

République Algérienne Démocratique Et Populaire

Ministère de L'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université de Djilali Bounaâma-Khemis Miliana

Faculté des Sciences et de la Technologie

Département de Mathématiques et Informatique



## Mémoire de fin d'étude

En vue de l'obtention du Diplôme de master en Mathématiques

Spécialité : Analyse Mathématiques et Applications

### Thème

---

L'étude de L'existence, L'unicité et La stabilité des Solutions  
Des Quelques problème D'ordre non Entier Au Sens De  
Caputo-Katugampola

---

Présenté par :

**Abdesselam Hafsa**

Membres du jury :

<b>Présidente :</b>	Mme F.Chita	Université de Djilali Bounaâma-Khemis Miliana
<b>Encadreur :</b>	Mr M.Bezziou	Université de Djilali Bounaâma-Khemis Miliana
<b>Examineur 1 :</b>	Mr M.Houas	Université de Djilali Bounaâma-Khemis Miliana
<b>Examinatrice 2 :</b>	Mme F.Bousebia	Université de Djilali Bounaâma-Khemis Miliana

Année universitaire : 2022-2023

---

## Remerciement

En premier lieu, je remercie Allah le tout puissant de nous avoir donné la force pour achever ce travail ainsi que la force pour dépasser toutes les difficultés.

Je remercie mon encadreur de mémoire Monsieur Bezziou Mohamed pour sa précieuse aide, ses orientations et les conseils importants ainsi le temps qu'il m'a accordé pour mon encadrement.

Je tiens à exprimer ma gratitude envers les membres de jury. Qui ont accepté d'évaluer mon travail.

Mes remerciements à l'ensemble des enseignants de notre département. J'adresse mes plus sincères remerciements à tous mes amis.

Enfin, je remercie ma famille et toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

---

## Dédicace

Je dédie ce mémoire

A l'homme de ma vie, mon exemple éternel mon soutien moral et source de bonheur, celui qui s'est toujours sacrifié pour me voir réussir, à toi Mon père.

A la lumière de mes jours, la source de mes efforts, la flamme de mon coeur, ma vie et mon bonheur...  
Maman que j'adore.

A mes très chères soeurs Imane et Merieme ,

A mes chères frères Mustapha et Zakaria,

A toutes mes chères amis Safaa, Sara, Khadidja, Lilya, Wissam, Manal, Zahira...

A Mon coeur la plus belle Nihad.

A toutes mes enseignants.

A tout ce qui m'ont encouragé lors de la réalisation de mon travail.

# TABLE DES MATIÈRES

<b>1</b>	<b>Préliminaires</b>	<b>5</b>
1.1	Fonctions Spéciales . . . . .	5
1.1.1	Fonction Gamma d'Euler . . . . .	5
1.1.2	La fonction Bêta . . . . .	7
1.1.3	La fonction Mittag-Leffler . . . . .	7
1.2	Intégration Fractionnaire . . . . .	8
1.2.1	Intégration Fractionnaire au sens Riemann-Liouville . . . . .	8
1.2.2	Intégration Fractionnaire au sens de Hadamard . . . . .	10
1.2.3	Intégrale Fractionnaire généralisé de Katugampola . . . . .	13
1.3	Dérivation Fractionnaire . . . . .	15
1.3.1	Dérivées Fractionnaires au sens de Caputo . . . . .	15
1.3.2	Dérivées Fractionnaires au sens de Hadamard . . . . .	17
1.3.3	Dérivées Fractionnaires au sens de Caputo-Hadamard . . . . .	18
1.3.4	Dérivées Fractionnaires généralisé de Katugampola . . . . .	20
1.3.5	Dérivées Fractionnaires au sens de Caputo-Katugampola . . . . .	21
1.4	Les théorèmes du point fixe . . . . .	25
1.4.1	Théorèmes d'existence et d'unicité des solutions . . . . .	27
1.5	Stabilité des solution . . . . .	28
1.5.1	Définitions . . . . .	28
<b>2</b>	<b>existence unicité et Stabilité des solutions</b>	<b>29</b>
2.1	Unicité . . . . .	31
2.2	Existence des solutions . . . . .	35
2.3	Stabilité des Solutions . . . . .	43

---

## Introduction

Le calcul fractionnaire est une branche mathématique qui étudie la généralisation des notions de dérivation et d'intégration à des ordres arbitraires (réels ou complexes)...

La résolution des problèmes d'ordre non entier est un domaine de recherche en constante évolution. Les équations différentielles d'ordre non entier sont utilisées dans de nombreux domaines, notamment en physique, en ingénierie et en finance. Cependant, la résolution de ces équations est souvent difficile car les méthodes traditionnelles ne s'appliquent pas aux ordres non entier.

Le sujet principal de ce mémoire est l'étude d'existence, d'unicité et la stabilité du problème d'ordre non entier au sens de Caputo-Katugampola avec des conditions initiales, et cela en utilisant des différentes techniques du point fixe.

Nous allons expliquer les concepts de base et les techniques utilisées pour résoudre ce problème. On étudie aussi l'existence, l'unicité et la stabilité des solutions pour un problème posé.

Ce mémoire est composé de deux chapitres organisés comme suit :

Le premier chapitre sera consacré aux notions de base, un rappel et quelques concepts préliminaires seront introduits comme la fonction Gamma, la fonction Bêta et les définitions de la dérivation et l'intégration fractionnaire au sens de Riemann-Liouville, Hadamard, Caputo, Katugampola et Caputo-Katugampola avec leur propriétés. On définit aussi les théorèmes du point fixe, les théorèmes d'existence et d'unicité de solution et quelques notions de la stabilité.

L'objet du deuxième chapitre est l'étude de l'existence, l'unicité et la stabilité des solutions du problème fractionnaire suivant :

$$(P) : \begin{cases} {}^{CK}D_{a^+}^{\alpha;p} x(t) = \lambda f(t, x(t)), & t \in J \text{ et } f \in C(J, \mathbb{R}), \\ x(a) + x(b) = 0, \\ x'(a) + x'(b) = 0. \end{cases}$$

Où  ${}^{CK}D_{a^+}^{\alpha;p}$  la dérivée partielle fractionnaire de Caputo-Katugampola et  $f(t, x(t))$  une fonction donnée.

Avec  $1 < \alpha < 2$ ,  $p > 0$  et  $\lambda \in \mathbb{R}^*$ .

## 1.1 Fonctions Spéciales

Dans ce paragraphe, on présente les fonctions qui sont très utilisées dans la théorie du calcul fractionnaire. Il s'agit de la fonction Gamma, la fonction Bêta et de la fonction Mittag-Leffler.

### 1.1.1 Fonction Gamma d'Euler

La fonction Gamma est une fonction du calcul fractionnaire qui généralise "la fonction" factorielle. Elle est donnée par la définition suivante :

**Définition. 1: [10]**

La fonction Gamma noté  $\Gamma$  est définie par l'intégrale suivante :

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx, \quad \alpha \in \mathbb{C} \quad (1.1)$$

avec  $t^{\alpha-1} = e^{(\alpha-1)\ln t}$ .

**Exemple 1.1.1**

$$1. \Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$$

$$2. \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} t^{\frac{1}{2}-1} e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt = 2 \int_0^{+\infty} e^{-\tau^2} d\tau = \sqrt{\pi}. \quad (\text{posons } t = \tau^2).$$

---

### Propriété 1.1 [10]

On a les propriétés suivantes :

1.  $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)$ ,  $Re(\alpha) \geq 0$ .
2.  $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$  et  $\Gamma(-m) = +\infty$  pour tout  $m \in \mathbb{N}$ .
3.  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ ,  $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{2n!\sqrt{\pi}}{4^n n!}$ .
4.  $\Gamma(n + 1) = n!$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

**Le graphe de la fonction Gamma :**

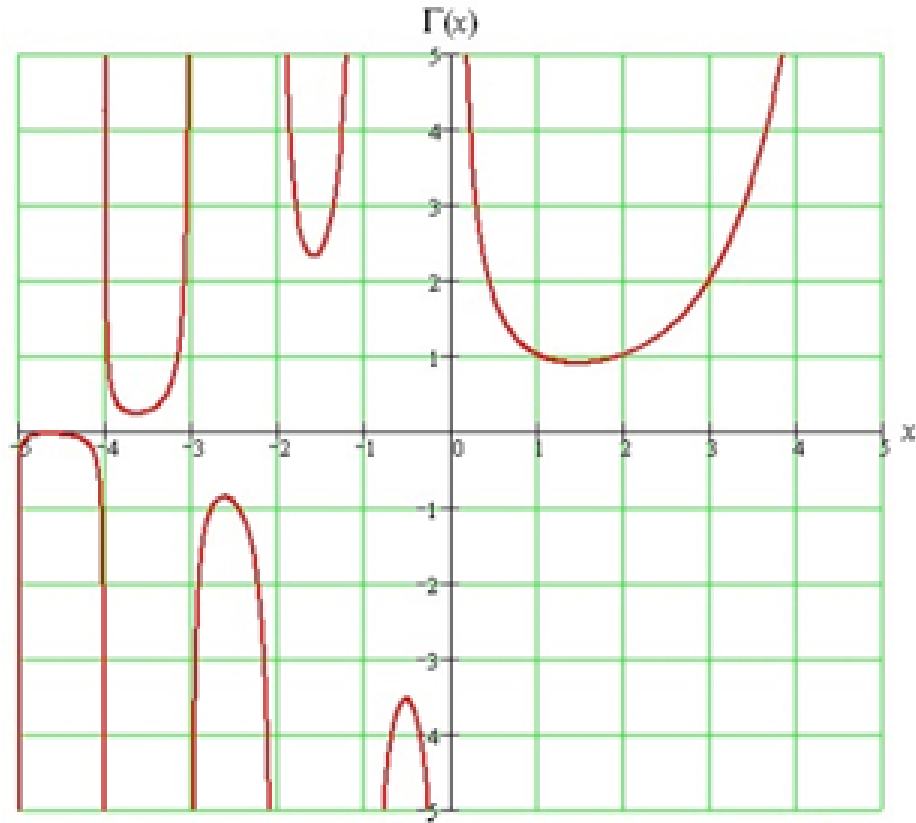


FIG. 1.1 – Courbe représentative de la fonction Gamma

;

---

### 1.1.2 La fonction Bêta

Elle fait partie des fonctions de base du calcul fractionnaire. Cette fonction donnée par la définition suivante :

#### Définition. 2: [10]

On appelle la fonction Bêta la fonction définie par :

$$\beta(p, q) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt, \quad p, q \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Re}(p) > 0, \quad \operatorname{Re}(q) > 0. \quad (1.2)$$

#### Lemme 1.1.2 [10]

La fonction Bêta est liée à la fonction Gamma par la relation suivante :

pour tout  $p, q \in \mathbb{C}$  avec  $\operatorname{Re}(p) > 0, \operatorname{Re}(q) > 0$  on a :

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p) + \Gamma(q)}.$$

### 1.1.3 La fonction Mittag-Leffler

La fonction Mittag-Leffler à un seul paramètre qui été introduit dans la définition suivante :

#### Définition. 3: [10]

La fonction Mittag-Leffler est définie par :

$$E_\alpha(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{x^i}{\Gamma(\alpha i + 1)}, \quad \alpha > 0 \text{ et } x \in \mathbb{C}. \quad (1.3)$$

#### Exemple 1.1.3

$$1. E_1(x) = E_{1,1}(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{x^i}{\Gamma(i+1)} = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{x^i}{i!} = e^x.$$

$$2. E_2(x) = E_{2,1}(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{x^i}{\Gamma(2i+1)} = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{x^i}{2i!} = \cosh \sqrt{x}.$$

---

## 1.2 Intégration Fractionnaire

L'intégration d'ordre fractionnaire est une généralisation de la notion de l'intégration d'ordre entier.

### 1.2.1 Intégration Fractionnaire au sens Riemann-Liouville

Les intégrales fractionnaires au sens de Riemann-Liouville sont résumées dans la définition suivante :

#### Définition. 4: [10]

Les intégrales fractionnaires de Riemann-Liouville à gauche et à droite respectivement d'ordre  $\alpha \geq 0$ , pour une fonction  $f \in C([a; b])$  sont données par :

$$\forall t \in [a, b], \quad {}^{RL}I_a^\alpha f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds, & \alpha > 0 \\ f(t), & \alpha = 0, \end{cases}$$

*et*

$$\forall t \in [a, b], \quad {}^{RL}I_b^\alpha f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds, & \alpha > 0 \\ f(t), & \alpha = 0. \end{cases}$$

#### Remarque 1.2.1[10]

Si  $f \in L^1([a, b])$ , alors  ${}^{RL}I_{a^+}^\alpha f(t)$  existe pour tout  $\alpha > 0$  et  ${}^{RL}I_{a^+}^\alpha f(t) \in L^1([a, b])$ .

#### Théorème

Pour  $f \in C[a, b]$ , l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville possède la propriété de semi-groupe suivant :

$${}^{RL}I_{a^+}^\alpha \left( {}^{RL}I_{a^+}^\beta f \right) (t) = {}^{RL}I_{a^+}^{\alpha+\beta} f(t),$$

pour  $\alpha > 0$  et  $\beta > 0$ .

---

## Démonstration

Soient  $f \in [a, b]$ ,  $\alpha > 0$  et  $\beta > 0$  alors :

$$\begin{aligned} {}^{RL}I_{a^+}^\alpha \left( {}^{RL}I_{a^+}^\beta f \right) (t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} \left( {}^{RL}I_{a^+}^\beta f \right) (\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} \left[ \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^\tau (\tau - s)^{\beta-1} f(s) ds \right] d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} \left[ \int_a^\tau (\tau - s)^{\beta-1} f(s) ds \right] d\tau. \end{aligned}$$

D'après la formule de Dirichlet, on trouve :

$$\begin{aligned} {}^{RL}I_{a^+}^\alpha \left( {}^{RL}I_{a^+}^\beta f \right) (t) &= \frac{B(\beta, \alpha)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t (t - s)^{\alpha+\beta-1} f(s) ds \\ &= \frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha + \beta)\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t (t - s)^{\alpha+\beta-1} f(s) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha + \beta)} \int_a^t (t - s)^{\alpha+\beta-1} f(s) ds \\ &= {}^{RL}I_{a^+}^{\alpha+\beta} f(t). \end{aligned}$$

### Proposition 1.2.1

L'opérateur l'intégrale  ${}^{RL}I_{a^+}^\alpha$  est linéaire.

En effet, si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions telles que  ${}^{RL}I_{a^+}^\alpha f$  et  ${}^{RL}I_{a^+}^\alpha g$  existent. Alors pour  $A, B \in \mathbb{R}$ , on aura :

$$\begin{aligned} {}^{RL}I_{a^+}^\alpha (Af + Bg)(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} (Af + Bg) (\tau) d\tau \\ &= \frac{A}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau + \frac{B}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} g(\tau) d\tau \\ &= A {}^{RL}I_{a^+}^\alpha f(t) + B {}^{RL}I_{a^+}^\alpha g(t). \end{aligned}$$

---

## 1.2.2 Intégration Fractionnaire au sens de Hadamard

Dans ce paragraphe, on a présenté la définition et quelques propriétés de l'intégrale fractionnaire de type Hadamard.

### Définition. 5: [10]

Soit  $f$  une fonction continue sur  $[a, b]$  à valeur dans  $\mathbb{R}$ , avec  $0 < a \leq b \leq +\infty$  et  $\alpha > 0$ .

Les intégrales fractionnaires à gauche et à droite respectivement d'ordre  $\alpha$  au sens de Hadamard de  $f$  sont données par :

$$({}^H I_{a^+}^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \left(\log \frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} \frac{f(t)}{t} dt, \quad a < x < b, \quad (1.4)$$

et

$$({}^H I_{b^-}^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \left(\log \frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} \frac{f(t)}{t} dt, \quad a < x < b, \quad (1.5)$$

Où :  $\Gamma$  est la fonction Gamma d'Euler.

