

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de L'enseignement Supérieur et de la
Recherche Scientifique



Université Djilali Bounâama-Khemis Miliana
FACULTÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE

Mémoire

Pour obtenir : Le diplôme de master en mathématiques
Spécialité : Analyse Mathématique et Applications

Thème

Sur la stabilité de la poutre de Von Kármán

Présenté par

BOUDANI Ahlam

Membres du jury :

Présidente	L. DJOUAMAI	M.C.B	Université Djilali BOUNAAMA.
Examineur 1	M. KARRAS	M.C.A	Université Djilali BOUNAAMA.
Examineur 2	M. BOUDERBALA	M.C.A	Université Djilali BOUNAAMA.
Encadrant	M. HOUASNI	M.C.A	Université Djilali BOUNAAMA.

Année Universitaire : 2022/2023

Table des matières

Introduction	5
Introduction générale	5
I Notions de Base	8
I.1 Quelques espaces fractionnels	8
I.1.1 Espace de Banach	8
I.1.1 Les espaces L^p	8
I.1.1 Espace de Hilbert	9
I.2 Espaces de Sobolev	9
I.2.2 Espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$	10
I.2.2 Espace de Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega)$	10
I.3 Rappel de quelques inégalités	11
I.4 Semi-groupes des opérateurs fortement continus	12
I.5 Existence et unicité de la solution	13
I.6 Concepts de stabilité	15
I.6.6 La stabilité au sens de Lyapunov	16
I.6.6 Fonction de Lyapunov	17
II Stabilité exponentielle d'une poutre de von Kármán avec retard	18
II.1 Préliminaires	18
II.2 L'existence et l'unicité de la solution	21
II.3 Décroissance exponentielle	25

Resumé

Dans ce travail, nous étudions la stabilité de la solution d'un système de von Kármán, nous étudions également l'existence et l'unicité de la solution en utilisant la théorie des semi-groupes, et pour sa stabilité nous utilisons la technique de multiplicateur avec la méthode de l'énergie.

mots-clé : Système de Von Kármán, décroissance exponentielle, effet thermique, semi-groupes.

Abstract

In this work, we study the stability of the solution of a Von Karmán system, we establish the existence and the uniqueness of the solution by using the semigroups theory, and for its stability we use the technique of multiplier with the energy method.

keywords : Von Kármán system, exponential decay, thermal effect, semi-groups.

Remerciements

Au terme de ce travail, nous remercions Dieu d'abord et avant tout de nous avoir éclairés et de nous avoir ouvert les débouchés du savoir et de nous avoir donné le courage et la volonté de bien faire ce travail, et nous remercions mes parents de m'avoir soutenu dans le chemin de ma études. Nous tenons à exprimer notre gratitude et nos sincères remerciements à notre promoteur : Dr. **M. HOUASNI** pour son aide et sa patience ainsi que pour sa gentillesse, je remercie également les membres du jury : Dr. **L. DJOUAMAI** , Dr. **M. KARRAS** et Dr. **M. BOUDERBALA** . Nous remercions également tous les enseignants du département MI. Nous remercions tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail Merci à tous.

