REPUBLIQUE ALGERIÈNNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ DJILALI BOUNAAMA KHEMIS MILIANA
FACULTÉ DE LA SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE
DEPARTEMENT MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE

Mémoire de fin d'étude
Présenté pour l'obtention du diplôme de Master
En Mathématiques
Spécialité : Analyse Mathématique et Applications
Par
HAMRAT Zahira

Sur certaines fonctions arithmétiques liées à la fonction PGCD

Soutenue publiquement le 09/07/2023 devant le Jury

M.BOUKEDROUN Mohamed	Président
M.BOUDERBALA Mihoub	Encadrant
M.KALI Abdesselem	Examinateur
M.SAID Abderrezak	Examinateur

Remerciements

J'exprime toute ma gratitude à ALLAH (DIEU) qui m'a donné la force, le courage et la patience pour accomplir ce travail. Grâce à lui, ce travail à été achevé.
J'exprime mes remerciements les plus distingués à mon Directeur de mémoire,
Mr BOUDERBALA Mihoub, Maître de conférence à l'Université Djilali Bounaama-Khemis Miliana, UDBKM, pour m'avoir encadré durant la période de mon mémoire de fin d'étude, avec beaucoup de patience, de générosité et de compétence.
Mes remerciements s'adressent également à Mr BOUKEDROUN Mohamed, pour l'honneur qu'il me fait en ayant accepté de présider le Jury de ma soutenance.
J'adresse tous mes remerciements à Mr KALI Abdesselem, ainsi qu'à Mr SAID Abderrezak, Professeurs à l'Université de Djilali Bounaama-Khemis Miliana, UDBKM, pour l'honneur qu'ils me font en acceptant d'être examinateurs de ce mémoir.

Je tiens également à remercier mes professeurs, pour leur enseignement, leur temps et leur soutien constant dans le domaine des mathématiques. Je souhaite remercier ma famille et mes amis de promotions à la Faculté ST de l'Université de Khemis Miliana pour leurs encouragements.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail fait avec tant de passion et patience :

À mès très chers parents,

aucune dédicace ne saurait exprimer l'amour et le respect que j'ai pour vous, je voudrais vous remercier pour votre soutien et vos sacrifces tout au long de ces années, je vous souhaite une vie pleine de bonheur et de santé, je vous aime et que dieu vous garde pour moi.

À mes deux frères *Mohamed* **et** *Yacine*,
À ma chère soeur *Marwa*,
À tous mes chères amies *Wissam, Lilya, Hafsa* et *Hayat*,

Je le dédie également à tous mes proches et à tous ceux que j'aime.

Notations

1. $\mathbb{N}$, l'ensemble des entiers naturels ($\mathbb{N}^*$ désigne les entiers naturels non nuls).
2. $\mathbb{Z}$, est l'ensemble des entiers relatifs.
3. $\mathbb{Z}_{\geq 1}$, est l'ensemble des entiers relatifs supérieur ou égale à 1.
4. Le mot " entier " (sans précision supplémentaire) désigne un entier naturel non nul.
5. $\mathbb{R}$, l'ensemble des nombres réels.
6. $\mathbb{C}$, l'ensemble des nombres complexes.
7. $\lfloor x \rfloor$, désigne l'unique entier k tel que $k \leq x < k+1$ (la partie entière de x)
8. $\{x\}$, désigne la partie fractionnaire du réel x.
9. $\gcd(a,b) = (a,b)$, désigne le plus grand commun diviseur de a et b.
10. $\texttt{ppcm}(a,b)$, désigne le plus petit commun multiple de a et b.
11. $m \mid n$, signifie m divise n, $p^\alpha \parallel n$ signifie $p^\alpha \mid n$ et $p^{\alpha+1} \nmid n$.
12. $\prod\limits_p$, le produit étendu à tous les nombres premiers.
13. $\sum\limits_{n \leq x}$, représente une somme étendus à tous les entiers $n \in [1, x]$.
14. $f * g$, désigne le produit de convolution de deux fonctions f et g.
15. $\equiv$, relation de congruence modulo un entier.
16. $\omega(n)$, représente le "nombre de facteurs premiers distincts de n".
17. $\Omega(n)$, représente le "nombre de diviseurs premiers distincts de n", définie par

$$\Omega(n) := \sum_{p^\alpha \parallel n} \alpha.$$

الملخص

واحدة من أكثر الدوال الحسابية الأكثر أهمية في علم الحساب و التي تظهر إحدى الخاصيات المثيرة المتعلقة بالأعداد الصحيحة الموجبة هي دالة بيلاي و المعروفة أيضا باسم دالة Somme-PGCD حيث تعطى عبارتها كمايلي:

$$P(n) = \sum_{i=1}^{n} \gcd(i,n)$$

هذه الأخيرة كانت محل إهتمام العديد من الباحثين كما هي محل إهتمامنا كذلك في هذا العمل المنجز و خاصة من خلال إظهارنا لبعض الدوال الحسابية الجديدة و التي تكون في ارتباط مباشر بها حيث قمنا بتوظيف عدة مفاهيم متعلقة بالحساب التوافقي (خواص القسمة الإقليدية، الأعداد الأولية، الأعداد المؤلفة........) و كذا الحساب (الدوال الحسابية الإعتيادية، عمليات طي الدوال .....).

Résumé

L'une des fonctions arithmétiques les plus intéressantes qui présente une propriété importante sur les entiers positifs dont nous nous somme inspirés dans notre traval est la fonction *somme−pgcd*, appelée aussi fonction de *Pillai,* qui est définie par

$$P(n) = \sum_{i=1}^{n} \gcd(i, n).$$

L'intérêt de ce mémoire est d'étudier certaines fonctions arithmétiques liées à la fonction PGCD. Il s'agit d'utiliser des outils de combinatoire (certaines propriétés sur la divisibilité, nombre premier, nombre composé,. . .), et d'arithmétique (Les fonctions arithmétiques usuelles, produit de convolution, . . .).

Summary

One of the most interesting arithmetic functions that has an important property on positive integers that we have been inspired by in our work is the sum-gcd function, also called Pillai's function which is defined by

$$P(n) = \sum_{i=1}^{n} \gcd(i, n).$$

The interest of this Master's thesis is to study some arithmetic functions related to the **gcd** function. It is to use tools of combinatorics (some properties on divisibility, prime number, composed number,. . . .), and arithmetic (usual arithmetic functions, convolution product, . . .).

Table des matières

Introduction

En discipline mathématiques on trouve la brance théorie des nombres qui s'occupe des propriétés des nombres entiers (qu'ils soient entiers naturels ou entiers relatifs). Plus généralement, le champ d'étude de cette théorie concerne une large classe de problèmes qui proviennent naturellement de l'étude des entiers. La théorie des nombres occupe une place particulière en mathématiques, à la fois par ses connexions avec de nombreux autres domaines, et par la fascination qu'exercent ses théorèmes et ses problèmes ouverts, dont les énoncés sont souvent faciles à comprendre et même s'occupe parmi les disciplines mathématiques une position idéalisée analogue à celle qu'occupent les mathématiques elles-mêmes parmi les autres sciences. La théorie des nombres est divisée en plusieurs champs d'étude en fonction des méthodes utilisées et des questions traitées. Parmi les diverses branches de la théorie des nombres est : Théorie analytique des nombres ; Théorie élémentaire des nombres.

L'étude des fonctions arithmétiques est un thème central en théorie analytique des nombres. Une fonction arithmétique est une application de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{C}$. On peut la considérer comme une suite complexe définie sur $\mathbb{N}^*$. Une catégorie particulière de ces fonctions est intensément étudiée. Il s'agit des fonctions arithmétiques multiplicatives. Une fonction arithmétique f est dite multiplicative si l'on a $f(1) = 1$ et $f(nm) = f(n)f(m)$ dès que n et m sont premiers entre eux dans $\mathbb{N}^*$.

Le plus grand commun diviseur de nombres entiers différents de zéro (pgcd) est, parmi les diviseurs communs à ces entiers, le plus grand d'entre eux. Par exemple, les diviseurs positifs de 24 sont, dans l'ordre : $1, 2, 3, 4, 6, 12$ et 24. Ceux de 18 sont $1, 2, 3, 6, 9$ et 18. Les diviseurs communs de 24 et 18 étant $1, 2, 3$ et 6, leur pgcd est 6. Ce qui se note : $pgcd(24, 18) = 6$. Les diviseurs communs à plusieurs entiers sont les diviseurs de leur *pgcd*. Connaître le pgcd de deux nombres entiers non nuls a et b permet de simplifier la fraction $\frac{a}{b}$. Il est possible de le déterminer par divers raisonnements, dont l'algorithme d'Euclide.

L'une des fonctions arithmétiques les plus intéressantes qui présente une propriété importante sur les entiers positifs est la fonction *somme−pgcd*, appelée aussi fonction de *Pillai* qui est définie par

$$P(n) = \sum_{i=1}^{n} \gcd(i, n)$$

Les propriétés de la fonction P, qui découlent de la représentation de la fontion elle même, ainsi que diverses généralisations et analogues de celle-ci ont été étudiées par plusieurs auteurs. Il n'est peut-être pas surprenant que certains de ces résultats aient été redécouverts à maintes reprises. La fonction de Pillai montre vraiment son importance en raison du grand intéret qu'elle a suscité de la part de nombreux chercheurs ces dernières années, par exemples ([13], [10], [11], [12],[21], [29], ...)

L'intérêt de ce mémoire est d'étudier certaines fonctions arithmétiques liées à la fonction PGCD. Il s'agit d'utiliser des outils de combinatoire (certaines propriétés sur la divisibilité, nombre premier, nombre composé,. . .), et d'arithmétique (Les fonctions arithmétiques usuelles, produit de convolution, . . .).
Le mémoire est organisé comme suit :

Dans le premier chapitre, on rappelle les principales définitions et notations nécessaires et certains théorèmes importants sur les fonctions arithmétiques ainsi que les propriétés sur la divisibilité et les nombres. Ces deux notions sont utiles aux chapitres suivants.

