RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Djilali Bounaâma-Khemis Miliana
Faculté des Sciences & Technologie
Département de Mathématiques et Informatique

Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Option : Analyse Mathématique et Applications

Thème

Sur le problème de Cauchy pour l'équation Moore-Gibson-Thomson

---

Présenté par :

DJEBBARI Nour El Houda

Devant le jury composé de :

M^r M.Bouderbala	M.C.A	Université Djilali Bounaâma	**Président**.
M^{me} L.Djouamai	M.C.B	Université Djilali Bounaâma	**Encadreur.**
M^r M.Houasni	M.C.A	Université Djilali Bounaâma	**Examinateur 1.**
M^{me} F.Bousebia	M.C.B	Université Djilali Bounaâma	**Examinateur 2.**

Année universitaire : 2022/2023

Remerciements

En premier lieu, Je remercie **ALLAH** le clément le miséricordieux de nous avoir donné, toujours la patience et la foi pour atteindre nos buts.

Toute ma gratitude à mon encadrant madame **DJOUAMAI LEILA**, qui à encadré mon travail, pour ses judicieux conseils, l'orientation permanente et la patience qu'elle m'a sacré durant toute la période de travail.

Je veux exprimer mes remerciements à monsieur **M.Bouderbala** d'avoir accepté d'être le président du jury et aussi monsieur **M.Houasni** et madame **F.Bousebia**, qui m'ont honorées en acceptant d'examiner ce mémoire.

Mes remercions vont également a tout mes enseignants durant ces années d'études.

A mes familles et mes amis qui par leurs prières et leur encouragements, j'ai pu surmonter tous les obstacles.

Je profite l'occasion ainsi à adresser mes remerciements à mes collègues de licence et master.

Enfin, Je remercie tous ceux qui nous ont aidés de près ou loin dans ce travail.

Dédicace

Avec tous mes sentiments de respect, avec l'expérience de mes reconnaissance, je dédie ma remise de diplôme et ma joie.

A mon paradis, à la prunelle de mes yeux, à la source de ma joie et mon bonheur, ma lune et la fil d'espoir qui allumer mon chemin, ma moité maman "Hamida".

A celui qui m'a fait une femme, ma source de vie, d'amour et d'affection, à mon support qui était toujours à mes côtes pour me soutenir et m'encourager, à mon roi papa "Abdelkader".

A la mémoire de mon grand père "Lakhder" que dieu lui garde dans son vaste paradis.

A ma chère grand-mère paternelle que ce modeste travail, sont l'expression des voeux que vous n'avez cessé de formuler dans vos prières que dieu vous présence santé et longue vie.

A mes grandes soeurs "Fatima" et "Meriem" et "Feriel" qui n'ont pas cessée de ma conseiller, encourager et soutenir tout au long de mes études.

A mon adorable petite soeur "Aicha" qui soit toujours comment procurer la joie et le bonheur pour toute la famille.

A les enfants de ma soeur "Ranim", "Abdou" et surtout "Oumaima", votre présence dans ma vie est une source de inspiration, je t'aime de tout mon coeur.

A tout les membres de ma famille et toute personne qui porte le nom "DJEBBARI", qui ont partagé avec moi tous les moments d'émotion et qui chaleureusement supporté tout au long de mon parcours d'études.

A tous mes amis, qui occupe une place dans mon coeur.

A la partie de mon âme et ma seconde soeur "Razika".

A la lune de ma vie, ma cousine "Rokia".

A tous ceux que j'aime.

Table des matières

Introduction

L'acoustique est la science du son, ce qui inclut sa production, son contrôle, sa transmission, sa réception et ses effets. Elle fait notamment appel à des notions de mécanique des fluides, de mécanique vibratoire, de mécanique du solide déformable et de thermodynamique. Le mot acoustique en globe en physique toutes les ondes mécanique au sein des gaz, des liquides mais également au sein des solides.

Des recherches sur la propagation non linéaire du son dans une situation d'ondes de forte amplitude ont montré une littérature sur des modèles differentiels partiels physiquement bien fondés [[1], [11]]. Ce domaine de recherche est toujors très actif est porté par un large éventail d'application telle que l'utilisation médicale et industrielle des ultrasons de haute intensité en lithotritie, thermo thérapie et nettoyage par ultrasons. Les modèles classiques d'acoustique non linéaire sont l'équation de Kuznetsov, l'équation de westervelt et l'équation de KZK (Kokhlov-Zabolotskaya-Kyznetsov).

En se concentrant sur l'étude de la propagation des ondes acoustiques, il convient de noter que l'équation de Moore-Gibson-Thompson (MGT) est l'une des équations de l'acoustique non linéaire qui décrit la propagation des ondes acoustiques dans le gaz et les liquides. Le comportement des ondes acoustiques dépend fortement de la propriété du milieu liée à la dispersion, à la dissipation et aux effets non linéaires.

Dans ce travail, on s'interesse à l'étude de l'équation MGT, donné par :

$$\tau u_{ttt} + u_{tt} - c^2 \Delta u - c^2 b \Delta u_t = 0 \tag{1}$$

la fonction $u = u(x,t)$ désigne la vitesse acoustique scalaire, c désigne la vitesse du son et τ désigne la relaxation thermique. Par ailleurs, le coefficient $b = \beta c^2$ est lié à la diffusion du son avec $\beta \in (0, \tau]$.

L'équation de Moore-Gibson-Thompson (1) a été étudié récemment par de nombreux auteurs dans des domaines bornés. [2] Chen et All ont étudié le résultat de l'explosion pour l'équation semi-linéaire de Moore-Gibson-Thompson avec non linéairté de type dérivé qui défini comme suit :

$$\tau u_{ttt} + u_{tt} - \Delta u - \beta \Delta u_t = |u_t|^p, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0.$$

Maintenant, lorsque nous parlons de l'équation (MGT) avec terme mémoire, nous avons I. Lasie et all dans [3] ont étudié la décroissance exponentielle de l'énergie de l'équation (MGT) avec un terme mémoire comme suit :

$$\tau u_{ttt} + \alpha u_{tt} - c^2 Au - bAu_t - \int_0^t g(t-s)Aw(s)ds = 0.$$

où τ, α, b, c^2 sont des paramètres physiques et A est un opérateur auto- adjoint positif sur un espace de Hilbert .Récemment Kaltenbacher et Lasiecka [4] ont étudié l'équation linéarisée

$$\tau u_{ttt} + \alpha u_{tt} + c^2 \mathscr{A} u + b \mathscr{A} u_t = 0.$$

où $\mathscr{A}$ est un opérateur positif auto-adjoint.

L'objectif de ce travail est de montrer que l'équation de Moore-Gibson-Thompson est bien posée et d'étudier le taux de décroissance de la solution de cette équation dans un domaine non borné. Nous considérons l'équation

$$\tau u_{ttt} + u_{tt} - c^2 \Delta u - c^2 \beta \Delta u_t = 0 \quad dans \quad \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \quad t > 0, \tag{2}$$

avec les conditions initiales suivantes :

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad u_{tt}(x,0) = u_2(x). \tag{3}$$

avec

$$u = u(x,t) : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Prenons , $c = 1$. De plus, nous supposons que $0 < \tau < \beta$. Comme nous le verrons dans le chapitre 2, le problème ci-dessus est bien posé dans un espace de Hilbert.

Ce mémoire est divisée en trois chapitres :

Dans le premier chapitre, on va donner des rappels et des préliminaires de base sur l'analyse fonctionnelle qui vont être utilisés dans les chapitres suivants de ce mémoire.

Dans le deuxième chapitre, ont étudie l'existence et l'unicité de l'équation de Moore-Gibson-Thompson par la théorie des semi-groupes .

Dans le troisième chapitre, ont étudie la stabilité et le taux de décroissance de l'équation de Moore-Gibson-Thompson par la méthode de l'énergie. Le principe intuitif de cette méthode est le suivant :

On désigne une fonction appelée " la fonction de Lyapunov $\mathscr{L}$ " équivalente à l'énergie E associe à notre système telle que : :

$$\gamma_1 E(t) \leqslant \mathscr{L}(t) \leqslant \gamma_2 E(t), \quad \forall t > 0 \tag{4}$$

pour $\gamma_1 > 0$ et $\gamma_2 > 0$, pour établir la stabilité exponentielle, il suffit de montrer que

$$\mathscr{L}'(t) \leqslant -c\mathscr{L}(t), \quad \forall t > 0 \tag{5}$$

Pour certains $c > 0$, une intégration simple de (5) sur $[0,t]$ en utilisant (4), on trouve la stabilité souhaité . Il faut note que la difficulté dans cette méthode est de trouver la fonction de Lyapunov adéquate.

CHAPITRE 1

Préliminaires

Dans ce chapitre nous rappelons quelques éléments d'analyse fonctionnel qui vont êtres utilisés dans les différents chapitres de ce mémoires [[5], [6],[7],[10]].Quelques résultats sont donnés sans démonstrations. Néanmoins, nous allons réserver une attention particulière pour les résultats utilisés dans le chapitre suivant.

Espace vectoriel normé

Définition 1.1. *Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$ et soit F sous ensemble dans E. On dit que F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si*

1. $F \neq \varnothing$;
2. $\forall x \in F, \forall y \in F : x+y \in F$. *Autrement dit F est stable par l'addition ;*
3. $\forall x \in F$, *pour* $\lambda \in \mathbb{K} : \lambda x \in F$. *Autrement dit F est stable par la multiplication par scalaire.*

Définition 1.2. ***(Espaces vectoriels normés)***

*Un k-espace vectoriel E est dit **normé** lorsque est muni d'une norme, c'est-à-dire d'une application $N : E \to \mathbb{R}^+$, satisfaisant les hypothèses suivantes :*

1. $N(u) = 0 \Longleftrightarrow u = 0$;
2. $N(u+v) \leq N(u) + N(v), \forall u, v \in E$ *(inégalité triangulaire) ;*
3. $N(\lambda u) = |\lambda| N(u), \forall u \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}$.

