
RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



Faculté de la sciences et de la technologie
Université Djilali Bounaama Khemis Miliana
Département de Mathématiques

Mémoire de fin d'étude
Présenté pour l'obtention du diplôme de
Master en Mathématiques
Spécialité : Analyse Mathématique et Applications

Quelques applications sur les produits infinis

Présenté par : Cherfaoui Nabil

Soutenue le : ../07/2022

Jury

M O. Benniche Président
M A. Krelifa Examineur
M M. Houasni Examineur
M M. Karras Encadrant

Remerciements

Ce mémoire est le fruit du grand travail et d'efforts fournis , malgré les difficultés et les circonstances rencontrées durant le travail, les études et même dans la vie personnelle, je l'ai terminé.

En premier lieu, je voudrais remercier «Dieu» le Tout-Puissant de m'avoir aidé à réussir et de m'avoir donné le courage et la patience nécessaires pour mener à bien ce travail.

Tout d'abord, je tiens à remercier Monsieur **Meselem KARRAS**, pour ses conseils, ses opinions, sa disponibilité. Je lui adresse les plus grands remerciement et gratitude pour la qualité de son encadrement.

Je remercie ensuite, le président du jury Dr. **O. Benniche**, pour avoir accepté d'être président de jury de ce mémoire et les membres du jury : Dr. **A. krelifa**, et Dr. **M. Houasni** qui m'ont fait l'honneur de bien vouloir étudier avec attention mon travail et pour avoir accepté d'examiner ce mémoire. Je leurs exprime ma profonde gratitude.

Je tiens également à remercier tous nos enseignants du département mathématiques et informatique, qui ont contribué à notre formation durant ces deux années de master et sans oublier un remerciement à tous ceux qui m'ont soutenu.

CHERFAOUI

Dédicaces

Je dédie ce travail à :

Ma très chère mère, Mon cher père,

Mes très chers frères et soeurs,

Toute ma famille CHERFAOUI,

Et tous mes amis,

Et toute la promotion de la spécialité Analyse Mathématique et Applications(2022).

Notations

1. \mathbb{N} , l'ensemble des entiers naturels (\mathbb{N}^* désigne les entiers naturels non nuls).
 2. \mathbb{Z} , l'ensemble des entiers relatifs.
 3. \mathbb{R} , l'ensemble des nombres réels.
 4. \mathbb{C} , l'ensemble des nombres complexes tels que :
$$\mathbb{C} = \{\sigma + it : (\sigma, t) \in \mathbb{R}^2\}.$$
 5. $s = \sigma + it$, désigne un nombre complexes, tel que : σ est la partie réelle du nombre complexe s , t est la partie imaginaire du nombre complexe s .
 6. $\prod_{i=1}^k \alpha_i = \alpha_1 \times \alpha_2 \times \cdots \times \alpha_k$, représente le produit étendu sur k objets.
 7. Le symbole $\prod_{p \leq x}$ représente un produit étendus à tous les nombres premiers $p \in [2, x]$.
De plus $\prod_p = \lim_{x \rightarrow +\infty} \prod_{p \leq x}$.
 8. $\|\cdot\|$: désigne une norme.
 9. Si m et n sont deux entier, (m, n) désignera leur pgcd.
 10. $d \mid n$ signifie d divise n .
 11. $p^\alpha \parallel n$ signifie $p^\alpha \mid n$ et $p^{\alpha+1} \nmid n$.
-

Résumé

Dans ce travail, nous étudions la définition du produit infini de suites et de suites de fonctions, où nous étudions les conditions nécessaires et suffisantes de convergence, ainsi que leur relation avec la convergence des séries numériques et séries de fonctions, en donnant quelques exemples et applications.

Abstract

In this work, we study the definition of the infinite product of sequences and function sequences, where we study the necessary and sufficient conditions of convergence, as well as their relation with the convergence of numerical series and function series, giving some examples and applications.

Table des matières

Introduction	6
1 Préliminaires	7
1.1 Définitions	7
1.1.1 Convergence uniforme d'une suite de fonctions :	7
2 Convergence du produit infini	11
2.1 Introduction	11
2.2 Convergence d'un produit infini	13
3 Produits infinis de suites de fonctions	22
3.1 Théorème de Weierstrass	22
4 Application sur les produits infinis	31
4.1 L'expression de $\frac{\sin x}{x}$ sous forme produit infini	31
4.2 Théorème de factorisation de Weierstrass	36
4.2.1 Produit Eulerien	40
4.2.2 Formule du produit Eulérien	42
4.2.3 Exemples	42
Bibliographie	44

Introduction

De nombreuses fonctions peuvent être représentées par des séries infinies ou des produits infinis, par exemple la fonction \exp , est représentée par une série infinie dans le disque ouvert $|z| < 1$

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!},$$

et la fonction \sin par le produit infini, dû à Euler

$$\forall x \in]-\pi, \pi[, \quad \sin x = x \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right).$$

La théorie des produits infinis est liée de près à celle des séries infinies, en effet, le test de la convergence de tels de ces produits se réduira en fait au test de la convergence de certaines séries infinies.

Le but de ce travail est de donner la définition de base et quelques théorèmes d'un produit infini et une étude générale de la convergence de ces produits.

Ce mémoire est divisé en quatre chapitres, dans le premier chapitre nous présenterons quelques définitions et théorèmes de base à utiliser par la suite, et le deuxième chapitre contient la définition d'un produit infini et quelques règles de convergence. Le troisième chapitre présente le produit infini de suite de fonctions et dans le dernier, on donne quelques applications.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Définitions

1.1.1 Convergence uniforme d'une suite de fonctions :

Définition 1.1 Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de I dans \mathbb{R} , et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ sa limite simple. On dit que $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur I , si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta \in \mathbb{N} : (n \geq \eta \implies \forall x \in I, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)$$

i.e.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta \in \mathbb{N} : \left(n \geq \eta \implies \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \right)$$

ou encore

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta \in \mathbb{N} : (n \geq \eta \implies \forall x \in I, \|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon)$$

Ce qui signifie

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$$

Remarque 1.1 La convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_n$ vers f signifie qu'à partir d'un certain rang, la distance entre les fonctions f_n et la fonction f tendra vers 0. Ou bien les graphes des fonctions f_n s'insèrent dans une bande de largeur 2ε autour du graphe de f (2ε est l'écart maximal autorisé pour la distance entre $f_n(x)$ et $f(x)$).

Exemple 1.1 La suite de fonctions $(f_n)_n$ telles que

$$\begin{aligned} f_n & : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto x^n \end{aligned}$$

converge simplement vers la fonction f telle que

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{si } x \in [0, 1[. \end{cases}$$

Donc

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= \begin{cases} 0 & \text{si } x = 1 \\ x^n & \text{si } x \in [0, 1[\end{cases} \\ \implies \sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - f(x)| &= 1 \not\rightarrow 0 \end{aligned}$$

Ce qui prouve que la suite ne converge pas uniformément vers la fonction nulle.

Définition 1.2 Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions complexes, et f sa limite simple dans un ouvert $U \subset \mathbb{C}$. On dit que $(f_n)_n$ converge uniformément vers f , si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta \in \mathbb{N} : (n \geq \eta \implies \forall z \in U, |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon.)$$

Définition 1.3 On dit que la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n(z)$ converge normalement sur U si la série (numérique) $\sum_{n \geq 0} \|f_n\|_\infty$ est convergente.

Proposition 1.1 ([16]) Si la série $\sum_{n \geq 0} f_n(z)$ converge normalement sur U , alors la suite des sommes partielles

$$S_N(z) = \sum_{n=0}^N f_n(z),$$

Converge uniformément vers une fonction f sur U .

Définition 1.4 On dit qu'une partie A d'un espace métrique est compacte si toute suite de A possède une suite extraite convergente.

Proposition 1.2 Si A est une partie compacte de (E, d) , Alors A est à la fois fermée et bornée.

- 1) $[0, 1]$ est compact mais $]0, 1]$ et \mathbb{R} ne sont pas compacts.
- 2) Toute partie finie d'un espace métrique est compacte.
- 3) Les parties compactes dans \mathbb{C} ou \mathbb{R} sont les parties fermées bornées.

Définition 1.5 (Convergence normale) Soient (f_n) une suite de fonctions de $U \subset \mathbb{C}$ et

$$m_n = \sup_{z \in U} |f_n(z)| \text{ avec } m_n \in \mathbb{R}_+ \text{ ou } m_n = +\infty.$$

On dit que la série de fonctions $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est normalement convergente sur U lorsque la série numérique $\sum_{n=0}^{+\infty} m_n$ est convergente.

Théorème 1.1 (Un critère de convergence normale) Soit (f_n) une suite de fonctions de $U \subset \mathbb{C}$. La série $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge normalement sur U si et seulement si, il existe

une série numérique à termes positifs convergente $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in U, |f_n(z)| \leq a_n.$$

Preuve. Si la série $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est normalement convergente, il suffit de poser $a_n = m_n$ pour obtenir une série numérique convenable.