Le deuxième chapitre est consacré à la définition d'une nouvelle fonction arithmétique additive relative à entier fixe ainsi qu'à l'étude de certaines de ses propriétés de base et nous utilisons les notions de nombres parfaits. Les resultats fournis tout au long du deuxième chapitre font l'objet d'un article [11].

Le troisième chapitre est consacré à la définition d'une nouvelle fonction arithmétique multiplicative relative à entier fixe ainsi qu'à l'étude de certaines de ses propriétés de base et nous utilisons les notions de nombres parfaits. Les resultats fournis tout au long du deuxième chapitre font l'objet d'un article [22].

Chapitre 1

Notions sur la divisibilité et les fonctions arithmétiques

1.1 Divisibilité

Définition 1.1 *Soient a, $b \in \mathbb{Z}$. On dit que a divise b, ou que a est un diviseur de b, ou que b est divisible par a, ou que b est un multiple de a, s'il existe un entier $k \in \mathbb{Z}$ pour lequel $b = ak$. Cette relation se note $a \mid b$. Pour tout $a \in \mathbb{Z}$, l'ensemble des multiples de a n'est autre que l'ensemble $a\mathbb{Z} = \{ak \mid k \in \mathbb{Z}\}$. On note $\mathcal{D}(a)$ l'ensemble des diviseurs de a.*

Exemple 1.1

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(0) &= \mathbb{Z}, \mathcal{D}(15) = \{\pm 1, \ \pm 3, \ \pm 5, \ \pm 15\}, \\ \mathcal{D}(32) &= \{\pm 1, \ \pm 2, \ \pm 4, \ \pm 8, \ \pm 16, \ \pm 32\}. \end{aligned}$$

Définition 1.2 *Les diviseurs communs à deux entiers a et b sont les entiers relatifs quidivisent à la fois a et b. On note $\mathcal{D}(a, b)$ l'ensemble de ces diviseurs communs.*

Exemple 1.2 $\mathcal{D}(24, 52) = \{\pm 1, \ \pm 2, \ \pm 4\}$

Remarque 1.1
1. $\forall a \in \mathbb{Z}$, $\mathcal{D}(a) = \mathcal{D}(|a|)$ *et pour a* $a \neq 0$ *on a* $\max \mathcal{D}(a) = |a|$.
2. $\forall a, b \in \mathbb{Z}$, *il est clair qu'on a :* $\mathcal{D}(a, b) = \mathcal{D}(a) \cap \mathcal{D}(b)$, $\mathcal{D}(a, b) = \mathcal{D}(b, a)$, $\mathcal{D}(a, a) = \mathcal{D}(a, 0) = \mathcal{D}(a)$.
3. *Soit d non nul, d divise a, si, et seulement si,* $\mathcal{D}(a, d) = \mathcal{D}(d)$.

1.1.1 Certaines propriétés sur la divisibilité

Soient $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. La relation divisibilité vérifie les relations suivantes :
(i). La relation de divisibilité $|$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}$, mais elle est seulement réflexive

et transitive sur $\mathbb{Z}$ car : $a \mid b$ et $b \mid a \Longleftrightarrow |a| = |b| \Longleftrightarrow a = b$ ou $a = -b$.
(ii). Si $d \mid a$ et $d \mid b$, alors $d \mid (\alpha a + \beta b)$ pour tous α, $\beta \in \mathbb{Z}$.
(iii) . Si $a \mid b$ et $c \mid d$, alors $ac \mid bd$, et en particulier $a^k \mid b^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
(iv) . Pour $m \neq 0$ on a $ma \mid mb$ si et seulement si $a \mid b$.
(iv) . $\mathcal{D}(a, b) = \mathcal{D}(a - kb, b)$ pour tout entier k.
(vi) . Si b est non nul, $\mathcal{D}(a, b) = \mathcal{D}(r, b)$ où r est le reste de la division euclidienne de a par b.

Démonstration
(i). Faisons l'hypothèse que $a \mid b$ et $b \mid a$. Ainsi $b = ak$ et $a = bk'$ pour certains $k, k' \in \mathbb{Z}$, donc $b = bkk'$.

- Si $b = 0$, alors $a = bk' = 0$, donc $|a| = |b|$.
- Si au cas contraire $b \neq 0$, alors $kk' = 1$, donc soit $k = k' = 1$, soit $k = k' = -1$.

Ainsi $a = b$ ou $a = -b$, i.e. $|a| = |b|$.
(ii). Par hypothèse $a = dk$ et $b = dk'$ pour certains $k, k' \in \mathbb{Z}$, donc $\alpha a + \beta b = d(\alpha k + \beta k')$ avec $\alpha k + \beta k' \in \mathbb{Z}$ pour

tous α, $\beta \in \mathbb{Z}$, donc $d \mid (\alpha a + \beta b)$.
(iii) . Par hypothèse $b = ak$ et $d = ck'$ pour certains $k, k' \in \mathbb{Z}$, donc $bd = (ac)(kk')$ avec $kk' \in \mathbb{Z}$, donc $ac \mid bd$. Pour montrer que $a^k \mid b^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, revenons à ce que nous avons vu maintenant et posons $c = a$, $d = b$, cela vient immédiatement $a^2 \mid b^2$, puis on termine par récurrence.
(iv) . Facile à montrer
(v) . Soit $d \in \mathcal{D}(a, b)$, donc $d \mid a$ et $d \mid b$. D'après (ii) on obtient $d \mid a - kb$ pour tout entier k et ce la montre que $d \in \mathcal{D}(a - kb, b)$ c-à-d $\mathcal{D}(a, b) \subset \mathcal{D}(a - kb, b)$. En revanche, posons $d \in \mathcal{D}(a - kb, b)$ et on applique a nouveau (ii), il vient que $d \mid a$ et $d \mid b$ c-à-d $\mathcal{D}(a - kb, b) \subset \mathcal{D}(a, b)$.
(vi) . Soient a et b deux entiers non nuls tel que $b = ak + r$, où $k, r \in \mathbb{Z}$. En utilisant (iv) et nous montrons que $\mathcal{D}(a, b) = \mathcal{D}(r, b)$.

1.1.2 Nombre premier, nombre composé

Définition 1.3 *Soit $p \in \mathbb{N}$. On dit que p est premier si $p \neq 1$ et si les seuls diviseurs positifs de p sont 1 et p. On dit que p est composé si $p \neq 1$ et si p n'est pas premier. L'ensemble des nombres premiers est souvent noté $\mathbb{P}$.*

Exemple 1.3 *Les suivants sont des nombres premiers :* $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41.$

La liste de tous les premiers inférieur ou égale un entier N se calcule par un procédé appelé la crible d'Eratosthène[1].

Théorème 1.1 (Existence de la factorisation première) *Tout entier $n \geq 2$ est un produit de nombres premiers. De plus, l'écriture $n = \prod_{i=1}^{r} p_i$ comme un produit de nombres premiers est unique à l'ordre des facteurs près.*

Preuve. La preuve du théorème se fait en deux étapes : l'unicité et l'existence.
Existence. On utilise une récurrence forte. Le cas initial est $n = 2$, qui est un nombre premier, et est le produit de un seul nombre premier 2. Maintenant considérons $n \geq 3$, et supposons que tout k avec $2 \leq k \leq n-2$ est un produit de nombres premiers. Alors n est soit premier soit composé. Si n est premier, il est le produit de un seul nombre premier n. Si n est composé, alors $n = ab$ avec $2 \leq a \leq n-2$ et $2 \leq b \leq n-2$. Par l'hypothèse de récurrence, on peut écrire $a = \prod_{i=1}^{r} p_i$ et $b = \prod_{j=1}^{s} q_j$ comme des produits de premiers. Alors $n = \prod_{i=1}^{r} p_i \times \prod_{j=1}^{s} q_j$ est aussi un produit de premiers. Donc que n soit premier ou composé, il est un produit de premiers.
Unicité. Supposons qu'on a deux écritures $n = \prod_{i=1}^{r} p_i$ et $n = \prod_{j=1}^{s} q_j$ d'un nombre comme produits de nombres premiers. On montre par récurrence simple sur $r \geq 1$ que les deux écritures sont les mêmes à ordre près.

Dans le cas initial $r = 1$, le nombre $n = p_1$ est premier, mais il s'écrit aussi $n = \prod_{j=1}^{s} q_j$. Comme un nombre premier n'est pas un produit de deux entiers (ou plus) qui sont supérieur ou égale à 2, donc, il faut que $n = q_1$. Ainsi $p_1 = q_1$, i.e, les écritures sont les mêmes.

Maintenant considérons $n = \prod_{i=1}^{r} p_i$ avec $r \geq 2$ et supposant le cas $r - 1 \geq 1$. En supposant qu'on a deux factorisation pour l'entier n c'est à dire $n = \prod_{i=1}^{r} p_i = \prod_{j=1}^{s} q_j$. Alors

[1] Il s'agit de supprimer d'une table des entiers de 2 à N tous les multiples d'un entier (autres que lui-même).

p_1 est premier et $p_1 \mid \prod_{j=1}^{s} q_j$. On déduit alors que p_1 divise un des q_{j_0} où $1 \leq j_0 \leq s$. Or les seuls diviseurs positifs du premier q_{j_0} sont 1 et q_{j_0}, et $q_{j_0} \neq 1$ car il est premier. Donc on a $p_1 = q_{j_0}$. De plus on a $\frac{n}{p_1} = \prod_{i=2}^{r} p_i$ et $\frac{n}{p_1} = \prod_{j=1}^{j_0-1} q_j \times \prod_{j_0-1}^{s} q_j$ d'un même nombre comme un produit de $(r-1)$ et $(s-1)$ premiers. Par l'hypothèse de récurrence, les deux écritures pour $\frac{n}{p_1}$ sont les mêmes à l'ordre des facteurs près. On déduit que les écritures $n = \prod_{i=1}^{r} p_i$ et $n = \prod_{j=1}^{j_0-1} q_j \times p_1 \times \prod_{j_0-1}^{s} q_j = \prod_{j=1}^{s} q_j$ sont les mêmes à l'ordre des facteurs près. ■

1.1.3 Division euclidienne

Théorème 1.2 (Théorème de la division euclidienne) *Soient $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$. Il existe un et un seul couple $(q, r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ pour lequel : $a = bq + r$ et $0 \leq r < b$. On appelle a le dividende de la division euclidienne de a par b, b son diviseur, q son quotient et r son reste. Par ailleurs : $q = \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor$ et $a \equiv r\, [b]$ (Relation de congruence modulo un entier[2]).*

Preuve.