Espace complet

Définition 1.3. *Soit E un espace vectoriel, on dit que E est un espace complet si toute suite de Cauchy $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de l'espace E est converge vers un elément u de E.*

Espace de Banach

Définition 1.4. *On appelle espace de Banach un espace vectoriel normé sur un sous-corps $\mathbb{K}$ de $\mathbb{C}$ (en générale, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), complet pour la distance issue de sa norme.*

Espace de Hilbert

Définition 1.5. ***(Produit scalaire)***

Soit H un espace vectoriel, on appelle application de $H \times H$ dans le corp $K = \mathbb{C}$ définit par $\langle .,. \rangle$ est un produit scalaire si :

1. $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$, *pour tout* $u, v \in H$ *;*
2. $\langle \lambda u_1 + u_2, v \rangle = \lambda \langle u_1, v \rangle + \langle u_2, v \rangle$, *pour tout* $u, v \in H$, *et* $\lambda \in \mathbb{C}$*;*
3. $\langle u, \lambda v \rangle = \bar{\lambda} \langle u, v \rangle$, *pour tout* $\lambda \in \mathbb{C}$*;*
4. $\langle u, u \rangle \geq 0$ *et* $\langle u, u \rangle = 0 \Longleftrightarrow u = 0.$

Définition 1.6. ***(Espace de Hilbert)***

Un espace de Hilbert est un espace préhilbertien complet, c'est-à-dire un espace de Banach dont la forme découle d'um produit scalaire ou hermitien par la formule :

$$\|u\|_H = \langle u, u \rangle^{\frac{1}{2}}$$

Espaces $L^p(\Omega)$

Définition 1.7. *[7] Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $p \in \mathbb{R}^n$ avec $1 \leq p < \infty$, on définit $L^p(\Omega)$ un espace de Lebesgue par :*

$$\boxed{L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n, f \text{ est mesurable et } \int_\Omega |f(x)|^p dx < +\infty \right\}.}$$

pour $1 \leq p < \infty$ *on définit* $\|f\|_p$ *par :*

$$\boxed{\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left[\int_\Omega |f(x)|^p dx\right]^{\frac{1}{p}}}$$

Si $P = \infty$*, nous avons :*

$L^\infty(\Omega) = \{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n, f$ *mesurable et il existe une constante* C *telle que* $\|f(x)\| \leq C$ *presque partout sur* $\Omega \}$.

On note :

$$\|f\|_\infty = \inf\{C, \quad |f(x)| \leq C\}$$

Définition 1.8. *$L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert, avec le produit scalaire*

$$\langle u,v\rangle_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega u(s)v(s)dx, \text{ pour tout } u,v \in L^2(\Omega).$$

Espace de Sobolev

Définition 1.9. ***(Dérivée faible)***

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n, 1 \leq i \leq n$ et $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ une fonction a une i-ème dérivée faible dans $L^1_{loc}(\Omega)$ sil existe $f_i \in L^1_{loc}(\Omega)$ telle que pour tout $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ on a

$$\int_\Omega u(x)\partial_i\varphi(x)dx = -\int_\Omega f_i(x)\varphi(x)dx.$$

Cela revient à dire que f_i est la i-ème dérivée de u au sens des distributions, on écrira

$$\partial_i u = \frac{\partial u}{\partial u_i} = f_i.$$

Définition 1.10. *[5]**(Espaces $H^m(\Omega)$)***

Soit Ω est un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$ et m un entier naturel. On appelle espace de Sobolev d'ordre m et on note $H^m(\Omega)$, L'ensemble :

$$\boxed{H^m(\Omega) = \left\{u \in L^2(\Omega) : D^\alpha u \in L^2(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^n; |\alpha| \leq m\right\}}$$

où $\frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha} \ldots \partial x_n^{\alpha n}}$ désigne la dérivée d'ordre α au sens des distributions avec $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$.

R Pour $m = 1$

$$H^1(\Omega) = \left\{u \in L^2(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), 1 \leq i \leq m\right\}$$

et la norme associée à ce produit scalaire

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|_2^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

On munit l'espace $H^m(\Omega)$ du produit scalaire :

$$(u,v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2}, \forall u,v \in H^m(\Omega)$$

et l'espace $H^1(\Omega)$ est muni du produit scalaire

$$(u,v)_{H^1} = (u,v)_{L^2} + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i}\right)_{L^2}$$

Définition 1.11. ***(L'espace*** $W^{1,p}(\Omega)$***)***

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ et un ouvert et soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p \leq \infty$ L'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ est défini par

$$\boxed{W^{1,p}(\Omega) = \left\{u \in L^p \mid \exists g_1, \ldots, g_n \in L^p \text{ telque } \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \forall i = 1,2,\ldots,N\right\}.}$$

On pose

$$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$$

Pour $u \in W^{1,p}(\Omega)$ on note

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = g_i \text{ et } \nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$$

L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est muni de la norme

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p} + \sum_{i=1}^{n} \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{L^p}$$

R En d'autre terme, $W^{1,p}(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, u \in L^p(\Omega)$ dont les dérivées partielles $\frac{\partial u}{\partial x_i}$, prises au sens faible, sont dans $L^p(\Omega)$ pour tout $i = 1, \ldots, n$

Définition 1.12. ***(Espaces de Sobolev*** $W^{m,P}(I)$***)***

Étant donnés un entier $m \geq 2$ et un réel $1 \leq p \leq \infty$, on définit par récurrence l' espace

$$\boxed{W^{m,p}(I) = \left\{u \in W^{m-1,p}(I), \quad u' \in W^{m-1,p}(I)\right\}.}$$

On pose

$$H^m(I) = W^{m,2}(I).$$

L'espace $W^{m,p}$ est muni de la norme

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \|u\|_{L^p} + \sum_{\alpha=1}^{m} \|D^\alpha u\|_{L^p}$$

et l'espace H^m est muni du produit scalaire

$$(u,v)_{H^m} = (u,v)_{L^2} + \sum_{\alpha=1}^{m} (D^\alpha u, D^\alpha v).$$

1.1 Transformation de Fourier

Définition 1.13. *[6] Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, on appelle transformée de Fourir de f la fonction définie par :*

$$\widehat{f} : \begin{cases} \mathbb{R}^d & \to & \mathbb{C} \\ \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_d) & \mapsto & \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i\langle x, \xi \rangle} dx \end{cases}$$

avec $x = (x_1, \ldots, x_d), \langle x, \xi \rangle = x_1\xi_1 + \cdots + x_d\xi_d$ et $dx = d\lambda_d(x)$ où λ_d désigne la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^d$.

Théorème 1.1. *Pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, la fonction $\widehat{f} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ est continue et bornée par $\|f\|_1$ (c'est-à-dire $\|\widehat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$). La fonction $\widehat{f}$, qu'on note aussi $\mathscr{F}(f)$, est appelée la transformée de Fourier de f, et l'application*

$$\mathscr{F} : \begin{cases} L^1(\mathbb{R}^d) & \to & \mathscr{C}_0(\mathbb{R}^d) \\ f & \mapsto & \widehat{f} \end{cases}$$

est la transformation de Fourier dans $L^1(\mathbb{R}^d)$.

Démonstration :

- Pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$, on a $\left| f(x) e^{-i\langle x, \xi \rangle} \right| = |f(x)|$ et $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, donc $\widehat{f}$ est définie sur $\mathbb{R}^d$. Posons $F(x, \xi) = f(x) e^{-i\langle x, \xi \rangle}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ fixé, la fonction F est continue par rapport à ξ, et on a

$$|F(x, \xi)| \leq |f(x)|$$

où $|f|$ est intégrable et ne dépend pas de ξ. Le théorème de l'annexe B permet de conclure que la fonction $\xi \mapsto \widehat{f}(\xi)$ est continue sur $\mathbb{R}^d$. Par ailleurs, on a

$$\|\widehat{f}\|_\infty \leq \sup_{\xi\in\mathbb{R}^d} |\widehat{f}(\xi)| \leq \sup_{\xi\in\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|dx = \|f\|_1,$$

et enfin, $\widehat{f} \in \mathscr{C}_0\left(\mathbb{R}^d\right)$ d'après le lemme de Riemann-Lebesgue.

Théorème 1.2. *[6, 8] (propriétés de la transformée de Fourier)*

Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ alors

1. $\widehat{f(\lambda x)}(\xi) = \dfrac{1}{|\lambda|}\hat{f}(\dfrac{\xi}{\lambda})$,
2. $\widehat{f'(x)}(\xi) = i\xi\hat{f}(\xi)$,
3. $\dfrac{d\hat{f}(\xi)}{d\xi} = -i(\widehat{xf(x)})(\xi)$,
4. $\widehat{f*g} = \hat{f}\hat{g}$,
5. $\widehat{fg} = (2\pi)^{-n}\hat{f}*\hat{g}$.
6. $\dfrac{d}{d\xi}F(\xi) = \dfrac{d}{d\xi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\xi x}dx$

Transformation de Fourier d'une dérivée

Soit f une fonction réelle ou complexe, différentiable en un point a de $\mathbb{R}^d$. On note $\partial_j f(a)$ la j-ìme dérivée partielle de f en a :

$$\partial_j f(a) \overset{\text{déf.}}{=} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$$

Proposition 1.1. *[6] Soient $f \in L^1\left(\mathbb{R}^d\right) \cap \mathscr{C}^1\left(\mathbb{R}^d\right)$ et $j \in \mathbb{N}$. Si $\partial_j f \in L^1\left(\mathbb{R}^d\right)$, alors*

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d, \quad \widehat{\partial_j f}(\xi) = i\xi_j\widehat{f}(\xi).$$

Démonstration :

Quitte à renuméroter les coordonnées, on peut supposer $j = 1$. Notons alors $x' = (x_2, \ldots, x_d)$ et $\xi' = (\xi_2, \ldots, \xi_d)$. Puisque $\partial_1 f \in L^1\left(\mathbb{R}^d\right)$, le théorème de Fubini appliqué à la fonction $x \mapsto \partial_1 f(x)e^{-i\langle x,\xi\rangle}$

donne

$$\widehat{\partial_1 f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^{d-1}} e^{-i\langle x', \xi' \rangle} dx' \int_{\mathbb{R}} \partial_1 f(x) e^{-ix_1\xi_1} dx_1$$

et comme $f \in L^1\left(\mathbb{R}^d\right)$, on a aussi

$$\int_{\mathbb{R}^{d-1}} e^{-i\langle x', \xi' \rangle} dx' \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ix_1\xi_1} dx_1 = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i\langle x, \xi \rangle} dx = \widehat{f}(\xi)$$

