

*République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de L'enseignement Supérieur et de la  
Recherche Scientifique*

*Université Djilali Bounâama Khemis Miliana*



*FACULTÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE*

## *Mémoire*

**PRÉSENTÉ POUR L'OBTENTION DU DIPLÔME DE MASTER EN  
MATHÉMATIQUES  
SPÉCIALITÉ : ANALYSE MATHÉMATIQUE ET APPLICATIONS**

## *Thème*

***Équation différentielles à retard***

*Présenté par : BELLOUA halima  
Soutenu devant le jury composé de*

Président du jury	Dr.B.Chaouchi
Encadreur	Mr. A. Kelleche
Examineur 1	Mme. L. Djouamai
Examineur2	Mr. M.Houasni

**Année Universitaire : 2019/2020**

# Dédicace

C'est avec plaisir que je présente mes meilleurs vœux et sentiments et à  
toute mes **chers professeurs** et à  
toute **ma famille**, en particulier  
**mes parents et mon mari.**  
Je dédie ce travail à tous mes  
Avec mon infinie reconnaissance.

**A mes soeurs**  
**fatima, yasmina, samah, hayet**

**A mes frères**  
**bilale, islam,**  
**chers amis**  
sans exception.

# Remerciement

Au début et avant tout, je rends grâce à **Dieu** tout puissant qui m'a aide à terminer ce travail.

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à **Mr A. Kelleche** avoir encadré ce travail et pour les conseils efficaces et les encouragements et encore plus pour tout le temps qu'il m'a consacré pour me suivre pendant la rédaction de ce travail.

Je veux exprimer mes remerciements les plus dévoués aux membres de jury qui m'ont honorées en acceptant dévaluer ce travail.

mes remerciements s'étendent également à tous mes enseignants durant les années des études.

A mes familles et mes amis qui par leurs prières et leur encouragements, on a pu surmonter tous les obstacles.

Je profite l'occasion ainsi à adresser mes remerciements à mes collègues de Master 2 et 1.

Je remercie toute personne qui a participé et contribué de près ou de loin à l'exécution de ce modeste travail.

# Résumé

Dans ce mémoire on s'est intéressé à étudier l'équation différentielle à retard, on a traité la question d'existence des solutions, régularité et l'unicité, la question de la stabilité est ainsi étudiée au sens de Lyapunov.

**Mots clés :** L'équation différentielle, existence, l'unicité, Fonction lipschitzienne, retard, Lyapunov.

---

# Abstract

In this thesis, we are interested in studying delay differential equations with treating finding solutions and its uniqueness. At the end, we study the stability.

**Key words :** differential equation, existence, function lipschitzian, delay, Lyapunov

## Notations

$\mathbb{R}$	: ensemble des nombres réels.
$\mathbb{R}^+$	: ensemble des nombres réels positifs ou nuls.
$\mathbb{R}^n$	: espace euclidien de dimension $n$
$\mathbb{N}$	: ensemble des entiers naturels.
$\mathbb{N}^*$	: ensemble des entiers naturels non nuls.
$[a, b]$	: intervalle fermé de $\mathbb{R}$ d'extrémités $a$ et $b$ .
$(a, b]$	: intervalle semi-ouvert de $\mathbb{R}$ d'extrémités $a$ et $b$ .
$(a, b)$	: intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ d'extrémités $a$ et $b$ .
$\mathcal{C} = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$	: espace des fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$
$ \cdot $	: valeur absolue.
$\ f\ _\infty$	: norme de la convergence uniforme et se définit par $\sup  f(x) $
<i>sup</i>	: fonction supremum.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>PRÉLIMINAIRES</b>	<b>9</b>
1.1	Équations différentielles ordinaires . . . . .	9
1.1.1	Définition générale . . . . .	9
1.1.2	Existence et unicité de la solution . . . . .	10
1.2	Stabilité . . . . .	11
<b>2</b>	<b>Équation différentielles à retard</b>	<b>14</b>
2.1	Équation différentielles à retard . . . . .	14
2.1.1	Définition générale . . . . .	14
2.2	Classification . . . . .	15
2.2.1	Équations différentielles retardées . . . . .	15
2.2.2	Équations différentielles à retard de type neutre . . . . .	15
2.3	Résultats d'existence et d'unicité . . . . .	15
2.3.1	Cas des équations fonctionnelles à retard . . . . .	16
2.3.2	Cas des équations fonctionnelles de type neutre . . . . .	20
2.4	Méthode des étapes pour résolution des EDR . . . . .	20
2.5	Comparaison avec les équations différentielles ordinaires : . . . . .	25
<b>3</b>	<b>stabilité</b>	<b>27</b>
3.1	L'approche de Lyaponov-Krasovskii . . . . .	29
3.2	stabilités pour les systèmes à retard constant . . . . .	29
3.3	stabilités pour les systèmes à retard de type neutre . . . . .	29



Les équations à retard, ont été introduites, pour modéliser des phénomènes dans lesquels, il y'a un mélange temporel entre l'action sur le système et la réponse du système à cette action. Par exemple, dans le processus de naissance des populations biologiques (cellules, bactéries, ...etc.).

Beaucoup de phénomènes rencontrés en physiques, biologie, chimie, ...etc., ont trouvé dans la théorie des équations à retard, un bon moyen de modélisation, (un moyen plus réaliste que dans le cas des équations différentielles ordinaires). Les exemples suivants sont suggérés pour cette modélisation des phénomènes à retard :

### **Douche une personne**

L'exemple le plus simple est celui d'une douche. Une personne sous la douche veut atteindre une certaine valeur de la température  $T_d$ , à l'instant  $t$ .

Soit  $T(t)$  la température de l'eau au mixeur à l'instant  $t$  et soit  $h$  le temps requis pour que l'eau se déplace de la sortie du mixeur vers la personne. Notons que la variation de la température  $T(t) - T_d$  est proportionnelle à l'angle de rotation du mixeur. La température de l'eau qui atteint la personne à l'instant  $t - u$  est donnée par l'équation

$$T'(t) = K[T(t - u) - T_d], K \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

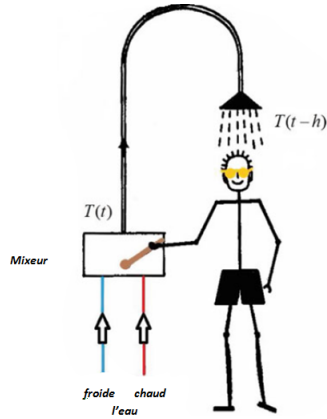


FIGURE 1 – Une personne sous la douche

## Phénomènes de transports

L'exemple suivant est un modèle simple de flux de trafic sans accidents avec retard. Le phénomène est décrit par l'équation suivante :

$$X''_i = K[X'_{i+1}(t - \tau) - X'_i(t - \tau)]. \quad (2)$$

où  $X_i$  désigne la position du véhicule sur la route. Il peut également être utilisé comme modèle pour le mouvement des voitures à l'instant  $t$ , comme indiqué sur la figure (0.2). On considère, accélération de ses voitures successivement  $X'_{i+1}$  et  $X'_i$ . Supposons la vitesse d'une voiture  $V$  et  $K$  est un constant positive.

