

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de L'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Djilali Bounâama Khemis Miliana

FACULTÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE

DÉPARTEMENT MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE



Mémoire

pour obtenir

Le Diplôme De Master En Mathématiques

Spécialité : Analyse Mathématique et Applications

Présenté par

CHOTT AYA

Etude comparative entre quelques méthodes numériques et la
méthode de décomposition d'Adomian dans la résolution des
problèmes des équations différentielles

Soutenu le 09/07/2023 devant le jury composé de

M.Houasni	Université de Khemis Miliana	Président.
A.Said	Université de Khemis Miliana	Encadreur.
Y.Naas	Université de Khemis Miliana	Examineur 1.
L.Slimane	Université de Khemis Miliana	Examineur 2.

Année Universitaire : 2022/2023

Dédicace

*Tous les mots ne suffisent pas pour exprimer ma joie et mon acceptation de cette
réalisation ,simplement :*

Je dédie ce mémoire de Master :

Tous d'abord , à ceusi qui ont travaillé dur pour moi ,ma chère mère et ma cher père .

À ma famille : mes chers frères" Lotfi,Ilyes et Abd Ilah "

mes chers soeurs "Alaâ,Israâ et Ghofrane"

À tout ma famille

À tout mes amis sans exception

À tout personne qui m'a soutenue,aidé ou contribué de près ou de loin .

Remerciement

Celui qui ne remercie pas les gens ne remercie pas Dieu

*Tout d'abord ,je remercie mon seigneur Dieu qui m'a donné la volonté et le courage
d'accomplir ce travail*

*Je remercie le directeur de thèse Mr.Abderazak SAID qui m'a dirigé tout au long de mon travail , ses conseils et ses critiques ont été pour moi une motivation et un encouragement ,
et il s'est acquitté honnêtement de ses fonctions.*

*Je remercie ensuite, le président du jury Dr. M.Houasni pour avoir accepte d'être président de jury de ce mémoire et les membres du jury : Dr. L.Slimane et Dr. Y.Naas qui m'ont fait
l'honneur de bien vouloir étudier avec attention mon travail et pour avoir accepte
d'examiner ce mémoire.*

*Merci à mes parents et mes frères pour leurs encouragement et leur soutien
Mes sincères remerciements vont à tous les professeurs de mathématiques et d'informatique
Merci à tous ceux qui m'ont soutenu et à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin
à la réalisation de ce travail*

Table des matières

0.1	Introduction	5
1	La méthode de décomposition d'Adomian	6
1.1	Description générale de la méthode	6
1.2	Les polynômes d'Adomian	8
1.3	Convergence de la méthode d'Adomian	9
1.4	Exemples	12
2	Comparaison entre la méthode de décomposition d'Adomian modifiée et les méthodes traditionnelles	19
2.1	Application de la méthode ADM	19
2.2	La méthode de décomposition d'Adomian modifiée	20
2.3	La méthode de résolution en série	21
2.4	La méthode de calcul direct	21
2.5	Applications	22
3	Comparaison entre la méthode de décomposition d'Adomian et de la méthode d'itération variationnelle	31
3.1	Analyse des méthodes	31
3.1.1	Méthode de décomposition d'Adomian :	31
3.2	La VIM et les multiplicateurs de Lagrange	34
3.3	Exemples	35
4	Comparaison entre la méthode d'Adomian et la méthode de perturbation d'homotopie	44
4.1	La méthode de perturbation d'homotopie	44
4.2	Conclusion	51

0.1 Introduction

Les problèmes réels peuvent être modélisés à l'aide d'équations différentielles (équations différentielles ordinaires EDO, équations aux dérivées partielles EDP), mais la difficulté est d'obtenir la solution exacte des problèmes. Donc nous essayons de trouver des solutions approximative.

Des méthodes numériques approximatives sont utilisées pour trouver la solution approchée de ces problèmes comme par exemple la méthode de calcul direct, la méthode de résolution en série, la méthode d'itération Variationnelle (VIM), la méthode de perturbation d'homotopie ... (elles sont toutes des méthodes numériques), et aussi la méthode de décomposition d'Adomian. Cette dernière proposée par le professeur **G.Adomian** au début des années 80 [7]. La convergence de cette méthode a été étudiée par le professeur **Y.Cherrault** [2] [3]. Sous sa direction et à l'aide de ses collaborateurs du laboratoire **MEDIMAT** de l'université Pierre et Marie Curie de Paris VI. En 1995 l'un de ses nombreux disciples K.Abbaoui a présenté sa thèse de doctorat où il a développé les fondements mathématiques de cette méthode. La méthode de décomposition d'Adomian est une méthode semi-analytique pour la résolution des problèmes différentielles et intégrales linéaire ou non linéaire de différents types.

L'idée de base de cette méthode est la décomposition de l'opérateur différentiel en trois parties : partie linéaire facilement inversible, partie non linéaire et reste de la partie linéaire. Le terme non linéaire est écrit sous forme d'une somme infinie de polynômes spéciaux appelés polynômes d'Adomian [7]. La méthode de décomposition d'Adomian donne la solution sous forme d'une série infinie [2] qui converge vers la solution du problème.

Dans ce travail, nous allons présenter la méthode de décomposition d'Adomian et on va la comparer entre quelques d'autres méthodes numériques pour la résolution des équations différentielles. En effet ces méthodes sont : deux méthodes traditionnelles représentées dans la méthode de calcul direct et la méthode de résolution en série, la méthode d'itération variationnelle(VIM), la méthode de perturbation d'homotopie(HPM).Le but de la comparaison de notre étude et de savoir quelle est la méthode la plus efficace et la plus pratique.

Ce mémoire comprend une introduction et quatre chapitres. Dans le premier chapitre on a présenté les notions de base de la méthode de décomposition d'Adomian et la méthode pratique pour calculer les polynômes d'Adomian, on a aussi présenté des applications. Le deuxième chapitre est consacré à la comparaison entre la méthode de décomposition d'Adomian et les méthodes traditionnelles. Quant au troisième chapitre, il est l'objet de la comparaison entre la méthode de décomposition d'Adomian et la méthode d'itération variationnelle. Dans le dernier chapitre nous présenterons une comparaison entre la méthode d'Adomian et la méthode de perturbation d'homotopie.

La méthode de décomposition d'Adomian

Le but de ce chapitre est de présenter les grands principes de la méthode de décomposition d'Adomian et la méthode pratique pour calculer les polynômes d'Adomian, ainsi que la convergence de la méthode, des applications sera donnée pour bien expliquer les techniques de cette méthode.

1.1 Description générale de la méthode

Nous allons d'abord décrire la méthode sous la forme initiale présentée par G.Adomian [6]. Soit l'équation non linéaire :

$$Au = f. \tag{1.1}$$

Où A représente un opérateur différentiel non linéaire (contenant des termes linéaires et des termes non linéaires).

f une fonction analytique connue.

Le terme linéaire de l'opérateur A est décomposé en $L + R$ où L est un opérateur linéaire inversible et R est le reste de l'opérateur linéaire.

N est un terme non linéaire.

On peut écrire l'équation (1.1) sous la forme :

$$L(u) + N(u) + R(u) = f. \tag{1.2}$$

On applique l'opérateur L étant inversible, on note L^{-1} son inverse, sur l'équation (1.2) on obtient :

$$L^{-1}L(u) = L^{-1}L(f) - L^{-1}R(u) - L^{-1}N(u).$$

D'où, l'expression équivalente :

$$u = c_0 + L^{-1}(f) - L^{-1}N(u) - L^{-1}R(u). \tag{1.3}$$

Où c_0 est la constante de l'intégration.

La méthode d'Adomian consiste à chercher la solution u sous la forme d'une série :

$$u = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n. \tag{1.4}$$

On remplace (1.4) en (1.3), on obtient :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = c_0 + L^{-1}f - L^{-1}R \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) - L^{-1}N \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right). \quad (1.5)$$

On décompose l'opérateur non-linéaire N en série [2] :

$$N(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n. \quad (1.6)$$

Où les A_n sont des polynômes d'Adomian qui dépendent de $u_0, u_1, u_2 \dots, u_n$ et sont obtenus à partir de la relation suivante :

$$N(u(\lambda)) = N \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n u_n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n A_n. \quad (1.7)$$

Où

$$u(\lambda) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n u_n = u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \dots \quad (1.8)$$

et λ est un paramètre introduit par convenance.

D'où

$$A_n = \frac{1}{n!} \left[\frac{d^n}{d\lambda^n} N(u(\lambda)) \right]_{\lambda=0}.$$

En remplaçant (1.6) dans (1.5) on trouve :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = c_0 + L^{-1}f - L^{-1}R \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) - L^{-1} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} A_n \right).$$

On peut écrire les relations récursives suivantes :

$$\begin{cases} u_0 = c_0 + L^{-1}f. \\ u_1 = -L^{-1}Ru_0 - L^{-1}A_0. \\ u_2 = -L^{-1}Ru_1 - L^{-1}A_1. \\ \vdots \\ u_{n+1} = -L^{-1}Ru_n - L^{-1}A_n. \end{cases}$$

Ainsi, la solution de (1.2) est déterminée.

1.2 Les polynômes d'Adomian

Définition 1.1 :

Les polynômes d'Adomian sont définis par :

$$\begin{cases} A_0(u_0) = N(u_0), \\ A_n(u_0, u_1, u_2, \dots, u_n) = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} \left[N \left(\sum_{i=0}^{+\infty} \lambda^i u_i \right) \right]_{\lambda=0}. \end{cases} \quad (1.9)$$

Ou

$$\begin{aligned} A_0(u_0) &= N(u_0), \\ A_1(u_0, u_1) &= u_1 N'(u_0), \\ A_2(u_0, u_1, u_2) &= u_2 N'(u_0) + \frac{1}{2!} u_1^2 N''(u_0), \\ A_3(u_0, u_1, u_2, u_3) &= u_3 N'(u_0) + u_1 u_2 N''(u_0) + \frac{1}{3!} u_1^3 N'''(u_0), \\ &\vdots \end{aligned}$$

Cette formule s'écrit sous la forme :

$$A_n = \sum_{v=0}^{+\infty} c(v, n) N^{(v)}(u_0), n \geq 1. \quad (1.10)$$

Où $c(v, n)$ représente la somme de tous les produits (divisé par $m!$) des v termes u_i dont la somme des indices i est égale à n .

m : étant le nombre de répétitions des mêmes termes dans le produit.

La relation (1.10) permet de trouver les polynômes A_n , mais en pratique, il est difficile de les déterminer quand n devient grand ($n > 5$).

On va calculer les polynômes d'Adomian de quelques opérateurs non linéaires.

