République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de L'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Djilali Bounâama-Khemis Miliana

FACULTÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE

Mémoire

Pour obtenir ***Le diplôme de master en mathématiques***

Spécialité : Analyse Mathématique et Applications

Thème

Sur les inégalités intégrales fractionnaires et applications

Présenté par

Selmaoui Nour El Houda

Devant le jury composé par :

Président	**Mme L.Djouamai**	**Université Djilali BOUNAAMA.**
Examinateur 1	**Mr Mohamed Houas**	**Université Djilali BOUNAAMA.**
Examinateur 2	**Mme F.Chita**	**Université Djilali BOUNAAMA.**
Encadreur	**Mr Mohamed Bezziou**	**Université Djilali BOUNAAMA.**

Année Universitaire : 2021/2022

Remerciement

Je remercie en premier lieu ALLAH, pour la foi, la confiance et la volonté dont il m'a doté.

J'exprime toutes mes gratitudes à mon encadrant **: Mr Mohamed Bezziou** pour les précieux conseils, l'orientation permanente et la patience qu'il m'a sacré durant toute la durée du travail.

Aux membres du jury d'avoir accepté d'examiner ce travail

Je remercie Tous les enseignants et les enseignantes du primaires jusqu'à l'université qui nous ont enrichis par leur savoir.

Dédicaces

Je dédie ce travail

À mon père qui a tout fait pour m'amener ici, merci papa

À ma chère mère qui m'a soutenu à chaque instant, merci maman

Toutes mes frères et mes sœurs, Amel, Fatima Zahra, Ahlem, Ikram, Abdelkader et Mohamed .

À tous ma familles ,

À ma meilleur amie : Amel, Manel, Zahra, Noura, Maria, Ahlem, Hanane, Najat, wiam.

A tous mes collègues de promotion 2021-2022

A tous ceux qui m'ont aidé et soutenu tout au long de mon parcours universitaire, merci.

Nour El Houda

Abstract

In this thesis, we will present results of non-integer order on the estimations of fractional moments of orders α : fractional expectations, variances and covariances, then for that by using the theory of fractional integrals in the sense of Riemann- Liouville.

Résumé

Dans ce mémoire, on présentera des résultats d'ordre non entier sur les estimations des moments fractionnaires d'ordres α : des espérances, variances et covariances fractionnaires, alors pour cela en utilisant la théorie des intégrales fractionnaires au sens de Riemann-Liouville.

Table des matières

Symbole et notation

$\mathbb{N}$	:= Ensemble des nombres naturel.
$\mathbb{R}$	:= Ensemble des nombres réels.
$\mathbb{R}^+$	:= Ensemble des nombres réels positifs ou nuls.
$\mathbb{C}$	:= Ensemble des nombres complexe.
$\Gamma(.)$	:= Fonction Gamma d'Euler.
$B(.,.)$	:= Fonction Bêta.
$\|.\|_\infty$	:= norme infinie.
$\lvert.\rvert$	:= Valeur absolue d'un nombre réel ou module d'un nombre complexe.
$I_a^\alpha f$	:= intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha > 0$.

Introduction

Les inégalités intégrales jouent un rôle important en théorie des équations différentielles et en sciences appliquées. De plus, les inégalités de type fractionnaire sont également assez importantes dont les applications sont très nombreuses, notamment dans la théorie des équations différentielles fractionnaires, en théorie des approximations, en probabilités et statistique.

Dans ce mémoire, on présentera des résultats d'ordre non entier sur les estimations des moments fractionnaires d'ordres α : des espérances, variances et covariances fractionnaires, alors pour cela en utilisant la théorie des intégrales fractionnaires au sens de Riemann-Liouville.
Ce manuscrit s'organise en trois chapitres.

Le premier chapitre contient les principales définitions et notations nécessaires à la compréhension du contenu de ce travail. On rappellera les définitions et les propriétés essentielles correspondantes à la notion de l'intégration et la dérivation fractionnaire de Riemann-Liouville sans oublier quelques inégalités intégrales de type Chebyshev.

Dans le deuxième chapitre, on présentera des résultats sur les estimations des moments fractionnaires d'ordres α en appliquant la théorie des intégrales fractionnaires de Riemann-Liouville.

Enfin, notre dernier chapitre sera consacré à l'étude les moments et quelques estimations fractionnaires d'une variable aléatoire continue X ayant une fonction de densité de probabilité positive f définie sur l'intervalle $[a, b]$.

Chapitre I

Calcule Fractionnaire

I.1 Fonction spécifique pour la dérivation fractionnaire

La fonction Gamma et la fonction Bêta sont dites des fonctions spéciales. Ces fonctions jouent un rôle très important dans la théorie du calcul différentiel d'ordre fractionnaire.

I.1.1 Fonction Gamma

L'une des fonctions de base du calcul fractionnaire est la fonction Gamma, qui permet de prolonger la factorielle aux valeurs non entières, la fonction Gamma est appelée aussi fonction factorielle généralisée.

Définition: I.1.1 *[3]*

Pour tout nombre réel α, tel que $(\alpha > 0)$, on définit la fonction Gamma d'Euler par l'intégrale suivante :

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx, \alpha > 0. \tag{I.1}$$

Proposition: I.1.1 *[3]*

Pour tout $\alpha > 0$, la fonction Gamma satisfait les propriétés suivantes :

1) $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)$.

2) $\Gamma(n + 1) = n!$.

3) $\Gamma(\alpha + n) = \alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2)...(\alpha + n - 1)\Gamma(\alpha)$.

4) $\Gamma(n) = (n + 1)!, \ n \geqslant 1$.

Quelques valeurs particulières de $\Gamma(\alpha)$

1) $\Gamma(1) = \Gamma(2) = \int\limits_0^{\infty} x^{1-1}e^{-x}dx = 1.$

2) $\Gamma(\frac{1}{2}) = 2\int\limits_0^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$, (L'intégrale de Gauss).

3)$\Gamma(n+\frac{1}{2}) = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}.$

I.1.1 Fonction Bêta

L'autre fonction importante dans le calcul fractionnaire est la fonction Bêta d'Euler.

Définition: I.1.2 *[3]*

La fonction Bêta est un type d'intégrale d'Euler définie pour tous couple $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$ *par :*

$$B(\alpha,\beta) = \int\limits_0^1 (1-x)^{\beta-1}x^{\alpha-1}dx. \tag{I.2}$$

La forme trigonométrique de Bêta

On pose

$$\begin{aligned} x = sin^2\theta \Longrightarrow dx = 2sin\theta\ cos\theta\ d\theta, \\ si\ x = 1\ alors\ \theta = \frac{\pi}{2}, \\ si\ x = 0\ alors\ \theta = 0. \end{aligned}$$

On a

$$B(\alpha,\beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx,$$

alors

$$\begin{aligned} B(\alpha,\beta) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (sin^2\theta)^{\alpha-1}(cos^2\theta)^{\beta-1}(2sin\theta cos\theta)d\theta \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (sin\theta)^{2(\alpha-1)}(cos\theta)^{2(\beta-1)}(sin\theta cos\theta)d\theta \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (sin\theta)^{2\alpha-1}(cos\theta)^{2\beta-1}d\theta \end{aligned}$$

I.1.1 La relation entre fonction Gamma et Bêta

Définition: I.1.3 *[3]*

La fonction Bêta est liée à la fonction Gamma par la relation suivante :

$$B(\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}=B(\beta,\alpha)pour\ tout\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}_{+}^{*}. \tag{I.3}$$

I.2 Intégration fractionnaire

I.2.2 Intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville

La définition de l'intégration fractionnaire au sens de Riemann-Liouville est une généralisation " à l'ordre réel " de la formule de Cauchy (1789 - 1857), qui est obtenue comme suit : Soit $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction continue, on note

$$I^1f(x)=\int_a^x f(s)ds,$$

Une double l'intégration

$$I^2f(x)=\int_a^x\int_a^s f(\mu)d\mu ds=\int_a^x(x-s)f(s)ds.$$

En répétant le processus (n-1) fois, on obtient la relation suivante :

$$I^nf(x)=\frac{1}{(n-1)!}\int_a^x(x-s)^{n-1}f(s)ds,$$

ainsi

$$I^nf(x)=\frac{1}{\Gamma(n)}\int_a^x(x-s)^{n-1}f(s)ds.$$

Et pour un ordre plus général, on a la définition suivante :

Définition: I.2.1 *[1]-[5]*

L'opérateur intégral fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha \geqslant 0$, *pour une fonction* $f \in C([a;b))$ *est défini par :*

$$I_a^\alpha f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-s)^{\alpha-1} f(s)ds, & \alpha > 0 \\ f(x), & \alpha = 0 \end{cases} \tag{I.4}$$

Remarque: I.2.1

Dans la formule (I.4), en prenant $a = 0$, I_a^α *a sera notée* I^α.

Exemple: I.2.1 *[1]*

On considère la fonction f *définie par :* $f : x \longmapsto (x-a)^\beta$. *On a :*

$$I_a^\alpha (x-a)^\beta = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-s)^{\alpha-1}(s-a)^\beta ds,$$

par le changement de variable $\mu = \dfrac{s-a}{x-a}$, *on obtient*

$$I_a^\alpha (x-a)^\beta = \frac{(x-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \mu^\beta (1-\mu)^{\alpha-1} d\mu,$$

$$I_a^\alpha (x-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}(x-a)^{\alpha+\beta}.$$

Pour $\alpha = \dfrac{1}{2}$ *et* $\beta = \dfrac{3}{2}$, *la relation devient :*

$$I_a^{\frac{1}{2}} (x-a)^{\frac{3}{2}} = \frac{\Gamma(5/2)}{\Gamma(3)}(x-a)^2 = \frac{3\sqrt{\pi}}{8}(x-a)^2.$$

Proposition: I.2.1 *[1]*

Soient $f \in C([a,b))$. *Pour* $\alpha > 0, \beta > 0$ *etA*, $B \in \mathbb{R}$, *on a :*

1)$I_a^\alpha (I_a^\beta f)(x) = I_a^\beta (I_a^\alpha f)(x) = I_a^{\alpha+\beta} f(x)$.

2)$I_a^\alpha [Af(x) + Bg(x)] = AI_a^\alpha f(x) + BI_a^\alpha g(x)$.

Définition: I.2.2

Deux nombres réels positifs a et b sont dits partiellement (opposés)unitaires si

$$(a-1)(b-1) \geq 0. \tag{I.5}$$

I.2.2 Inégalité fractionnaire de Chebyshev

Dans cette section, nous prouvons certaines inégalités qui impliquent la distribution Bêta en utilisant des inégalités naturelles[4]. Le résultat suivant est bien connu dans la littérature sous le nom d'intégrale de Chebychev pour les fonctions synchrones. Ici, nous utilisons ce résultat pour prouver des nouvelles inégalités

Lemme: I.2.1

Soient f, g, p et $q : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tels que $p(x), q(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$. Si f et g sont synchrones sur I, i.e,

$$(f(x)-f(y))(g(x)-g(y)) \geq 0 \text{ pour tout } x, y \in I.$$

Alors, on a les inégalités suivantes :

$$\int_I p(x)dx \int_I p(x)f(x)g(x)dx \geqslant \int_I p(x)f(x)dx \int_I p(x)g(x)dx. \tag{I.6}$$

Et

$$I^{\alpha}p(t)I^{\beta}qfg(t) + I^{\beta}q(t)I^{\alpha}pfg(t) \geqslant I^{\alpha}pg(t)I^{\beta}qf(t) + I^{\alpha}pf(t)I^{\beta}qg(t). \tag{I.7}$$

Où

$$I^{\beta}p(t)I^{\alpha}qfg(t) + I^{\alpha}q(t)I^{\beta}pfg(t) \geqslant I^{\beta}pg(t)I^{\alpha}qf(t) + I^{\beta}pf(t)I^{\alpha}qg(t). \tag{I.8}$$

Preuve: I.2.1

Soient f, g, q et p quatre fonctions synchrones sur $[0,\infty[$, alors, $\forall$ x,$y \in [0,\infty[$, on a

$$(f(x)-f(y))(g(x)-g(y)) \geq 0.$$

Ce qui donne

$$f(x)g(x) - f(x)g(y) - f(y)g(x) + f(y)g(y) \geqslant 0,$$

implique

$$f(x)g(x) + f(y)g(y) \geqslant f(x)g(y) + f(y)g(x). \tag{I.9}$$

- *Pour l'inégalité (I.6), on multiple (I.9) par* $\dfrac{(t-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}p(x)$, $x \in [0,t]$, *on trouve :*

$$\begin{aligned}&\frac{(t-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}p(x)f(x)g(x) + \frac{(t-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}p(x)f(y)g(y)\\ \geqslant\ &\frac{(t-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}p(x)f(x)g(y) + \frac{(t-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}p(x)f(y)g(x),\end{aligned}$$

on intègre entre 0 *à* t, *on trouve*

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-x)^{\alpha-1}\left(p(x)f(x)g(x)\right)dx + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-x)^{\alpha-1}\left(p(x)f(y)g(y)\right)dx\\ \geqslant\ &\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-x)^{\alpha-1}\left(p(x)f(x)g(y)\right)dx + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-x)^{\alpha-1}\left(p(x)f(y)g(x)\right)dx,\end{aligned}$$

implique

$$I^\alpha(pfg)(t) + f(y)g(y)I^\alpha p(t) \geqslant g(y)I^\alpha(pf)(t) + f(y)I^\alpha(gp)(t). \tag{I.10}$$

Maintenant, on multiple (I.10) par $\dfrac{(t-y)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}p(y)$, $y \in [0,t]$, *puis, on intègre entre* 0 *à* t, *on obtient :*

$$\begin{aligned}&I^\alpha(pfg)(t)\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-y)^{\alpha-1}p(y)dy + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-y)^{\alpha-1}(pfg)(y)dyI^\alpha p(t)\\ \geqslant\ &\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-y)^{\alpha-1}(pg)(y)dyI^\alpha(pf)(t) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-y)^{\alpha-1}(pf)(y)dyI^\alpha(gp)(t),\end{aligned}$$

d'où

$$I^\alpha(pfg)(t)I^\alpha p(t) + I^\alpha p(t)I^\alpha(pfg)(t) \geqslant I^\alpha(gp)(t)I^\alpha(pf)(t) + I^\alpha(fp)(t)I^\alpha(gp)(t),$$

- *Pour l'inégalité (I.7), on multiple (I.9) par* $\dfrac{(t-x)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}q(x)$, $x \in [0,t]$, *puis, on intègre entre* 0 *à* t, *on trouve :*

$$\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int\limits_0^t (t-x)^{\beta-1}\left(qfg\right)(x)dx+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int\limits_0^t (t-x)^{\beta-1}\left(fg\right)(y)q(x)dx$$
$$\geqslant \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int\limits_0^t (t-x)^{\beta-1}g(y)\left(qf\right)(x)dx+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int\limits_0^t (t-x)^{\beta-1}f(y)\left(pg\right)(x)dx,$$

implique

$$I^{\beta}(qfg)(t)+f(y)g(y)I^{\beta}q(t)\geqslant g(y)I^{\beta}(qf)(t)+f(y)I^{\beta}(gq)(t). \tag{I.11}$$

Maintenant, on multiple (I.11) par $\dfrac{(t-y)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}p(y)$, $y\in[0,t]$, *puis, on intègre entre* 0 *à* t, *on trouve :*

$$I^{\beta}(qfg)(t)\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^t (t-y)^{\alpha-1}p(y)dy+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^t (t-y)^{\alpha-1}(p(y)f(y)g(y))dyI^{\beta}q(t)$$
$$\geqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^t (t-y)^{\alpha-1}(p(y)g(y))dyI^{\beta}(qf)(t)+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^t (t-y)^{\alpha-1}(p(y)f(y))dyI^{\beta}(gq)(t),$$

ce qui donne

$$I^{\beta}(qfg)(t)I^{\alpha}p(t)+I^{\alpha}(fgp)(t)I^{\beta}q(t)\geqslant I^{\beta}(pg)(t)I^{\beta}(qf)(t)+I^{\alpha}(pf)(t)I^{\beta}(gq)(t).$$

pour $t=1$ *, on a*

$$I^{\beta}(qfg)(1)I^{\alpha}p(1)+I^{\alpha}(fgp)(1)I^{\beta}q(1)\geqslant I^{\beta}(pg)(1)I^{\beta}(qf)(t)+I^{\alpha}(pf)(1)I^{\beta}(gq)(1).$$

Chapitre II

Inégalités fractionnaires aléatoires au sens de Riemann-Liouville

II.1 La densité d'une variable aléatoire

Dans cette section, nous rappelons quelques préliminaires qui seront utilisés dans ce travail. commençons par les définitions suivantes.

