(r) + 3n_c^2(r)] [\Psi^+(r)\Psi^+(r) + \Psi(r)\Psi(r)]
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

où $n_{tot}(r, r') = n_c(r, \acute{r}) + n(r, \acute{r})$ est la densité totale et :

$$L_0 = -\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} - \mu + U(r) + \int d^2r' V_{2D}(r-r') n_{tot}(\acute{r}) + \frac{g_3}{6} 9n_c^2(r) + 36n_c(r)n(r) + 36n^2(r) \tag{3.14}$$

Dans l'espace de Fourier, l'opérateur de champ des atomes non condensés peut être développé en termes d'ondes planes $\Psi(r) = \frac{1}{\sqrt{S}} \sum_k a_k e^{ikr}$, où S est la surface et a_k est l'opérateur d'annihilation de particules. Nous considérons notre système quasi-2D dans la limite ultra-froide où le moment de la particule satisfait l'inégalité $kr^* \ll 1$, avec $r^* = \frac{md^2}{\hbar^2}$ étant la distance caractéristique dipôle-dipôle. La transformée de Fourier de l'interaction dipôle-dipôle $U_{2D}^{dd}(k)$ peut être écrite comme suit [73] :

$$U_{2D}^{dd}(k) = -2\pi d^2 |k| = 2\pi \frac{\hbar^2 r^*}{m} |k| \tag{3.15}$$

avec m la masse de la particule et C la constante de couplage. En supposant un système faiblement interactif, où $\frac{mg_{2D}}{2\pi\hbar^2} \ll 1$ et $r^* \ll \xi$ (avec $\xi = \frac{\hbar}{\sqrt{mn_C g_{2D}}}$ étant la longueur de *relaxation*), les excitations élémentaires du système peuvent être trouvées en utilisant

la transformation de Bogoliubov habituelle qui diagonalise le hamiltonien. Ainsi, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} u_k &= \sqrt{\frac{E_k + V_{tot}(k)}{2\varepsilon_k} + \frac{1}{2}} \\ v_k &= \sqrt{\frac{E_k + V_{tot}(k)}{2\varepsilon_k} - \frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (3.16)$$

où $E_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ est l'énergie de la particule libre, ε_k est l'énergie d'excitation, $C_d = \frac{2\pi d^2}{g_{2D}}$, et nous avons $V_{tot}(k) = n_c g_{2D}(1 - C_d k + g_3 n_c / g_{2D})$. Pour un condensat de Bose uniforme à basses températures, où le condensat n'est pas significativement épuisé, E_k sera

$$\varepsilon_k = \sqrt{\varepsilon_k^2 + 2E_k [n_c g_{2D}(1 - C_d k) + g_3 n_c^2]} \quad (3.17)$$

Dans le cas tridimensionnel, $U_{3D}^{dd}(k) = \frac{C_{dd}}{3}(3\cos^2\theta_k - 1)$ et $g_{2D} = g$, et en l'absence d'interaction coulombienne, l'équation (3.12) se réduit à l'équation 3.15 de la référence [74]. La forme diagonale du hamiltonien (3.7) peut être écrite comme suit :

$$H = E + \sum_k E_k b_k^\dagger b_k, \quad (3.18)$$

où l'énergie totale est $E = E_0 + \acute{E}$. Le terme d'ordre zéro E_0 correspond au condensat ($k \rightarrow 0$),

$$E_0 = \frac{1}{2} N_c n_c g_{2D} (1 + g_3 n_c / g_{2D}). \quad (3.19)$$

La correction de l'énergie de l'état fondamental due aux fluctuations quantiques \acute{E} est

$$\acute{E} = \frac{1}{2} \sum_k [\varepsilon_k - E_k - n_c V_{tot}(k)] \quad (3.20)$$