Réciproquement. Par hypothèse, la série numérique $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ est convergente et

$$\forall z \in U, |f_n(z)| \leq a_n,$$

donc

$$m_n = \sup_{z \in U} |f_n(z)| \leq a_n.$$

La série $\sum_{n=0}^{+\infty} m_n$ est alors convergente (théorème de comparaison des séries à termes positifs), donc la série $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est normalement convergente. ■

Exemple 1.2 Soit

$$\begin{aligned} f_n & : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \\ z & \mapsto \frac{z^n}{n!} \end{aligned}$$

Étudions la convergence de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$.

Soit $B_R = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq R\}$. Alors, pour tout z de B_R , $|f_n(z)| \leq \frac{R^n}{n!}$.

Comme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{R^n}{n!}$ converge vers $\exp(R)$, on en déduit que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ est normalement convergente sur B_R , donc uniformément convergente sur B_R .

Chapitre 2

Convergence du produit infini

2.1 Introduction

Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite de nombres complexes. Un produit infini de cette suite est défini par

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 a_2 a_3 \cdots \quad (2.1)$$

On remarque que la convergence du produit infini (2.1) implique que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$. Sinon, le produit divergera. Pour cela, on écrira $a_n = 1 + b_n$. Donc le produit infini (2.1) est convergent si $\lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^N (1 + b_n)$ existe dans \mathbb{C} . Si $1 + b_n = 0$ pour un certain entier n , alors on a la convergence triviale vers une limite $l = 0$. Si le produit infini converge vers une limite $l \neq 0$, alors on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + b_n) = 1 \text{ et alors } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$$

car

$$1 + b_n = \frac{\prod_{n=1}^N (1 + b_n)}{\prod_{n=1}^{N-1} (1 + b_n)}$$

Donc pour la convergence du (2.1) dans \mathbb{C}^* on a $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ est une condition nécessaire. D'autre part, on a

$$\log \prod_{n=1}^N (1 + b_n) = \sum_{n=1}^N \log (1 + b_n)$$

et

$$\log (1 + b_n) \approx b_n$$

si $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$. Donc

$$\log \prod_{n=1}^{\infty} (1 + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \log(1 + b_n) \approx \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

La question qui se pose, est ce que la convergence d'un produit infini $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + b_n)$ équivaut

à la convergence de la série infinie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$? L'exemple suivant montre que n'est pas juste.

En effet, soit

$$b_n = -\frac{1}{n+1}$$

donc

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} = -\infty$$

mais

$$\begin{aligned} \prod_{n=1}^{\infty} (1 + b_n) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^N \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^N \frac{n}{n+1} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+1} = 0. \end{aligned}$$

Encore cet exemple montre qu'un produit infini de nombres complexes soit nul, mais aucun facteur de ce produit soit nul.

Exemple 2.1 Soit le produit infini

$$\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right).$$

Si on pose

$$P_n = \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right),$$

alors on a :

$$\begin{aligned} P_n &= \prod_{k=2}^n \frac{k^2 - 1}{k^2} = \prod_{k=2}^n \frac{(k-1)(k+1)}{k^2} \\ &= \frac{1.3}{2.2} \times \frac{2.4}{3.3} \times \frac{3.5}{4.4} \times \dots \times \frac{(n-3)(n-1)}{(n-2)(n-2)} \times \frac{(n-2)n}{(n-1)(n-1)} \frac{(n-1)(n+1)}{n.n} \\ &= \frac{n+1}{2n}. \end{aligned}$$

Donc

$$\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P_n = \frac{1}{2}.$$

Remarque 2.1 On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $1 + x \leq e^x$. Alors pour une suite complexe $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ on a

$$\prod_{i=0}^n (1 + |a_i|) \leq \exp \left(\sum_{i=0}^n |a_i| \right)$$

Encore on a

$$\left| \prod_{i=0}^n (1 + a_i) - 1 \right| \leq \prod_{i=0}^n (1 + |a_i|) - 1$$

car l'inégalité est évidente pour $n = 0$, et si on suppose qu'elle est vraie pour $n - 1$, alors on a :

$$\begin{aligned} \left| \prod_{i=0}^n (1 + a_i) - 1 \right| &= \left| (1 + a_n) \prod_{i=0}^{n-1} (1 + a_i) - 1 \right| \\ &= \left| (1 + a_n) \left(\prod_{i=0}^{n-1} (1 + a_i) - 1 \right) + a_n \right| \\ &\leq (1 + |a_n|) \left(\prod_{i=0}^{n-1} (1 + |a_i|) - 1 \right) + |a_n| \\ &= \prod_{i=0}^n (1 + |a_i|) - 1. \end{aligned}$$

2.2 Convergence d'un produit infini

Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite complexe.

Théorème 2.1 (*Critère de Cauchy*) Le produit infini $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ est convergent si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\left| \prod_{i=n+1}^m a_i - 1 \right| < \varepsilon$$

pour tout $m > n \geq n_0$.

Preuve. Supposons d'abord que le produit $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, on peut aussi supposer que non a est nul (en écartant un nombre fini de termes si nécessaire). Soit $p_n = a_1 \cdot a_2 \cdots a_n$ et $p = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n$, de sorte que $p \neq 0$, et il existe un $M > 0$ tel que $|p_n| > M$ pour tout $n \geq 1$. Puisque $(p_n)_n$ satisfait le critère de Cauchy pour les suites, étant donné un $\varepsilon > 0$, il existe un entier n_0 tel que :

$$|p_m - p_n| \leq \varepsilon M, \forall m > n \geq n_0$$

on divise par $|p_n|$ on obtient

$$\left| \prod_{k=n+1}^m a_k - 1 \right| < \varepsilon, \quad \forall m > n \geq n_0.$$

Inversement, soit $\varepsilon > 0$, il existe un entier n_0 tel que :

$$|a_k - 1| < \varepsilon, \quad \forall m > n \geq n_0$$

notons d'abord que si $m > n_0$ alors cela implique que $a_m \neq 0$, puisque (en supposant que $0 < \varepsilon < 1$), en prenant $n = m - 1$, on a

$$||a_m| - 1| \leq |a_m - 1| < \varepsilon$$

c'est-à-dire $0 < 1 - \varepsilon < |a_m| < 1 + \varepsilon$ pour $m \geq n_0$.

Maintenant, prenons $\varepsilon = \frac{1}{2}$ et on pose $q_m = a_{n_0+1} \cdot a_{n_0+2} \cdots a_m$ pour $m \geq n_0$, puis

$$\frac{1}{2} < |q_m| < \frac{3}{2}$$

Pour tout $m \geq n_0$. par conséquent, si (q_m) converge, il ne peut pas converger vers 0. pour voire que la suite (q_n) converge effectivement, soit $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ arbitraire, alors il existe n_0 tel que

$$\left| \frac{q_m}{q_n} - 1 \right| < \frac{2}{3}\varepsilon \quad \forall m > n \geq n_0$$

Ansi

$$|q_m - q_n| < \frac{2}{3}\varepsilon |q_n| < \frac{3}{2} \frac{2}{3}\varepsilon = \varepsilon,$$

la suite (q_n) est une suite de Cauchy de nombre réel, et donc le produit infini $\prod_{n=1}^{\infty}$ est convergent. ■

Théorème 2.2 Si la série $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge, alors le produit infini

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n),$$

converge. De plus, on a

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n) = 0,$$

si et seulement si il existe un entier $n \geq 1$, tel que $1 + a_n = 0$.

Preuve. Si la série $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge, alors $|a_n| \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$. Donc pour n assez grand, on a $|a_n| \leq \frac{1}{2}$. En éliminant les premiers facteurs du produit infini, on peut

supposer que $|a_n| \leq \frac{1}{2}$ pour tout $n \geq 1$. puisque seuls ces premiers facteurs pouvaient donc satisfaire $1 + a_n = 0$, nous allons voir que, en fait, la limite :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

existe et est non nulle. Autrement dit, un produit infini convergent ne peut valoir 0 que si l'un de ses premiers facteurs est nul. En effet, avec le développement connu en série entière valable pour $|z| \leq 1$:

$$\log(1 + z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \frac{z^5}{5} \cdots,$$

si de plus $|z| \leq \frac{1}{2}$, on peut majorer :

$$\begin{aligned} |\log(1 + z)| &\leq |z| (1 + |z| + |z|^2 + |z|^3 + |z|^4 + \cdots) \\ &\leq |z| \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots \right) \\ &= 2|z| \end{aligned}$$

pour assurer la convergence de la série :

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=1}^{\infty} \log(1 + a_n) \right| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} |\log(1 + a_n)| \\ &\leq 2 \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty \end{aligned}$$

vers un nombre que l'on note :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \log(1 + a_n) =: l$$

et comme l'exponentielle est continue :

$$\begin{aligned} \prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n) &= \prod_{n=1}^{\infty} e^{\log(1 + a_n)} \\ &= e^{\sum_{n=1}^{\infty} \log(1 + a_n)} \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^l \neq 0 \end{aligned}$$

ceci montre bien la convergence des produits partiels vers un nombre qui est effectivement non nul, parce qu'il est exponentielle d'un nombre complexe. ■

Théorème 2.3 (Condition nécessaire pour la convergence d'un produit infini)

Si le produit infini $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$ converge, alors $a_n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$, et $a_n = -1$ pour au plus un nombre fini de n .