Définition: II.1.1 *[12]*

Une variable aléatoire continue X a une fonction de densité de probabilité gamma (f.d.p) à un paramètre $p > 0$,notée par $X \sim \Gamma(p)$, et sa (f.d.p) donnée par :

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-x}, x > 0. \tag{II.1}$$

Une variable aléatoire continue X a une fonction de densité de probabilité gamma (f.d.p) à deux paramètres $(p, \lambda), p, \lambda > 0$,notée par $X \sim \Gamma(p, \lambda)$, et sa (f.d.p) donnée par :

$$f(x) = \frac{\lambda^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-\lambda x}, x > 0. \tag{II.2}$$

Définition: II.1.2 *[10]*

L'espérance fractionnaire d'ordre $\alpha > 0$ de la variable aléatoire continue X ayant une (f.d.p). $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ est définie comme suit :

$$E_{X,\alpha} = I_a^\alpha [bf(b)] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b (b - \tau)^{\alpha - 1} \tau f(\tau) d\tau; \alpha > 0. \tag{II.3}$$

Remarque: II.1.1

Soit X une variable aléatoire, telle que $X \sim \Gamma(p, \lambda), p, \lambda > 0$, *le moment fractionnaire d'ordre* $\alpha > 0$ *est donné par :*

$$E_\alpha(X) = \frac{\lambda^p}{\Gamma(\alpha)\Gamma(p)} \int_0^b (b-t)^{\alpha-1} t^p e^{-\lambda t} dt, t > 0. \tag{II.4}$$

Définition: II.1.3

La variance fractionnaire d'ordre $\alpha > 0$, *d'une variable aléatoire continue X de (f.d.p).* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ *est donnée par :*

$$\sigma^2_{X,\alpha} = V_\alpha(X) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b (b-\tau)^{\alpha-1} (\tau - E(X))^2 f(\tau) d\tau; \alpha > 0. \tag{II.5}$$

Théorème: II.1.1

Soit X une variable aléatoire, telle que$X \sim \Gamma(p, \lambda), p, \lambda > 0$, *la variance fractionnaire d'ordre* $\alpha > 0$ *est donnée par :*

$$V_\alpha(X) = E_\alpha(X^2) - 2\mu E_\alpha(X) + \mu^2 I^\alpha f(b), \ \mu : \ \textit{espérance clacique}. \tag{II.6}$$

Preuve: II.1.1

D'après la définition (II.1.3) On a :

$$\begin{aligned}
V_\alpha(X) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b (b-\tau)^{\alpha-1} (\tau - E(X))^2 f(\tau) d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b (b-\tau)^{\alpha-1} \left[\tau^2 - 2\tau E(X) + E^2(X)\right] f(\tau) d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b (b-\tau)^{\alpha-1} \tau^2 f(\tau) d\tau \\
&- 2\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b (b-\tau)^{\alpha-1} \tau E(X) f(\tau) d\tau \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b (b-\tau)^{\alpha-1} E^2(X) f(\tau) d\tau \\
&= E_\alpha(X^2) - 2\mu E_\alpha(X) + \mu^2 I^\alpha f(b),
\end{aligned}$$

telle que $E(X) = \mu$.

Définition: II.1.4

Le moment fractionnaire d'ordres $(r > 0,\ \alpha > 0)$, *d'une variable aléatoire continue* X *ayant une (f.d.p).* f, *est donnée par :*

$$E_\alpha(X^r) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b (b-t)^{\alpha-1} \tau^r f(\tau) d\tau, \alpha > 0. \tag{II.7}$$

Maintenant, nous introduisons.

Définition: II.1.5

Soient f_1 *et* f_2 *deux fonctions continues sur*$[a,b]$. *On définit la covariance fractionnaire d'ordre* $\alpha > 0$ *pour* $(f_1(X), f_2(X))$ *par :*

$$Cov_\alpha(f_1(X), f_2(X)) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b (b-\tau)^{\alpha-1} (f_1(\tau) - f_1(\mu))(f_2(\tau) - f_2(\mu)) f(\tau) d\tau, \tag{II.8}$$

ou μ *est l'espérance classique de* X.

II.2 Moments Fractionnaires de la Distribution Gamma

Maintenant nous allons prouver les moments fractionnaires pour la distribution Gamma.

Théorème: II.2.1

Soient X, Y *et* U *trois variables aléatoires, telles que* $X\sim\ \Gamma(p+q), Y\ \sim\ \Gamma(p+1), U\ \sim\ \Gamma(q+1)$ *et* $V \sim \Gamma(2), p, q > 0$. *Si*$(p-1)(q-1) \geqslant 0$, *alors*

$$\frac{E_\alpha(X^r)}{E_\alpha(Y^r) E_\alpha(U^r)} \geqslant \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q+1)}{\Gamma(p+q)},\ \alpha \geqslant 1,\ r = 1, 2...$$

Preuve: II.2.1

Considérons les applications $f, g, p : [0,1] \longrightarrow [0,\infty)$ *données par :*

$f(x) = x^{p-1},\ g(x) = x^{q-1}$ *et* $p(x) = x^{r+1} e^{-x},\ x > 0.$

Et en remplaçant ces applications dans l'inégalité intégrale fractionnaire de Chebyshev (I.6)

$$\int_0^1 x^{r+1}e^{-x}dx \int_0^1 x^{r+1}e^{-x}x^{p-1}x^{q-1}dx \geqslant \int_0^1 x^{r+1}e^{-x}x^{p-1}dx \int_0^1 x^{r+1}e^{-x}x^{q-1}dx.$$

Ce qui implique que

$$\int_0^1 x^{r+1}e^{-x}dx \int_0^1 x^{p+q+r-1}e^{-x}dx \geqslant \int_0^1 x^{p+r}e^{-x}dx \int_0^1 x^{q+r}e^{-x}dx.$$

Alors

$$\int_0^1 x^{r+2-1}e^{-x}dx \int_0^1 x^{p+q+r-1}e^{-x}dx \geqslant \int_0^1 x^{p+r}e^{-x}dx \int_0^1 x^{q+r}e^{-x}dx.$$

Donc

$$\Gamma(2)E_\alpha(V^r)\Gamma(p+q)E_\alpha(X^r) \geqslant \Gamma(p+1)E_\alpha(Y^r)\Gamma(q+1)E_\alpha(U^r).$$

Par conséquent

$$\frac{E_\alpha(X^r)}{E_\alpha(Y^r)E_\alpha(U^r)} \geqslant \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q+1)}{\Gamma(p+q)}, \alpha \geqslant 1, r = 1, 2...$$

Théorème: II.2.2

Soient X et Y deux variables aléatoires telles que $X\sim \beta(p,q)$ et $Y \sim \beta(p,n)$. Notons les moyennes harmoniques de X et Y par $E_\alpha\left(\frac{1}{X^r}\right)$ et $E_\alpha\left(\frac{1}{Y^r}\right)$. Alors pour $p,q,m,n>0$ et $(p-m)(q-n)\geqslant 0$, on a l'inégalité pour la distribution bêta

$$\frac{E_\alpha\left(\frac{1}{X^r}\right)}{E_\alpha\left(\frac{1}{Y^r}\right)} \geqslant \frac{\beta(m,q)\beta(p,n)}{\beta(m,n)\beta(p,q)}, \alpha \geqslant 1, r = 1, 2, ...$$

Preuve: II.2.2

Nous prenons

$f(x) = x^{p-m-r},\ g(x) = (1-x)^{q-n}$ *et* $p(x) = x^{m-1}(1-x)^{n-1},\ x \in [0,1].$

en remplaçant ces applications dans l'inégalité intégrale fractionnaire de Chebyshev (I.6). On trouve

$$\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}x^{p-m-r}(1-x)^{q-n}dx$$
$$\geqslant \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}x^{p-m-r}dx \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}(1-x)^{q-n}dx,$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned}&\textstyle\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx \int_0^1 x^{p-r-1}(1-x)^{q-1}dx\\ &\geqslant \textstyle\int_0^1 x^{p-r-1}(1-x)^{n-1}dx \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{q-1}dx.\end{aligned} \tag{II.9}$$

En utilisant la fonction Bêta , nous observons que

$$E_\alpha\left(\frac{1}{X^r}\right)=\frac{1}{\beta(p,q)}\int_0^1\left(\frac{1}{x}\right)^r x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx=\frac{1}{\beta(p,q)}\int_0^1 x^{p-r-1}(1-x)^{q-1}dx.$$

$$E_\alpha\left(\frac{1}{Y^r}\right)=\frac{1}{\beta(p,n)}\int_0^1\left(\frac{1}{x}\right)^r x^{p-1}(1-x)^{n-1}dx=\frac{1}{\beta(p,n)}\int_0^1 x^{p-r-1}(1-x)^{n-1}dx.$$

En utilisant ces valeurs dans l'inégalité (II.9), nous avons

$$\beta(m,n)E_\alpha\left(\frac{1}{X^r}\right)\beta(p,q)\geqslant\beta(m,q)\beta(p,n)E_\alpha\left(\frac{1}{Y^r}\right).$$

Donc

$$\frac{E_\alpha\left(\frac{1}{X^r}\right)}{E_\alpha\left(\frac{1}{Y^r}\right)}\geqslant\frac{\beta(m,q)\beta(p,n)}{\beta(m,n)\beta(p,q)},\alpha\geqslant 1,r=1,2,...$$

Ce qui équivaut au théorème (II.2.2).

Théorème: II.2.3

Soient X et Y deux variables aléatoires telle que $X\sim\beta(p,q)$ et $Y\sim\beta(p,n)$, $p,\ q,\ m,\ n>0$. Si $(p-m)(q-n)\geqslant 0, alorsona$

$$\frac{E_\alpha(X^r)}{E_\alpha(Y^r)}\geqslant\frac{\beta(p,n)\beta(m,q)}{\beta(m,n)\beta(p,q)},\ \alpha\geqslant 1,\ r=1,2,...$$

Preuve: II.2.3

On choisit les applications

$f(x)=x^{p-m+r},\ g(x)=(1-x)^{q-n}$ *et* $p(x)=x^{m-1}(1-x)^{n-1},\ x\in[0,1].$

En utilisant ces applications dans (I.6), on a

$$\begin{aligned}&\textstyle\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx\int_0^1 x^{p+r-1}(1-x)^{q-1}dx\\&\geqslant\textstyle\int_0^1 x^{p+r-1}(1-x)^{n-1}dx\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{q-1}dx,\end{aligned}\tag{II.10}$$

par la définition de la distribution Bêta et la fonction Bêta, l'inégalité (II.10)donne

$$\beta(m,n)\beta(p,q)E_\alpha(X^r)\geqslant\beta(p,n)E_\alpha(Y^r)\beta(m,q),$$

implique

$$\frac{E_\alpha(X^r)}{E_\alpha(Y^r)}\geqslant\frac{\beta(p,n)\beta(m,q)}{\beta(m,n)\beta(p,q)},\ \alpha\geqslant 1,\ r=1,2,...\tag{II.11}$$

Corollaire: II.2.1

Pour $p=q$ et $n=m>0$, le théorème (II.2.3) devient

$$\frac{E_\alpha(X^r)}{E_\alpha(Y^r)} \geqslant \frac{\Gamma(2m)\Gamma(2p)}{\Gamma^2(p+m)},\ \alpha \geqslant 1,\ r=1,2,...$$

Preuve : II.2.1

En utilisant la relation (I.3) dans (II.11), on obtient

$$\frac{E_\alpha(X^r)}{E_\alpha(Y^r)} \geqslant \frac{\dfrac{\Gamma(p)\Gamma(n)}{\Gamma(p+n)}\dfrac{\Gamma(m)\Gamma(q)}{\Gamma(m+q)}}{\dfrac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}\dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}},$$

alors

$$\frac{E_\alpha(X^r)}{E_\alpha(Y^r)} \geqslant \frac{\Gamma(p)\Gamma(n)\Gamma(m)\Gamma(q)\Gamma(m+n)\Gamma(p+q)}{\Gamma(p+n)\Gamma(m+q)\Gamma(m)\Gamma(n)\Gamma(p)\Gamma(q)},$$

donc pour $p=q$ et $n=m>0$, nous trouvons

$$\frac{E_\alpha(X^r)}{E_\alpha(Y^r)} \geqslant \frac{\Gamma(2m)\Gamma(2p)}{\Gamma^2(p+m)}.$$

II.3 Estimations des variances

L'inégalité suivante s'applique aux variances de la fonction Bêta :

Le théorèm suivant donne la variance en fonction de la distribution Bêta :

Théorème: II.3.1

Soient X et Y deux variables aléatoires telles que $X\sim \beta(p,q)$ et $Y\sim\beta(p,n)$.