Notations

Ω	:= Un ouvert de \mathbb{R}^n .
\mathbb{K}	:= Le corps des nombres réels ou complexes.
\mathbb{R}	:= L'ensemble des nombres réels.
$L^p(\Omega)$:= L'espace de Lebesgue, $1 \leq p \leq \infty$.
$C^k(\Omega)$:= Fonctions k fois dérivable et la dérivé d'ordre k est continue.
$W^{m,p}(\Omega)$:= L'espace de Sobolev, $1 \leq p \leq \infty$.
$W_0^{m,p}(\Omega)$:= La fermeture de $C_c^\infty(\Omega)$ dans $W^{m,p}(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$.
$\mathbb{H}^m(\Omega)$:= $W^{m,2}(\Omega)$.
$D(\mathcal{A})$:= Domaine de l'opérateur \mathcal{A} .
\mathbb{H}	:= L'espace de Hilbert.
$\langle \cdot, \cdot \rangle, (\cdot, \cdot)$:= Le produit scalaire.
$\ \cdot\ $:= Norme.
$D^\alpha \varphi$:= La dérivée partielle par rapport au multi-indice α .
u_t	:= $\frac{\partial u}{\partial t}$ La dérivée de u par rapport à t .
u_{tt}	:= $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ La dérivée d'ordre 2 de u par rapport à t .
u_x	:= $\frac{\partial u}{\partial x}$ La dérivée de u par rapport à x .
u_{xx}	:= $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ La dérivée d'ordre 2 de u par rapport à x .
u_{xt}	:= $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}$ La dérivée d'ordre 2 de u par rapport à x par rapport à t .
$\mathcal{D}(\Omega)$:= l'espace des fonctions indéfiniment différentiables avec support compact contenu dans Ω ; muni de la topologie de limite inductive de L. Schwartz.
$L^\infty(\Omega)$:= l'espace des(classes) fonctions essentiellement bornées.
Γ	:= la frontière de l'ouvert Ω supposée régulière.
$\Sigma_T = \Gamma \times]0, T[$:= la frontière du cylindre ouvert $Q_T = \Omega \times]0, T[$
u', u''	:= les dérivations première et seconde de u par rapport au temps.

Introduction *i.*

L'analyse qualitative des systèmes dynamiques introduite par H. Poincaré à la fin du dix-neuvième siècle [8] a donné naissance au domaine fructueux de la théorie des systèmes dynamiques. Avec toutes les implications et applications profondes que nous avons aujourd'hui, y compris, entre autres, la théorie des systèmes et du contrôle. Avant Poincaré, les équations différentielles étaient principalement considérées comme des équations à résoudre, au même titre que les équations algébriques et la théorie du contrôle. Poincaré a eu la brillante idée d'essayer d'étudier des équations différentielles de manière qualitative, ce qui signifie essentiellement que trouver des solutions n'est pas l'objectif plus, mais à la place, nous nous concentrons sur l'établissement de certaines propriétés des solutions. Ce point de vue est particulièrement pertinent car de nombreuses équations différentielles n'admettent pas de solutions de forme fermée et ne peuvent être résolues que numériquement. Dans la même veine que les idées de Poincaré, A.M. Lyapounov a développé la théorie de la stabilité des systèmes dynamiques au cours de sa thèse de doctorat [5], sous la direction de P. Chebyshev, la stabilité est une propriété fondamentale des systèmes dynamiques ayant des conséquences profondes dans les sciences et l'ingénierie. La stabilité signifie essentiellement que solutions d'un système dynamique commençant près d'un point d'équilibre (qui est un point de repos du système), restent proches de ce point d'équilibre. Un exemple typique est celui du pendule exemple. Les pendules à tige rigide admettent deux points d'équilibre, l'un lorsque la tige est verticale et la masse en bas, l'autre lorsque la masse est en haut. Considérons le premier point d'équilibre et supposons qu'il n'y a pas de frottement. Une petite poussée à partir de cette position de repos entraînera des oscillations soutenues d'amplitude limitée autour du point d'équilibre. Ce point d'équilibre est donc stable. Un point d'équilibre est d'ailleurs dit asymptotiquement stable s'il est stable et si les trajectoires commençant à proximité de ce point convergent vers lui.

En reprenant l'exemple du pendule et en ajoutant le frottement au problème, on obtient des oscillations amorties autour du point d'équilibre. Finalement, le pendule cessera d'osciller et reviendra à sa position de repos. Ce point d'équilibre est donc asymptotiquement stable. Par opposition aux points d'équilibre stables, instables sont des positions de repos à partir desquelles des perturbations arbitrairement petites seront amplifiées, poussant ainsi le système dynamique à s'en éloigner. Une caractéristique fondamentale et attrayante des résultats de Lyapunov est que, dans le même esprit que les idées de Poincaré, les propriétés des trajectoires dans le voisinage d'un point d'équilibre peuvent être évaluées sans même calculer les solutions de l'équation du système dynamique. Cette opération peut être réalisée à l'aide de fonctions potentielles, aujourd'hui appelées fonctions de Lyapunov. Ces

fonctions constituent les pierres angulaires de la puissante théorie de la stabilité, également appelée théorie de la stabilité de Lyapounov ou encore théorie de Lyapounov.