Exemple 1.1

Soit l'opérateur non linéaire défini par :

$$N(u) = \cos u.$$

Par définition, on a :

$$\begin{aligned}
A_0(u_0) &= N(u_0) = \cos u_0, \\
A_1(u_0, u_1) &= u_1 \frac{\partial}{\partial u_0} \cos u_0 = -u_1 \sin u_0, \\
A_2(u_0, u_1, u_2) &= u_2 \frac{\partial}{\partial u_0} \cos u_0 + \frac{1}{2!} u_1^2 \frac{\partial^2}{\partial u_0^2} \cos u_0 = -u_2 \sin u_0 - \frac{1}{2!} u_1 \cos u_0, \\
A_3(u_0, u_1, u_2, u_3) &= u_3 \frac{\partial}{\partial u_0} \cos u_0 + u_1 u_3 \frac{\partial^2}{\partial u_0^2} + \frac{1}{3!} u_1^3 \frac{\partial^3}{\partial u_0^3}, \\
&= -u_3 \sin u_0 - u_1 u_3 \cos u_0 + \frac{1}{3!} u_1^3 \sin u_0, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Exemple 1.2

On définit l'opérateur non linéaire comme suivant :

$$N(u) = \sin u.$$

Par définition, on a :

$$\begin{aligned}
A_0(u_0) &= N(u_0) = \sin u_0, \\
A_1(u_0, u_1) &= \frac{1}{1!} \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} \sin(u_0 + \lambda u_1) \right]_{\lambda=0} = u_1 [\cos(u_0 + \lambda u_1)]_{\lambda=0} = u_1 \cos u_0, \\
A_2(u_0, u_1, u_2) &= \frac{1}{2!} \left[\frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \sin(u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2) \right]_{\lambda=0} = \frac{1}{2!} \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} ((u_1 + 2\lambda u_2) \cos(u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2)) \right]_{\lambda=0} \\
&= \frac{1}{2!} [2u_2 \cos(u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2) - (u_1 + 2\lambda u_2)^2 \sin(u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2)]_{\lambda=0} \\
&= u_2 \cos u_0 - \frac{1}{2!} u_1 \sin u_0, \\
A_3(u_0, u_1, u_2, u_3) &= \frac{1}{3!} \left[\frac{\partial^3}{\partial \lambda^3} \sin(u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \lambda^3 u_3) \right]_{\lambda=0} = u_3 \cos u_0 + \frac{1}{6} u_1^3 \cos u_0 - u_1 u_2 \sin u_0, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

1.3 Convergence de la méthode d'Adomian

Soit l'équation différentielle [3] :

$$u - Nu = f, \quad (1.11)$$

qu'on l'appelle la forme canonique où u est la solution recherchée et N est l'opérateur non linéaire qui est défini par une série infinie et f est une fonction donnée.

La méthode de décomposition consiste à écrire la solution sous forme d'une série :

$$u = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

On décompose le terme non linéaire sous la forme d'une série :

$$N(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n.$$

Alors l'équation (1.11) s'écrit comme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = f + \sum_{n=0}^{+\infty} A_n.$$

Où

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0 = f \\ u_1 = A_0 \\ u_2 = A_1 \\ \vdots \\ u_{n+1} = A_n \end{array} \right.$$

Théorème 1.1

Si la série $\sum_{n=0}^{+\infty} A_n$ converge, alors la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge et la réciproque est vraie.

Les premières preuves de convergence ont été précisées par la professeur Yves Cherruault [3]. Elle sont basées sur la méthode du point fixe.

Notons d'abord que la méthode appliqué à (1.11) se ramène à la recherche d'une suite défini par

$$\left\{ \begin{array}{l} S_0 = 0 \\ S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n \end{array} \right. .$$

Et vérifiant la relation récurrence suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} S_0 = 0 \\ u_0 = f \\ S_{n+1} = N(u_0 + S_n), n = 0, 1, 2, \dots \end{array} \right. .$$

D'où théorème suivant.

Théorème 1.2

Si l'opérateur N est une application contractante ($\|N\| \leq \delta < 1$), alors la suite $(s_n)_n$ est telle que

$$\begin{cases} S_0 = 0 \\ S_{n+1} = N(u_0 + S_n), n = 0, 1, 2, \dots \end{cases} ,$$

et converge vers S où S est la solution de l'équation $S_{n+1} = N(u_0 + S_n)$

Preuve

On a :

$$\begin{aligned} S_{n+1} - S_n &= N(u_0 + S_n) - N(u_0 + S) \\ \|S_{n+1} - S_n\| &= \|N(u_0 + S_n) - N(u_0 + S)\| \leq \|N\| \|S_n - S\| \\ &< \delta \|S_n - S\| \\ &< \delta^2 \|S_{n-1} - S\| \\ &< \delta^3 \|S_{n-2} - S\| \\ &\vdots \\ &< \delta^n \|S_1 - S\|. \end{aligned}$$

D'où la convergence de la suite $(S_n)_n$.

corollaire 1.1

Si N est une contraction alors les séries des u_n et des A_n sont convergentes. De plus $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est la solution de l'équation canonique.

1.4 Exemples

Exemple 1.4.1

Soit le problème suivant :

$$\begin{cases} u''(x) - u(x) = 1 \\ u(0) = 0, u'(0) = 1 \end{cases} ;$$

on pose :

$$\begin{cases} Lu = u''(x) \\ Ru = u(x) \\ Nu = 0 \\ L = \frac{d^2}{dx^2}(\cdot) \\ L^{-1} = \int_0^x \int_0^x [\cdot] dx dx \end{cases} .$$

Alors l'équation devient :

$$Lu = u + 1.$$

On applique L^{-1} on trouve :

$$L^{-1}Lu = L^{-1}u + L^{-1}(1)$$

$$\int_0^x \int_0^x [Lu] dx dx = \int_0^x \int_0^x [u] dx dx + \int_0^x \int_0^x [1] dx dx$$

$$u(x) - xu'(0) - u(0) = L^{-1}u + \frac{x^2}{2}$$

$$u(x) = x + L^{-1}u + \frac{x^2}{2}.$$

On cherche la solution sous forme d'une série donnée par :

$$u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x),$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = x + L^{-1} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) + \frac{x^2}{2}.$$

La relation récurrence :

$$\begin{cases} u_0 = x + \frac{x^2}{2} \\ u_{n+1} = L^{-1}u_n \end{cases}.$$

Par identification :

$$u_0 = x + \frac{x^2}{2}$$

$$u_1 = L^{-1}u_0 = \int_0^x \int_0^x [x + \frac{x^2}{2}] dx dx = \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} = \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}$$

$$u_2 = L^{-1}u_1 = \int_0^x \int_0^x [\frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}] dx dx = \frac{x^5}{120} + \frac{x^5}{720} = \frac{x^5}{5!} + \frac{x^5}{6!}$$

⋮

La solution est donnée sous forme série suivant :

$$u(x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^5}{6!}.$$

Ce qui donnée sous forme série :

$$u(x) = \exp(x) - 1$$

Exemple 1.4.2

Considérons le problème

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} & 0 < x < 1, t \geq 0 \\ u(x, 0) = 2x + 1 \\ \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \cos x \end{cases} \quad (1)$$

On pose

$$\left\{ \begin{array}{l} L_{xx}(\cdot) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ L_{tt}(\cdot) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \\ L_{tt}^{-1}(\cdot) = \int_0^t \left(\int_0^t (\cdot) dt \right) dt \\ L_{xx}^{-1}(\cdot) = \int_0^t \left(\int_0^t (\cdot) dx \right) dx \end{array} \right.$$

l'équation (1) s'écrit alors

$$L_{xx}(u) = L_{tt}(u)$$

En appliquant l'opérateur inverse L_{tt}^{-1} , on trouve

$$L_{tt}^{-1}L_{xx}(u) = L_{tt}^{-1}L_{tt}(u)$$

Où

$$L_{tt}^{-1}L_{tt}(u) = u(x, t) - u(x, 0) - x \frac{\partial u(x, 0)}{\partial x}$$

On cherche la solution sous la forme d'une série

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x, t)$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x, t) = u(x, 0) + x \frac{\partial u(x, 0)}{\partial x} + L_{tt}^{-1}L_{xx}(u_n(x, t))$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0(x, t) = u(x, 0) + x \frac{\partial u(x, 0)}{\partial x} \\ u_{n+1}(x, t) = L_{tt}^{-1}L_{xx}(u_n(x, t)) \quad n \geq 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0(x, t) = (2x + 1) + t \cos x \\ u_1(x, t) = L_{xx}^{-1} L_{tt}(u_0(x, t)) = \int_0^t \left[\int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x^2} (u_0(x, t)) dt \right] dt = -\frac{t^3}{3!} \cos x \\ u_2(x, t) = L_{tt}^{-1} L_{xx}(u_1(x, t)) = \int_0^t \left[\int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x^2} (u_1(x, t)) dt \right] dt = \frac{t^5}{5!} \cos x \\ u_3(x, t) = L_{tt}^{-1} L_{xx}(u_2(x, t)) = \int_0^t \left[\int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x^2} (u_2(x, t)) dt \right] dt = -\frac{t^7}{7!} \cos x \\ u_4(x, t) = L_{tt}^{-1} L_{xx}(u_3(x, t)) = \int_0^t \left[\int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x^2} (u_3(x, t)) dt \right] dt = \frac{t^9}{9!} \cos x \\ \vdots \end{array} \right.$$

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x, t) = (2x + 1) + \left(t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \frac{t^9}{9!} \cdots \right) \cos x$$

$$u(x, t) = (2x + 1) + \cos x \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

On sait que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin t$$

Alors la solution de ce problème est

$$u(x, t) = (2x + 1) + \cos x \sin t$$

Exemple 1.4.3

Considérons le problème

$$\begin{cases} y' = y^2 & , t \neq 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

On a

$$\begin{cases} Ly = y' \\ Ry = 0 \\ Ny = y^2 \end{cases}$$

Avec $L = \frac{\partial}{\partial t}(\cdot)$

L^{-1} représente une simple intégration de 0 à t .