Existence. L'idée de la preuve est simple. Si a est positif, on lui retranche b une fois, deux fois, trois fois...jusqu'à ce que a ait presque complètement fondu, c'est-à-dire jusqu'au moment où le résultat est compris entre 0 et $b-1$. Si a est négatif, on fait pareil mais en ajoutant b au lieu de le retrancher. L'ensemble $\mathbb{D} = (a + b\mathbb{Z}) \cap \mathbb{N}$,[3] est une partie non vide de $\mathbb{N}$ car il contient $a + b \times 0$ si $a \geq 0$ et $a - b \times a$ si $a < 0$. Cet ensemble possède ainsi un plus petit élément r, et par définition de $\mathbb{D}$: $a = bq + r$ pour un certain $q \in \mathbb{Z}$. Se peut-il qu'on ait $r \geq b$? Si c'était le cas, $a - b(q+1) = r - b$ serait un élément de $\mathbb{D}$ strictement plus petit que $r = \min(\mathbb{D})$ qu'est impossible.
Conclusion : $0 \leq r < b$.

Unicité. Soient (q, r) et (q', r') deux couples de division euclidienne de a par b. Aussitôt $|r - r'| < b$, mais par ailleurs $b(q - q') = r - r'$, donc $b \times |q - q'| < b$, d'où $|q - q'| < 1$. Comme $(q - q')$ est un entier, cela veut dire que $q = q'$, et en retour $r = a - bq = a - bq' = r'$.

Pour finir : $0 \leq a - bq < b$, donc $\frac{a}{b} - 1 < q \leq \frac{a}{b}$, donc en effet $q = \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor$. ■

Proposition 1.1 *Un entier a est divisible par un autre entier b non nul si et seulement si le reste de la division euclidienne de a par b est nul.*

[2]Soient $a, b, r \in \mathbb{Z}$. On dit que a est congru à r modulo b si $r \mid (a - b)$, i.e. s'il existe un entier $q \in \mathbb{Z}$ pour lequel $a = q.b + r$. Cette relation se note $a \equiv r\, [b]$.

[3]Notons que : $a + b\mathbb{Z} = \{a + bq \mid q \in \mathbb{Z}\}$

Preuve. Introduisons (q,r) les quotient et reste de la division euclidienne de a par b, c'est-à-dire $a = bq + r$ avec $0 \leq r < |b|$.

Si $r = 0$ alors $a = bq$ ou encore $b \mid a$. Réciproquement si $b \mid a$ alors il existe $q' \in \mathbb{Z}$ tel que $a = bq'$. En remplaçant dans le première égalité on obtient $bq' = bq + r$ ou encore $b(q - q') = r$ ou encore $b \mid r$. Comme $|b| > |r|$, il en découle que $r = 0$. ∎

1.2 Plus grand commun diviseur de deux entiers (pgcd ou gcd)

Définition 1.4

• *Si a et b sont deux entiers relatifs non tous les deux nuls, l'ensemble des diviseurs communs à a et b admet un plus grand élément. On l'appelle "plus grand commun diviseur de a et b" et on le note* $\texttt{pgcd}(a,b)$ *(ou parfois* $\gcd(a,b)$*).*

• *Soient $a_1, \ldots, a_r \in \mathbb{Z}$. Le plus grand commun diviseur (ou* gcd*) de $a_1, \ldots, a_r$ tout entier naturel d pour lequel :*

$$\mathcal{D}(a_1) \cap \ldots \cap \mathcal{D}(a_r) = \mathcal{D}(a_1, \ldots, a_r) = \mathcal{D}(d).$$

• *Deux entiers sont premiers entre eux si leur* gcd *vaut* 1.

Exemple 1.4

1. *On a* $\mathcal{D}(24, 52) = \{\pm 1, \ \pm 2, \ \pm 4\} = \mathcal{D}(4)$, *ainsi,* $\gcd(24, 52) = 4$.
2. *On a* $\mathcal{D}(15, 22) = \{\pm 1\}$, *ainsi,* $\gcd(15, 22) = 1$ *(15 et 22 sont sont premiers entre eux).*

Propriétés du GCD

Soient a et b deux entiers relatifs non tous les deux nuls.

1. Le $\gcd(a,b)$ est égal au produit des facteurs premiers communs aux deux nombres, chacun étant affecté du plus petit exposant avec lequel il figure dans leur d´ecomposition.
2. Pour tout entier $k \in \mathbb{Z}$:

$$\gcd(a,b) = \gcd(a - kb, b),$$

en particulier,

$$\gcd(a,b) = \gcd(r,b),$$

où r est le reste de la division euclidienne de a par b.
3. tout diviseur commun à a et b divise d ($d' \mid a$ et $d' \mid b$ implique $d' \mid d$).
4. propriété caractéristique : Si $d = \gcd(a, b)$, alors il existe $a', b' \in \mathbb{Z}$ tels que $a = da'$, $b = db'$ et $\gcd(a', b') = 1$.
5. lemme de Bezout[4] : Si $d = \gcd(a, b)$, alors il existe des entiers u et v avec $ua + vb = d$.
6. homogénéité : Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\gcd(ka, kb) = k \gcd(a, b)$.

Proposition 1.2 *Tout système fini d'entiers $a_1, \ldots, a_r$ a un* gcd*, qui est unique, et il vérifie*

$$\gcd(a_1, \ldots, a_r) = \gcd(a_1, \gcd(a_2, \ldots, a_r)).$$

1.3 Le plus petit multiple commun (ppcm)

Définition 1.5 *On appelle plus petit commun multiple (ou* **ppcm***) de $a_1, ..., a_k$, $k \in \mathbb{Z}_{>1}$ tout entier naturel m pour lequel :*
· m est un multiple commun de $a_1, ..., a_k$.
· m divise tout multiple commun de $a_1, ..., a_k$.

Comme le gcd, le `ppcm` de plusieurs entiers se calcule itérativement parce qu'on a

$$\mathtt{ppcm}(a_1, ..., a_k) = \mathtt{ppcm}(\mathtt{ppcm}(a_1, a_2), a_3 \ldots, a_k).$$

Théorème 1.3 *Pour des entiers $a \geq 1$ et $b \geq 1$, on a*

$$\mathtt{ppcm}(a, b) = \frac{a.b}{\gcd(a, b)}.$$

Preuve. Soit $d = \gcd(a, b)$ et notons $a' = \dfrac{a}{d}$ et $b' = \dfrac{b}{d}$. Remarquons que a' et b' sont premiers entre eux par la propriété 4(voir propriétés gcd). Alors $\dfrac{ab}{d} = a'b'd$ est bien un multiple commun de a et a car il s'écrit $a'b'd = ab' = a'b$. Un multiple commun général $m = ak = b\ell$ s'écrit $m = da'k = db'\ell$. On a alors $a'k = b'\ell$. Comme a' et b' sont premiers entre eux, et $b' \mid a'k$ on a $b' \mid k$. Donc il y a un entier s avec $k = sb'$, et on a $m = da'b's$. Donc tout multiple commun m de a et b est un multiple de $a'b'd$. Ainsi $a'b'd = \dfrac{ab}{d}$ vérifie la définition du `ppcm` de a et b. ■

[4] Etienne Bézout est né le 31 Mars 1730 à Nemours, France et mort le 27 Septembre 1783 à Basses-Loges, France.

Exemple 1.5

$$\begin{aligned} \mathit{ppcm}(21,28) &= \frac{21.28}{\gcd(21,28)} = \frac{588}{7} = 84, \\ \mathit{ppcm}(4147,10672) &= \frac{4147 \times 10672}{29} = 1526096. \end{aligned}$$

1.4 Fonctions arithmétiques

Il y a deux types de fonctions arithmétiques, les fonctions arithmétiques additives et les fonctions arithmétiques multiplicatives. Dans cette partie, on donne quelques propriétés de ces fonctions et on donne les outils nécessaires pour les chapitres qui suivent.