À faible moment ($k \rightarrow 0$), la relation de dispersion (3.17) est similaire à l'onde sonore, c'est-à-dire $\varepsilon_k = \hbar v_s k$, avec une vitesse du son de

$$v_s = \sqrt{\frac{n_c g_{2D}(1 + n_c g_3/g_{2D})}{m}} \quad (3.21)$$

Il est pratique de représenter l'équation (3.17) sous une forme sans dimension de

$$\frac{E_k}{n_c g_{2D}} = \frac{1}{2} \xi k \left[\sqrt{\left(\xi k - \frac{2C_d}{\xi} \right)^2 + 4 \left(1 + \frac{n_c g_3}{g_{2D}} \right)} - 4 \frac{C_d^2}{\xi} \right] \quad (3.22)$$

La relation de dispersion est une fonction monotone de k et elle présente une structure roton-maxon dans l'intervalle $(\frac{\sqrt{8}}{3})\xi\sqrt{1 + n_c g_3/g_{2D}} < C_d < \xi(\sqrt{1 + n_c g_3/g_{2D}})$. Dans ce cas, lorsque

$C_d = \xi\sqrt{1 + \frac{n_c g_3}{g_{2D}}}$, le minimum du roton est nul et pour des C_d plus grands, le condensat de Bose devient instable. Si le roton est proche de zéro, alors $k_r = 2C_d/\xi^2$ est la position du roton, et

$$\Delta = \frac{\hbar^2}{2m} k_r \sqrt{\frac{4(1 + n_c g_3/g_{2D})}{\xi^2} - k_r} \quad (3.23)$$

et Δ la hauteur du minimum de roton

Nous représentons dans la figure 3.2 l'énergie d'excitations (3.22) en fonction de moment k pour différentes valeurs de g_3 . On peut observer que les interactions à trois corps modifient les excitations collectives et la stabilisation du condensat de Bose. On peut voir aussi, que en augmentant l'intensité d'interaction à 3 corps, la structure de roton-maxon disparaît lorsque $C_d/\xi > \sqrt{8}/3$ et l'instabilité de la condensation se produit à une interaction dipôle-dipôle plus forte.

3.3 Déplétion du condensat

Dans ce travail, nous intéressons de étudier le comportement des interactions à trois corps dans un gaz dipolaire de Bose dans un piège aléatoire. Pour cela on va calculer la fraction vitreuse (glassy fraction)

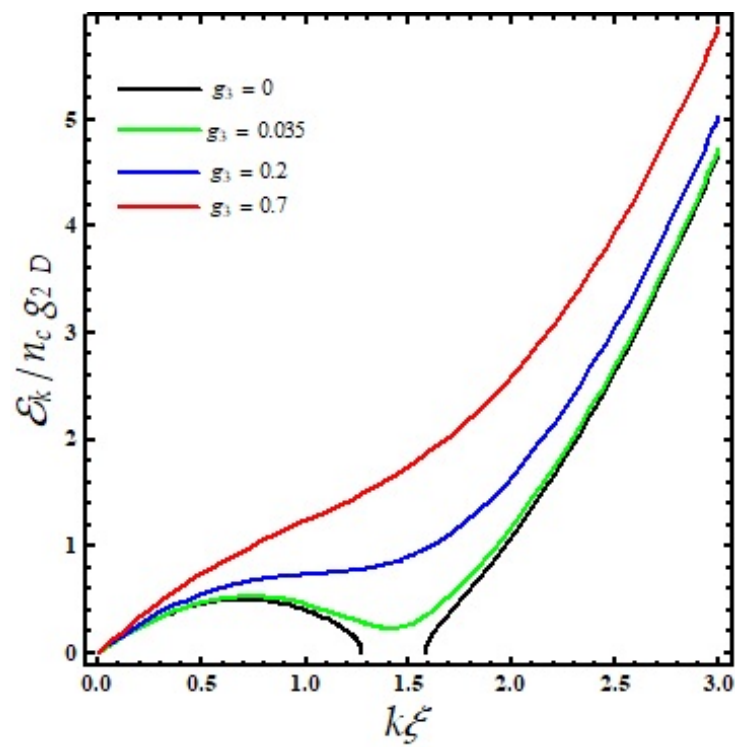


FIG. 3-2 – Variation de l'énergie de spectre de Bogliubov ε_k en fonction de k pour différentes valeurs de g_3

$$\frac{n_R}{n_c} = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{R_k}{\left(E_k + 2n_c g_{2D} \left(1 - C_d k + \frac{g_3}{g_{2D}} n_c\right)\right)^2} \quad (3.24)$$