On trouve :

$$y = \sum_{n=0}^{+\infty} y_n = y(0) + L^{-1} \sum_{n=0}^{+\infty} A_n$$

La relation itérative du problème est :

$$\begin{cases} y_0 = 1 \\ y_{n+1} = L^{-1} A_n \end{cases}$$

Les polynômes d'Adomian sont :

$$A_0 = y_0^2$$

$$A_1 = 2y_0y_1$$

$$A_2 = y_1^2 + 2y_0y_2$$

$$A_3 = 2y_0y_3 + 2y_1y_2$$

\vdots

Par conséquent on a :

$$y_0 = 1$$

$$y_1 = L^{-1}(A_0) = t$$

$$y_2 = L^{-1}(A_1) = t^2$$

$$y_3 = L^{-1}(A_2) = t^3$$

\vdots

D'où

$$y(t) = 1 + t + t^2 + t^3 + \dots$$

La solution donnée par :

$$y(t) = \frac{1}{1-t}$$

Exemple 1.4.4

Soit l'équation intégrale de Volterra suivante :

$$u(x) = 1 - \int_0^x u(t) dt$$

où $f(x) = 1$, $\lambda = -1$, et $K(x, y) = 1$,
alors la solution s'écrit comme suit :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = 1 - \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} u_n dt$$

le premier terme est $u_0(x) = 1$ et la relation :

$$u_{k+1} = - \int_0^x u_k(t) dt, k \geq 0$$

donc :

$$u_0(x) = 1$$

$$u_1(x) = - \int_0^x u_0(t) dt = - \int_0^x 1 dt = -x$$

$$u_2(x) = - \int_0^x u_1(t) dt = - \int_0^x (-t) dt = \frac{1}{2!} x^2$$

$$u_3(x) = - \int_0^x u_2(t) dt = - \int_0^x \frac{1}{2!} t^2 dt = - \frac{1}{3!} x^3$$

$$u_4(x) = - \int_0^x u_3(t) dt = - \int_0^x - \frac{1}{3!} t^3 dt = \frac{1}{4!} x^4$$

donc la solution converge vers :

$$u(x) = e^x$$

Exemple 1.4.5

Considérons l'équation suivante :

$$\begin{cases} \frac{d^2 u}{dt^2} + \sin u = 0 \\ u(0) = \beta, \\ u'(0) = 0 \end{cases}$$

On a :

$$\begin{cases} L = \frac{d^2}{dt^2} \\ N(u) = \sin u \end{cases}$$

Donc

$$Lu + Nu = 0$$

On cherche la solution u sous la forme suivante :

$$u = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

En appliquant une double intégration entre 0 et t de l'équation ci-dessous on obtient :

$$u = \beta - L^{-1}N(u),$$

avec

$$N(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n.$$

Les polynômes d'Adomian sont :

$$A_0 = \sin u_0$$

$$A_1 = u_1 \cos u_0$$

$$A_2 = u_2 \cos u_0 - \frac{u_1^2}{2!} \sin u_0 \quad A_3 = u_3 \cos u_0 - u_1 u_2 \sin u_0 \frac{u_1^3}{3!} \cos u_0$$

⋮

Le schéma récursif suivant :

$$u_0 = \beta$$

$$u_1 = -\frac{t^2}{2!} \sin \beta$$

$$u_2 = \frac{t^4}{4!} \sin \beta \cos \beta$$

$$u_3 = -\frac{t^6}{6!} (\sin \beta \cos^2 \beta - 3 \sin^3 \beta)$$

⋮

Conclusion

La méthode de décomposition d'Adomian donne la solution des problèmes différentiel de différents types sous la forme d'une série convergente vers la solution exacte.

Comparaison entre la méthode de décomposition d'Adomian modifiée et les méthodes traditionnelles

Dans ce chapitre, nous menons une étude comparative entre la méthode de décomposition d'Adomian modifiée et deux méthodes traditionnelles représenté dans la méthode de calcul direct et la méthode de résolution en série, pour la résolution les équations intégrales non linéaires et les équation intégrales différentielles non linéaires. Les équations intégrales différentielles non linéaire de Fredholm sont donnés par :

$$u^{(n)} = f(x) + \int_0^1 K(x, t) \{R(u(t)) + N(u(t))\} dt, u^{(k)}(x) = b_k, 0 \leq k \leq (n - 1), n \geq 0; \quad (2.1)$$

et les équations intégrales différentielles non linéaire de Volterra sont donnés par :

$$u^{(n)} = f(x) + \int_0^x K(x, t) \{R(u(t)) + N(u(t))\} dt, u^{(k)}(x) = b_k, 0 \leq k \leq (n - 1), n \geq 0. \quad (2.2)$$

Où $u^n(x)$ est la nième dérivée de la fonction $u(x)$ qui sera déterminée et $K(x, t)$ est une le noyau de l'équation intégrale, $f(x)$ est une fonction analytique.

$R(u)$ est une fonction linéaire de u .

$N(u)$ est une fonction non linéaire de u .

2.1 Application de la méthode ADM

On considérons les équations intégrales différentielle de Volterra (2.2).

$$u^{(n)} = f(x) + \int_0^x K(x, t) \{R(u(t)) + N(u(t))\} dt, u^{(k)}(x) = b_k, 0 \leq k \leq (n - 1), n \geq 0. \quad (2.3)$$

Où $u^n(x)$ est la nième dérivée de la fonction $u(x)$ et b_k sont les conditions initiales. En intégrant les deux côtés de l'équation (2.3) n fois. On obtient :

$$u(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} b_k u^k + L^{-1}(f(x)) + L^{-1} \left(\int_0^x K(x, t) \{R(u(t)) + N(u(t))\} dt \right). \quad (2.4)$$

Où L est supposé inversible.

Et L^{-1} est un opérateur intégrale n fois.

La méthode d'Adomian standard définit la solution $u(x)$ sous la forme d'une série :

$$u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x).$$

Où les composants u_0, u_1, u_2, \dots sont généralement déterminés de manière récursive en utilisant la relation suivante :

$$\begin{cases} u_0 = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} b_k u^k + L^{-1}(f(x)) \\ u_{k+1} = L^{-1}(Ru_k) + L^{-1}(Nu_k), k \geq 0 \end{cases} \quad (2.5)$$

2.2 La méthode de décomposition d'Adomian modifiée

La méthode de décomposition d'Adomian modifiée a été développée par Wazwaz [11] [12], où de nombreux travaux ont montré que cette modification est efficace et réduit la taille du compte si elle n'est pas comparée à la méthode d'Adomian standard, pour l'appliquer, on suppose que la fonction peut être divisée f en la somme de deux parties à savoir f_0 et f_1

$$f = f_0 + f_1. \quad (2.6)$$

Nous supposons que la partie f_0 soit affectée au composant u_0 , tandis que la partie restante f_1 soit combinée avec les autres termes donnée dans l'équation. (2.5) pour définir u_1 alors la relation d'itération s'écrit comme :

$$\begin{cases} u_0 = f_0. \\ u_1 = f_1 + L^{-1}(Ru_0) + L^{-1}(Nu_0). \\ u_{k+2} = L^{-1}(Ru_{k+1}) + L^{-1}(Nu_{k+1}), k \geq 0. \end{cases} \quad (2.7)$$

La comparaison du schéma récursif (2.5) de la méthode de la méthode de décomposition d'Adomian standard avec le schéma récursif (2.7) de la technique modifiée conduit à la conclusion que dans (2.5) la composante u_0 définie par la fonction f , alors que dans (2.7), la composante u_0 définie par une partie f_0 de f . La partie f_1 de est ajoutée à la définition du composant u_1 dans (2.5).

Remarque 2.1

Le succès de cette méthode dépend principalement du bon choix des parties f_0 et f_1 . Il n'y a pas de critères pour juger quelles formes de f_0 et f_1 peuvent être supposées produire l'accélération demandée. Il semble que les essais soient les seuls critères pouvant être appliqués jusqu'à présent.

2.3 La méthode de résolution en série

Cette méthode une méthode traditionnelle qui dépend principalement des séries de Taylor et a également été utilisée dans les équations différentielles et intégrales. cependant, la méthode est principalement utilisée pour les équations de Volterra. Dans ce qui suit, nous présentons une brève idée de la méthode où les détails peuvent être trouvés dans de nombreuses références telle que [9] [13]. En supposant que $u(x)$ est une fonction analytique, elle peut donc être représentée par une série donnée par :

$$u(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k. \quad (2.8)$$

Où a_k sont des constantes qui seront déterminées récursivement les conditions initiales prescrites où nous utilisons

$$\begin{cases} a_0 = u(0). \\ a_1 = u'(0). \\ a_2 = \frac{1}{2!}u''(0). \\ \vdots \end{cases} \quad (2.9)$$

On remplace (2.8) dans (2.3) et on supposant que le noyau $K(x)$ est séparable comme $K(x, t) = g(x)h(t)$ on trouve :

$$\left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k \right)^n = f(x) + g(x) \int_0^x h(t) \left\{ R \left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k t^k \right) + N \left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k t^k \right) \right\} dt. \quad (2.10)$$

Notez qu'en utilisant cette méthode, nous avons abordé le problème de manière simple bien que nous puissions intégrer les deux côtés de l'équation (2.3). En utilisant la série de Taylor pour $f(x)$, $g(x)$ et $h(x)$ et en égalisant les coefficients de puissances similaires des deux côté de l'équation résultante, nous pouvons facilement déterminer les coefficients a_k , $k \geq 0$.

2.4 La méthode de calcul direct

Cette méthode est une méthode traditionnelle couramment utilisée pour traiter de nombreuses équation de Fredholm. sans perte de généralité, on considère les équations intégrales différentielles non linéaires de Fredholm

$$u^{(n)} = f(x) + \int_0^1 K(x, t) \{R(u(t)) + N(u(t))\} dt, u^{(k)}(x) = b_k, 0 \leq k \leq (n-1), n \geq 0. \quad (2.11)$$

Où $u^{(n)}(x)$ est la nième dérivée de la fonction $u(x)$ et b_k sont les conditions initiales. On décompose l'intégrale du côté droit est égale à une constante,

$$\alpha = \int_0^1 h(t) \{R(u(t)) + N(u(t))\} dt. \quad (2.12)$$

Et donc (2.10) devient

$$u^{(n)} = f(x) + \alpha g(x). \quad (2.13)$$

On intégrant les côtés de l'équation (2.3) n fois et en utilisant les conditions initiales on obtient :

$$u(x) = q(x, \alpha) \quad (2.14)$$

2.5 Applications

Exemple 2.5.1

Considérons l'équation intégrale non linéaire de Fredholm

$$u(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + 2 - \int_0^1 \left(1 + \frac{\pi}{2} \left[\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) \sin^2\left(\frac{\pi}{2}t\right) + u^3(t) \right]\right) dt. \quad (2.15)$$

L'utilisation de la ADM modifiée donne :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + 2 - \int_0^1 \left(1 + \frac{\pi}{2} \left[\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) \sin^2\left(\frac{\pi}{2}t\right) + N(u(t)) \right]\right) dt. \quad (2.16)$$

Où $N(u) = u^3$.