Cette théorie a été largement acceptée par les théoriciens des systèmes et du contrôle comme un point de départ fondamental pour l'analyse et le contrôle des systèmes dynamiques. Chaque fois que les systèmes de contrôle sont concernés, la stabilité est l'une des propriétés les plus importantes qu'un système de contrôle devrait avoir posséder. Pour assurer la stabilité asymptotique du système en boucle fermée est un moyen efficace d'évaluer que le processus contrôlé se comporte de la manière souhaitée, par exemple, qu'il converge vers un point d'équilibre souhaité. Un autre point frappant est la polyvalence de l'approche qui a été adaptée, depuis lors, à une immense variété de systèmes tels que les systèmes variables dans le temps, les systèmes à temps discret, les systèmes hybrides et les systèmes à dimensions infinies. Les systèmes dynamiques qui nous intéressent dans ce travail n'échappent pas à cette règle. et nous montrerons que la théorie de Lyapounov est un outil adéquat pour traiter les systèmes à retard temporel et les systèmes linéaires à variation de paramètres.

Considérant que les systèmes à retardement peuvent être abordés comme un problème purement mathématique découlant d'un domaine scientifique tel que la biologie, l'écologie ou la physique. les systèmes à variation de paramètres proviennent essentiellement de problèmes d'ingénierie tels que le filtrage et le contrôle.

Le schéma suivant représente la déformation d'une poutre non linéaire :

Avec $u(x, t)$ = l'oscillation transversale.

et $\varphi(x, t)$ = angle de rotation de la poutre.

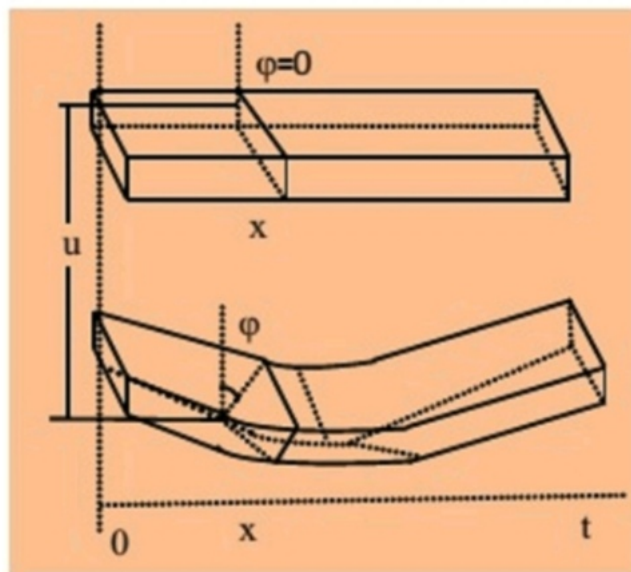


Fig. 0.0.1 : Déformation d'une poutre non linéaire

Nous vous présentons brièvement le contenu de notre mémoire. Il se compose de deux chapitres.

Le premier chapitre, Nous rappelons de quelques notions de base qui nous seront utiles dans la suite.

Le deuxième chapitre, est consacré à utiliser les théorèmes de semi-groupes pour étudier l'existence et l'unicité de la solution et la méthode de Lyapunov pour montrer la stabilité d'un système de von Karman suivant :

$$\begin{cases} w_{tt} - d_1 \left[(u_x + \frac{1}{2} (w_x)^2) w_x \right]_x + d_2 w_{xxxx} + \mu_1 w_t + \mu_2 w_t(x, t - \tau) = 0 \\ u_{tt} - d_1 \left[(u_x + \frac{1}{2} (w_x)^2) \right]_x + \delta \theta_x = 0 \\ \theta_t + q_x + \delta u_{tx} = 0 \\ q_t + \gamma q + \theta_x = 0 \end{cases} \quad (1)$$