Pour aller plus loin dans les calculs pratique, Il faut spécifier le type de potentiel aléatoire. Dans ce but, nous prenons le cas d'une corrélation de désordre $R(k)$ spatialement décroissante. Par conséquent, dans ce qui suit, nous limitons au cas d'une corrélation gaussienne avec la transformation de fourier [51] [52]

$$R(\vec{k}) = R_0 e^{-\frac{\sigma^2}{2} k^2}. \quad (3.25)$$

où R_0 désigne la force du désordre de dimension (énergie)² \times (longueur)³ et σ est la longueur de corrélation de désordre. Substituer la fonction (3.25) dans Eq. (3.24) et en effectuant l'intégration sur la quantité de mouvement, nous obtenons l'expression de la fluctuation de condensat due au potentiel aléatoire externe

$$\frac{n_R}{n_c} = \frac{R_0}{2\pi} \int dk \frac{k R_k}{\left(E_k + 2n_c g_{2D} \left(1 - C_d k + \frac{g_3}{g_{2D}} n_c\right)\right)^2} \quad (3.26)$$

Le terme $C_d k$ dans l'intégrale de l'équation (3.26) conduit à une divergence à de grands moments. Pour surmonter ce problème, nous fixons une coupure égale à $1/r^*$. Cela est valable dans le régime ultrafroid ($k \ll 1/r^*$). L'épuisement quantique de l'équation (3.26) est calculé numériquement et la fraction quantique non-condensée désordonnée est tracée en fonction de σ/ξ dans la figure 3.3 pour différentes valeurs de g_3 . En l'absence d'interactions à trois corps, la fraction vitreuse calculée (ligne noir solide dans la figure 3.3) est en accord avec celles obtenues dans [70]. De plus, les figures (3.3.a) et (3.3.b) confirment que l'instabilité de la condensation se produit à une interaction dipôle-dipôle plus forte pour des valeurs non nulles de g_3 . Il est possible de voir à partir de la figure 3.3.a qu'à de faibles valeurs de $\frac{C}{\xi}$ (IDD faible), l'interaction à trois corps contribue davantage à l'épuisement du condensat et en augmentant $\frac{C}{\xi}$ jusqu'à $\frac{C}{\xi} = 1.2$, à la fois l'interaction à trois corps et l'interaction dipôle-dipôle ont les mêmes contributions. À de plus grandes valeurs de $\frac{C}{\xi}$ (IDD forte), l'interaction dipôle-dipôle joue le rôle principal dans l'épuisement. Nous