On divise f en deux parties définies par :

$$f_0(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right),$$

$$f_1(x) = 2.$$

En utilisant le schéma récursif (2.7) on obtient :

$$\begin{aligned} u_0(x) &= \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right). \\ u_1 &= 2 - \int_0^1 \left(1 + \frac{\pi}{2} \left[\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) \sin^2\left(\frac{\pi}{2}t\right) + \cos^3\left(\frac{\pi}{2}t\right) \right]\right) dt, \\ u_1 &= 2 - \int_0^1 \left(1 + \frac{\pi}{2} \left[\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) \left(\sin^2\left(\frac{\pi}{2}t\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right) \right]\right) dt, \\ u_1 &= 2 - \int_0^1 \left(1 + \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right) dt, \\ u_1 &= 2 - \int_0^1 1 dt - \int_0^1 \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) dt \\ u_1 &= 2 - 1 - \int_0^1 \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) dt = 0. \\ u_{k+2} &= 0, k \geq 0. \\ &\vdots \end{aligned} \quad (2.17)$$

Compte tenu de (2.17), la solution exacte est donnée par

$$u(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right).$$

L'utilisation de la méthode de calcul direct donne :

$$u(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + (2 - \alpha). \quad (2.18)$$

Où :

$$\alpha = \int_0^1 \left(1 + \frac{\pi}{2} \left[\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) \sin^2\left(\frac{\pi}{2}t\right) + u^3(t) \right]\right) dt. \quad (2.19)$$

En remplace (2.19) dans (2.18) on trouve :

$$\alpha = \int_0^1 \left(1 + \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) \sin^2\left(\frac{\pi}{2}t\right) + \frac{\pi}{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) + (2 - \alpha)\right)^3\right) dt,$$

$$\alpha = \int_0^1 \left(1 + \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) \sin^2\left(\frac{\pi}{2}t\right) + \frac{\pi}{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) + (2 - \alpha)\right) \left(\cos^2\left(\frac{\pi}{2}t\right) + (2 - \alpha)^2 + 2 \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)(2 - \alpha)\right)\right) dt.$$

$$\alpha = \int_0^1 1 dt + \frac{\pi}{2} \int_0^1 \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) \sin^2\left(\frac{\pi}{2}t\right) dt + \frac{\pi}{2} \int_0^1 \cos^3\left(\frac{\pi}{2}t\right) dt + \frac{3\pi}{2} (2 - \alpha)^2 \int_0^1 \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) dt$$

$$+ \frac{3\pi}{2} (2 - \alpha) \int_0^1 \cos^2\left(\frac{\pi}{2}t\right) dt + \int_0^1 \frac{\pi}{2} (2 - \alpha)^3 dt.$$

Alors :

$$\alpha = -\frac{\pi}{2}\alpha^3 + 3(\pi + 1)\alpha^2 - \left(12 + \frac{27\pi}{4}\right)\alpha + \left(14 + \frac{11\pi}{2}\right)$$

$$\alpha = (\alpha - 2) \left(-\frac{\pi}{2}\alpha^2 + (2\pi + 3)\alpha - \left(7 + \frac{11}{4}\pi\right)\right).$$

Donc

$$\alpha = 2, \frac{8\pi + 12 \pm 2i\sqrt{6\pi^2 + 8\pi - 36}}{4\pi}, i = \sqrt{-1}.$$

L'utilisation de valeurs réelle de $\alpha = 2$ dans (2.19) conduit à la solution exacte obtenue ci-dessus en utilisant la méthode modifiée. Deux solutions plus complexes peuvent être obtenues. L'existence de solutions multiples est des équations non linéaires normales. il convient de noter que la méthode de décomposition modifiée ne donne qu'une seule solution. Cela ne signifie pas que les équation non linéaires ont une solution unique. C'est la caractéristique de la méthode.

Exemple 2.5.2

Considérons maintenant l'équation intégrale non linéaire de Volterra

$$u(x) = \tan x - \frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{2}x + \int_0^x \left[\frac{1}{1+u^2(t)} \right] dt. \quad (2.20)$$

L'utilisation de la ADM modifiée donne :

$$f_0(x) = \tan x,$$

$$f_1(x) = \frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{2}x.$$

En utilisant le schéma récursif (2.7) on obtient :

$$u_0(x) = \tan x.$$

$$u_1(x) = \frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{2}x + \int_0^x \left[\frac{1}{1+\tan^2(t)} \right] dt,$$

$$= \frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{2}x + \int_0^x [\cos^2 t] dt,$$

$$= \frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{2}x + \int_0^x \frac{1}{2}(1 + \cos 2t),$$

$$= 0.$$

$$u_{k+2}(x) = 0.$$

⋮

La solution exacte est donnée par

$$u(x) = \tan x.$$

L'utilisation de la méthode de résolution en série donne :

$$a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + \dots = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \dots - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^3 + \dots + \frac{1}{2}x - \frac{a_1^2}{3}x^3 - \frac{1}{2}a_1a_2x^4 + \dots$$

Alors

$$a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + \dots = x + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}(2 - a_1^2)x^3 - \frac{1}{2}a_1a_2x^4 + \frac{1}{5}(a_1^4 - a_2^2 - a_1a_3 + 1)x^5 + \dots$$

Correspondant nous trouvons :

$$\begin{aligned} a_1 &= 1. \\ a_2 &= 0. \\ a_3 &= \frac{1}{3}. \\ a_4 &= 0. \\ a_5 &= \frac{2}{15}. \end{aligned} \tag{2.21}$$

La substitution des résultats de (2.21) dans (2.8) donne la solution en série

$$u(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \dots$$

$$u(x) = \tan x.$$

Exemple 2.5.3

Considérons l'équation intégrale différentielle non linéaire de Fredholm

$$u''(x) = \sinh x + x - \int_0^1 x(\cosh^2 t - u^2(t))dt, u(0) = 0, u'(0) = 1. \tag{2.22}$$

Intégrer les deux côtés deux fois de 0 à x donne :

$$u(x) = \sinh x + \frac{1}{6}x^3 - L^{-1} \left(\int_0^1 x(\cosh^2 t - u^2(t))dt \right). \tag{2.23}$$

Où L^{-1} est un opérateur intégral double.

L'utilisation de la ADM modifiée donne :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = \sinh x + \frac{1}{6}x^3 - L^{-1} \left(x \int_0^1 \left(\cosh^2 t - \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t) \right)^2 \right) dt \right).$$

Nous décomposons $f(x)$ en deux parties comme suit

$$f_0 = \sinh x,$$

$$f_1 = \frac{1}{6}x^3.$$

Alors on a la relation récursive

$$u_0 = \sinh x.$$

$$u_1 = \frac{1}{6}x^3 - L^{-1} \left(x \int_0^1 (\cosh^2 t - (u_0(t))^2) dt \right),$$

$$u_1 = \frac{1}{6}x^3 - L^{-1} \left(x \int_0^1 1 dt \right),$$

$$u_1 = \frac{1}{6}x^3 - \int_0^x \int_0^x x dx dx,$$

$$u_1 = \frac{1}{6}x^3 - \int_0^x \frac{1}{2}x^2 dx,$$

$$u_1 = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{6}x^3,$$

$$u_1 = 0.$$

$$u_{k+2} = 0, k \geq 0.$$

⋮

Compte tenu de (2.24), la solution exacte est donnée par

$$u(x) = \sinh x.$$

L'utilisation de la méthode de calcul direct donne :

$$u(x) = \sinh x + \frac{1}{6}(1 - \alpha)x^3. \quad (2.25)$$

Où :

$$\alpha = \int_0^1 (\cosh^2 t - (u(t))^2) dt. \quad (2.26)$$

En remplace (2.26) dans (2.27) donne

$$\alpha = \int_0^1 \left(\cosh^2 t - \left(\sinh t + \frac{1}{6}(1 - \alpha)t^3 \right) \right)^2 dt,$$

$$\alpha = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{36}(1 - \alpha)^2 t^6 - \frac{1}{3} \sinh t(1 - \alpha)t^3 \right) dt,$$

$$\alpha = 1 - \frac{1}{252} - \frac{\alpha^2}{252} + \frac{\alpha}{126} - \frac{(1 - \alpha)}{3} \cosh 1 + (1 - \alpha) \sinh 1 - 2(1 - \alpha) \cosh 1 + 2(1 - \alpha) \sinh 1,$$

$$\alpha = \frac{\alpha}{126} + \frac{\alpha^2}{252} + 3 \sinh 1(1 - \alpha) - \frac{7}{3} \cosh 1(1 - \alpha) + \frac{251}{252}.$$

De sorte que

$$\begin{aligned} \alpha &= 1, \\ \alpha &= -251 + 588 \cosh 1 - 756 \sinh 1. \end{aligned}$$

Le dernier résultat donne les deux solutions exactes

$$u(x) = \sinh x.$$

Et

$$u(x) = \sinh x + (42 - 98 \cosh 1 + 126 \sinh 1)x^3.$$

Il est clair que deux solutions exactes sont obtenues en utilisant la méthode traditionnelle où la première solution est la seule solution exacte obtenue par la méthode de décomposition d'Adomian modifiée

Exemple 2.5.4

En considérant l'équation intégrale différentielle non linéaire de Volterra

$$u'(x) = 1 + \cos x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x + 2 \sin x - 2x \cos x - \frac{1}{2} \sin x \cos x - \int_0^x [u^2(x)]dt, u(0) = 0.$$

En intégrant les deux côtés de 0 à x , nous trouvons

$$u(x) = x + \sin x + 4 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{4}x^2 - 4 \cos x - 2x \sin x - \frac{1}{4} \sin^2 x - L^{-1} \left(\int_0^x [u^2(t)]dt \right).$$

L'utilisation de la ADM modifiée donne :

$$f_0(x) = x + \sin x,$$

$$f_1(x) = 4 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{4}x^2 - 4 \cos x - 2x \sin x - \frac{1}{4} \sin^2 x.$$

Alors on a la relation récursive

$$u_0(x) = x + \sin x.$$

$$u_1(x) = 4 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{4}x^2 - 4 \cos x - 2x \sin x - \frac{1}{4} \sin^2 x - L^{-1} \left(\int_0^x [u_0^2(t)]dt \right),$$

$$u_1(x) = 4 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{4}x^2 - 4 \cos x - 2x \sin x - \frac{1}{4} \sin^2 x - \int_0^x \int_0^x (x^2 + \sin^2 x + 2x \sin x) dx dx,$$

$$u_1(x) = 0.$$

$$u_{k+2}(x) = 0, k \geq 0.$$

⋮

(2.27)

Comme

$$\begin{aligned} & \int_0^x \int_0^x (x^2 + \sin^2 x + 2x \sin x) dx dx \\ &= \int_0^x \left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \sin x \cos x - 2x \cos x + 2 \sin x \right) dx \\ &= \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \sin^2 x \right) - 2x \sin x + \int_0^x 2 \sin x dx + 2 \cos x + 2 \\ &= \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{4}x^2 - 4 \cos x - 2x \sin x - \frac{1}{4} \sin^2 x + 4. \end{aligned}$$