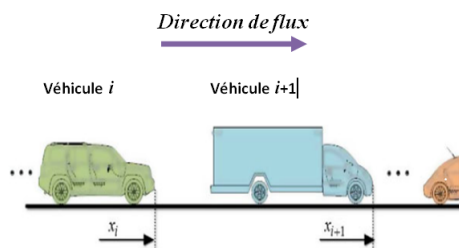


FIGURE 2 – Flux de trafic

## dynamiques de population

La dynamique des populations est une partie de la biologie. On peut la modéliser mathématiquement par l'équation à retard suivante :

$$x'(t) = \gamma [1 - K^{-1}x(t - u)] x(t), \quad \gamma > 0, K > 0, u \geq 0, \quad (3)$$

$x(t)$  représente le nombre de la population à l'instant  $t$ , qui est considéré comme une quantité continue et  $u$  signifie que les ressources alimentaires

---

au temps  $t$  sont déterminées par le nombre de population à l'instant  $t-h$ . La constante  $\gamma$  est le coefficient de croissance. Il représente la différence entre le taux d'augmentation et le taux de mortalité. La constante  $K$  est la moyenne de la population. On a organisé le contenu de cette thèse en trois chapitres principaux. Le premier chapitre est réservé à rappeler les différentes notions sur les équations différentielles ordinaires. Le deuxième chapitre est consacré aux équations différentielles à retards. Ce chapitre est débuté par la classification.

## 1.1 Équations différentielles ordinaires

Dans ce chapitre nous rappelons quelques définitions et théorèmes qu'on va utiliser tout au long de ce mémoire.

### 1.1.1 Définition générale

Soit  $E$  un espace vectoriel normé, une équation différentielle ordinaire est une équation dont l'inconnue est une fonction  $x$  exprimé sous la forme :

$$F(t, x, x', x'', \dots, x^{(n)}) = 0, \quad (1.1)$$

où  $F$  est une fonction continue sur un ouvert  $U \times E^{n+1}$  appelé domaine. On pratique on préfère travailler avec des équations plus particulières dites explicites c'est à dire :

$$x^n = G(t, x, x', \dots, x^{(n-1)}). \quad (1.2)$$

Toute équation différentielle d'ordre  $k$  où  $k \geq 1$  on peut la rendre aux équations différentielles d'ordre 1 en faisant le changement de variable suivant :

$$\begin{bmatrix} y = x' \\ y' = x'' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} = x^n, \end{bmatrix}$$

### Définition 1

Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  une fonction définie sur un ouvert non vide  $U$  de  $\mathbb{R}^n$  telle que

$$x' = f(t, x). \quad (1.3)$$

On dit que la fonction  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  définie sur  $I$ , intervalle de  $\mathbb{R}$ , est une solution de l'équation (1.3) si elle est dérivable sur  $I$  et vérifie  $\forall t \in I, (t, x(t)) \in U$  et  $x' = f(t, x)$ .

### Définition 2

Soit  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  et  $\tilde{x} : \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$  des solutions de l'équation (1.3), on dit que  $\tilde{x}$  est un prolongement de  $x$  si :  $I \subset \tilde{I}$  et  $\tilde{x}/I = x$ .

### Définition 3

On dit qu'une solution  $x$  est maximale s'il n'existe pas un prolongement  $\tilde{x}$ , tel que  $I \subset \tilde{I}$ .

### Définition 4

Toute solution  $(I, x)$  de (1.3) définie sur l'intervalle  $I = \tilde{I}$  toute entier est dite globale.

### Lemme 1

Si  $f$  est de classe  $C^n$  sur  $I \times \mathbb{R}^n$  alors toute solution de (1.3) est de classe  $C^{n+1}$ .

## 1.1.2 Existence et unicité de la solution

Nous rappelons, dans ce paragraphe, quelques résultats de base sur l'existence et l'unicité des solutions de l'équation (1.3). On a eu recours aux ouvrages suivants : [5]

### Définition 5: Fonction lipschitzienne

1. On dit que la fonction  $f : I \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$  est globalement lipschitzienne par rapport à  $x$ . S'il existe  $L \geq 0$  telle que  $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n, \forall t \in I$ , on a

$$\| f(t, x_1) - f(t, x_2) \| \leq L \| x_1 - x_2 \|$$

2. On dit que  $f$  est localement lipschitzienne par rapport à  $x$ . S'il existe un voisinage  $V$  de  $(t_0, x_0)$  et une constante  $L \geq 0$  telle que  $\forall (t, x_1) \in V$  et  $\forall (t, x_2) \in V$ , on a

$$\| f(t, x_1) - f(t, x_2) \| \leq L(t, x_0) \| x_1 - x_2 \|$$

3. Si  $0 \leq L \leq 1$  on dit que  $f$  est contractante.

### Remarque 1

1. Si  $f$  est de classe  $C^1$  alors elle est localement lipschitzienne.
2. Si  $f$  est continue et linéaire alors elle est localement lipschitzienne.

### Théorème 1.1: Cauchy-Lipschitz

Soit  $f : I \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$  une application continue et localement lipschitzienne par rapport à  $x$ , alors  $\forall (t_0, x_0) \in I \times U$  il existe une unique solution  $x \in C^1([t_0 - \tau, t_0 + \tau])$  avec  $\tau \geq 0$  du problème (1.3) avec la condition initiale  $x(t_0) = x_0 \forall t \in [t_0 - \tau, t_0 + \tau]$ .

### Théorème 1.2: Existence globale

On suppose  $f \in C(I \times U, \mathbb{R}^n)$  est globalement lipschitzienne par rapport à  $x$ , alors  $\forall (t_0, x_0) \in I \times U$  il existe un unique  $x \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$  solution de (1.3).

### Théorème 1.3: Unicité globale

Soient  $x_1$  et  $x_2$  deux solutions de (1.3) définies de  $I$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$  avec  $f$  est localement lipschitzienne. Si  $x_1$  et  $x_2$  coïncident en un point de  $I$ , alors  $x_1 = x_2$ .

## 1.2 Stabilité

Dans l'étude des équations différentielles ordinaires, on s'intéresse au problème de la stabilité des solutions stationnaires (points d'équilibre).

### Définition 6: point d'équilibre

On dit que  $a$  est un point d'équilibre du système (1.3) si  $f(a) = 0$ . pour tout  $t \geq 0$

### Exemple 1.

on a l'équation différentielle suivante :

$$y'' = \sin(y)$$

qui s'écrit aussi :

$$y' = x \text{ et } x' = \sin(y)$$

possède deux points d'équilibres :  $(y = 0, x = 0)$  et  $(y = \pi, x = 0)$ .