Alors pour $p,\ q,\ m,\ n>0$ et $(p-m)(q-n)\geqslant 0$,

$$\begin{aligned} &V_\alpha(X)\beta(m,n)\beta(p,q)+\frac{\beta(m,q)\beta^2(p+1,n)}{\beta(p,n)} \\ &\geqslant V_\alpha(Y)\beta(m,q)\beta(p,n)+\frac{\beta(m,n)\beta^2(p+1,q)}{\beta(p,q)}, \end{aligned} \tag{II.12}$$

Preuve: II.3.1

D'après le théorème (II.2.3), pour r=2 nous avons

$$\frac{E_\alpha(X^2)}{E_\alpha(Y^2)} \geqslant \frac{\beta(p,n)\beta(m,q)}{\beta(m,n)\beta(p,q)}.$$

En utilisant la valeur de $\mu'_{2,\alpha}(.) = E_\alpha(.)^2$ *en termes de* $\sigma^2_\alpha(.)$, *nous avons*

$$\left[\sigma^2_\alpha(X) + (\mu'_{1,\alpha}(X))^2\right]\beta(m,n)\beta(p,q) \geqslant \left[\sigma^2_\alpha(Y) + (\mu'_{1,\alpha}(Y))^2\right]\beta(p,n)\beta(m,q),$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned}&\sigma^2_\alpha(X)\beta(m,n)\beta(p,q) - \sigma^2_\alpha(Y)\beta(p,n)\beta(m,q)\\ &\geqslant (\mu'_{1,\alpha}(Y))^2\beta(p,n)\beta(m,q) - (\mu'_{1,\alpha}(X))^2\beta(m,n)\beta(p,q),\end{aligned}$$

de la relation

$$\begin{aligned}\mu'_{r,\alpha} = E_\alpha(X^r) &= \frac{1}{\beta(m,n)}\int_0^1 x^{m+r-1}(1-x)^{n-1}dx\\ &= \frac{\beta(m+r,n)}{\beta(m,n)} = \frac{\Gamma(m+r)\Gamma(m+n)}{\Gamma(m)\Gamma(m+r+n)},\end{aligned} \tag{II.13}$$

en prenant $r = 1$, *on trouve la valeur de* $\mu'_{1,\alpha} = \dfrac{\beta(m+1,n)}{\beta(m,n)}$ *et l'expression ci-dessus (pour les paramètres p, q, n)devient*

$$\begin{aligned}&\sigma^2_\alpha(X)\beta(m,n)\beta(p,q) - \sigma^2_\alpha(Y)\beta(p,n)\beta(m,q)\\ &\geqslant \left(\frac{\beta(p+1,n)}{\beta(p,n)}\right)^2\beta(m,n)\beta(p,q) - \left(\frac{\beta(p+1,q)}{\beta(p,q)}\right)^2\beta(m,n)\beta(p,q),\end{aligned}$$

ceci indique le résultat de la recherche

$$\begin{aligned}&\sigma^2_\alpha(X)\beta(m,n)\beta(p,q) + \frac{\beta^2(p+1,n)\beta(m,q)}{\beta(p,n)}\\ &\geqslant \sigma^2_\alpha(Y)\beta(p,n)\beta(m,q) + \frac{\beta^2(p+1,q)\beta(m,n)}{\beta(p,q)}.\end{aligned}$$

Théorème: II.3.2

Soient X, Y, U et V quatre variables aléatoires, telles que $X\sim \beta(p,q)$, $Y \sim \beta(m,n)$, $U \sim \beta(p,n)$ et $V \sim \beta(m,q)$: Si $(p-m)(q-n) \leqslant 0$, alors

$$\frac{E_\alpha(X^r)E_\alpha(Y^r)}{E_\alpha(U^r)E_\alpha(V^r)} \geqslant \frac{\beta(p,n)\beta(m,q)}{\beta(p,q)\beta(m,n)}, \ \alpha \geqslant 1.$$

Preuve: II.3.2

On choisit les applications suivantes

$f(x) = x^{p-m}, \ g(r) = (1-x)^{q-n}, \ p(x) = x^{r+m-1}(1-x)^{n-1}, \ x \in [0,1].$

Maintenant, la différentiation de f et g donnent

$$f'(x) = p-m \ x^{p-m-1}, \ g'(x) = q-n \ x^{q-n-1}, \ x \in [0,1].$$

Donc en utilisant les relations (I.5), on voit que les applications f et g sont synchrones ayant la même monotonie (opposée) sur $[0,1]$ et p est non négatif sur $[0,1]$. Ainsi, en utilisant l'inégalité intégrale de Chebychev (I.6) pour les fonctions f, g et p définies ci-dessus, nous avons

$$\int_0^1 x^{m+r-1}(1-x)^{n-1}dx \int_0^1 x^{m+r-1}(1-x)^{n-1}x^{p-m}(1-x)^{q-n}dx$$
$$\geqslant \int_0^1 x^{m+r-1}(1-x)^{n-1}x^{p-m}dx \int_0^1 x^{m+r-1}(1-x)^{n-1}(1-x)^{q-n}dx.$$

En appliquant la relation (II.13), nous trouvons

$$E_\alpha(Y^r)\beta(m,n)E_\alpha(X^r)\beta(p,q) \geqslant E_\alpha(U^r)\beta(p,n)E_\alpha(V^r)\beta(m,q),$$

et en réarrangeant les termes, nous obtenons la preuve requise.

$$\frac{E_\alpha(X^r)E_\alpha(Y^r)}{E_\alpha(U^r)E_\alpha(V^r)} \geqslant \frac{\beta(p,n)\beta(m,q)}{\beta(p,q)\beta(m,n)}.$$

Théorème: II.3.3

Soient X, Y, U et V quatre variables aléatoires, telles que $X\sim \beta(p,q)$, $Y \sim \beta(m,n)$, $U \sim \beta(p,n)$ et $V \sim \beta(m,q)$. Si $(p-m)(q-n) \leqslant 0$, alors

$$\frac{E_\alpha(X^r)E_\beta(Y^r) + E_\beta(X^r)E_\alpha(Y^r)}{E_\alpha(U^r)_k E_\beta(V^r) + E_\beta(U^r)E_\alpha(V^r)} \geqslant \frac{\beta(p,n)\beta(m,q)}{\beta(p,q)\beta(m,n)}, \ \alpha, \ \beta \geqslant 1.$$

Preuve: II.3.3

On choisit les applications suivantes :

$f(x) = x^{p-m},\ g(r) = (1-x)^{q-n},\ p(x) = x^{r+m-1}(1-x)^{n-1},\ x \in [0,1].$

En utilisant ces applications dans (I.7), on pose $p = q$, ce qui donne

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 x^{m+r-1}(1-x)^{n-1}x^{p-m}(1-x)^{q-n}dx \int_0^1 y^{m+r-1}(1-y)^{n-1}dy \\
&+ \int_0^1 y^{m+r-1}(1-y)^{n-1}y^{p-m}(1-y)^{q-n}dy \int_0^1 x^{m+r-1}(1-x)^{n-1}dx \\
&\geqslant \int_0^1 y^{m+r-1}(1-y)^{n-1}(1-y)^{q-n}dy \int_0^1 x^{m+r-1}(1-x)^{n-1}x^{p-m}dx \\
&- \int_0^1 y^{m+r-1}(1-y)^{n-1}(1-y)^{p-m}dy \int_0^1 x^{m+r-1}(1-x)^{n-1}x^{q-n}dx,
\end{aligned}$$

implique

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 x^{p+r-1}(1-x)^{q-1}dx \int_0^1 y^{m+r-1}(1-y)^{n-1}dy \\
&+ \int_0^1 y^{p+r-1}(1-y)^{q-1}dy \int_0^1 x^{m+r-1}(1-x)^{n-1}dx \\
&\geqslant \int_0^1 y^{m+r-1}(1-y)^{q-1}dy \int_0^1 x^{p+r-1}(1-x)^{n-1}dx \\
&- \int_0^1 y^{p+r-1}(1-y)^{n-1}dy \int_0^1 x^{m+r-1}(1-x)^{q-1}dx.
\end{aligned}$$

D'après l'égalité (II.13), on a

$$\begin{aligned}
&E^{\beta}(X)\beta(p,q)E^{\alpha}(Y)\beta(m,n) + E^{\alpha}(X)\beta(p,q)E^{\beta}(Y)\beta(m,n) \\
&\geqslant E^{\alpha}(V)\beta(m,q)E^{\beta}(U)\beta(p,n) + E^{\alpha}(U)\beta(p,n)E^{\beta}(V)\beta(m,q),
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
&\beta(p,q)\beta(m,n)\left(E^{\beta}(X)E^{\alpha}(Y) + E^{\alpha}(X)E^{\beta}(Y)\right) \\
&\geqslant \beta(m,q)\beta(p,n)\left(E^{\alpha}(V)E^{\beta}(U) + E^{\alpha}(U)E^{\beta}(V)\right),
\end{aligned}$$

ensuite, on en déduit directement la formule recherchée.

$$\frac{E^{\beta}(X)E^{\alpha}(Y) + E^{\alpha}(X)E^{\beta}(Y)}{E^{\alpha}(V)E^{\beta}(U) + E^{\alpha}(U)E^{\beta}(V)} \geqslant \frac{\beta(m,q)\beta(p,n)}{\beta(p,q)\beta(m,n)}.$$

II.4 Covariance fractionnaire d'une variable aléatoire

Nous commençons par prouver un résultat qui généralise une identité de covariance dans [10][7]. Dans notre résultat, la covariance fractionnaire de X et g(X) peut être exprimée avec la dérivée de g(X). Ensuite, nous utilisons l'identité fractionnaire établie pour prouver de nouvelles bornes inférieures pour la variance fractionnaire de g(X) :

Théorème: II.4.1

Soit X une variable aléatoire ayant une f, d, p, f définie sur [a,b]et $\mu = E(X)$.

Ona :

$$Cov_{\alpha}(X, g(X)) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b g'(x)dx \int_a^x (b-t)^{\alpha-1}(\mu - t)f(t)dt, \alpha \geqslant 1.$$

Preuve: II.4.1

D'après les définition (II.1.5), on a

$$Cov_{\alpha}(X, g(X)) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b (b-x)^{\alpha-1}(x-\mu)(g(x) - g(\mu))f(x)dx.$$

Ensuite nous avons

$$Cov_{\alpha}(X, g(X)) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b (b-x)^{\alpha-1}(x-\mu)f(x)dx \int_\mu^x g'(t)dt,$$

Donc

$$Cov_{\alpha}(X, g(X)) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_\mu^b g'(t)dt \int_t^b (b-x)^{\alpha-1}(x-\mu)f(x)dx$$
$$-\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^\mu g'(t)dt \int_a^t (b-x)^{\alpha-1}(x-\mu)f(x)dx.$$

Par conséquent

$$Cov_{\alpha}(X, g(X)) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b g'(t)dt \int_a^t (b-x)^{\alpha-1}(\mu - x)f(x)dx.$$

Chapitre III

Moments fractionnaires

III.1 Fonction β et distribution Bêta

Définition: III.1.1

Soit X une variable aléatoire continue, alors on dit qu'elle a une distribution Bêta à deux paramètres m et n, si sa fonction de densité de probabilité fonction (f.d.p)est définie par[6, 2]

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{\beta(m,n)} x^{m-1}(1-x)^{n-1}, & 0 \leq x \leq 1;\ m,n > 0 \\ 0, & ailleurs. \end{cases}$$

Dans la distribution ci-dessus, la fonction Bêta est référencée à as $\beta(m,n)$ et fonction de distribution $F(x)$ est donnée par

$$F(x) := \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \dfrac{1}{\beta(m,n)} \displaystyle\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1} dt, & 0 \leq x \leq 1;\ m,n > 0 \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

Exemple: III.1.1

Soit X une variable aléatoire continue, telle que $X \sim \beta(\lambda,\rho), \lambda, \rho > 0$, on a

$$f(x) = \frac{x^{\lambda-1}(1-x)^{\rho-1}}{\beta(\lambda,\rho)}, \ 0 \leqslant x \leqslant 1,\ \lambda,\ \rho > 0.$$

Alors

$$E_a(X) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1}\ t\ \frac{t^{\lambda-1}(1-t)^{\rho-1}}{\beta(\lambda,\rho)} dt,$$

implique

$$E_a(X) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta(\lambda,\rho)} \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1} t^{\lambda} (1-t)^{\rho-1} dt.$$

Donc

$$E_a(X) = \frac{\beta(\lambda+1, \rho+\alpha-1)}{\Gamma(\alpha)\beta(\lambda,\rho)}. \tag{III.1}$$

car $\beta(\lambda+1, \rho+\alpha-1) = \int_0^1 (1-t)^{\rho+\alpha-1-1} t^{\lambda+1-1} dt.$

Exemple: III.1.2

Soit $X \sim \beta(\lambda,\rho),\ \lambda,\ \rho > 0,$ *on a*

$$f(x) = \frac{x^{\lambda-1}(1-x)^{\rho-1}}{\beta(\lambda,\rho)},\ 0 \leqslant x \leqslant 1,\ \lambda,\ \rho > 0.\ \textit{Alors}$$

$$E_a(X^r) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1}\ \tau^r\ \frac{\tau^{\lambda-1}(1-\tau)^{\rho-1}}{\beta(\lambda,\rho)} d\tau,$$

implique

$$E_a(X) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta(\lambda,\rho)} \int_0^1 (1-\tau)^{\rho+\alpha-1-1}\ \tau^{\lambda+r-1} d\tau.$$

Donc

$$E_a(X^r) = \frac{\beta(\lambda+r, \rho+\alpha-1)}{\Gamma(\alpha)\beta(\lambda,\rho)}, r \in \mathbb{N}^*. \tag{III.2}$$

III.2 Principaux résultats

III.2.2 Inégalités fractionnaires pour la fonction Bêta

Nous commençons nos principaux résultats en prouvant le théorème suivant.

Théorème: III.2.1

Soient $\lambda, \rho, \sigma, \delta, \varphi, \psi$ *et* α *des nombres réels positifs. Si* $(\lambda - \sigma - \varphi)p - \delta - \psi) \leqslant 0$. *Alors*

$$\begin{aligned}
&\beta(\sigma, \delta + \alpha - 1)\beta(\lambda - \sigma, \rho + \alpha - \delta - 1) \\
&+\beta(\varphi, \psi + \alpha - 1)\beta(\lambda - \varphi, \rho + \alpha - \psi - 1) \\
&\geqslant \beta(\lambda - \varphi, \delta + \alpha - 1)\beta(\varphi, \rho + \alpha - \delta - 1) \\
&+\beta(\lambda - \sigma, \psi + \alpha - 1)\beta(\sigma, \rho + \alpha - \psi - 1),
\end{aligned} \tag{III.3}$$

où $\alpha \geqslant 1$, $\lambda > max\{\sigma, \varphi\}$ *et* $\rho > max\{\delta, \psi\}$.

Preuve: III.2.1

On considère les applications positives $f.g.p.q$ *définies sur* $[0, 1]$ *comme suit :*

$$p(x) = x^{\sigma-1}(1-x)^{\delta-1},\ q(x) = x^{\varphi-1}(1-x)^{\psi-1},$$
$$f(x) = x^{\lambda-\sigma-\varphi} \quad et \quad g(x) = (1-x)^{\rho-\delta-\psi},\ x \in [0, 1].$$

D'après l'inégalité fractionnaire de Chebyshev à deux pondérations (I.7)(pour $\alpha = \beta$ *) avec* $t = 1$ *on a :*

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 x^{\varphi-1}(1-x)^{\psi-1}x^{\lambda-\sigma-\varphi}(1-x)^{\rho-\delta-\psi}dx \int_0^1 x^{\sigma-1}(1-x)^{\delta-1}dx \\
&+ \int_0^1 x^{\lambda-\sigma-\varphi}(1-x)^{\rho-\delta-\psi}x^{\sigma-1}(1-x)^{\delta-1}dx \int_0^1 x^{\varphi-1}(1-x)^{\psi-1}dx \\
\geqslant &\int_0^1 x^{\sigma-1}(1-x)^{\delta-1}(1-x)^{\rho-\delta-\psi}dx \int_0^1 x^{\varphi-1}(1-x)^{\psi-1}x^{\lambda-\sigma-\varphi}dx \\
&+ \int_0^1 x^{\sigma-1}(1-x)^{\delta-1} \int_0^1 x^{\lambda-\sigma-\varphi}dx \int_0^1 (1-x)^{\rho-\delta-\psi}x^{\varphi-1}(1-x)^{\psi-1}dx.
\end{aligned}$$

Maintenant on multiple par $(1-x)^{\alpha-1}$, *on trouve*

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 x^{\lambda-\sigma-1}(1-x)^{\rho+\alpha-\delta-1}dx \int_0^1 x^{\sigma-1}(1-x)^{\delta+\alpha-1}dx \\
&\quad+\int_0^1 x^{\lambda-\varphi-1}(1-x)^{\rho+\alpha\psi-1}dx \int_0^1 x^{\varphi-1}(1-x)^{\psi+\alpha-1}dx \\
&\geqslant \int_0^1 x^{\sigma-1}(1-x)^{\rho+\alpha-\psi-1}dx \int_0^1 x^{\lambda-\sigma-1}(1-x)^{\psi+\alpha-1}dx \\
&\quad+\int_0^1 x^{\lambda+\varphi-1}(1-x)^{\delta+\alpha-1}dx \int_0^1 x^{\varphi-1}(1-x)^{\rho+\alpha-\delta-1}dx,
\end{aligned}$$

on obtient le résultat souhaité

$$\begin{aligned}
&\beta(\sigma,\delta+\alpha-1)\beta(\lambda-\sigma,\rho+\alpha-\delta-1) \\
&\quad+\beta(\varphi,\psi+\alpha-1)\beta(\lambda-\varphi,\rho+\alpha-\psi-1) \\
&\geqslant\beta(\lambda-\varphi,\delta+\alpha-1)\beta(\varphi,\rho+\alpha-\delta-1) \\
&\quad+\beta(\lambda-\sigma,\psi+\alpha-1)\beta(\sigma,\rho+\alpha-\psi-1).
\end{aligned}$$

Les cas particuliers de notre théorème (III.2.1) sont aussi donnés par les corollaires suivants.