## Quelques Propriétés

### Proposition 1.2.1

La linéarité

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions continues sur  $[a, b]$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ ,

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall \alpha > 0 \quad \text{on a : } {}^H I_{a^+}^\alpha (\lambda f(x) + g(x)) = \lambda {}^H I_{a^+}^\alpha f(x) + {}^H I_{a^+}^\alpha g(x),$$

### Démonstration

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions continues sur  $[a, b]$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , et pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\forall \alpha > 0$ , alors :

$$\begin{aligned}
{}^H I_{a^+}^\alpha (\lambda f(x) + g(x)) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \left( \log \frac{x}{t} \right)^{\alpha-1} \frac{(\lambda f(x) + g(x))}{t} dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[ \int_a^x \left( \log \frac{x}{t} \right)^{\alpha-1} \frac{\lambda f(x)}{t} + \left( \log \frac{x}{t} \right)^{\alpha-1} \frac{g(x)}{t} \right] dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \left( \log \frac{x}{t} \right)^{\alpha-1} \frac{\lambda f(x)}{t} dt + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \left( \log \frac{x}{t} \right)^{\alpha-1} \frac{g(x)}{t} dt \\
&= \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \left( \log \frac{x}{t} \right)^{\alpha-1} \frac{f(x)}{t} dt + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \left( \log \frac{x}{t} \right)^{\alpha-1} \frac{g(x)}{t} dt \\
&= \lambda {}^H I_{a^+}^\alpha f(x) + {}^H I_{a^+}^\alpha g(x).
\end{aligned}$$

### Proposition 1.2.2

Propriété de semi groupe

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue,

$$\begin{aligned}
f \in L^p([a, b]) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*; \quad {}^H I_a^\alpha {}^H I_a^\beta f(x) &= {}^H I_a^{\alpha+\beta} f(x) \\
&= {}^H I_a^\beta {}^H I_a^\alpha f(x).
\end{aligned} \tag{1.6}$$

### Démonstration

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$  on a :

$${}^H I_a^\alpha {}^H I_a^\beta f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \int_a^t \left( \log \frac{x}{t} \right)^{\alpha-1} \left( \log \frac{t}{s} \right)^{\beta-1} f(s) \frac{ds}{s} \frac{dt}{t}, \tag{1.7}$$

on remarque que :  $a \leq t \leq x$  et  $a \leq s \leq t$  donc on prend  $s \leq t \leq x$ . Puis on pose le changement de variable :

$$y = \frac{\log \frac{t}{s}}{\log \frac{x}{t}}. \tag{1.8}$$

On obtient alors :

$${}^H I_a^\alpha {}^H I_a^\beta f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \left[ \int_a^t \left( \log \frac{x}{t} \right)^{\alpha-1} \left( \log \frac{t}{s} \right)^{\beta-1} f(s) \frac{dt}{t} \right] \frac{ds}{s}. \tag{1.9}$$

On remplace (1.7) dans (1.8), on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_a^x \left[ \int_a^t \left( \log \frac{x}{t} \right)^{\alpha-1} \left( \log \frac{t}{s} \right)^{\beta-1} f(s) \frac{dt}{t} \right] &= \int_0^1 \left[ \log x - y \log \frac{x}{s} - \log s \right]^{\alpha-1} \left[ \log \frac{x}{s} + \log s - \log s \right]^{\beta-1} \log \left( \frac{x}{s} \right) \\
&= \int_0^1 \left( (1-y)^{\alpha-1} y^{\beta-1} \left( \log \frac{x}{s} \right)^{\alpha+\beta-1} \right) dy \\
&= B(\alpha, \beta) \left( \log \frac{x}{s} \right)^{\alpha+\beta-1} \\
&= \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \left( \log \frac{x}{s} \right)^{\alpha+\beta-1}
\end{aligned}$$

Egalité (1.7) devient :

$$\begin{aligned}
{}^H I_a^\alpha {}^H I_a^\beta f(x) &= \frac{B(\alpha, \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \left( \log \frac{x}{s} \right)^{\alpha+\beta-1} \frac{f(s)}{s} \frac{ds}{s} \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^x \left( \log \frac{x}{s} \right)^{\alpha+\beta-1} \frac{f(s)}{s} \frac{ds}{s} \\
&= {}^H I_a^{\alpha+\beta} f(x).
\end{aligned}$$

De la même manière, on trouve :

$${}^H I_a^\alpha {}^H I_a^\beta f(x) = {}^H I_a^{\alpha+\beta} f(x).$$

D'où la résultat.

### Exemple 1.2.1

Calculer  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$

Soit  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$  et  $f(t) = \left[ \log \left( \frac{t}{a} \right) \right]^{\beta-1}$

$$I_a^\alpha f(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \left[ \log \left( \frac{t}{a} \right) \right]^{\alpha+\beta-1} \quad (1.10)$$

en effet,

$$I_a^\alpha \left( \log \left( \frac{t}{a} \right) \right)^{\beta-1} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^a \left( \log \left( \frac{t}{s} \right) \right)^{\alpha-1} \left( \log \left( \frac{s}{a} \right) \right)^{\beta-1} \frac{ds}{s}. \quad (1.11)$$

Effectuant le changement de variable

$$u = \frac{\left( \log \frac{s}{a} \right)}{\left( \log \frac{t}{a} \right)}. \quad (1.12)$$

Alors (1.11) devient :

$${}^H I_a^\alpha \left( \log \left( \frac{t}{a} \right) \right)^{\beta-1} = \frac{\left( \log \left( \frac{t}{a} \right) \right)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} u^{\beta-1} du. \quad (1.13)$$

En utilisant la définition 5 et la propriété (1.1) on aboutit à :

$$\begin{aligned} {}^H I_a^\alpha f(t) &= \frac{B(\alpha, \beta)}{\Gamma(\alpha)} \left( \log \left( \frac{t}{a} \right) \right)^{\alpha+\beta-1} \\ &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)} \left( \log \left( \frac{t}{a} \right) \right)^{\alpha+\beta-1}. \end{aligned} \quad (1.14)$$

### 1.2.3 Intégrale Fractionnaire généralisé de Katugampola

L'espace  $X_c^p(a, b)$  ( $c \in \mathbb{R}, p < +\infty$ ) est l'ensemble des fonctions mesurables à valeurs complexes  $f$  sur  $[a, b]$  telles que  $\|f\|_{X_c^p(a, b)} < \infty$ , avec :

$$\|f\|_{X_c^p(a, b)} = \left( \int_a^b |t^c f(t)|^p \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (1 \leq p < \infty).$$

Pour  $p = \infty$ ,

$$\|f\|_{X_c^\infty} = \text{ess sup}_{a \leq t \leq b} |t^c f(t)|.$$

Cas particulier : si  $c = \frac{1}{p}$ , l'espace  $X_c^p(a, b)$  coïncide avec l'espace  $L^p(a, b)$  et on a  $X_{\frac{1}{p}}^p(a, b) = L^p(a, b)$ .

L'opérateur intégrale Fractionnaire au sens de Katugampola est donnée par :

#### Définition. 6:

Soit  $-\infty < a < b < +\infty$ . Les intégrales fractionnaires de Katugampola à gauche et à droite respectivement d'ordre  $\alpha > 0$  de  $f \in X_c^p([a, b])$  sont définies par :

$$\forall t \in [a, b], \quad (I_{a^+}^{\alpha, \rho})(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \left( \frac{t^\rho - \tau^\rho}{\rho} \right)^{\alpha-1} f(\tau) \tau^{\rho-1} d\tau, \quad (1.15)$$

et

$$\forall t \in [a, b], \quad (I_{b^-}^{\alpha, \rho})(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b \left( \frac{\tau^\rho - t^\rho}{\rho} \right)^{\alpha-1} f(\tau) \tau^{\rho-1} d\tau. \quad (1.16)$$

L'intégrale fractionnaire de Katugampola est une généralisation de l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville et l'intégrale fractionnaire de Hadamard de la manière suivante :

### Théorème 1.2.1

Soient  $\alpha \geq 0$  et  $1 \leq \rho < \infty$ , alors :

$$\lim_{\rho \rightarrow 1} (I_{a^+}^{\alpha;\rho})(t) = ({}^{RL}I_{a^+}^{\alpha} f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau. \quad (1.17)$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} (I_{0^+}^{\alpha;\rho})(t) = ({}^H I_{0^+}^{\alpha} f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (\ln t - \ln \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau.$$

Et

$$\lim_{\rho \rightarrow 1} (I_{b^-}^{\alpha;\rho})(t) = ({}^{RL}I_{b^-}^{\alpha} f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} \frac{f(\tau)}{d\tau}. \quad (1.18)$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} (I_{b^-}^{\alpha;\rho})(t) = ({}^H I_{a^+}^{\alpha} f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (\ln t - \ln \tau)^{\alpha-1} \frac{f(\tau)}{d\tau}.$$

### Démonstration

1. Pour  $\rho = 1$ , on remplace dans les relations (1.15) et (1.16), on obtient les intégrales fractionnaires de Riemann-Liouville (resp dérivation) définition 4.
2. Si  $\rho \rightarrow 0^+$ , on utilise la règle de L'hôpital de l'intégrale fractionnaire de Katugampola, on obtient :

$$\begin{aligned} \lim_{\rho \rightarrow 0^+} {}^K I_{a^+}^{\alpha;\rho} &= \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{\tau^{\alpha-1} x(\tau)}{(t^\rho - \tau^\rho)^{1-\alpha}} d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \left( \frac{t^\rho - \tau^\rho}{\rho} \right)^{\alpha-1} \tau^{\rho-1} x(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \left( \log \frac{t}{\tau} \right)^{\alpha-1} \frac{x(\tau)}{\tau} d\tau. \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} \lim_{\rho \rightarrow 0^+} {}^K I_{b^-}^{\alpha;\rho} &= \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b \frac{\tau^{\alpha-1} x(\tau)}{(t^\rho - \tau^\rho)^{1-\alpha}} d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \left( \frac{t^\rho - \tau^\rho}{\rho} \right)^{\alpha-1} \tau^{\rho-1} x(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b \left( \log \frac{t}{\tau} \right)^{\alpha-1} \frac{x(\tau)}{\tau} d\tau. \end{aligned}$$

sont des intégrales fractionnaires aux sens de Hadamard (1.4) et (1.5).

## 1.3 Dérivation Fractionnaire

Il existe plusieurs définitions de la dérivation fractionnaire. Dans cette section, on présente les définitions et quelques propriétés qui sont les plus utilisées .

### 1.3.1 Dérivées Fractionnaires au sens de Caputo

Les dérivées fractionnaires au sens de Caputo sont résumées dans la définition suivante :

#### Définition. 7: [10]

Soient  $\alpha > 0$  et  $n = [\alpha] + 1$ . Les dérivées fractionnaires de caputo à gauche et à droite respectivement d'ordre  $\alpha$  de  $f$  sont données par :

$$\begin{aligned} \forall t \in [a, b], \quad ({}^C D_{a^+}^\alpha f)(t) &= (I_{a^+}^{n-\alpha} f^{(n)})(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (1.19)$$

et

$$\begin{aligned} \forall t \in [a, b], \quad ({}^C D_{b^-}^\alpha f)(t) &= (I_{b^-}^{n-\alpha} f^{(n)})(t) \\ &= \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_t^b (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (1.20)$$

#### Exemple 1.3.1

La dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'une fonction constante  $f(t) = C$  est nulle, autrement dit :  ${}^C D_a^\alpha C = 0$ .

La dérivée de  $f(t) = (t-a)^\beta$  au sens de Caputo.

Soit  $n$  un entier et  $0 \leq n-1 < n$  avec  $\alpha > n-1$  et  $\beta > n-1$ , alors on a :

$$f^{(n)}(\tau) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-n+1)} (\tau-a)^{\beta-n},$$

d'où

$${}^C D^\alpha (t-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-1)\Gamma(\beta-n+1)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} (\tau-a)^{\beta-n} d\tau,$$

en effectuant le changement de variable  $\tau = a + s(t-a)$ , on obtient :

$${}^C D^\alpha (t-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-1)\Gamma(\beta-n+1)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} (\tau-a)^{\beta-n} d\tau,$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(n - 1)\Gamma(\beta - n + 1)}(t - a)^{\beta - \alpha} \int_0^1 (1 - s)^{n - \alpha - 1} s^{\beta - n} ds \\
&= \frac{\Gamma(\beta + 1)\Gamma(n - \alpha, \beta - n + 1)}{\Gamma(n - 1)\Gamma(\beta - n + 1)}(t - a)^{\beta - \alpha} \\
&= \frac{\Gamma(\beta + 1)\Gamma(n - \alpha)\Gamma(\beta - n + 1)}{\Gamma(n - 1)\Gamma(\beta - n + 1)\Gamma(\beta - \alpha + 1)}(t - a)^{\beta - \alpha} \\
&= \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta - n + 1)}(t - a)^{\beta - \alpha}.
\end{aligned}$$

### lemme 1.3.1 [7]

Soient  $\alpha \in \mathbb{R}^+$  et  $n = [\alpha] + 1$ . Si  $f \in AC^n([a, b])$ , alors :

$$\lim_{\alpha \rightarrow n} D_{a^+}^\alpha f(t) = f^n(t) \quad (1.21)$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow n} D_{b^-}^\alpha f(t) = (-1)^n f^n(t). \quad (1.22)$$

### Proposition 1.3.1

Pour  $\beta > \alpha > 0$  on a :

1.  $\left({}^C D_{a^+}^\alpha (t - a)^{\beta - 1}\right)(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta - \alpha)}(t - a)^{\beta - \alpha - 1}, \beta > \alpha.$
2.  $\left({}^C D_{b^-}^\alpha (b - t)^{\beta - 1}\right)(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta - \alpha)}(b - t)^{\beta - \alpha - 1}, \beta > \alpha.$

### Démonstration

Pour  $\beta > \alpha > 0$ ,

1. Posons  $f(t) = (t - a)^{\beta - 1}$ , d'après la définition (1.19), on a :

$$\left({}^C D_{a^+}^\alpha f\right)(t) = I_{a^+}^{n - \alpha} f^{(n)}(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{n - \alpha - 1} f^{(n)}(\tau) d\tau.$$

et

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d}{dt}\right)^n (t - a)^{\beta - 1} &= (\beta - 1)(\beta - 2)\dots(\beta - 1 - (n - 1))(t - a)^{\beta - 1 - n}, \\
&= (\beta - 1)(\beta - 2)\dots(\beta - n)(t - a)^{\beta - 1 - n},
\end{aligned}$$

D'où

$$\left({}^C D_{a^+}^n f\right)(t) = \frac{(\beta - 1)(\beta - 2)\dots(\beta - n)}{\Gamma(n - \alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{n - \alpha - 1} (\tau - a)^{\beta - n - 1} d\tau.$$

Par le changement de variable suivant :  $\tau - a = s(t - a)$ , on peut écrire :

$$\begin{aligned}
({}^C D_{a^+}^\alpha f)(t) &= \frac{(\beta - 1)(\beta - 2)\dots(\beta - n)}{\Gamma(n - \alpha)} (t - a)^{\beta - 1 - n} \int_0^1 (1 - s)^{n - \alpha - 1} s^{\beta - n - 1} ds \\
&= \frac{(\beta - 1)(\beta - 2)\dots(\beta - n)}{\Gamma(n - \alpha)} (t - a)^{\beta - 1 - n} B(n - \alpha, \beta - n) \\
&= \frac{(\beta - 1)(\beta - 2)\dots(\beta - n)\Gamma(n - \alpha)\Gamma(\beta - n)}{\Gamma(n - \alpha)\Gamma(\beta - n)} (t - a)^{\beta - 1 - n} \\
&= \left| B(n - \alpha, \beta - n) = \frac{\Gamma(n - \alpha)\Gamma(\beta - n)}{\Gamma(\beta - \alpha)} \right| \\
&= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta - \alpha)} (t - a)^{\beta - 1 - n}.
\end{aligned}$$

2. De la même manière, on peut déduire l'égalité (2).

### 1.3.2 Dérivées Fractionnaires au sens de Hadamard

Soient  $[a, b]$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $f \in AC_\delta^n[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\delta = t \frac{d}{dt}$  où :

$$AC_\delta^n[a, b] = \left\{ f : [a, b] \rightarrow C : \delta^{n-1} f(t) \in AC[a, b], \delta = t \frac{d}{dt} \right\}.$$