Vous savez bien que (On remarque que ) l'équilibre  $y^* = 0$  et l'équilibre  $y^* = \pi$  non pas de tout le même statut.

Donc un premier cas intéressant à étudier est celui de la stabilité de l'origine pour un système différentiel.

### Définition 7: Stabilité

1. On dit que  $a$  est un point d'équilibre uniformément stable si :  
 $\forall \epsilon > 0, \exists \eta(\epsilon) : \|x_0 - a\| \leq \eta \implies \|x(t, x_0) - a\| \leq \epsilon, \quad \forall t \geq 0.$
2. On dit que  $a$  est un point d'équilibre uniformément asymptotiquement stable si,  $a$  est uniformément stable et si en plus il existe un voisinage de  $a$  où  $x(t, x_0)$  a pour limite  $a$ . (c'est à dire qu'il existe  $\rho > 0 : \|x_0 - a\| \leq \rho \implies \lim_{t \rightarrow \infty} x(t, x_0) = a$ ), Donc un premier cas intéressant à étudier est celui de la stabilité de l'origine pour un système différentiel.
3. Un point d'équilibre qui n'est pas uniformément stable est dit instable.

## Fonctions de Lyapunov

### Définition 8

Soit  $0$  l'origine de  $R^n$ ,  $D$  voisinage de  $0$ . Soit  $U$  une fonction à valeurs réelles définie sur  $D$  telle que :

1.  $U(0) = 0$ ,
2.  $U(x) > 0$  si  $x \neq 0$ .

On dit que  $U$  est définie positive dans  $D$ .

---

**Théorème 1.4: Théorème de stabilité de Lyapunov**

Soit  $0$  le point d'équilibre de  $\dot{x} = f(x)$ ,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $D$  un voisinage de  $0$  dans  $\mathbb{R}^n$  et  $V : D \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continûment différentiable et définie positive.

– Si  $\dot{V} \leq 0, \forall x \in D$ , alors  $x = 0$  est stable.

– Si  $\dot{V}(x) < 0$  dans  $D - \{0\}$ , alors  $x = 0$  est asymptotiquement stable.

**Remarque 2**

La fonction  $V$  définie dans le théorème ci-dessus est appelée fonction de Lyapunov.

**Exemple 2.** On considère le système

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 - e^{-2t}x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_2,\end{aligned}$$

Pour déterminer la stabilité de l'équilibre  $0$ , posons

$$V(t, y) = y_1^2 + (1 + e^{-2t})y_2^2,$$

Cette fonction est définie positive, car elle domine la fonction définie positive

$$V(y) = y_1^2 + y_2^2,$$

indépendante de  $t$ . Elle est dominée par une fonction définie positive

$$V(y) = y_1^2 + 2y_2^2,$$

indépendante de  $t$ . De plus, la dérivée de  $V$  pour le système vaut

$$\dot{V}(t, y) = -2(y_1^2 - y_1y_2 + y_2^2(1 + 2e^{-2t})),$$

ce qui montre que

$$\begin{aligned}\dot{V}(t, y) &\leq -2(y_1^2 - y_1y_2 + y_2^2), \\ &\leq -(y_1 - y_2)^2 - y_1^2 - y_2^2.\end{aligned}$$

On en déduit alors que  $\dot{V}$  est définie négative, et que  $0$  est uniformément asymptotiquement stable.

## 2.1 Équation différentielles à retard

### 2.1.1 Définition générale

Les équations différentielles à retard sont des équations dans lesquelles un retard temporel apparaît dans les variables d'états. Les retards sont importants dans les problèmes pour lesquels le comportement est affecté par la dépendance des variables d'états au temps passé. Le système à retard

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t), x_t), \\ x_{t_0}(\theta) = \phi(\theta), \end{cases} \quad (2.1)$$

a été appelé équation différentielle aux différences ou équation différentielle fonctionnelle. Ici, nous choisissons équation différentielle fonctionnelle (EDF) quand on mentionne le système (2.1). Où La variable  $x$  dépend tu temps. C'est une variable d'état car elle caractérise l'état du système à un moment donné. Le système évolue. Sa vitesse d'évolution  $x'$  au temps  $t$  dépend à la fois de l'état de système au temps  $t$ , à travers  $x(t)$ , mais également de l'état du système à un temps antérieur  $t - u$ ,  $t > 0$ , à travers  $x(t - u)$ .

La condition initiale  $x_{t_0}$  peut ainsi être représenté par une fonction continue  $\phi$  de la forme suivante :  $x(t_0 + \theta) = \phi(\theta)$  pour tout  $\theta \in [u, 0]$

Une solution du système (2.1) est notée  $x(t, t_0, \varphi_0)$  pour faire apparaître explicitement les conditions initiales.

---

## 2.2 Classification

Les équations fonctionnelles à retards peuvent être classées comme linéaires ou non linéaires, autonomes ou non autonomes, périodiques ou non ou encore selon les types des retards. Dans ce paragraphe, on s'intéresse à donner une classification des EDR selon les types de retards cités dans la littérature où on distingue deux classes principales, la première est dite " **d'équations différentielles retardées** " et l'autre " **d'équations différentielles de type neutre**. "

### 2.2.1 Équations différentielles retardées

Dans cette première classe, on s'intéresse par Équations différentielles à retard constant.

**Définition 9: Équations différentielles à retard constant**

On appelle équation différentielle à retard constant toute équation de la forme :

$$x'(t) = f(t, x(t), x(t - u)) \quad (2.2)$$

, où  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , une fonction continue et  $u$  un nombre réel positif que l'on appelle le retard.

### 2.2.2 Équations différentielles à retard de type neutre

Ce type de équation distingue EDR, où la dérivée de l'état au temps actuel dépend non seulement des valeurs de l'état passé mais aussi de la dérivée d'ordre le plus élevé intervenant dans l'équation du temps passé. Comme le modèle dans secte (1.1). Et par exemple

$$x''(t) = ax'(t - h) + bx(t), \quad x(t) \in \mathbb{R} \quad (2.3)$$

,

## 2.3 Résultats d'existence et d'unicité

Dans cette section, on présente quelques résultats classiques sur l'existence et l'unicité.

Soit l'équation différentielle à retard :

$$x' = f(t, x(t)); \quad (2.4)$$

où  $f : \mathbb{R} \times C \rightarrow \mathbf{R}^n$  est une fonction donnée,  $C = C([-u, 0], \mathbb{R}^n)$  est l'espace des applications continues de l'intervalle  $[-u, 0]$  vers  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u > 0$ , et  $x_t \in C$ ,  $x_t(\theta) = x(t + \theta)$   
 L'espace  $C$  muni de la topologie de la convergence uniforme :  $\|\varphi\| = \sup_{\theta \in [-u, 0]} \|\varphi(\theta)\|_{\mathbb{R}^n}$  est un espace de Banach.