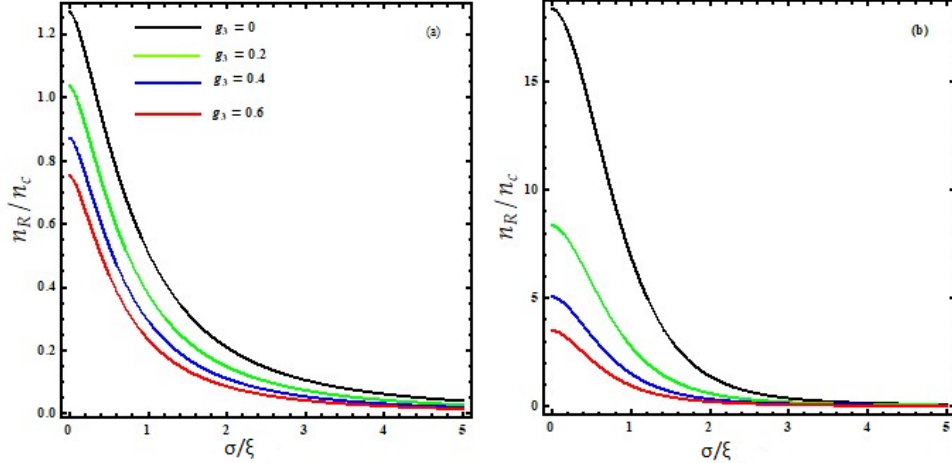


FIG. 3-3 – variation de la fraction vitreuse en fonction $\frac{n_R}{n_c}$ de σ pour defferents valeurs de g_3 (a) faible IDD $\frac{C}{\xi} = 0.2$, (b) IDD fort $\frac{C}{\xi} = 1.2$

voyons dans la figure [3.3] que les interactions à trois corps TBI conduit à diminuer la fraction de désordre à l'intérieur du condensat même dans le régime lorsque $\sigma < \xi$. Ceci peut être compris par l'argument suivant. Le TBI a tendance à supprimer les effets du désordre et ainsi, les fragments se fusionnent en un seul BEC.

3.3.1 Quantités thermodynamiques

Dans cette section, nous examinons l'impacte des corrections de désordre de certaines quantités thermodynamiques, telles que la correction de désordre du potentiel chimique et l'énergie désordonné sont écrit sous les formes suivantes [54]

- la correction de désordre du potentiel chimique ecrite sous forme :

$$\mu_R = 2gn_R \quad (3.27)$$

- l'énergie de désordre E_R , où $E_R = -n_c V \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} R_k \frac{E_k}{\varepsilon_k^2}$. Nous representons dans la figure [3.4] la variation de l'énergie de désordre reduite $\frac{E_R}{E_0}$ en fonction de la longueur de correlation de désordre σ . Nous voyons l'augmentation la force du coplage de l'interaction

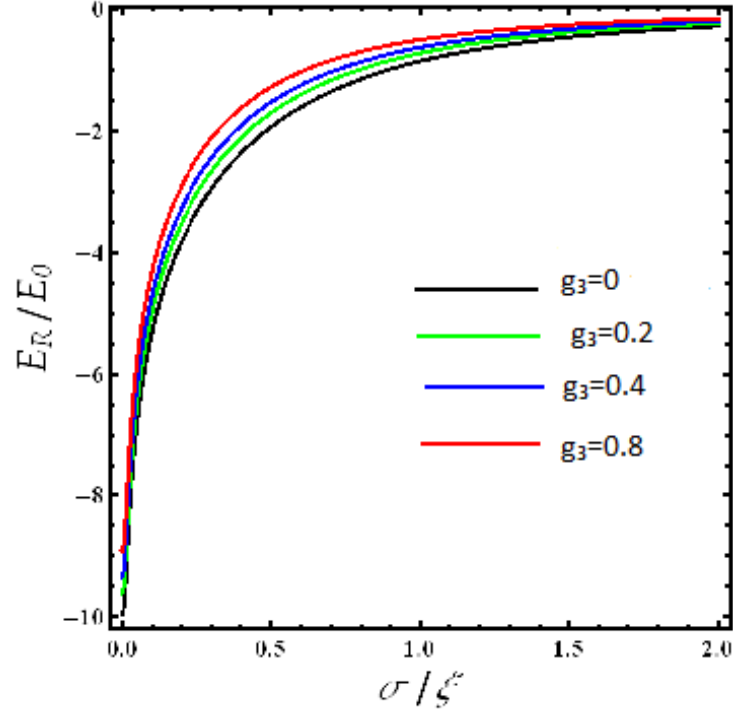


FIG. 3-4 – variation l'énergie de désordre en différentes de σ pour ; deferents valeurs de g_3 et $C_d/\xi = 0.5$.