Il suffit maintenant d'établir que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \partial_1 f(x) e^{-ix_1\xi_1} dx_1 = i\xi_1 \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ix_1\xi_1} dx_1 \tag{1.1}$$

En intégrant par parties et sachant que $\partial_1 f \in L^1\left(\mathbb{R}^d\right)$, on obtient

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \partial_1 f(x) e^{-ix_1\xi_1} dx_1 &= \lim_{A\to+\infty} \int_{-A}^{A} \partial_1 f(x) e^{-ix_1\xi_1} dx_1 \\ &= \lim_{A\to+\infty} \left(\left[f(x) e^{-ix_1\xi_1} \right]_{x_1=-A}^{x_1=+A} + i\xi_1 \int_{-A}^{A} f(x) e^{-ix_1\xi_1} dx_1 \right)\end{aligned}$$

Comme $f \in L^1\left(\mathbb{R}^d\right)$,

$$\lim_{A\to+\infty} \int_{-A}^{A} f(x) e^{-ix_1\xi_1} dx_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ix_1\xi_1} dx_1.$$

La fonction $t \mapsto \partial_1 f(t, x')$ étant continue sur $\mathbb{R}$, on peut écrire

$$f(x) = f\left(0, x'\right) + \int_0^{x_1} \partial_1 f\left(t, x'\right) dt$$

et comme $\partial_1 f \in L^1\left(\mathbb{R}^d\right)$, on a, pour presque tout $x' \in \mathbb{R}^{d-1}$,

$$\lim_{A\to\pm\infty} f\left(A, x'\right) = f\left(0, x'\right) + \int_0^{\pm\infty} \partial_1 f\left(t, x'\right) dt$$

et cette limite est finie. Or, f étant intégrable dans $\mathbb{R}^d$, on a

$$\lim_{A\to\pm\infty} f\left(A, x'\right) = 0 \quad \lambda_{d-1} - p \cdot p.$$

On en déduit que, pour presque tout x' dans $\mathbb{R}^{d-1}$,

$$\lim_{A\to\pm\infty} \left[f\left(x_1, x'\right) e^{-ix_1\xi_1} \right]_{x_1=-A}^{x_1=+A} = 0.$$

Ceci établit (1.1) et achève la démonstration de la proposition.

Dérivée d'une transformée de Fourier

Proposition 1.2. *Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $x \mapsto x_j f(x)$ soit dans $L^1(\mathbb{R}^d)$. Alors $\widehat{f}$ admet une dérivée $\partial_j \widehat{f}$ continue et bornée sur $\mathbb{R}^d$, donnée par*

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d, \quad \partial_j(\mathscr{F}(f))(\xi) = -i\mathscr{F}(x_j f)(\xi)$$

Démonstration :

Il suffit de traiter le cas $d = 1$, le cas $d \geq 2$ s'en déduit par application directe du théorème de Fubini.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ fixé, la fonction $h : \xi \mapsto f(x)e^{-ix\xi}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a $h'(\xi) = -ixf(x)e^{-ix\xi}$. On en déduit, pour tout $\xi \in \mathbb{R}, |h'(\xi)| \leq |xf(x)|$. Comme $x \mapsto xf(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et ne dépend pas de ξ, le théorème de l'annexe B montre que $\widehat{f}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour $j = 1$, on a

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \widehat{f}'(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)(-ix)e^{-ix\xi}dx$$

La fonction $\widehat{f}'$ étant la transformée de Fourier de la fonction intégrable - ixf , le **théorème** 1.1 assure que $\widehat{f}'$ est continue sur $\mathbb{R}^d$ et bornée.

corollaire 1.1. *Si $f, x_{j_1}f, x_{j_2}x_{j_1}f, \ldots, x_{j_p}x_{j_{p-1}} \cdots x_{j_1}f$ appartiennent à $L^1(\mathbb{R})$, alors $\partial_{j_p}\partial_{j_{p-1}} \cdots \partial_{j_1}\widehat{f}$ est continue et bornée sur $\mathbb{R}$, et on a*

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \partial_{j_p}\partial_{j_{p-1}} \cdots \partial_{j_1}\widehat{f}(\xi) = (-i)^p \mathscr{F}\left(x_{j_p}x_{j_{p-1}} \cdots x_{j_1}f\right)(\xi)$$

Théorème 1.3. *[9](Théorème de Plancherel -Parseval)*

Pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, on a :

$$\|\widehat{f}\|_2^2 = (2\pi)^d \|f\|_2^2$$

1.2 Quelques inégalités utiles

Inégalité de Hölder

Théorème 1.4. *[7] Pour tout $u \in L^p$ et $v \in L^q, |uv| \in L^1$ et pour tout $1 \leq p \leq \infty$ on note q le conjugué de p $\left((L^p)^* = L^q\right)$, c'est à dire $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, et on a l'inégalité*

$$\left|\int_\Omega uvdx\right| \leq \int_\Omega |uv|dx \leq \left(\int_\Omega |u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega |v|^p dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

(i.e) ;

$$\int_\Omega |uv|dx \leq \|u\|_{L^p(\Omega)}\|v\|_{L^q(\Omega)}.$$

Inégalité de Minkowski

Théorème 1.5. *Pour $1 \leq p \leq \infty$, on a*

$$\|u+v\|_{L^p} \leq \|u\|_{L^p} + \|v\|_{L^p}$$

Inégalité algébrique de Young

Lemme 1.1. *[7]*

Pour tout $a,b \in \mathbb{R}_+$on a :

$$|ab| \leq \delta|a|^2 + \frac{1}{4\delta}|b|^2, \text{ avec } \delta > 0.$$

Inégalité de Young

Lemme 1.2. *[7]*

Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$|ab| \leq \frac{1}{p}|a|^p + \frac{1}{q}|b|^q$$

où p,q des nombres réels strictement positifs liés par la relation $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$.

Inégalité de Young avec ε

Lemme 1.3.

Pour tout $\varepsilon > 0$ alors pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$|ab| \leq \varepsilon |a|^p + c(\varepsilon)|b|^q$$

où p,q des nombres réels strictement positifs liés par la relation $\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$ et $c(\varepsilon)=\frac{1}{p}(\varepsilon p)^{\frac{-q}{p}}$.

Fonction Gamma

La fonction gamma est une fonction de type Euler définie par :

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

avec $\quad \mathrm{Re}(\alpha) > 0$

Lemme 1.4.

Pour tout $k \geq 0, c \geq 0$, il existe une constante $C > 0$, telle que pour tout $t \geq 0$ on a l'estimation suivante :

$$\int_{|\xi|\leq 1} |\xi|^{\delta} e^{-c|\xi|^{2t}} d\xi \leq C(1+t)^{-(\delta+1)/2} \quad \xi \in \mathbb{R}$$

Démonstration : par changement de variable tels que $r = |\xi|$, on obtient :

$$\int_{|\xi|\leq 1} |\xi|^{\delta} e^{-c|\xi|^2 t} d\bar{\xi} = 2\int_0^1 r^{\delta} e^{-cr^2 t} dr$$

il suffit de prouver que pour $c > 0$ et $\delta > 0$, nous avons :

$$\int_0^1 r^{\delta} e^{-cr^2 t} dr \leq C(1+t)^{-(\delta+1)/2}, \tag{1.2}$$

pour tout les $t > 0$, où C est une constante positive indépendante de t. Pour voir cela, observer d'abord que, pour $0 < t < 1$, l'estimation (1.2) est évidente. D'autre part, pour $t > 1$, nous avons :

$$(1+t) \leq 2t \tag{1.3}$$

on utilise (1.3) et par changement de variable tel que $z = cr^2 t$, on obtient :

$$\begin{aligned}
2^{-(\delta+1)/2} c^{(\delta+1)/2} (1+t)^{(\delta+1)/2} \int_0^1 r^\delta e^{-cr^2 t} dr \leq c^{(\delta+1)/2} t^{(\delta+1)/2} \int_0^1 r^\delta e^{-cr^2 f} dr \\
= \int_0^1 \left(cr^2 t\right)^{\delta/2} (ct)^{1/2} e^{-\sigma^2 t} dr \\
= \frac{1}{2} \int_0^{cft} z^{\delta/2} z^{-1/2} e^{-z} dz \\
\leq \frac{1}{2} \int_0^{\infty} z^{(\delta+1/2)-1} e^{-z} dz \\
= \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{\delta+1}{2}\right) < \infty
\end{aligned}$$

telle que Γ c'est la fonction Gamma. Donc

$$\begin{aligned}
\int_0^1 r^\delta e^{-\sigma^2 t} dr &\leq \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{\delta+1}{2}\right) 2^{(\delta+1)/2} c^{-(\delta+1)/2} (1+t)^{-(\delta+1)/2} \\
&\leq C(1+t)^{-(\delta+1)/2}.
\end{aligned}$$

Ce qui termine la démonstration.

1.3 Les opérateurs

Soient E et F deux espaces de Banach. Notons $\|.\|$ la norme dont ils sont munis.

Opérateur linéaire

Définition 1.14. *Soient E, F deux espaces de Banach. Un opérateur linéaire est une application linéaire*

$$A : D(A) \subset E \to F$$

i.e ;

$$\begin{aligned}
\forall (u,v) \quad \in D(A)^2 \quad , \quad & A(u+v) = Au + Av, \\
\forall \lambda \in \mathbb{C}, \qquad\qquad & A(\lambda u) = \lambda Au.
\end{aligned}$$

Domaine

Définition 1.15. *Un opérateur linéaire A de E dans F est une application linéaire A défini par sur un sous-espace vectoriel $D(A)$ de E appelé domaine de A tel que*

$$D(A) = \{u; \quad Au \in F\}$$

Ainsi ;

$$A : D(A) \subset E \to F$$

On dit que A est borné s'il existe $C \geq 0$ telle que

$$\forall u \in D(A), \quad \|Au\|_F \leq C\|u\|_E$$

Dans le cas contraire, A est dit non borné.