Corollaire: III.2.1

Pour $\sigma=\varphi>0, \delta=\psi>0$ *et* $\alpha=1$ *dans le théorème (III.2.1), on obtient*

$$\beta(\sigma,\delta)\beta(\lambda-\sigma,\rho-\delta) \geq \beta(\lambda-\sigma,\delta)\beta(\sigma,\rho-\delta), \tag{III.4}$$

et

$$\Gamma(\lambda+\delta-\sigma)\Gamma(\rho+\sigma-\delta) \geq \Gamma(\sigma+\delta)\Gamma(\lambda+\rho-\sigma-\delta). \tag{III.5}$$

Preuve : III.2.1

- Pour $\sigma=\varphi>0, \delta=\psi>0$ et $\alpha=1$ dans le théorème (III.2.1),

on obtient directement

$$\beta(\sigma,\delta)\beta(\lambda-\sigma,\rho-\delta) \geq \beta(\lambda-\sigma,\delta)\beta(\sigma,\rho-\delta).$$

• D'après la relation entre les fonctions Gamma et Bêta dans (III.4)

on trouve

$$\frac{\Gamma(\sigma)\Gamma(\delta)}{\Gamma(\sigma+\delta)}\frac{\Gamma(\lambda-\sigma)\Gamma(\rho-\delta)}{\Gamma(\lambda-\sigma+\rho-\delta)} \leqslant \frac{\Gamma(\lambda-\sigma)\Gamma(\delta)}{\Gamma(\lambda-\sigma+\delta)}\frac{\Gamma(\sigma)\Gamma(\rho-\delta)}{\Gamma(\sigma+\rho-\delta)},$$

implique

$$\frac{\Gamma(\sigma+\delta)\Gamma(\lambda-\sigma+\rho-\delta)}{\Gamma(\sigma)\Gamma(\delta)\Gamma(\lambda-\sigma)\Gamma(\rho-\delta)} \geqslant \frac{\Gamma(\lambda-\sigma+\delta)\Gamma(\sigma+\rho-\delta)}{\Gamma(\lambda-\sigma)\Gamma(\delta)\Gamma(\sigma)\Gamma(\rho-\delta)},$$

on obtient

$$\Gamma(\lambda+\delta-\sigma)\Gamma(\rho+\sigma-\delta) \geq \Gamma(\sigma+\delta)\Gamma(\lambda+\rho-\sigma-\delta).$$

Corollaire: III.2.2

Prenant $\lambda=\rho>0, \sigma=\delta=\varphi=\psi>0$ et $\alpha=1$ dans le théorème (III.2.1).

On a

$$\beta(\sigma,\sigma)\beta(\lambda-\sigma,\lambda-\sigma) \geq \beta^2(\lambda-\sigma,\sigma). \tag{III.6}$$

Et

$$\Gamma^2(\lambda) \geq \Gamma(2\sigma)\Gamma(2\lambda-2\delta). \tag{III.7}$$

Preuve : III.2.2

• Prenant $\lambda=\rho>0,\ \sigma=\delta=\varphi=\psi>0$ et $\alpha=1$ dans le théorème (III.2.1). On a

$$\begin{aligned}&\beta(\lambda-\sigma,\lambda-\sigma)\beta(\sigma,\sigma)+\beta(\lambda-\sigma,\lambda-\sigma)\beta(\sigma,\sigma)\\ &\geqslant \beta(\sigma,\lambda-\sigma)\beta(\lambda-\sigma,\sigma)+\beta(\lambda-\sigma,\sigma)\beta(\sigma,\lambda-\sigma),\end{aligned}$$

implique

$$2\beta(\lambda-\sigma,\lambda-\sigma)\beta(\sigma,\sigma) \geqslant 2\beta(\lambda-\sigma,\sigma),$$

donc

$$B(\sigma,\sigma)B(\lambda-\sigma,\lambda-\sigma) \geq B^2(\lambda-\sigma,\sigma).$$

• En utilisant la relation entre les fonctions Gamma et Bêta dans (III.6), on trouve

$$\frac{\Gamma(\lambda-\sigma)\Gamma(\lambda-\sigma)}{\Gamma(\lambda-\sigma+\lambda-\sigma)}\frac{\Gamma(\sigma)\Gamma(\sigma)}{\Gamma(\sigma+\sigma)} \geqslant \left(\frac{\Gamma(\lambda-\sigma)\Gamma(\sigma)}{\Gamma(\lambda-\sigma+\sigma)}\right)^2,$$

implique

$$\frac{\Gamma^2(\lambda-\sigma)\Gamma^2(\sigma)}{\Gamma(2\lambda-2\sigma)} \geqslant \frac{\Gamma^2(\lambda-\sigma)\Gamma^2(\sigma)}{\Gamma^2(\lambda)},$$

alors

$$\frac{1}{\Gamma(2\lambda-2\sigma)} \geqslant \frac{1}{\Gamma^2(\lambda)},$$

on obtient

$$\Gamma^2(\lambda) \geq \Gamma(2\sigma)\Gamma(2\lambda-2\delta).$$

III.2.2 Moments fractionnaires pour la distribution Bêta

Nous commençons cette section en démontrant le nouveau résultat suivant.

Théorème: III.2.2

Soient $X_i, i=1,2,...,8$ des variables aléatoires continues. Telles que $X_1 \sim \beta(\sigma,\delta),\ X_2 \sim \beta(\lambda-\sigma,\rho-\delta),\ X_3 \sim \beta(\varphi,\psi),\ X_4 \sim \beta(\lambda-\varphi,\rho-\psi),\ X_5 \sim \beta(\lambda-\varphi,\delta),\ X_6 \sim \beta(\varphi,\rho-\delta),\ X_7 \sim \beta(\lambda-\sigma,\psi)$ *et* $X_8 \sim \beta(\sigma,\rho-\psi)$.

Si $(\lambda-\sigma-\varphi)(\rho-\delta-\psi) \leqslant 0$, *alors on a*

$$\begin{aligned}
&E_\alpha(X_1^r)E_\alpha(X_2^r)\beta(\sigma,\delta)\beta(\lambda-\sigma,\rho-\delta)\\
&+E_\alpha(X_3^r)E_\alpha(X_4^r)\beta(\varphi,\psi)\beta(\lambda-\varphi,\rho-\psi)\\
&\geq E_\alpha(X_5^r)E_\alpha(X_6^r)\beta(\lambda-\varphi,\delta)\beta(\varphi,\rho-\delta)\\
&+E_\alpha(X_7^r)E_\alpha(X_8^r)\beta(\lambda-\sigma,\psi)\beta(\sigma,\rho-\psi).
\end{aligned} \tag{III.8}$$

Où $\lambda-\sigma-\varphi,\ \rho-\delta-\psi,\ \sigma,\ \delta,\ \varphi,\ \psi > 0,\ \alpha \geq 1$ *et* $r \in \mathbb{N}^*$.

Preuve: III.2.2

On considère les fonctions suivantes :

$$\begin{aligned}
&p(x) = x^{r+\sigma-1}(1-x)^{\delta-1},\ q(x) = x^{r+\varphi-1}(1-x)^{\psi-1},\\
&f(x) = x^{\lambda-\sigma-\varphi} \quad et \quad g(x) = (1-x)^{\rho-\delta-\psi},\ ou\ x \in [0,1].
\end{aligned} \tag{III.9}$$

En remplaçant ces applications dans l'inégalité (I.7), on trouve

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 x^{r+\varphi-1}(1-x)^{\psi-1}x^{\lambda-\sigma-\varphi}(1-x)^{\rho-\delta-\psi}dx\int_0^1 x^{r+\sigma-1}(1-x)^{\delta-1}dx\\
&+\int_0^1 x^{\lambda-\sigma-\varphi}(1-x)^{\rho-\delta-\psi}x^{r+\sigma-1}(1-x)^{\delta-1}dx\int_0^1 x^{r+\varphi-1}(1-x)^{\psi-1}dx\\
&\geqslant\int_0^1 x^{r+\sigma-1}(1-x)^{\delta-1}(1-x)^{\rho-\delta-\psi}dx\int_0^1 x^{r+\varphi-1}(1-x)^{\psi-1}x^{\lambda-\sigma-\varphi}dx\\
&+\int_0^1 x^{r+\sigma-1}(1-x)^{\delta-1}x^{\lambda-\sigma-\varphi}dx\int_0^1 (1-x)^{\rho-\delta-\psi}x^{r+\varphi-1}(1-x)^{\psi-1}dx.
\end{aligned}$$

Implique

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 x^{r-\sigma+\lambda-1}(1-x)^{\rho-\delta-1}dx\int_0^1 x^{r+\sigma-1}(1-x)^{\delta-1}dx\\
&+\int_0^1 x^{r+\lambda-\varphi-1}(1-x)^{\rho-\psi-1}dx\int_0^1 x^{r+\varphi-1}(1-x)^{\psi-1}dx\\
&\geqslant\int_0^1 x^{r+\sigma-1}(1-x)^{\rho-\psi-1}dx\int_0^1 x^{r+\lambda-\sigma-1}(1-x)^{\psi-1}dx\\
&+\int_0^1 x^{r+\lambda-\varphi-1}(1-x)^{\delta-1}dx\int_0^1 x^{r+\varphi-1}(1-x)^{\rho-\delta-1}dx.
\end{aligned}$$

C-à-d

$$\begin{aligned}
&\beta(\lambda-\sigma,\rho-\delta)E_\alpha(X_2^r)\beta(\sigma,\delta)E_\alpha(X_1^r)\\
&+\beta(\lambda-\varphi,\rho-\psi)E_\alpha(X_4^r)\beta(\varphi,\psi)E_\alpha(X_3^r)\\
&\geqslant\beta(\sigma,\rho-\psi)E_\alpha(X_8^r)\beta(\lambda-\sigma,\psi)E_\alpha(X_7^r)\\
&+\beta(\lambda-\varphi,\delta)E_\alpha(X_5^r)\beta(\varphi,\rho-\delta)E_\alpha(X_6^r).
\end{aligned}$$

En relation avec le théorème prouvé ci-dessus, nous donnons les cas suivants.

Corollaire: III.2.3

Si on prend $\sigma=\varphi>0$ *et* $\delta=\psi>0$ *dans* $(III.8)$, *alors on obtient :*

$$\frac{E_\alpha(X_1^r)E_\alpha(X_2^r)+E_\alpha(X_3^r)E_\alpha(X_4^r)}{E_\alpha(X_5^r)E_\alpha(X_6^r)+E_\alpha(X_7^r)E_\alpha(X_8^r)}\geq\frac{\beta(\lambda-\sigma,\delta)\beta(\sigma,\rho-\delta)}{\beta(\sigma,\delta)\beta(\lambda-\sigma,\rho-\delta)}. \tag{III.10}$$

où $\alpha\geq 1$ *et* $r\in\mathbb{N}^*$.

Preuve: III.2.3

On pose $\sigma=\varphi>0$ *et* $\delta=\psi>0$ *dans* $(III.8)$, *alors ce qui donne :*

$$\begin{aligned}
&\beta(\lambda-\sigma,\rho-\delta)E_\alpha(X_2^r)\beta(\sigma,\delta)E_\alpha(X_1^r)\\
&+\beta(\lambda-\sigma,\rho-\delta)E_\alpha(X_4^r)\beta(\sigma,\delta)E_\alpha(X_3^r)\\
&\geqslant \beta(\sigma,\rho-\delta)E_\alpha(X_8^r)\beta(\lambda-\sigma,\delta)E_\alpha(X_7^r)\\
&+\beta(\lambda-\sigma,\delta)E_\alpha(X_5^r)\beta(\sigma,\rho-\delta)E_\alpha(X_6^r).
\end{aligned}$$

Implique

$$\begin{aligned}
&\left(E_\alpha(X_1^r)E_\alpha(X_2^r)+E_\alpha(X_3^r)E_\alpha(X_4^r)\right)\beta(\sigma,\delta)\beta(\lambda-\sigma,\rho-\delta)\\
&\geqslant \left(E_\alpha(X_5^r)E_\alpha(X_6^r)+E_\alpha(X_7^r)E_\alpha(X_8^r)\right)\beta(\lambda-\sigma,\delta)\beta(\sigma,\rho-\delta).
\end{aligned}$$

On obtient

$$\frac{E_\alpha(X_1^r)E_\alpha(X_2^r)+E_\alpha(X_3^r)E_\alpha(X_4^r)}{E_\alpha(X_5^r)E_\alpha(X_6^r)+E_\alpha(X_7^r)E_\alpha(X_8^r)} \geq \frac{\beta(\lambda-\sigma,\delta)\beta(\sigma,\rho-\delta)}{\beta(\sigma,\delta)\beta(\lambda-\sigma,\rho-\delta)}.$$

Corollaire: III.2.4

En prenant $\lambda=\rho>0$ et $\sigma=\delta=\varphi=\psi>0$ dans le théorème ci-dessus,on trouve

$$\frac{E_\alpha(X_1^r)E_\alpha(X_2^r)+E_\alpha(X_3^r)E_\alpha(X_4^r)}{E_\alpha(X_5^r)E_\alpha(X_6^r)+E_\alpha(X_7^r)E_\alpha(X_8^r)} \leq \frac{\beta^2(\sigma,\lambda-\sigma)}{\beta(\sigma,\sigma)\beta(\lambda-\sigma,\lambda-\sigma)}, \tag{III.11}$$

où $\alpha\geq 1$ et $r \in \mathbb{N}^*$.

Preuve: III.2.4

On pose $\lambda=\rho>0$ et $\sigma=\delta=\varphi=\psi>0$ dans (III.8), alors ce qui donne :

$$\begin{aligned}
&\beta(\lambda-\sigma,\lambda-\sigma)E_\alpha(X_2^r)\beta(\sigma,\sigma)E_\alpha(X_1^r)\\
&+\beta(\lambda-\sigma,\lambda-\sigma)E_\alpha(X_4^r)\beta(\sigma,\sigma)E_\alpha(X_3^r)\\
&\geqslant \beta(\sigma,\lambda-\sigma)E_\alpha(X_8^r)\beta(\lambda-\sigma,\sigma)E_\alpha(X_7^r)\\
&+\beta(\lambda-\sigma,\sigma)E_\alpha(X_5^r)\beta(\sigma,\lambda-\sigma)E_\alpha(X_6^r),
\end{aligned}$$

implique

$$\begin{aligned}
&\left(E_\alpha(X_1^r)E_\alpha(X_2^r)+E_\alpha(X_3^r)E_\alpha(X_4^r)\right)\beta(\lambda-\sigma,\lambda-\sigma)\beta(\sigma,\sigma)\\
&\geqslant \left(E_\alpha(X_5^r)E_\alpha(X_6^r)+E_\alpha(X_7^r)E_\alpha(X_8^r)\right)\beta(\lambda-\sigma,\sigma)\beta(\sigma,\lambda-\sigma).
\end{aligned}$$

On obtient

$$\frac{E_\alpha(X_1^r)E_\alpha(X_2^r)+E_\alpha(X_3^r)E_\alpha(X_4^r)}{E_\alpha(X_5^r)E_\alpha(X_6^r)+E_\alpha(X_7^r)E_\alpha(X_8^r)} \geq \frac{\beta^2(\sigma,\lambda-\sigma)}{\beta(\sigma,\sigma)\beta(\lambda-\sigma,\lambda-\sigma)}.$$

Corollaire: III.2.5

Si on prend $\sigma=\delta=\varphi=\psi>0$ dans (III.8), alors on a

$$\frac{E_\alpha(X_1^r)E_\alpha(X_2^r)+E_\alpha(X_3^r)E_\alpha(X_4^r)}{E_\alpha(X_5^r)E_\alpha(X_6^r)+E_\alpha(X_7^r)E_\alpha(X_8^r)} \geq \frac{\beta(\lambda-\sigma,\sigma)\beta(\sigma,\rho-\sigma)}{\beta(\sigma,\sigma)\beta(\lambda-\sigma,\rho-\sigma)}, \tag{III.12}$$

où $\alpha \geq 1$ *et* $r \in \mathbb{N}^*$.