Théorème 2.4 Si $a_n > 0$, le produit infini $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$ converge si et seulement si la

série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

Preuve. Soient $S_n = \sum_{i=1}^n a_i$ et $P_n = \prod_{i=1}^n (1 + a_i)$. Les deux suites sont monotones et croissantes, donc pour prouver le théorème, il suffit de montrer que la suite $(P_n)_n$ est bornée si et seulement si la suite $(S_n)_n$ l'est. Comme si $x > 0$, $1 + x \leq \exp(x)$, alors

$$S_n \leq P_n \leq \exp(S_n).$$

Donc la suite $(P_n)_n$ est bornée si et seulement si la suite $(S_n)_n$ est bornée. Remarquons également que la suite des produits partiels $(P_n)_n$ ne peut pas converger vers zéro, puisque $P_n \geq 1$ pour tout $n \geq 1$. Enfin, par la limite quand $n \rightarrow +\infty$, P_n tend vers $+\infty$ si et seulement si S_n tend vers $+\infty$.

Exemple 2.2 Étudions la convergence de produit infini $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$. Soit

$$u_n = \prod_{n=1}^N \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$$

On a

$$\ln(u_n) = \ln \prod_{n=1}^N \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) = \sum_{n=1}^N \ln \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$$

On sait que, d'après les propriétés des équivalences

$$\ln \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{n^2} \quad \left(\text{puisque } \frac{1}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0\right)$$

et $\sum \frac{1}{n^2}$ converge (séries de Riemann), Donc $\sum_{n=1}^N \ln \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$ converge. Alors

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N \ln \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) = l$$

Donc

$$\begin{aligned}\lim_{N \rightarrow +\infty} \ln(u_n) &= l \\ \lim_{N \rightarrow +\infty} u_n &= e^l\end{aligned}$$

Alors $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$ est convergente.

■

Exemple 2.3 Sachant que

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(x+1) \leq x \quad , \forall x \geq 0.$$

Etudions la convergence de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par :

$$u_n = \prod_{p=1}^n \left(1 + \frac{p}{n^2}\right)$$

On a $u_n \geq 0$ (produit de termes strictement positif)

$$\begin{aligned}\ln(u_n) &= \ln\left(\prod_{p=1}^n \left(1 + \frac{p}{n^2}\right)\right) \\ &= \sum_{p=1}^n \ln\left(1 + \frac{p}{n^2}\right)\end{aligned}$$

$\forall p \in [1, n]$, en remplaçant x par $\frac{p}{n^2}$, on obtient

$$\frac{p}{n^2} - \frac{p^2}{2n^4} \leq \ln\left(\frac{p}{n^2} + 1\right) \leq \frac{p}{n^2}$$

En sommant de 1 à n des termes positifs :

$$\sum_{p=1}^n \left(\frac{p}{n^2}\right) - \frac{1}{2n^4} \sum_{p=1}^n p^2 \leq \sum_{p=1}^n \ln\left(\frac{p}{n^2} + 1\right) \leq \frac{1}{n^2} \sum_{p=1}^n p$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n^2} \left(\frac{n(n+1)}{2}\right) - \frac{1}{2n^2} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) \leq \ln(u_n) \leq \frac{1}{n^2} \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{n+1}{2n} - \frac{1}{2n^3} \left(\frac{(n+1)(2n+1)}{6}\right) \leq \ln(u_n) \leq \frac{n+1}{2n}.$$

On a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n^3} \left(\frac{(n+1)(2n+1)}{6} \right) = 0$$

Donc par encadrement on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(u_n) = \frac{1}{2}$$

d'où

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

Théorème 2.5 Si $a_n \geq 0$, $a_n \neq 1$, alors le produit infini $\prod_{n=1}^{\infty} (1 - a_n)$ converge si et seulement si la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

Preuve. On suppose que la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. Alors $a_n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$, donc il existe N tel que pour tout $n \geq N$,

$$0 \leq a_n < 1$$

et par le critère de Cauchy

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k - \sum_{k=1}^N a_k \right| = a_{N+1} + \dots + a_n < \frac{1}{2}$$

Alors

$$\begin{aligned} (1 - a_N)(1 - a_{N+1}) &= 1 - a_N - a_{N+1} + a_N a_{N+1} \\ &> 1 - a_N - a_{N+1} \\ &> 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Donc

$$\prod_{i=N}^n (1 - a_i) \geq 1 - \sum_{i=N}^n a_i > \frac{1}{2}.$$

On pose $P_n = \prod_{i=1}^n (1 - a_i)$, donc

$$P_n = P_{n-1} \prod_{i=N}^n (1 - a_i)$$

La suite $\left(\frac{P_n}{P_{n-1}} \right)_{n \geq 1}$ est décroissante et bornée, donc elle est convergente.

Théorème 2.6 Soit $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite croissante des nombres premiers. Pour tout $x > 1$ on a la formule du produit Eulérien suivante

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} = \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{p_n^x}\right)^{-1}.$$

■

Preuve. On sait que pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, on a $\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{+\infty} z^k$. Alors comme $p_n \geq 2$, on a $\frac{1}{p_n^x} < 1$ pour tout $x > 1$. Donc

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{p_n^{kx}} &= \frac{1}{1 - \frac{1}{p_n^x}} \\ &= \left(1 - \frac{1}{p_n^x}\right)^{-1}. \end{aligned}$$

En multipliant les N premières égalités terme à terme, on obtient

$$\begin{aligned} \prod_{n=1}^N \left(1 - \frac{1}{p_n^x}\right)^{-1} &= \prod_{n=1}^N \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{p_n^{kx}} \right) \\ &= \sum_{n \in \mathcal{P}_N} \frac{1}{n^x} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} - \sum_{n \notin \mathcal{P}_N} \frac{1}{n^x}, \end{aligned}$$

où \mathcal{P}_N est l'ensemble des entiers dont les facteurs premiers sont inférieurs à N . D'autre part on a

$$\sum_{n \notin \mathcal{P}_N} \frac{1}{n^x} \leq \sum_{n=N}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$$

car si $n \notin \mathcal{P}_N$, on a $n > N$ (les facteurs premiers de n sont inférieurs à N). Alors si on passe à la limite quand $N \rightarrow +\infty$, il vient

$$\prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{p_n^x}\right)^{-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}.$$

■

Théorème 2.7 Soit $(u_n)_n$ une suite de nombres réels différents de -1 tendant vers 0. Alors le produit infini $\prod_n (1 + u_n)$ converge si et seulement si la série $\sum_n \log(1 + u_n)$ converge.

Preuve. Comme la suite $(u_n)_n$ converge vers 0, on a en particulier que $1 + u_n > 0$ pour n assez grand, disons pour $n \geq n_0$ pour un certain $n_0 \in \mathbb{N}$. Alors on a pour tout $n \geq n_0$

$$\begin{aligned} \prod_{k=n_0}^n (1 + u_k) &= \exp \left(\log \left(\prod_{k=n_0}^n (1 + u_k) \right) \right) \\ &= \exp \left(\sum_{k=n_0}^n \log(1 + u_k) \right). \end{aligned}$$

Si la série $\sum_{k=n_0}^n \log(1 + u_k)$ converge, alors le produit $\prod (1 + u_n)$ converge, par continuité de

l'exponentielle, vers $\prod_{k < n_0} (1 + u_k) \exp \left(\sum_{k=n_0}^{+\infty} \log(1 + u_k) \right)$ qui est bien non nul. Réciproquement, si le produit converge alors la série converge en utilisant la formule

$$\sum_{k=n_0}^n \log(1 + u_k) = \log \left(\prod_{k=n_0}^n (1 + u_k) \right)$$

et le fait que la limite du produit est non nulle. ■

Théorème 2.8 *On considère la série convergente $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$. Le produit infini $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$ converge si et seulement si la série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2$ converge.*

Preuve. Par hypothèse, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge et on peut sans perte de généralité supposer que $|a_n| < 1$. Puisque

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - \ln(1 + a_n)}{a_n^2} = \frac{1}{2},$$

et que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge, la convergence de $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2$ est équivalente à celle de $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1 + a_n)$, qui à son tour est équivalent à celui de

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n).$$

■

Théorème 2.9 le produit infini $\prod_{n=1}^{+\infty} (1 + a_n)$ est absolument convergent si et seulement si tout réarrangement de ses facteurs ne change pas sa valeur.

Preuve. Clairement, le produit $\prod_{n=1}^{+\infty} (1 + a_n)$, $a_n > 1$, converge si et seulement si la série

$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1 + a_n)$ converge. De plus, si P est la valeur du produit et S est la somme de la série, alors $P = e^S$. On suppose maintenant que le produit est absolument convergent. Étant donnée l'égalité : ■

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\ln(1 + a_n)|}{|a_n|} = 1 \quad (\text{car } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0). \quad (2.2)$$

La série $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1 + a_n)$ est absolument convergente. En conséquence, tout réarrangement de cette série converge vers la même somme.

Finalement, avec la remarque faite au début de la solution de ce problème, tout réarrangement des facteurs du produit ne change pas sa valeur.

On suppose maintenant que la valeur du produit $\prod_{n=1}^{+\infty} (1 + a_n)$ ne dépend pas de l'ordre de ses facteurs. Ceci signifie que la somme de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1 + a_n)$ ne dépend pas non plus de l'ordre de ses termes. D'après le Riemann, la série converge absolument ce qui, avec (2.2), implique la convergence de $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$. Le résultat demandé est donc prouvé.