sur $\Omega \times (0, \infty)$, où $\Omega = [0, L]$ et d_1, d_2, δ, l et γ sont un constantes positives et, μ_1, μ_2 sont des nombres réels positifs. On complète le système (II.1) avec des conditions aux limites

$$\begin{cases} u = (0, t) = u(L, t) = w = (0, t) = w(L, t) = 0 \text{ pour tout } t > 0 \\ w_x = (0, t) = w_x(L, t) = \theta_x(0, t) = \theta_x(L, t) = 0 \text{ pour tout } t > 0 \end{cases} \quad (2)$$

et les données initiales

$$\begin{cases} u(0, \cdot) = u_0, u_t(0, \cdot) = u_1, w(0, \cdot) = w_0, w_t(0, \cdot) = w_1, \\ \theta(0, \cdot) = \theta_0, \theta_t(0, \cdot) = \theta_1, \\ w_t(x, t - \tau) = f_0(x, t - \tau) \text{ sur } (0, L) \times (0, \tau). \end{cases} \quad (3)$$

Notions de Base

I.1 Quelques espaces fractionnels

I.1.1 Espace de Banach

Définition: I.1.1 *Un espace de Banach est un espace vectoriel normé complet pour la distance induite par la norme.*

I.1.1 Les espaces L^p

Définition: I.1.2 *Soit Ω un ouvert quelconque non vide de \mathbb{R}^n et $1 \leq p < +\infty$, on définit l'espace $L^p(\Omega)$ comme suit :*

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \text{mesurables telles que}$$

$$\int_{\Omega} |f(x)|^p dx < \infty, \text{ si } 1 \leq p < +\infty$$

$$\sup |f(x)| < +\infty, \text{ si } p = +\infty \}$$

Théorème: I.1.1 *Les espaces $L^p(\Omega)$, munis de normes suivantes :*

$$\|f\|_p = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ pour } 1 \leq p < \infty,$$

et

$$\|f\|_{\infty} = \sup |f(x)|, \text{ pour } p = +\infty$$

sont des espaces de Banach.

fonction mesurable : Soient (X, A) et (Y, B) sont des espaces mesurables, on dit que $f : X \rightarrow Y$ est mesurable si pour tout ouvert $O \in B$, on a $f^{-1}(O) \in A$.

I.1.1 Espace de Hilbert

Définition: I.1.3 [2] Un espace de Hilbert H est un espace préhilbertien complet, c'est-à-dire un espace de Banach dont la norme découle d'un produit scalaire ou hermitien par la forme :

$$\|u\|_H = \langle u, u \rangle^{\frac{1}{2}}$$

I.2 Espaces de Sobolev

Soient Ω un ouvert quelconque de \mathbb{R}^n , m un entier naturel et un réel p $1 \leq p \leq \infty$, l'espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ est défini par :

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) \mid \forall \alpha \text{ tel que } |\alpha| \leq m, D^\alpha u \in L^p(\Omega)\}$$

où α est un multi-indice. D^α est une dérivée partielle de u au sens faible (au sens distributions).

Ici $D^\alpha \varphi$ est défini comme suivant :

$$D^\alpha \varphi = \frac{\partial^{|\alpha|} \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \quad \text{avec } |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$$

On munit cet espace vectoriel $W^{m,p}$ de la norme suivants

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p}^p \right)^{\frac{1}{p}} & \text{si } 1 \leq p < +\infty. \\ \max_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty} & \text{si } p = +\infty \end{cases} \quad (\text{I.1})$$

où $\|\cdot\|_{L^p}$ désigne la norme des espaces de Lebesgue.

Définition: I.2.1 Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$.

1. On dit que v est la dérivée partielle faible de u par rapport à x_i , si

$$\int_{\Omega} v \varphi dx = - \int_{\Omega} u \partial_i \varphi dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Autrement dit, si $v = \partial_i T_u \in L^1_{loc}(\Omega)$. S'il n'y a pas de confusion, on écrira $\partial_i u$ au lieu de v ou $\partial_i T_u$.