Opérateurs linéaires bornés

Définition 1.16. *Soient X,Y deux espaces vectoriels normés, on désigne par $\mathscr{L}(X,Y)$ l'espace des opérateurs linéaires continus de X dans Y munit de la norme*

$$\boxed{\|T\|_{\mathscr{L}(X,Y)} = \sup\{|Tx|_Y : x \in X \text{ et } |x|_X \leqslant 1\}}$$

$\mathscr{L}(X,Y)$ est dit espace des opérateurs bornés.
On pose $\mathscr{L}(X) = \mathscr{L}(X,X)$.

Notation : On désigne par X' le dual topologique de X.c'est à dire l'espace des formes linéaires continues sur X ; X' est munit de la norme duale

$$\|f\|_{X'} = \sup_{|x|_X \leqslant 1} |f(x)|$$

lorsque $f \in X'$ et $x \in X$ on note généralement $\langle f,x\rangle$ au lieu de $f(x)$, on dit que $\langle,\rangle$ est le crochet dedualité.

Opérateurs linéaires non-bornés

Définition 1.17. *Soient X et Y deux espaces de Banach, on appelle opérateur linéaire non-borné de X dans Y toute application linéaire $A : D(A) \subset X \longrightarrow Y$ définie sur un espace vectoriel $D(A) \subset X$ à valeurs dans $Y, D(A)$ est le domaine de A. On dit que A est borné s'il existe une constante $c \geqslant 0$ telle que*

$$|Ax|_Y \leqslant c|x|_X \quad \forall x \in D(A)$$

Opérateurs dissipatifs

Définition 1.18. *Soit $(X, |.|)$ un espace de Banach et soit X' son dual topologique, on note la valeur de $x^* \in X'$ au point $x \in X$ par $\langle x^*, x\rangle$ ou $\langle x, x^*\rangle$. Pour tout $x \in X$ on définit l'ensemble de dualité $F(x) \subseteq X'$ par :*

$$F(x) = \left\{x^* \in X', \langle x^*, x\rangle = |x|_X^2 = \|x^*\|_{X'}^2\right\}$$

Pour tout $x \in X, F(x) \neq \varnothing$

Définition 1.19. *Un opérateur linéaire A est dissipatif si pour tout $x \in D(A)$ il existe $x^* \in F(x)$ tel que $\operatorname{Re}\langle Ax, x^*\rangle \leqslant 0$. Si H est un espace de Hilbert alors un opérateur linéaire $A : D(A) \subset H \longrightarrow H$ est dissipatif si pour tout $x \in D(A)$*

$$\operatorname{Re}\left(\langle Ax, x\rangle_H\right) \leqslant 0$$

avec $\langle , \rangle_H$ est le produit scalaire dans H

Opérateur maximal monotone

Définition 1.20. *[7] Soit $A : D(A) \subset H \to H$ un opérateur linéaire non borné. On dit que :*

— *A monotone si*

$$\langle Av, v\rangle \geq 0, \quad \forall \in D(A).$$

— *A maximal monotone si de plus $R(I + A) = H$ i.e.*

$$\forall f \in H,\ \exists u \in D(A) \text{ tel que } u + Au = f.$$

Proposition 1.3. *[7] Soit A un opérateur maximal monotone. Alors D(A) est dense dans H.*

1.4 Quelques notions de la théorie des semi-groupes

On va rappeler quelques notions et théorèmes de la théorie de semi-groupes, nécessaires pour le développement de notre thème. Pour plus de détails, on renvoie aux ouvrages suivants : [7],[10],[11].

Semi groupe fortement continu

Définition 1.21. ***(Semi-groupe)***
Soit X un espace de Banach, une famille $T(t), 0 \leqslant t < \infty$ d'opérateur linéaire borné de X dans X est dite un semi-groupe sur X si :

1. $T(0) = I$ *(est l'identité dans X)*
2. $T(s+t) = T(s)T(t)$ *pour tout* $t, s \geqslant 0$

Définition 1.22. ***(C_0 semi-groupe)***
Un semi-groupe $T(t), 0 \leqslant t < \infty$ d'opérateur linéaire borné est un semi-groupe fortement continu si :

$$\lim_{t \to 0} T(t)x = x \quad \text{pour tout } x \in X$$

Un semi groupe d'opérateur linéaire borné fortement continu est dit un C_0 semi-groupe

Théorème 1.6. *[11] Soit $T(t)$ un C_0 semi-groupe, alors ils existent un réel wet un réel $M \geqslant 1$ tels que :*

$$\|T(t)\| \leqslant Me^{wt} \quad \text{pour tout } t \geqslant 0$$

En particulier, si $M = 1$ et $w = 0$ alors $(T(t))_t$ est appelé C_0 semi-groupe de contractions

Générateur infinitésimal

Définition 1.23. *[10] Soit $(T(t))_t$ un semi-groupe sur X, l'opérateur linéaire A défini par :*

$$D(A) = \left\{ x \in X : \lim_{t \to 0^+} (T(t)x - x)/t \text{ existe} \right\}$$

$$Ax = \lim_{t \to 0^+} (T(t)x - x)/t$$

est le générateur infinitésimal du semi-groupe $T(t), D(A)$ est le domaine de A

Théorème de Hille-Yosida

Théorème 1.7. *(Hille-Yosida)[7]*

- Soit A un opérateur maximal monotone dans un espace de Hilbert H. Alors pour tout $u_0 \in \mathrm{D}(\mathrm{A})$ *il existe une fonction*

$$u \in \mathrm{C}^1\left(\left[\mathbf{0},+\infty\left[;\mathbf{H}\right)\cap\mathbf{C}\left(\left[\mathbf{0},+\infty\right[;\mathbf{D}(\mathbf{A})\right)\right.\right.\left(^1\right)$$

unique telle que

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\mathrm{A}u=0 \quad \textit{sur} \quad [0,+\infty[\\ u(0)=u_0 \quad \textit{(donnée initiale)}. \end{cases} \tag{1.4}$$

De plus on a

$$|u(t)| \leqslant |u_0| \quad \textit{et} \quad \left|\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t)\right| = |\mathbf{A}u(t)| \leqslant |\mathbf{A}u_0| \quad \forall t \geqslant 0.$$

Théorème de Lumer-Phillips

Théorème 1.8. *(Lumer Phillips)[10]*

Soit A un opérateur linéaire tel que $\overline{D(A)}=X$

1. *Si A est dissipatifet s'il existe* $\lambda_0>0$ *tel que* $\operatorname{Im}(\lambda_0 I-A)=X$ *alors A est le générateur infinitésimal d'un* C_0 *semi groupe de contractions sur X*
2. *Si A est le générateur infinitésimal d'un* C_0 *semi groupe de contractions sur X alors A est dissipatif et* $\operatorname{Im}(\lambda I-A)=X$ *pour tout* $\lambda>0$*. De plus, pour tout* $x \in D(A)$ *et pour tout* $x^* \in F(x), \operatorname{Re}\langle Ax,x^*\rangle) \leqslant 0$

Définition 1.24. *On dit qu'une forme bilinéaire* $a(u,v): H\times H \to \mathbb{R}$ *est :*

i) continue s'il existe une constante C telle que

$$|a(u,v)| \leq C|u||v| \quad \forall u,v \in H$$

ii) coercive s'il existe une constante $\alpha>0$ *telle que*

$$a(v,v) \geq \alpha|u|^2 \quad \forall v \in H$$

Théorème de Lax-Milgram

corollaire 1.2. ***(Lax-Milgram)***

Soit $a\,(u,\nu)$ une forme bilinéaire, continue et coercive. Alors pour tout $\varphi \in H$ il existe $u \in H$ unique tel que

$$a(u,\nu) = \langle \varphi, \nu \rangle, \quad \forall v \in H$$

De plus, si a est symétrique, alors u est caractérisé par la propriété

$$u \in H \text{ et } \frac{1}{2}a(u,u) - \langle \varphi, \nu \rangle = \min_{v \in H} \left\{ \frac{1}{2}a(v,v) - \langle \varphi, \nu \rangle \right\}$$

Théorème de la perturbation bornée

Théorème 1.9. *(Théorème de la perturbation bornée)[11]*

Soit X un espace de Banach et soit A un opérateur non borné $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$, le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continue $(T(t))_{t \geq 0}$ tel que :

$$\|T(t)\| \leqslant Me^{wt} \quad \text{pour tout } t \geqslant 0$$

et pour $w \in \mathbb{R}, M \geqslant 1$ Si $B \in \mathscr{L}(X)$ alors $C := A + B$ avec $D(C) := D(A)$ génère un semi-groupe fortement continue $(S(t))_{t \geqslant 0}$ tel que :

$$\|S(t)\| \leqslant Me^{(w+M\|B\|)t} \quad \text{pour tout } t \geqslant 0$$

On dit que B est une perturbation bornée de A

CHAPITRE 2

Existence et Unicité de la solution

2.1 Introduction

Dans ce chapitre nous allons démontres l'existence et l'unicité de la solution d'un système de type Moore-Gibson-Thomson, en utilisant le théorème de Hille-Yosida et le théorème de Lax-Milgramm.

2.2 Position du problème

Considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} \tau u_{ttt} + u_{tt} - \Delta u - \beta \Delta u_t = 0 & t \geqslant 0, x \in \mathbb{R}^n \\ \\ u(x,0) = u_0(x)\ , \quad u_t(x,0) = u_1(x)\ , \quad u_{tt}(x,0) = u_2(x) & \end{cases} \tag{2.1}$$

avec

$$\tau, \beta \in \mathbb{R}_+^* \quad , \quad \text{telle que} \quad 0 < \tau < \beta \tag{2.2}$$

Tout d'abord, on réécrit le système (2.1) en un système des équations différentielles du premier ordre. Par le changement de variable suivant :

$$v = u_t \quad \text{et} \quad w = u_{tt}$$

Le système (2.1) devient :

$$\begin{cases} u_t - v = 0, \\ v_t - w = 0, \\ w_t - \frac{1}{\tau}\Delta(u+\beta v) + \frac{1}{\tau}w = 0 \end{cases} \tag{2.3}$$

Le système (2.3) s'écrit aussi sous la forme de système de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}U(t) = \mathscr{A}U(t) \quad , \qquad\qquad t \geqslant 0 \\ \\ U(0) = U_0 \end{cases} \tag{2.4}$$

avec

$$U(t) = (u,v,w)^T, U_0 = (u_0,u_1,u_2)^T$$

et

$$\mathscr{A} : \mathscr{D}(\mathscr{A}) \subset \mathscr{H} \longrightarrow \mathscr{H} \text{est un opérateur linéaire définit par :}$$

$$\mathscr{A}\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ w \\ \frac{1}{\tau}\Delta(u+\beta v) - \frac{1}{\tau}w \end{pmatrix}$$

avec $\mathscr{H}$ est un espace de Hilbert telle que :

$$\mathscr{H} = H^1\left(\mathbb{R}^N\right) \times H^1\left(\mathbb{R}^N\right) \times L^2\left(\mathbb{R}^N\right)$$

et

$$\mathscr{D}(\mathscr{A}) = \left\{(u,v,w) \in \mathscr{H}; w \in H^1\left(\mathbb{R}^N\right), u+\beta v \in H^2\left(\mathbb{R}^N\right)\right\}$$

clairement, $\mathscr{D}(\mathscr{A})$ est dense dans $\mathscr{H}$.