à trois corps g_3 l'énergie de désordre est diminuée.

$$E_R = -n_c V \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} R_k \frac{E_k}{\varepsilon_k^2}$$

3.4 Conclusion

Nous avons considéré un gaz ultrafroid à deux dimension avec interactions faible dans un piège désordonné. On a calculé la depletion du condensat en cas des interaction de contact a deux corps, dans ce cas nous avons étudié le comportement de la fraction de désordonné $\frac{n_R}{n}$ et l'énergie de désordre E_R en fonction de la longueur de corrélation σ , nous

avons déduit que les deux comportements sont diminués lorsqu'on augmente la valeur de la longueur de corrélation. Nous avons calculé des quantités thermodynamiques comme ; potentiel chimique, énergie dans l'état fondamentale. Ensuite nous avons étudié les effets des interactions à trois corps sur le condensat désordonné qui nous conduit à trouver un bon résultat de stabilité de condensat de Bose Einstein.

Conclusion

La physique statistique quantique est une branche de la physique moderne, qui a fait ses preuves aussi bien au niveau théorique qu'expérimental afin d'expliquer les phénomènes au niveau microscopique et de prédire leurs résultats, la statistique quantique a connu un fort développement durant les dernières années dans l'étude des états exotiques de la matière et plus spécialement la condensation de Bose Einstein ce qui a permis de résoudre beaucoup de problèmes, parmi ces contributions on peut citer l'étude du comportement du condensat de Bose Einstein dans un potentiel désordonné.

Jusqu'à présent, il y a eu très peu de travaux sur les gaz dipolaires désordonnés ultra-froids avec TBI (interactions à trois corps). Dans ce mémoire de master, dans le chapitre 3, nous avons étendu la théorie de Bogoliubov-Huang-Meng applicable au gaz bosonique dipolaire à deux dimensions avec TBI soumis à un désordre gaussien corrélé à la fois à température nulle et finie. Nous avons montré que l'interaction intrigante entre le désordre, DDI (interaction dipôle-dipôle) et TBI joue un rôle fondamental dans la physique du système. Nous avons souligné en particulier que le DDI peut conduire à un arrêt du transport des atomes sous l'effet du désordre, augmentant ainsi la fraction vitreuse à l'intérieur du condensat, tandis que la présence du TBI peut entraîner un mouvement diffusif des particules. En présence des interactions à trois corps, la structure roton-maxon apparaît à une interaction dipôle-dipôle plus forte. Il en va de même pour l'instabilité du condensat. De plus, l'interaction à trois corps a un effet plus fort conduit à le roton-maxon instable qui montre la stabilité du condensat de Bose Einstein. En l'absence du TBI, nous avons retrouvé les résultats obtenus pour le BEC désordonné avec des interactions à deux corps. Nous avons calculé des quantités thermodynamiques comme ; potentiel chimique, énergie dans l'état fondamentale. Ensuite nous avons étudié les effets des interactions à trois corps

sur le condensat désordonné qui nous conduit à trouver un bon résultat de stabilité de condensat de Bose Einstein.

Bibliographie

- [1] A. Einstein, « Quantentheorie des einatomigen idealen Gases ». Sitzungsber. Kgl. Preuss. Akad. Wiss., 261–267 (1924).
- [2] S.N. Bose, « Plancks Gesetz und Lichtquantenhypothese ». Z. Phys. 26, 178– 181 (1924).
- [3] London F., « The λ -phenomenon of liquid helium and the Bose-Einstein degeneracy ». Nature 141, 643 (1938).
- [4] E.P. Gross, « Structure of a quantized vortex in boson systems ». Nuovo Cimento 20, 454–477 (1961).
- [5] M.H. Anderson, J.R. Ensher, M.R. Matthews, C.E. Wieman et E.A. Cornell, « Observation of Bose–Einstein condensation in a dilute atomic vapor ». Science 269, 198–201 (1995).
- [6] K.B. Davis, M.-O. Mewes, M.R. Andrews, N.J. van Druten, D.S. Durfee, D.M. Kurn et W. Ketterle, « Bose–Einstein condensation in a gas of sodium atoms ». Phys. Rev. Lett. 75 (22), 3969–3973 (1995).
- [7] S. Jochim, M. Bartenstein, A. Altmeyer, G. Hendl, S. Riedl, C. Chin, J. Heckerling, F. M. Marchetti, M. H. Szymanska, R. Andre, J. L. Staehli, V. Savona, P. B. Littlewood, B. Deveaud et Le Si Dang, « Bose-Einstein condensation of exciton polaritons ». Nature 443, 409– 414 (2006). [http ://dx.doi.org/10.1038/nature05131](http://dx.doi.org/10.1038/nature05131) .
- [8] J. Klaers, J. Schmitt, F. Vewinger et M. Weitz, « Bose-Einstein condensation of photons in an optical microcavity ». Nature 468, 545–548 (2010). [http ://dx.doi.org/10.1038/nature09567](http://dx.doi.org/10.1038/nature09567) .