Définition 1.6 *Une fonction arithmétique est une application de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{C}$. On désigne par $\mathcal{A}$ l'ensemble des fonctions arithmétiques.*

Exemple 1.6 *Nous énumérons les principales fonctions arithmétiques que le lecteur peut rencontrer dans ses études en théorie analytique des nombres.*

1. *La fonction indicatrice δ définie par* $\delta(n) = \begin{cases} 1, & si\ n\ = 1 \\ 0, & si\ n \geq 2. \end{cases}$

2. *La fonction constante $\mathbf{1}$ définie par $\mathbf{1}(n) = 1$ et la fonction Id définie par $Id(n) = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

3. *La fonction ω définie par $\omega(1) = 0$, et pour tout $n \geqslant 2$, $\omega(n)$ est le nombre de facteurs premiers distincts de n.*

n	7	12	126	630	1890	2214
$\omega(n)$	1	2	3	4	3	3

4. *La fonction Ω définie par $\Omega(1) = 0$ et pour tout $n \geqslant 2$, par*

$$\Omega(n) = \sum_{p^\alpha \| n} \alpha.$$

n	7	12	126	630	1890	2214
$\Omega(n)$	1	3	4	5	6	4

5. *La fonction de Möbius μ définie par $\mu(1) = 1$, et pour tout $n \geqslant 2$,*

$$\mu(n) = \begin{cases} 0, & si\ n\ est\ divisible\ par\ un\ carré\ parfait \\ (-1)^{\omega(n)}, & sinon. \end{cases}$$

n	7	12	111	630	1890	13547
$\mu(n)$	-1	0	1	0	0	-1

6. *La fonction de Liouville* λ *définie par* $\lambda(n) = (-1)^{\Omega(n)}$.

n	7	12	126	630	1890	2214
$\lambda(n)$	-1	-1	1	-1	1	1

7. *La fonction des diviseurs de Piltz* d_k *définie par* $d_1 = \mathbf{1}$, *et pour tout* $n \geqslant 1, 2 * 3 * 31$

$$d_2(n) = d(n) = \sum_{d|n} 1 \text{ et } d_k(n) = \sum_{d|n} d_{k-1}(d), \ (k \geqslant 2).$$

n	7	8	12	130	186	1183
$d(n)$	1	4	6	8	8	4

8. *La fonction* φ *est l'indicatrice d'Euler définie par :*

$$\varphi(n) = \texttt{card}\{m \in \mathbb{N}^* \mid m \leq n \text{ et } m \text{ premier avec } n\}.$$

Par exemple :
· $\varphi(8) = 4$ *car parmi les nombres de* 1 *à* 8, *seuls les quatre nombres* 1, 3, 5 *et* 7 *sont premiers avec* 8.
· $\varphi(12) = 4$ *car parmi les nombres de* 1 *à* 12, *seuls les quatre nombres* 1, 5, 7 *et* 11 *sont premiers avec* 12.
· *un entier* $p > 1$ *est premier si et seulement si tous les nombres de* 1 *à* $p-1$ *sont premiers avec* p, *c.-à-d. si et seulement si* $\varphi(p) = p - 1$.
9. *La Fonction somme des diviseurs est parfois notée* σ. *On a*

$$\sigma(n) = \sum_{d|n} d.$$

n	1	2	3	4	18	36
$\sigma(n)$	1	3	4	7	33	91

1.4.1 Fonction arithmétique multiplicative

Définition 1.7 *On dit qu'une fonction arithmétique* f *est multiplicative si* $f(1) = 1$ *et* $f(nm) = f(n)f(m)$ *lorsque* $(n, m) = 1$. *On désigne par* $\mathcal{M}$ *l'ensemble des fonctions multiplicatives. Une fonction arithmétique* f *est dite complètement multiplicative si* $f(1) = 1$ *et* $f(nm) = f(n)f(m)$ *pour tous entiers* n *et* m.

Exemple 1.7 *Les fonctions d, λ et μ sont multiplicatives.*

Remarque 1.2 *On note que si la fonction f est multiplicative, alors pour tout entier $n = \prod_{p^\alpha \| n} p^\alpha$ on aura*

$$f(n) = \prod_{p^\alpha \| n} f(p^\alpha).$$

Proposition 1.3 *Si f et g sont deux fonctions arithmétiques multiplicatives, alors il en est de même pour les fonctions fg et $\frac{f}{g}$, ($g \neq 0$).*

Théorème 1.4 *Soit f une fonction multiplicative. La fonction F définie par*

$$F(n) = \sum_{d|n} f(d) \quad \text{pour tout } n \geq 1,$$

est multiplicative.

Preuve. Soient n et m deux entiers positifs tel que $(n, m) = 1$. On pose $d = d_1 d_2$ où $d_1|n$ et $d_2|m$. Dans ce cas on aura $(d_1, d_2) = 1$. Par conséquent

$$F(nm) = \sum_{d|nm} f(d) = \sum_{d_1 d_2|nm} f(d_1 d_2) = \sum_{d_1|n,\ d_2|m} f(d_1 d_2).$$

Comme $(d_1, d_2) = 1$ on obtient

$$F(nm) = \sum_{d_1|n,\ d_2|m} f(d_1)f(d_2) = \sum_{d_1|n} \sum_{d_2|m} f(d_1)f(d_2) = \sum_{d_1|n} f(d_1) \sum_{d_2|m} f(d_2) = F(n)F(m).$$

■

1.4.2 Fonction arithmétique additive

Définition 1.8 *Une fonction arithmétique f est dite additive si, pour tous entiers positifs m et n tel que $(m, n) = 1$, on a*

$$f(mn) = f(m) + f(n).$$

La fonction f est complètement (strictement) additive si la condition $f(mn) = f(m)+f(n)$ est vérifiée pour tous les entiers positifs m et n.
La fonction f est dite fortement additive si f est additive et si $f(p^k) = f(p)$, quels que soient p premier et k entier > 1.

Exemple 1.8 *les fonctions ω et Ω sont additives, la première est fortement additive, la seconde est complètement additive.*

Dans [9] on trouves une nouvelle fonction arithmétique additive notée $\mathcal{A}(n)$ et definie comme suit : $\mathcal{A}(1) = 0$ et

$$\mathcal{A}(n) = \sum_{p^\alpha \| n} \mathcal{H}(\alpha),$$

où

$$\mathcal{H}(\alpha) = \sum_{1 \leq k \leq \alpha} \frac{1}{k}.$$

Notons que la fonction $\mathcal{A}(n)$ est édentique à la fonction $\omega(n) = \sum_{p \| n} 1$, pour des cas particuliers à l'entier n.
En effet, soit $n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}$. Si $\alpha_i = 1$ pour tout $(1 \leq i \leq r)$. On a

$$\mathcal{A}(n) = \sum_{p_i | n} 1 = \omega(n).$$

Soit m un nombre entier positif tel que $m = \prod_{j=1}^{s} q_j^{\beta_j}$, sa décomposition canonique. Si $(m, n) = 1$ (i.e., $q_j \neq p_i$ pour tous $1 \leq i \leq r$ et $1 \leq j \leq s)$, ainsi

$$\mathcal{A}(nm) = \sum_{p^\alpha \| nm} \mathcal{H}(\alpha) = \sum_{p_i | n} \mathcal{H}(\alpha_i) + \sum_{q_j | m} \mathcal{H}(\beta_i) = \mathcal{A}(n) + \mathcal{A}(m).$$

D'autre part, si p_1, p_2 et p_3 sont trois nombres entiers premiers, il en result que

$$\mathcal{A}\left(p_1 p_2^2 p_3\right) = \frac{7}{2},$$

alors que

$$\mathcal{A}(p_1 p_2) + \mathcal{A}(p_2 p_3) = 1 + 1 + 1 + 1 = 4.$$

Par conséquent, on peut montrer que la fonction $\mathcal{A}$ est additive mais pas complètement additive.

En continuant à donner plus de détails sur cette nouvelle fonction, nous savons que pour tout α_i $(1 \leq i \leq r)$ on a

$$1 \leq \mathcal{H}(\alpha_i) \leq \alpha_i,$$

ce qui implique que

$$\sum_{p_i | n} 1 \leq \sum_{p_i | n} \mathcal{H}(\alpha_i) \leq \sum_{p_i | n} \alpha_i,$$

i.e.,

$$\omega(n) \leq \mathcal{A}(n) \leq \Omega(n) \text{ pour tout } n > 1.$$

1.4.3 Produit de convolution de deux fonctions arithmétiques

Définition 1.9 *Soient f et g deux fonctions arithmétiques. Le produit de convolution de f et g est la fonction $f*g$ définie par*

$$(f*g)(n)=\sum_{d|n} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right).$$

Remarque 1.3 *Toute fonction arithmétique f vérifie l'égalité suivante :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad (f*\delta)(n)=f(n),$$

où δ est la fonction indicatrice.

Proposition 1.4 *Soient f, g et h trois fonctions arithmétiques. Les propriétés suivantes sont vraies*

$$\begin{aligned}
&1) \quad f*g=g*f,\\
&2) \quad (f*g)*h=f*(g*h),\\
&3) \quad f*(g+h)=(f*g)+(f*h).
\end{aligned}$$

Preuve. 1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour la première assertion, on a

$$(f*g)(n)=\sum_{d|n} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right)=\sum_{d|n} f\left(\frac{n}{d}\right)g(d)=\sum_{d|n} g(d)f\left(\frac{n}{d}\right)=(g*f)(n).$$

Pour l'assertion 2), on a par définition

$$((f*g)*h)(n)=\sum_{d|n}(f*g)(d)h\left(\frac{n}{d}\right),$$

et comme

$$\sum_{d|n}(f*g)(d)h\left(\frac{n}{d}\right)=\sum_{dm=n}(f*g)(d)h(m) \text{ et } (f*g)(d)=\sum_{kl=d} f(k)g(l),$$

alors on obtient

$$\begin{aligned}
((f*g)*h)(n) &= \sum_{dm=n}\sum_{kl=d} f(k)g(l)h(m)\\
&= \sum_{klm=n} f(k)g(l)h(m)\\
&= \sum_{k|n} f(k)\sum_{l|\frac{n}{k}} g(l)h(\frac{n}{kl})\\
&= \sum_{k|n} f(k)(g*h)\left(\frac{n}{k}\right)\\
&= (f*(g*h))(n).
\end{aligned}$$

De même, on montre la distributivité par rapport à l'addition. En effet, on a

$$(f*(g+h))(n)=\sum_{d|n}f(d)\left(g\left(\frac{n}{d}\right)+h\left(\frac{n}{d}\right)\right)$$

et comme la somme est finie on a

$$\begin{aligned}(f*(g+h))(n) &= \sum_{d|n}f(d)g\left(\frac{n}{d}\right)+\sum_{d|n}f(d)h\left(\frac{n}{d}\right)\\ &= (f*g)(n)+(f*h)(n).\end{aligned}$$