On définit le produit scalaire sur l'espace $\mathscr{H}$, pour $U = (u,v,w) \in \mathscr{H}$ et $V = (u_1,v_1,w_1) \in \mathscr{H}$ comme suit :

$$\langle U,V\rangle_{\mathscr{H}} = \tau(\beta-\tau)\int_{\mathbb{R}^N} \nabla v \cdot \nabla \overline{v}_1 dx + \int_{\mathbb{R}^N} \nabla(u+\tau v)\cdot\nabla(\overline{u}_1+\tau\overline{v}_1)\,dx$$

$$+\int_{\mathbb{R}^N}(v+\tau w)\cdot(\overline{v}_1+\tau\overline{w}_1)\,dx + \int_{\mathbb{R}^N}(u+\tau v)\cdot(\overline{u}_1+\tau\overline{v}_1)\,dx$$

$$+\int_{\mathbb{R}^N} v\cdot\overline{v}_1 dx$$

et la norme :

$$\|U\|_{\mathscr{H}} = \tau(\beta-\tau)\|\nabla v\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \|\nabla(u+\tau v)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$$

$$+\|v+\tau w\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \|u+\tau v\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \|v\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$$

2.3 Résultat d'existence et d'unicité

On a le résultat d'existence et d'unicité suivant :

Théorème 2.1. *Sous la condition (2.2) , soit $U_0 \in \mathscr{H}$, alors il existe une solution unique U du problème (2.4) tel que $U \in C^1([0,+\infty);\mathscr{H}) \cap C([0,+\infty);\mathscr{D}(\mathscr{A}))$*

Preuve. La démonstration repose sur l'ètude du problème perturber suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}U(t) = \mathscr{A}_B U(t), & t \in [0,+\infty) \\ \\ U(0) = U_0 \end{cases} \tag{2.5}$$

avec

$$\mathscr{A}_B \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = (\mathscr{A}+B) \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ w \\ \frac{1}{\tau}\Delta(u+\beta v) - \frac{1}{\tau}w - \frac{1}{\tau}u - v - \frac{1}{\tau^2}v \end{pmatrix}.$$

pour démontrer ce théorème, nous utilisons la théorie des semi-groupe, c'est à dire , nous montrons que l'opérateur $\mathscr{A}_B$ génère un c_0 semi-groupe sur $\mathscr{H}$. Dans cette étape, nous nous préoccupons de prouver que l'opérateur $\mathscr{A}_B$ est dissipatif . Effectivement pour $(u,v,w)^T \in \mathscr{D}(\mathscr{A})$, on trouve :

$$
\begin{aligned}
\langle \mathscr{A}_B u, u\rangle &= \tau(\beta-\tau)\int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \nabla v \nabla \overline{w}\ \ dx + \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \nabla(u+\tau v)\nabla\overline{(v+\tau w)}\ \ dx \\
&+ \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} (v+\tau w)\overline{(w+\Delta(u+\beta v)-w-u-\tau v-\frac{1}{\tau}v)}\ \ dx \\
&+ \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} (u+\tau v)\overline{(v+\tau w)}\ \ dx + \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} v\overline{w}\ \ dx \\
&= \tau\beta\int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \nabla v\nabla\overline{w}\ \ dx - \tau^2\int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \nabla v\nabla\overline{w}\ \ dx + \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \nabla u\nabla\overline{v}\ \ dx + \tau\int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \nabla u\nabla\overline{w}\ \ dx \\
&+\tau\int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \nabla v\nabla\overline{v}\ \ dx + \tau^2\int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \nabla v\nabla\overline{w}\ \ dx + \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} v\overline{w}\ \ dx + \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} v\Delta\overline{(u+\beta v)}\ \ dx \\
&- \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} v\overline{w}dx - \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} v\overline{u}dx - \tau\int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} v\overline{v}dx - \frac{1}{\tau}\int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} v\overline{v}dx + \tau\int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} w\overline{w}dx + \tau\int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} w\Delta\overline{(u+\beta v)}dx \\
&-\tau\int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} w\overline{w}\ \ dx - \tau\int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} w\overline{u}\ \ dx - \tau^2\int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} w\overline{v}\ \ dx - \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} w\overline{v}\ \ dx + \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} u\overline{v}\ \ dx + \tau\int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} u\overline{w}\ \ dx \\
&+\tau\int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} v\overline{v}\ \ dx + \tau^2\int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} v\overline{w}\ \ dx + \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} v\overline{w}\ \ dx \\
&= -(\beta-\tau)\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2\ \ dx - \frac{1}{\tau}\int_{\mathbb{R}^N} |v|^2\ \ dx
\end{aligned}
$$

d'où

$$
\mathrm{Re}\,\langle \mathscr{A}_B U, U\rangle_{\mathscr{H}} = -(\beta-\tau)\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 dx - \frac{1}{\tau}\int_{\mathbb{R}^N} |v|^2 dx \leq 0
$$

Alors, l'opérateur $\mathscr{A}_B$ est dissipatif pour $0 < \tau < \beta$.

Maintenant nous montrons que l'opérateur $(\lambda - \mathscr{A}_B)$ est surjective :

C'est à dire, on considère

$$
F = (f, g, h) \in \mathscr{H}
$$

et nous montrons qu'il existe

$$
U = (u, v, w) \in \mathscr{D}(\mathscr{A})
$$

telle que

$$(\lambda Id - \mathscr{A}_B)U = F$$

qui est équivalent au système suivant :

$$\begin{cases} \lambda u - v = f \in H^1\left(\mathbb{R}^N\right) \\ \lambda v - w = g \in H^1\left(\mathbb{R}^N\right) \\ \lambda w - \dfrac{1}{\tau}\Delta(u - \beta v) + \dfrac{1}{\tau}w + \dfrac{1}{\tau}u + v + \dfrac{1}{\tau^2}v = h \in L^2\left(\mathbb{R}^N\right). \end{cases} \tag{2.6}$$

La première et la deuxième équation de (2.6) donnent

$$\begin{cases} v = \lambda u - f \\ \\ w = \lambda v - g. \end{cases} \tag{2.7}$$

En substituant (2.7) dans la troisième équation de système (2.6), nous obtenons :

$$\lambda\left[\lambda\left(\lambda u - f\right) - g\right] - \frac{1}{\tau}\Delta(u + \beta\left(\lambda u - f\right)) + \frac{1}{\tau}\left[\lambda\left(\lambda u - f\right) - g\right] + \frac{1}{\tau}u + \lambda u - f + \frac{1}{\tau^2}\left(\lambda u - f\right) = h,$$

Par simplification, on obtient :

$$\lambda^3 u - \lambda^2 f - \lambda g - \frac{1}{\tau}\Delta u - \frac{\beta\lambda}{\tau}\Delta u + \frac{\beta}{\tau}\Delta f + \frac{\lambda^2}{\tau}u - \frac{1}{\tau}f - \frac{1}{\tau}g + \frac{1}{\tau}u + \lambda u - f + \frac{\lambda}{\tau^2}u - \frac{1}{\tau^2}f = h,$$

on peut écrire aussi :

$$\left(\lambda^3 + \frac{\lambda^2}{\tau} + \frac{1}{\tau} + \lambda + \frac{\lambda}{\tau^2}\right)u - \frac{1}{\tau}(1 + \beta\lambda)\Delta u - \left(\lambda^2 + \frac{\lambda}{\tau} + \frac{1}{\tau^2} + 1\right)f - \left(\lambda + \frac{1}{\tau}\right)g + \frac{\beta}{\tau}\Delta f = h,$$

ce qui donne :

$$\left(\lambda^3\tau + \lambda^2 + \lambda\frac{\tau^2+1}{\tau} + 1\right)u - (1 + \beta\lambda)\Delta u = \left(\lambda^2\tau + \lambda + \frac{\tau^2+1}{\tau}\right)f + (\lambda\tau + 1)g - \beta\Delta f + \tau h. \tag{2.8}$$

En multipliant l'équation (2.8) par la fonction $\varphi \in H^1$, on obtient

$$\begin{aligned}\left(\lambda^3\tau+\lambda^2+\lambda\frac{\tau^2+1}{\tau}+1\right)u\varphi-(1+\beta\lambda)\Delta u\varphi &= \left(\lambda^2\tau+\lambda+\tfrac{\tau^2+1}{\tau}\right)f\varphi \\ &+(\lambda\tau+1)g\varphi-\beta\Delta f\varphi+\tau h\varphi.\end{aligned} \tag{2.9}$$

Donc le problème (2.9) est équivalent au problème

$$\mathscr{M}(u,v)=\mathscr{K}(\varphi),$$

telle que $\mathscr{M}$ est une forme bilinéaire définit par :

$$\mathscr{M}:H^1\left(\mathbb{R}^N\right)\times H^1\left(\mathbb{R}^N\right)$$

$$\mathscr{M}(u,\varphi)=\left(\lambda^3\tau+\lambda^2+\lambda\frac{\tau^2+1}{\tau}+1\right)\int_{\mathbb{R}^N}u\varphi dx+(1+\beta\lambda)\int_{\mathbb{R}^N}\nabla u\nabla\varphi dx$$

et $\mathscr{K}$ est une forme linéaire définit par :

$$\mathscr{K}:H^1\left(\mathbb{R}^N\right)\to\mathbb{R}$$

$$\mathscr{K}(\varphi)=\left(\lambda^2\tau+\lambda+\frac{\tau^2+1}{\tau}\right)\int_{\mathbb{R}^N}f\varphi dx+\beta\int_{\mathbb{R}^N}\nabla f\nabla\varphi dx+(\lambda\tau+1)\int_{\mathbb{R}^N}g\varphi dx+\tau\int_{\mathbb{R}^N}h\varphi dx.$$