Chapitre 3

Produits infinis de suites de fonctions

Rappelons que le produit infini $\prod_{n \geq 1} f_n(z)$ converge dans un ouvert Ω de \mathbb{C} , si la suite de fonctions holomorphes $(p_n)_{n \geq 0}$ telle que $p_n = \prod_{k=1}^n f_k$ est convergente uniformément sur tout compact de Ω vers une fonction holomorphe f dans Ω .

Remarque 3.1 *Nous avons considéré le produit infini indexé par les entiers strictement positifs i.e $n \in \mathbb{N}^*$, mais on peut envisager des produits infinis ou $n \in \mathbb{N}$ ou bien $n \in I$ avec I une partie infinie de \mathbb{N} .*

3.1 Théorème de Weierstrass

Théorème 3.1 ([9]) (Weierstrass) *Soit (f_n) une suite de fonctions holomorphes dans un ouvert U qui converge uniformément sur les parties compactes de U vers une fonction f . Alors f est holomorphe, et pour tout k , la suite des dérivées k -ième $(f_n^{(k)})$ converge uniformément sur les compacts de U vers $f^{(k)}$.*

Lemme 3.1 *Soit $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite de fonctions continues sur un ouvert Ω de \mathbb{C} . Si les fonctions f_n sont holomorphes sur Ω et si le produit infini $f = \prod_{n \geq 0} f_n$ converge normalement sur tous les compacts de Ω , alors la série de fonctions méromorphes $\sum_{n \geq 0} \frac{f'_n}{f_n}$ converge normalement sur tous les compacts de Ω vers la dérivée logarithmique $\frac{f'}{f}$.*

Preuve. Pour tous entiers positifs m, n tel que $m \geq n + 1$, on pose

$$g_m(z) = \prod_{k=n+1}^m f_k(z).$$

Alors,

$$\log g_m(z) = \log \prod_{k=n+1}^m f_k(z),$$

et on dérive les deux termes, on obtient

$$\frac{g'_m(z)}{g_m(z)} = \sum_{k=n+1}^m \frac{f'_k(z)}{f_k(z)}$$

par conséquent,

$$g'_m = g_m(z) \sum_{k=n+1}^m \frac{f'_k(z)}{f_k(z)}.$$

Alors

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} g'_m(z) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \left[g_m(z) \sum_{k=n+1}^m \frac{f'_k(z)}{f_k(z)} \right]$$

et comme la limite de g_m est la fonction holomorphe g et sa dérivée g' est la limite de g'_m (le théorèmes de Weierstrass), on a

$$\frac{g'}{g} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{f'_k}{f_k}$$

et d'autre part, on a

$$\prod_{k=0}^m f_k = \prod_{k=0}^n f_k \times g_m$$

donc

$$f = \prod_{k=0}^n f_k \times g$$

et alors

$$\log f = \sum_{k=0}^n \log f_k + \log g$$

par conséquent,

$$\frac{f'}{f} = \sum_{k=0}^n \frac{f'_k}{f_k} + \frac{g'}{g} = \sum_{k=0}^n \frac{f'_k}{f_k} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{f'_k}{f_k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f'_k}{f_k}.$$

On a donc bien, sur l'intérieur de K ,

$$\frac{f'}{f} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f'_k}{f_k},$$

avec convergence normale sur les compacts de l'intérieur de K et ceci pour tout K compact de Ω . ■

Théorème 3.2 Soient $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert, et $(F_n)_{n \geq 1}$ une suite de fonctions holomorphes sur Ω (i.e. $F_n \in \mathcal{H}(\Omega)$). S'il existe des constantes $c_n > 0$ telles que $\sum_{n=1}^{\infty} c_n < \infty$ et

$$\forall z \in \Omega, \quad |F_n(z) - 1| \leq c_n.$$

Alors les trois propriétés suivantes sont satisfaites.

1) Le produit infini $\prod_{n=1}^{\infty} F_n(z)$ converge uniformément dans Ω vers une fonction holomorphe F

$$F(z) := \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^N F_n(z).$$

2) Pour $w \in \Omega$, on a $F(w) = 0$ si et seulement s'il existe $n = n_w \geq 1$ avec $F_n(w) = 0$.

3) Si pour tout $n \geq 1$, $F_n \neq 0$ dans Ω , alors $F \neq 0$ dans Ω tout entier, et de plus

$$\frac{F'(z)}{F(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F'_n(z)}{F_n(z)}.$$

Preuve. 1) Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = 0$, alors il existe un entier $M \geq 1$ assez grand tel que, pour tout $n \geq M + 1$, on a

$$c_n \leq \frac{1}{2}.$$

En écrit

$$\prod_{n=1}^{\infty} F_n(z) = \prod_{n=1}^M F_n(z) \prod_{n=M+1}^{\infty} F_n(z),$$

remarquons que le deuxième produit ne s'annule en aucun point de Ω , et donc les zéros de la fonction-limite ($F(z) = \prod_{n=1}^{\infty} F_n(z)$) ne peuvent être présents que dans le premier produit, donc

$$\{w \in \Omega : F(w) = 0\} = \bigcup_{1 \leq n \leq M} \{w \in \Omega : F_n(w) = 0\}.$$

En éliminant ces premiers facteurs, ce qui ne change rien à (1), (2) et (3), nous nous ramenons à $c_n \leq \frac{1}{2}$ pour tout $n \geq 1$

Avec les notations précédentes, on pose

$$F_n(z) = 1 + a_n(z).$$

Puisque

$$|a_n(z)| \leq c_n \leq \frac{1}{2}$$

dans Ω , l'hypothèse $\sum c_n < \infty$, suivie de l'estimation de convergence normale uniforme

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=1}^{\infty} \log(1 + a_n(z)) \right| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} |\log(1 + a_n(z))| \\ &\leq 2 \sum_{n=1}^{\infty} |a_n(z)| \\ &\leq 2 \sum_{n=1}^{\infty} c_n < \infty. \end{aligned}$$

Donc la série $\sum_{n=1}^{\infty} \log(1 + a_n(z))$ est convergente normalement, alors

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log(1 + a_n(z)) \in \mathcal{H}(\Omega)$$

donc

$$F(z) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n(z)) = e^{\sum_{n=1}^{\infty} \log(1 + a_n(z))} \in \mathcal{H}(\Omega),$$

et cette fonction holomorphe ne s'annule en aucun point de Ω car c'est une exponentielle!, ce qui conclut l'assertion (1).

Pour l'équivalence de l'assertion (2), on a ici

$$\emptyset = \{w \in \Omega : F(w) = 0\}$$

ce qui est cohérent avec le fait que nous nous sommes ramenés à $c_n \leq \frac{1}{2}$ pour tout $n \geq 1$, de telle sorte que les inégalités

$$|F_n(z) - 1| \leq \frac{1}{2}$$

forçaient, à l'avance aussi

$$\emptyset = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{w \in \Omega : F_n(w) = 0\}.$$

Pour l'assertion (3), on pose

$$G_N(z) := \prod_{n=1}^N F_n(z)$$

tel que $G_N(z) \rightarrow F(z)$ uniformément quand $N \rightarrow +\infty$. Un théorème connu donne la convergence des dérivées en tout point de Ω

$$\text{i.e. } G'_N(z) \longrightarrow F'(z).$$

Mais les G_N sont uniformément minorées dans Ω , car

$$|F_n(z) - 1| \leq c_n \leq \frac{1}{2}$$

donc

$$c_n \geq |F_n(z) - 1| \geq |F_n(z)| - 1$$

$$|F_n(z)| \leq c_n + 1$$

donne

$$\begin{aligned} |G_N(z)| &= \prod_{n=1}^N |F_n(z)| \\ &\geq \prod_{n=1}^N (1 - c_n) \\ &\geq \prod_{n=1}^{\infty} (1 - c_n) \\ &> 0, \end{aligned}$$

donc on a aussi en tout point convergence uniforme

$$\frac{1}{F(z)} \longleftarrow \frac{1}{G_N(z)},$$

d'où la conclusion de (3)

$$\begin{aligned} \frac{F'(z)}{F(z)} &\longleftarrow \frac{G'_N(z)}{G_N(z)} \\ &= \frac{(F_1(z) \cdots F_N(z))'}{F_1(z) \cdots F_N(z)} = \frac{F'_1(z)}{F_1(z)} + \cdots + \frac{F'_N(z)}{F_N(z)}. \end{aligned}$$

Ainsi, la bonne condition suffisante pour la convergence d'un produit infini $\prod_{n=1}^{\infty} F_N(z)$ c'est la convergence normale de la série de fonctions holomorphes

$$\sum_{n=1}^{\infty} (F_n(z) - 1)$$

■

Lemme 3.2 Soient $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite de \mathbb{C} . Pour un entier $N \geq 1$, on pose

$$p_N = \prod_{n=1}^N (1 + u_n) \text{ et } p_N^* = \prod_{n=1}^N (1 + |u_n|).$$

Alors on a

$$p_N^* \leq \exp(|u_1| + \dots + |u_N|) \text{ et } |p_N - 1| \leq p_N^* - 1$$

Preuve. Pour tout x positif,

$$\exp(x) = 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \geq 1 + x$$

et donc

$$\prod_{n=1}^N (1 + |u_n|) \leq \prod_{n=1}^N \exp(|u_n|) = \exp\left(\sum_{n=1}^N |u_n|\right)$$