2. Pour $\alpha \in \mathbb{N}^N$ on dit que v est la dérivée faible de u d'ordre α si

$$\int_{\Omega} v \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u D^{\alpha} \varphi dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Autrement dit, si $v = D^{\alpha} T_u \in L^1_{loc}(\Omega)$. La même chose, on écrira $D^{\alpha} u$ au lieu de $D^{\alpha} T_u = v$

On pose

$$\mathbb{H}^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega),$$

I.2.2 Espace de Sobolev $W^{1,P}(\Omega)$

Définition: I.2.2 [2] Soient Ω un ouvert quelconque de \mathbb{R}^n et $P \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq P \leq \infty$, l'espace de Sobolev $W^{1,P}(\Omega)$ est défini par

$$W^{1,P}(\Omega) = \{u \in L^P(\Omega) \text{ il existe } w^{m,p}(\Omega) \text{ est un ensemble}$$

$$\int_{\Omega} u(x) \varphi'(x) dx = - \int_{\Omega} g(x) \varphi(x) dx \}$$

On pose

$$\mathbb{H}^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega).$$

I.2.2 Espace de Sobolev $W_0^{1,P}(\Omega)$

Définition: I.2.3 [2] Étant donné le réel p , $1 \leq p \leq \infty$ on appelle espace de Sobolev, et on note $W_0^{1,p}(\Omega)$, l'adhérence de $D(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$

Définition: I.2.4 [2] Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n et soit $m \in \mathbb{N}$. L'espace H^m muni du produit scalaire est un espace de Hilbert séparable.

On introduit sur H^m le produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_m = \sum_{|\alpha| \leq m} \langle \partial^\alpha u, \partial^\alpha v \rangle$$

et la norme associée $\|u\|_{H^m} = \sqrt{\langle u, u \rangle_m}$

Dans le cas $m = 1$; en utilisant la densité de $C_c^\infty(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$, on définit l'espace de Sobolev

$$H_0^1(\Omega) = \{f \in H^1(\Omega) \text{ tel que } f = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$$

I.3 Rappel de quelques inégalités

Lemme: I.3.1 (inégalité de Hölder) [2] Soient p et q deux nombres réels conjugués c'est à dire $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors, pour tous $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^q(\Omega)$, on a $f.g \in L^1(\Omega)$:
En particulier, on a

a) Si $p, q \in]1; +\infty[$

$$\int_{\Omega} |f(x)g(x)| dx \leq \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\Omega} |f(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

b) Si $p = 1, q = +\infty$

$$\int_{\Omega} |f(x)g(x)| dx \leq \left(\int_{\Omega} |f(x)| dx \right) \|g\|_{L^\infty(\Omega)}$$

Lemme: I.3.2 (inégalité de Young) [1] Soient p et q deux nombres conjugués dans $]1, +\infty[$, pour tout α et $\beta \in \mathbb{R}^+$ on a :

$$\alpha\beta \leq \frac{1}{p}\alpha^p + \frac{1}{q}\beta^q$$

En particulier $p = q = 2$ on a

$$\alpha\beta \leq \varepsilon\alpha^2 + \frac{1}{2\varepsilon}\beta^2. \quad \forall \varepsilon > 0$$

Lemme: I.3.3 (Inégalité de Poincaré) [3] Supposons que I soit un intervalle borné. Alors il existe un constant C (dépendant de $|u| < \infty$) tel que

$$\|u\|_{w^{1,p}(I)} \leq C \|u'\|_{L^p(I)} \text{ pour tout } u \in w_0^{1,p}(I)$$

I.4 Semi-groupes des opérateurs fortement continues

Définition: I.4.1 Un opérateur linéaire est une fonction entre deux espaces vectoriels qui est linéaire sur son domaine de définition.

Définition: I.4.2 [10] Soit X un espace de Banach, soit $\mathcal{L}(X)$ l'ensemble de tous les opérateurs linéaires bornés de X à X , une famille $(S(t)), t \geq 0$ dans $\mathcal{L}(X)$ est un semi-groupe d'opérateur linéaire borné sur X si

- 1) $(S(0)) = I, \forall S \in \mathcal{L}(X)$ (I est l'opérateur d'identité sur x).
- 2) $(S(t_1 + t_2)) = S(t_1)S(t_2) \forall t_1, t_2 \geq 0$ (la propriété semi-groupe).
- 3) pour chaque $x \in X, (S(t))x$ est continue sur $[0, \infty)$.