• Nous prouvons que $\mathscr{M}$ est coercive :

En effet,

$$\begin{aligned}\mathscr{M}(u,u) &= \left(\lambda^3\tau+\lambda^2+\lambda\frac{\tau^2+1}{\tau}+1\right)\int_{\mathbb{R}^N}u^2dx+(1+\beta\lambda)\int_{\mathbb{R}^N}\nabla u^2dx \\ &\geq \min\left\{\lambda^3\tau+\lambda^2+\lambda\frac{\tau^2+1}{\tau}+1,1+\beta\lambda\right\}\left(\int_{\mathbb{R}^N}u^2dx+\int_{\mathbb{R}^N}\nabla u^2dx\right)\end{aligned}$$

d'où

$$\mathscr{M}(u,u)\geq\min\left\{\lambda^3\tau+\lambda^2+\lambda\frac{\tau^2+1}{\tau}+1,1+\beta\lambda\right\}\cdot\|u\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)}$$

pour $\lambda > 0$, ainsi $\mathscr{M}$ est coercive.

- Continuité de $\mathscr{M}(.,.)$:

$$
\begin{aligned}
|\mathscr{M}(u,u)| &= \left| \left(\lambda^3\tau + \lambda^2 + \lambda \frac{\tau^2+1}{\tau} + 1 \right) \int_{\mathbb{R}^N} u^2 dx + (1+\beta\lambda) \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u^2 dx \right| \\
&\leq \left| \lambda^3\tau + \lambda^2 + \lambda \frac{\tau^2+1}{\tau} + 1 \right| \int_{\mathbb{R}^N} |u\varphi| dx + |1+\beta\lambda| \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u \nabla \varphi| dx
\end{aligned}
$$

Gràce à l'inégalité de Hölder, on a :

$$
\begin{aligned}
|\mathscr{M}(u,u)| &\leq \left| \lambda^3\tau + \lambda^2 + \lambda \tfrac{\tau^2+1}{\tau} + 1 \right| . \parallel u \parallel_{L^2(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})} \cdot \parallel \varphi \parallel_{L^2(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})} \\
&+ |1+\beta\lambda| \parallel \nabla u \parallel_{L^2(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})} \cdot \parallel \nabla\varphi \parallel_{L^2(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})} \\
&\leq max \left\{ \lambda^3\tau + \lambda^2 + \lambda \tfrac{\tau^2+1}{\tau} + 1, 1+\beta\lambda \right\} \left(\parallel u \parallel_{L^2(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})} \cdot \parallel \varphi \parallel_{L^2(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})} + \parallel \nabla u \parallel_{L^2(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})} \cdot \parallel \nabla\varphi \parallel_{L} \right. \\
&\leq c \parallel u \parallel_{H^1(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})} \cdot \parallel \varphi \parallel_{H^1(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})}
\end{aligned}
$$

ce qui implique que $\mathscr{M}$ est continue.

- De même , nous montrons que $\mathscr{K}(\varphi)$ est continue

on a :

$$
\begin{aligned}
|K(\varphi)| &= \left| \left(\lambda^2\tau + \lambda + \frac{\tau^2+1}{\tau} \right) \int_{\mathbb{R}^N} f\varphi dx + \beta \int_{\mathbb{R}^N} \nabla f \nabla\varphi dx + (\lambda\tau+1) \int_{\mathbb{R}^N} g\varphi dx + \tau \int_{\mathbb{R}^N} h\varphi dx \right| . \\
&\leq \left| \lambda^2\tau + \lambda + \frac{\tau^2+1}{\tau} \right| \int_{\mathbb{R}^N} |f\varphi| dx + |\beta| \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla f \nabla\varphi| dx + |\lambda\tau+1| \int_{\mathbb{R}^N} |g\varphi| dx + |\tau| \int_{\mathbb{R}^N} |h\varphi| dx.
\end{aligned}
$$

Gràce à l'inégalité de Hölder, on a :

$$
\begin{aligned}
|\mathscr{K}(\varphi)| \ &\leq \left|\lambda^2\tau+\lambda+\frac{\tau^2+1}{\tau}\right| \parallel f \parallel_{L^2(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})} \cdot \parallel \varphi \parallel_{L^2(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})} + |\beta| \parallel \nabla f \parallel_{L^2(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})} \cdot \parallel \nabla g \parallel_{L^2(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})} \\
&+ |\lambda\tau+1| \parallel g \parallel_{L^2(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})} \cdot \parallel \varphi \parallel_{L^2(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})} + |\tau| \parallel h \parallel_{L^2(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})} \cdot \parallel \varphi \parallel_{L^2(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})} . \\
&\leq max\left\{\left|\lambda^2\tau+\lambda+\tfrac{\tau^2+1}{\tau}\right|, |\beta|, |\tau\lambda+1|, |\tau|\right\} (\parallel f \parallel_{L^2(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})} \cdot \parallel \varphi \parallel_{L^2(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})} \\
&+ \parallel \nabla f \parallel_{L^2(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})} \cdot \parallel \nabla g \parallel_{L^2(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})} + \parallel g \parallel_{L^2(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})} \cdot \parallel \varphi \parallel_{L^2(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})} + \parallel h \parallel_{L^2(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})} \cdot \parallel \varphi \parallel_{L^2(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})}). \\
&\leq c\left(\parallel \varphi \parallel_{L^2(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})} + \parallel \nabla\varphi \parallel_{L^2(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})}\right) \\
&\leq c \parallel \varphi \parallel_{H^1(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})}
\end{aligned}
$$

d'où $\mathscr{K}$ est continue

par conséquent le théorème de Lax-Milgram garantit l'existence d'une solution unique $u \in H^1(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ telle que :

$$\mathscr{M}(u,\varphi) = \mathscr{K}(\varphi)\ , \ \ \forall\varphi \in H^1(\mathbb{R})$$

Donc l'opérateur $(\lambda Id - \mathscr{A}_B)$ est surjective pour tout $\lambda > 0$. Cela signifie que $\mathscr{A}_B$ est un opérateur maximal monotone.

En suite , en utilisant le théorème de Lummer-phillips , on en déduit que $\mathscr{A}_B$ est un générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe linéaire sur $\mathscr{H}$.

Finalement, comme $\mathscr{A}_B$ est une perturbation bornée de $\mathscr{A}$, alors $\mathscr{A}$ est un générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe de $\mathscr{H}$.[d'aprés théorème(1.9)]
Alors le résultat cité dans le théorème est vérifié . □

CHAPITRE 3

STABILITÉ DU SYSTÈME DE MOORE-GIBSON-THOMPSON

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, on étudie la stabilité et le taux de décroissance de la solution d'un système de type Moore-Gibson-Thompson par la méthode de l'énergie .

On considère le système suivant :

$$\begin{cases} \tau u_{ttt} + u_{tt} - \Delta u - \beta \Delta u_t = 0 & t \geqslant 0, x \in \mathbb{R}^n \\ \mathrm{u(x,0)} = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad u_{tt}(x,0) = u_2(x) & t \geqslant 0, x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{3.1}$$

On note que $V = (u_t + \tau u_{tt}, \nabla(u + \tau u_t), \nabla u_t)$ avec $u(x,t)$ est la solution du système (3.1)

Une transformation de Fourier appliquée au système (3.1), on obtient :

$$\tau \hat{u}_{ttt} + \hat{u}_{tt} + |\xi|^2 \hat{u} + \beta |\xi|^2 \hat{u}_t = 0, \tag{3.2}$$

Tout d'abord, on réecrit le système (3.2) en un système des équations différentielles du premier ordre. Par le changement de variable suivant :

$$v = u_t \quad \text{et} \quad w = u_{tt}$$

Le système (3.1) devient :

$$\begin{cases} \hat{u}_t = \hat{v} \\ \hat{u}_t = \hat{w} \\ \tau \hat{w}_t = -|\xi|^2 \hat{u} - \beta |\xi|^2 \hat{v} - \hat{w} \end{cases} \tag{3.3}$$

avec les conditions initiales :

$$\hat{u}(\xi,0) = \hat{u}_0(\xi), \quad \hat{u}_t(\xi,0) = \hat{u}_1(\xi), \quad \hat{u}_{tt}(\xi,0) = \hat{u}_2(\xi) \tag{3.4}$$

Le système (3.3) s'écrit aussi sous la forme :

$$\begin{cases} \hat{U}_t(\xi,t) = \Phi(\xi)\hat{U}(\xi,t) \\ \hat{U}_0(\xi) = \hat{U}(\xi,0) \end{cases} \tag{3.5}$$

avec $\hat{U}(\xi,t) = (\hat{u}(\xi,t), \hat{v}(\xi,t), \hat{w}(\xi,t))^T$ la solution de système (3.5) et A, L sont des matrices tels que :

$$\Phi(\xi) = L + |\xi|^2 A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\tau} \end{pmatrix} + |\xi|^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\tau} & -\frac{\beta}{\tau} & 0 \end{pmatrix}$$

3.2 Résultats principaux

Proposition 3.1. *Soit $\hat{U} = (\hat{u}, \hat{v}, \hat{w})$ la solution de (3.3) , pour tout $t \geqslant 0$ et $\xi \in \mathbb{R}$, on suppose que $0 < \tau < \beta$. on a l'estimation suivante :*

$$|\hat{V}(\xi,t)|^2 \leq Ce^{-cp(\xi)t}|\hat{V}(\xi,0)|^2 \tag{3.6}$$

où

$$\rho(\xi) = \frac{|\xi|^2}{1+|\xi|^2} \tag{3.7}$$

et C et c sont des constantes positives.

Preuve

La preuve de la proposition (3.1), sera donnée à travers plusieurs lemmes.

3.3 Calcule d'énergie

Lemme 3.1.