Corollaire: III.2.6

En prenant $\lambda = \rho > 0$ *et* $\sigma = \delta = \varphi = \psi > 0$ *dans* (*III.8*), *on obtient :*

$$\frac{E_\alpha(X_1^r)E_\alpha(X_2^r) + E_\alpha(X_3^r)E_\alpha(X_4^r)}{E_\alpha(X_5^r)E_\alpha(X_6^r) + E_\alpha(X_7^r)E_\alpha(X_8^r)} \geq \frac{\beta(\lambda-\sigma,\sigma)\beta(\sigma,\lambda-\sigma)}{\beta(\sigma,\sigma)\beta(\lambda-\sigma,\lambda-\sigma)}, \tag{III.13}$$

où $\alpha \geq 1$ *et* $r \in \mathbb{N}^*$.

Dans un cas plus général de deux paramètres, nous prouvons le théorème suivant.

Théorème: III.2.3

Soient X_i, $i = 1, 2, ..., 8$, *des variables aléatoires continues, telles que* $X_1 \sim \beta(\sigma, \delta)$, $X_2 \sim \beta(\lambda-\sigma, \rho-\delta)$, $X_3 \sim \beta(\varphi, \psi)$, $X_4 \sim \beta(\lambda-\varphi, \rho-\psi)$, $X_5 \sim \beta(\lambda-\varphi, \delta)$, $X_6 \sim \beta(\varphi, \rho-\delta)$, $X_7 \sim \beta(\lambda-\sigma, \psi)$ *et* $X_8 \sim \beta(\sigma, \rho-\psi)$.

Si $(\lambda-\sigma-\varphi)(\rho-\delta-\psi) \leqslant 0$, *alors*

$$\begin{aligned}
&E_\alpha(X_1^r)E_\beta(X_2^r)\beta(\sigma,\delta)\beta(\lambda-\sigma,\rho-\delta)\\
&+E_\beta(X_1^r)E_\alpha(X_2^r)\beta(\sigma,\delta)\beta(\lambda-\sigma,\rho-\delta)\\
&+E_\alpha(X_3^r)E_\beta(X_4^r)\beta(\varphi,\psi)\beta(\lambda-\varphi,\rho-\psi)\\
&+E_\beta(X_3^r)E_\alpha(X_4^r)\beta(\varphi,\psi)\beta(\lambda-\varphi,\rho-\psi)\\
&\geq E_\alpha(X_5^r)E_\beta(X_6^r)\beta(\lambda-\varphi,\delta)\beta(\varphi,\rho-\delta)\\
&+E_\beta(X_5^r)E_\alpha(X_6^r)\beta(\lambda-\varphi,\delta)\beta(\varphi,\rho-\delta)\\
&+E_\alpha(X_7^r)E_\beta(X_8^r)\beta(\lambda-\sigma,\psi)\beta(\sigma,\rho-\psi)\\
&+E_\beta(X_7^r)E_\alpha(X_8^r)\beta(\lambda-\sigma,\psi)\beta(\sigma,\rho-\psi),
\end{aligned} \tag{III.14}$$

où $\lambda,\ \rho,\ \sigma,\ \delta,\ \varphi,\ \psi > 1$, $\alpha \geq 1$, $\beta \geq 1$, $\lambda > max\{\sigma, \varphi\}, \rho > max\{\delta, \psi\}$ *et* $r \in \mathbb{N}^*$.

Preuve : III.2.3

On remplace les fonctions de (III.9) dans ((I.7)+(I.8)), pour t=1.

On obtient

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 x^{r+\varphi-1}(1-x)^{\psi-1}x^{\lambda-\sigma-\varphi}(1-x)^{\rho-\delta-\psi}dx\int_0^1 y^{r+\sigma-1}(1-y)^{\delta-1}dy\\
&+\int_0^1 y^{r+\varphi-1}(1-y)^{\psi-1}y^{\lambda-\sigma-\varphi}(1-y)^{\rho-\delta-\psi}dy\int_0^1 x^{r+\sigma-1}(1-x)^{\delta-1}dx\\
&+\int_0^1 x^{\lambda-\sigma-\varphi}(1-x)^{\rho-\delta-\psi}x^{r+\sigma-1}(1-x)^{\delta-1}dx\int_0^1 y^{r+\varphi-1}(1-y)^{\psi-1}dy\\
&+\int_0^1 y^{\lambda-\sigma-\varphi}(1-y)^{\rho-\delta-\psi}y^{r+\sigma-1}(1-y)^{\delta-1}dy\int_0^1 x^{r+\varphi-1}(1-x)^{\psi-1}dx\\
&\geqslant\int_0^1 x^{r+\sigma-1}(1-x)^{\delta-1}(1-x)^{\rho-\delta-\psi}dx\int_0^1 y^{r+\varphi-1}(1-y)^{\psi-1}y^{\lambda-\sigma-\varphi}dy\\
&+\int_0^1 y^{r+\sigma-1}(1-y)^{\delta-1}(1-y)^{\rho-\delta-\psi}dy\int_0^1 x^{r+\varphi-1}(1-x)^{\psi-1}x^{\lambda-\sigma-\varphi}dx\\
&+\int_0^1 x^{r+\sigma-1}(1-x)^{\delta-1}x^{\lambda-\sigma-\varphi}dx\int_0^1 (1-y)^{\rho-\delta-\psi}y^{r+\varphi-1}(1-y)^{\psi-1}dy\\
&+\int_0^1 y^{r+\sigma-1}(1-y)^{\delta-1}y^{\lambda-\sigma-\varphi}dy\int_0^1 (1-x)^{\rho-\delta-\psi}x^{r+\varphi-1}(1-x)^{\psi-1}dx.
\end{aligned}$$

Implique

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 x^{r-\sigma+\lambda-1}(1-x)^{\rho-\delta-1}dx\int_0^1 y^{r+\sigma-1}(1-y)^{\delta-1}dy\\
&+\int_0^1 y^{r-\sigma+\lambda-1}(1-y)^{\rho-\delta-1}dy\int_0^1 x^{r+\sigma-1}(1-x)^{\delta-1}dx\\
&+\int_0^1 x^{r+\lambda-\varphi-1}(1-x)^{\rho-\psi-1}dx\int_0^1 y^{r+\varphi-1}(1-y)^{\psi-1}dy\\
&+\int_0^1 y^{r+\lambda-\varphi-1}(1-y)^{\rho-\psi-1}dy\int_0^1 x^{r+\varphi-1}(1-x)^{\psi-1}dx\\
&\geqslant\int_0^1 x^{r+\sigma-1}(1-x)^{\rho-\psi-1}dx\int_0^1 y^{r+\lambda-\sigma-1}(1-y)^{\psi-1}dy\\
&+\int_0^1 y^{r+\sigma-1}(1-y)^{\rho-\psi-1}dy\int_0^1 x^{r+\lambda-\sigma-1}(1-x)^{\psi-1}dx\\
&+\int_0^1 x^{r+\lambda-\varphi-1}(1-x)^{\delta-1}dx\int_0^1 y^{r+\varphi-1}(1-y)^{\rho-\delta-1}dy\\
&+\int_0^1 y^{r+\lambda-\varphi-1}(1-y)^{\delta-1}dy\int_0^1 x^{r+\varphi-1}(1-x)^{\rho-\delta-1}dx.
\end{aligned}$$

On a les résultats souhaités.

$$\begin{aligned}
&E_\alpha(X_1^r)E_\beta(X_2^r)\beta(\sigma,\delta)\beta(\lambda-\sigma,\rho-\delta)\\
&+E_\beta(X_1^r)E_\alpha(X_2^r)\beta(\sigma,\delta)\beta(\lambda-\sigma,\rho-\delta)\\
&+E_\alpha(X_3^r)E_\beta(X_4^r)\beta(\varphi,\psi)\beta(\lambda-\varphi,\rho-\psi)\\
&+E_\beta(X_3^r)E_\alpha(X_4^r)\beta(\varphi,\psi)\beta(\lambda-\varphi,\rho-\psi)\\
&\geq E_\alpha(X_5^r)E_\beta(X_6^r)\beta(\lambda-\varphi,\delta)\beta(\varphi,\rho-\delta)\\
&+E_\beta(X_5^r)E_\alpha(X_6^r)\beta(\lambda-\varphi,\delta)\beta(\varphi,\rho-\delta)\\
&+E_\alpha(X_7^r)E_\beta(X_8^r)\beta(\lambda-\sigma,\psi)\beta(\sigma,\rho-\psi)\\
&+E_\beta(X_7^r)E_\alpha(X_8^r)\beta(\lambda-\sigma,\psi)\beta(\sigma,\rho-\psi),
\end{aligned}$$

Corollaire: III.2.7

En prenant $\alpha=\beta$ dans le théorème (III.2.3), on obtient le théorème (III.2.2).

III.2.2 Estimation des moyennes harmoniques fractionnaires

On prouve le résultat :

Théorème: III.2.4

Soient X_i, $i=1,2,...,8$, des variables aléatoires continues, telles que $X_1,\ X_3\sim B(\sigma,\delta),\ X_2,\ X_4\sim B(\lambda-\sigma,\rho-\delta),\ X_5,\ X_7\sim B(\lambda-\sigma,\delta)$ et $X_6,\ X_8\sim B(\delta,\rho-\delta)$. Notons les moyennes harmoniques fractionnaires de X_i, par : $\dfrac{1}{E_\alpha(1/X_i)}$, $i=1,2,...,8$. Si $(\lambda-\sigma-\delta)(\rho-\sigma-\delta)\leq 0$, alors

$$\frac{E_\alpha\left(\frac{1}{X_2^r}\right)E_\alpha\left(\frac{1}{X_1^r}\right)+E_\alpha\left(\frac{1}{X_4^r}\right)E_\alpha\left(\frac{1}{X_3^r}\right)}{E_\alpha\left(\frac{1}{X_6^r}\right)E_\alpha\left(\frac{1}{X_5^r}\right)+E_\alpha\left(\frac{1}{X_7^r}\right)E_\alpha\left(\frac{1}{X_8^r}\right)}\geq\frac{\Gamma(\sigma+\delta)\Gamma(\lambda+\rho-\sigma-\delta)}{\Gamma(\lambda+\delta-\sigma)\Gamma(\rho+\sigma-\delta)}. \tag{III.15}$$

Où $\lambda,\ \rho,\ \sigma,\ \delta,\ \varphi,\ \psi>0,\ \alpha\geq 1,\ \lambda>max\{\sigma,\varphi\},\ \rho>max\{\delta,\psi\}$ et $r\in\mathbb{N}^*$.

Preuve : III.2.4

On considère les fonctions $f,\ g,\ p,\ q:[0,1]\to[0,\infty)$ définies par :

$$\begin{aligned}
&p(x)=q(x)=x^{\sigma-r-1}(1-x)^{\delta-1}\\
&f(x)=x^{\lambda-2\sigma}\ et\ \ g(x)=(1-x)^{\rho-2\delta},\ x\in[0,1],
\end{aligned}\tag{III.16}$$

En remplaçant ces applications dans l'inégalité (I.7), on trouve

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 x^{\sigma-r-1}(1-x)^{\delta-1}x^{\lambda-2\sigma}(1-x)^{\rho-2\delta}dx\int_0^1 x^{\sigma-r-1}(1-x)^{\delta-1}dx\\
&+\int_0^1 x^{\lambda-2\sigma}(1-x)^{\rho-2\delta}x^{\sigma-r-1}(1-x)^{\delta-1}dx\int_0^1 x^{\sigma-r-1}(1-x)^{\delta-1}dx\\
&\geq \int_0^1 x^{\sigma-r-1}(1-x)^{\delta-1}(1-x)^{\rho-2\delta}dx\int_0^1 x^{\sigma-r-1}(1-x)^{\delta-1}x^{\lambda-2\sigma}dx\\
&+\int_0^1 x^{\sigma-r-1}(1-x)^{\delta-1}x^{\lambda-2\sigma}dx\int_0^1 (1-x)^{\rho-2\delta}x^{\sigma-r-1}(1-x)^{\delta-1}dx,
\end{aligned}$$

implique

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 x^{\lambda-\sigma-r-1}(1-x)^{\rho-\delta-1}dx\int_0^1 x^{\sigma-r-1}(1-x)^{\delta-1}dx\\
&+\int_0^1 x^{\lambda-\sigma-r-1}(1-x)^{\rho-\delta-1}dx\int_0^1 x^{\sigma-r-1}(1-x)^{\delta-1}dx\\
&\geq \int_0^1 x^{\sigma-r-1}(1-x)^{\rho-\delta-1}dx\int_0^1 x^{\lambda-\sigma-r-1}(1-x)^{\delta-1}dx\\
&+\int_0^1 x^{\lambda-\sigma-r-1}(1-x)^{\delta-1}dx\int_0^1 x^{\sigma-r-1}(1-x)^{\rho-\delta-1}dx,
\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}
&\beta(\lambda-\sigma,\rho-\delta)E_\alpha\left(\frac{1}{X_2^r}\right)\beta(\sigma,\delta)E_\alpha\left(\frac{1}{X_1^r}\right)\\
&+\beta(\lambda-\sigma,\rho-\delta)E_\alpha\left(\frac{1}{X_4^r}\right)\beta(\sigma,\delta)E_\alpha\left(\frac{1}{X_3^r}\right)\\
&\geq \beta(\sigma,\rho-\delta)E_\alpha\left(\frac{1}{X_6^r}\right)\beta(\lambda-\sigma,\delta)E_\alpha\left(\frac{1}{X_5^r}\right)\\
&+\beta(\lambda-\sigma,\delta)E_\alpha\left(\frac{1}{X_7^r}\right)\beta(\sigma,\rho-\delta)E_\alpha\left(\frac{1}{X_8^r}\right),
\end{aligned}$$

donc

$$\frac{E_\alpha\left(\frac{1}{X_2^r}\right)E_\alpha\left(\frac{1}{X_1^r}\right)+E_\alpha\left(\frac{1}{X_4^r}\right)E_\alpha\left(\frac{1}{X_3^r}\right)}{E_\alpha\left(\frac{1}{X_6^r}\right)E_\alpha\left(\frac{1}{X_5^r}\right)+E_\alpha\left(\frac{1}{X_7^r}\right)E_\alpha\left(\frac{1}{X_8^r}\right)}\geq\frac{\beta(\sigma,\rho-\delta)\beta(\lambda-\sigma,\delta)}{\beta(\lambda-\sigma,\rho-\delta)\beta(\sigma,\delta)},$$

d'après la relation entre les fonctions Gamma et Bêta (I.3), on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{E_\alpha\left(\frac{1}{X_2^r}\right)E_\alpha\left(\frac{1}{X_1^r}\right)+E_\alpha\left(\frac{1}{X_4^r}\right)E_\alpha\left(\frac{1}{X_3^r}\right)}{E_\alpha\left(\frac{1}{X_6^r}\right)E_\alpha\left(\frac{1}{X_5^r}\right)+E_\alpha\left(\frac{1}{X_7^r}\right)E_\alpha\left(\frac{1}{X_8^r}\right)}&\geq\frac{\dfrac{\Gamma(\sigma)\Gamma(\rho-\delta)}{\Gamma(\sigma+\rho-\delta)}\quad\dfrac{\Gamma(\lambda-\sigma)\Gamma(\delta)}{\Gamma(\lambda-\sigma+\delta)}}{\dfrac{\Gamma(\lambda-\sigma)\Gamma(\rho-\delta)}{\Gamma(\lambda-\sigma+\rho-\delta)}\quad\dfrac{\Gamma(\sigma)\Gamma(\delta)}{\Gamma(\sigma+\delta)}},\\
&\geq\frac{\Gamma(\sigma+\delta)\Gamma(\lambda+\rho-\sigma-\delta)}{\Gamma(\lambda+\delta-\sigma)\Gamma(\rho+\sigma-\delta)}.
\end{aligned}$$

D'où le résultat.