- [9] Cheng Chin, Rudolf Grimm, Paul Julienne et Eite Tiesinga, « Feshbach resonance and Bose-Einstein Condensation of Molecules ». *Science* 302 (5653), 2101–2103 (2003). <http://www.sciencemag.org/content/302/5653/2101.abstract> .
- [10] J. Kasprzak, M. Richard, S. Kundermann, A. Baas, P. Jeambrun, J. M. J. Kenenances in ultracold gases ». *Rev. Mod. Phys.* 82, 1225–1286 (Apr 2010). <http://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.82.1225> .
- [11] S. L. Cornish, N. R. Claussen, J. L. Roberts, E. A. Cornell et C. E. Wieman, « Stable ^{85}Rb Bose-Einstein Condensates with Widely Tunable Interactions ». *Phys. Rev. Lett.* 85, 1795–1798 (Aug 2000). <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.85.1795> .
- [12] E. A. Donley, N. R. Claussen, S. L. Cornish, J. L. Roberts, E. A. Cornell et C. E. Wieman, « Dynamics of collapsing and exploding Bose-Einstein condensates ». *Nature* 412, 295–299 (2001).
- [13] L. Khaykovich, F. Schreck, G. Ferrari, T. Bourdel, J. Cubizolles, L. D. Carr, Y. Castin et C. Salomon, « Formation of a Matter-Wave Bright Soliton ». *Science* 296 (5571), 1290–1293 (2002). <http://www.sciencemag.org/content/296/5571/1290.abstract>
- [14] Tino Weber, Jens Herbig, Michael Mark, Hanns-Christoph Nägerl et Rudolf Grimm, « Bose-Einstein Condensation of Cesium ». *Science* 299 (5604), 232–235 (2003). <http://www.sciencemag.org/content/299/5604/232.abstract> .
- [15] K. M. O'Hara, S. L. Hemmer, M. E. Gehm, S. R. Granade et J. E. Thomas, « Observation of a Strongly Interacting Degenerate Fermi Gas of Atoms ». *Science* 298 (5601), 2179–2182 (2002). <http://www.sciencemag.org/content/298/5601/2179.abstract> .
- [16] T. Bourdel, J. Cubizolles, L. Khaykovich, K. M. F. Magalhães, S. J. J. M. F. Kokkelmans, G. V. Shlyapnikov et C. Salomon, « Measurement of the Interaction Energy near a Feshbach Resonance in a ^6Li Fermi Gas ». *Phys. Rev. Lett.* 91, 020402 (Jul 2003). <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.91.020402> .