#### Définition. 8: [7]

Soient  $\alpha > 0$  et  $n = [\alpha] + 1$ . Les dérivées fractionnaires de Hadamard à gauche et à droite respectivement d'ordre  $\alpha$  de  $f$  sont données par :

$$\begin{aligned}
({}^H D_{a^+}^\alpha f)(t) &= (\delta)^n (I_{a^+}^{n-\alpha} f)(t) \\
&= \left( t \frac{d}{dt} \right)^n \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_a^t \left( \log \frac{\tau}{t} \right)^{n-\alpha-1} \frac{f(\tau)}{\tau} d\tau, \quad (t > a), \tag{1.23}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
({}^H D_{b^-}^\alpha f)(t) &= (-\delta)^n (I_{b^-}^{n-\alpha} f)(t) \\
&= \left( -t \frac{d}{dt} \right)^n \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_t^b \left( \log \frac{\tau}{t} \right)^{n-\alpha-1} \frac{f(\tau)}{\tau} d\tau, \quad (t < a). \tag{1.24}
\end{aligned}$$

#### Proposition 1.3.2

Soient  $\alpha > 0$  et  $1 \leq p \leq \infty$ . Si  $f \in L^p(a, b)$  alors on a :

$$\begin{aligned}
{}^H D_{a^+}^\alpha I_{a^+}^\alpha f &= f. \\
{}^H D_{b^-}^\alpha I_{b^-}^\alpha f &= f.
\end{aligned}$$

### 1.3.3 Dérivées Fractionnaires au sens de Caputo-Hadamard

On définit les modifications du type Caputo des dérivées fractionnaires de Hadamard comme suite :

#### Définition. 9: [10]

Soient  $\alpha \geq 0$  et  $n = [\alpha] + 1$ . Si  $f \in AC_{\delta}^m$ . Les dérivées fractionnaires de Caputo-Hadamard à gauche et à droite respectivement d'ordre  $\alpha$  de  $f$  sont définies par :

$$\begin{aligned} ({}^{CH}D_{a^+}^{\alpha})(t) &= I_{a^+}^{n-\alpha} \delta^n f(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \left(\log \frac{t}{\tau}\right)^{n-\alpha+1} \left(\tau \frac{d}{d\tau}\right)^n f(\tau) \frac{d\tau}{\tau}, \quad (t > a), \end{aligned} \quad (1.25)$$

tel que  $\delta = t \frac{d}{dt}$  et  $\delta^0 f(t) = f(t)$ , et

$$\begin{aligned} ({}^{CH}D_{b^-}^{\alpha})(t) &= (-1)^n I_{b^-}^{n-\alpha} \delta^n f(t) \\ &= \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_t^b \left(\log \frac{t}{\tau}\right)^{n-\alpha+1} \left(\tau \frac{d}{d\tau}\right)^n f(\tau) \frac{d\tau}{\tau}, \quad (t < b), \end{aligned} \quad (1.26)$$

si  $\alpha \in \mathbb{N}$ , alors :

$$({}^{CH}D_{a^+}^{\alpha} f)(t) = \delta^n f(t) \quad \text{et} \quad ({}^{CH}D_{b^-}^{\alpha} f)(t) = (-1)^n \delta^n f(t).$$

#### Exemple 1.3.2

On considère la fonction  $f$  définie par  $:f : t \longrightarrow (\log \frac{t}{a})^{\beta}$ . On a alors,

$${}^{CH}D_a^{\alpha} \left(\log \frac{t}{a}\right)^{\beta} = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \left(\log \frac{t}{a}\right)^{n-\alpha-1} \delta^n \left(\log \frac{s}{a}\right)^{\beta} \frac{ds}{s}.$$

Si on prend  $\beta = \frac{3}{2}$ ,  $\alpha = \frac{1}{2}$  et  $n = 1$  alors,

$$\delta^n \left(\log \frac{s}{a}\right)^{\beta} = \delta^1 \left(\log \frac{s}{a}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \left(\log \frac{s}{a}\right)^{\frac{1}{2}},$$

et

$${}^{CH}D_a^{\frac{1}{2}} \left(\log \frac{t}{a}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{\frac{3}{2}}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_a^t \left(\log \frac{t}{a}\right)^{1-\frac{1}{2}-1} \left(\log \frac{s}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{ds}{s}.$$

Par changement de variable  $v = \frac{\log \frac{t}{a}}{\log \frac{s}{a}}$ , on obtient :

$$\begin{aligned} {}^{CH}D_a^{\frac{1}{2}} \left( \log \frac{t}{a} \right)^{\frac{3}{2}} &= \frac{\frac{3}{2} \left( \log \frac{t}{a} \right)}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_1^1 v^{\frac{3}{2}} (1-v)^{\frac{1}{2}} dv \\ &= \frac{\frac{3}{2} \Gamma(2) \left( \log \frac{t}{a} \right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} = \frac{3\sqrt{\pi}}{4} \left( \log \frac{t}{a} \right). \end{aligned} \tag{1.27}$$

Dans la suite , on donne une relation reliant la dérivée de Hadamard à celle de Caputo-Hadamard.

**Théorème 1.3.1[7]**

Soient  $\alpha \geq 0$  et  $n = [\alpha] + 1$ . Si  $f \in AC_{\delta}^m$ , alors :

$$({}^{CH}D_{a^+}^{\alpha} f)(t) = {}^H D_{a^+}^{\alpha} \left[ f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\delta^k f(a)}{k!} \left( \log \frac{t}{a} \right) \right]^k (t),$$

et

$$({}^{CH}D_{b^-}^{\alpha} f)(t) = {}^H D_{b^-}^{\alpha} \left[ f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k \delta^k f(b)}{k!} \left( \log \frac{b}{t} \right) \right]^k (t),$$

En particulier, si  $0 < \alpha < 1$ , on a :

$$({}^C D_{a^+}^{\alpha} f)(t) = {}^H D_{a^+}^{\alpha} [f(t) - f(a)](t)$$

$$({}^C D_{b^-}^{\alpha} f)(t) = {}^H D_{b^-}^{\alpha} [f(t) - f(b)](t).$$

### 1.3.4 Dérivées Fractionnaires généralisé de Katugampola

La dérivée fractionnaire au sens de Katugampola est résumée dans la définition suivante :

#### Définition. 10: [6]

Soit  $\alpha > 0$  ,  $n = [\alpha] + 1$  et  $-\infty < a < b < +\infty$  . Les dérivées fractionnaires de Katugampola à gauche et à droite respectivement d'ordre  $\alpha$  de  $f \in X_c^p([a, b])$  sont définies par :

$$\begin{aligned} {}^K D_{a^+}^{\alpha;\rho} f(t) &= \left( t^{1-\rho} \frac{d}{dt} \right)^n \circ (I_{a^+}^{n-\alpha,\rho} f(t)) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left( t^{1-\rho} \frac{d}{dt} \right)^n \int_a^t \left( \frac{t^\rho - \tau^\rho}{\rho} \right)^{n-\alpha-1} f(\tau) \frac{d\tau}{\tau^{1-\rho}}, \end{aligned} \quad (1.28)$$

et

$$\begin{aligned} {}^K D_{b^-}^{\alpha;\rho} f(t) &= \left( -t^{1-\rho} \frac{d}{dt} \right)^n \circ (I_{b^-}^{n-\alpha,\rho} f(t)) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left( -t^{1-\rho} \frac{d}{dt} \right)^n \int_t^b \left( \frac{\tau^\rho - t^\rho}{\rho} \right)^{n-\alpha-1} f(\tau) \frac{d\tau}{\tau^{1-\rho}}. \end{aligned} \quad (1.29)$$

#### lemme 1.3.5[9]

${}^K I_{a^+}^{\alpha;\rho}$  ,  ${}^{CK} D_{a^+}^{\alpha;\rho}$  sont des opérateurs bornés de  $C[a, b]$  vers  $C[a, b]$ .

#### Théorème 1.3.2[1]

Soient  $\alpha \geq 0$  et  $\rho > 0$ . Alors on a :

$$\lim_{\rho \rightarrow 1} ({}^K D_{a^+}^{\alpha;\rho} f)(t) = ({}^{RL} D_{a^+}^{\alpha;\rho} f)(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau,$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} ({}^K D_{a^+}^{\alpha;\rho} f)(t) = ({}^H D_{a^+}^{\alpha;\rho} f)(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left( t \frac{d}{dt} \right)^n \int_a^t (\ln t - \ln \tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau.$$

### 1.3.5 Dérivées Fractionnaires au sens de Caputo-Katugampola

On définit les modifications du type Caputo des dérivées fractionnaires de Katugampola comme suite :

#### Définition. 11:

Soient  $\alpha > 0$ ,  $n = [\alpha] + 1$  et  $-\infty < a < +\infty$ . Les dérivée fractionnaire généralisé de Caputo-Katugampola à gauche et à droite respectivement d'ordre  $\alpha$  de  $f \in X_c^p([a, b])$  sont définies par :

$$\begin{aligned} \forall t \in [a, b], {}^{CK}D_{a^+}^{\alpha, \rho} f(t) &= (I_{a^+}^{n-\alpha, \rho}) \circ (\gamma)^n f(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \left( \frac{t^\rho - \tau^\rho}{\rho} \right)^{n-\alpha-1} (\gamma)^n f(\tau) \frac{d\tau}{\tau^{1-\rho}}, \end{aligned} \quad (1.30)$$

et

$$\begin{aligned} \forall t \in [a, b], {}^{CK}D_{b^-}^{\alpha, \rho} f(t) &= (I_{b^-}^{n-\alpha, \rho}) \circ (\gamma)^n f(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_t^b \left( \frac{\tau^\rho - t^\rho}{\rho} \right)^{n-\alpha-1} (\gamma)^n f(\tau) \frac{d\tau}{\tau^{1-\rho}}, \end{aligned} \quad (1.31)$$

$$\text{avec } \gamma = t^{1-\rho} \frac{d}{dt}$$

#### Lemme 1.3.7

Soit  $\alpha, \rho > 0$  et  $t \in C(J, \mathbb{R}) \cap C^1(J, \mathbb{R})$ . alors,

1. L'équation différential fractionnaire e type Caputo-Katugampola

$${}^{CK}D_{a^+}^{\alpha, \rho} x(t) = 0,$$

a une solution

$$x(t) = c_0 + c_1 \left( \frac{t^\rho - a^\rho}{\rho} \right) + c_2 \left( \frac{t^\rho - a^\rho}{\rho} \right)^2 + \dots + c_{n-1} \left( \frac{t^\rho - a^\rho}{\rho} \right)^{n-1},$$

Où  $c_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$  et  $n = [\alpha] + 1$ .

2. Si  $x$  et  ${}^{CK}D_{a^+}^{\alpha, \rho} x \in C(J, \mathbb{R})$ , alors,

$${}^{CK}I_{a^+}^{\alpha, \rho} {}^{CK}D_{a^+}^{\alpha, \rho} x(t) = x(t) + c_0 + c_1 \left( \frac{t^\rho - a^\rho}{\rho} \right) + c_2 \left( \frac{t^\rho - a^\rho}{\rho} \right)^2 + \dots + c_{n-1} \left( \frac{t^\rho - a^\rho}{\rho} \right)^{n-1}.$$

Où  $c_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$  et  $n = [\alpha] + 1$ .

## Démonstration

1. Soient  $\alpha, \rho > 0$ , on a le première partie :

$${}^{CK}D_{a^+}^{\alpha;\rho} \left( \frac{t^\rho - a^\rho}{\rho} \right)^m = 0, \quad \text{pour tout } m = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Alors l'équation fractionnaire  ${}^{CK}D_{a^+}^{\alpha;\rho} x(t) = 0$ , admet une solution particulière, comme suit :

$$x(t) = {}^{CK}D_{a^+}^{\alpha;\rho} \left( \frac{t^\rho - a^\rho}{\rho} \right)^m, \quad c_m \in \mathbb{R}, \quad \text{pour tout } m = 0, 1, 2, \dots, n-1. \quad (1.32)$$

Ainsi, la solution générale donnée  ${}^{CK}D_{a^+}^{\alpha;\rho} x(t) = 0$ , est une somme de solutions particulières, c'est-à-dire :

$$x(t) = c_0 + c_1 \left( \frac{t^\rho - a^\rho}{\rho} \right) + c_2 \left( \frac{t^\rho - a^\rho}{\rho} \right)^2 + \dots + c_n \left( \frac{t^\rho - a^\rho}{\rho} \right)^n, \quad c_m \in \mathbb{R}, \quad (m = 0, 1, 2, \dots, n-1).$$

2. Soient  ${}^{CK}D_{a^+}^{\alpha;\rho} x \in C[a, b]$  les dérivées fractionnaires d'ordre  $0 < \alpha \leq 1$ . Si on applique

l'opérateur  ${}^{CK}D_{a^+}^{\alpha;\rho}$  à  ${}^{CK}I_{a^+}^{\alpha;\rho} {}^{CK}D_{a^+}^{\alpha;\rho} x(t) - x(t)$ , donc on a :

$$\begin{aligned} {}^{CK}D_{a^+}^{\alpha;\rho} [{}^{CK}I_{a^+}^{\alpha;\rho} {}^{CK}D_{a^+}^{\alpha;\rho} x(t) - x(t)] &= {}^{CK}D_{a^+}^{\alpha;\rho} {}^{CK}I_{a^+}^{\alpha;\rho} {}^{CK}D_{a^+}^{\alpha;\rho} x(t) - {}^{CK}D_{a^+}^{\alpha;\rho} x(t) \\ &= {}^{CK}D_{a^+}^{\alpha;\rho} x(t) - {}^{CK}D_{a^+}^{\alpha;\rho} x(t) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Après l'étape (i) on en déduit qu'il existe  $c \in \mathbb{R}$ , tel que :

$${}^{CK}D_{a^+}^{\alpha;\rho} {}^{CK}I_{a^+}^{\alpha;\rho} x(t) - x(t) = c \left( \frac{t^\rho - a^\rho}{\rho} \right)^m,$$

ce qui implique la loi de composition 2 .

---

**Lemme 1.3.8 [13]**

Soient  $\alpha > 0$ ,  $x, y$  sont deux fonctions intégrables et  $z$  un fonction continue, avec le domaine  $[a, b]$ . Supposons que  $x$  et  $y$  soient non négatifs et que  $z$  non négatif et non décroissant. Si

$$x(t) \leq y(t) + z(t)\rho^{1-\alpha} \int_a^t (t^\rho - \tau^\rho)^{\alpha-1} \tau^{\rho-1} x(\tau) d\tau, \quad t \in [a, b],$$

alors

$$x(t) \leq y(t) + \int_a^t \left[ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\rho^{1-i\alpha} (z(t)\Gamma(\alpha))^i}{\Gamma(i\alpha)} (t^\rho - \tau^\rho)^{i\alpha-1} \tau^{\rho-1} y(\tau) \right] d\tau, \quad t \in [a, b].$$

**Remarque 1.3.1**

En particulier, si  $y(t)$  est une fonction non décroissante sur  $J$ . Alors on obtient :

$$x(t) \leq y(t) E_\alpha \left[ f(t) \Gamma(\alpha) \left( \frac{t^\rho - a^\rho}{\rho} \right)^\alpha \right]$$

où  $E_\alpha(\cdot)$  la fonction Mittag-Leffler qui est définie dans (1.3).

**Lemme 1.3.9 [8],[9]**

Soient  $t > a$ ,  $\alpha, \sigma \in (0, \infty)$  et  $I_{a^+}^{\alpha;\rho}$   ${}^{CK}D_{a^+}^{\alpha;\rho}$  sont selon les définitions 6, 10 et 11 respectivement.

On obtient alors :

$$I_{a^+}^{\alpha;\rho} (t^\rho - a^\rho)^{\sigma-1} = \frac{\rho^{-\alpha} \Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha + \sigma)} (t^\rho - a^\rho)^{\alpha+\sigma-1},$$

$${}^{CK}D_{a^+}^{\alpha;\rho} (t^\rho - a^\rho)^{\sigma-1} = \frac{\rho^{-\alpha} \Gamma(\alpha)}{\Gamma(\sigma - \alpha)} (t^\rho - a^\rho)^{\alpha-\sigma-1},$$

et

$${}^{CK}D_{a^+}^{\alpha;\rho} (t^\rho - a^\rho)^k = 0, \quad \alpha \geq 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

En particulier,  ${}^{CK}D_{a^+}^{\alpha;\rho}(1)=0$ .