Pour démontrer la seconde inégalité, on utilise la récurrence sur N . En effet, pour $N = 1$, on a l'inégalité triviale $|u_1| \leq |u_1|$ et si on la suppose vraie pour un entier N , alors

$$\begin{aligned} |p_{N+1} - 1| &= |p_N(1 + u_{N+1}) - 1| \\ &= |(p_N - 1)(1 + u_{N+1}) + u_{N+1}| \\ &\leq (p_N^* - 1)(1 + |u_{N+1}|) + |u_{N+1}| \\ &= p_{N+1}^* - 1, \end{aligned}$$

ce qui complète la démonstration. ■

Théorème 3.3 Soit X un ensemble et $(f_n)_n$ une suite de fonctions tels que $f_n : X \rightarrow \mathbb{C}$ bornées, et que $\sum |f_n|$ converge uniformément sur X . Soit f l'application $X \rightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$\forall x \in X, \quad f(x) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + f_n(x))$$

Alors

- 1) f converge uniformément sur X .
- 2) f s'annule en un point $x_0 \in X$ si et seulement s'il existe un entier n tel que $f_n(x_0) = -1$.
- 3) Pour toute bijection σ de \mathbb{N}^* dans \mathbb{N}^* , on a

$$\forall x \in X, \quad f(x) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + f_{\sigma(n)}(x)).$$

Preuve. Par la convergence uniforme de $\sum |f_n|$ sur X , il existe $C > 0$ tel que

$$\sum |f_n| \leq C \quad (\forall x \in X)$$

Posons comme dans le lemme précédent

$$P_N = \prod_{n=1}^N (1 + f_n)$$

et

$$P_N^* = \prod_{n=1}^N (1 + |f_n|)$$

On a

$$|P_N| \leq P_N^* \leq \exp\left(\sum_{n=1}^N |f_n|\right)$$

et à la limite

$$\forall x \in X, \forall N \in \mathbb{N}, |P_N(x)| \leq e^C.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $\sum |f_n|$ converge uniformément sur X , il existe un entier N_0 tel que pour tout $n \geq N_0$ et $x \in X$, on a

$$\left| \sum_{k=1}^n |f_k(x)| - \sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)| \right| \leq \varepsilon$$

et donc

$$\forall x \in X, \sum_{k=1}^n |f_k(x)| \leq \varepsilon$$

Soit M et N deux entiers tels que $M > N \geq N_0$. Alors

$$|p_M - p_N| = |p_N| \left| \frac{|p_M|}{|p_N|} - 1 \right| = |p_N| \left| \prod_{n=N+1}^M (1 + f_n) - 1 \right|$$

et d'après le lemme

$$|p_M - p_N| \leq |p_N| \left(\prod_{n=N_0}^M (1 + |f_n|) - 1 \right) \leq |p_N| \left(\exp\left(\sum_{k=N_0}^M |f_k|\right) - 1 \right).$$

D'ou

$$|p_M - p_N| \leq |p_N| (e^\varepsilon - 1) \leq e^c (e^\varepsilon - 1) \leq 2\varepsilon e^c.$$

En ayant pris soin de choisir ε . Ainsi, la suite $(p_N)_N$ est uniformément de Cauchy et f converge uniformément.

L'inégalité ci-dessus montre également que pour tout

$$M > N_0, |p_M| - |p_N| \leq 2\varepsilon |p_{N_0}|$$

d'où

$$|p_M| \geq |p_{N_0}| (1 - 2\varepsilon)$$

et donc

$$\forall x \in X, \quad |f(x)| \geq |p_{N_0}| (1 - 2\varepsilon)$$

Donc si $f(x_0) = 0$ pour un certain x_0 , $p_{N_0}(x_0) = 0$ et il existe $n_0 \in \{1, \dots, N_0\}$ tel que

$$f_{n_0}(x_0) = 0$$

la réciproque est évidente.

Soit σ une bijection de \mathbb{N}^* dans \mathbb{N}^* et $q_N = \prod_{n=1}^N (1 + f_{\sigma(n)})$. Pour tout $N \geq N_0$, il existe $m \geq N$ tel que

$$n \in \{\sigma(i)\}_{i=1}^m, (\forall n \leq N),$$

ainsi, pour $M \geq m$, le produit q_M contient tous les facteurs de p_N . On a donc

$$\begin{aligned} \forall M \geq m, \quad |q_M - p_N| &= |p_N| \left| \frac{|q_M|}{|p_N|} - 1 \right| \\ &= |p_N| \left| \prod_{\substack{n=1 \\ \sigma(n) > N}}^M (1 + f_{\sigma(n)}) - 1 \right| \\ &\leq |p_N| (\exp(\sum_{\substack{n=1 \\ \sigma(n) > N}}^M |f_n|) - 1). \end{aligned}$$

On en déduit

$$|q_M - p_N| \leq |p_N| (e^\varepsilon - 1) \leq 2\varepsilon e^C$$

ce qui prouve que la suite $(q_M)_M$ converge. ■

Exemple 3.1 Le produit infini $\prod_{n \geq 0} (1 + z^{2^n})$ est convergent normalement sur tout compact

du disque unité $D(0, 1)$ et que pour tout $z \in D(0, 1)$, $\prod_{n \geq 0} (1 + z^{2^n}) = \frac{1}{1 - z}$. En effet, soit K un compact de $D(0, 1)$. Pour tout $z \in K$ tel que $|z| \leq r < 1$, on a

$$|z^{2^n}| \leq r^{2^n}.$$

La série $\sum_{n \geq 0} r^{2^n}$ converge et d'après le critère précédent, la série $\sum_{n \geq 0} z^{2^n}$ converge normalement sur K . Par conséquent, le produit infini $\prod_{n \geq 0} (1 + z^{2^n})$ converge normalement sur

K , d'autre part, la valeur de ce produit infini est une fonction holomorphe sur $D(0, 1)$. En posant

$$p_n(z) = \prod_{k=0}^n (1 + z^{2^k}).$$

On obtient

$$(1 - z)p_n(z) = 1 - z^{2^{n+1}},$$

Or pour

$$|z| \leq 1, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} z^{2^{n+1}} = 0,$$

donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n(z) = \frac{1}{1 - z}.$$

et le résultat en découle.

Chapitre 4

Application sur les produits infinis

4.1 L'expression de $\frac{\sin x}{x}$ sous forme produit infini

Cette partie est consacrée à l'expression de $\frac{\sin x}{x}$ sous forme produit infini.

Théorème 4.1 (Euler) *Pour tout $x \in]-\pi, \pi[$, on a*

$$\sin x = x \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{k^2 \pi^2}\right).$$

Preuve. Pour tout entier impair $n \geq 1$ on a

$$\begin{aligned} e^{int} &= e^{i(2m+1)t} = (e^{it})^{2m+1} = (\cos t + i \sin t)^{2m+1} \\ &= \sum_{k=0}^{2m+1} \binom{2m+1}{k} (i)^k (\sin t)^k (\cos t)^{2m+1-k}. \end{aligned}$$

Donc la partie imaginaire du terme droit donne

$$\begin{aligned} \sin(2m+1)t &= \sum_{k=0}^m \binom{2m+1}{2k+1} (-1)^k (\sin t)^{2k+1} (\cos t)^{2m-2k} \\ &= \sum_{k=0}^m \binom{2m+1}{2k+1} (-1)^k (\sin t)^{2k+1} (1 - \sin^2 t)^{m-k} \\ &= (-1)^m \sum_{k=0}^m \binom{2m+1}{2k+1} (\sin t)^{2k+1} (\sin^2 t - 1)^{m-k} \end{aligned}$$

Alors on peut écrire $\sin(2m + 1)t$ comme suit

$$\sin(2m + 1)t = P_{2m+1}(\sin t)$$

tels que

$$P_{2m+1}(x) = (-1)^m \sum_{k=0}^m \binom{2m+1}{2k+1} x^{2k+1} (x^2 - 1)^{m-k} \quad (4.1)$$

est un polynôme de degré $2m + 1$ et le coefficient dominant est

$$a_m = (-1)^m \sum_{k=0}^m \binom{2m+1}{2k+1}$$

alors par les deux formules

$$2^{2m+1} = \sum_{k=0}^m \binom{2m+1}{k} = A \text{ et } 0 = \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{2m+1}{k} = B$$

on obtient

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{1}{2}(A - B) \\ &= (-4)^m. \end{aligned}$$

Pour chercher les racines de P_{2m+1} dans $] -1, 1[$, on pose $x = \sin t$ avec $t \in] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Donc par la formule (4.1) on a

$$\begin{aligned} P_{2m+1}(x) &= 0 \iff \sin(2m + 1)t = 0 \\ \iff t &= \frac{k\pi}{2m+1} \text{ tel que } -m \leq k \leq m. \end{aligned}$$