Corollaire: III.2.8

Si on prend or $\sigma = \delta > 0$, dans le théorème (III.2.4), alors on a :

$$\frac{E_\alpha\left(\frac{1}{X_2^r}\right) E_\alpha\left(\frac{1}{X_1^r}\right) + E_\alpha\left(\frac{1}{X_4^r}\right) E_\alpha\left(\frac{1}{X_3^r}\right)}{E_\alpha\left(\frac{1}{X_6^r}\right) E_\alpha\left(\frac{1}{X_5^r}\right) + E_\alpha\left(\frac{1}{X_7^r}\right) E_\alpha\left(\frac{1}{X_8^r}\right)} \geq \frac{\Gamma(2\sigma)\Gamma(\lambda+\rho-2\sigma)}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\rho)}. \tag{III.17}$$

Corollaire: III.2.9

En prenant $\lambda = \rho >$ et $\sigma = \delta > 0$ dans le théorème (III.2.4), on obtient l'inégalité suivante

$$\frac{E_\alpha\left(\frac{1}{X_2^r}\right) E_\alpha\left(\frac{1}{X_1^r}\right) + E_\alpha\left(\frac{1}{X_4^r}\right) E_\alpha\left(\frac{1}{X_3^r}\right)}{E_\alpha\left(\frac{1}{X_6^r}\right) E_\alpha\left(\frac{1}{X_5^r}\right) + E_\alpha\left(\frac{1}{X_7^r}\right) E_\alpha\left(\frac{1}{X_8^r}\right)} \geq \frac{\Gamma(2\sigma)\Gamma(2\lambda-2\sigma)}{\Gamma^2(\lambda)}, \tag{III.18}$$

où $\alpha \geq 1$ et $r \in \mathbb{N}^*$.

En utilisant deux paramètres fractionnaires, nous présentons à nos lecteurs le résultat fractionnaire suivant.

Théorème: III.2.5

Soient X_i, $i = 1, 2, ..., 8$, des variables aléatoires continues, telles que

$X_1,\ X_3 \sim B(\sigma, \delta),\ X_2,\ X_4 \sim B(\lambda-\sigma, \rho-\delta),\ X_5,\ X_7 \sim B(\lambda-\sigma, \delta)$ et $X_6,\ X_8 \sim B(\delta, \rho-\delta)$.

Si $(\lambda - \sigma - \delta)(\rho - \sigma - \delta) \leq 0$, alors

$$\begin{aligned}&\frac{E_\alpha(\frac{1}{X_1^r})E_\beta(\frac{1}{X_2^r}) + E_\beta(\frac{1}{X_1^r})E_\alpha(\frac{1}{X_2^r}) + E_\alpha(\frac{1}{X_3^r})E_\beta(\frac{1}{X_4^r}) + E_\beta(\frac{1}{X_3^r})E_\alpha(\frac{1}{X_4^r})}{E_\alpha(\frac{1}{X_5^r})E_\beta(\frac{1}{X_6^r}) + E_\beta(\frac{1}{X_5^r})E_\alpha(\frac{1}{X_6^r}) + E_\alpha(\frac{1}{X_7^r})E_\beta(\frac{1}{X_8^r}) + E_\beta(\frac{1}{X_7^r})E_\alpha(\frac{1}{X_8^r})}\\ &\geqslant \frac{\Gamma(\sigma+\delta)\Gamma(\lambda+\rho-\sigma-\delta)}{\Gamma(\lambda+\delta-\sigma)\Gamma(\rho+\sigma-\delta)},\end{aligned} \tag{III.19}$$

où $\lambda,\ \rho,\ \sigma,\ \delta > 0,\ \alpha \geq 1,\ \beta \geq 1,\ \lambda > \sigma,\ \rho > \delta$ et $r \in N^*$.

Preuve : III.2.5

Il suffit de remplacer les fonction (III.16)du ((I.7)+(I.8)) pour $t = 1$.

On obtient

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 x^{\sigma-r-1}(1-x)^{\delta-1}x^{\lambda-2\sigma}(1-x)^{\rho-2\delta}dx\int_0^1 y^{\sigma-r-1}(1-y)^{\delta-1}dy\\
&+\int_0^1 y^{\sigma-r-1}(1-y)^{\delta-1}y^{\lambda-2\sigma}(1-y)^{\rho-2\delta}dy\int_0^1 x^{\sigma-r-1}(1-x)^{\delta-1}dx\\
&+\int_0^1 x^{\lambda-2\sigma}(1-x)^{\rho-2\delta}x^{\sigma-r-1}(1-x)^{\delta-1}dx\int_0^1 y^{\sigma-r-1}(1-y)^{\delta-1}dy\\
&+\int_0^1 y^{\lambda-2\sigma}(1-y)^{\rho-2\delta}y^{\sigma-r-1}(1-y)^{\delta-1}dy\int_0^1 x^{\sigma-r-1}(1-x)^{\delta-1}dx\\
&\geqslant\int_0^1 x^{\sigma-r-1}(1-x)^{\delta-1}(1-x)^{\rho-2\delta}dx\int_0^1 y^{\sigma-r-1}(1-y)^{\delta-1}y^{\lambda-2\sigma}dy\\
&+\int_0^1 y^{\sigma-r-1}(1-y)^{\delta-1}(1-y)^{\rho-2\delta}dy\int_0^1 x^{\sigma-r-1}(1-x)^{\delta-1}x^{\lambda-2\sigma}dx\\
&+\int_0^1 x^{\sigma-r-1}(1-x)^{\delta-1}x^{\lambda-2\sigma}dx\int_0^1(1-y)^{\rho-2\delta}y^{\sigma-r-1}(1-y)^{\delta-1}dy\\
&+\int_0^1 y^{\sigma-r-1}(1-y)^{\delta-1}y^{\lambda-2\sigma}dy\int_0^1(1-x)^{\rho-2\delta}x^{\sigma-r-1}(1-x)^{\delta-1}dx,
\end{aligned}$$

implique

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 x^{\lambda-\sigma-r-1}(1-x)^{\rho-\delta-1}dx\int_0^1 y^{\sigma-r-1}(1-y)^{\delta-1}dy\\
&+\int_0^1 y^{\lambda-\sigma-r-1}(1-y)^{\rho-\delta-1}dy\int_0^1 x^{\sigma-r-1}(1-x)^{\delta-1}dx\\
&+\int_0^1 x^{\lambda-\sigma-r-1}(1-x)^{\rho-\delta-1}dx\int_0^1 y^{\sigma-r-1}(1-y)^{\delta-1}dy\\
&+\int_0^1 y^{\lambda-\sigma-r-1}(1-y)^{\rho-\delta-1}dy\int_0^1 x^{\sigma-r-1}(1-x)^{\delta-1}dx\\
&\geqslant\int_0^1 x^{\sigma-r-1}(1-x)^{\rho-\delta-1}dx\int_0^1 y^{\lambda-\sigma-r-1}(1-y)^{\delta-1}dy\\
&+\int_0^1 y^{\sigma-r-1}(1-y)^{\rho-\delta-1}dy\int_0^1 x^{\lambda-\sigma-r-1}(1-x)^{\delta-1}dx\\
&+\int_0^1 x^{\lambda-\sigma-r-1}(1-x)^{\delta-1}dx\int_0^1 y^{\sigma-r-1}(1-y)^{\rho-\delta-1}dy\\
&+\int_0^1 y^{\lambda-\sigma-r-1}(1-y)^{\delta-1}dy\int_0^1 x^{\sigma-r-1}(1-x)^{\rho-\delta-1}dx,
\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}
&\beta(\lambda-\sigma,\rho-\delta)E_\beta\left(\frac{1}{X_2^r}\right)\beta(\sigma,\delta)E_\alpha\left(\frac{1}{X_1^r}\right)\\
&+\beta(\lambda-\sigma,\rho-\delta)E_\alpha\left(\frac{1}{X_2^r}\right)\beta(\sigma,\delta)E_\beta\left(\frac{1}{X_1^r}\right)\\
&+\beta(\lambda-\sigma,\rho-\delta)E_\beta\left(\frac{1}{X_4^r}\right)\beta(\sigma,\delta)E_\alpha\left(\frac{1}{X_3^r}\right)\\
&+\beta(\lambda-\sigma,\rho-\delta)E_\alpha\left(\frac{1}{X_4^r}\right)\beta(\sigma,\delta)E_\beta\left(\frac{1}{X_3^r}\right)\\
&\geqslant \beta(\sigma,\rho-\delta)E_\beta\left(\frac{1}{X_6^r}\right)\beta(\lambda-\sigma,\delta)E_\alpha\left(\frac{1}{X_5^r}\right)\\
&+\beta(\sigma,\rho-\delta)E_\alpha\left(\frac{1}{X_6^r}\right)\beta(\lambda-\sigma,\delta)E_\beta\left(\frac{1}{X_5^r}\right)\\
&+\beta(\lambda-\sigma,\delta)E_\beta\left(\frac{1}{X_7^r}\right)\beta(\sigma,\rho-\delta)E_\alpha\left(\frac{1}{X_8^r}\right)\\
&+\beta(\lambda-\sigma,\delta)E_\alpha\left(\frac{1}{X_7^r}\right)\beta(\sigma,\rho-\delta)E_\beta\left(\frac{1}{X_8^r}\right),
\end{aligned}$$

donc

$$\frac{E_\alpha(\frac{1}{X_1^r})E_\beta(\frac{1}{X_2^r})+E_\beta(\frac{1}{X_1^r})E_\alpha(\frac{1}{X_2^r})+E_\alpha(\frac{1}{X_3^r})E_\beta(\frac{1}{X_4^r})+E_\beta(\frac{1}{X_3^r})E_\alpha(\frac{1}{X_4^r})}{E_\alpha(\frac{1}{X_5^r})E_\beta(\frac{1}{X_6^r})+E_\beta(\frac{1}{X_5^r})E_\alpha(\frac{1}{X_6^r})+E_\alpha(\frac{1}{X_7^r})E_\beta(\frac{1}{X_8^r})+E_\beta(\frac{1}{X_7^r})E_\alpha(\frac{1}{X_8^r})}$$
$$\geqslant \frac{\beta(\sigma,\rho-\delta)\beta(\lambda-\sigma,\delta)}{\beta(\lambda-\sigma,\rho-\delta)\beta(\sigma,\delta)},$$

d'après la relation entre les fonctions Gamma et Bêta (I.3), on obtient

$$\frac{E_\alpha(\frac{1}{X_1^r})E_\beta(\frac{1}{X_2^r})+E_\beta(\frac{1}{X_1^r})E_\alpha(\frac{1}{X_2^r})+E_\alpha(\frac{1}{X_3^r})E_\beta(\frac{1}{X_4^r})+E_\beta(\frac{1}{X_3^r})E_\alpha(\frac{1}{X_4^r})}{E_\alpha(\frac{1}{X_5^r})E_\beta(\frac{1}{X_6^r})+E_\beta(\frac{1}{X_5^r})E_\alpha(\frac{1}{X_6^r})+E_\alpha(\frac{1}{X_7^r})E_\beta(\frac{1}{X_8^r})+E_\beta(\frac{1}{X_7^r})E_\alpha(\frac{1}{X_8^r})}$$
$$\geqslant \frac{\Gamma(\sigma+\delta)\Gamma(\lambda+\rho-\sigma-\delta)}{\Gamma(\lambda+\delta-\sigma)\Gamma(\rho+\sigma-\delta)},$$

D'où le résultat.

Corollaire: III.2.10

Si $\alpha=\beta$, alors le théorème (III.2.5) devient le théorème (III.2.4).

III.3 Quelques estimations fractionnaires sur des variables aléatoires continues

III.3.3 La distribution Bêta

Nous commençons par prouver la propriété suivante qui généralise une propriété importante de la variance classique :

Théorème: III.3.1

Soit X une variable aléatoire continue ayant a f.d.p.$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^+$, et soit $w : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction continue positive. Si $\alpha > 0, \alpha = n + \delta, \delta \in (0,1)$, alors on a :

$$J_a^\alpha[wf(t)] = \frac{\Gamma(\delta)}{\Gamma(\alpha)} \left(t^n J_a^\delta[wf(t)] + \sum_{i=1}^{n} \left[(-1)^i C_n^i t^{n-i} M_{X^i,\delta,w}(t) \right] \right), \tag{III.20}$$

où $n = [\alpha - 1]$ et $a < t \leqslant b$.

Preuve: III.3.1

Pour tout $\alpha > 0, \alpha = n + \delta, \delta \in (0,1)$, on a

$$\begin{aligned} J_a^\alpha[wf(t)] &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n+\delta-1} w(\tau) f(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^n (t-\tau)^{\delta-1} w(\tau) f(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \sum_{i=0}^{n} (-\tau)^i C_n^i t^{n-i} (t-\tau)^{\delta-1} w(\tau) f(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \tau^i C_n^i t^{n-i} (t-\tau)^{\delta-1} w(\tau) f(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{i=0}^{n} \left[(-1)^i C_n^i t^{n-i} \int_a^t (t-\tau)^{\delta-1} \tau^i w(\tau) f(\tau) d\tau \right] \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (t^n \int_a^t (t-\tau)^{\delta-1} w(\tau) f(\tau) d\tau \\ &+ \sum_{i=1}^{n} [(-1)^i C_n^i t^{n-i} \int_a^t (t-\tau)^{\delta-1} \tau^i w(\tau) f(\tau) d\tau]). \end{aligned}$$

On obtient

$$J_a^\alpha[wf(t)] = \frac{\Gamma(\delta)}{\Gamma(\alpha)} \left(t^n J_a^\delta[wf(t)] + \sum_{i=1}^{n} \left[(-1)^i C_n^i t^{n-i} M_{X^i,\delta,w}(t) \right] \right).$$

le théorème (III.3.1) est ainsi prouvé

Théorème: III.3.2

Soit X une variable aléatoire continue ayant a f.d.p.f : $[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^+$, et soit $w : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction continue positive. Si $\alpha > 0, \alpha = n + \delta, \delta \in (0,1)$, alors on a :

$$\begin{aligned}\sigma^2_{X,\alpha,w}(t) &= E_{X^2,\alpha,w}(t) - 2E(X)E_{X,\alpha,w}(t)\\ &+ E^2(X)\frac{\Gamma(\delta)}{\Gamma(\alpha)}\left(t^n J_a^\delta[wf(t)] + \sum_{i=1}^{n}\left[(-1)^i C_n^i t^{n-i} M_{X^i,\delta,w}(t)\right]\right),\end{aligned} \tag{III.21}$$

où $n = [\alpha - 1]$ et $a < t \leqslant b$.