**Théorème 1.3.3 :(propriété inverse)**

Soient  $0 < \alpha < 1$  et  $f \in X_c^p(a, b)$ ,  $a > 0$ . et  $\rho > 0$ . Alors on a :

$${}^{CK}D_{a^+}^{\alpha;\rho} I_{a^+}^{\alpha;\rho} f(t) = f(t). \tag{1.33}$$

## Démonstration

On utilise le théorème de Fubini et Dirichlet, après l'intégration direct on trouve :

$$\begin{aligned}
{}^{CK}D_{a^+}^{\alpha;\rho} I_{a^+}^{\alpha;\rho} f(t) &= \frac{\rho^\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \left( t^{1-\rho} \frac{d}{dt} \right) \int_a^t \frac{\tau^{\rho-1}}{(t^\rho - \tau^\rho)^\alpha} \cdot \frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^\tau \frac{s^{\rho-1} f(s)}{(\tau^\rho - s^\rho)^{1-\alpha}} ds d\tau \\
&= \frac{\rho}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha)} \left( t^{1-\rho} \frac{d}{dt} \right) \int_a^t f(s) s^{\rho-1} \int_a^\tau \frac{(\tau^\rho - s^\rho)^{1-\alpha}}{(t^\rho - \tau^\rho)^\alpha} \tau^{\rho-1} d\tau ds \\
&= \frac{\rho}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha)} \left( t^{1-\rho} \frac{d}{dt} \right) \int_a^t f(s) s^{\rho-1} ds \frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha)}{\rho}, \\
&= f(t).
\end{aligned}$$

On remarque ici que l'intégrale intérieure est évaluée par le changement de variable,  $\frac{\tau^\rho - s^\rho}{x^\rho - s^\rho}$ .

Et on utilise la fonction Bêta qui définie en (1.2), et le fait que  $B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$ .

### Théorème 1.3.4 :(Théorème de l'indice)[8]

Soient  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  et  $\rho > 0$ . Si  $0 < a < b < +\infty$  et  $1 \leq p \leq \infty$ , alors,

pour tout  $f \in X_c^p[0, b]$  et  $\rho > 0$ , on a :

$$I_{a^+}^{\alpha;\rho} I_{a^+}^{\beta;\rho} f = I_{a^+}^{\alpha+\beta;\rho} f \quad \text{et} \quad {}^{CK}D_{a^+}^{\alpha;\rho} {}^{CK}D_{a^+}^{\beta;\rho} f = {}^{CK}D_{a^+}^{\alpha+\beta;\rho} f \quad (\text{pour tout } 0 < \alpha, \beta < 1).$$

### Théorème 1.3.5 :(Composition)[8]

Soient  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  et  $\rho > 0$ . Si  $0 < a < b < +\infty$  et  $1 \leq p \leq \infty$ , alors,

pour tout  $f \in L^p(a, b)$ ,

$${}^{CK}D_{a^+}^{\alpha;\rho} I_{a^+}^{\beta;\rho} f = I_{a^+}^{\beta-\alpha;\rho} f \quad \text{et} \quad {}^{CK}D_{b^-}^{\alpha;\rho} I_{b^-}^{\beta;\rho} f = I_{b^-}^{\beta-\alpha;\rho} f.$$

## Preuve

On utilise les propriétés de la fonction Gamma  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ .

### Théorème 1.3.6 :(propriété Linéaire ) [8]

Soient  $\alpha \in (0, 1)$ , et  $\rho > 0$ . Alors pour tout  $x, y \in C[a, b]$ , on a :

$$I_{a^+}^{\alpha;\rho}(x+y)(t) = I_{a^+}^{\alpha;\rho}x(t) + I_{a^+}^{\alpha;\rho}y(t). \quad (1.34)$$

et

$$D_{a^+}^{\alpha;\rho}(x+y)(t) = D_{a^+}^{\alpha;\rho}x(t) + D_{a^+}^{\alpha;\rho}y(t), \quad (1.35)$$

## Preuve

Les résultats suivantes sont découlent de l'intégration directe.

---

## 1.4 Les théorèmes du point fixe

Les équations différentielles fractionnaires sont considérées comme des équations différentielles non-linéaires, alors plusieurs théorèmes ont été utilisés pour résoudre ce type d'équations.

L'une des méthodes les plus utilisées : les théorèmes du point fixe.

### Définitions

Dans cette section, nous présentons les définitions et quelques propriétés préliminaires qui sont utilisées dans ce mémoire.

Soit  $J = [1, T]$ ,  $T > 1$ , notons  $C(J, \mathbb{R})$  l'espace de Banach des fonction continues définies de  $J$  dans  $\mathbb{R}$ , muni de la norme :

$$\|y\|_{\infty} = \sup \{ |y(t)| ; t \in J \}.$$

#### Définition. 12: [4]

On appelle boule fermée de centre  $a$  et de Rayon  $r$ , l'ensemble noté  $\bar{B}(a, r)$  telle que,

$$\bar{B}(a, r) = \{ x \in E ; \|x - a\| \leq r \}.$$

#### Définition. 13: [5]

On dit qu'une espace vectoriel normé  $(E, \|\cdot\|_E)$  est complet, ou que c'est un espace de Banach, si toute suite de Cauchy dans  $E$  est convergente.

#### Définition. 14: [7]

Une partie  $A$  de  $(E, \|\cdot\|_E)$  est dite relativement compact si son adhérence est compact.

#### Définition. 15:

Soit  $E$  et  $F$  deux espaces de Banach, et  $A : E \rightarrow F$  une application linéaire. On dit que  $A$  est bornée si elle envoie les parties bornées de  $E$  sur les parties bornées de  $F$ .

**Définition. 16: [7]**

Soit  $A$  un sous ensemble de  $C(J, \mathbb{R})$ ,  $A$  est uniformément borné.

s'il existe une constante  $k > 0$  telle que :  $\| f(x) \| \leq k$  pour tout  $x \in J$  et tout  $f \in A$ .

**Définition. 17: [7]**

Soient  $E$  et  $F$  deux espaces de Banach. on appelle opérateur borné toute application linéaire continue de  $E$  dans  $F$ .

**Définition. 18: [10]**

Soit  $A$  une sous ensemble de  $C(J, \mathbb{R})$ , L'ensemble  $A$  est équicontinue.

i.e; pour tout  $\varepsilon > 0$ , pour tout  $t_1, t_2 \in J$  et tout  $f \in A$ , il existe  $\delta > 0$  tel que

$$| t_1 - t_2 | < \delta \Rightarrow \| f(t_1) - f(t_2) \|_{\infty} \leq \varepsilon.$$

**Définition. 19: [7]**

Soient  $E$  et  $F$  deux espaces de Banach et  $f$  une application définie de  $E$  à valeurs dans  $F$ .

On dit que  $f$  est complètement continue si elle est continue et transforme tout borné de  $E$  en un ensemble relativement compact dans  $F$ .  $f$  est dit compact si  $f(E)$  est relativement compact dans  $F$ .

**Définition. 20: [5]**

Soit  $(X, \| \cdot \|)$  un espace vectorielle normé, une application  $T : X \rightarrow X$  est dit contractante, s'il existe un nombre positif  $k \in [0,1[$  telle que  $\forall x \in X, y \in X$ , on a :

$$\| Tx - Ty \|_{\infty} \leq k \| x - y \|_{\infty}.$$

**Définition. 21: [5]**

Soit  $(X, \| \cdot \|)$  un espace vectorielle normé,  $A : X \rightarrow X$  une application.

On appelle point fixe de  $A$  tout point  $x \in X$  telle que :  $Ax = x$ .

---

### 1.4.1 Théorèmes d'existence et d'unicité des solutions

#### Théorème de point fixe de Banach [7]

Soit  $X$  un espace de Banach et  $T : X \longrightarrow X$  un opérateur contractant. Alors  $T$  admet un point fixe unique, c'est-à-dire :

$$\exists !x \in X \text{ tel que } Tx = x.$$

#### Théorème de point fixe de Schaefer [5]

Soit  $X$  un espace de Banach et  $T : X \longrightarrow X$  un opérateur complètement continu. Si

$$\Omega = \{x \in X, x = \lambda Tx, \forall \lambda \in ]0, 1[ \},$$

est borné, alors  $T$  possède au moins un point fixe.

#### Théorème de point fixe de Arzela-Ascoli [5]

Soit  $T$  un sous ensemble de  $C(J, \mathbb{R})$ ,  $T$  est relativement compact dans  $C(J, \mathbb{R})$  si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :

1. L'ensemble  $T$  est uniformément borné.
2. L'ensemble  $T$  est équicontinu.
3. Pour tout  $x \in J$  l'ensemble  $\{f(x), f \in T\} \in E$  est relativement compact.

#### Théorème de point fixe de Krasnoselskii [13]

Soient  $X$  un espace de Banach et  $F$  un sous-ensemble fermé, borné et convexe de  $X$ . On suppose que les opérateurs  $R$  et  $T$  vérifiant :

1.  $Rx + Ty \in F$
2.  $R$  est continu et compact.
3.  $T$  est contractant, alors il existe au moins un point fixe  $z$ , tel que  $Rz + Tz = z$ .

## 1.5 Stabilité des solution

On définit le problème fractionnaire  $(P)$  suivant :

$$(P) : \begin{cases} {}^{CK}D_{a^+}^{\alpha;\rho} x(t) = \lambda f(t, x(t)), & t \in J \text{ et } f \in C(J, \mathbb{R}). \\ x(a) + x(b) = 0, \\ x'(a) + x'(b) = 0. \end{cases}$$

Où  $1 < \alpha < 2$ ,  $\rho > 0$  et  $\lambda \in \mathbb{R}^*$

### 1.5.1 Définitions

#### Définition. 22: [11]

le problème est stable d'Ulam-Hyers, s'il existe un nombre réel  $L_f > 0$ , tel que pour chaque  $\varepsilon > 0$  et pour chaque solution  $\tilde{x} \in C(J, \mathbb{R})$  de l'inégalité :

$$|{}^{CK}D_{a^+}^{\alpha;\rho} \tilde{x}(t) - \lambda f(t, \tilde{x}(t))| \leq \varepsilon, \quad t \in J, \quad (1.37)$$

il existe une solution  $x \in C(J, \mathbb{R})$  pour le problème  $(P)$  tel que :

$$|\tilde{x}(t) - x(t)| \leq L_f \varepsilon, \quad t \in J.$$

#### Définition. 23: [11]

le problème  $(P)$  est Ulam-Hyers stable généralisé s'il existe  $\psi \in C([0, +\infty), [0, +\infty))$ , avec  $\psi(0) = 0$ , pour chaque solution  $\tilde{x} \in C(J, \mathbb{R})$  de l'inégalité :

$$|{}^{CK}D_{a^+}^{\alpha;\rho} \tilde{x}(t) - \lambda f(t, \tilde{x}(t))| \leq \varepsilon, \quad t \in J, \quad (1.38)$$

il existe une solution  $x \in C(J, \mathbb{R})$  pour le problème  $(P)$  tel que

$$|\tilde{x}(t) - x(t)| \leq \psi(\varepsilon), \quad t \in J.$$

### Remarque

Soient  $\alpha, \rho > 0$ . La fonction  $\tilde{x} \in C(J, \mathbb{R})$  une est une solution de l'inégalité si est seulement s'il existe une fonction  $h_{\tilde{x}} \in C(J, \mathbb{R})$  telle que :

1.  $|h_{\tilde{x}}(t)|$  pour tout  $t \in J$ ,
2.  $D_{a^+}^{\alpha;\rho} x(t) = (t, \tilde{x}(t)) + h_{\tilde{x}}(t)$ ,  $t \in J$ .

## CHAPITRE 2

### EXISTENCE UNICITÉ ET STABILITÉ DES SOLUTIONS

Dans ce chapitre, on s'intéresse par l'étudier d'existence et d'unicité des solutions pour le problème fractionnaire suivant :

$$(P) : \begin{cases} {}^{CK}D_{a^+}^{\alpha;\rho} x(t) = \lambda f(t, x(t)), & t \in J \text{ et } f \in C(J, \mathbb{R}). \\ x(a) + x(b) = 0, \\ x'(a) + x'(b) = 0. \end{cases}$$

Où  $1 < \alpha < 2$ ,  $\rho > 0$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$

#### Lemme 2.1

On suppose que  $f \in C([a, b])$ . Alors, le problème (P), admet la solution suivante :

$$\begin{aligned} x(t) = & \frac{\lambda \rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b (t^\rho - \tau^\rho)^{\alpha-1} \tau^{\rho-1} f(\tau) d\tau - \frac{\lambda \rho^{1-\alpha}}{2 \Gamma(\alpha)} \int_a^b (b^\rho - \tau^\rho)^{\alpha-1} \tau^{\rho-1} f(\tau) d\tau \\ & + \frac{\lambda}{b^{\rho-1} - a^{\rho-1}} \left[ \frac{b^\rho - a^\rho}{2\rho} - \frac{t^\rho - a^\rho}{\rho} \right] \frac{\rho^{2-\alpha}}{\Gamma(\alpha-1)} \int_a^b (b^\rho - \tau^\rho)^{\alpha-2} \tau^{\rho-1} f(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (2.2)$$

#### Démonstration

En appliquant  $I_{a^+}^{\alpha;\rho}$  aux deux côté de l'équation (P), on trouve :

$$\begin{aligned} I_{a^+}^{\alpha;\rho} {}^{CK}D_{a^+}^{\alpha;\rho} x(t) &= I_{a^+}^{\alpha;\rho} \lambda f(t, x(t)), \\ x(t) + c_0 + c_1 \left[ \frac{t^\rho - a^\rho}{\rho} \right] &= I_{a^+}^{\alpha;\rho} \lambda f(t, x(t)), \end{aligned}$$

tell que  $n = [\alpha] + 1 \implies n = 2$ . Donc

$$x(t) = I_{a^+}^{\alpha;\rho} \lambda f(t, x(t)) + c_0 + c_1 \left[ \frac{t^\rho - a^\rho}{\rho} \right] \quad (2.3)$$

Par l'utilisation des conditions initiales on peut écrire :

1. D'après la condition  $x(a) + x(b) = 0$ , on obtient :

$$\begin{aligned} I_{a^+}^{\alpha;\rho} f(a, x(a)) + c_0 + I_{a^+}^{\alpha;\rho} f(b, x(b)) + c_0 + c_1 \left[ \frac{b^\rho - a^\rho}{\rho} \right] &= 0 \\ I_{a^+}^{\alpha;\rho} \lambda f(a, x(a)) + I_{a^+}^{\alpha;\rho} \lambda f(b, x(b)) + 2c_0 + c_1 \left[ \frac{b^\rho - a^\rho}{\rho} \right] &= 0 \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} -2c_0 &= I_{a^+}^{\alpha;\rho} \lambda f(b, x(b)) + c_1 \left[ \frac{b^\rho - a^\rho}{\rho} \right] \\ c_0 &= \frac{1}{2} I_{a^+}^{\alpha;\rho} \lambda f(b, x(b)) - \frac{1}{2} c_1 \left[ \frac{b^\rho - a^\rho}{\rho} \right] \end{aligned}$$

2. Et d'après la condition  $x'(a) + x'(b) = 0$ , on obtient :

$$\begin{aligned} I_{a^+}^{\alpha-1;\rho} f(a, x(a)) + I_{a^+}^{\alpha-1;\rho} f(b, x(b)) - c_1 a^{\rho-1} - c_1 b^{\rho-1} &= 0 \\ \frac{\lambda \rho^{2-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b (b^\rho - \tau^\rho)^{\alpha-2} \tau^{\rho-1} f(\tau) d\tau - c_1 a^{\rho-1} - c_1 b^{\rho-1} &= 0 \\ \frac{\lambda \rho^{2-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b (b^\rho - \tau^\rho)^{\alpha-2} \tau^{\rho-1} f(\tau) d\tau - c_1 [a^{\rho-1} + b^{\rho-1}] &= 0 \end{aligned}$$

$$c_1 [a^{\rho-1} + b^{\rho-1}] = \frac{\lambda \rho^{2-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b (b^\rho - \tau^\rho)^{\alpha-2} \tau^{\rho-1} f(\tau) d\tau$$

On remplace  $c_1$  dans la formule de  $c_0$  on trouve :

$$c_0 = \frac{\lambda}{2} \left( \frac{1}{b^{\rho-1} + a^{\rho-1}} \right) \left[ \frac{b^\rho - a^\rho}{\rho} \right] \frac{\rho^{2-\alpha}}{\Gamma(\alpha-1)} \int_a^b (b^\rho - \tau^\rho)^{\alpha-2} \tau^{\rho-1} f(\tau) d\tau \quad (2.4)$$

$$- \frac{1}{2} \frac{\lambda \rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b (t^\rho - \tau^\rho)^{\alpha-1} \tau^{\rho-1} f(\tau) d\tau$$

et

$$c_1 = - \frac{\lambda}{b^{\rho-1} + a^{\rho-1}} \frac{\rho^{2-\alpha}}{\Gamma(\alpha-1)} \int_a^b (b^\rho - \tau^\rho)^{\alpha-2} \tau^{\rho-1} f(\tau) d\tau \quad (2.5)$$

Implique la solution du problème (P) est donnée par :

$$x(t) = \frac{\lambda \rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t^\rho - \tau^\rho)^{\alpha-1} \tau^{\rho-1} f(\tau) d\tau - \frac{\lambda \rho^{1-\alpha}}{2 \Gamma(\alpha)} \int_a^b (b^\rho - \tau^\rho)^{\alpha-1} \tau^{\rho-1} f(\tau) d\tau$$

$$+ \frac{1}{b^{\rho-1} - a^{\rho-1}} \left[ \frac{b^\rho - a^\rho}{2\rho} - \frac{t^\rho - a^\rho}{\rho} \right] \frac{\lambda \rho^{2-\alpha}}{\Gamma(\alpha-1)} \int_a^b (b^\rho - \tau^\rho)^{\alpha-2} \tau^{\rho-1} f(\tau) d\tau$$

## Existence et Unicité

Dans cette partie, nous discuterons de l'existence et de l'unicité de la solution au problème (P) par les approches de la méthodes du point fixe.