Définition: I.4.3 [10] un semi-groupe $(S(t)), 0 \leq t < \infty$ d'opérateurs linéaire borné sur X est un semi-groupe fortement continu d'opérateurs linéaires bornés si, $\lim_{t \rightarrow 0} (S(t))x = x$ pour tout $x \in X$. Un semi-groupe fortement continu d'opérateurs linéaires bornés sur X sera appelé un semi-groupe de classe C_0 ou simplement un C_0 semi - groupe.

Définition: I.4.4 [10]

Le générateur infinitésimal, où générateur du semi-groupe d'opérateurs linéaires $S(t), t \geq 0$. c'est l'opérateur $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \rightarrow X$ défini par

$$D(A) = \left\{ x \in X : \lim_{t \rightarrow 0} \frac{S(t)x - x}{t} \text{ existe} \right\},$$

et

$$Ax = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{S(t)x - x}{t} \text{ pour } x \in D(A).$$

De manière équivalente, on dit que A engendre $\{S(t), t \geq 0\}$.

Définition: I.4.5 [2] Soit \mathbb{H} un espace de Hilbert et A un opérateur non borné sur \mathbb{H} de domaine $D(A)$. On dit que A est **monotone** (ou accréatif) si

$$\langle Av, v \rangle \geq 0 \quad , \forall v \in D(A)$$

A est dissipatif si

$$\langle Au, u \rangle \leq 0 \quad , \forall u \in D(A)$$

on dit que A est **maximal monotone** si de plus $R(\text{Id} + A) = \mathbb{H}$, i.e

$$\forall f \in H, \exists u \in D(A) \text{ tel que } u + Au = f.$$

I.5 Existence et unicité de la solution

Nous considérons un espace de Hilbert E et nous donnerons deux résultats importants pour les formes bi-linéaires sur les espaces de Hilbert.

Définition: I.5.1 E est un espace vectoriel sur un corps K . une application $b : E \times E \rightarrow \mathbb{K}$ est appelée une forme bilinéaire quand

$$\forall x_1, x_2 \in E \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad b(x_1 + \lambda x_2, y) = b(x_1, y) + \lambda b(x_2, y)$$

$$\forall y_1, y_2 \in E \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad b(x, y_1 + \lambda y_2) = b(x, y_1) + \lambda b(x, y_2)$$

Définition: I.5.2 [2] soit $a(.,.) : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bi-linéaire. On dit qu'elle est

(i) continue s'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$|a(x, y)| \leq C \|x\| \|y\| \quad \forall x, y \in E$$

(ii) coercive s'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que

$$a(x, x) \geq \alpha \|x\|^2, \forall x \in E$$

Fonction vectorielle On appelle fonction vectorielle toute application

$$\vec{f} : S \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$$

$$t \mapsto \overrightarrow{f(t)} = (f_1(t) \dots f_n(t))$$

où S est un sous-ensemble de \mathbb{R} .

Définition: I.5.3 Soit I une partie de \mathbb{R} , $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $k > 0$. On dit que f est **lipschitzienne** si pour tout $x, y \in I$,

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$$

Théorème: I.5.1 (lax-Milgram)[2] Supposons que $a(.,.) : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ est une forme bilinéaire continue et coercitive. Pour toute forme linéaire $L \in E'$, il existe un unique $x \in E$ tel que :

$$a(x, y) = L(y), \forall y \in E$$

De plus, si $a(.,.)$ est symétrique, alors $x \in E$ est caractérisé par :

$$\frac{1}{2}a(x, x) - L(x) = \min_{y \in E} \left(\frac{1}{2}a(y, y) - L(y) \right).$$

Théorème: I.5.2 [Lumer-phillips][7] Soit A un opérateur linéaire avec un domaine dense $D(A)$ dans un espace de Banach X

(i) Si A est dissipatif et qu'il existe un $\lambda_0 > 0$ tel que $\mathbf{R}(\lambda_0 I - A) = X$, alors A est le générateur infinitésimal d'un C_0 -semi-groupe de contractions sur X .