On a vu que la solution exacte

$$u(x) = x + \sin x.$$

L'utilisation de la méthode de résolution en série donne :

$$u(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k x^k. \quad (2.28)$$

Alors

$$\begin{aligned} & a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + \dots \\ &= 2x - \frac{1}{3}x^3 + \left(\frac{1}{3} - \frac{a_1^2}{12} \right) x^4 + \left(\frac{1}{5!} - \frac{a_1 a_2}{10} \right) x^5 + \left(-\frac{1}{45} - \frac{a_1 a_3}{15} - \frac{a_2^2}{30} \right) x^6 + \dots \end{aligned}$$

L'équation des coefficients de puissances similaires de x des deux côtés donne

$$a_1 = 2.$$

$$a_2 = 0.$$

$$a_3 = \frac{1}{3!}.$$

$$a_4 = 0.$$

$$a_5 = \frac{1}{5!}.$$

$$a_6 = 0.$$

La solution sous forme de série est donnée par

$$u(x) = x + \left(x - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!}x^5 + \dots \right).$$

Donc

$$u(x) = x + \sin x.$$

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons mené une étude comparative entre la méthode de décomposition modifiée et les méthodes traditionnelles : calcul direct et résolution en série. La méthode de décomposition d'Adomian modifiée est mise oeuvre de manière simple et accélère la convergence rapide de la solution de décomposition en série. La solution exacte est obtenue en deux itérations seulement pour tous les modèles examinés. De plus, les polynômes d'Adomian, qui entraîneraient une intégration et une multiplication difficiles des termes dans un schéma Adomian, n'ont pas été utilisés, ce qui donne à la méthode de décomposition modifiée un avantage par rapport à la méthode d'Adomian standard. cependant, la méthode de décomposition modifiée ne fournit qu'une seule solution même si les modèles étudiés sont non linéaires. Les deux méthodes traditionnelles souffrent du dur labeur des calculs. cependant, les méthodes traditionnelles ont pu fournir plus d'une solution, qui est la théorie des équations non linéaires. D'autres méthodes traditionnelles, qui sont généralement utilisées pour résoudre analytiquement et numériquement des équations intégrales, ne sont pas examinées dans ce travail, en raison de l'énorme volume de calculs requis par ces méthodes. En général, les méthodes modifiées sont fiables et plus efficaces par rapport aux autres techniques.

Comparaison entre la méthode de décomposition d'Adomian et de la méthode d'itération variationnelle

Dans ce chapitre, nous visons à mener une étude comparative entre la méthode de ADM et VIM pour résoudre les équations de Lane-Emden de première et deuxième espèce.

3.1 Analyse des méthodes

3.1.1 Méthode de décomposition d'Adomian :

Nous écrivons d'abord l'équation de Lane-Emden générale comme :

$$\begin{cases} \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{\alpha}{x} \frac{dy}{dx} + g(y) = 0, \alpha \geq 0 \\ y(0) = \beta \\ \frac{dy}{dx}(0) = 0 \end{cases} . \quad (3.1)$$

Nous réécrivons Lane-Emden généralisé dans la théorie des opérateur Adomian [13]

$$Ly + Ny = 0.$$

Où

$$Ly = \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{\alpha}{x} \frac{dy}{dx},$$

$$Ny = g(y).$$

Pour surmonter le comportement singulier lorsque $x = 0$, on réécrit l'opérateur différentiel linéaire L

$$Ly = t^{-\alpha} \frac{dy}{dt} \left(s^{\alpha} \frac{dy}{ds} \right).$$

Le coefficient linéaire inverse est

$$L^{-1} = \int_0^x t^{-\alpha} \int_0^t s^{\alpha}(\cdot) ds dt.$$

On réécrit une équation Lane-Emden

$$Ly = -Ny.$$

En appliquant le coefficient linéaire inverse des deux côté, nous obtenons

$$L^{-1}Ly = L^{-1}Ny.$$

Pour déterminer le côté gauche, nous avons

$$L^{-1}Ly = y - \Phi.$$

Où

$$L\Phi = 0.$$

Et Φ : est la constante de l'intégration.

Cela donne

$$y = \Phi - L^{-1}Ny.$$

En notant $L^{-1}Ly$ on trouve que

$$\begin{aligned}
L^{-1}Ly &= \int_0^x t^{-\alpha} \int_0^t s^\alpha \left(y'' + \frac{\alpha}{s} y' \right) ds dt \\
&= \int_0^x t^{-\alpha} \int_0^t (s^\alpha y'' + \alpha s^{\alpha-1} y') ds dt \\
&= \int_0^x t^{-\alpha} \left(t^\alpha y' - \int_0^t \alpha s^{\alpha-1} y' ds + \int_0^t \alpha s^{\alpha-1} y' ds \right) dt \\
&= \int_0^x y' dt \\
&= y(x) - y(0) \\
&= y(x) - \beta.
\end{aligned}$$

Où l'intégration par parties a été utilisée pour $s^\alpha y''$.

L' ADM admet l'utilisation de la série de décomposition infinie

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} y_n. \quad (3.2)$$

Pour résoudre $y(x)$, et la série infinie des polynômes

$$g(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n(y_0, y_1, \dots, y_n). \quad (3.3)$$

Pour le terme non linéaire $g(y)$, où les composantes y_n de la solution y seront déterminées récursivement et les A_n sont les polynômes d'Adomian [1][4][9]

En remplace (3.2) et (3.3) dans (3.1) on obtient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} y_n = \beta - L^{-1} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} A_n(y_0, y_1, \dots, y_n) \right).$$

Le schéma récursif

$$\begin{cases} y_0(x) = \beta. \\ y_{k+1}(x) = -L^{-1}(A_k). \end{cases} ; \quad (3.4)$$

ou équivalent

$$\begin{cases} y_0(x) = \beta. \\ y_{k+1}(x) = -\int_0^x t^{-\alpha} \int_0^t s^\alpha A_k ds dt. \end{cases} \quad (3.5)$$

Nous observons que L'ADM nécessite le calcul des polynômes d'Adomian appropriés à la non-linéarité spécifique du système, ce qui peut devenir quelque peu fastidieux pour les composants de solution d'ordre supérieur. cependant, plusieurs nouveaux algorithmes et sous-programmes efficaces peuvent atténuer cet effet en générant automatiquement les polynômes d'Adomian rapidement et à des ordres élevés lors du calcul des approximations de la solution. Lorsqu'il est correctement appliqué, nous avons observé que L'ADM conduit à des séries faciles à intégrer et donc à une programmation pratique pour la résolution d'équations différentielles non linéaires. Nous avons présenté un nouvel algorithme de solution pour l'équation de Lane-Emden généralisée pour toute non-linéarité de système analytique et pour toute géométrie de modèle caractérisée par toutes les valeurs réelles positives possibles du coefficient de système α .

3.2 La VIM et les multiplicateurs de Lagrange

Dans cette section, nous allons présenter les étapes essentielles pour l'utilisation du VIM et la détermination des multiplicateurs de Lagrange pour différentes valeurs de α . Considérons l'équation différentielle :

$$Ly + Ny = g(t), \quad (3.6)$$

où L et N sont opérateurs linéaires et non linéaire, respectivement, et $g(t)$ le terme source est-il. Pour utiliser la VIM, une fonctionnelle de correction pour l'équation (3.6) doit être utilisé sous la forme :

$$y_{n+1}(x) = y_n(x) + \int_0^x \lambda Ly_n(\xi) + Ny_n^\sim(\xi) d\xi.$$

Où λ est un multiplicateur de Lagrange général, qui peut être identifié de manière optimale via la théorie variationnelle, et y_n^\sim est une variation restreinte, ce qui signifie $\delta y_n^\sim = 0$. Pour l'équation (3.1) la fonctionnelle de correction lit :

$$y_{n+1}(x) = y_n(x) + \int_0^x \lambda(\xi) \left((y_n(\xi))_{\xi\xi} + \frac{\alpha}{\xi} (y_n(\xi))_{\xi} + g^\sim(y_n(\xi)) \right) d\xi.$$

Où

$$\delta(g^\sim(y_n(\xi))) = 0.$$

Pour déterminer la valeur optimal de $\lambda(\xi)$, nous prenons la variation pour les deux côtés par rapport à $y_n(x)$ obtenir :

$$\delta y_{n+1}(x) = \delta y_n(x) + \delta \int_0^x \lambda(\xi) \left((y_n(\xi))_{\xi\xi} + \frac{\alpha}{\xi} (y_n(\xi))_{\xi} + g^\sim(y_n(\xi)) \right) d\xi.$$

Où équivalent :

$$\delta y_{n+1}(x) = \delta y_n(x) + \delta \int_0^x \lambda(\xi) \left((y_n(\xi))_{\xi\xi} + \frac{\alpha}{\xi} (y_n(\xi))_{\xi} \right) d\xi$$

Où nous avons utilisé :

$$\delta g^\sim(y_n(\xi)) = 0.$$

L'intégration de l'intégrale du côté droit par parties donne :

$$\delta y_{n+1}(x) = \delta y_n(x) \left(1 - \lambda'(x) + \frac{\alpha}{x} \lambda(x) \right) + \delta \lambda(x) (y_n)_\xi(x) + \delta \int_0^x y_n \left(\lambda''(\xi) - \alpha \frac{\xi \lambda'(\xi) - \lambda(\xi)}{\xi^2} \right) d\xi.$$

Cela détermine à son tour les condition stationnaire

$$\lambda(\xi = x) = 0, \quad \lambda'|_{\xi=x} = 1, \quad \lambda'' - \alpha \frac{\xi \lambda' - \lambda}{x^2} = 0. \quad (3.7)$$

Déterminer λ , Trois cas importants seront examinés :

a) Pour le problème cylindrique, nous avons $\alpha = 1$. Dans ce cas, la résolution de l'équation (3.7) donne :

$$\lambda(\xi) = \xi \ln \left(\frac{\xi}{x} \right).$$

b) Pour les problèmes sphériques, on a $\alpha = 2$, ce qui est le cas pour l'équation singulière standard d'Emden-Fowler. Dans ce cas, résoudre l'équation (3.7), donne le multiplicateur de Lagrange λ comme :

$$\lambda(\xi) = \frac{\xi(\xi - x)}{x}.$$

c) Pour le cas général, où $\alpha > 1$, résoudre l'équation (3.7) rendements :

$$\lambda(\xi) = \frac{\xi(\xi^{\alpha-1} - x^\alpha - 1)}{(\alpha - 1)x^{\alpha-1}}.$$

Les approximations successives y_{n+1} , pour $n \geq 0$, de la solution $y(x)$ sera facilement obtenu en utilisant n'importe quelle fonction sélective $y_0(x)$. Par conséquent, la solution :

$$y(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x).$$

Autrement dit, la fonction de correction (équation (3.7)) donnera plusieurs approximations, et donc la solution exacte est obtenue dans la limite des approximations successives résultantes.