### Définition 10

On appelle solution de (2.2) pour la condition initiale  $\varphi \in C$  toute fonction  $x : [-u, a) \mapsto \mathbb{R}^n$ ,  $0 < a \leq \alpha$ , qui satisfait le ,

- $x$  est continue sur  $[u, 0)$ ,
- $x(t) = \varphi(t)$  pour  $t \in [-u, 0]$ ,
- $x$  est différentiable sur  $[0, a)$  et satisfait l'équation (2.5) pour  $t \in [0, a)$  ( on considère la dérivée à droite en  $t = 0$  ).

## 2.3.1 Cas des équations fonctionnelles à retard

### Définition 11

Étant donné  $\psi \in C$  et  $t_0 \in \mathbb{R}$ , une solution de l'équation (2.4) est une fonction notée  $x(t)$  telle que  $x(t) = \psi(t)$  si  $t \in [t_0 - u; t_0]$  et satisfaisant (2.4) si  $t \in [t_0, t_0 + A]$  avec  $A > 0$ . Une telle fonction  $x(t)$  est dite solution de (2.4) à travers  $(t_0, \psi)$  et elle est notée souvent par

$$x(t) = x(t_0, \psi, f)$$

### Lemme 2

Etant données une fonction  $\psi \in C$ ,  $t_0 \in \mathbb{R}$  et  $f(t, \psi)$  une fonction continue. La recherche d'une solution de l'équation (2.4) à travers  $(t_0, \psi)$  est équivalente à la résolution de l'équation intégrale

$$\begin{cases} x_{t_0} = \psi, \\ x(t) = \psi(0) + \int_{t_0}^t f(u, x_u) du, t \geq t_0, \end{cases}$$

### Définition 12

On dit que la fonction  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  est localement lipschitzienne par rapport à  $y$  si pour  $\forall (t_0, x_0)$  de  $\Omega$  il existe un voisinage de  $(t_0, x_0)$  dans lequel  $f$  est lipschitzienne dans ce voisinage

### Théorème 2.1

Soit le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t), (t-u)), \\ x|_{[t_0-u, t_0]} = \varphi(t), \end{cases} \quad (2.5)$$

avec  $t \in [-u, 0]$  et  $\varphi \in C([-u, 0], \mathbb{R})$  Si  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  est continue alors le problème (2.5) admet au moins une solution, si de plus  $f$  est localement lipschitzienne par rapport aux deux dernières variables alors cette solution est unique

### Théorème 2.2

Soit  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue localement lipschitzienne par rapport à la troisième variable,  $\forall t_0 \in \mathbb{R}$ , on se donne une fonction  $\varphi : [t_0 - u, t_0] \rightarrow \mathbb{R}$  continue alors, le problème (2.5) admet une solution unique sur tout intervalle  $[t_0 - u, \alpha]$  avec  $\alpha \in ]0, +\infty[$

Pour la démonstration on a besoin du lemme suivant :

### Lemme 3

Soit  $C$  une constante donnée,  $k$  une fonction continue sur un intervalle  $J$  à valeurs dans  $\mathbb{R}_+$  et  $x_0 \in J$  Si  $\nu : J \rightarrow [0, +\infty]$  est une autre fonction continue et si

$$\nu \leq C + \left| \int_{t_0}^t k(s)\nu(s)ds \right| \quad \forall t \in J, \quad (2.6)$$

alors

$$\nu \leq C \exp\left(\int_{t_0}^t k(s)ds\right) \quad ; \quad \forall t \in J,$$

### Preuve 1.

▷ 1<sup>er</sup> cas :  $t \geq t_0$

L'inégalité (2.6) peut s'écrire sous la forme :

$$k(t)\nu(t) - k(t) \left[ C + \int_{t_0}^t k(s)\nu(s)ds \right] \leq 0, \quad (2.7)$$

Posons  $P(t) = C + \int_{t_0}^t k(s)\nu(s)ds$ , Alors,

$$P'(t) = k(t)\nu(t),$$

---

L'inégalité (2.6) devient :

$$P'(t) - k(t)P(t) \leq 0,$$

En multipliant par le facteur intégrant  $\exp\left(-\int_{t_0}^t k(s)ds\right)$ , on obtient :

$$P'(t) \exp\left(-\int_{t_0}^t k(s)ds\right) - P(t)k(t) \exp\left(-\int_{t_0}^t k(s)ds\right) \leq 0,$$

C'est à dire cette dernière inégalité :

$$\left[P(t) \exp - \int_{t_0}^t k(s)ds\right]' \leq 0,$$

En intégrant cette dernière inégalité entre  $t_0$  et  $t$  on remarque que :  $P(t_0) = C$ , on obtient :

$$P(t) \exp\left(-\int_{t_0}^t k(s)ds\right) - C \leq 0,$$

ou bien :

$$P(t) \leq C \exp \int_{t_0}^t k(s)ds,$$

O r :  $\nu(t) \leq P(t)$  alors :

$$\nu(t) \leq C \exp \int_{t_0}^t k(s)ds \quad (c.q.f.d),$$

▷ 2<sup>me</sup> cas :  $t < t_0$ ,

$$\left| \int_{t_0}^t k(s)\nu(s)ds \right| = - \int_{t_0}^t k(s)\nu(s)ds,$$

L'inégalité (2.6) s'écrit sous la forme :

$$k(t)\nu(t) - k(t) \left[ C - \int_{t_0}^t k(s)\nu(s)ds \right] \leq 0,$$

$$\text{Posons : } Q(t) = C - \int_{t_0}^t k(s)\nu(s)ds \leq 0,$$

L'inégalité (2.7) devient :

$$-Q'(t) - k(t)Q(t) \leq 0,$$

---

C'est à dire :

$$Q'(t) + k(t)\nu(t) \geq 0,$$

En multipliant cette inégalité par le facteur  $\exp \int_{t_0}^t k(s)ds$  on obtient

$$\frac{d}{dt} \left[ Q(t) \exp \int_{t_0}^t k(s)ds \right] \geq 0,$$

Or :  $\nu(t) \leq Q(t)$  et alors,  $\forall t \in J$ ,

$$\nu(t) \leq C \exp \left( \left| \int_{t_0}^t k(s)ds \right| \right), \quad \square$$

Maintenant procédant à la démonstration du théorème.

### Preuve 2.

Par absurde.