(ii) Si A est le générateur infinitésimal d'un C_0 -semi-groupe de contractions sur X alors $\mathbf{R}(\lambda I - A) = X$ pour tout $\lambda > 0$ et A est dissipatif.

Etant donné, le problème de cauchy suivant :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + Au = 0 & \text{sur } [0, +\infty[\\ u(0) = u_0 & \text{(donnée initiale).} \end{cases} \quad (\text{I.2})$$

Théorème: I.5.3 (Hille-Yosida) [1] Soit A un opérateur maximal monotone dans un espace de Hilbert H , alors pour tout $u_0 \in D(A)$ il existe une unique fonction

$$u \in \mathbf{C}^1([0, +\infty[, H) \cap \mathbf{C}([0, +\infty[, D(A))$$

solution du (I.2).

De plus on a

$$|u(t)| \leq |u_0| \quad \text{et} \quad \left| \frac{du}{dt}(t) \right| = |Au(t)| \leq |Au_0| \quad \forall t \geq 0.$$

I.6 Concepts de stabilité

Présentons d'abord les concepts de base de stabilité

Définition: I.6.1 [6] (**Système autonomes et non autonomes**) Le système non linéaire $\dot{x} = f(x, t)$ est dit autonome si f ne dépend pas explicitement du temps, c'est-à-dire si l'équation d'état du système peut s'écrire $\dot{x} = f(x)$ sinon, le système est appelé non autonome.

Définition: I.6.2 (Point équilibre) [6] Un état x^* est un état d'équilibre (ou point d'équilibre) du système si une fois que $x(t)$ est égal à x^* , il reste à x^* pour tout le temps future. Mathématiquement, cela signifie que le vecteur constant x^* satisfait $f(x^*) = 0$ les points d'équilibre peuvent être trouvés en résolvant les équations algébriques non linéaires. Un système linéaire invariable dans le temps $\dot{x} = Ax$

Définition: I.6.3 [9] Un point d'équilibre 0 est asymptotiquement stable s'il est stable, et si il existe un certain $r > 0$ tel que $\|x(0)\| < r$ implique que $x(t) \rightarrow 0$ comme $t \rightarrow \infty$.

Définition: I.6.4 (Stabilité exponentiel) [6] Un point d'équilibre 0 est exponentiellement stable s'il existe deux nombres strictement positifs α et λ tel que

$$\forall t > 0, \quad \|x(t)\| \leq \alpha \|x(0)\| e^{-\lambda t}.$$

Remarque : Notez que la stabilité exponentielle implique une stabilité asymptotique. Mais la stabilité asymptotique ne garantit pas une stabilité exponentielle.

I.6.6 La stabilité au sens de Lyapunov

Définition: I.6.5 [6] Une fonction continue scalaire $v(x)$ est dite localement définie positive si $v(0) = 0$ et dans une boule B_{R_0}

$$x \neq 0 \Rightarrow v(x) > 0,$$

si $v(0) = 0$ et que la propriété ci-dessus s'applique à tout l'espace d'état, alors $v(x)$ est dit globalement défini positif.

Définition: I.6.6 [9] $V(x)$ est semi-défini négatif si $-V(x)$ est semi-défini positif. Le préfixe "semi" est utilisé pour refléter la possibilité que V soit égal à zéro pour $x \neq 0$. Ces concepts peuvent avoir une signification géométrique, similaire à celles données pour les fonctions définies positives

Théorème: I.6.1 [6] (**Stabilité locale**) Si, dans une boule B_{R_0} , il existe une fonction scalaire $V(x)$ avec des dérivées premières partielles continues telles que

- $V(x)$ est définie positive (localement dans B_{R_0}).
- $\dot{V}(x)$ est semi-défini négatif (localement dans B_{R_0}).

alors le point d'équilibre 0 est stable. Si, en effet, la dérivée est localement définie négative dans B , alors la stabilité est asymptotique.