### 2.1 Unicité

#### lemme 2.1.1

On introduit l'espace de Banach suivant :

$$X = \{x, x \in C(J, \mathbb{R})\}, \quad J = [a, b],$$

muni de la norme

$$\|x\| = \sup_{t \in J} |x(t)|$$

Maintenant on définit l'opérateur  $T$  par :

$$T : X \longrightarrow X$$

$$x \longrightarrow Tx,$$

telle que pour tout  $t \in [a, b]$ , on a :

$$Tx(t) = \frac{\lambda \rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t^\rho - \tau^\rho)^{\alpha-1} \tau^{\rho-1} f(\tau, x(\tau)) d\tau - \frac{\lambda \rho^{1-\alpha}}{2 \Gamma(\alpha)} \int_a^b (b^\rho - \tau^\rho)^{\alpha-1} \tau^{\rho-1} f(\tau, x(\tau)) d\tau \quad (2.6)$$

$$+ \left( \frac{1}{b^{\rho-1} - a^{\rho-1}} \right) \left[ \left( \frac{b^\rho - a^\rho}{2\rho} \right) - \left( \frac{t^\rho - a^\rho}{\rho} \right) \right] \frac{\lambda \rho^{2-\alpha}}{\Gamma(\alpha-1)} \int_a^b (b^\rho - \tau^\rho)^{\alpha-2} \tau^{\rho-1} f(\tau, x(\tau)) d\tau.$$

il convient de noter que le problème a des solutions si est seulement si l'opérateur  $T$  a des points fixes. On utilise l'hypothèse  $(H)$  suivant :

### Théorème 2.1.1

Soit  $f : J \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  est un fonction bornée continue qui vérifié les conditions suivant :

$(H)$  il existe un constant  $0 < K < 1$  tell que :

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq K |x - y|, \quad \forall t \in [a, b] \text{ et } x, y \in \mathbb{R}.$$

Si

$$\omega = \frac{3 |\lambda| K \rho^{-\alpha}}{2} \left[ \left( \frac{\lambda}{b^{\rho-1} - a^{\rho-1}} \right) \frac{(b^\rho - a^\rho)^\alpha}{\Gamma(\alpha)} + \frac{(b^\rho - a^\rho)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \right] < 1, \quad (2.7)$$

alors il existe un solution unique pour le problème  $(P)$  sur  $J$ .

### Démonstration

On montre d'abord que  $TB_r \subseteq B_r$  tell que :

$$T : X \rightarrow X$$

$$x(t) \rightarrow Tx,$$

et

$$B_r = \{x \in C(J, \mathbb{R}), \|x\| \leq r\} \quad (2.8)$$

On choisie :  $\frac{\theta}{1-\omega} \leq r$ , où  $\omega < 1$  et

$$\theta = \frac{3}{2} \frac{|\lambda| \mu \rho^{-2\alpha}}{(b^{\rho-1} - a^{\rho-1})} + \frac{(b^\rho - a^\rho)^{2\alpha}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+1)},$$

et  $\sup_{t \in J} |f(t, 0)| = \mu < \infty$ . Pour tout  $x \in B_r$ , on obtient par l'hypothèse :

$$\begin{aligned} & |Tx(t)| \leq \sup_{t \in J} |Tx(t)| \\ & \leq \sup_{t \in J} \left\{ \frac{|\lambda| \rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t^\rho - \tau^\rho)^{\alpha-1} \tau^{\rho-1} |\tau, x(\tau)| d\tau + \frac{|\lambda| \rho^{1-\alpha}}{2 \Gamma(\alpha)} \int_a^b (b^\rho - \tau^\rho)^{\alpha-1} \tau^{\rho-1} |f(\tau, x(\tau))| d\tau \right. \\ & \quad \left. + \left( \frac{1}{b^{\rho-1} - a^{\rho-1}} \right) \left[ \frac{b^\rho - a^\rho}{2\rho} + \frac{t^\rho - a^\rho}{\rho} \right] \frac{|\lambda| \rho^{2-\alpha}}{\Gamma(\alpha-1)} \int_a^b (b^\rho - \tau^\rho)^{\alpha-2} \tau^{\rho-1} |f(\tau, x(\tau))| d\tau \right\} \end{aligned}$$

D'après (H), on obtient :

$$\begin{aligned} |f(\tau, x(\tau))| &= |f(\tau, x(\tau)) - f(\tau, 0) + f(\tau, 0)| \\ &\leq |f(\tau, x(\tau)) - f(\tau, 0)| + |f(\tau, 0)| \\ &\leq K|x| + \mu \\ &= Kr + \mu. \end{aligned}$$

ce qui implique que :

$$|f(\tau, x(\tau))| = Kr + \mu. \quad (2.9)$$

Par conséquence,

$$\begin{aligned} |Tx(t)| &\leq \sup_{t \in J} \left\{ \frac{|\lambda|}{2} (Kr + \mu) \frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b (b^\rho - \tau^\rho)^{\alpha-1} \tau^{\rho-1} d\tau + |\lambda| (Kr + \mu) \frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t^\rho - \tau^\rho)^{\alpha-1} \tau^{\rho-1} d\tau \right. \\ & \quad \left. + \left( \frac{1}{b^{\rho-1} - a^{\rho-1}} \right) \left[ \left( \frac{b^\rho - a^\rho}{2\rho} \right) + \left( \frac{t^\rho - a^\rho}{\rho} \right) \right] (Kr + \mu) \frac{|\lambda| \rho^{2-\alpha}}{\Gamma(\alpha-1)} \int_a^b (b^\rho - \tau^\rho)^{\alpha-2} \tau^{\rho-1} d\tau \right\} \\ &\leq \left( \frac{1}{b^{\rho-1} + a^{\rho-1}} \right) \left[ \left( \frac{b^\rho - a^\rho}{2\rho} \right) + \left( \frac{b^\rho - a^\rho}{\rho} \right) \right] \left[ |\lambda| (Kr + \mu) \rho^{1-\alpha} \frac{(b^\rho - a^\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right] \\ & \quad + \frac{3}{2} \left[ (Kr + \mu) |\lambda| \rho^{-\alpha} \frac{(b^\rho - a^\rho)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \right] \\ &\leq \frac{3|\lambda| K \rho^{-\alpha}}{2} \left[ \left( \frac{1}{b^{\rho-1} - a^{\rho-1}} \right) \frac{(b^\rho - a^\rho)^\alpha}{\Gamma(\alpha)} + \frac{(b^\rho - a^\rho)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \right] r + \frac{3}{2} \frac{|\lambda| \mu \rho^{-2\alpha}}{(b^{\rho-1} - a^{\rho-1})} + \frac{(b^\rho - a^\rho)^{2\alpha}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+1)}, \end{aligned}$$

$$= \omega r + \theta < r.$$

Donc

$$\| T(x) \| < r,$$

Ce qui donne  $Tx \in B_r$ . De plus on obtient :

$${}^{CK}D_{a^+}^{\alpha;\rho} Tx(t) = {}^{CK}D_{a^+}^{\alpha;\rho} I_{a^+}^{\alpha;\rho} f(t, x(t))(t) = f(t, x(t)).$$

Puisque  $f(t, x(t))$  est continue sur  $J$ , L'opérateur  ${}^{CK}D_{a^+}^{\alpha;\rho} Tx(t)$  est continue sur  $J$ , c'est-à-dire :

$$TB_r \subset B_r.$$

Deuxièmement, nous appliquons le théorème du point fixe de Banach pour montre que  $T$  a un point fixe, En fait, il suffit de prouver que  $T$  est une contractant. Fixon  $x, y \in C(J, \mathbb{R})$  et pour tout  $t \in J$  on obtient alors :

$$\begin{aligned} |Tx(t) - Ty(t)| &\leq \frac{3}{2} \left( \frac{1}{b^{\rho-1} - a^{\rho-1}} \right) \left( \frac{b^\rho - a^\rho}{2\rho} \right) \frac{|\lambda| \rho^{2-\alpha}}{\Gamma(\alpha-1)} \int_a^b (b^\rho - \tau^\rho)^{\alpha-2} \tau^{\rho-1} |f(\tau, x(\tau)) - f(\tau, y(\tau))| d\tau \\ &\quad + \frac{|\lambda| \rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t^\rho - \tau^\rho)^{\alpha-1} \tau^{\rho-1} |f(\tau, x(\tau)) - f(\tau, y(\tau))| d\tau \\ &\quad + \frac{|\lambda| \rho^{1-\alpha}}{2 \Gamma(\alpha)} \int_a^b (b^\rho - \tau^\rho)^{\alpha-1} \tau^{\rho-1} |f(\tau, x(\tau)) - f(\tau, y(\tau))| d\tau \end{aligned}$$

D'après (H) :

$$|f(\tau, x(\tau)) - f(\tau, y(\tau))| = K |x - y| \tag{2.10}$$

On obtient :

$$\begin{aligned} |Tx(t) - Ty(t)| &\leq \frac{3}{2} \left( \frac{1}{b^{\rho-1} - a^{\rho-1}} \right) \left( \frac{b^\rho - a^\rho}{\rho} \right) \frac{K |\lambda| \rho^{2-\alpha}}{\Gamma(\alpha-1)} |x - y| \int_a^b (b^\rho - \tau^\rho)^{\alpha-2} \tau^{\rho-1} d\tau \\ &\quad + \frac{3}{2} \frac{K |\lambda| \rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} |x - y| \int_a^t (t^\rho - \tau^\rho)^{\alpha-1} \tau^{\rho-1} d\tau \\ &\leq \frac{3 |\lambda| K \rho^{-\alpha}}{2} \left( \frac{1}{b^{\rho-1} - a^{\rho-1}} \right) \frac{(b^\rho - a^\rho)^\alpha}{\Gamma(\alpha)} |x - y| + \frac{3 |\lambda| K \rho^{-\alpha}}{2} \frac{(b^\rho - a^\rho)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} |x - y| \end{aligned}$$

Ce qui implique que :

$$\begin{aligned}\|Tx - Ty\| &\leq \frac{3|\lambda|K\rho^{-\alpha}}{2} \left[ \left( \frac{\lambda}{b^{\rho-1} - a^{\rho-1}} \right) \frac{(b^\rho - a^\rho)^\alpha}{\Gamma(\alpha)} + \frac{(b^\rho - a^\rho)^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \right] \|x - y\| \\ &\leq \omega \|x - y\|.\end{aligned}$$

Comme  $\omega < 1$ ,

Donc l'opérateur  $T$  est contractant, alors il existe une solution unique de  $(P)$  sur  $J$ .

## 2.2 Existence des solutions

Pour montrer l'existence des solutions du problème  $(P)$  en appliquant le théorème du point fixe de Krasnoselskii.

### Théorème 2.2.1

Supposons que  $(H)$  soit valable. Si :

$$\begin{aligned}\Omega &= \frac{3|\lambda|K\rho^{-\alpha}}{2} \left[ \left( \frac{\lambda}{b^{\rho-1} - a^{\rho-1}} \right) \frac{(b^\rho - a^\rho)^\alpha}{\Gamma(\alpha)} + \frac{(b^\rho - a^\rho)^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \right] \\ &< \frac{1}{2},\end{aligned}\tag{2.11}$$

alors il existe au moins une solution du problème  $(P)$  sur  $J$ .

### Démonstration

Soit la boule :  $B_{r_0} = \{x \in C(J, \mathbb{R}), \|x\| \leq r_0\}$ , avec  $r_0 \geq 2\mu\Omega$ , où  $\mu$  est définie dans le théorème 2.2.1. De plus, nous considérons les deux opérateurs  $T_1$  et  $T_2$  définies sur  $B_{r_0}$  par :

$$Tx(t) = T_1x(t) + T_2x(t).$$

Où

$$\begin{aligned}T_1x(t) &= \left( \frac{1}{b^{\rho-1} - a^{\rho-1}} \right) \left[ \left( \frac{b^\rho - a^\rho}{2\rho} \right) - \left( \frac{t^\rho - a^\rho}{\rho} \right) \right] \frac{\lambda\rho^{2-\alpha}}{\Gamma(\alpha - 1)} \int_a^b (b^\rho - \tau^\rho)^{\alpha-2} \tau^{\rho-1} f(\tau, x(\tau)) d\tau \\ &\quad - \frac{\lambda\rho^{1-\alpha}}{2\Gamma(\alpha)} \int_a^b (b^\rho - \tau^\rho)^{\alpha-1} \tau^{\rho-1} f(\tau, x(\tau)) d\tau,\end{aligned}$$

et

$$T_2x(t) = \frac{\lambda\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t^\rho - \tau^\rho)^{\alpha-1} \tau^{\rho-1} f(\tau, x(\tau)) d\tau.$$

Pour tout  $x \in C(J, \mathbb{R})$ , pour tout  $t \in J$ . La preuve sera divisée en plusieurs étapes comme suit :

**étape 1 :**

$T_1x + T_2y \in B_{r_0}$ , pour tout  $x, y \in B_{r_0}$ .