3.3 Exemples

Exemple 3.3.1

Considérons l'équation de Emden-Fowler homogène non linéaire avec $\alpha = 2$

$$\begin{cases} y'' + \frac{2}{x}y' + e^y = 0 \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \end{cases} \quad (3.8)$$

Utilisation de la VIM donne

La fonction de correction pour l'équation (3.8) s'écrit :

$$y_{n+1} = y_n + \int_0^x \frac{\xi(\xi - x)}{x} \left(y_n''(\xi) + \frac{2}{\xi} y_n'(\xi) + e^{y_n(\xi)} \right) d\xi. \quad (3.9)$$

Où

$$\lambda(\xi) = \frac{\xi(\xi - x)}{x}. \quad (3.10)$$

En considérant les valeurs initiales données, on peut sélectionner $y_0(x) = 0$ utilisation de cette sélection dans l'équation (3.9) on obtient les approximations successives suivantes :

$$\begin{aligned} y_0(x) &= 0. \\ y_1(x) &= \int_0^x \left(\frac{\xi(\xi - x)}{x} \right) d\xi, \\ y_1(x) &= \int_0^x \left(\frac{\xi^2 - \xi x}{x} \right) d\xi, \\ y_1(x) &= \frac{1}{x} \left[\frac{\xi^3}{3} \right]_0^x - \left[\frac{\xi^2}{2} \right]_0^x, \\ y_1(x) &= -\frac{1}{6}x^2. \\ y_2(x) &= -\frac{1}{6}x^2 + \int_0^x \frac{\xi(\xi - x)}{x} \left(-1 + e^{-\frac{1}{6}\xi^2} \right) d\xi, \\ y_2(x) &= -\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{6}x^2 + \int_0^x e^{-\frac{1}{6}\xi^2} d\xi, \\ y_2(x) &= -\frac{6}{2x} e^{-\frac{1}{6}x^2}. \\ &\vdots \end{aligned} \quad (3.11)$$

Il est évident que les calculs deviennent plus lourds et ne peuvent conduire à des résultats exacts pour les autres approximations.

Utilisation de la ADM

Pour résoudre l'équation de Lane-Emden (3.8) En utilisant le ADM, on utilise le schéma récursif

$$\begin{cases} y_0(x) = 0. \\ y_{k+1}(x) = - \int_0^x t^{-2} \int_0^t s^2 (A_k) ds dt. \end{cases} \quad (3.12)$$

Comme présenté précédemment les polynômes d'Adomian A_k pour $k \geq 0$, pour le terme non linéaire e^y sont donnés par :

$$\begin{aligned}
 A_0 &= e^{y_0}. \\
 A_1 &= y_1 e^{y_0}. \\
 A_2 &= \left(\frac{1}{2!} y_1^2 + y_2 \right) e^{y_0}. \\
 A_3 &= \left(\frac{1}{3!} y_1^3 + y_1 y_2 + y_3 \right) e^{y_0}. \\
 A_4 &= \left(\frac{1}{4!} y_1^4 + \frac{1}{2!} (y_1^2 y_2 y_2) + y_1 y_3 + y_4 \right) e^{y_0}. \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

Qui sont obtenus à partir de la formule définitionnelle [1]

$$A_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} \left[F \left(\sum_{i=0}^n \lambda^i u_i \right) \right]_{\lambda=0}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.13)$$

Utiliser l'équation (3.12), on obtient l'approximation suivante :

$$\begin{aligned}
 y_0(x) &= 0. \\
 y_1(x) &= \frac{1}{3!} x^2. \\
 y_2(x) &= \frac{1}{5!} x^4. \\
 y_3(x) &= \frac{8}{3 \times 7!} x^6. \\
 y_4(x) &= \frac{122}{9 \times 9!} x^8. \\
 y_5(x) &= \frac{5032}{45 \times 11!} x^{10}. \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

La solution en série est donnée par

$$y(x) = \frac{1}{3!} x^2 + \frac{1}{5!} x^4 + \frac{8}{3 \times 7!} x^6 + \frac{122}{9 \times 9!} x^8 + \frac{5032}{45 \times 11!} x^{10} + \dots$$

Il est intéressant de noter que nous avons résolu l'équation de Lane-Emden généralisée

$$y'' + \frac{\alpha}{x}y' + e^y = 0.$$

Avec les conditions initiales

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

Pour les cas où $\alpha = 1$ et $\alpha = 3$ en plus du cas standard où $\alpha = 2$.

$$y(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{64}x^4 - \frac{1}{768}x^6 + \frac{1}{8192}x^8 + \dots$$

$$y(x) = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{120}x^4 - \frac{1}{1890}x^6 + \frac{1}{1632960}x^8 + \dots$$

et

$$y(x) = -\frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{192}x^4 - \frac{1}{18432}x^6 + \frac{1}{1474560}x^8 + \dots$$

Respectivement

On peut facilement observer que les approximations en série de puissances sont les mêmes concernant les exposants de x , mais ne diffèrent que par la grandeur de leurs coefficients.

Exemple 3.3.2

Considérons l'équation de type Lane-Emden avec une non-linéarité logarithmique de seconde espèce avec $\alpha = 2$:

$$y'' + \frac{2}{x}y' + \ln(e + y) = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \quad (3.14)$$

Utilisation de la VIM donne

La fonctionnelle de correction pour l'équation (3.14) se lit :

$$y_{n+1} = y_n + \int_0^x \frac{\xi(\xi - x)}{x} \left(y_n''(\xi) + \frac{2}{\xi}y_n'(\xi) + \ln(e + y_n(\xi)) \right) d\xi, \quad n \geq 0 \quad (3.15)$$

Où nous avons utilisé $\lambda(\xi) = \frac{\xi(\xi - x)}{x}$ comme indiqué ci-dessus. Compte tenu des valeurs initiales données, nous pouvons choisir $y_0(x) = 0$ en utilisant cette sélection dans l'équation

(3.15), on obtient les approximations successives suivants :

$$\begin{aligned}
y_0(x) &= 0 \\
y_1(x) &= \int_0^x \frac{\xi(\xi - x)}{x} d\xi \\
y_1(x) &= -\frac{1}{6}x^2 \\
y_2(x) &= -\frac{1}{6}x^2 + \int_0^x \frac{\xi(\xi - x)}{x} \left(-1 + \ln \left(e - \frac{1}{6}\xi^2 \right) \right) d\xi \\
y_2(x) &= -\frac{1}{6}x^2 + \frac{\int_0^x \xi(-\xi + x)(1 + \ln 6 - \ln(6e - \xi^2))}{x} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Les calculs redeviennent de plus en plus lourds, et ne peuvent conduire à des résultats exacts pour les autres approximations

utilisation de la ADM

Pour résoudre l'équation de type Lane-Emden de l'équation de deuxième espèce (3.14) en utilisant l'ADM, nous utilisons le schéma récursif :

$$\begin{cases}
y_0(x) = 0 \\
y_{k+1}(x) = -\int_0^x t^{-2} \int_0^t s^2(A_k) ds dt
\end{cases} \quad (3.16)$$

Comme présenté précédemment Les polynômes d'Adomian A_k , $k \geq 0$, pour le terme non linéaire dans $\ln(e + y)$ sont donnés par :

$$\begin{aligned}
A_0 &= 1 \\
A_1 &= \frac{y_1}{e} \\
A_2 &= -\frac{y_1^2}{e^2} + \frac{y_2}{e} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Obtenu à partir de la formule définitionnelle (3.13). En utilisant l'équation (3.16), nous obtenons les composants de solution suivants :

$$y_0(x) = 0$$

$$y_1(x) = -\frac{1}{6}x^2$$

$$y_2(x) = \frac{1}{120}e^{-1}x^4$$

$$y_3(x) = \frac{1}{7560}e^{-2}x^6$$

$$y_4(x) = \frac{1}{3265920}e^{-3}x^8$$

⋮

La solution en série est donc donnée par :

$$y(x) = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{120}e^{-1}x^4 + \frac{1}{7560}e^{-2}x^6 + \frac{1}{3265920}e^{-3}x^8 \dots$$

Il est intéressant de noter que nous avons résolu l'équation de Lane-Emden généralisée :

$$y'' + \frac{\alpha}{x}y' + \ln(e + y) = 0.$$

Avec les conditions initiales :

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

Pour les cas où $\alpha = 1$ et $\alpha = 3$ outre le cas où $\alpha = 2$, Dans ce qui suit :

$$y(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{64}x^4 - \frac{1}{2304}x^6 + \dots,$$

$$y(x) = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{120}x^4 - \frac{1}{7560}x^6 + \dots,$$

et

$$y(x) = -\frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{192}x^4 - \frac{1}{18432}x^6 + \dots.$$

Respectivement. Comme conclu précédemment, les approximations de série de puissance obtenues sont les mêmes concernant les exposants de x mais ne diffèrent que par l'amplitude de leurs coefficients respectifs.

Exemple 3.3.3

Considérons l'équation de Lane-Emden de première espèce, on d'indice m , se lit :

$$y'' + \frac{2}{x}y' + y^m, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0. \quad (3.17)$$

utilisation de la ADM

En [13], La solution en série a été obtenue en utilisant ADM sous la forme :

$$y(x) = 1 - \frac{1}{3!}x^2 + \frac{m}{5!}x^4 - \frac{m(8m-5)}{3 \times 7!}x^6 + \frac{m(70-183m+122m^2)}{9 \times 9!}x^8 + \frac{m(3150-1080m+12642m^2-5032m^3)}{45 \times 11!}x^{10} + \dots$$

Où les polynômes d'Adomian ont été dérivés pour le terme non linéaire y^m . Pour plus de détails, [13]. Les solutions exactes suivantes :

$$y(x) = 1 - \frac{1}{3!}x^2, \quad y(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad y(x) = \left(1 + \frac{x^2}{3}\right)^{-1/2}.$$

Sont obtenus pour $m = 0, 1$ et 5 , respectivement.

utilisation de la VIM

Où nous avons choisi le cas pour $m = 5$, et nous utiliserons les cas $\alpha = 1, 2, 3, 4$.