Supposons qu'il existe deux solutions  $x$  et  $\tilde{x}$  définies de  $[t_0 - u, \alpha]$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  tel que :

$$x(t) \neq \tilde{x} \text{ Soit } t_1 = \inf \{ t \in [t_0, \alpha], \text{ telle que } : x(t) \neq \tilde{x} \},$$

On a donc :  $x(t) = \tilde{x}$  pour  $t \in [t_0 - u, t_1]$  Comme  $f$  est localement lipschitzienne, alors  $\exists \varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0$  tel que  $f$  est localement lipschitzienne sur  $D$ ; avec

$$D = [t_1 - \varepsilon_1, t_2 + \varepsilon_2] \times (x(t_1 - u) - \varepsilon_2, x(t_1 - u) + \varepsilon_2),$$

▷ 1<sup>er</sup> cas :  $\varepsilon_1 \geq u$ ,

Soit  $t \in [t_1, t_1 + \varepsilon]$  alors :

$$\begin{aligned} x(t) - \tilde{x}(t) &= \int_{t_0}^t [f(s, x(s), x(s-u)) - f(s, \tilde{x}(s), \tilde{x}(s-u))] ds, \\ &= \int_{t_0}^t [f(\theta + u, x(\theta + u), y(\theta)) - f(\theta + u, \tilde{x}(\theta + u), \tilde{x}(\theta))] ds, \end{aligned}$$

Puisque  $t < t_1 + \varepsilon_1$  et  $\varepsilon_1 \leq u$  Alors :  $t \leq t_1 + u$ , or  $x(\theta) = \tilde{x}$  pour  $\theta \in [t_0 - u, t_0]$ , alors  $t \leq t_1 + u$ ,

Or  $x(\theta) = \tilde{x}(\theta)$  pour tout  $\theta \in [t_0 - u, t_0]$ , Alors :

$$x(t) - \tilde{x}(t) = C,$$

Ainsi :  $x(t) = \tilde{x}(t)$  pour tout  $t \in [t_0 - u, t_1 + \varepsilon]$  Ce qui contredit la définition (1).

Donc, la solution du problème est unique.

### Définition 13

On dit que  $\tilde{y}$  est un prolongement de  $x$  s'il existe  $\beta > \alpha$  tel que  $\tilde{x}$  est définie sur  $[t_0 - u, \beta[$ , qui coïncide avec  $x$  sur  $[t_0 - u, \alpha[$  et vérifie l'équation (2.8) sur  $[t_0 - u, \beta[$

### Exemple 3.

Soit l'équation différentielle à retard constant.

$$\dot{x}(t) = -x(t - \pi/2)$$

qui admet comme solution  $x(t) = \sin t$ . Cette solution s'annule pour  $t = k\pi$ , tel que  $k \in \mathbb{Z}$ .

## 2.3.2 Cas des équations fonctionnelles de type neutre

### Définition 14

Supposons que  $\Omega$  est un sous ensemble ouvert de  $\mathbb{R} \times \mathcal{C}$   $D : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  et  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  sont deux fonctions données continues avec  $D$  atomique en zéro. La relation

$$\frac{d}{dt}D(t, x_t) = f(t, x_t), \quad (2.8)$$

est dite une équation différentielle de type neutre notée par EDN.

### Théorème 2.3

Si  $\Omega$  est un sous-ensemble ouvert de  $\mathbb{R} \times \mathcal{C}$  et  $(t_0, \psi) \in \Omega$ , alors il existe une solution de l'équation (2.5) passant par  $(t_0, \psi)$ ,

### Théorème 2.4

Si  $\Omega$  est un sous-ensemble ouvert de  $\mathbb{R} \times \mathcal{C}$  et  $f(t, \psi)$  est lipschitzienne par rapport à  $\psi$  sur tout sous-ensemble compact de  $\Omega$ , alors pour tout  $(t_0, \psi) \in \Omega$ , il existe une solution unique pour l'équation (2.5) passant par  $(t_0, \psi)$

## 2.4 Méthode des étapes pour résolution des EDR

La méthode des étapes (dite aussi "méthode pas à pas", "méthode des pas" ou "méthode des intégrations successives") permet de résoudre numériquement les EDR et les EDN et permet par la même occasion d'établir l'existence et l'unicité de la solution.

On se propose de donner une illustration détaillée sur l'exemple élémentaire suivant. Soit le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} x' = x(t-r) \dots \dots \dots (1), \\ x(t) = 1, \text{ pour } t \in [-r, 0] \dots (2), \end{cases} \quad (2.9)$$

(1)  $\Leftrightarrow \int_0^t x'(s)ds = \int_0^t x(s-r)ds$ ; en posant  $u = s - r$ , on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^t x'(s)ds &= \int_{-r}^{t-r} x(u)du \\ &= \int_{-r}^{t-r} \varphi(u)du, \\ &= \int_{-r}^{t-r} du, \\ &= [u]_{-r}^{t-r}, \\ &= t \end{aligned}$$

Donc  $x_1(t) = t + x(0) = t + 1$ ,  $x_1(t) = t + 1$ . Posons  $x_1(t) = t + 1$ ,  $t \in [0, r]$

La résolution de l'équation (1), sur  $[r, 2r]$ ; On considère, la condition initiale

$x|_{[0,r]} = x_1$  pour tout  $t \in [r, 2r] = x_1$ ; on a :

(1)  $\Leftrightarrow \int_r^t \dot{x}(s)ds = \int_r^t x(s-r)ds$  en posant :  $u = s - r$ ; on obtient :

$$\begin{aligned} \int_r^t x'(s)ds &= \int_0^{t-r} x(u)du, \\ &= \int_0^{t-r} x_1(u)du, \\ &= \int_0^{t-r} (u+1)du, \\ &= \left[ \frac{u^2}{2} + u \right]_0^{t-r}, \\ &= \frac{(t-r)^2}{2} + t - r, \\ &= \frac{t^2 + r^2 - 2rt}{2} + t - r, \\ &= \frac{1}{2} [t^2 + r^2 - 2rt + 2t - 2r], \\ &= \frac{1}{2} [t^2 + 2(1-r)t + r^2 - 2r], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_2(t) &= \frac{1}{2} [t^2 + 2(1-r)t + r^2 - 2r] + r + 1, \\
&= \frac{1}{2} [t^2 + 2(1-r)t + r^2 - 2r + 2r + 2], \\
&= \frac{1}{2} [t^2 + 2(1-r)t + r^2 + 2],
\end{aligned}$$

La résolution  $[2r, 3r]$ ; On considère, comme condition initiale

$x|_{[r, 2r]} = x_2$ , pour tout  $t \in [2r, 3r]$ ; on a :