Pour  $x \in B_{r_0}$ , on applique les même étapes du (2.9), alors nous avons :

$$|f(\tau, x(\tau))| \leq Kr + \mu.$$

De même, pour  $y \in B_{r_0}$ , on obtient :

$$|f(\tau, y(\tau))| \leq Kr + \mu.$$

Maintenant, pour  $x, y \in B_{r_0}$  et  $t \in J$ , on obtient :

$$\begin{aligned} |T_1x(t) + T_2y(t)| &\leq |T_1x(t)| + |T_2y(t)| \\ &\leq \left( \frac{1}{b^{\rho-1} - a^{\rho-1}} \right) \left( \frac{3b^\rho - a^\rho}{2\rho} \right) \frac{|\lambda| \rho^{2-\alpha}}{\Gamma(\alpha-1)} \int_a^b (b^\rho - \tau^\rho)^{\alpha-2} \tau^{\rho-1} |f(\tau, x(\tau))| d\tau \\ &\quad + \frac{|\lambda| \rho^{1-\alpha}}{2\Gamma(\alpha)} \int_a^b (b^\rho - \tau^\rho)^{\alpha-1} \tau^{\rho-1} |f(\tau, x(\tau))| d\tau \\ &\quad + \frac{|\lambda| \rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t^\rho - \tau^\rho)^{\alpha-1} \tau^{\rho-1} |f(\tau, x(\tau))| d\tau, \\ &\leq \frac{3}{2} \left[ (Kr_0 + \mu) |\lambda| \rho^{-\alpha} \frac{(b^\rho - a^\rho)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \right] + \frac{3}{2} \left( \frac{1}{b^{\rho-1} + a^{\rho-1}} \right) \left[ \left( \frac{b^\rho - a^\rho}{2\rho} \right) + \left( \frac{b^\rho - a^\rho}{\rho} \right) \right] \\ &\quad \left[ (Kr_0 + \mu) |\lambda| \rho^{1-\alpha} \frac{(b^\rho - a^\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right] \\ &\leq \frac{3}{2} \left[ \left( \frac{1}{b^{\rho-1} - a^{\rho-1}} \right) \left( \frac{b^\rho - a^\rho}{\rho} \right) K |\lambda| \rho^{1-\alpha} \frac{(b^\rho - a^\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + K |\lambda| \rho^{-\alpha} \frac{(b^\rho - a^\rho)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \right] r_0 \\ &\quad + \frac{3}{2} \left[ \left( \frac{1}{b^{\rho-1} - a^{\rho-1}} \right) \left( \frac{b^\rho - a^\rho}{\rho} \right) \mu |\lambda| \rho^{1-\alpha} \frac{(b^\rho - a^\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \mu |\lambda| \rho^{-\alpha} \frac{(b^\rho - a^\rho)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \right]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{3}{2} \left[ \left( \frac{1}{b^{\rho-1} - a^{\rho-1}} \right) \frac{K |\lambda| \rho^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} (b^\rho - a^\rho)^\alpha + \frac{K |\lambda| \rho^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} (b^\rho - a^\rho)^\alpha \right] r_0 \\
&\quad + \frac{3}{2} \left[ \left( \frac{1}{b^{\rho-1} - a^{\rho-1}} \right) \frac{\mu |\lambda| \rho^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} (b^\rho - a^\rho)^\alpha + \frac{\mu |\lambda| \rho^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} (b^\rho - a^\rho)^\alpha \right]. \\
&\leq \frac{3K |\lambda| \rho^{-\alpha}}{2} \left[ \left( \frac{1}{b^{\rho-1} - a^{\rho-1}} \right) \frac{(b^\rho - a^\rho)^\alpha}{\Gamma(\alpha)} + \frac{(b^\rho - a^\rho)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \right] r_0 \\
&\quad + \frac{3K |\lambda| \rho^{-\alpha}}{2} \left[ \left( \frac{1}{b^{\rho-1} - a^{\rho-1}} \right) \frac{(b^\rho - a^\rho)^\alpha}{\Gamma(\alpha)} + \frac{(b^\rho - a^\rho)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \right].
\end{aligned}$$

Ce qui implique :

$$\| T_1 x(t) + T_2 y(t) \| \leq r_0. \quad (2.12)$$

Ceci prouve que  $T_1 x + T_2 y \in B_{r_0}$ , pour tout  $x, y \in B_{r_0}$ .

**étape 2 :**

$T_1$  est contractant sur  $B_{r_0}$ , puisque  $T$  est une contractant d'après le théorème 2.2.1.

**étape 3 :**

Nous allons prouver en trois étapes que l'opérateur  $T_2$  sur  $B_{r_0}$ . est complètement continu.

**Cas 1 :**

L'opérateur  $T_2$  est continu car la fonction  $f$  est bornée et continue.

**Cas 2 :**

Il est facile de prouver que

$$\| T_2 x \| \leq (K r_0 + \mu) |\lambda| \frac{\rho^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} (b^\rho - a^\rho)^\alpha < r_0,$$

En raison des définitions de  $\Omega$  et  $r_0$ , on vérifie que  $T_2$  est uniformément bornée sur  $B_{r_0}$ .

---

### Cas 3 :

Maintenant nous montrons que  $T_2$  transforme les ensembles bornée en ensembles équicontinues de  $C(J, \mathbb{R})$ , c'est-à-dire  $(T_2 B_{\varepsilon_0})$  est équicontinue. Nous estimons la dérivée de  $T_2 x(t)$ .

$$\begin{aligned} |(T_2 x)'(t)| &= \left| \frac{\lambda \rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha-1)} \int_a^b (t^\rho - a^\rho)^{\alpha-2} \tau^{\rho-1} f(\tau, x(\tau)) d\tau \right| \\ &\leq \frac{|\lambda| \rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha-1)} \int_a^b (t^\rho - a^\rho)^{\alpha-2} \tau^{\rho-1} |f(\tau, x(\tau))| d\tau \\ &\leq (Kr_0 + \mu) \frac{|\lambda| \rho^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} (b^\rho - a^\rho)^{\alpha-1} = M. \end{aligned}$$

Soient  $t_1, t_2 \in J$  avec  $t_1 < t_2$  et pour tout  $x \in B_{r_0}$  on a alors :

$$|T_2 x(t_1) - T_2 x(t_2)| = \int_{t_1}^{t_2} |(T_2 x)'(\tau)| d\tau \leq M(t_2 - t_1),$$

lorsque  $t_1 \rightarrow t_2$ , le côté droite de l'inégalité ci-dessus ne dépend pas  $t$  et tend vers 0. c'est pourquoi

$$|T_2 x(t_1) - T_2 x(t_2)| \rightarrow 0, \text{ implique } |t_2 - t_1| \rightarrow 0, t \in B_{r_0}$$

Donc  $T_2$  est équicontinu sur  $B_{r_0}$ . D'après l'application du théorème d'Arzela-Ascoli montre que  $T_2$  est relativement compact sur  $B_{r_0}$ . Par conséquent, toutes les hypothèses du théorème du point fixe de Krasnoselskii sont satisfait.

On déduit donc que le problème a au moins une solution sur  $J$ .

Pour montrer l'existence des solutions du problème (P) en appliquant le théorème du point fixe de Shaefer.

### Théorème 2.2.1

Supposons que (H) soit satisfaite. Si :

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{3|\lambda|K\rho^{-\alpha}}{2} \left[ \left( \frac{1}{b^{\rho-1} - a^{\rho-1}} \right) \frac{(b^\rho - a^\rho)^\alpha}{\Gamma(\alpha)} + \frac{(b^\rho - a^\rho)^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \right] \\ &< \frac{1}{2},\end{aligned}$$

alors il existe au moins une solution du problème (P) sur  $J$ .

### Lemme 2.2.1

Soit  $X$  un espace de Banach, supposons que  $T : X \rightarrow X$  est un opérateur continue. Si l'ensemble

$$\Omega = \{x \in X, x = \lambda Tx, 0 < \lambda < 1\},$$

est bornée, Alors  $T$  possédé au moins une point fixe sur  $X$ .

### Démonstration

Soit  $x_n \in X$  tell que  $x_n \rightarrow x$ , c-à-d ( $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_n - x\| \rightarrow 0$ ).

#### étape 1 :

Il faut montre que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|Tx_n(t) - Tx(t)\| \rightarrow 0$ , on a :

$$\begin{aligned}Tx_n(t) &= \frac{\lambda\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b (t^\rho - a^\rho)^{\alpha-1} \tau^{\rho-1} f(\tau, x_n(\tau)) d\tau - \frac{\lambda\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b (b^\rho - a^\rho)^{\alpha-1} \tau^{\rho-1} f(\tau, x_n(\tau)) d\tau \\ &\quad + \left( \frac{1}{b^{\rho-1} + a^{\rho-1}} \right) \left[ \left( \frac{b^\rho - a^\rho}{2\rho} \right) - \left( \frac{t^\rho - a^\rho}{\rho} \right) \right] \frac{\lambda\rho^{2-\alpha}}{\Gamma(\alpha - 1)} \int_a^b (b^\rho - \tau^\rho)^{\alpha-2} \tau^{\rho-1} f(\tau, x_n(\tau)) d\tau,\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}Tx(t) &= \frac{\lambda\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b (t^\rho - a^\rho)^{\alpha-1} \tau^{\rho-1} f(\tau, x(\tau)) d\tau - \frac{\lambda\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b (b^\rho - a^\rho)^{\alpha-1} \tau^{\rho-1} f(\tau, x(\tau)) d\tau \\ &\quad + \left( \frac{1}{b^{\rho-1} + a^{\rho-1}} \right) \left[ \left( \frac{b^\rho - a^\rho}{2\rho} \right) - \left( \frac{t^\rho - a^\rho}{\rho} \right) \right] \frac{\lambda\rho^{2-\alpha}}{\Gamma(\alpha - 1)} \int_a^b (b^\rho - \tau^\rho)^{\alpha-2} \tau^{\rho-1} f(\tau, x(\tau)) d\tau,\end{aligned}$$

Donc on obtient :

$$\begin{aligned}
|Tx_n(t) - Tx(t)| &\leq \frac{|\lambda| \rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b (t^\rho - a^\rho)^{\alpha-1} \tau^{\rho-1} |f(\tau, x_n(\tau)) - f(\tau, x(\tau))| d\tau \\
&\quad - \frac{|\lambda| \rho^{1-\alpha}}{2 \Gamma(\alpha)} \int_a^b (b^\rho - a^\rho)^{\alpha-1} \tau^{\rho-1} |f(\tau, x_n(\tau)) - f(\tau, x(\tau))| d\tau \\
&\quad + \left( \frac{1}{b^{\rho-1} + a^{\rho-1}} \right) \left[ \left( \frac{b^\rho - a^\rho}{2\rho} \right) + \left( \frac{t^\rho - a^\rho}{\rho} \right) \right] \\
&\quad \frac{|\lambda| \rho^{2-\alpha}}{\Gamma(\alpha-1)} \int_a^b (b^\rho - \tau^\rho)^{\alpha-2} \tau^{\rho-1} |f(\tau, x_n(\tau)) - f(\tau, x(\tau))| d\tau, \\
&\leq \frac{3}{2} \left[ \left( \frac{1}{b^{\rho-1} + a^{\rho-1}} \right) \frac{(b^\rho - a^\rho)^\alpha}{\Gamma(\alpha)} + \frac{(b^\rho - a^\rho)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \right] \|f(\tau, x_n(\tau)) - f(\tau, x(\tau))\|.
\end{aligned}$$

Comme  $f$  est une fonction bornée et continue alors ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|Tx_n(t) - Tx(t)\| \rightarrow 0.$$

Donc  $Tx_n(t) \rightarrow Tx(t)$  d'où  $T$  est continu.

## étape 2

Soit

$$B_r = \{x \in C([a, b]), \|x\| \leq r\}$$

pour tout  $x \in B_r$  et  $t \in [a, b]$ , alors :

$$\begin{aligned}
|Tx(t)| &\leq \sup_{t \in J} \left\{ \frac{|\lambda| \rho^{1-\alpha}}{2 \Gamma(\alpha)} \int_a^b (b^\rho - \tau^\rho)^{\alpha-1} \tau^{\rho-1} |f(\tau, x(\tau))| d\tau + \frac{|\lambda| \rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t^\rho - \tau^\rho)^{\alpha-1} \tau^{\rho-1} |f(\tau, x(\tau))| d\tau \right. \\
&\quad \left. + \left( \frac{1}{b^{\rho-1} + a^{\rho-1}} \right) \left[ \left( \frac{b^\rho - a^\rho}{2\rho} \right) + \left( \frac{t^\rho - a^\rho}{\rho} \right) \right] \frac{|\lambda| \rho^{2-\alpha}}{\Gamma(\alpha-1)} \int_a^b (b^\rho - \tau^\rho)^{\alpha-2} \tau^{\rho-1} |f(\tau, x(\tau))| d\tau \right\}. \\
&\leq (Kr + \mu) \frac{|\lambda| \rho^{1-\alpha}}{2 \Gamma(\alpha)} \int_a^b (b^\rho - \tau^\rho)^{\alpha-1} \tau^{\rho-1} d\tau + (Kr + \mu) \frac{|\lambda| \rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t^\rho - \tau^\rho)^{\alpha-1} \tau^{\rho-1} d\tau \\
&\quad + \left( \frac{1}{b^{\rho-1} + a^{\rho-1}} \right) \left[ \left( \frac{b^\rho - a^\rho}{2\rho} \right) + \left( \frac{t^\rho - a^\rho}{\rho} \right) \right] (Kr + \mu) \frac{|\lambda| \rho^{2-\alpha}}{\Gamma(\alpha-1)} \int_a^b (b^\rho - \tau^\rho)^{\alpha-2} \tau^{\rho-1} d\tau
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left( \frac{1}{b^{\rho-1} + a^{\rho-1}} \right) \left[ \left( \frac{b^\rho - a^\rho}{2\rho} \right) + \left( \frac{t^\rho - a^\rho}{\rho} \right) \right] \left[ (Kr + \mu) |\lambda| \rho^{1-\alpha} \frac{(b^\rho - a^\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right] \\
&\quad + \frac{3}{2} \left[ (K\varepsilon + \mu) |\lambda| \rho^{1-\alpha} \frac{(b^\rho - a^\rho)^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \right] \\
&\leq \frac{3K |\lambda| \rho^{-\alpha}}{2} \left[ \left( \frac{1}{b^{\rho-1} + a^{\rho-1}} \right) \frac{(b^\rho - a^\rho)^\alpha}{\Gamma(\alpha)} + \frac{(b^\rho - a^\rho)^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \right] r + \frac{3}{2} \left[ \frac{\mu |\lambda| \rho^{-2\alpha}}{b^{\rho-1} + a^{\rho-1}} \frac{(b^\rho - a^\rho)^{2\alpha}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha + 1)} \right],
\end{aligned}$$

$$= \omega r + \theta < r.$$

Donc  $\|Tx(t)\| < r < \infty$ . D'où  $T$  est bornée.

### étape 3

Soient  $t_1, t_2 \in [a, b]$ , tel que  $t_1 < t_2$  et  $x \in B_r$  alors :

$$\begin{aligned}
|Tx(t_2) - Tx(t_1)| &= \int_{t_1}^{t_2} |(Tx)'(\tau)| d\tau \leq M(t_2 - t_1) \\
|(Tx)'(t)| &= \left| \frac{\lambda \rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha - 1)} \int_a^b (t^\rho - a^\rho)^{\alpha-2} \tau^{\rho-1} f(\tau, x(\tau)) d\tau \right| \\
&\leq \frac{|\lambda| \rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha - 1)} \int_a^b (t^\rho - a^\rho)^{\alpha-2} \tau^{\rho-1} |f(\tau, x(\tau))| d\tau \\
&\leq (Kr + \mu) \frac{|\lambda| \rho^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} (b^\rho - a^\rho)^{\alpha-1} = M.
\end{aligned}$$

Ce qui donne

$$|Tx(t_2) - Tx(t_1)| = \int_{t_1}^{t_2} |(Tx)'(\tau)| d\tau \leq M(t_2 - t_1).$$

Lorsque  $t_1 \rightarrow t_2$ , le côté droite de l'inégalité ci-dessus ne dépend pas  $t$  et tend vers 0.

Donc

$$|Tx(t_1) - Tx(t_2)| \rightarrow 0, \quad \forall |t_2 - t_1| \rightarrow 0, \quad t \in B_r$$

D'où  $T$  est équicontinu.