Soit $\hat{U} = (\hat{u}, \hat{v}, \hat{w})$ la solution du système (3.3) , on definit $\hat{E}(\xi,t)$ l'energie associe au système (3.3), pour $t \geqslant 0$, et on a :

$$\frac{d}{dt}\hat{E}(\xi,t) = -(\beta-\tau)|\xi|^2|\hat{v}|^2 \tag{3.8}$$

avec

$$\hat{E}(\xi,t) = \frac{1}{2}\left\{|\hat{v}+\tau\hat{w}|^2 + \tau(\beta-\tau)|\xi|^2|\hat{v}|^2 + |\xi|^2|\hat{u}+\tau\hat{v}|^2\right\} \tag{3.9}$$

Preuve. L'addition de la deuxième et la troisième equation de (3.3) , on obtient :

$$(\hat{v}+\tau\hat{w})_t = -|\xi|^2\hat{u} - \beta|\xi|^2\hat{v} \tag{3.10}$$

En multipliant l'équation (3.10) par $\overline{\hat{v}}+\tau\overline{\hat{w}}$, on obtient :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\hat{v}+\tau\hat{w}|^2=-\tau|\xi|^2\mathrm{Re}(\hat{u}\overline{\hat{w}})-\beta\tau|\xi|^2\mathrm{Re}(\hat{v}\overline{\hat{w}})-|\xi|^2\mathrm{Re}(\hat{u}\overline{\hat{v}})-\beta|\xi|^2|\hat{v}|^2 \tag{3.11}$$

Puis, en multipliant la deuxième equation du système (3.3) par $\tau(\beta-\tau)\overline{\hat{v}}$, on obtient :

$$\frac{1}{2}\tau(\beta-\tau)\frac{d}{dt}|\hat{v}|^2=\tau(\beta-\tau)\mathrm{Re}(\hat{w}\overline{\hat{v}}) \tag{3.12}$$

De même, en multipliant la deuxième équation du système (3.3) par τ et en ajoutant le résultat a la première équation, on obtient :

$$(\hat{u}+\tau\hat{v})_t=\tau\hat{w}+\hat{v} \tag{3.13}$$

En suite, multipliant l'équation (3.13) par $\overline{\hat{u}}+\tau\overline{\hat{v}}$, on obtient :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\hat{u}+\tau\hat{v}|^2=\tau\mathrm{Re}(\hat{w}\overline{\hat{u}})+\tau^2\mathrm{Re}(\hat{w}\overline{\hat{v}})+\mathrm{Re}(\hat{v}\overline{\hat{u}})+\tau|\hat{v}|^2 \tag{3.14}$$

En calculant $\big(|\xi|^2(3.14)\big)+|\xi|^2(3.12)+(3.11)$, on obtient :

$$\frac{d}{dt}\hat{E}(\xi,t)=-(\beta-\tau)|\xi|^2|\hat{v}|^2 \tag{3.15}$$

□

On remarque que :

$$\gamma_1|\hat{V}(\xi,t)|^2\leq\hat{E}(\xi,t)\leq\gamma_2|\hat{V}(\xi,t)|^2 \tag{3.16}$$

Lemme 3.2.
Soit $\hat{U}=(\hat{u},\hat{v},\hat{w})$ la solution de (3.3). On definit la fonction $F_1(\xi,t)$ par :

$$F_1(\xi,t)=\mathrm{Re}\left\{(\overline{\hat{u}}+\tau\overline{\hat{v}})(\hat{v}+\tau\hat{w})\right\} \tag{3.17}$$

Alors, on a

$$\frac{d}{dt}F_1(\xi,t)+(1-\varepsilon_0)|\xi|^2|\hat{u}+\tau\hat{v}|^2\leq|\hat{v}+\tau\hat{w}|^2+C(\varepsilon_0)|\xi|^2|\hat{v}|^2. \tag{3.18}$$

Preuve. En multipliant l'équation (3.10) par $\overline{\hat{u}}+\tau\overline{\hat{v}}$, on obtient :

$$\begin{aligned}(\hat{v}+\tau\hat{w})_t(\overline{\hat{u}}+\tau\overline{\hat{v}}) &= \left(-|\xi|^2\hat{u}-\beta|\xi|^2\hat{v}\right)(\overline{\hat{u}}+\tau\overline{\hat{v}}) \\ &= \left(-|\xi|^2\hat{u}-\beta|\xi|^2\hat{v}-\tau|\xi|^2\hat{v}+\tau|\xi|^2\hat{v}\right)(\overline{\hat{u}}+\tau\overline{\hat{v}})\end{aligned} \tag{3.19}$$

En suite, en multipliant l'équation (3.13) par $\overline{\hat{v}}+\tau\overline{\hat{w}}$, on obtient :

$$(\hat{u}+\tau\hat{v})_t(\overline{\hat{v}}+\tau\overline{\hat{w}}) = (\tau\hat{w}+\hat{v})(\overline{\hat{v}}+\tau\overline{\hat{w}}) \tag{3.20}$$

L'addition des deux équations (3.19) et (3.20), donne :

$$\frac{d}{dt}F_1(\xi,t)+|\xi|^2|\hat{u}+\tau\hat{v}|^2-|\hat{v}+\tau\hat{w}|^2 = |\xi|^2(\tau-\beta)\operatorname{Re}(\hat{v}(\overline{\hat{u}}+\tau\overline{\hat{v}})) \tag{3.21}$$

On applique l'inégalité de Young sur l'égalité (3.21) , pour $\varepsilon_0>0$, on obtient :

$$\frac{d}{dt}F_1(\xi,t)+(1-\varepsilon_0)\,|\xi|^2|\hat{u}+\tau\hat{v}|^2 \leq |\hat{v}+\tau\hat{\omega}|^2+C\,(\varepsilon_0)\,|\xi|^2|\hat{v}|^2. \tag{3.22}$$

□

Lemme 3.3.
Soit $\hat{U}=(\hat{u},\hat{v},\hat{w})$ la solution de (3.3). On définit la fonction $F_2(\xi,t)$ par :

$$F_2(\xi,t) = -\tau\operatorname{Re}(\overline{\hat{v}}(\hat{v}+\tau\hat{w})) \tag{3.23}$$

Alors, on a

$$\frac{d}{dt}F_2(\xi,t)+(1-\varepsilon_1)\,|\hat{v}+\tau\hat{w}|^2 \leq C\,(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\left(1+|\xi|^2\right)|\hat{v}|^2+\varepsilon_2|\xi|^2|\hat{u}+\tau\hat{v}|^2 \tag{3.24}$$

Preuve. En multipliant la deuxième equation du système (3.3) par $-\tau(\overline{\hat{v}}+\tau\overline{\hat{w}})$, on obtient :

$$-\tau\hat{v}_t(\overline{v}+\tau\overline{w}) = -\tau\hat{w}(\overline{\hat{v}}+\tau\overline{\hat{w}}) \tag{3.25}$$

en suite, multipliant l'équation (3.10) par $-\tau\overline{\hat{v}}$, on obtient :

$$\begin{aligned}
-\tau(\hat{v}+\tau\hat{w})_t\overline{\hat{v}} &= \left(\tau|\xi|^2\hat{u}+\beta\tau|\xi|^2\hat{v}\right)\overline{\hat{v}} \\
&= \left(\tau|\xi|^2\hat{u}+\tau\beta|\xi|^2\hat{v}+\tau^2|\xi|^2\hat{v}-\tau^2|\xi|^2\hat{v}+(\hat{v}+\tau\hat{w})-(\hat{v}+\tau\hat{w})\right)\bar{v}
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Additionnant les deux equations (3.25) et (3.26), on obtient :

$$\frac{d}{dt}F_2(\xi,t)+|\hat{v}+\tau\hat{w}|^2-\tau(\beta-\tau)|\xi|^2|\hat{v}|^2=\tau|\xi|^2\operatorname{Re}\{(\hat{u}+\tau\hat{v})\bar{v}\}+\operatorname{Re}\{(\hat{v}+\tau\hat{w})\bar{v}\}. \tag{3.27}$$

On applique l'inégalité de Young sur l'égalitê (3.27), pour tout $\varepsilon_1,\varepsilon_2>0$, on obtient :

$$\frac{d}{dt}F_2(\xi,t)+(1-\varepsilon_1)\,|\hat{v}+\tau\hat{w}|^2\leq C\,(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\left(1+|\xi|^2\right)|\hat{v}|^2+\varepsilon_2|\xi|^2|\hat{u}+\tau\hat{v}|^2 \tag{3.28}$$

□

Maintenant, on définit la fonction du Lyapunow $\mathscr{L}(\xi,t)$ par :

$$\mathscr{L}(\xi,t)=N\hat{E}(\xi,t)+\frac{|\xi|^2}{1+|\xi|^2}F_1(\xi,t)+\gamma_1\frac{|\xi|^2}{1+|\xi|^2}F_2(\xi,t) \tag{3.29}$$

telle que N,γ_1 sont des constantes positives.

Lemme 3.4.