■

Théorème 1.5 *Si f et g sont deux fonctions arithmétiques multiplicatives, alors la fonction arithmétique $f*g$ est multiplicative.*

Preuve. Remarquons tout d'abord que $(f*g)(1)=f(1)g(1)=1$. Soit maintenant deux entiers m et n premiers entre eux, par définition on a

$$(f*g)(nm)=\sum_{d|nm}f(d)g\left(\frac{nm}{d}\right),$$

comme $(n,m)=1$, alors l'entier d est un diviseur de nm, si et seleument si, il existe deux entiers $d_1$et d_2 tels que $d=d_1d_2$ avec $d_1|n$ et $d_2|m$ et $(d_1,d_2)=1$, cela nous donne

$$\begin{aligned}(f*g)(nm) &= \sum_{d_1d_2|nm}f(d_1d_2)g\left(\frac{nm}{d_1d_2}\right)\quad \text{avec } (d_1,d_2)=1\\ &= \sum_{d_1|n}\sum_{d_2|m}f(d_1)f(d_2)g\left(\frac{n}{d_1}\right)g\left(\frac{m}{d_2}\right)\quad \text{car } (\frac{n}{d_1},\frac{m}{d_2})=1\\ &= \sum_{d_1|n}f(d_1)g\left(\frac{n}{d_1}\right)\sum_{d_2|m}f(d_2)g\left(\frac{m}{d_2}\right)\\ &= (f*g)(n)(f*g)(m).\end{aligned}$$

■

Les fonctions arithmétiques $d\,(n)$, $\sigma\,(n)$, $\mu\,(n)$ et $\phi\,(n)$ sont multiplicatives, en effet :

- Pour la fonction $d\,(n)$ on a $d=\mathbf{1}*\mathbf{1}$ et comme la fonction constante $\mathbf{1}$ est multiplicative alors $d\,(n)$ est multiplicative.
- La fonction $\sigma=Id*\mathbf{1}$ et comme les deux fonctions Id et $\mathbf{1}$ sont multiplicatives alors $\sigma\,(n)$ est aussi multiplicative.

– On a $\mu(1) = 1$ et pour tout $n, m \in \mathbb{N}^*$ tels que $(n, m) = 1$ on a les deux cas suivants
a) n ou m a un facteur carré alors $\mu(nm) = \mu(n)\mu(m) = 0$.
b) n et m n'ont pas de facteur carré, on a alors $n = p_1 \cdots p_k$ et $m = q_1 \cdots q_h$ et comme n et m sont premiers entre eux, alors les p_i et les q_j sont tous distincts, donc

$$\mu(nm) = (-1)^{k+h} \text{ et } \mu(n)\mu(m) = (-1)^k(-1)^h = (-1)^{k+h}.$$

– Pour la fonction indicatrice d'Euler $\varphi(n)$ on a

$$\varphi(n) = (\mu * Id)(n) = \sum_{d|n} \mu(d)\frac{n}{d},$$

et comme la fonction μ est multiplicative donc la fonction $\varphi(n)$ est multiplicative.

Théorème 1.6 *Une fonction arithmétique f est inversible pour le produit de convolution, si et seulement si, $f(1) \neq 0$.*

Preuve. On suppose que la fonction f est inversible, c'est-à-dire, il existe $g \in \mathcal{A}$ tel que $f * g = \delta$.
Cette dernière condition donne immédiatement $f(1) \neq 0$, en effet, on a

$$(f * g)(1) = \delta(1) = 1$$

et d'autre part on a

$$(f * g)(1) = \sum_{d|1} f(d)g\left(\frac{1}{d}\right) = f(1)g(1),$$

donc $f(1)g(1) = 1$.
Réciproquement, on suppose $f(1) \neq 0$ et on cherche une fonction arithmétique g qui vérifie $f * g = \delta$, donc elle satisfait $f(1)g(1) = 1$ et $(f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right) = 0$ pour tout $n \geq 2$.
On va construire g par récurrence. Pour $n = 1$ on a $g(1) = \frac{1}{f(1)}$ et pour $n \geq 2$, on définit la fonction g par

$$0 = f(1)g(n) + \sum_{\substack{1<d<n \\ d|n}} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right),$$

donc on a

$$g(n) = -\frac{1}{f(1)} \sum_{\substack{1<d\leq n \\ d|n}} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right).$$

■

Théorème 1.7 (Formule d'inversion de Möbius) *Soit f une fonction arithmétique. Pour tout $n \geq 1$, on a*

$$F(n) = \sum_{d|n} f(d) \text{ si et seulement si, } f(n) = \sum_{d|n} F(\frac{n}{d})\mu(d),$$

où μ est la fonction de Möbius.

Preuve. On pose $F = f * \mathbf{1}$, où $\mathbf{1}$ est la fonction constante que l'on a défini précédemment, donc on a

$$f * \delta = f * (\mu * \mathbf{1}) = (f * \mathbf{1}) * \mu = F * \mu.$$

Réciproquement, on pose $f = F * \mu$, donc on obtient

$$f * \mathbf{1} = (F * \mu) * \mathbf{1} = F * (\mu * \mathbf{1}) = F * \delta = F.$$

et comme on a $\mu * \mathbf{1} = \delta$, [23, Théorème 6.13] on arrive à l'égalité

$$f * \mathbf{1} = F * \delta = F.$$

■

Remarque 1.4 *L'ensemble $\mathcal{M}$ des fonctions arithmétiques multiplicatives muni de l'addition et de la convolution de Dirichlet forme un anneau commutatif.*

En 1985, E. Cesàro [15] à prouvé la propriété suivante :

Lemme 1.1 *Pour tout entier positif n et f une fonction arithmétique, on a*

$$\sum_{i=1}^{n} f(\gcd(i,n)) = (f * \boldsymbol{\varphi})(n).$$

Cela découle de

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} f(\gcd(i,n)) &= \sum_{\substack{d|n,\ k \leq \frac{n}{d} \\ \gcd\left(k, \frac{n}{d}\right)=1}} f(d) \\
&= \sum_{d|n} f(d) \sum_{\substack{k \leq \frac{n}{d} \\ \gcd\left(k, \frac{n}{d}\right)=1}} 1 \\
&= \sum_{d|n} f(d)\, \varphi\left(\frac{n}{d}\right) \\
&= (f * \varphi)(n).
\end{aligned}$$

Le lemme 1 a de nombreuses applications intéressantes.
(a) . Pour $f = Id$ on obtient

$$\sum_{i=1}^{n} \gcd(i,n) = (Id * \boldsymbol{\varphi})(n),$$

qui est la fonction de Pillai[5] [27] ou la fonction somme-gcd. Cette fonction arithmétique multiplicative a été introduite par Pillai en 1933.
(b) . Pour $f = d$, en utilisant $d * \varphi = \sigma$

$$\sum_{i=1}^{n} d(\gcd(i,n)) = \sigma(n).$$

[5] Subbayya Sivasankaranarayana Pillai (1901–1950) est un mathématicien indien spécialisé en théorie des nombres.

Chapitre 2

Sur une fonction arithmétique additive relative à la fonction PGCD

2.1 Introduction

Rappelons que pour tous les entiers a, $b \geq 1$, on désigne par $\gcd(a, b) = (a, b)$ le plus grand diviseur commun des entiers a et b. Soit

$$n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}$$

la décomposition en facteurs premiers pour l'entier $n > 1$. Dans [2] Atanassov a défini et étudié la fonction suivante :

$$\underline{mult}\,(n) = \prod_{i=1}^{r} p_i, \quad \underline{mult}\,(1) = 1,$$

et dans [28], Andrei V. Shubin a défini les deux fonctions arithmétiques additives suivantes

$$\Omega\,(k, n) = \sum_{\substack{p^\alpha \| n \\ \alpha \leq k}} \alpha \text{ and } \omega\,(k, n) = \sum_{\substack{p^\alpha \| n \\ \alpha > k}} 1. \tag{2.1}$$

Les deux fonctions $\Omega(k, n)$ et $\omega(k, n)$ sont des généralisations de fonctions bien connues $\Omega(n)$ et $\omega(n)$ qui sont respectivement le nombre de facteurs premiers, comptés avec leurs multiplicités et le nombre de diviseurs premiers distincts de n(Voir le premier chapitre, partie fonction Arithmétiques).

Dans ce chapitre, nous allons définir une nouvelle fonction arithmétique additive et certaines de ses propriétés de base seront étudiées.

2.2 Définitions et propriétés préliminaires

Soit k un entier positif. Nous définissons f_k comme étant la fonction arithmétique telle que $f_k(1) = 0$ et

$$f_k(n) = \sum_{p^\alpha \| n} (k, \alpha).$$

On note que la fonction $f_k(n)$ est égale à la fonction $\omega(n)$ ou à la fonction $\Omega(n)$ pour certains cas particuliers de l'entier k.
En effet, soit $n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}$. Si $k = 1$, alors $(k, \alpha_i) = 1$ pour tous $(1 \leq i \leq r)$. Par conséquent,

$$f_1(n) = \sum_{p_i | n} (1, \alpha_i) = \sum_{p_i | n} 1 = \omega(n), \text{ pour tout } n,$$

et si $\alpha_i \geq 2$ pour tous $1 \leq i \leq r$, on a

$$f_1(n) = \sum_{\substack{p_i | n \\ \alpha_i > 1}} 1 = \omega(1, n).$$

Si $k = \texttt{ppcm}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$, s'ensuit que $(k, \alpha_i) = \alpha_i$ pour tous $(1 \leq i \leq r)$. Ainsi

$$f_k(n) = \sum_{p_i | n} (k, \alpha_i) = \sum_{p_i | n} \alpha_i = \Omega(n),$$

et on peut aussi remarquer que $\alpha_i \leq k$, alors

$$f_k(n) = \sum_{\substack{p_i | n \\ \alpha_i \leq k}} \alpha_i = \Omega(k, n).$$