#### étape 4

$\Omega = \{x \in X, x = \beta T x, 0 < \beta < 1\}$ , est bornée :

Soient  $x(t) \in \Omega$  et  $t \in J$ ,  $x(t) = \beta T x(t)$  alors,

$$\begin{aligned}
|x(t)| &= |\beta T(x(t))| \\
&\leq \sup_{t \in J} \left\{ \frac{|\lambda| \beta \rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b (t^\rho - a^\rho)^{\alpha-1} \tau^{\tau-1} |f(\tau, x(\tau))| d\tau + \frac{|\lambda| \beta \rho^{1-\alpha}}{2\Gamma(\alpha)} \int_a^b (b^\rho - a^\rho)^{\alpha-1} \tau^{\tau-1} |f(\tau, x(\tau))| d\tau \right. \\
&\quad \left. + \left( \frac{1}{b^{\rho-1} + a^{\rho-1}} \right) \left[ \left( \frac{b^\rho - a^\rho}{2\rho} \right) + \left( \frac{t^\rho - a^\rho}{\rho} \right) \right] \frac{\beta \lambda \rho^{2-\alpha}}{\Gamma(\alpha-1)} \int_a^b (b^\rho - \tau^\rho)^{\alpha-2} \tau^{\rho-1} |f(\tau, x(\tau))| d\tau \right. \\
&\leq \left( \frac{1}{b^{\rho-1} + a^{\rho-1}} \right) \left[ \left( \frac{b^\rho - a^\rho}{2\rho} \right) + \left( \frac{t^\rho - a^\rho}{\rho} \right) \right] \frac{\beta |\lambda| \rho^{2-\alpha}}{\Gamma(\alpha-1)} (Kr + \mu) \int_a^b (b^\rho - \tau^\rho)^{\alpha-2} \tau^{\rho-1} d\tau \\
&\quad + \frac{\beta |\lambda| \rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} (Kr + \mu) \int_a^t (t^\rho - a^\rho)^{\alpha-1} \tau^{\tau-1} d\tau + \frac{\beta |\lambda| \rho^{1-\alpha}}{2\Gamma(\alpha)} (Kr + \mu) \int_a^b (b^\rho - a^\rho)^{\alpha-1} \tau^{\tau-1} d\tau \\
&\leq \beta \left( \frac{1}{b^{\rho-1} + a^{\rho-1}} \right) \left[ \left( \frac{b^\rho - a^\rho}{2\rho} \right) + \left( \frac{t^\rho - a^\rho}{\rho} \right) \right] \cdot \left[ (Kr + \mu) |\lambda| \rho^{-\alpha} \frac{(b^\rho - a^\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right] \\
&\quad + \left[ \frac{3\beta}{2} (Kr + \mu) |\lambda| \rho^{-\alpha} \frac{(b^\rho - a^\rho)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \right] \\
&\leq \frac{3\beta K |\lambda| \rho^{-\alpha}}{2} \left[ \left( \frac{1}{b^{\rho-1} + a^{\rho-1}} \right) \frac{(b^\rho - a^\rho)^\alpha}{\Gamma(\alpha)} + \frac{(b^\rho - a^\rho)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \right] r + \left[ \frac{\beta |\lambda| \mu \rho^{2\alpha}}{b^{\rho-1} + a^{\rho-1}} + \frac{(b^\rho - a^\rho)^{2\alpha}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+1)} \right] r \\
&= \omega r + \theta \leq r
\end{aligned}$$

Donc

$$\|x(t)\| \leq r < \infty.$$

D'après le théorème de Schaefer  $T$  admet au moins une point fixe. Par conséquence, le problème (P) admet au moins une solution sur  $[a, b]$ .

## 2.3 Stabilité des Solutions

Dans cette section, on va étudier la stabilité des solutions du problème posé  $(P)$  :

$$(P) : \begin{cases} {}^{CK}D_{a^+}^{\alpha;\rho} x(t) = \lambda f(t, x(t)), & t \in J \text{ et } f \in C(J, \mathbb{R}). \\ x(a) + x(b) = 0, \\ x'(a) + x'(b) = 0. \end{cases}$$

Où  $1 < \alpha < 2$ ,  $\rho > 0$  et  $\lambda \in \mathbb{R}^*$

### Lemme 2.3

Soit  $\tilde{x} \in C(J, \mathbb{R})$  est une solution de l'inégalité (1.37). Alors  $x$  est une solution de l'équation inégalité intégrale suivante :

$$\left| \tilde{x}(t) - Z_{\tilde{x}} - \frac{\lambda \rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \tau^{\rho-1} (t^\rho - a^\rho)^{\alpha-1} f(t, \tilde{x}(\tau)) d\tau \right| \leq \eta \varepsilon,$$

où

$$\eta := \frac{3\lambda \rho^{-\alpha}}{2} \left[ \left( \frac{1}{b^{\rho-1} - a^{\rho-1}} \right) \frac{(b^\rho - a^\rho)^\alpha}{\Gamma(\alpha)} + \frac{(b^\rho - a^\rho)^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \right],$$

et

$$\begin{aligned} Z_{\tilde{x}} = & \left( \frac{1}{b^{\rho-1} + a^{\rho-1}} \right) \left[ \left( \frac{b^\rho - a^\rho}{2\rho} \right) - \left( \frac{t^\rho - a^\rho}{\rho} \right) \right] \frac{\lambda \rho^{2-\alpha}}{\Gamma(\alpha - 1)} \int_a^b \tau^{\rho-1} (b^\rho - a^\rho)^{\alpha-2} f(\tau, \tilde{x}(\tau)) d\tau \\ & - \frac{1}{2} \frac{\lambda \rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b \tau^{\rho-1} (b^\rho - a^\rho)^{\alpha-1} f(\tau, \tilde{x}(\tau)) d\tau. \end{aligned}$$

### Démonstration

D'après la remarque 1.4.4 et théorème 2.1.1, on obtient :

$$\begin{aligned} \tilde{x}(t) = & \left( \frac{1}{b^{\rho-1} + a^{\rho-1}} \right) \left[ \left( \frac{b^\rho - a^\rho}{2\rho} \right) - \left( \frac{t^\rho - a^\rho}{\rho} \right) \right] \frac{\lambda \rho^{2-\alpha}}{\Gamma(\alpha - 1)} \int_a^b \tau^{\rho-1} (b^\rho - a^\rho)^{\alpha-2} (f(t, \tilde{x}(\tau)) + h_{\tilde{x}}(\tau)) d\tau \\ & - \frac{1}{2} \frac{\lambda \rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b \tau^{\rho-1} (b^\rho - a^\rho)^{\alpha-1} (f(\tau, \tilde{x}(\tau)) + h_{\tilde{x}}(\tau)) d\tau \\ & + \frac{\lambda \rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \tau^{\rho-1} (t^\rho - \tau^\rho)^{\alpha-1} (f(\tau, \tilde{x}(\tau)) + h_{\tilde{x}}(\tau)) d\tau. \end{aligned}$$

il s'ensuite que :

$$\begin{aligned}
& \left| \tilde{x}(t) - Z_{\tilde{x}} - \frac{\lambda \rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \tau^{\rho-1} (t^\rho - a^\rho)^{\alpha-1} f(\tau, \tilde{x}(\tau)) d\tau \right| \\
& \leq \left| \left( \frac{1}{b^{\rho-1} + a^{\rho-1}} \right) \left[ \left( \frac{b^\rho - a^\rho}{2\rho} \right) - \left( \frac{t^\rho - a^\rho}{\rho} \right) \right] \frac{\lambda \rho^{2-\alpha}}{\Gamma(\alpha-1)} \int_a^b \tau^{\rho-1} (b^\rho - a^\rho)^{\alpha-2} (f(t, \tilde{x}(\tau)) + h_{\tilde{x}}(\tau)) d\tau \right. \\
& \quad - \frac{1}{2} \frac{\lambda \rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b \tau^{\rho-1} (b^\rho - a^\rho)^{\alpha-1} (f(\tau, \tilde{x}(\tau)) + h_{\tilde{x}}(\tau)) d\tau + \frac{\lambda \rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \tau^{\rho-1} (t^\rho - \tau^\rho)^{\alpha-1} (f(\tau, \tilde{x}(\tau)) + h_{\tilde{x}}(\tau)) d\tau \\
& \quad \left. - \left( \frac{1}{b^{\rho-1} + a^{\rho-1}} \right) \left[ \left( \frac{b^\rho - a^\rho}{2\rho} \right) - \left( \frac{t^\rho - a^\rho}{\rho} \right) \right] \frac{\lambda \rho^{2-\alpha}}{\Gamma(\alpha-1)} \int_a^b \tau^{\rho-1} (b^\rho - a^\rho)^{\alpha-2} f(\tau, \tilde{x}(\tau)) d\tau \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{2} \frac{\lambda \rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b \tau^{\rho-1} (b^\rho - a^\rho)^{\alpha-1} f(\tau, \tilde{x}(\tau)) d\tau - \frac{\lambda \rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \tau^{\rho-1} (t^\rho - \tau^\rho)^{\alpha-1} (f(\tau, \tilde{x}(\tau)) + h_{\tilde{x}}(\tau)) d\tau \right. \\
& \leq \left( \frac{1}{b^{\rho-1} + a^{\rho-1}} \right) \left( \frac{3b^\rho - a^\rho}{2\rho} \right) \frac{\lambda \rho^{2-\alpha}}{\Gamma(\alpha-1)} \int_a^b \tau^{\rho-1} (b^\rho - a^\rho)^{\alpha-2} |h_{\tilde{x}}(\tau)| d\tau \\
& \quad + \frac{\lambda \rho^{1-\alpha}}{2\Gamma(\alpha)} \int_a^b \tau^{\rho-1} (b^\rho - a^\rho)^{\alpha-1} |h_{\tilde{x}}(\tau)| d\tau + \frac{\lambda \rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \tau^{\rho-1} (t^\rho - \tau^\rho)^{\alpha-1} |h_{\tilde{x}}(\tau)| d\tau \\
& \leq \frac{3\varepsilon}{2} \left( \frac{1}{b^{\rho-1} + a^{\rho-1}} \right) \left( \frac{b^\rho - a^\rho}{\rho} \right) \frac{\lambda \rho^{2-\alpha}}{\Gamma(\alpha-1)} \int_a^b \tau^{\rho-1} (b^\rho - a^\rho)^{\alpha-2} d\tau \\
& \quad + \frac{|\lambda| \varepsilon \rho^{1-\alpha}}{2\Gamma(\alpha)} \int_a^b \tau^{\rho-1} (b^\rho - a^\rho)^{\alpha-1} d\tau + \frac{|\lambda| \varepsilon \rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \tau^{\rho-1} (t^\rho - \tau^\rho)^{\alpha-1} d\tau \\
& \leq \frac{3}{2} \left[ \left( \frac{1}{b^{\rho-1} + a^{\rho-1}} \right) \frac{|\lambda| \rho^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} (b^\rho - a^\rho)^\alpha + \frac{|\lambda| \rho^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} (b^\rho - a^\rho)^\alpha \right] \varepsilon \\
& \leq \frac{3|\lambda| \rho^{-\alpha}}{2} \left[ \left( \frac{1}{b^{\rho-1} + a^{\rho-1}} \right) \frac{(b^\rho - a^\rho)^\alpha}{\Gamma(\alpha)} + \frac{(b^\rho - a^\rho)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \right] \varepsilon \\
& \leq \eta \varepsilon.
\end{aligned}$$

### Théorème 2.2.2

Supposons que les hypothèse (H) du théorème 2.1.1 sont satisfaites. Alors le problème (P) est stable selon Ulam-Hyers.

### Démonstration

Soit  $\tilde{x}(t) \in C(J, \mathbb{R})$  une fonction qui satisfait l'inégalité (1.37),  $\varepsilon > 0$  et  $\tilde{x} \in C(J, \mathbb{R})$  soit l'unique solution de l'équation différentielle fractionnaire suivante :

$${}^{CK}D_{a^+}^{\alpha; \rho} x(t) = \lambda f(t, x(t)), \quad t \in J, \quad (2.14)$$

avec les conditions

$$\begin{cases} x(a) = \tilde{x}(a), & x(b) = \tilde{x}(b), \\ x'(a) = \tilde{x}'(a), & x'(b) = \tilde{x}'(b), \end{cases}$$

où  $1 < \alpha < 2$ . En utilisant le lemme 2.1 nous pouvons facilement voir que  $x(\cdot)$  satisfait à l'équation intégrale suivante :

$$x(t) = Z_x + \frac{\lambda \rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \tau^{\rho-1} (t^\rho - \tau^\rho)^{\alpha-1} f(\tau, x(\tau)) d\tau,$$

où

$$\begin{aligned} Z_x &= \left( \frac{1}{b^{\rho-1} - a^{\rho-1}} \right) \left[ \left( \frac{b^\rho - a^\rho}{2\rho} \right) - \left( \frac{t^\rho - a^\rho}{\rho} \right) \right] \frac{\lambda \rho^{2-\alpha}}{\Gamma(\alpha-1)} \int_a^b (b^\rho - \tau^\rho)^{\alpha-2} \tau^{\rho-1} f(\tau, x(\tau)) d\tau \\ &\quad - \frac{\lambda \rho^{1-\alpha}}{2 \Gamma(\alpha)} \int_a^b (b^\rho - \tau^\rho)^{\alpha-1} \tau^{\rho-1} f(\tau, x(\tau)) d\tau. \end{aligned}$$

En utilisant le lemme 2.3, on obtient

$$\tilde{x}(t) - Z_{\tilde{x}} - \frac{\lambda \rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \tau^{\rho-1} (t^\rho - \tau^\rho)^{\alpha-1} f(\tau, x(\tau)) d\tau \leq \eta \varepsilon. \quad (2.16)$$

D'après les conditions aux limites de (2.15), on voit facilement que  $|Z_x - Z_x| \rightarrow 0$ .

En effet, utilisons (H) on déduit que

$$\begin{aligned} |Z_{\tilde{x}} - Z_x| &= \left| \left( \frac{1}{b^{\rho-1} - a^{\rho-1}} \right) \left[ \left( \frac{b^\rho - a^\rho}{2\rho} \right) - \left( \frac{t^\rho - a^\rho}{\rho} \right) \right] \frac{\lambda \rho^{2-\alpha}}{\Gamma(\alpha-1)} \int_a^b (b^\rho - \tau^\rho)^{\alpha-2} \tau^{\rho-1} f(\tau, \tilde{x}(\tau)) d\tau \right. \\ &\quad \left. - \frac{\lambda \rho^{1-\alpha}}{2 \Gamma(\alpha)} \int_a^b (b^\rho - \tau^\rho)^{\alpha-1} \tau^{\rho-1} f(\tau, \tilde{x}(\tau)) d\tau \right. \\ &\quad \left. - \left( \frac{1}{b^{\rho-1} - a^{\rho-1}} \right) \left[ \left( \frac{b^\rho - a^\rho}{2\rho} \right) - \left( \frac{t^\rho - a^\rho}{\rho} \right) \right] \frac{\lambda \rho^{2-\alpha}}{\Gamma(\alpha-1)} \int_a^b (b^\rho - \tau^\rho)^{\alpha-2} \tau^{\rho-1} f(\tau, x(\tau)) d\tau \right. \\ &\quad \left. - \frac{\lambda \rho^{1-\alpha}}{2 \Gamma(\alpha)} \int_a^b (b^\rho - \tau^\rho)^{\alpha-1} \tau^{\rho-1} f(\tau, x(\tau)) d\tau \right| \\ &\leq \left( \frac{1}{b^{\rho-1} + a^{\rho-1}} \right) \left[ \left( \frac{b^\rho - a^\rho}{2\rho} \right) + \left( \frac{t^\rho - a^\rho}{\rho} \right) \right] \frac{|\lambda| \rho^{2-\alpha}}{\Gamma(\alpha-1)} \int_a^b (b^\rho - \tau^\rho)^{\alpha-2} \tau^{\rho-1} |f(\tau, \tilde{x}(\tau))| d\tau \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\lambda \rho^{1-\alpha}}{2 \Gamma(\alpha)} \int_a^b (b^\rho - \tau^\rho)^{\alpha-1} \tau^{\rho-1} |f(\tau, \tilde{x}(\tau))| d\tau + \frac{\lambda \rho^{1-\alpha}}{2 \Gamma(\alpha)} \int_a^b (b^\rho - \tau^\rho)^{\alpha-1} \tau^{\rho-1} |f(\tau, x(\tau))| d\tau \\
& + \left( \frac{1}{b^{\rho-1} + a^{\rho-1}} \right) \left[ \left( \frac{b^\rho - a^\rho}{2\rho} \right) + \left( \frac{t^\rho - a^\rho}{\rho} \right) \right] \frac{|\lambda| \rho^{2-\alpha}}{\Gamma(\alpha-1)} \int_a^b (b^\rho - \tau^\rho)^{\alpha-2} \tau^{\rho-1} |f(\tau, x(\tau))| d\tau \\
& \leq \left( \frac{1}{b^{\rho-1} + a^{\rho-1}} \right) \left[ \left( \frac{b^\rho - a^\rho}{2\rho} \right) + \left( \frac{t^\rho - a^\rho}{\rho} \right) \right] \frac{|\lambda| \rho^{2-\alpha}}{\Gamma(\alpha-1)} \int_a^b (b^\rho - \tau^\rho)^{\alpha-2} \tau^{\rho-1} |f(\tau, \tilde{x}(\tau)) - f(\tau, x(\tau))| d\tau \\
& \quad + \frac{\lambda \rho^{1-\alpha}}{2 \Gamma(\alpha)} \int_a^b (b^\rho - \tau^\rho)^{\alpha-1} \tau^{\rho-1} |f(\tau, x(\tau)) - f(\tau, x(\tau))| d\tau \\
& \leq \frac{3}{2} \left( \frac{1}{b^{\rho-1} - a^{\rho-1}} \right) \left( \frac{b^\rho - a^\rho}{2\rho} \right) I_{a^+}^{\alpha-1; \rho} |f(b, \tilde{x}(b)) - f(b, x(b))| + \frac{1}{2} I_{a^+}^{\alpha; \rho} |f(b, \tilde{x}(b)) - f(b, x(b))|.
\end{aligned}$$

D'après l'inégalité suivante :

$$|f(b, \tilde{x}(b)) - f(b, x(b))| \leq k |\tilde{x}(b) - x(b)|, \quad (2.17)$$

et (2.15), on obtient  $\tilde{x}(b) - x(b) = 0$ .