Preuve: III.3.2

Pour tout $\alpha > 0$ on peut écrire :

$$\begin{aligned}\sigma^2_{X,\alpha,w}(t) :&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1}(\tau - E(X))^2 w(\tau) f(\tau)d\tau\\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{n+\delta-1}(\tau - E(X))^2 w(\tau) f(\tau)d\tau,\end{aligned}$$

donc,

$$\sigma^2_{X,\alpha,w}(t) = E_{X^2,\alpha,w}(t) - 2E(X)E_{X,\alpha,w}(t) + E^2(X)J^\alpha wf(t). \tag{III.22}$$

D'autre part, d'après (III.20) on a

$$J^\alpha[wf(t] = \frac{\Gamma(\alpha-n)}{\Gamma(\alpha)}\left(t^n J_a^\delta[wf(t)] + \sum_{i=1}^{n}\left[(-1)^i C_n^i t^{n-i} M_{X^i,\delta,w}(t)\right]\right). \tag{III.23}$$

où $\alpha = n + \delta, n = [\alpha - 1], \delta \in (0,1)$.

Alors, en remplaçant (III.23) dans (III.22), on obtient (III.21).

Remarque: III.3.1

1- *En prenant $w(t) = 1$ sur $[a,b]$ dans le théorème ci-dessus, on obtient le théorème 3.3 de [13].*

2- *Soit $\alpha = 1$ et $w(t) = 1, t \in [a,b]$, on obtient $\sigma^2_{X,1,1} = E(X^2)E^2(X)$.*

Un autre résultat est le suivant :

Théorème: III.3.3

Soit X une variable aléatoire continue avec a f.d.p.$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^+$, et soit $w : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction continue positive. Si $\alpha > 0, \alpha = n+\delta, \delta \in (0,1)$, les estimations suivantes sont valables.

$$\begin{aligned}&\sigma^2_{X,\alpha,w}(t)\frac{\Gamma(\delta)}{\Gamma(\alpha)}\left(t^n J_a^\delta[wf(t)] + \sum_{i=1}^{n}\left[(-1)^i C_n^i t^{n-i} M_{X^i,\delta,w}(t)\right]\right) - \left(E_{X-E(X),\alpha,w}(t)\right)^2 \\ &\leqslant \|f\|^2_\infty J_a^\alpha w(t)\left[J_a^\alpha(t^2w(t)) - (J_a^\alpha(tw(t)))^2\right], \ f \in L_\infty[a,b],\end{aligned} \tag{III.24}$$

et

$$\begin{aligned}&\sigma^2_{X,\alpha,w}(t)\frac{\Gamma(\delta)}{\Gamma(\alpha)}\left(t^n J_a^\delta[wf(t)] + \sum_{i=1}^{n}\left[(-1)^i C_n^i t^{n-i} M_{X^i,\delta,w}(t)\right]\right) - \left(E_{X-E(X),\alpha,w}(t)\right)^2 \\ &\leqslant \frac{(t-a)^2\Gamma^2(\delta)}{2\Gamma^2(\alpha)}\left(t^n J_a^\delta[wf(t)] + \sum_{i=1}^{n}\left[(-1)^i C_n^i t^{n-i} M_{X^i,\delta,w}(t)\right]\right)^2.\end{aligned} \tag{III.25}$$

où $n = [\alpha - 1]$ et $a < t \leqslant b$.

Preuve: III.3.3

Pour prouver le théorème ci-dessus, nous utilisons le théorème 3.1 de [11]. Nous constatons que :

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\Gamma^2(\alpha)}\int_a^t\int_a^t (t-x)^{\alpha-1}(t-y)^{\alpha-1}(x-y)^2 p(x)p(y)dxdy \\ &= J_a^\alpha[p(t)]J_a^\alpha[p(t)(t-E(X))^2] - (J_a^\alpha[p(t)(t-E(X))])^2\end{aligned} \tag{III.26}$$

Alors, en prenant $p(t) = w(t)f(t), t \in [a,b]$ dans (III.26), on obtient que

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\Gamma^2(\alpha)}\int_a^t\int_a^t (t-x)^{\alpha-1}(t-y)^{\alpha-1}(x-y)^2 w(x)f(x)w(y)f(y)dxdy \\ &= J_a^\alpha[wf(t)]\sigma^2_{X,\alpha,w}(t) - \left(E_{X-E(X),\alpha,w}(t)\right)^2.\end{aligned} \tag{III.27}$$

Par l'hypothèse $f \in L_\infty([a,b])$, on obtient

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\Gamma^2(\alpha)}\int_a^t\int_a^t (t-x)^{\alpha-1}(t-y)^{\alpha-1}(x-y)^2 w(x)w(y)f(x)f(y)dxdy \\ &\leqslant \|f\|^2_\infty J_a^\alpha w(t)\left[J_a^\alpha[t^2w(t)] - \left(J_a^\alpha[tw(t)]^2\right)\right].\end{aligned} \tag{III.28}$$

Grâce à (III.27), (III.28), (III.23) et en appliquant le théorème (III.3.1), on obtient (III.24).

D'autre part,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\Gamma^2(\alpha)}\int_a^t\int_a^t (t-x)^{\alpha-1}(t-y)^{\alpha-1}w(x)w(y)(x-y)^2 f(x)f(y)dxdy \\
&\leqslant \sup_{x,y\in[,t]} |(x-y)|^2 \frac{1}{2\Gamma^2(\alpha)}\int_a^t\int_a^t (t-x)^{\alpha-1}(t-y)^{\alpha-1}w(x)w(y)(x-y)^2 f(x)f(y)dxdy \\
&\leqslant (t-a)^2\left(J_a^\alpha[wf(t)]\right)^2.
\end{aligned} \tag{III.29}$$

Donc, par (III.27) ,(III.29) et (III.23), on obtient (III.25).

Remarque: III.3.2

1) *Si on prend $w(t) = 1$ sur $[a, b]$ dans le théorème III.3.3, on obtient la première partie du théorème 3.5 de [13],*

2) *en prenant $\alpha = 1,\ w(t) = 1$ sur$[a, b]$, on obtient la première partie du théorème 1 dans [8].*

Dans ce qui suit, on démontre un théorème plus général.

Théorème: III.3.4

Supposons que X est une variable aléatoire continue avec a f.d.p.$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^+$, et soit $w : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction continue. Alors,

(I) *: Pour tout $\alpha > 0,\ \beta > 0,\ \alpha = n+\delta_1,\ \beta = m+\delta_2,\ \delta_1,\ \delta_2 \in (0,1),\ n = [\alpha-1],\ m = [\beta-1]$, on a :*

$$\begin{aligned}
&\sigma^2_{X,\beta,w}(t)\frac{\Gamma(\delta_1)}{\Gamma(\alpha)}\left(t^n J_a^{\delta_1}[wf(t)] + \sum_{i=1}^{n}\left[(-1)^i C_n^i t^{n-i} M_{X^i,\delta_1,w}(t)\right]\right) - \left(E_{X-E(X),\alpha,w}(t)\right)^2 \\
&+ \sigma^2_{X,\alpha,w}(t)\frac{\Gamma(\delta_1)}{\Gamma(\beta)}\left(t^n J_a^{\delta_2}[wf(t)] + \sum_{i=1}^{n}\left[(-1)^i C_n^i t^{n-i} M_{X^i,\delta_2,w}(t)\right]\right) - \left(E_{X-E(X),\alpha,w}(t)\right)^2 \\
&- 2E_{X-E(X),\alpha,w}(t)E_{X-E(X),\beta,w}(t) \\
&\leqslant \|f\|_\infty^2 \left(J_a^\alpha w(t) J_a^\beta (t^2 w(t))\right) + J_a^\beta w(t) J_a^\alpha (t^2 w(t)) - 2J_a^\alpha (tw(t)) J_a^\beta (tw(t)).
\end{aligned} \tag{III.30}$$

à condition que $f \in L_\infty([a,b],\ \mathbb{R}^+)$.

(II) *Aussi, l'estimation suivante*

$$\begin{aligned}
&\sigma^2_{X,\beta,w}(t)\frac{\Gamma(\delta_1)}{\Gamma(\alpha)}\left(t^n J_a^{\delta_1}[wf(t)] + \sum_{i=1}^{n}\left[(-1)^i C_n^i t^{n-i} M_{X^i,\delta_1,w}(t)\right]\right) - \left(E_{X-E(X),\alpha,w}(t)\right)^2 \\
&+ \sigma^2_{X,\alpha,w}(t)\frac{\Gamma(\delta_2)}{\Gamma(\beta)}\left(t^n J_a^{\delta_2}[wf(t)] + \sum_{i=1}^{n}\left[(-1)^i C_n^i t^{n-i} M_{X^i,\delta_2,w}(t)\right]\right) - \left(E_{X-E(X),\alpha,w}(t)\right)^2 \\
&- 2E_{X-E(X),\alpha,w}(t)E_{X-E(X),\beta,w}(t) \\
&\leqslant (t-a)^2 J_a^\alpha [wf(t)] J_a^\beta [wf(t)].
\end{aligned} \tag{III.31}$$

est également valable pour tout $\alpha > 0,\ \beta > 0,\ \alpha = n+\delta_1,\ \beta = m+\delta_2,\ \delta_1,\ \delta_2 \in (0,1)$ et $n = [\alpha-1],\ m = [\beta-1]$.

Preuve: III.3.4

On a (voir [11]) :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t\int_a^t (t-x)^{\alpha-1}(t-y)^{\beta-1}(x-y)^2 p(x)p(y)dxdy \\
&= J_a^\alpha[wf(t)]J_a^\beta[wf(t)(t-E(X))^2] + J_a^\beta[wf(t)]J_a^\alpha[wf(t)(t-E(X))^2] \\
&- 2J_a^\alpha[wf(t)(t-E(X))]J_a^\beta[wf(t)(t-E(X))].
\end{aligned} \tag{III.32}$$

Dans (III.32), si on prend $p = wf$, on obtient

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t\int_a^t(t-x)^{\alpha-1}(t-y)^{\beta-1}(x-y)^2w(x)w(y)f(x)f(y)dxdy\\&=J_a^\alpha[wf(t)]\sigma^2_{X,\beta,w}(t)+J_a^\beta[wf(t)]\sigma^2_{X,\alpha,w}(t)-2E_{X-E(X),\alpha,w}(t)E_{X-E(X),\beta,w}(t).\end{aligned}\tag{III.33}$$

Par contre, il est clair que

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t\int_a^t(t-x)^{\alpha-1}(t-y)^{\beta-1}(x-y)^2w(x)w(y)f(x)f(y)dxdy\\&\leqslant\|f\|_\infty^2\left[J_a^\alpha[w(t)]J_a^\beta[t^2w(t)]+J_a^\beta[w(t)]J_a^\alpha[t^2w(t)]-2J_a^\alpha[tw(t)]J_a^\beta[tw(t)]\right].\end{aligned}\tag{III.34}$$

Par conséquent, par (III.33), (III.34) et (III.21), on obtient (III.30).

Pour la deuxième inégalité du théorème (III.3.3), on observe que

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t\int_a^t(t-x)^{\alpha-1}(t-y)^{\beta-1}(x-y)^2w(x)w(y)f(x)f(y)dxdy\\&\leqslant\sup_{x,y\in[a,t]}|(x-y)|^2\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t\int_a^t(t-x)^{\alpha-1}(t-y)^{\beta-1}(x-y)^2w(x)w(y)f(x)f(y)dxdy\\&\leqslant(t-a)^2J_a^\alpha[wf(t)]J_a^\beta[wf(t)].\end{aligned}\tag{III.35}$$

Donc, en appliquant le théorème (III.3.1) et grâce à (III.33) et (III.35), on obtient (III.31).

Aussi, nous présentons au lecteur l'estimation suivante.

Théorème: III.3.5

Soient f les f.d.p de X sur $[a,\ b]$ et $w : [a,\ b]\longrightarrow\mathbb{R}^+$. Si $\alpha>0$, $\alpha=n+\delta,\delta\in(0,1)$ et $n=[\alpha-1]$, l'inégalité fractionnaire suivante est vraie :

$$\begin{aligned}&\sigma^2_{X,\alpha,w}(t)J_a^\alpha[wf(t)]-(E_{X-E(x),\alpha,w}(t))^2\\&\leqslant\frac{(t-a)^2\Gamma^2(\delta)}{4\Gamma^2(\alpha)}\left(t^nJ_a^\delta[wf(t)]+\sum_{i=1}^n\left[(-1)^iC_n^it^{n-i}M_{X^i,\delta,w}(t)\right]\right)^2.\end{aligned}\tag{III.36}$$

Preuve: III.3.5

Dans [11], il a été prouvé que

$$\begin{aligned}&0\leqslant J_a^\alpha[p(t)]J_a^\alpha[p(t)(t-E(x))^2]-(J_a^\alpha[p(t)(t-E(x))])^2\\&\leqslant\frac{1}{4}(t-a)^2(J_a^\alpha[p(t)])^2.\end{aligned}\tag{III.37}$$

Donc, en prenant $p(t) = wf(t)$ dans (III.37), on observe que

$$J_a^\alpha[wf(t)]\sigma^2_{X,\alpha,w}(t) - (E_{X-E(X),\alpha,w}(t))^2 \leqslant \frac{1}{4}(t-a)^2(J_a^\alpha[wf(t)])^2. \tag{III.38}$$

Grâce au théorème (III.3.1) et par la relation (III.23), on obtient (III.36).

On prouve aussi :

Théorème: III.3.6

Soit X une variable aléatoire continue ayant a f.d.p. $f : [a,\ b] \longrightarrow \mathbb{R}^+, w : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^+$.

Alors, pour tout $\alpha > 0$, les deux inégalités suivantes sont vérifiées :

$$\begin{aligned} &J_a^\alpha[wf(t)]E_{X^{r-1}(X-E(X)),\alpha,w}(t) - (E_{X-E(X),\alpha,w}(t))M_{X^{r-1},\alpha,w}(t) \\ &\leq \|f\|^2_\infty[J_a^\alpha[w(t)]J_a^\alpha[t^r w(t)] - J_a^\alpha[tw(t)]J_a^\alpha[t^{r-1}w(t)]], \end{aligned} \tag{III.39}$$

et

$$\begin{aligned} &J_a^\alpha[wf(t)]E_{X^{r-1}(X-E(X)),\alpha,w}(t) - (E_{X-E(X),\alpha,w}(t))M_{X^{r-1},\alpha,w}(t) \\ &\leq \frac{(t-a)}{2}(t^{r-1} - a^{r-1})(J_a^\alpha[wf(t)])^2 \end{aligned} \tag{III.40}$$

Preuve: III.3.6

Nous avons

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\Gamma^2(\alpha)}\int_a^t\int_a^t (t-x)^{\alpha-1}(t-y)^{\alpha-1}p(x)p(y)(g(x)-g(y))(h(x)-h(y))dxdy \\ &= 2J_a^\alpha[p(t)]J_a^\alpha[pgh(t)] - 2(J_a^\alpha[pg(t)]J_a^\alpha[ph(t)]). \end{aligned} \tag{III.41}$$

En prenant $p = wf$, $g(t) = t - E(X)$ et $h(t) = t^{r-1}$, on obtient

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\Gamma^2(\alpha)}\int_a^t\int_a^t (t-x)^{\alpha-1}(t-y)^{\alpha-1}(x-y)(x^{r-1}-y^{r-1})w(x)w(y)f(x)f(y)dxdy \\ &= 2J_a^\alpha[wf(t)]E_{X^{r-1}(X-E(X)),\alpha,w}(t) - 2(E_{X-E(X),\alpha,w}(t))M_{X^{r-1},\alpha,w}(t) \end{aligned} \tag{III.42}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\Gamma^2(\alpha)}\int_a^t\int_a^t (t-x)^{\alpha-1}(t-y)^{\alpha-1}(x-y)(x^{r-1}-y^{r-1})w(x)w(y)f(x)f(y)dxdy \\ &\leq 2\|f\|^2_\infty(J_a^\alpha[w(t)]J_a^\alpha[t^r w(t)] - J_a^\alpha[tw(t)]J_a^\alpha[t^{r-1}w(t)]). \end{aligned} \tag{III.43}$$

Combinant (III.42), (III.43) et (III.23), on obtient (III.39).