Cas 1 : $\alpha = 1$

Nous étudions d'abord le type non homogène de Lane-Emden avec $\alpha = 1$ donné par :

$$y'' + \frac{1}{x}y' + y^5 = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

La fonctionnelle de correction se lit :

$$y_{n+1} = y_n + \int_0^x \frac{\xi(\xi-x)}{x} \left(y_n''(\xi) + \frac{1}{\xi}y_n'(\xi) + y_n^5(\xi) \right) d\xi$$

Où

$$\lambda(\xi) = \frac{\xi(\xi-x)}{x}$$

On obtient les approximations successives suivantes :

$$\begin{aligned}
 y_0(x) &= 1 \\
 y_1(x) &= 1 - \frac{1}{4}x^2 \\
 y_2(x) &= 1 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{5}{64}x^4 - \frac{5}{288}x^6 + \frac{5}{2048}x^8 + \dots \\
 y_3(x) &= 1 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{5}{64}x^4 - \frac{655}{2304}x^6 + \frac{365}{36864}x^8 + \dots \\
 y_4(x) &= 1 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{5}{64}x^4 - \frac{655}{2304}x^6 + \frac{1585}{147456}x^8 + \dots \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

Et ainsi de suite, cela donne à son tour la solution en série :

$$y(x) = 1 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{5}{64}x^4 - \frac{655}{2304}x^6 + \frac{1585}{147456}x^8 + \dots$$

Cas 2 : $\alpha = 2$ Nous étudions ensuite l'équation standard de Lane-Emden avec $\alpha = 2$ donné par :

$$y'' + \frac{2}{x}y' + y^5 = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

La fonctionnelle de correction on obtient :

$$y_{n+1} = y_n + \int_0^x \frac{\xi(\xi - x)}{x} \left(y_n''(\xi) + \frac{2}{\xi}y_n'(\xi) + y_n^5(\xi) \right) d\xi$$

Où

$$\lambda(\xi) = \frac{\xi(\xi - x)}{x}$$

On obtient les approximations successives suivantes :

$$\begin{aligned}
 y_0(x) &= 1 \\
 y_1(x) &= 1 - \frac{1}{6}x^2 \\
 y_2(x) &= 1 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{5}{756}x^6 + \frac{5}{7776}x^8 + \dots \\
 y_3(x) &= 1 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{5}{432}x^6 + \frac{55}{18144}x^8 + \dots \\
 y_4(x) &= 1 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{5}{432}x^6 + \frac{35}{10368}x^8 + \dots \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

Et ainsi de suite, cela donne à son tour la solution en série :

$$y(x) = 1 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{5}{432}x^6 + \frac{35}{10368}x^8 + \dots$$

On calcule les autres cas $\alpha = 3, 4$ et les solution séries :

$$y(x) = 1 - \frac{1}{8}x^2 + \frac{5}{192}x^4 - \frac{55}{9216}x^6 + \dots$$

Et

$$y(x) = y(x) = 1 - \frac{1}{10}x^2 + \frac{1}{56}x^4 - \frac{53}{15120}x^6 + \dots$$

Sont facilement obtenus, respectivement Deux remarques peuvent être faites ici. premièrement, les quatre solutions en séries résultantes ont le même x termes mais avec des coefficients différents. Deuxièmement, le VIM peut être utilisé dans un manière directe pour une classe limitée de problèmes sans recourir aux polynômes d'Adomian requis par l'ADM .

Conclusion

Dans ce travail, nous avons examiné les équations de Lane-Emden de premier et du deuxième type en utilisant l'ADM et le VIM. nous avons montré que le VIM souffre lorsqu'il est appliqué au second type. La méthode d'Adomian fonctionne efficacement dans ce cas, et pour l'équation de Lane-Emden du premier type pour y^m également sans recourir aux multiplicateurs de Lagrange qui sont requis par le VIM, cependant, pour l'équation de Lane-Emden du premier type pour les valeurs entières de m , le VIM peut être utilisé de manière directe sans avoir besoin des polynômes d'Adomian qui sont nécessaires pour les problèmes non linéaires tels que résolus par l'ADM.

Comparaison entre la méthode d'Adomian et la méthode de perturbation d'homotopie

La méthode de perturbation d'homotopie [5][10] et la méthode de décomposition d'Adomian ont reçu beaucoup d'attention ces dernières années en mathématiques appliquées en général, en particulier dans le cas des problèmes où on cherche des solutions sous forme d'une série.

4.1 La méthode de perturbation d'homotopie

Considérons un équation différentiel non linéaire :

$$N(u) = f. \tag{4.1}$$

Où N est un opérateur différentiel général et f est une fonction analytique connue sur un espace de Hilbert.

Nous pouvons définir un homotopie $H(u, p)$ par

$$H(u, 0) = L(u) - L(v_0) = 0,$$

$$H(u, 1) = N(u) - f = 0.$$

Où $L(u)$ est un opérateur fonctionnel de solution connue v_0 , qui peut être obtenu facilement, on peut choisir une homotopie convexe par comment

$$H(u, p) = (1 - p)L(u) + p[N(u) - f] = 0. \tag{4.2}$$

Et tracer en continu une découpe implicitement définie à partir d'un point de départ $H(v_0, 0)$ jusqu'à une fonction de solution $H(0, 1)$ où g est une solution de (4.1). Le paramètre d'intégration p change de manière monotone de zéro à l'unité lorsque le problème trivial $L(u) - L(v_0)$ est déformé en continu vers le problème d'origine. Si le paramètre d'intégration p est considéré comme un petit paramètre, en appliquant la technique de perturbation classique, on peut supposer que la solution de (4.2), peut être donnée par une série de puissances en p c'est-à-dire

$$v = v_0 + pv_1 + p^2v_2 + \dots \tag{4.3}$$

Et le réglage $p = 1$ donne la solution approximative de (4.1) comme

$$u = \lim_{p \rightarrow 1} v = v_0 + v_1 + v_2 + \dots \tag{4.4}$$

Mais, pour plusieurs formes de non linéaire et en utilisant le développement de Taylor pour obtenir la composition de récurrence dans la série de solutions. A savoir, pour obtenir sa solution

approchée de (4.2), nous développons d'abord f en une série de Taylor

$$f(u) = f(u_0) + f'(u_0)(pu_1 + p^2u_2 + \dots) + \frac{1}{2!}f''(u_0)(pu_1 + p^2u_2 + \dots) + \dots$$

Et remplace dans equation (4.2) avec une série de solutions supposées (4.3)et égalant les coefficients de puissances similaires de p . On obtient une série d'équation différentielles linéaires non homogènes à résoudre. C'est-à-dire

$$\begin{aligned} p^0 : L(u_0) - L(v_0) &= 0 \\ p^1 : L(u_1) + L(v_0) + N(u_0) - f &= 0 \\ p^2 : L(u_2) + N(u_1) &= 0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Par conséquent, la solution approximative peut être facilement obtenue comme dans l'équation(4.4). Dans ce cas, la méthode de perturbation d'homotopie se réduit théoriquement à la méthode de décomposition d'Adomian et chaque partie non homogène de cas équations différentielles linéaires donne respectivement des polynômes d'Adomian. Parce que la méthode de décomposition d'Adomian pour le problème (4.1) suppose une solution en série pour un donné par

$$u = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots \quad (4.5)$$

Et l'opérateur non linéaire peut être décomposé en

$$N(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n \quad (4.6)$$

Où les A_n sont les polynômes d'Adomian de u_0, u_1, \dots, u_n donné par

$$A_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} \left[N \left(\sum_{i=0}^{+\infty} \lambda^i u_i \right) \right]_{\lambda=0} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.7)$$

Substitution d'éq(4.5)et(4.6)dans l'équation fonctionnelle(4.1)donne

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \approx \sum_{n=0}^{+\infty} A_n = f \quad (4.8)$$

Si la série dans (4.8)est convergente, alors (4.8) est vraie

$$\begin{aligned} u_0 &= f \\ u_1 &= A_0(u_0) \\ u_2 &= A_1(u_0, u_1) \\ &\vdots \\ u_n &= A_{n-1}(u_0, \dots, u_{n-1}) \end{aligned}$$

Dans cette, chaque terme de la série (4.5) peut être déterminé récursivement. Maintenant, nous supposons que l'opérateur non linéaire $N(u)$ est une fonction non linéaire de u , c'est-à-dire $g(u)$ et son développement de Taylor autour de u_0 est

$$g(u) = g(u_0) + g'(u_0)(u - u_0) + \frac{1}{2!}g''(u_0)(u - u_0)^2 + \dots \quad (4.9)$$

En substituant la différence $(u - u_0)$ de l'eq (4.5) en (4.9), on obtient :

$$g(u) = g(u_0) + g'(u_0)(u_1 - u_2 + \dots) + \frac{1}{2!}g''(u_0)(u_1 - u_2 + \dots)^2 + \dots$$

Ou

$$g(u) = g(u_0) + g'(u_0)(u_1 - u_2 + \dots) + \frac{1}{2!}g''(u_0)(u_1^2 + 2u_1u_2 + 2u_1u_3 + u_2^2 + 2u_2u_3 + u_3^2 + \dots) \\ + \frac{1}{3!}g'''(u_0)(u_1^3 + 3u_1^2u_2 + 3u_1^2u_3 + 3u_1u_2^2 + 3u_1u_3^2 + \dots) + \dots$$

Les polynômes d'Adomian peuvent être obtenus en réordonnant et en réarrangeant les termes donnés dans l'équation (4.10), et A_0 dépend uniquement sur u_0 , A_1 ne dépend que de u_0 , A_2 ne dépend que u_0 , u_1 et u_2 ainsi de suite. Par conséquent, en réorganisant les termes de l'équation(4.10) d'expansion selon l'ordre, les A_n seront donnés comme :

$$\begin{aligned} A_0 &= g(u_0) \\ A_1 &= u_1g'(u_0) \\ A_2 &= u_2g'(u_0) + \frac{u_1^2}{2!}g''(u_0) \\ A_3 &= u_3g'(u_0) + u_1u_2g''(u_0) + \frac{u_1^2}{2!}g'''(u_0) \\ &\vdots \end{aligned} \quad (4.10)$$

Les expressions (4.10) et (4.11) confirment le fait que la série dans A_n , polynômes est une série de Taylor autour d'une fonction u_0 et non about d'un point comme on l'utilise habituellement. Par conséquent, la méthode d'Adomian décompose l'inconnue u en une série de composantes u_n et $N(u)$ en une série de composantes A_n , Aussi, il est facile de montrer que lorsque $N(u)$ est $g(u)$, les polynômes d'Adomian donnés en (4.6) donnent les mêmes résultats qu'en (4.11). Récemment, de nombreux chercheurs [12] [8] utilisent ce fait et montrent que la somme des indices des composantes u dans chaque terme du polynôme A_n est égale à n . Ceci suggère que l'on peut remplacer u par une somme des composantes u_n , $n \geq 0$ telles que définies par la méthode de décomposition. Comme on le voit. A_0 est toujours déterminé indépendamment des autres polynômes A_n , $n \geq 1$. par conséquent, on peut d'abord séparer $A_0 = g(u_0)$ pour chaque terme non linéaire $g(u)$, puis les composantes restantes de peuvent être développées par n'importe quel moyen. par conséquent, la collecte de tous les termes du développement obtenu tels que la somme des indices des composantes u dans chaque terme soit la même complète le calcul les polynômes d'Adomian. Une fois que A_n sont déterminés par(4.11), on peut déterminer à plusieurs reprises le terme u_n , de la série et par conséquent la solution u .