Le tableau suivant montre quelques valeurs pour la fonction f_k :

n	$f_2(n)$	$f_3(n)$	n	$f_2(n)$	$f_3(n)$	n	$f_2(n)$	$f_3(n)$
1	0	0	11	1	1	21	2	2
2	1	1	12	3	2	22	2	2
3	1	1	13	1	1	23	1	1
4	2	1	14	2	2	24	2	4
5	1	1	15	2	2	25	2	1
6	2	2	16	2	1	26	3	3
7	1	1	17	1	1	27	1	3
8	1	3	18	3	2	28	3	2
9	2	1	19	1	1	29	1	1
10	2	2	20	3	2	30	3	3

Soit m un entier positif tel que $m = \prod_{j=1}^{s} q_j^{\beta_j}$, sa décomposition canonique. Si$(m,n) = 1$ (i.e., $q_j \neq p_i$ pour tous $1 \leq i \leq r$ et $1 \leq j \leq s$), alors pour tous $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$

$$f_k(nm) = \sum_{p_i|n} (k, \alpha_i) + \sum_{q_j|m} (k, \beta_j) = f_k(n) + f_k(m).$$

D'autre part, si p_1, p_2 et p_3 sont des nombres premiers différents, on obtient pour tout $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$:

$$f_k\left(p_1 p_2^{k+1} p_3\right) = (k,1) + (k, k+1) + (k,1) = 3,$$

bien que

$$f_k\left(p_1 p_2^{k}\right) + f_k(p_2 p_3) = (k,1) + (k,k) + (k,1) + (k,1) = k+3.$$

Par conséquent, on peut remarquer que la fonction f_k est additive mais pas complètement additive.

On sait que pour tout α_i $(1 \leq i \leq r)$ et pour tout $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, la relation suivante est vérifie

$$1 \leq (k, \alpha_i) \leq \alpha_i,$$

et ce qui implique

$$\sum_{p_i|n} 1 \leq \sum_{p_i|n} (k, \alpha_i) \leq \sum_{p_i|n} \alpha_i,$$

i.e.,

$$\omega(n) \leq f_k(n) \leq \Omega(n) \text{ pour tout } n > 1. \tag{2.2}$$

2.3 Principaux résultats

Théorème 2.1 *Pour tout entier $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, $f_k(n) = \omega(n)$ si et seulement si n est un entier positif sans facteur carré*[1] *(square-free ou quadratfrei).*

---

[1] En arithmétique, un entier sans facteur carré (souvent appelé, par tradition ou commodité quadratfrei ou squarefree) est un entier relatif qui n'est divisible par aucun carré parfait, excepté 1. Par exemple, 10 est sans facteur carré mais 18 ne l'est pas, puisqu'il est divisible par $9 = 32$. Les dix plus petits nombres positifs sans facteur carré sont $1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 13, 14$.

L'entier n est sans facteur carré si et seulement si dans la décomposition en facteurs premiers de n, aucun nombre premier n'apparait plus d'une fois. Un autre point de vue équivalent est que pour chaque diviseur premier p de n, le nombre premier p ne divise pas $\frac{n}{p}$. Une autre formulation est la suivante : n est sans facteur carré si et seulement si dans chaque décomposition $n = ab$, les facteurs a et b sont premiers entre eux.

Preuve. Clairement, si n is a square-free est un entier positif square-free, nous avons $n = \prod_{i=1}^{r} p_i$, i.e., $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_r = 1$. Donc pour $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, il vient que

$$f_k(n) = \sum_{p_i \mid n} (k, 1) = \sum_{p_i \mid n} 1 = \omega(n).$$

Réciproquement, si n est un entier positif tel que

$$\forall k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}, \quad f_k(n) = \omega(n),$$

alors $(k, \alpha_i) = 1$ pour tout $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, et cela vrai si $\alpha_i = 1$ pour tous $1 \leq i \leq r$, i.e., seulement si n est un entier square-free positif. ■

Pour un entier fixe $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ il existe une infinité d'entiers positifs n pour lesquels $f_k(n) = \omega(n)$. Par exemple si k un entier impair, alors tous les $n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}$ avec α_i sont pairs pour tous $1 \leq i \leq r$ la propriété est vraie.

Corollaire 2.1 *Pour tout entier $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, et pour tout entier $n > 1$, on a*

$$f_k(\underline{mult}(n)) = \omega(n).$$

Théorème 2.2 *Pour tout entier $n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}$, tel que $\ell = \mathtt{ppcm}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$, la fonction $f_k(n)$ du variable k est $\ell-$périodique. Autrement dit*

$$f_{k+\ell}(n) = f_k(n), \text{ pour tout } k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}.$$

Preuve. Soit $\ell = \mathtt{ppcm}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$. Alors pour tout α_i $(1 \leq i \leq r)$ il existe un entier positif λ_i, tel que $\ell = \lambda_i \alpha_i$. Il s'ensuit que

$$(\alpha_i, k + \ell) = (\alpha_i, k + \lambda_i \alpha_i) = (\alpha_i, k) \quad (1 \leq i \leq r),$$

par cette dernière propriété nous obtenons

$$\begin{aligned} f_{k+\ell}(n) &= \sum_{p_i \mid n} (k + \ell, \alpha_i) \\ &= \sum_{p_i \mid n} (k, \alpha_i) \\ &= f_k(n). \end{aligned}$$

■

Théorème 2.3 *Pour tout entier* $n=\prod_{i=1}^{r}p_i^{\alpha_i}$, *tel que* $k=\gcd(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r)$, *on a*

$$\frac{f_k(n)}{k}=\omega(n).$$

Preuve. D'abord, comme on a $k=\gcd(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r)$ il existe r entiers positifs $\left(\alpha_1',\alpha_2',\ldots,\alpha_r'\right)$ tel que $\alpha_i=k\alpha_i' \quad (1\leq i\leq r)$. Cela montre que

$$(k,\alpha_i)=k \quad (1\leq i\leq r),$$

à partir de laquelle, on a pour tout entier $n>1$

$$f_k(n)=\sum_{p_i|n}(k,\alpha_i)=\sum_{p_i|n}k=k\omega(n).$$

■

Théorème 2.4 *Soient* k_1 *et* k_2 *des entiers positifs tels que* k_1 *est un multiple de* k_2. *Pour tout entier* $n=\prod_{i=1}^{r}p_i^{\alpha_i}$ *tel que* $\left(\frac{k_1}{k_2},\alpha_i\right)=1$ $(1\leq i\leq r)$. *On a*

$$f_{k_1}(n)=f_{k_2}(n).$$

Preuve. Puisque k_1 est un multiple de k_2, on a $k_1=dk_2$ où $d\geq 1$. Si $\left(\frac{k_1}{k_2},\alpha_i\right)=1$ ce qui revient à dire $(d,\alpha_i)=1$ pour tous $1\leq i\leq r$, il en vient que

$$(k_1,\alpha_i)=(dk_2,\alpha_i)=(k_2,\alpha_i).$$

En conséquence

$$\begin{aligned} f_{k_1}(n) &= \sum_{p_i|n}(k_1,\alpha_i) \\ &= \sum_{p_i|n}(k_2,\alpha_i) \\ &= f_{k_2}(n). \end{aligned}$$

■

De nombreux mathématiciens ont étudié les nombres parfaits et leurs généralisations à l'aide de diverses fonctions arithmétiques (voir par exemple [14], [16], [24]). Dans [25] et [26], certaines fonctions arithmétiques sont utilisées pour caractériser les nombres premiers de Mersenne généralisés[2].

Le théorème suivant donne les valeurs de f_k pour les nombres parfaits.

Théorème 2.5 *Soit $k \geq 1$ un nombre entier. Si k est impair, alors pour tout nombre parfait pair*[3] *n, on a*

$$f_k(n) = 2,$$

et si k est pair, alors pour tout nombre parfait impair[4] *n (s'il existe), il existe un entier m tel que*

$$f_k(n) - f_{k/2}(m) = 1.$$

Preuve. On sait que tout nombre parfait pair n est de la forme $2^{p-1}(2^p - 1)$ où $(2^p - 1)$ est un nombre de Mersenne premier (Donc p est premier). Ainsi, pour un nombre premier p tel que $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$ est parfait, on a

$$\begin{aligned} f_k(n) &= f_k\left(2^{p-1}(2^p - 1)\right) \\ &= f_k\left(2^{p-1}\right) + f_k(2^p - 1) \\ &= (k, p-1) + 1. \end{aligned}$$

[2]Un nombre de Mersenne est un nombre de la forme $(2^n - 1)$(souvent noté M_n), où n est un entier naturel non nul ; un nombre de Mersenne premier (ou nombre premier de Mersenne) est donc un nombre premier de cette forme. Si le nombre de Mersenne $(2^n - 1)$ est premier, alors n est premier.

Marin Mersenne $(1588 - 1648)$, connu également sous son patronyme latinisé Marinus Mersenius, est un religieux français de l'ordre des Minimes, érudit, physicien, mathématicien et philosophe.

[3]En arithmétique, un nombre parfait est un entier naturel égal à la moitié de la somme de ses diviseurs ou encore à la somme de ses diviseurs stricts. Plus formellement, un nombre parfait n est un entier tel que $\sigma(n) = 2n$. Ainsi 6 est un nombre parfait car ses diviseurs entiers sont $1, 2, 3$ et 6, et il vérifie bien $2 \times 6 = 12 = 1 + 2 + 3 + 6$.

Euclide, au IIIᵉ siècle, a démontré que si $M = 2^p - 1$ est premier, alors $M(M+1)/2 = 2^{p-1}(2^p - 1)$ est parfait. Par ailleurs, Leonhard Euler, au xviiiᵉ siècle, a démontré que tout nombre parfait pair est de la forme proposée par Euclide

[4]Un nombre parfait impair N doit remplir les conditions suivantes :

· $N > 10^{1500}$.