$$(1) \Leftrightarrow \int_{2r}^t \dot{x}(s) ds = \int_{2r}^t x(s-r) ds,$$

posant :  $u = s - r$ ; on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_{2r}^t \dot{x}(s) ds &= \int_r^{t-r} x(u) du, \\
&= \int_r^{t-r} x_2(u) du, \\
&= \int_r^{t-r} 1/2 [s^2 + 2(1-r)s + r^2 + 2] ds, \\
&= 1/2 \left[ \frac{s^3}{3} + 2(1-r)\frac{s^2}{2} + (r^2 + 2)s \right]_r^{t-r}, \\
&= 1/2 \left[ \frac{(t-r)^3}{3} + 2(1-r)\frac{(t-r)^2}{2} + (r^2 + 2)(t-r) \right], \\
&\quad - 1/2 \left[ \frac{r^3}{3} + 2(1-r)\frac{r^2}{2} + (r^2 + 2)r \right], \\
&= 1/2 \left[ \frac{t^3 - 3rt^2 + 3r^2t - r^3}{3} + (1-r)t^2 + 2(r^2 - r)t \right], \\
&\quad + 1/2 \left[ -r^3 + r^2 + (r^2 + 2)t - r^3 - 2r - \frac{r^3}{3} - r^2 + r^3 - r^3 - 2r \right], \\
&= 1/2 \left[ \frac{t^3 - 3rt^2 + 3r^2t - r^3}{3} + (1-r)t^2 + (2r^2 - 2r + r^2 + 2)t \right], \\
&\quad + 1/2 \left[ -2r^3 - 4r - \frac{r^3}{3} \right], \\
&= 1/6 [t^3 + t^2(-3r + 3 - 3r) + t(3r^2 + 9r^2 - 6r + 6) - 6r^3 - 12r - r^3], \\
&= 1/6 [t^3 + t^2(-6r + 3) + t(12r^2 - 6r + 6) - 6r^3 - 12r - r^3], \\
&= 1/6 [t^3 + t^2(-2r + 1)3 + t(2r^2 - 1r + 1)6 - 7r^3 - 12r] \\
x_3(t) &= 1/6 [t^3 + 3(-2r + 1)t^2 + 6(2r^2 - 1r + 1)t - 7r^3 - 12r] + x_2(2r), \\
&= 1/6 [t^3 + 3(-2r + 1)t^2 + 6(2r^2 - 1r + 1)t - 7r^3 - 12r] + 1/2 (r^2 + 4r + 2)
\end{aligned}$$

**Exemple 4.**

pour on propose un autre exemple, plus spécifique, sur lequel, on va appliquer de même l'intégration par la méthode des pas.

$$\begin{cases} x'(t) = x(t-1) \dots \dots \dots (1), \\ x(t) = a, \text{ pour } t \in [-1, 0] \dots \dots (2), \end{cases}$$

La résolution sur  $[0,1]$ ; soit  $t \in [0, 1]$

(1)  $\Leftrightarrow \int_0^1 x'(s)ds = \int_0^1 x(s-1)ds$ , en posant  $u = s - 1$ , obtient,

$$\begin{aligned} \int_0^t x'(s)ds &= \int_{-1}^{t-1} x(u)du, \\ &= \int_{-1}^{t-1} a du; \\ &= at, \end{aligned}$$

Donc  $x(t) = at + x(0) = at + a$ ,

Posons  $x_1(t) = at + a, t \in [0, 1]$

La résolution sur  $[1,2]$ ; on considère la condition initiale  $x|_{[0,1]} = x_1$  pour  $t \in [1, 2]$ ; on a donc (1)  $\Leftrightarrow \int_1^t x'(s)ds = \int_1^t x(s-1)ds$ ; en posant  $u = s - 1$ ; on obtient

$$\begin{aligned} \int_1^t x'(s)ds &= \int_0^{t-1} x(u)du, \\ &= \int_0^{t-1} x_1(u)du, \\ &= \int_0^{t-1} (au + u)du, \\ &= \left[ a \frac{u^2}{2} + au \right]_0^{t-1}, \\ &= \frac{a}{2}(t-1)^2 + a(t-1), \\ &= a \left( \frac{t^2}{2} - 1 + \frac{1}{2} + t - 1 \right), \\ &= \frac{a}{2} (t^2 - 1), \end{aligned}$$

Il s'en suit que  $x(t) - x(1) = \frac{a}{2} (t^2 - 1)$  or  $x(1) = x_1(1) = 2a$ ;

alors  $x(t) = \frac{a}{2}t^2 + \frac{3a}{2}$ ,

Posons  $x_2(t) = \frac{a}{2}t^2 + \frac{3a}{2}, t \in [1, 2]$ ,

La résolution sur  $[2,3]$ ; on considère la condition  $x|_{[1,2]} = x_2$ . Pour  $t \in$

[2, 3]; on 1 : (1)  $\Leftrightarrow \int_2^t \dot{x}(s)ds = \int_2^t x(s-1)ds$ , n posant  $u = s - 1$ , on obtient :

$$\begin{aligned}
 \int_2^t \dot{x}(s)ds &= \int_1^{t-1} x(u)du, \\
 &= \int_1^{t-1} x_2(u)du, \\
 &= \int_1^{t-1} \left( \frac{a}{2}u^2 + \frac{3a}{2} \right) du, \\
 &= \left[ \frac{a}{6}u^3 - \frac{3}{2}au \right]_1^{t-1}, \\
 &= \frac{a}{6} (t^3 - 3t^2 - 1) + \frac{3a}{2}(t-1) - \frac{5a}{3}, \\
 &= \frac{a}{6}t^3 - \frac{a}{2}t^2 + 2at - \frac{5}{3}a,
 \end{aligned}$$

on a alors  $x(t) - x(2) = \frac{a}{6}t^3 - \frac{a}{2}t^2 + 2at - \frac{5}{3}a$  or  $x(2) = x_2(2) = \frac{7}{2}a$ , alors

$$x(t) = \frac{a}{6}t^3 - \frac{a}{2}t^2 + 2at + \frac{1}{6}a,$$

$$\text{Posons } x_3(t) = \frac{a}{6}t^3 - \frac{a}{2}t^2 + 2at + \frac{1}{6}a, t \in [2, 3]$$

### Exemple 5.

c'est exemple pour La équation différentielle de type nature, on considérer

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-r_0), \dot{x}(t-r_1)), \quad x(t_0 + \theta) = \phi(\theta), \quad \theta \in [-r, 0] \quad (2.10)$$

On supposons que  $f$  est continue dans tout les argument et satisfait la condition de Lipschitz par rapport au deuxième argument  $x = (t - r_0)$ , alors  $\varphi \in C^1[-r, 0]$  avec  $r = \max\{r_0, r_1\}$ , ou bien pour  $\Delta t = \min\{r_0, r_1\}$ .

On propose une exemple plus spécifique sur le quel, on va applique la méthode des étapes

$$\dot{x}(t) = \dot{x}(t-1), \quad t \geq 0$$

avec la condition initiale  $x_0 = \varphi \in C^1[-1, 0]$ .