-
- [17] D. S. Petrov, C. Salomon et G. V. Shlyapnikov, « Weakly Bound Dimers of Fermionic Atoms ». *Phys. Rev. Lett.* 93, 090404 (Aug 2004). <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.93.090404> .
- [18] M. Baranov, "Physics of ultracold Fermi gases". *Phys. Rep.* 464, 71 (2008).
- [19] T. Lahaye, C. Menotti, L. Santos, M. Lewenstein, and T. Pfau, "The physics of dipolar bosonic quantum gases". *Rep. Prog. Phys.* 72, 126401 (2009).
- [20] M. A. Baranov, M. Dalmonte, G. Pupillo, and P. Zoller, "Condensed Matter Physics with Ultracold Polar Molecules". *Chem. Rev.* 112, 5012 (2012).
- [21] H. Kadau, M. Schmitt, M. Wenzel, C. Wink, T. Maier, I. Ferrier-Barbut, and T. Pfau, "Observation of a dominant quadrupole mode in a strong dipolar quantum gas". *Nature* 530, 194 (2016).
- [22] L. D. Landau, "The Theory of Superfluidity of Helium II". *J. Phys. USSR* 5, 71 (1941).
- [23] R. P. Feynman, "Superfluidity of Helium II : A Tutorial". *Rev. Mod. Phys.* 29, 205 (1957).
- [24] H.-W. Hammer, A. Nogga, and A. Schwenk, "Few-nucleon systems from chiral effective field theory". *Rev. Mod. Phys.* 85, 197 (2013).
- [25] D. S. Petrov, "Quantum mechanical stabilization of a collapsing Bose-Bose mixture". *Phys. Rev. Lett.* 112, 103201 (2014).
- [26] A. Bulgac, "Quantum Hadrodynamics : From Nuclear Structure to Nuclear Reactions". *Phys. Rev. Lett.* 89, 050402 (2002).
- [27] D. Jaksch, C. Bruder, J. I. Cirac, C. W. Gardiner, and P. Zoller, "Cold Bosonic Atoms in Optical Lattices". *Phys. Rev. Lett.* 81, 3108-3111 (1998).
- [28] M. Greiner, O. Mandel, T. Esslinger, T.W. Hansch et I. Bloch, « Quantum phase transition from a superfluid to a Mott insulator in a gas of ultracold atoms ». *Nature* 415, 39–44 (2002).
- [29] P.W. Anderson, "More is Different". *Science* 177, 393-396 (1972).

-
- [30] J. Billy, V. Josse, Z. Zuo, A. Bernard, B. Hambrecht, P. Lugan, D. Clément, L. Sanchez-Palencia, P. Bouyer, and A. Aspect, "Direct observation of Anderson localization of matter waves in a controlled disorder". *Nature* 453, 891-894 (2008).
- [31] S.S. Kondov, W.R. McGehee, J.J. Zirbel, and B. DeMarco, "Three-Dimensional Anderson Localization of Ultracold Matter". *Science* 334, 66-68 (2011).
- [32] Y.J. Lin, R.L. Compton, A.R. Perry, W.D. Phillips, J.V. Porto, and I.B. Spielman, "Bose-Einstein condensation of 87Rb in a double-well optical trap". *Phys. Rev. Lett.* 102, 130401 (2009).
- [33] R.P. Feynman, "Simulating Physics with Computers". *Int. J. Theor. Phys.* 21, 467-488 (1982).
- [34] I. Bloch, J. Dalibard, and S. Nascimbène, "Quantum simulations with ultracold quantum gases". *Nat. Phys.* 8, 267-276 (2012).
- [35] K. Redaouia and A. Boudjemaa, "Statistical Physics : Introduction, Course, and Solved Exercises" (in Arabic). Dunod, 2nd edition (2019).
- [36] D. Clément, "Static and Dynamic Properties of a Bose-Einstein Condensate in a Random Potential". PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie-Paris VI (2007).
- [37] C. Ng et H. Ng, physique Physique statistique : Introduction, Cours et exercices corrigés 2eme édition, DUNOD.
- [38] Clément, David. Propriétés statiques et dynamiques d'un condensat de Bose-Einstein dans un potentiel aléatoire. Diss. Université Pierre et Marie Curie-Paris VI, 2007.
- [39] L.P. Pitaevskii et S. Stringari, Bose-Einstein Condensation. Oxford University Press (2003).
- [40] C. Cohen- Tannoudji, Cours au Collège de France (1997-98).
- [41] J. Doyle, B. Friedrich, R.V. Krems, and F. Masnou-Seeuws, "Ultracold Polar Molecules : Formation and Collisions". *Eur. Phys. J. D* 31, 149-164 (2004).
- [42] T. Lahaye, C. Menotti, L. Santos, M. Lewenstein, and T. Pfau Reports on Progress in Physics 72, 126401 (2009).
- [43] Griesmaier, A. Werner, J. Hensler, S. Stuhler, J. & Pfau, T. "Phys. Rev. Lett.", 94, 160401., (2005).