Ce qui implique que,

$$\begin{aligned}
|Z_{\tilde{x}} - Z_x| & \leq \frac{3}{2} \left( \frac{1}{b^{\rho-1} - a^{\rho-1}} \right) \left( \frac{b^\rho - a^\rho}{2\rho} \right) I_{a^+}^{\alpha-1; \rho} |\tilde{x}(b) - x(b)| + \frac{k}{2(1-k)} I_{a^+}^{\alpha; \rho} |\tilde{x}(b) - x(b)| \\
& \longrightarrow 0.
\end{aligned}$$

Donc

$$x(t) = Z_{\tilde{x}} + \frac{\lambda \rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \tau^{\rho-1} (t^\rho - \tau^\rho)^{\alpha-1} f(\tau, x(\tau)) d\tau,$$

et d'après (2.16), (2.17) et (H), on obtient :

$$\begin{aligned}
|\tilde{x}(t) - x(t)| & \leq \left| \tilde{x}(t) - Z_{\tilde{x}} - \frac{\lambda \rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \tau^{\rho-1} (t^\rho - \tau^\rho)^{\alpha-1} f(\tau, \tilde{x}(\tau)) d\tau \right| \\
& \quad + \frac{|\lambda| \rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \tau^{\rho-1} (t^\rho - \tau^\rho)^{\alpha-1} |f(\tau, \tilde{x}(\tau)) - f(\tau, x(\tau))| d\tau \\
& \leq \eta \varepsilon + \frac{K |\lambda| \rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \tau^{\rho-1} (t^\rho - \tau^\rho)^{\alpha-1} |\tilde{x}(\tau) - x(\tau)| d\tau.
\end{aligned}$$

En appliquant le lemme 1.3.8 et la remarque 1.3.1, on trouve :

$$\begin{aligned}
|\tilde{x}(t) - x(t)| &\leq \eta\varepsilon + \int_a^t \left[ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|\lambda| \rho^{1-i\alpha} (K\rho^{1-\alpha})^i}{\Gamma(i\alpha)} \tau^{\rho-1} (t^\rho - \tau^\rho)^{i\alpha-1} \eta\varepsilon \right] d\tau \\
&\leq \frac{3}{2} \left[ \left( \frac{1}{b^{\rho-1} + a^{\rho-1}} \right) \left( \frac{b^\rho - a^\rho}{\rho} \right) \frac{\lambda \rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} (b^\rho - a^\rho)^{\alpha-1} + \frac{|\lambda| \rho^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} (b^\rho - a^\rho)^\alpha \right] \varepsilon \\
&\quad \times E_\alpha \left( K \left( \frac{b^\rho - a^\rho}{\rho} \right)^\alpha \right). \\
&\leq \frac{3|\lambda| \rho^{-\alpha}}{2} \left[ \left( \frac{1}{b^{\rho-1} + a^{\rho-1}} \right) \frac{(b^\rho - a^\rho)^\alpha}{\Gamma(\alpha)} + \frac{(b^\rho - a^\rho)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \right] \varepsilon \times E_\alpha \left( K \left( \frac{b^\rho - a^\rho}{\rho} \right)^\alpha \right).
\end{aligned}$$

Posons

$$L_f = \frac{3|\lambda| \rho^{-\alpha}}{2} \left[ \left( \frac{1}{b^{\rho-1} + a^{\rho-1}} \right) \frac{(b^\rho - a^\rho)^\alpha}{\Gamma(\alpha)} + \frac{(b^\rho - a^\rho)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \right] \times E_\alpha \left( K \left( \frac{b^\rho - a^\rho}{\rho} \right)^\alpha \right).$$

Par conséconce :

$$|\tilde{x}(t) - x(t)| \leq L_f \varepsilon. \quad (2.18)$$

Ce qui montre que le problème ( $P$ ) est Ulam-Hyres stable.

## Corollaire

Si l'hypothèse du théorème 2.1.1 est vérifié . Soit la fonction définie par :

$$\varphi : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

tel que  $\varphi(0) = 0$ .

Alors le problème ( $P$ ) est stable Ulam-Hyres généralisé.

## Preuve

D'après le théorème 2.2.2, on notant  $L_f \varepsilon = \varphi(\varepsilon)$  et  $\varphi(0) = 0$ , on obtient :

$$|\tilde{x}(t) - x(t)| \leq \varphi(\varepsilon)$$

## Exemple 1

On considère le problème suivante :

$$(1) : \begin{cases} {}^{CK}D_{0^+}^{\frac{3}{2}; \frac{1}{2}} x(t) = \lambda \left[ \frac{1}{10} e^{\sqrt{t+1}+3} + \frac{1}{11} \frac{4+3|x(t)|}{e^{3-t}} \right], & t \in [0, 1]. \\ x(a) + x(b) = 0, \\ x'(a) + x'(b) = 0. \end{cases}$$

on prends  $f(t, x) = \lambda \left[ \frac{1}{10} e^{\sqrt{t+1}+3} + \frac{1}{11} \frac{4+3|x(t)|}{e^{3-t}} \right]$ , telles que  $t \in [0, 1]$  et  $x \in \mathbb{R}^+$ . Avec  $\alpha = \frac{3}{2}$ ,  $\rho = \frac{1}{2}$  et  $b = 1$ .

Evidemment, la fonction  $f \in C([0, 1])$ . Pour tout  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$  et  $t \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} |f(t, x_1) - f(t, x_2)| &= |\lambda| \left| \frac{1}{10} e^{\sqrt{t+1}+3} + \frac{1}{11} \frac{4+3|x(t)|}{e^{3-t}} - \frac{1}{10} e^{\sqrt{t+1}+3} - \frac{1}{11} \frac{4+3|x(t)|}{e^{3-t}} \right| \\ &= |\lambda| \left| \frac{1}{11} \frac{4+3|x(t)|}{e^{3-t}} - \frac{1}{11} \frac{4+3|x(t)|}{e^{3-t}} \right| \\ &\leq |\lambda| \frac{1}{11} \left| \frac{4+3|x(t)|}{e^{3-t}} - \frac{4+3|x(t)|}{e^{3-t}} \right| \\ &\leq \frac{3}{11e^2} |\lambda| |x_1 - x_2|. \end{aligned}$$

Donc l'hypothèse (H) est satisfaite avec  $K = \frac{3}{11e^2}$ .

Nous pouvons vérifié que :

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{3|\lambda|K\rho^{-\alpha}}{2} \left[ \left( \frac{1}{b^{\rho-1} - a^{\rho-1}} \right) \frac{(b^\rho - a^\rho)^\alpha}{\Gamma(\alpha)} + \frac{(b^\rho - a^\rho)^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \right] \\ &= \frac{3|\lambda| \frac{3}{11e^2} \left( \frac{1}{2} \right)^{-\frac{3}{2}}}{2} \left[ \frac{1}{\Gamma(\frac{3}{2})} + \frac{1}{\Gamma(\frac{3}{2} + 1)} \right] < 1. \end{aligned}$$

Telles que :  $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$  et  $\Gamma\left(\frac{3}{2}\pi\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$ ,

implique :

$$\lambda < \frac{11e^2}{9} \times \frac{1}{1.31 \times 2.82},$$

pour  $\lambda \in ] - 2.4, 2.4[$ , alors on obtient :

$$\omega \approx 0.91 < 1,$$

et comme l'hypothèses du théorème 2.1.1 est satisfaite.

Alors, le problème (P) a une solution unique.

## Exemple 2

On considère le problème suivant :

$$(2) : \begin{cases} {}^{CK}D_{0^+}^{\frac{3}{2}; \frac{1}{2}} x(t) = \lambda \frac{1}{e\sqrt{t}} |x(t)|, & t \in [0, 1]. \\ x(a) + x(b) = 0, \\ x'(a) + x'(b) = 0. \end{cases}$$

on prends  $f(t, x) = \lambda \frac{1}{e\sqrt{t}} |x(t)|$ , telles que  $t \in [0, 1]$  et  $x \in \mathbb{R}^+$ . Avec  $\alpha = \frac{3}{2}$ ,  $\rho = \frac{1}{2}$  et  $b = 1$ .

Maintenant, Pour tout  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$  et  $t \in [0, 1]$ , on a :

$$\begin{aligned} |f(t, x_1) - f(t, x_2)| &= \left| \lambda \left| \frac{1}{e\sqrt{t}} |x_1(t)| - \frac{1}{e\sqrt{t}} |x_2(t)| \right| \right| \\ &= \left| \lambda \left| \frac{1}{e\sqrt{t}} |x_1 - x_2| \right| \right| \\ &= |\lambda| |x_1 - x_2|. \end{aligned}$$

Donc l'hypothèse (H) est satisfaite avec  $K = 1$ . Nous pouvons vérifié que :

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{3 |\lambda| \rho^{-\alpha}}{2} \left[ \left( \frac{1}{b^{\rho-1} - a^{\rho-1}} \right) \frac{(b^\rho - a^\rho)^\alpha}{\Gamma(\alpha)} + \frac{(b^\rho - a^\rho)^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \right] \\ &= \frac{3 |\lambda|}{2} \left[ \frac{1}{\Gamma(\frac{3}{2})} + \frac{1}{\Gamma(\frac{3}{2} + 1)} \right] < 1. \end{aligned}$$

Telles que :  $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$  et  $\Gamma\left(\frac{3}{2} + 1\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$ ,

implique :

$$\lambda < \frac{2}{3 \times (2.82)} \times \frac{2}{\pi}.$$

Alors, pour  $\lambda \in ]-0.15, 0.15[$ , on obtient :

$$\omega \approx 0.68 < 1.$$

Par le théorème 2.1.1 le problème a une solution unique.

Nous pouvons voir que l'hypothèse du théorème 2.2.2 est satisfaite.

Par conséquent, le problème proposé (2) est stable selon Ulam-Hyers, où Ulam-Hyers généralisé

D'après le théorème 2.2.2, pour  $\varepsilon > 0$ ,  $\tilde{x} \in C([0, 1], \mathbb{R})$  vérifie l'inégalité suivant :

$$\left| {}^{CK}D_{0^+}^{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}} x(t) - \lambda \left[ \frac{1}{5} e^{\sqrt{t+1}+3} + \frac{1}{6} \frac{2+3|x(t)|}{e^{3-t}} \right] \right| \leq \varepsilon, \quad t \in [0, 1].$$

Il existe une solution  $x \in C([0, 1], \mathbb{R})$  pour le problème (1) tel que

$$|x(t) - \tilde{x}(t)| \leq L_f \varepsilon, \quad t \in [0, 1]$$

où

$$\begin{aligned} L_f &= \frac{3|\lambda|\rho^{-\alpha}}{2} \left[ \left( \frac{1}{b^{\rho-1} + a^{\rho-1}} \right) \frac{(b^\rho - a^\rho)^\alpha}{\Gamma(\alpha)} + \frac{(b^\rho - a^\rho)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \right] \times E_\alpha \left( K \left( \frac{b^\rho - a^\rho}{\rho} \right)^\alpha \right) \\ &\leq \frac{3|\frac{1}{4}| \left( \frac{1}{2} \right)^{-\frac{3}{2}}}{2} \left[ \frac{1}{\Gamma(\frac{3}{2})} + \frac{1}{\Gamma(\frac{3}{2}+1)} \right] \times E_\alpha \left( \left( \frac{b^\rho - a^\rho}{\rho} \right)^\alpha \right), \end{aligned}$$

et comme

$$\begin{aligned} E_\alpha \left( \frac{b^\rho - a^\rho}{\rho} \right)^\alpha &= \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\left( \frac{b^\rho - a^\rho}{\rho} \right)^{i\alpha}}{\Gamma(i\alpha + 1)} = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{2^{\frac{3}{2}i}}{\Gamma(\frac{3}{2}i + 1)} \\ &= E_{\frac{3}{2}}(2)^{\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

Alors :

$$L_f = \frac{3|\frac{1}{4}| \left( \frac{1}{2} \right)^{-\frac{3}{2}}}{2} \left[ \frac{1}{\Gamma(\frac{3}{2})} + \frac{1}{\Gamma(\frac{3}{2}+1)} \right] \times E_{\frac{3}{2}}(2)^{\frac{3}{2}}.$$

De plus, si nous mettons  $L_f \varepsilon = \varphi(\varepsilon)$ , et  $\varphi(0) = 0$ , alors

$$|x(t) - \tilde{x}(t)| \leq \varphi(\varepsilon), \quad t \in [0, 1].$$

- [1] B.Basti, Y. Arioua and N.Benhamidouche. Existence and Uniqueness of Solutions for Nonlinear Katugampola Fractional Differential Equations , J. Math. Appl. 42 (2019), 3561.
- [2] B.Basti, Y. Arioua and N. Benhamidouche. Existence results for nonlinear Katugampola fractional differential equations with an integral condition.
- [3] M. Benchohra and S. Bouriah. Existence and stability results for nonlinear boundary value problem for implicit differential equations of fractional order, Moroccan Journal of Pure and Applied Analysis, 1(1) (2015) 22-37.
- [4] M. A. Darwish and K. Sadarangani, Existence of solutions for hybrid fractional pantograph equations, Appl. Anal. Discrete Math., 9 (2015), 150-167.
- [5] A. Granas and J. Dugundji. Fixed point theory, New York. Springer-Verlag. 2003 .
- [6] F.Jarada, T.Abdeljawadb. A modified Laplace transform for certain generalized fractional operators ,Nonlinear Analysis 1 (2018) No. 2, 88â€“98
- [7] F. Jarad, T. Abdeljawad and D. Baleanu. Caputo-type modification of the Hadamard fractional derivatives, Adv. Differ. Equ. 2012, 142(2012).
- [8] U. N. Katugampola. A new approach to generalized fractional derivatives, Bulletin of Mathematical Analysis and Applications, 6 (2014) 1-15.
- [9] U.N. Katugampola. New approach to a generalized fractional integral, Applied Mathematics and Computation, 218 (3) (2011) 860-865. 54

- 
- [10] Kilbas, H.M. Srivastava and J.J.Trujillo. Theory and applications of fractional differential equations, North-Holland Mathematics Studies., 204. Elsevier Science B. V. Amsterdam. (2006).
- [11] I.A. Rus, Ulam stabilities of ordinary differential equations in a Banach space, Carpathian Journal of Mathematics, 26 (2010), 103-107.
- [12] R. Smart. Fixed point theorems. Cambridge Uni.Press. Cambridge 1974.
- [13] J.V.C. Sousa and E.C. Oliveira. A Gronwall inequality and the Cauchy-type problem by means of -Hilfer operator, arXiv preprint arXiv :1709.03634, (2017).