· N est de la forme $N = q^\alpha p_1^{2\beta_1} p_2^{2\beta_2} \cdots p_k^{2\beta_k}$

où : $q, p_1, \ldots, p_k$ sont des nombres premiers distincts (Euler) ;

· $q \equiv \alpha \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 4)$ (Euler)

Le résultat est direct si k est impair.
Si n est un nombre parfait impair, alors

$$n = p^{4Q+1}m^2$$

où p est un nombre premier tel que $p \equiv 1 \pmod 4$ et ne divise pas Q. Alors

$$\begin{aligned}
f_k(n) &= f_k\left(p^{4Q+1}m^2\right) \\
&= f_k\left(p^{4Q+1}\right) + f_k\left(m^2\right) \\
&= (4Q+1, k) + \sum_{p^\alpha \| m} (k, 2\alpha).
\end{aligned}$$

Donc, si k est pair, il vient que

$$\begin{aligned}
f_k(n) &= 1 + 2\sum_{p^\alpha \| m} (k/2, \alpha) \\
&= 1 + 2f_{k/2}(m).
\end{aligned}$$

■

Chapitre 3

Sur une fonction arithmétique multiplivative relative à la fonction PGCD

D'après ce que nous avons abordé dans les deux chapitres précédents, il semble bien que les fonctions arithmétiques sont d'une grande importance et font l'objet de beaucoup de soins de la part de nombreux chercheurs spécialisés dans ce domaine, notamment dans la définition de nouvelles fonctions arithmétiques (voir par exemple, [2–5]).

Nous allons donc consacrer ce chapitre à l'étude d'une nouvelle fonction arithmétique multiplicative qui est directement liée à la fonction `pgcd`, cette fonction faisant l'objet de l'article [22], et ce en lui présentant plusieurs propriétés. On peut dire que cette étude peut être considérée comme une généralisation de la fonction d'Atanassov. Pour commencer, rappelons que pour tous les entiers a, $b \geq 1$, on désigne par $\gcd(a, b) = (a, b)$ le plus grand diviseur commun des entiers a et b, ainsi

$$n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}$$

représente la décomposition en facteurs premiers pour l'entier $n > 1$, et notons que la fonction d'Atanassov est définie par :

$$\underline{mult}\,(n) = \prod_{i=1}^{r} p_i, \quad \underline{mult}\,(1) = 1.$$

3.1 Définitions et propriétés préliminaires

Soit k un entier positif. Nous définissons f_k comme étant la fonction arithmétique telle que $f_k(1) = 1$ et

$$f_k(n) = \prod_{i=1}^{r} p_i^{(\alpha_i,k)}.$$

On note que la fonction f_k est égale à la fonction I_d ou à la fonction $\underline{mult}$ pour certains cas particuliers de l'entier k.
En effet, soit $n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}$. Si $k = 1$, alors $(k, \alpha_i) = 1$ pour tous $(1 \leq i \leq r)$. Par conséquent,

$$f_1(n) = \prod_{i=1}^{r} p_i^1 = \prod_{i=1}^{r} p_i = \underline{mult}(n), \text{ pour tout } n.$$

Si k est un multiple de α_i pour tous $1 \leq i \leq r$, c-à-d $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, $\exists m_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tels que $k = \alpha_i m_i$, s'ensuit que $(k, \alpha_i) = \alpha_i$, par conséquent,

$$f_k(n) = \prod_{i=1}^{r} p_i^{(\alpha_i,k)} = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i} = n = I_d(n).$$

Le tableau suivant montre quelques valeurs pour la fonction f_k :

n	$f_2(n)$	$f_3(n)$	n	$f_2(n)$	$f_3(n)$	n	$f_2(n)$	$f_3(n)$	n	$f_2(n)$	$f_3(n)$
1	1	1	11	11	11	21	21	21	31	31	31
2	2	2	12	12	6	22	22	22	32	2	2
3	3	3	13	13	13	23	23	23	33	33	33
4	4	2	14	14	14	24	6	24	34	34	34
5	5	5	15	15	15	25	25	5	35	35	35
6	6	6	16	4	2	26	26	26	36	36	6
7	7	7	17	17	17	27	3	27	37	37	37
8	2	8	18	18	6	28	28	14	38	38	38
9	9	3	19	19	19	29	29	29	39	39	39
10	10	10	20	20	10	30	30	30	40	10	40

D'après ce dernier tableau montrant quelques valeurs de la fonction f_k,on peut déduire une des propriétés de la fonction, qui est :

$$f_k(p) = p \text{ pour tout nombre premier } p.$$

Soit m un entier positif tel que $m=\prod_{j=1}^{s} q_j^{\beta_j}$, sa décomposition canonique. Si $(m,n)=1$ (i.e., $q_j \neq p_i$ pour tous $1 \leq i \leq r$ et $1 \leq j \leq s)$, alors pour tous $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$

$$f_k(nm)=\prod_{i=1}^{r} p_i^{(\alpha_i,k)} \prod_{j=1}^{s} q_j^{\left(\beta_j,k\right)}=f_k(n).f_k(m).$$

D'autre part, si p_1, p_2 et p_3 sont des nombres premiers différents, on obtient pour tout $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$:

$$f_k\left(p_1 p_2^2 p_3\right)=p_1^{(k,1)} p_2^{(k,2)} p_3^{(k,1)}=p_1 p_2^{(k,2)} p_3,$$

bien que

$$f_k(p_1 p_2).f_k(p_2 p_3)=p_1^{(k,1)} p_2^{(k,1)}.p_2^{(k,1)} p_3^{(k,1)}=p_1 p_2^2 p_3.$$

Par conséquent, on peut remarquer que la fonction f_k est multiplicative mais pas complètement multiplicative.

On sait que pour tout α_i $(1 \leq i \leq r)$ et pour tout $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, la relation suivante est vérifie

$$1 \leq (k, \alpha_i) \leq \alpha_i,$$

et ce qui implique

$$1 \leq \prod_{i=1}^{r} p_i^{(\alpha_i,k)} \leq \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i},$$

autrement dit

$$1 \leq f_k(n) \leq n, \quad \text{pour tout } n>1.$$

Nous pouvons également remarquer que puisque (k,α_i) divise α_i, alors $\prod_{i=1}^{r} p_i^{(\alpha_i,k)}$ est un diviseur pour $\prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}$, d'où

$$f_k(n) \mid n \quad \text{pour tout } n>1.$$

3.2 Principaux résultats

Théorème 3.1 *Pour tout entier $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, $f_k(n)=n$ si et seulement si n est un entier positif sans facteur carré (square-free).*

Preuve. Clairement, si n is a square-free est un entier square-free positif, nous avons $n=\prod_{i=1}^{r} p_i$, i.e., $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_r=1$. Donc pour $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, il vient que

$$f_k(n)=\prod_{i=1}^{r} p_i^{(1,k)}=\prod_{i=1}^{r} p_i=n.$$

Réciproquement, si n est un entier positif tel que

$$\forall k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}, \quad f_k(n) = n,$$

alors

$$\prod_{i=1}^{r} p_i^{(\alpha_i,k)} = \prod_{i=1}^{r} p_i$$

pour tout $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, et cela vrai si $\alpha_i = 1$ pour tous $1 \leq i \leq r$, par conséquant, seulement si n est un entier square-free positif. ■

Pour un entier fixe $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ il existe une infinité d'entiers positifs n pour lesquels $f_k(n) = n$. Par exemple si k un entier impair, alors tous les $n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}$ avec α_i sont pairs pour tous $1 \leq i \leq r$ la propriété est vraie. Il en est de même si k est pair $n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}$ avec α_i sont impairs pour tous $1 \leq i \leq r$.

Corollaire 3.1 *Pour tout entier $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, et pour tout entier $n > 1$, on a*

$$f_k(\underline{mult}(n)) = \underline{mult}(n).$$

Preuve. On a

$$\underline{mult}(n) = \prod_{i=1}^{r} p_i,$$

et ce là implique que $\underline{mult}(n)$ est un entier positif sans facteur carré. Il découle immédiatement du théorème 3.1 que

$$f_k(\underline{mult}(n)) = \underline{mult}(n).$$

■

Théorème 3.2 *Pour tout entier $n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}$, tel que $\ell = \mathtt{ppcm}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$, la fonction $f_k(n)$ du variable k est $\ell-$périodique. Autrement dit*

$$f_{k+\ell}(n) = f_k(n), \text{ pour tout } k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}.$$

Preuve. Soit $\ell = \mathtt{ppcm}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$. Alors pour tout α_i $(1 \leq i \leq r)$ il existe un entier positif λ_i, tel que $\ell = \lambda_i \alpha_i$. Il s'ensuit que

$$(\alpha_i, k+\ell) = (\alpha_i, k + \lambda_i \alpha_i) = (\alpha_i, k) \quad (1 \leq i \leq r),$$

par cette dernière propriété nous obtenons

$$\begin{aligned} f_{k+\ell}(n) &= \prod_{i=1}^{r} p_i^{(k+\ell,\alpha_i)} \\ &= \prod_{i=1}^{r} p_i^{(k,\alpha_i)} \\ &= f_k(n)\,. \end{aligned}$$

■

Théorème 3.3 *Pour tout entier* $n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}$, *tel que* $k = \gcd(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$, *on a*

$$f_k\left(n^{\frac{1}{k}}\right) = \underline{mult}(n)\,.$$

Preuve. D'abord, comme on a $k = \gcd(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$ il existe r entiers positifs $\left(\alpha_1^{'}, \alpha_2^{'}, \ldots, \alpha_r^{'}\right)$ tel que $\alpha_i = k\alpha_i^{'} \quad (1 \leq i \leq r)$. Cela montre que

$$(k, \alpha_i) = k \quad (1 \leq i \leq r) \ \text{ et } n^{\frac{1}{k}} = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i^{'}},$$