Alors on a $2m + 1$ racines de P_{2m+1} de la forme $x_k = \sin \frac{k\pi}{2m+1}$. Par conséquent, ces racines sont distincts deux à deux et sont dans $] -1, 1[$. Les résultats précédents montre que

$$P_{2m+1}(x) = (-4)^m \prod_{k=-m}^m (x - x_k)$$

ou encore on a

$$\begin{aligned} \sin(2m + 1)t &= (-4)^m \prod_{k=-m}^m (\sin t - \sin t_k) \text{ avec } t_k = \frac{k\pi}{2m+1} \\ &= (-4)^m \sin t \prod_{k=1}^m (\sin t + \sin t_k) (\sin t - \sin t_{-k}) \\ &= (-4)^m \sin t \prod_{k=1}^m (\sin t + \sin t_k) (\sin t - \sin t_k) \\ &= 4^m \sin t \prod_{k=1}^m (\sin^2 t_k - \sin^2 t), \end{aligned}$$

car $\sin t_{-k} = -\sin t_k$. Alors on a

$$\frac{\sin(2m+1)t}{\sin t} = 4^m \prod_{k=1}^m (\sin^2 t_k - \sin^2 t) \quad (4.2)$$

et on a

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(2m+1)t}{\sin t} = \lim_{t \rightarrow 0} (2m+1) \frac{\sin(2m+1)t / (2m+1)t}{\sin t / t} = 2m+1,$$

alors

$$2m+1 = 4^m \prod_{k=1}^m \sin^2 t_k. \quad (4.3)$$

Par (4.2) et (4.3) nous concluons que

$$\frac{\sin(2m+1)t}{2m+1} = \sin t \prod_{k=1}^m \left(1 - \frac{\sin^2 t}{\sin^2 t_k}\right).$$

D'autre part on a

$$\begin{aligned} \sin(2m+1)t &= \sum_{k=0}^m \binom{2m+1}{2k+1} (-1)^k (\sin t)^{2k+1} (\cos t)^{2m-2k} \\ &= \sin t (\cos t)^{2m} \sum_{k=0}^m \binom{2m+1}{2k+1} (-1)^k (\tan t)^{2k} \\ &= \sin t (\cos t)^{2m} Q_{2m}(\tan t) \end{aligned}$$

tel que

$$Q_{2m}(x) = \sum_{k=0}^m \binom{2m+1}{2k+1} (-1)^k x^{2k}$$

Q_{2m} est un polynôme de degré $2m$ et son coefficient dominant est $b_{2m} = (-1)^m$.

Pour chercher les racines de Q_{2m} dans $] -1, 1[$, on pose $x = \tan t$ avec $t \in] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et $t \neq 0$.

Donc on a

$$\begin{aligned} Q_{2m}(\tan t) &= 0 \iff \sin(2m+1)t = 0 \\ &\iff t = \frac{k\pi}{2m+1} \text{ avec } k \in]-m, m[\text{ et } k \neq 0. \end{aligned}$$

Les racines $y_k = \tan t_k$ avec $t_k = \frac{k\pi}{2m+1}$ sont distincts deux à deux. Alors par ce qui précède, on a

$$\begin{aligned} Q_{2m}(x) &= (-1)^m \prod_{\substack{k=-m \\ k \neq 0}}^m (x - \tan t_k) \\ &= (-1)^m \prod_{k=1}^m (x - \tan t_k)(x + \tan t_k) \\ &= (-1)^m \prod_{k=1}^m (x^2 - \tan^2 t_k) \\ &= \prod_{k=1}^m (\tan^2 t_k - x^2). \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} Q_{2m}(\tan t) &= \prod_{k=1}^m (\tan^2 t_k - \tan^2 t) \\ &= \prod_{k=1}^m \tan^2 t_k \prod_{k=1}^m \left(1 - \frac{\tan^2 t}{\tan^2 t_k}\right) \end{aligned} \quad (4.4)$$

et comme on a $\lim_{t \rightarrow 0} Q_{2m}(\tan t) = 2m + 1$, alors par la formule (4.4) on obtient $\prod_{k=1}^m \tan^2 t_k = 2m + 1$. Donc on a

$$\sin(2m+1)t = (2m+1) \sin t (\cos t)^{2m} \prod_{k=1}^m \left(1 - \frac{\tan^2 t}{\tan^2 t_k}\right)$$

On peut montrer que la fonction $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ est décroissante et $t \mapsto \frac{\tan t}{t}$ est croissante, alors si $0 \leq t < t_k < \frac{\pi}{2}$, alors

$$0 \leq \frac{\tan^2 t}{\tan^2 t_k} \leq \frac{t^2}{t_k^2} \leq \frac{\sin^2 t}{\sin^2 t_k} < 1$$

donc il vient

$$0 < \prod_{k=1}^m \left(1 - \frac{\sin^2 t}{\sin^2 t_k}\right) \leq \prod_{k=1}^m \left(1 - \frac{t^2}{t_k^2}\right) \leq \prod_{k=1}^m \left(1 - \frac{\tan^2 t}{\tan^2 t_k}\right)$$

et comme $(2m+1) \sin t \geq 0$, alors

$$\begin{aligned} (2m+1) \sin t \prod_{k=1}^m \left(1 - \frac{\sin^2 t}{\sin^2 t_k}\right) &\leq (2m+1) \sin t \prod_{k=1}^m \left(1 - \frac{t^2}{t_k^2}\right) \\ &\leq (2m+1) \sin t \prod_{k=1}^m \left(1 - \frac{\tan^2 t}{\tan^2 t_k}\right) \end{aligned}$$

et encore

$$\begin{aligned}\sin(2m+1)t &\leq (2m+1)\sin t \prod_{k=1}^m \left(1 - \frac{t^2}{t_k^2}\right) \\ &\leq \sin(2m+1)t \frac{1}{\cos^{2m} t}.\end{aligned}$$

Si on pose $y = (2m+1)t$, avec $0 \leq t < \pi$, alors obtient $\frac{t}{t_k} = \frac{y}{k\pi}$ et

$$\begin{aligned}\sin y &\leq (2m+1)\sin\left(\frac{y}{2m+1}\right) \prod_{k=1}^m \left(1 - \frac{y^2}{k^2\pi^2}\right) \\ &\leq \sin y \frac{1}{\cos^{2m}\left(\frac{y}{2m+1}\right)}.\end{aligned}$$

On passe à la limite quand $m \rightarrow +\infty$ dans ce qui précède, on trouve

$$\sin y \leq y \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{y^2}{k^2\pi^2}\right) \leq \sin y$$

par suite, pour tout $y \in]0, \pi[$, on a

$$\frac{\sin y}{y} = \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{y^2}{k^2\pi^2}\right)$$

et pour $y = 0$, la relation reste correcte, donc avec parité il est clair que

$$y \in]-\pi, \pi[, \quad \frac{\sin y}{y} = \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{y^2}{k^2\pi^2}\right).$$

Applications :

Pour $y = \frac{\pi}{2}$, on obtient

$$\prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{4k^2}\right) = \frac{2}{\pi},$$

et pour $y = \frac{\pi}{6}$,

$$\prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{36k^2}\right) = \frac{3}{\pi}.$$

■

Remarque 4.1

$$f(z) = \sin \pi z = \pi z \prod (1 - \frac{z^2}{n^2}), \quad z \in \mathbb{C}$$

le produit infini ci-dessus converge normalement sur tout compact de \mathbb{C} , car la série $\sum \frac{z^2}{n^2}$ converge normalement sur tout compact. On note que $\left| \frac{z^2}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2} \sup_{z \in k} |z^2|$, k compact et $\frac{1}{n^2} \sup_{z \in k} |z^2|$ converge. la fonction $f(z)$ est holomorphe dans \mathbb{C} , et on a

$$\begin{aligned} \frac{f'}{f} &= \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2} \\ &= \pi \cot \pi z \\ &= \frac{(\sin \pi z)'}{\sin \pi z} \end{aligned}$$

On en déduit que

$$f(z) = C \sin \pi z, \quad C \text{ est une constante}$$

Autrement dit, on a

$$\prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) = \frac{C \sin \pi z}{\pi z}$$

En faisant tendre z vers 0, on obtient $C = 1$, et par conséquent, la formule en question. Convergence normale

4.2 Théorème de factorisation de Weierstrass

Le théorème de Weierstrass a pour objet de généraliser le théorème de d'Alembert-Gauss aux fonctions entières (c'est-à-dire analytiques dans tout le plan complexe).