Pour un N_0 assez grand il existe deux constantes positives γ_1 et γ_2 tel que pour tout $t\geqslant 0$, on a :

$$\gamma_1\hat{E}(\xi,t)\leq\mathscr{L}(\xi,t)\leq\gamma_2\hat{E}(\xi,t) \tag{3.30}$$

Preuve. A partir de (3.29) , on a :

$$|\mathscr{L}(\xi,t)-N\hat{E}(\xi,t)|=\left|\frac{|\xi|^2}{1+|\xi|^2}F_1(\xi,t)+\gamma_1\frac{|\xi|^2}{1+|\xi|^2}F_2(\xi,t)\right|$$

En utilisant (3.17),(3.23) , on obtient :

$$|\mathscr{L}(\xi,t)-N\hat{E}(\xi,t)|=\left|\frac{|\xi|^2}{1+|\xi|^2}\operatorname{Re}\left((\bar{\hat{u}}+\tau\bar{\hat{v}})(\hat{v}+\tau\hat{w})\right)+\gamma_1\frac{|\xi|^2}{1+|\xi|^2}\left(-\tau\operatorname{Re}(\bar{\hat{v}}(\hat{v}+\tau\hat{w}))\right)\right| \tag{3.31}$$

On applique l'inégalité de Young sur (3.31), on obtient :

$$\begin{aligned}\left|\mathscr{L}(\xi,t)-N\hat{E}(\xi,t)\right| &\leqslant \frac{\varepsilon|\xi|^2}{1+|\xi|^2}|\hat{v}+\tau\hat{w}|^2+C(\varepsilon)\frac{|\xi|^2}{1+|\xi|^2}\left|\overline{\hat{u}}+\tau\overline{\hat{v}}\right|^2+\gamma_1 C(\varepsilon)\frac{|\xi|^2}{1+|\xi|^2}|\hat{v}|^2\\ &\leqslant \lambda\hat{E}(\xi,t)\end{aligned}$$

donc :

$$(N-\lambda)\hat{E}(\xi,t)\leqslant \lambda\mathscr{L}(\xi,t)\leqslant (N+\lambda)\hat{E}(\xi,t)$$

d'où le résultat pour N trés grand. $\square$

Démonstration de la proposition (3.1)

Regroupant les dérivées des fonctions $\hat{E},F_1$ et F_2,on utilisant les équations (3.8),(3.18) et (3.29) on trouve :

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\mathscr{L}(\xi,t)+(\gamma_1(1-\varepsilon_1)-1)\frac{|\xi|^2}{1+|\xi|^2}|\hat{v}+\tau\hat{w}|^2\\ &+((1-\varepsilon_0)-\gamma_1\varepsilon_2)\frac{|\xi|^2}{1+|\xi|^2}\left(|\xi|^2|\hat{u}+\tau\hat{v}|^2\right)\\ &+(N(\beta-\tau)-C(\varepsilon_0)-\gamma_1 C(\varepsilon_1,\varepsilon_2))|\xi|^2|\hat{v}|^2\leq 0\end{aligned}\tag{3.32}$$

Maintenant, on choisit ε_0 et ε_1 comme suit :

$$\varepsilon_0<1,\quad \varepsilon_1<1,$$

Après, on prend γ_1 suffisament grand tel que :

$$\gamma_1>\frac{1}{1-\varepsilon_1}$$

et, on choisit ε_2 assez petit tel que :

$$\varepsilon_2<\frac{1-\varepsilon_0}{\gamma_1}$$

Finalement, on peut choisit N assez grand tel que :

$$N>\frac{C(\varepsilon_0)+\gamma_1 C(\varepsilon_1,\varepsilon_2)}{\beta-\tau}.$$

shachant que $\tau < \beta$.

Donc l'equation (3.32) devient :

$$\frac{d}{dt}\mathscr{L}(\xi,t) + \gamma_2 \hat{E}(\xi,t) \leq 0, \quad \forall t \geq 0, \tag{3.33}$$

avec :

$$D(\xi,t) = \frac{|\xi|^2}{1+|\xi|^2}|\hat{v}+\tau\hat{w}|^2 + \frac{|\xi|^2}{1+|\xi|^2}|\xi|^2|\hat{u}+\tau\hat{v}|^2 + |\xi|^2|\hat{v}|^2 \tag{3.34}$$

et γ_2 est une constante positive.

A partir de (3.34) , on a :

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{dt}\mathscr{L}(\xi,t) &\leq -\gamma_2 D(\xi,t) \\ &\leq -\gamma_2 \tfrac{|\xi|^2}{1+|\xi|^2}\hat{E}(\xi,t) \end{aligned}$$

donc :

$$\frac{d}{dt}\mathscr{L}(\xi,t) + \gamma_2 \rho(\xi)\hat{E}(\xi,t) \leq 0, \tag{3.35}$$

avec

$$\rho(\xi) = \frac{|\xi|^2}{1+|\xi|^2}$$

Par l'intégration de l'équation (3.35) par rapport à t , on obtient :

$$\mathscr{L}(\xi,t) \leq \mathscr{L}_1(\xi,0)e^{-\gamma_2\rho(\xi)t}$$

Exploitant les estimations (3.30)-(3.16), on obtient :

$$\hat{E}(\xi,t) \leq Ce^{-\gamma_2\rho(\xi)t}\hat{E}(\xi,0)$$

d'où l'estimtion (3.6).

3.4 Taux de décroissance de la solution

Théorème 3.1.

Soit $U=(u,v,w)$ la solution du système (3.1), avec la condition initiale $U_0=(u_0,u_1,u_2)$. Supposons que $0<\tau<\beta$. Soit $V=(u_t+\tau u_{tt},\nabla(u+\ \tau u_t),\nabla u_t)$ et que $V_0\in L^1(\mathbb{R}^N)\cap H^s(\mathbb{R}^N)$.

Pour tout $0\leq j\leq s$,on a

$$\left\|\nabla^j V(t)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}\leq C(1+t)^{-N/4-j/2}\left\|V_0\right\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}+Ce^{-ct}\left\|\nabla^j V_0\right\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \tag{3.36}$$

Preuve. La preuve du théorème (3.1) est basée sur la proposition (3.1). En utilisant le théorème de Plancherel, et l'équation (3.6), on a :

$$\begin{aligned}\left\|\nabla_x^j V(t)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}=&\int_{\mathbb{R}^N}|\xi|^{2j}|\hat{V}(\xi,t)|^2d\xi\\ \leq& C\int_{\mathbb{R}^N}|\xi|^{2j}e^{-c\rho(\xi)t}|\hat{V}(\xi,0)|^2d\xi\end{aligned} \tag{3.37}$$

On remarque que le dernier terme de (3.37) dépend du comportement de la fonction $\rho(\xi)$, d'après la proposition (3.1), on :

$$\rho(\xi)\geq\begin{cases}c|\xi|^2, & \text{Si}\quad |\xi|\leq 1,\\ c, & \text{Si}\quad |\xi|\geq 1.\end{cases} \tag{3.38}$$

telle que c est une constante positive .

Donc, on écrit (3.37) comme suit :

$$\begin{aligned}\left\|\nabla_x^j V(t)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}=&C\int_{|\xi|\leq 1}|\xi|^{2j}e^{-c\rho(\xi)t}|\hat{V}(\xi,0)|^2d\xi+C\int_{|\xi|\geq 1}|\xi|^{2j}e^{-c\rho(\xi)t}|\hat{V}(\xi,0)|^2d\xi\\ =&I_1+I_2.\end{aligned} \tag{3.39}$$

On exploitant (3.38) , on en déduit que

$$I_1\leq C\left\|\hat{V}_0\right\|^2_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}\int_{|\xi|\leq 1}|\xi|^{2j}e^{-c|\xi|^2t}d\xi$$

En utilisant l'inégalité :

$$\int_{|\xi|\leq 1}|\xi|^{2j}e^{-c|\xi|^2t}d\xi\leq C(1+t)^{-N/2-j},$$

on déduire que :

$$I_1 \leq C \|V_0\|^2_{L^1(\mathbb{R}^N)} (1+t)^{-N/2-j} \tag{3.40}$$

Pour $|\xi| \geq 1$, utilisant l'inégalité :

$$I_2 \leq C \int_{|\xi|\geq 1} |\xi|^{2j} e^{-ct} |\hat{V}(\xi,0)|^2 d\xi$$

on déduire que :

$$I_2 \leq Ce^{-ct} \left\|\nabla^j V_0\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}. \tag{3.41}$$

Combinaisons les deux estimations (3.40) et (3.41) dans (3.39) , on obtient l'estimation (3.36).

□

Bibliographie

[1] J.A. Conejero, C. Lizama, F. Ródenas, : Chaotic behaviour of the solutions of the Moore–Gibson–Thompson equation. App. Math. Inf. Sci. 9(5), 1–6 (2015)

[2] C .Wenhui , A . Palmieri,Ablonw-up result for the semilinear Moore-Gibson-Thompson equation with non linearity of derivative type in the conservation case . AIMS.2010.

[3] Lasiecka, I.,Wang, X. : Moore-Gibson-Thompson equation with memory, part I : exponential decay of energy. Z. Angew. Math. Phys. 67(2), 17 (2016). https ://doi.org/10.1007/s00033-015-0597-8.

[4] Kaltenbacher, B., Lasiecka, I., Marchand, R. : Wellposedness and exponential decay rates for the Moore–Gibson–Thompson equation arising in high intensity ultrasound. Control Cybern. 40, 971– 988 (2011)

[5] R. A. Adams and J. J. F. Fournier, Sobolev spaces, *Elsevier,* 2003.

[6] M. El Amrani, Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels, *ellipses,* 2008.

[7] H. Brezis, Analyse Fonctionnelle Théorie et Application, *Dunod*, Paris, 1999.

[8] L. C. Evans, Partial Differential Equations, AMS 1997.

[9] L. Hôrmander, The Analysis of Linear Partial Differential Operators I, *Springer-Verlag,* 1983,1990.

[10] A. Pazy, Semigroups Of Linear Operators And Applications To Partial Differential Equations, *Springer-Verlag* , New York, 1983.

[11] K-J. Engel, R. Nagel, One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations, Alfred A. Knopf, 1995.

Résumé

Ce mémoire est consacré à l'étude de l'équation de Moore-Gibson-Thomson , plus précisement, on cherche l'existence et l'unicité de la solution par la théorie des semi-groupe. Ainsi que le taux de décroissance de la solution en norme L^2 par la méthode de l'énergie.

Mots clés : Stabilité - Fonctionnelle de Lyapunov - La méthode de l'énergie - Taux de décroissance .

Abstract

This thesis is dedicated to the study of the Moore-Gibson-Thomson equation. Specifically, we aim to investigate the existence and uniqueness of the solution using the theory of semi-groups. Additionally, we will analysze the decay rate of the solution in L^2 norm using the energy method.

Key words : Stability - Lyapunov Functional - The Energy Method - Decay Rate.

ملخص

هذه الأطروحة مكرسة لدراسة معادلة مور - جيبسون-طومسون،على وجه التحديد، نهدف إلى التحقق من وجود و وحدانية الحل باستخدام نظرية نصف المجموعات. و بالإضافة إلى ذلك سنحلل معدل تضاؤِل الحل في نظيم L^2 باستخدام طريقة الطاقة.

الكلمات المفتاحية: الاستقرار - وظيفية ليابونوف - طريقة الطاقة - معدل التضاؤِل.