à partir de laquelle, on a pour tout entier $n > 1$

$$\begin{aligned} f_k\left(n^{\frac{1}{k}}\right) &= \prod_{i=1}^{r} p_i^{\frac{(k,\alpha_i)}{k}} \\ &= \prod_{i=1}^{r} p_i^{1} \\ &= \underline{mult}(n)\,. \end{aligned}$$

■

Théorème 3.4 *Soient* k_1 *et* k_2 *des entiers positifs. Alors pour tout* n :

$$f_{k_1}(f_{k_2}(n)) = f_{(k_1,k_2)}(n)\,.$$

En particulier, si $(k_1, k_2) = 1$, *alors*

$$f_{k_1}(f_{k_2}(n)) = \underline{mult}(n)\,.$$

Théorème 3.5 *Soient k_1 et k_2 des entiers positifs tels que k_1 est un multiple de k_2. Pour tout entier $n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}$ tel que $\left(\frac{k_1}{k_2}, \alpha_i\right) = 1$ $(1 \leq i \leq r)$. On a*

$$f_{k_1}(n) = f_{k_2}(n).$$

Preuve. Puisque k_1 est un multiple de k_2, on a $k_1 = dk_2$ où $d \geq 1$. Si $\left(\frac{k_1}{k_2}, \alpha_i\right) = 1$ ce qui revient à dire $(d, \alpha_i) = 1$ pour tous $1 \leq i \leq r$, il en vient que

$$(k_1, \alpha_i) = (dk_2, \alpha_i) = (k_2, \alpha_i).$$

En conséquence

$$\begin{aligned} f_{k_1}(n) &= \prod_{i=1}^{r} p_i^{(k_1,\alpha_i)} \\ &= \prod_{i=1}^{r} p_i^{(k_2,\alpha_i)} \\ &= f_{k_2}(n). \end{aligned}$$

■

Théorème 3.6 *Soit $n > 6$ un nombre parfait. Alors, on a*

$$f_2(n) = 4m \text{ si } n = 2^{p-1}m \text{ est un nombre parfait pair,}$$

et

$$f_2(n) = p.\left(\underline{mult}(m)\right)^2. \text{ si } n = p^{\alpha}m^2 \text{ est un nombre parfait impair.}$$

Preuve. Soit $n = 2^{p-1}m$ un nombre parfait pair. Alors $m = 2^p - 1$ est un nombre premier de Mersenne. Mais, pour que m soit un nombre premier, il faut que p soit lui-même un nombre premier. Notons que si m premier il découle que

$$(p-1, 2) = 2 \text{ et } f_2(m) = m.$$

Maintenat, puisque $n > 6$, et la fonction f_2 est multiplicative, on a

$$\begin{aligned} f_2\left(2^{p-1}m\right) &= f_2\left(2^{p-1}\right) f_2(m) \\ &= 2^{(p-1,2)}.m \\ &= 4m. \end{aligned}$$

Soit $n = p^{\alpha}m^2$ un nombre parfait impair. Alors $(p,m) = 1$ et $p \equiv \alpha \equiv 1 \pmod 4$. Il découle que

$$(\alpha, 2) = 1.$$

En revanche, si $m = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}$, alors $m^2 = \prod_{i=1}^{r} p_i^{2\alpha_i}$ et $(2\alpha_i, 2) = 2$ pour tout $(1 \leq i \leq r)$. Cela signifie que

$$\begin{aligned} f_2\left(p^{\alpha}m^2\right) &= f_2\left(p^{\alpha}\right) f_2\left(m^2\right) \\ &= p^{(\alpha,2)} \prod_{i=1}^{r} p_i^{(2\alpha_i,2)} \\ &= p. \prod_{i=1}^{r} p_i^2 \\ &= p. \left(\underline{mult}\,(m)\right)^2. \end{aligned}$$

■

A partir de ce que nous avons présenté dans ce chapitre, nous pouvons avoir l'idée de définir une autre nouvelle fonction en remplaçant la fonction `pgcd` par la fonction `ppcm`. Plus précisément, soit k un entier positif. Nous définissons g_k comme étant la fonction arithmétique telle que $g_k(1) = 1$ et

$$g_k(n) = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\mathtt{ppcm}(\alpha_i,k)}.$$

On note que $g_k(n)$ est égale à $I_d(n)$ ou $\left(\underline{mult}\,(n)\right)^k$ pour certains cas particuliers de l'entier k.

En effet, soit $n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}$. Si $k = \gcd(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$, alors $\mathtt{ppcm}(\alpha_i, k) = \alpha_i$ pour tous $(1 \leq i \leq r)$. Par conséquent,

$$g_k(n) = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\mathtt{ppcm}(\alpha_i,k)} = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_1} = n.$$

Si k est un multiple de α_i pour tous $1 \leq i \leq r$, c-à-d $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, $\exists m_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tels que $k = \alpha_i m_i$, s'ensuit que $\mathtt{ppcm}(\alpha_i, k) = k$, par conséquent,

$$g_k(n) = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\mathtt{ppcm}(\alpha_i,k)} = \prod_{i=1}^{r} p_i^{k} = \left(\underline{mult}\,(n)\right)^k.$$

Il est facile de voir que g_k est une fonction multiplicative pour tout , puisque

$$g_k(nm) = g_k(n)\, g_k(m), \text{ lorsque } (m,n) = 1.$$

La fonction g_k elle n'est pas complètement multiplicative, car pour un nombre premier p on a :

$$g_k\left(p^2\right) = \begin{cases} p^{2k}, & \text{si } k \text{ est impair} \\ p^k, & \text{si } k \text{ est pair} \end{cases}$$

alors que

$$g_k\left(p\right) g_k\left(p\right) = p^k . p^k = p^{2k} \text{ pour tout } k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}.$$

Bibliographie

[1] T. Apostol, *Introduction to Analytic Number Theory*, Springer-Verlag Berlin, 1976.

[2] K. Atanassov, *New integer functions, related to φ and σ functions.* Bulletin of Number Theory and Related Topics, XI(1), 1987, $3-26$.

[3] K. Atanassov, *Restrictive factor : Definition, properties and problems.* Notes on Number Theory and Discrete Mathematics, $8(4), 2002, 117-119$.

[4] K. Atanassov, *An arithmetic function decreasing the natural numbers.* Notes on Number Theory and Discrete Mathematics, $22(4), 2016, 16-19$.

[5] K. Atanassov, J. Sandor, *Extension factor : Definition, properties and problems.* Part 1. Notes on Number Theory and Discrete Mathematics, $25(3), 2019, 36-43$.

[6] O. Bordelles, *Arithmetic Tales,* Springer-Verlag London, 2012.

[7] A. Blanchard, *Introduction a la théorie analytique des nombres premiers,* Dunod Paris, 1990.

[8] O. Bordelles, *Multiplicative function over short segments*, Actia Arithmetica-january 2020.

[9] M. Bouderbala, *On a new additive function related to generalized divisors of an integer*, Montisnigri, 2022(3).

[10] M. Bouderbala and M. Karras, *An asymptotic formula of a sum function involving gcd and characteristic function of the set of r–free numbers*, Contributions to Mathematics, 2020(2), $11-15$.

[11] M. Bouderbala and M. Karras, *On a new additive arithmetic function related to a fixed integer*, NNTDM, $2022, 28(3), 575-580$.

[12] O. Bordellès, *The composition of the gcd and certain arithmetic functions. Journal of Integer Sequences.* 13(2010).

[13] K. Broughan, *The gcd-sum function.* Journal of Integer Sequences. 4(2002), (Article 01.2.2) $1-19$.

[14] M.Carthy, *On an arithmetic function.* Monatshefte für Mathematik, $63, 1959, 228 - 230$.

[15] E. Cesàro, *Etude moyenne du plus grand commun diviseur de deux nombres*, Ann. Mat. Pura Appl. 13(1885), $235 - 250$.

[16] C.Defant, *Connected components of complex divisor functions.* Journal of Number Theory, $190, 2018, 56 - 71$.

[17] M. Demazure, *Cours d'algèbre : Primalité. Divisibilité. Codes.* Nouvelle Bibliothèque Mathématique, Cassini, Paris, 1997.

[18] J. M. Dekoninck and A. Ivic, *Topics in Arithmetical Functions*, Copyright : © North Holland 1980.

[19] M. Karras, *Sur les fonctions arithmétiques multiplicatives et leurs séries de Dirichlet associées.* Thèse de doctorat, 2017.

[20] E. Krätzel, *Lattice points*, Kluwer Academic Publishers, 1988.

[21] F. Luca ; R. Thangadurai, *On an arithmetic function considered by Pillai.* Journal de théorie des nombres de Bordeaux, $21, 3$(2009), $695 - 701$.

[22] B.Mittou et A.Derbal, *On new arithmetic function relative to a fixed positive integer.* NNTDM, 27(2021).

[23] M. B. Nathanson, *Elementary Methods in Number Theory*, Springer-Verlag New York, 195 (2000) .

[24] A. Hoque & H. Kalita, *Generalized Perfect Numbers Connected with Arithmetic Functions.* Mathematical Sciences Letters, $3(3), 2014, 249 - 253$.

[25] A. Hoque & Saikia, *On generalized Mersenne prime.* SeMA Journal, $66(1), 2014, 1-7$.

[26] A. Hoque & Saikia, *On generalized Mersenne primes and class-numbers of equivalent quadratic fields and cyclotomic fields.* SeMA Journal, 67(1), $2015, 71 - 75$.

[27] S. S. Pillai, *On an arithmetic function*, J. Annamalai Univ. 2(1933), $243 - 248$.

[28] A.V. Shubin, *Asymptotic behavior of functions $\Omega(k, n)$ and $\omega(k, n)$ related to the number of prime divisors.* Diskretnaya Matematika 29 (3) , 2017, $133 - 143$.

[29] L. Tóth, *A survey of gcd-sum functions.* J. Integer Sequences. 13(2010).