D'autre part, Ghorrani et Saberi-Nadjafi [8] ont calculé les polynômes d'Adomian en utilisant la méthode de perturbation d'homotopie pour certains polynômes non linéaires et non linéarités dérivées. Par conséquent, l'utilisation de l'expansion de la série de Taylor dans la méthode de perturbation d'homotopie comme décrit ci-dessus apporte une certain réduction sur la méthode

et elle coïncide avec la méthode de décomposition d'Adomian, et on peut facilement démontrer que les polynômes d'Adomian obtenus comme ci-dessus correspondent aux parties non homogènes de la série d'équations différentielles linéaires non homogènes obtenues par la méthode de perturbation d'homotopie modifiée. Dans la section suivante, nous appliquons le cas décrit ci-dessus à quelques exemples.

Exemple 4.1 :(problème de valeur limite de Bratu)

On considère le problème aux limites

$$\begin{cases} u'' + \lambda e^u = 0 \\ u(0) = 0, \quad u(1) = 0 \end{cases} \quad (4.11)$$

utilisation de la méthode de perturbation d'homotopie

Réécrire (4.11) sous la forme

$$\begin{cases} u'' + \lambda e^{pu} = 0 \\ u(0) = 0, \quad u(1) = 0 \end{cases} \quad (4.12)$$

Où $p \in [0, 1]$ et est un paramètre d'intégration. Comme dans la méthode de perturbation d'homotopie, il est évident que lorsque, (4.5) devient une équation linéaire ; quand $p = 1$, il devient celui non linéaire d'origine. Du fait que $p \in [0, 1]$, donc le paramètre d'encastrement peut être considéré comme un petit paramètre. En appliquant la technique de perturbation, nous pouvons supposer que la solution de (4.5) peut être exprimée comme une série de puissances en p

$$u = u_0 + pu_1 + p^2u_2 + p^3u_3 + \dots \quad (4.13)$$

En fixant $p = 1$, on obtient la solution approximative du problème :

$$u^* = \lim_{p \rightarrow 1} u = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \dots$$

Pour obtenir sa solution approchée de (4.4), on développe e^{pu} en série de Taylor

$$e^{pu} = 1 + pu + \frac{p^2u^2}{2!} + \frac{p^3u^3}{3!} + \frac{p^4u^4}{4!} + \dots \quad (4.14)$$

En substituant (4.13) et (4.14) dans (4.12) et en mettant en équation les coefficients de même puissances de p , on obtient des séries d'équations différentielles linéaires non homogènes à résoudre. c'est à dire

$$(u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \dots)'' + \lambda \left[1 + p(u_0 + pu_1 + \dots) + \frac{p^2}{2!} (u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \dots)^2 + \dots \right] = 0.$$

Alors

$$\begin{aligned}
 p^0 : & \begin{cases} u_0'' = -\lambda \\ u_0(0) = 0, u_0(1) = 0 \end{cases} \\
 p^1 : & \begin{cases} u_1'' = -\lambda u_0 \\ u_1(0) = 0, u_1(1) = 0 \end{cases} \\
 p^2 : & \begin{cases} u_2'' = -\lambda u_1 - \frac{\lambda}{2} u_0^2 \\ u_2(0) = 0, u_2(1) = 0 \end{cases} \\
 p^3 : & \begin{cases} u_3'' = -\lambda u_2 - \lambda u_0 u_1 - \frac{\lambda}{6} u_0^3 \\ u_3(0) = 0, u_3(1) = 0 \end{cases} \\
 & \vdots
 \end{aligned} \tag{4.15}$$

Ainsi, en résolvant les équations ci-dessus, on obtient :

$$\begin{aligned}
 u_0 &= -\frac{1}{2}\lambda x^2 \\
 u_1 &= \frac{1}{24}\lambda^2 x^4 \\
 u_2 &= -\frac{1}{180}\lambda^3 x^6 + \\
 & \vdots
 \end{aligned}$$

utilisation de la ADM

On peut être écrit l'équation (4.12) sous la forme d'un opérateur

$$\begin{cases} Lu = \lambda e^u \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \tag{4.16}$$

Où l'opérateur différentiel L est

$$L = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

En appliquant l'opérateur inverse de part et d'autre de (4.17) et en utilisant la condition initiale $u(0) = 0$, on trouve

$$u(x) = -\lambda L^{-1}(e^u)$$

La solution $u(x)$ est représentée par la série comme dans (4.5) u_0 .

Non linéarité e^u peut être étendue en utilisant l'équation (4.6) et (4.7)

$$e^u = \sum_{i=0}^{+\infty} A_i = A_0 + A_1 + A_2 + \dots$$

De la série de Taylor de e^u à u_0 (qui est nul dans notre cas)

$$e^u = 1 + u + \frac{1}{2!}u^2 + \frac{1}{3!}u^3 + \dots$$

On trouve

$$A_0 = 1$$

$$A_1 = u_1$$

$$A_2 = u_2 + \frac{1}{2!}u_1^2$$

$$A_3 = u_3 + u_1u_2\frac{1}{3!}u_1^3$$

$$A_4 = u_4 + u_1u_3 + \frac{1}{2!}u_2^2 + \frac{1}{2!}u_1^2u_2 +$$

⋮

Et peu de termes de la solution peuvent être trouvés

$$u_0 = 0$$

$$u_1 = -\frac{1}{2}\lambda x^2$$

$$u_2 = \frac{1}{24}\lambda^2 x^4 +$$

$$u_3 = -\frac{1}{180}\lambda^3 x^6$$

Qui est exactement la même que la solution de perturbation d'homotopie.

Exemple 4.2 :(problème de la valeur initiale de Bratu)

On considère le problème de la valeur initiale

$$\begin{cases} u'' - 2e^u = 0, & 0 < x < 1 \\ u(0) = u'(0) = 0 \end{cases} \quad (4.17)$$

utilisation de la méthode de perturbation d'homotopie

Réécrire (5.18) sous la forme

$$\begin{cases} u'' - 2e^{pu} = 0, & 0 < x < 1 \\ u(0) = u'(0) = 0 \end{cases} \quad (4.18)$$

En substituant (4.14) et (4.15) dans (4.19) et en égalisant les coefficients de même puissances de p , on obtient des séries d'équations différentielles linéaires non homogènes à résoudre. C'est à dire

$$p^0 : \begin{cases} u_0'' = 2 \\ u_0(0) = 0, u_0'(0) = 0 \end{cases}$$

$$p^1 : \begin{cases} u_1'' = 2u_0 \\ u_1(0) = 0, u_1'(0) = 0 \end{cases}$$

$$p^2 : \begin{cases} u_2'' = 2u_1 + u_0^2 \\ u_2(0) = 0, u_2'(0) = 0 \end{cases}$$

$$p^3 : \begin{cases} u_3'' = 2u_2 + 2u_0u_1 - \frac{u_0^3}{3} \\ u_3(0) = 0, u_3'(0) = 0 \end{cases}$$

⋮

A partir des équations ci-dessus, on peut obtenir

$$u_0 = x^2$$

$$u_1 = \frac{x^4}{6}$$

$$u_2 = \frac{2x^6}{45}$$

$$u_3 = \frac{17x^8}{1260}$$

$$u_4 = \frac{62x^{10}}{14175}$$

$$u_5 = \frac{69x^{12}}{467775}$$

⋮

Et

$$u(x) = x^2 + \frac{x^4}{6} + \frac{2x^6}{45} + \frac{17x^8}{1260} + \frac{62x^{10}}{14175} + \frac{69x^{12}}{467775} + \dots$$

utilisation de la ADM donne

$$\begin{cases} Lu = 2e^u \\ u(0) = u'(0) = 0 \end{cases} \quad (4.19)$$

Où l'opérateur différentiel L est

$$L = \frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

L'opérateur inverse L est supposé être un opérateur intégral double donné par

$$L^{-1}(\cdot) = \int_0^x \int_0^x (\cdot) dx.$$

En appliquant l'opérateur inverse L^{-1} de part et d'autre de (4.20), on trouve

$$u(x) = 2L^{-1}(e^u). \quad (4.20)$$

La substitution de (4.5) et (4.6), dans la fonctionnelle (4.21) donne

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = 2L^{-1} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} A_n \right)$$

Où A_n sont des polynômes d'Adomian du terme non linéaire e^u et peu de la solution peuvent se retrouver comme

$$u_0 = 0$$

$$u_1 = x^2$$

$$u_2 = \frac{x^4}{6}$$

$$u_3 = \frac{2x^6}{45}$$

$$u_4 = \frac{17x^8}{1260}$$

$$u_5 = \frac{62x^{10}}{14175}$$

$$u_6 = \frac{691x^{12}}{467775}$$

Ce qui donne à nouveau la solution

4.2 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons révélé que la forme modifiée la méthode de perturbation de l'homotopie correspond à la méthode de décomposition d'Adomian pour certaines classes d'équations différentielles non linéaires. La confirmation est faite par les problèmes de type Bratu, à savoir les problèmes impliquant uniquement la non linéarité exponentielle.

Bibliographie

- [1] Adomian, G. and Rach, R. (1983), “Inversion of nonlinear stochastic operators”, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 91 No. 1, pp. 39-46.
- [2] K.Balira Ousmane nouvelles méthodes mathématiques Alinor et Adomian pour biomédecine.
- [3] Y.Cherruault, Sur la convergence de la méthode d’Adomian, *Rairo.Recherche opérationnelle*, tome 22, n3(1988)p.291-299.
- [4] Duan, J.-S. (2011), “Convenient analytic recurrence algorithms for the Adomian polynomials”, *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 217 No. 13, pp. 6337-48.
- [5] J.H. He, Homotopy perturbation technique, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 178 (3–4) (1999) 257–262.
- [6] A.George, A review of the decomposition method in applied, *J.Math.Anal.Appl.*135(1988)501-544.
- [7] A.George, Solving frontier of physics : the décomposition méthode, kluwer, boston, MA, 1994.
- [8] A. Ghorbani, J. Saber-Nadjafi, He’s homotopy perturbation method for calculating Adomian polynomials, *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation* 8 (2) (2007) 229–232.
- [9] Rach, R. (1984), “A convenient computational form for the Adomian polynomials”, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 102 No. 2, pp. 415-9.
- [10] F. Shakeri, M. Dehghan, Solution of delay differential equations via a homotopy perturbation method, *Mathematical and Computer Modelling* (2007), doi :10.1016/j.mcm.2007.09.016.
- [11] A.M.Wazwaz, A reliable treatment for mixed Volterra-Fredholm integral equations, *Appl.Math.Comput.*127(2002)405-414.
- [12] A.M.Wazwaz, A new algorithm for calculating Adomian polynomials for nonlinear operators, *Appl.Math.Comput.*111(2000)53-69.
- [13] Wazwaz, A.-M. (2001), “A new algorithm for solving differential equations of Lane-Emden type”, *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 118 Nos 2/3, pp. 287-310.