▷ La résolution sur  $[0, 1]$

Soit  $t \in [0, 1]$

$$\int_0^1 \dot{x}(s)ds = \int_0^1 \dot{x}(s-1)ds,$$

---

Posons  $v = s - 1$ , on obtient alors :

$$\begin{aligned}\int_0^t \dot{x}(s) ds &= \int_{-1}^{t-1} \dot{x}(u) du, \\ &= [x(u)]_{-1}^{t-1}, \\ &= x(t-1) - x(-1), \\ x(t) &= x(t-1) - x(-1) + x(0),\end{aligned}$$

Donc  $x(t) = x(t-1) + \varphi(0) - \varphi(-1)$ ,  $0 \leq t < 1$

▷ La résolution sur  $[1, 2]$

Soit  $t \in [1, 2]$ ; on considère la condition initiale  $x_{[0,1]} = x_1$

$$\int_1^2 \dot{x}(s) ds = \int_1^2 \dot{x}(s-1) ds,$$

Posons  $u = s - 1$ , on obtient alors :

$$\begin{aligned}\int_1^t \dot{x}(s) ds &= \int_0^{t-1} \dot{x}(u) du, \\ &= [x(v)]_0^{t-1}, \\ &= x(t-1) - x(0), \\ x(t) &= x(t-1) - x(0) + x(1),\end{aligned}$$

Il s'en suit que  $x(t) = x(t-1) - x(0) + x(1)$  or  $x(1) = x_{[0,1]} = \varphi(0) + \varphi(0) - \varphi(-1)$

alors  $x(t) = x(t-1) + \varphi(0) - \varphi(-1)$ ,  $1 \leq t \leq 2$ ,

ET donc par induction

$$x(t) = \phi(t-k) + k[\phi(0) - \phi(-1)], \quad k-1 \leq t < k, k = 1, 2, \dots$$

Par conséquent si  $\dot{\varphi}(-1) \neq \dot{\varphi}(0)$ , puis  $\dot{x}(t)$  a des sauts  $t = 0, 1, \dots$

Les sauts dans la solution pour (2.7) sera absent si la condition de correspondance suivante est remplie :

$$\dot{\varphi}(0) = f(t_0, \varphi(-r_0), \dot{\varphi}(-r_1))$$

## 2.5 Comparaison avec les équations différentielles ordinaires :

1. Pour résoudre l'équation différentielle à retard(2.1), il faut connaître  $x(t)$  sur un intervalle  $[t_0 - u, t_0]$ , de longueur  $u$ . Par contre, pour résoudre une équation différentielle ordinaire il suffit de connaître  $x(t)$  en un seul point.

---

2. Une équation différentielle à retard linéaire et homogène, peut avoir des solutions oscillantes non triviales, c'est à dire des solutions qui s'annulent plusieurs fois, mais elles ne sont pas identiquement nulles, or si la solution d'une équation différentielle ordinaire linéaire et homogène, s'annule en un point, elle est nulle partout (grâce à l'unicité de la solution). D'une manière générale, si deux solutions d'une équation différentielle, ordinaire se rencontrent en un point, et si la condition d'unicité est satisfaite, alors elles sont égales, sur tout le domaine de définition. Par contre, deux solutions, d'une équation différentielle, à retard peuvent se rencontrer en plusieurs points, sans qu'elles soient égales

Dans ce chapitre, nous nous intéresserons à quelques notions particulières de stabilité. En particulier, on cite la stabilité au sens de Lyapunov

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(t, x_t), \\ x_{t_0} &= \psi, \quad \psi \in \mathcal{C}[-u, 0]. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Nous supposerons que  $f(t, \varphi)$  est continue, bornée pour  $\varphi$  bornée, localement lipschitzienne en  $\varphi$ . La solution de (5.1) est notée  $x(t, t_0, \psi)$ .

#### Définition 15

La fonction  $\varphi_e \in \mathcal{C}[-h, 0]$  est un état d'équilibre de (5.1) si pour tout  $t_0 \in \mathbb{R}$ , la solution  $x(t, t_0, \varphi_e)$  existe et vérifie  $x(t, t_0, \varphi_e) = \varphi_e$ .

#### Théorème 3.1

La fonction  $\varphi_e \in \mathcal{C}[-u, 0]$  est un état d'équilibre de (5.1) si, et seulement si, les trois conditions suivantes sont vérifiées

- (i)  $\forall t_0 \in \mathbb{R}, x(t, t_0, \varphi_e)$  existe et est unique.
- (ii)  $\forall t \in \mathbb{R}, f(t, \varphi_e) = 0$ .
- (iii)  $\varphi_e$  est une fonction constante de  $\mathcal{C}[-u, 0] : \forall \theta \in [-u, 0], \varphi_e(\theta) = x_e$ .

On parlera donc indifféremment d'état d'équilibre ( $\varphi_e$ ) ou de point d'équilibre ( $x_e$ ),

### Définition 16

L'équilibre  $x = 0$  du système (5.1) est dit 1. Stable si  $\forall \varepsilon > 0, \forall t_0, \exists \delta = \delta(t_0, \varepsilon) > 0, \psi \in \mathcal{B}_\delta \Rightarrow x(t, t_0, \psi) \in \mathcal{B}_\varepsilon$ . 2. uniformément stable par rapport à  $t_0$  si la propriété précédente est vérifiée avec  $\delta = \delta(\varepsilon)$  (donc  $\delta$  indépendant de  $t_0$ ). 3. asymptotiquement stable s'il est stable et s'il existe  $\eta = \eta(t_0) > 0$  tel que  $[\psi \in \mathcal{B}_\eta] \Rightarrow [\lim_{t \rightarrow \infty} x(t, t_0, \psi) = 0]$ . 4. Uniformément asymptotiquement stable s'il est uniformément stable et si : la limite de la propriété précédente est uniforme, c'est-à-dire si  $\exists \eta > 0 : \forall \gamma > 0, \exists T(\gamma) > 0 : [\psi \in \mathcal{B}_\eta \text{ et } t \geq T(\gamma)] \Rightarrow [x(t, t_0, \psi) \in \mathcal{B}_\gamma] \forall t_0$ . 5. Globalement (uniformément) asymptotiquement stable s'il est (uniformément) asymptotiquement stable avec  $\eta = +\infty$ . 6. globalement exponentiellement stable s'il existe deux nombres strictement positifs  $\alpha$  (appelé taux de convergence exponentielle) et  $k$  tels que

$$|x(t, t_0, \psi)| \leq k \|\psi\|_c e^{-\alpha(t-t_0)},$$

### Théorème 3.2

Un système linéaire stationnaire de type retardé est globalement asymptotiquement stable si, et seulement si, toutes ses racines caractéristiques sont dans le demi-plan complexe gauche (l'axe imaginaire étant exclu).

### Exemple 6.

On considère l'équation autonome scalaire

$$\dot{x}(t) = f(x(t), x(t-u)), \quad f(0, 0) = 0$$

où  $f(x, y)$  est localement Lipschitz dans ses arguments. Supposons que  $V(x) = x^2$ , qui est une fonction Lyapunov typique pour  $n = 1$ . En suite, nous avons le long du système

$$\frac{d}{dt}[V(x(t))] = 2x(t)\dot{x}(t) = 2x(t)f(x(t), x(t-u))$$

. Pour la validité de l'inégalité  $\frac{d}{dt}[V(x(t))] \leq 0$ , nous devons supposer que

$$x(t)f(x(t), x(t-h)) \leq 0$$

, pour tous suffisamment petits  $|x(t)|$  et  $|x(t-u)$ .