Lemme 4.1 Soit U un ouvert connexe de \mathbb{C} tel que toute fonction holomorphe sur U admet une primitive. Alors si f est une fonction holomorphe sur U qui ne s'annule pas sur U , il existe une fonction g holomorphe sur U telle que

$$f = e^g.$$

Preuve. Supposons qu'il existe une fonction g holomorphe sur U telle que $f = e^g$. alors $g'f = f'$. Puisque f ne s'annule pas la fonction f , alors la fonction $\frac{f'}{f}$ est holomorphe sur U et par hypothèse, elle possède une primitive dans U . Soient z_0 un point de U et $w \in \mathbb{C}$ tel que $e^w = f(z_0)$. On note par g la primitive de $\frac{f'}{f}$ qui prend la valeur w en z_0 . Donc $e^g = f$. ■

Théorème 4.2 Pour toute suite $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ de nombres complexes satisfaisant $|a_n| \rightarrow \infty$ quand $n \rightarrow \infty$, il existe $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ telle que pour tout $n \geq 1$, $f(a_n) = 0$ et $f \neq 0$ pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{a_n, n \geq 1\}$. Toute autre fonction $\tilde{f} \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ satisfaisant cela est de la forme

$$\tilde{f} = f e^g \text{ avec } g \in \mathcal{H}(\mathbb{C}).$$

Preuve. Soit a_n est un zéro d'ordre 1 de f et \tilde{f} . Alors au voisinage de a_n , on peut écrire

$$\begin{aligned} f(z) &= (z - a_n) [\alpha + O(|z - a_n|)] & (\alpha \neq 0) \\ \tilde{f}(z) &= (z - a_n) [\tilde{\alpha} + O(|z - a_n|)] & (\tilde{\alpha} \neq 0) \end{aligned}$$

d'où il découle que a_n est une singularité illusoire du quotient

$$\frac{\tilde{f}(z)}{f(z)} = \frac{(z - a_n) [\tilde{\alpha} + O(z - a_n)]}{(z - a_n) [\alpha + O(z - a_n)]} = \frac{\tilde{\alpha}}{\alpha} + O(|z - a_n|),$$

(le cas où a_n est de multiplicité $m > 1$ est similaire). Le fait que la fonction $\frac{\tilde{f}}{f}$ ne s'annule pas au voisinage de a_n , alors

$$\frac{\tilde{f}}{f} \in \mathcal{H}(\mathbb{C}, \mathbb{C}^*)$$

et ne s'annule jamais. Comme \mathbb{C} est simplement connexe, le lemme précédent montre qu'il existe bien une fonction holomorphe entière $g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ telle que

$$\frac{\tilde{f}}{f} = e^g.$$

■

Définition 4.1 Soit $m \geq 0$ un entier. On définit les facteurs élémentaires $E_m : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, par

$$\begin{cases} E_0(z) = 1 - z \\ E_m(z) = (1 - z) \exp\left(\sum_{k=1}^m \frac{z^k}{k}\right) \text{ si } m \neq 0. \end{cases}$$

Ces fonctions ont été introduites par Weierstrass et leur avantage est que leurs facteurs sont proches de 1 lorsque $|z| < 1$ et m assez grand, alors que $E_m(1) = 0$.

Lemme 4.2 Il existe une constante $c > 0$ telle que, pour tout $m \geq 0$, on a

$$|1 - E_m(z)| \leq c|z|^{m+1} \quad \forall |z| \leq \frac{1}{2}.$$

On peut prendre $c = 2e$, qui est indépendante de m .

Preuve. On sait que pour $|z| \leq \frac{1}{2}$, on a

$$\log(1 - z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n},$$

et comme on peut écrire $1 - z = \exp(\log(1 - z))$, il vient

$$\begin{aligned} E_m(z) &= \exp(\log(1 - z)) \exp\left(\sum_{k=1}^m \frac{z^k}{k}\right) \\ &= \exp\left(\log(1 - z) + z + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^m}{m}\right) \\ &= : e^w, \end{aligned}$$

On posons

$$w := - \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{z^n}{n}.$$

Mais puisque $|z| \leq \frac{1}{2}$, nous pouvons majorer de manière élémentaire

$$\begin{aligned} |w| &\leq |z|^{m+1} \left(\frac{1}{m+1} + \frac{|z|}{m+2} + \frac{|z|^2}{m+3} + \cdots \right) \\ &\leq |z|^{m+1} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots \right) \\ &= |z|^{m+1} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n, \end{aligned}$$

et comme

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 2$$

alors

$$|w| \leq 2|z|^{m+1}.$$

Par la formule des accroissements finis appliquée sur la fonction $h(t) := e^{tw}$ de la variable réelle $0 \leq t \leq 1$ ayant pour dérivée $h'(t) = we^{tw}$, il existe $c \in]0, 1[$ tel que

$$|h(1) - h(0)| = |(1 - 0) h'(c)|.$$

Alors on a

$$\begin{aligned} |1 - E_m(z)| &= |1 - e^w| = |h(0) - h(1)| \\ &\leq 1. \max_{0 \leq t \leq 1} |h'(t)| \\ &\leq \max_{0 \leq t \leq 1} |w| e^{t|w|} \\ &\leq 2|z|^{m+1} e^{|w|} \\ &\leq 2e|z|^{m+1}. \quad |w| \leq 1. \end{aligned}$$

■

Supposons dorénavant qu'un zéro d'ordre $v \geq 1$ est prescrit en $z = 0$, et que les zéros a_1, a_2, a_3, \dots sont tous non nuls. Définissons alors le produit de Weierstrass par

$$\begin{aligned} f(z) & : = z^v \prod_{n=1}^{\infty} E_n\left(\frac{z}{a_n}\right) \\ & = z^v \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) \exp\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \left(\frac{z}{a_n}\right)^k\right) \\ & = z^v \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2 + \dots + \frac{1}{n}\left(\frac{z}{a_n}\right)^n} \end{aligned}$$

et vérifions qu'il remplit toutes les conditions, à savoir que $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ est holomorphe entière avec un zéro $z = 0$ d'ordre v , avec des zéros en chaque a_n , et que f est non nulle ailleurs. Fixons $R > 0$, supposons $z \in D_R$, et démontrons que toutes ces propriétés sont satisfaites dans D_R . Comme R est arbitraire, cela terminera la démonstration.

Théorème 4.3 (de factorisation de Weierstrass) *Soient f une fonction entière ne s'annulant pas en 0, s'annulant au moins une fois et $(z_n)_n$ la suite de ses zéros comptés avec multiplicités. Alors il existe une suite d'entiers $(p_n)_n$ et une fonction entière g telles que*

$$\forall z \in \mathbb{C}, f(z) = e^{g(z)} \prod_{n=0}^{+\infty} E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right),$$

Preuve. Si f n'a qu'un nombre fini de zéros z_0, \dots, z_n c'est clair. Il suffit de prendre $p_k = 0$ pour tout $k \leq n$. Alors

$$z \mapsto \frac{f(z)}{\left(1 - \frac{z}{z_0}\right) \dots \left(1 - \frac{z}{z_n}\right)}$$

est une fonction entière ne s'annulant pas, et comme \mathbb{C} est simplement connexe, c'est l'exponentielle d'une fonction entière g . Sinon f a une infinité (dénombrable) de zéros et tendant vers l'infini (toujours par le **théorème des zéros isolés**). On peut donc supposer que la suite $(|z_n|)_n$ est croissante. On prend $(p_n)_n$ et P comme dans le théorème des zéros prescrits. Alors la fonction $\frac{f}{P}$ est entière et ne s'annule pas sur \mathbb{C} . Comme \mathbb{C} est simplement connexe, il existe g entière telle que

$$\frac{f}{P} = e^g.$$

■

Théorème 4.4 *Soient U un domaine de \mathbb{C} et $(u_n)_n$ une suite de fonctions holomorphes sur U . si la série $\sum_{n \geq 0} |u_n(z)|$ converge uniformément sur tout compact de U , alors la*

fonction

$$f(z) := \prod_{n \geq 0} (1 + u_n(z))$$

est holomorphe sur U , l'ensemble de ses zéros (comptés avec multiplicité) est la réunion de ceux des facteurs du produit, et l'on a

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{n \geq 0} \frac{u'_n(z)}{1 + u_n(z)} \quad (z \in U/Z(f))$$

la convergence de cette série de fonctions méromorphes étant uniforme sur tout compact.

Preuve. Soit K un compact de U . Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n(z)| \leq \frac{1}{2}$ pour $n > N$ et $z \in K$. donc la convergence absolue de la série

$$g_N(z) := \sum_{n > N} \log(1 + u_n(z))$$

,et l'on a $g_N \in H(\mathring{k})$ d'après le théorème précédent de Weierstrass . Cela implique que $\exp g_N(z)$ est holomorphe sur \mathring{K} , et donc aussi

$$f(z) := \prod_{n \leq N} (1 + u_n(z)) e^{g_N(z)}.$$

Cela établit la première assertion. Le théorème de Weierstrass permettant de dériver g_N terme à terme, on obtient, pour tout compact K de U

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{n \leq N} \frac{u'_n(z)}{1 + u_n(z)} + g'_N(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{u'_n(z)}{1 + u_n(z)} \quad (z \in \mathring{k}/Z(f))$$

la convergence étant uniforme. ■

4.2.1 Produit Eulerien

Définition 4.2 Une fonction arithmétique est une application $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{C}$ définie sur l'ensemble des entiers $n \geq 1$ et à valeurs dans \mathbb{C} .

Définition 4.3 Une fonction arithmétique $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{C}$ est dite multiplicative si $f(1) = 1$ et si pour tous $n, m \in \mathbb{N}^*$ tel que $(n, m) = 1$, on a

$$f(nm) = f(n)f(m).$$

La fonction f est dite complètement multiplicative si $f(1) = 1$ et pour tous $n, m \in \mathbb{N}^*$

$$f(nm) = f(n)f(m).$$

Définition 4.4 Soit f une fonction arithmétique, la série de Dirichlet associée à f est une série de la forme

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)n^{-s},$$

tel que $s = \sigma + it$ avec $\sigma = \operatorname{Re}(s)$ et $t = \operatorname{Im}(s)$.