-
- [44] Beauls, Q., Chicireanu, R., Zanon, T., Laburthe-Tolra, B., Marechal, E., Vernac, L., Keller, J.-C., & Gorceix, O. "Phys. Rev. A", 77, 061601., (2008).
- [45] M. Lu, N. Burdick, S. Youn, and B. Lev, Physical Review Letters 107, 190401 (2011)
- [46] Redaouia, K. "Dipolar Bose-Einstein condensates in random potentials". Thèse de doctorat, Université de Chlef (2020).
- [47] Bogoliubov, N. N. "Bull.Moscow State Univ.", 7, 43 (1947).
- [48] A.L. Fetter and J.D. Walecka, Quantum Theory of Many-Particle Systems, Dover Publications, USA, 2003.
- [49] Bogoliubov, N. N. . "Izv. Akad. Nauk USSR.", 11, 7790 (1947).
- [50] Huang, K., & Meng, H.-F.. "Phys. Rev. Lett.", 69, 644 (1992).
- [51] Krumnow, C., & Pelster, A. . "Phys. Rev. A", 84, 021608(R) (2011).
- [52] Boudjemaa .A, Phys. Rev. A 91, 053619 (2015).
- [53] Abdullaev, B., & Pelster, A. . "Europ. Phys. J. D", 66, 314 (2012).
- [54] Cormackand, S. C., & Hutchinson, D. A. W. "Phys. Rev. A", 86, 053619 (2012)
- [55] Bismut, G., Laburthe-Tolra, B., Marchal, E., Pedri, P., Gorceix, O., & Vernac, L. "Phys. Rev. Lett.", 109, 155302 (2012).
- [56] Nikolic, B., Balaz, A., & Pelster, A. "Phys. Rev. A", 88, 013624 (2013).
- [57] Dotsenko, V. Cambridge University Press., 1991).
- [58] V. Dotsenko, (Cambridge University Press, Cambridge, 1991).
- [59] P.W. Anderson, Phys. Rev. 109, 1492 (1958).
- [60] W.C. Stwalley and L.H. Nosanow, Phys. Rev. Lett.36, (15) :910 (1976).
- [61] A. Boudjemaa and G .V. Shlyapnikov ■ Phys. Rev. A 87 025601 (2013).
- [62] B. Guillaume. Désordre et interactions dans les gaz quantiques bosoniques. Thèse de doctorat. Université Paris-Saclay (ComUE) (2019).
- [63] A.V. Lopatin and V.M. Vinokur, Phys. Rev. Lett. 88, 235503 (2002).
- [64] M. Kobayashi and M. Tsubota, Phys. Rev. B 66, 174516 (2002).
- [65] A. Görlitz et al., Phys. Rev. Lett.87, 130402 (2001).

-
- [66] T. Yefsah, R. Desbuquois, L. Chomaz, K. J. Gunter, and J. Dalibard, *Phys. Rev. Lett.* 107, 130401 (2011).
- [67] M. Schick, *Phys. Rev. A* 3, 1067 (1971).
- [68] V. N. Popov, *Theor. Math. Phys.* 11, 565 (1972); V. N. Popov (D. Reidel, Dordrecht,(1983).
- [69] A. Boudjemaa, *Phys. Rev. A* 86, 043608 (2012).
- [70] A. Boudjemaa and G .V. Shlyapnikov *Phys. Rev. A* 87 025601 (2013).
- [71] V. N. Popov, *Theor. Math. Phys.* 11, 478 (1972).
- [72] S.S. Natu, R.M. Wilson, *Phys. Rev. A* 88, 063638 (2013).
- [73] A. Boudjemaa, *Ann. Phys.* 381, 68 (2017).
- [74] A. Boudjemaa, *J. Phys. B* 49, 105301 (2016).