Cela restreint essentiellement la classe de équations considérées. Par exemple,

$$\dot{x}(t) = -x(t)x^2(t-h)$$

est stable par conséquence

---

### 3.1 L'approche de Lyapunov-Krasovskii

Cette technique est une extension des fonctions usuelles de Lyapunov à des fonctionnelles vérifiant certaines propriétés et qui décroissent le long des trajectoires du système étudié. De telles fonctionnelles sont appelées fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii et généralisent la deuxième méthode de Lyapunov aux systèmes de type retardé.

#### **Théorème 3.3: Krasovski**

S'il existe une fonctionnelle  $V$  à valeur dans  $\mathbb{R}_+$  définie positive, telle que  $D^+V(t, \varphi) \leq 0$  le long de trajectoires de l'équation (3.1) alors la solution nulle de (3.1) est stable .

### 3.2 stabilités pour les systèmes à retard constant

#### **Définition 17**

1. On dit qu'un équilibre  $x^*$  de (2.2) est stable si  $\forall \varepsilon > 0$  et  $\forall t \in [-u, 0]$ , s'il existe  $\delta > 0$  tel que  $|\varphi(t) - x^*| \leq \delta$ , alors  $|x(t) - x^*| \leq \varepsilon$  pour toute  $y$  solution de (2.2)
2. On dit qu'un équilibre  $x^*$  de (2.6) est asymptotiquement stable s'il est stable et vérifie  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = x^*$ .

#### **Définition 18**

On dit qu'une solution  $x$  de (2.2) est oscillatoire par rapport à une certaine valeur  $x^*$ , s'il existe une suite  $(t_n)$  avec  $(t_n > 0$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = +\infty$  telle que  $y(t_n) = x^*$ . Dans le cas contraire on dit qu'elle est non oscillatoire.

### 3.3 stabilités pour les systèmes à retard de type neutre

La définition de stabilité dans le sens de Lyapunov peut être adaptée aux système neutre :

### Définition 19

Soit  $\mathcal{X} = \mathcal{C}$  ou  $\mathcal{X} = \mathcal{W}_2^1$ . La solution triviale  $x(t) = 0$  de

$$\frac{d}{dt}[D(t)x_t] = F(t, x_t), t \geq t_0, \quad (3.2)$$

avec la fonctionnel initiale  $x_{t_0} \equiv \phi(\theta)$ ,  $\phi, \varphi \in \mathcal{C}[-r, 0]$ ,  $x_{t_0}(\theta) = \phi(\theta)$ ,  $\phi \in \mathcal{W}_2^1, t \geq t_0, -r < \theta < 0$ , respectivement est stable si pour nimporte quel  $\varepsilon > 0$ ,  $t_0 \in [u, \infty)$ , il existe  $\delta = \delta(\varepsilon, t_0)$  telle que  $\|\phi\|_{\mathcal{X}} \leq \delta(\varepsilon, t_0)$  implique  $\|x(t, t_0, \phi)\| \leq \varepsilon$ .

La solution  $x(t) = 0$  est asymptotiquement stable si elle stable et  $x(t, t_0, \phi) \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow \infty$  avec la limite comprise dans la topologie introduite par la norme  $\|\cdot\|_{\mathcal{X}}$ .

En suite on rappelle l'approche des fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii [3] dans les espaces  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{W}_2^1$  respectivement  
Soit  $V : [u, \infty) \times \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^+$  une fonctionnelle continue.

### Théorème 3.4: Cruz et Hale 1970

On considère le système neutre (3.2). On suppose que  $D(t)$  est uniformément stable par rapport à  $\mathcal{C}[u, \infty), \mathbb{R}^n$  et qu'il existe des fonctions non décroissantes continues  $v_i : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ ,  $i = 1, 2, 3$  telles que  $v_i(0) = 0$  et  $v_i(s) > 0$ , pour chaque  $s > 0$  et  $i = 1, 2, 3$ . Alors la solution nulle (2.8) est asymptotiquement stable s'il existe une fonctionnelle continue  $V : [u, \infty) \times \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^+$  telle que :

$$\begin{aligned} v_1(\|D(t)\varphi\|) &\leq V(t, \varphi) \leq v_2(\|\varphi\|_c), \\ V'(t, x_t)|_{(2.8)} &\leq -v_3(\|D(t)x_t\|), \forall t \geq t_0. \end{aligned}$$

Le même résultat est vrai, si la borne supérieure sur  $V'(t, x_t)|_{(3.2)}$  est donnée par  $-v_3(\|x(t)\|)$ .

### Exemple 7.

Soit le système neutre

$$\frac{d}{dx}[x(t) - r_1 c x(t - r_1)] = -a x(t) - b x(t - r_2), t \geq \sigma, x_\sigma \equiv \phi, \phi \in \mathcal{C}. \quad (3.3)$$

où  $a, b, c \neq 0$ , sont des constantes et  $r_1, r_2$  sont des constantes négatives. Bien sûr, comme  $x_t \in \mathbb{C}$ , dans ce le cas-là, l'opérateur de différence dépend  $r_1$ . Pour le cas particulière  $r = r_1 = r_2$ , la stabilité de l'opérateur de différence  $Dx_t := [x(t) - r c x(t - r)]$  dépend directement de la borne supérieure sur le retard  $r^* = |r| < 1/|c|$ .

Alors la stabilité dépend du retard dans la partie neutre,  $r = r_1 = r_2$ , et dans le cas général  $r_1 \neq r_2$  la stabilité du système fonction des (3.3) est fonction des deux retards.

---

### Remarque 3

Dans l'exemple (3.3) la stabilité de l'opérateur de différence dépend de  $r_1$  parce que le coefficient de  $x(t - r)$  contient ce retard. Quand ce n'est pas le cas, il est bien connu que la stabilité dépend seulement du retard  $r_2$  de l'état retardé[4]. Ensuite on présente quelques transformations utilisées dans la littérature sur les systèmes neutres pour l'analyse de stabilité.

---

## Conclusion

Pour les équations différentielles à retard en dimension fini, on s'est intéressé à la stabilité au sens Lyapunov. On s'est intéressé d'abord à assurer l'existence, l'unicité de la solution. Pour la résolution des équations différentielle à retard dans les quelles un retard temporel, les retards sont importants, on doit connaitre la solution sur l'intervalle  $[t_0 - u, t_0]$ ; alors que pour les équations différentielles ordinaire, il suffit de calculer la valeur de cette solution en un seul point. De plus si une équation différentielle ordinaire possède deux solutions qui se rencontre en un point alors, ces solutions sont égales sur tout le domaine ce qui n'est pas vrai pour les équations à retard. Les perspectives de ce travail se résume dans quelques point :Généraliser ce travail en dimension infinie, généraliser ce travail aux autres type des équations différentielles à retard.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] Ivanescu. D, S. Niculescu, L. Dugard and J.M. Dion (2002) On Delay De-pendent stability for Liner Neutral Systems. Automatic 39 : 255-261
- [2] Peter Volkmann. Cinq cours sur les équations différentielles dans les espaces de banach. In Topological methods in diferential equations and inclusions, pages 501-520. Springer,1995