Les fonctions $f(n)$ sont appelées souvent les coefficients de la série de Dirichlet, si la série est convergente dans un domaine de convergence on écrit $D_f(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} f(n)n^{-s}$ telle que $D_f(s)$ représente une fonction holomorphe dans le demi-plan de convergence. Elle est parfois appelée série génératrice de $f(n)$.

On écrit en général $s = \sigma + it$ la décomposition en partie réelle et imaginaire de la variable d'une série de Dirichlet. Cela sera fait ci-dessous parfois sans mention explicite.

Définition 4.5 Soit $D_f(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} f(n)n^{-s}$ une série de Dirichlet. L'abscisse de convergence absolue σ_a est définie comme étant le plus petit nombre réel σ_a tel que si $\sigma > \sigma_a$, alors $\sum_{n \geq 1} |f(n)| n^{-\sigma}$ converge, donc

$$\sigma_a = \inf \left\{ \sigma : \sum_{n \geq 1} |f(n)| n^{-\sigma} < +\infty \right\}.$$

Pour déterminer la région de convergence d'une série de Dirichlet nous avons les résultats suivants.

Théorème 4.5 Soit f une fonction arithmétique et $D_f(s)$ sa série de Dirichlet associée. On suppose qu'il existe un réel δ et pour tout $\varepsilon > 0$ une constante $C(\varepsilon)$ telle que pour tout entier $n \geq 1$ on a

$$|f(n)| \leq C(\varepsilon) n^{\delta+\varepsilon}.$$

Alors

1) La série de Dirichlet $D_f(s)$ converge absolument sur le demi-plan

$$\operatorname{Re}(s) > 1 + \delta.$$

2) Soit $\varepsilon > 0$, la série $D_f(s)$ converge normalement sur le demi-plan

$$\text{fermé } \operatorname{Re}(s) \geq 1 + \delta + \varepsilon.$$

Preuve. On suppose que $\operatorname{Re}(s) > 1 + \delta$, alors il existe $\alpha > 0$ tel que $\operatorname{Re}(s) \geq 1 + \delta + \alpha$, donc on a

$$|f(n)n^{-s}| \leq |f(n)| n^{-\sigma} \leq C \left(\frac{\alpha}{2} \right) n^{-1-\frac{\alpha}{2}},$$

et comme la série $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-1-\frac{\alpha}{2}}$ est convergente alors $D_f(s)$ converge absolument sur le demi-plan $\operatorname{Re}(s) > 1 + \delta$. Pour tout $s \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re}(s) \geq 1 + \delta + \varepsilon$ on a $|f(n)n^{-s}| \leq C \left(\frac{\alpha}{2}\right) n^{-1-\frac{\alpha}{2}}$ et la série $\sum_{n=1}^{+\infty} C \left(\frac{\alpha}{2}\right) n^{-1-\frac{\alpha}{2}}$ est une série convergente donc on a la convergence normal ■

4.2.2 Formule du produit Eulérien

Théorème 4.6 ([7], p21) *Soit f une fonction arithmétique multiplicative à croissance modérée¹. Alors pour tout $s \in \mathbb{C}$ tel que $D_f(s)$ converge absolument on a*

$$D_f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)n^{-s} = \prod_p \left(1 + \frac{f(p)}{p^s} + \frac{f(p^2)}{p^{2s}} + \dots + \frac{f(p^k)}{p^{ks}} + \dots \right), \quad (4.5)$$

où le produit est pris sur tous les nombres premiers et converge absolument.

Si f est une fonction arithmétique multiplicative quelconque, alors pour tout $n \geq 1$ et tout $s \in \mathbb{C}$ on a

$$\sum_{d|n} \frac{f(d)}{d^s} = \prod_{p^k || n} \left(1 + \frac{f(p)}{p^s} + \frac{f(p^2)}{p^{2s}} + \dots + \frac{f(p^k)}{p^{ks}} \right). \quad (4.6)$$

4.2.3 Exemples

Soit f une fonction multiplicative à croissance modérée, alors

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(n)}{n^s} = \prod_p \left(\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^N \frac{f(p^k)}{p^{ks}} \right). \quad (4.7)$$

1) On a

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} \quad \text{pour } (\sigma > 1).$$

Dans la formule 4.7 on pose $f(n) = 1$, on obtient

$$\zeta(s) = \prod_p \left(\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^N \frac{1}{p^{ks}} \right) = \prod_p \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{p^s}\right)^{N+1}}{1 - \frac{1}{p^s}} \right),$$

comme $\sigma > 1$, $\lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{p^\sigma}\right)^{N+1} = 0$, donc

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s} \right)^{-1}. \quad (4.8)$$

¹La fonctions f pour laquelle la série de Dirichlet a une région de convergence non vide est appelée à croissance modérée

2) Pour la fonction multiplicative μ de Möbius définie par

$$\mu(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est divisible par un carré parfait,} \\ (-1)^{\omega(n)} & \text{sinon;} \end{cases}$$

avec $\omega(n) = \sum_{p|n} 1$ la fonction nombre de diviseurs premiers distincts de l'entier $n \geq 1$.

On a

$$\begin{aligned} D_\mu(s) &= \prod_p (1 + \mu(p)p^{-s} + \mu(p^2)p^{-2s} + \dots) \\ &= \prod_p (1 - p^{-s}), \end{aligned}$$

car $\mu(p^k) = 0$ si $k \geq 2$ et $\mu(p) = -1$ donc

$$D_\mu(s) = \frac{1}{\zeta(s)}, \quad (\sigma > 1). \quad (4.9)$$

3) Pour la fonction multiplicative $d(n)$ nombre de diviseurs de l'entier $n \geq 1$, définie par

$$d(n) = \sum_{d|n} 1$$

on a

$$D_d(s) = \zeta(s)^2, \quad (\sigma > 1).$$

En effet, pour tout premier p et tout entier $\alpha \geq 1$,

$$d(p^\alpha) = \alpha + 1$$

et donc si $n = \prod_{p^\alpha || n} p^\alpha$, alors

$$d(n) = \prod_{p^\alpha || n} (\alpha + 1).$$

Si $\sigma > 1$ alors on a

$$\begin{aligned} D_d(s) &= \prod_p \left(1 + \frac{d(p)}{p^s} + \frac{d(p^2)}{p^{2s}} + \frac{d(p^3)}{p^{3s}} + \frac{d(p^4)}{p^{4s}} + \dots \right) \\ &= \prod_p \left(1 + \frac{2}{p^s} + \frac{3}{p^{2s}} + \frac{4}{p^{3s}} + \frac{5}{p^{4s}} + \dots \right) \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$= \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s} \right)^{-1} \left(1 - \frac{1}{p^s} \right) \left(1 + \frac{2}{p^s} + \frac{3}{p^{2s}} + \frac{4}{p^{3s}} + \frac{5}{p^{4s}} + \dots \right) \quad (4.11)$$

$$= \zeta(s) \prod_p \left(1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \frac{1}{p^{3s}} + \frac{1}{p^{4s}} + \dots \right).$$

$$= \zeta(s)^2, \quad (\sigma > 1).$$

Bibliographie

- [1] M. Audin, analyse complexe, PDF disponible en ligne, 2007.
- [2] J. Bélanger, Approximation et interpolation simultanée sur les ensembles fermés de \mathbb{C}^n Université de Montréal, Novembre 2005.
- [3] P. Charpentier, Analyse complexe, Université Bordeaux I, Septembre 2010.
- [4] M. Choulli, Analyse complexe, Bibliothèque nationale, Paris, Janvier 2020.
- [5] H. Cartan, *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes*. Hermann, 1995.
- [6] S. D. Fisher, complex variables.
- [7] E. Kowalski, *Un cours de théorie analytique*, Société Mathématique de France, 2004.
- [8] R. Kordonowy Shaw, On infinit products, B.S, Dickinson State College, 1964.
- [9] A. Lesfari, Variables complexes cours et exercices corrigés, Ellipses Édition Marketing S.A.,2014, rue Bargue 75740, Paris cedex 15.
- [10] J. Lehec, Analyse Complex, Université Paris-Dauphine 2019.
- [11] S. Ponnusamy, H. Silverman, complex variables with Application.2005.
- [12] J. F. Pabion, éléments d'analyse complexe, licence de mathématiques.
- [13] T. Ramond, Analyse et Converge Mathe 203, Université Paris Sud, Février 2015.
- [14] F. Rouvière, Produit infinis, Décembre 1999.
- [15] L. Rozoy,Série entieres,Université Joseph Fourier,Gernoble,Avril 2004.
- [16] F. Sehouli, Analyse 3 / A-U :2014 – 2016.
- [17] P. Tauvel, Analyse complexe pour la licence 3, Dunod, Paris, 2006.
- [18] G. Tenenbaum, Analise complexe (Notes de cours), Université de Lorraine, Faculté des sciences et technologies, Licence de Mathématiques,(LMI 6.33°) 2013.
- [19] S. Vento, Factorisation des fonctions holomorphes, Espaces de Hardy, juin 2003.
- [20] J. Wieslawa et al, problèmes d'analyse I, nombres réels, suites et séries, 2008.