Pour obtenir (III.40), il suffit de voir que

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\Gamma^2(\alpha)}\int_a^t\int_a^t(t-x)^{\alpha-1}(t-y)^{\alpha-1}(x-y)(x^{r-1}-y^{r-1})w(x)w(y)f(x)f(y)dxdy\\&\leq(t-a)(t^{r-1}-a^{r-1})(J_a^\alpha[wf(t)])^2,\end{aligned}\tag{III.44}$$

et combiner (III.42), (III.44) et (III.23).

Remarque: III.3.3

Prise $\alpha=1$; *on obtient le théorème* 3.1 *de* [9].

Théorème: III.3.7

Soit X *une variable aléatoire continue ayant a f.d.p.* $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}^+, w:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}^+$. *Ensuite nous avons :*

(I) *: Pour tout* $\alpha>0,\ \beta>0,\ n=[\alpha-1],\ m=[\beta-1]$

$$\begin{aligned}&J_a^\alpha[wf(t)]E_{X^{r-1}(X-E(X)),\beta,w}(t)+J_a^\beta[wf(t)]E_{X^{r-1}(X-E(X)),\alpha,w}(t)\\&-E_{X,\alpha,w}(t)M_{X^{r-1},\beta,w}(t)-E_{X,\beta,w}(t)M_{X^{r-1},\alpha,w}(t)\\&\leq\|f\|_\infty^2[J_a^\alpha[w(t)]J_a^\beta[t^rw(t)]+J_a^\beta[w(t)]J_a^\alpha[t^rw(t)]\\&-J_a^\alpha[tw(t)]J_a^\beta[t^{r-1}w(t)]-J_a^\beta[tw(t)]J_a^\alpha[t^{r-1}w(t)]],\end{aligned}\tag{III.45}$$

où $f\in L_\infty[a,b]$.

(II) *: L'inégalité*

$$\begin{aligned}&J_a^\alpha[wf(t)]E_{X^{r-1}(X-E(X)),\beta,w}(t)+J_a^\beta[wf(t)]E_{X^{r-1}(X-E(X)),\alpha,w}(t)\\&-E_{X,\alpha,w}(t)M_{X^{r-1},\beta,w}(t)-E_{X,\beta,w}(t)M_{X^{r-1},\alpha,w}(t)\\&\leq\frac{(t-a)}{2}(t^{r-1}-a^{r-1})J_a^\alpha[wf(t)]J_a^\beta[wf(t)].\end{aligned}\tag{III.46}$$

vaut pour tout $\alpha>0,\ \beta>0,\ n=[\alpha-1],\ m=[\beta-1]$.

Preuve: III.3.7

Dans [11], il a été prouvé que

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t(t-x)^{\alpha-1}(t-y)^{\beta-1}p(x)p(y)(g(x)-g(y))(h(x)-h(y))dxdy\\&=J_a^\alpha[p(t)]J_a^\beta[pgh(t)]+J_a^\beta[p(t)]J_a^\alpha[pgh(t)]\\&-(J_a^\alpha[pg(t)]J_a^\beta[ph(t)])-(J_a^\beta[pg(t)]J_a^\alpha[ph(t)]),\end{aligned}\tag{III.47}$$

dans (III.47), on prend $p = w\, f$, $g(t) = t - E(X)$, $h(t) = t^{r-1}$. On obtient

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t (t-x)^{\alpha-1}(t-y)^{\beta-1}(x-y)(x^{r-1}-y^{r-1})w(x)w(y)f(x)f(y)dxdy\\&= J_a^{\alpha}[wf(t)]E_{X^{r-1}(X-E(X)),\beta,w}(t) + J_a^{\beta}[wf(t)]E_{X^{r-1}(X-E(X)),\alpha,w}(t)\\&- E_{X,\alpha,w}(t)M_{X^{r-1},\beta,w}(t) - E_{X,\beta,w}(t)M_{X^{r-1},\alpha,w}(t).\end{aligned} \tag{III.48}$$

Par contre, il est clair que

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t (t-x)^{\alpha-1}(t-y)^{\beta-1}(x-y)(x^{r-1}-y^{r-1})w(x)w(y)f(x)f(y)dxdy\\&\leq \|f\|_\infty^2[J_a^{\alpha}[w(t)]J_a^{\beta}[t^r w(t)] + J_a^{\beta}[w(t)]J_a^{\alpha}[t^r w(t)]\\&- J_a^{\alpha}[tw(t)]J_a^{\beta}[t^{r-1}w(t)] - J_a^{\beta}[tw(t)]J_a^{\alpha}[t^{r-1}w(t)]].\end{aligned} \tag{III.49}$$

Par conséquent, d'après (III.48), (III.49) et (III.23), on déduit (III.45).

Pour prouver la deuxième partie, on observe que

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t (t-x)^{\alpha-1}(t-y)^{\beta-1}w(x)w(y)(x-y)(x^{r-1}-y^{r-1})f(x)f(y)dxdy\\&= (t-a)(t^{r-1}-a^{r-1})J_a^{\alpha}[wf(t)]J_a^{\beta}[wf(t)].\end{aligned} \tag{III.50}$$

Ensuite, on prend en compte (III.48) et (III.50). On obtient (III.46).

III.3.3 La fonction d'attente w-pondérée s-fractionnaire

Considérons maintenant une fonction continue positive w définie sur [a ;b]. On rappelle les wconcepts :

Définition: III.3.1

La fonction d'espérance w-pondérée s-fractionnelle d'ordre $\alpha > 0$, pour une variable aléatoire X avec une fonction de densité de probabilité positive f définie sur [a, b] est définie comme

$$\begin{aligned}{}^{s}E_{X,\alpha,w}(t) &:= {}^{s}J_a^{\alpha}[twf(t)]\\&= \frac{(s+1)^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t^{s+1}-\tau^{s+1})^{\alpha-1}\tau^{s+1}w(\tau)f(\tau)d\tau,\ a < t \leq b,\end{aligned} \tag{III.51}$$

où $w : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ est une fonction continue positive et $s \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

Définition: III.3.2

La fonction d'espérance w-pondérée s-fractionnelle d'ordre $\alpha > 0$, pour une variable aléatoire X-E(X) avec une fonction de densité de probabilité positive f définie sur [a, b] est définie comme

$$\begin{aligned} {}^{s}E_{X-E(X),\alpha,w}(t) :=& \ {}^{s}J_a^{\alpha}[(t-E(X))wf(t)] \\ =& \frac{(s+1)^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t^{s+1}-\tau^{s+1})^{\alpha-1}\tau^s(\tau-E(X))w(\tau)f(\tau)d\tau, \end{aligned} \tag{III.52}$$

où $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ est le (f.d.p) de X et $s \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$, $a < t \leq b$.

Maintenant, nous introduisons la fonction de variance s-fractionnelle et la variance comme suit :

Définition: III.3.3

La fonction de variance s-fractionnelle w-pondérée d'ordre $\alpha > 0$ pour une variable aléatoire X ayant un f.d.p positif : f sur [a, b] est définie comme

$$\begin{aligned} {}^{s}\sigma^2_{X,\alpha,w}(t) :=& \ {}^{s}E_{(X-E(X))^2,\alpha,w}(t) :=^{s} J_a^{\alpha}[(t-E(X))^2wf(t)] \\ =& \frac{(s+1)^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t^{s+1}-\tau^{s+1})^{\alpha-1}\tau^s(\tau-E(X))^2w(\tau)f(\tau)d\tau, \end{aligned} \tag{III.53}$$

où $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ est le (f.d.p) de X et $s \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$, $a < t \leq b$.

Définition: III.3.4

La fonction de moment w-pondérée s-fractionnaire des ordres $r > 0$, $\alpha > 0$ pour une variable aléatoire continue X ayant un f.d.p : f défini sur [a, b] est défini comme

$$\begin{aligned} {}^{s}M_{X^r,\alpha,w}(t) :=& \ {}^{s}J_a^{\alpha}[t^rwf(t)] \\ =& \frac{(s+1)^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t^{s+1}-\tau^{s+1})^{\alpha-1}\tau^{s+r}w(\tau)f(\tau)d\tau, \end{aligned} \tag{III.54}$$

où $s \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$, $a < t \leq b$.

Nous commençons par prouver la propriété suivante qui généralise une propriété importante de la variance classique :

Théorème: III.3.8

Soit X une variable aléatoire continue ayant a f.d.p.$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^+$, et soit $w : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction continue positive. Si $\alpha > 0,\ \alpha = n+\delta,\ \delta \in (0,1)$, alors on a :

$$ {}^{s}J_a^{\alpha}[wf(t)] = \frac{\Gamma(\delta)}{\Gamma(\alpha)(s+1)^n} \sum_{i=0}^{n} \left[(-1)^i C_n^i t^{(s+1)(n-i)}\ {}^{s}M_{X^{(s+1)i},\delta,w}(t)\right], \tag{III.55}$$

où $n = [\alpha - 1],\ s \in \mathbb{R}\backslash\{-1\},\ a < t \leq b$.

Preuve: III.3.8

Pour tout $\alpha > 0,\ \alpha = n+\delta$ on a

$$\begin{aligned} {}^{s}J_a^{\alpha}[wf(t)] &= \frac{(s+1)^{1-(n+\delta)}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t^{s+1} - \tau^{s+1})^{n+\delta-1}\tau^s w(\tau)f(\tau)d\tau \\ &= \frac{(s+1)^{1-(n+\delta)}}{\Gamma(\alpha)} \sum_{i=0}^{n} \left[(-1)^i C_n^i t^{(s+1)(n-i)} \int_a^t (t^{s+1} - \tau^{s+1})^{\delta-1}\tau^s \tau^{(s+1)i} w(\tau)f(\tau)d\tau\right]. \end{aligned} \tag{III.56}$$

Grâce à la définition (III.3.4), nous obtenir

$$ {}^{s}J_a^{\alpha}[f(t)] = \frac{\Gamma(\alpha-n)(s+1)^n}{\Gamma(\alpha)} \sum_{i=0}^{n} \left[(-1)^i C_n^i t^{(s+1)(n-i)}\ {}^{s}M_{X^{(s+1)i},\delta,w}(t)\right]. \tag{III.57}$$

Le théorème (III.3.8) est ainsi prouvé.

Théorème: III.3.9

Soit X une variable aléatoire continue ayant a f.d.p.$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^+$, et soit $w : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction continue positive. Si $\alpha > 0,\ n = [\alpha]$, alors on a :

$$\begin{aligned} {}^{s}\sigma^2_{X,\alpha,w} =&\ {}^{s}E_{X^2,\alpha,w} - 2E(X)\ {}^{s}E_{X,\alpha,w} \\ &+ E^2(X)\frac{\Gamma(\alpha-n)(s+1)^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \sum_{i=0}^{n} \left[(-1)^i C_n^i b^{n-i}\ {}^{s}M_{X^i,\alpha-n,w}\right]. \end{aligned} \tag{III.58}$$

Preuve: III.3.9

Par Définition (III.53), on peut écrire :

$$ {}^{s}\sigma^2_{X,\alpha,w} = \frac{(s+1)^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b (b^{s+1} - \tau^{s+1})^{\alpha-1}\tau^s(\tau - E(X))^2 w(\tau)f(\tau)d\tau,\ \alpha > 0. \tag{III.59}$$

$$ {}^{s}\sigma^2_{X,\alpha,w} = \frac{(s+1)^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b (b^{s+1} - \tau^{s+1})^{n+\delta-1}\tau^s(\tau - E(X))^2 w(\tau)f(\tau)d\tau,\ \alpha > 0.$$

D'où

$$ {}^{s}\sigma^{2}_{X,\alpha,w} = {}^{s}E_{X^{2},\alpha,w} - 2E(X)\ {}^{s}E_{X,\alpha,w} + E^{2}(X)\ {}^{s}J^{\alpha}_{a}wf(b). \tag{III.60}$$

D'autre part, on a

$$ {}^{s}J^{\alpha}_{a}wf(b) = \frac{(s+1)^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \sum_{i=0}^{n} \left[(-1)^{i} C^{i}_{n} b^{n-i} \int_{a}^{b} (b^{s+1} - \tau^{s+1})^{\delta(\alpha-1)} \tau^{s+i} wf(\tau) d\tau \right], \tag{III.61}$$

où $\alpha = n + \delta,\ n = [\alpha],\ \delta \in (0,1)$.

La définition (III.3.4) permet d'écrire

$$ {}^{s}J^{\alpha}_{a}wf(b) = \frac{\Gamma(\alpha-n)(s+1)^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \sum_{i=0}^{n} \left[(-1)^{i} C^{i}_{n} b^{n-i}\ {}^{s}M_{X^{i},\alpha-n,w} \right]. \tag{III.62}$$

Alors, en utilisant (III.60) et (III.62), on obtient (III.58).

Bibliographie

[1] **A.A. Kilbas, Hari M. Srivastava, and Juan J. Trujillo,** Theory and Applications of Fractional Differential Equations. North-Holland Mathematics Studies, 204. Elsevier Science B.V., Amsterdam, 2006.

[2] **A. Rehman, S. Mubeen,** Some inequalities involving k-gamma and k-beta functions with applications II, J. Inequal. Appl. 2014, 445 (2014).

[3] **Benhamida Ouafaa,** Problème Aux Limites Pour Les Equations Différentielles Fractionnaires, These de doctorat **LMD**, Universite **Abdelhamid IBN BADIS** Mostaganem, 2019-2020, pages 8 - 9 -11.

[4] **D. S. Mitrinovic,J.E.Pecaric,A.M.Fink,** Classical and New Inequalities in Analysis, Kluwer Academic Publishers (1993).

[5] **I. Podlubny,** Fractional Differential Equation, Academic Press, San Diego, 1999.

[6] **G. Rehman, S.Mubeen, A. Rehman, M.Naz,**On k-Gamma, k-beta distributions and Moment generating Functions, J. Prob. Stat.,2014, Article ID 982013, 6 pages (2014).

[7] **N.S. Barnett, P. Cerone, S.S. Dragomir and J. Roumeliotis** Some inequal

[8] **N.S. Barnett, P. Cerone, S.S. Dragomir and J. Roumeliotis :** Some inequal-ities for the dispersion of a random variable whose PDF is dened on a nite interval. J. Inequal. Pure Appl. Math., 2(1), (2001), 1-18.

[9] **P. Kumar :** Moment inequalities of a random variable dened over a nite interval. J. Inequal. Pure Appl. Math., Vol. 3 Iss. 3, Art. 41 (2002), 1-24.

[10] **S.G. Samko, A.A. Kilbas, O. I. Marichev :**Fractional Integrals and Derivatives Theory and Application. Gordan and Breach Science, New York, 1993.

[11] **Z. Dahmani**. Fractional integral inequalities for continuous random variables. Malaya J. Mat., 2(2), (2014), 172-179.

[12] **Z. Dahmani, O. Mechouar, S. Brahami :** Certain inequalities related to the Chebyshevs functional involving Riemann-Liouville operator. Bulletin of Mathematical Analysis and Applications, 3(4), (2011), 38-44.

[13] **Z. Dahmani**. New applications of fractional calculus on probabilistic random variables. Acta Math Univ. Commen., In press, (2016).