Théorème: I.6.2 (**Stabilité globale**)[9] Supposons qu'il existe une fonction scalaire V de la état x , de premier ordre continu. dérivés tels que

- $V(x)$ est définie positive
- $\dot{V}(x)$ est défini négatif
- $V(x) \rightarrow \infty$ si $\|x\| \rightarrow \infty$

alors l'équilibre à l'origine est globalement asymptotiquement stable.

I.6.6 Fonction de Lyapunov

Définition: I.6.7 [9] Si, dans une boule B_r , la fonction $V(x)$ est définie positive et a dérivées partielles continues, et si sa dérivée temporelle le long de toute trajectoire d'état de système I.6.1 est semi-défini négatif, i.e

$$\dot{V}(x) \leq 0$$

alors $V(x)$ est dite une fonction de Lyapunov pour le système (I.6.1).

Stabilité exponentielle d'une poutre de von Kármán avec retard

II.1 Préliminaires

Soit le système de von Kraman suivant :

$$\begin{cases} w_{tt} - d_1 \left[(u_x + \frac{1}{2} (w_x)^2) w_x \right]_x + d_2 w_{xxxx} + \mu_1 w_t + \mu_2 w_t(x, t - \tau) = 0 \\ u_{tt} - d_1 \left[(u_x + \frac{1}{2} (w_x)^2) \right]_x + \delta \theta_x = 0 \\ \theta_t + q_x + \delta u_{tx} = 0 \\ q_t + \gamma q + \theta_x = 0 \end{cases} \quad (\text{II.1})$$

sur $(0, \infty) \times \Omega$, où $\Omega = [0, L]$ et d_1, d_2, δ, l et γ sont des constants positifs et, μ_1, μ_2 sont des nombres réels positifs. On complète ce système avec les conditions aux limites

$$\begin{cases} u = (0, t) = u(L, t) = w = (0, t) = w(L, t) = 0 \text{ pour tout } t > 0 \\ w_x = (0, t) = w_x(L, t) = \theta_x(0, t) = \theta_x(L, t) = 0 \text{ pour tout } t > 0 \end{cases} \quad (\text{II.2})$$

et les données initiales

$$\begin{cases} u(0, \cdot) = u_0, u_t(0, \cdot) = u_1, w(0, \cdot) = w_0, w_t(0, \cdot) = w_1, \\ \theta(0, \cdot) = \theta_0, \theta_t(0, \cdot) = \theta_1, \\ w_t(x, t - \tau) = f_0(x, t - \tau) \text{ sur } (0, L) \times (0, \tau). \end{cases} \quad (\text{II.3})$$

Supposons d'abord les hypothèses suivantes :

$$|\mu_2| < |\mu_1| \quad (\text{II.4})$$

et nous prouverons que le système (II.1)-(II.9) est bien posé en utilisant la théorie des semi-groupes en introduisant la nouvelle variable suivante [10]

$$z(x, \rho, t) = w_t(x, t - \tau\rho), x \in (0, L), \rho \in (0, 1), t > 0 \quad (\text{II.5})$$

ensuite nous avons,

$$\tau z_t(x, \rho, t) + z_\rho(x, \rho, t) = 0 \text{ sur } (0, L) \times (0, 1) \times (0, \infty) \quad (\text{II.6})$$

Le problème (II.1) et (II.6) dans le système (II.7) prend donc la forme

$$\begin{cases} w_{tt} - d_1 \left[\left(u_x + \frac{1}{2} (w_x)^2 \right) w_x \right]_x + d_2 w_{xxxx} + \mu_1 w_t(x, t) + \mu_2 z(x, 1, t) = 0, \\ u_{tt} - d_1 \left[\left(u_x + \frac{1}{2} (w_x)^2 \right) \right]_x + \delta \theta_x = 0, \\ \theta_t + q_x + \delta u_{tx} = 0, \\ q_t + \gamma q + \theta_x = 0, \end{cases} \quad (\text{II.7})$$

avec les conditions aux limites

$$\begin{cases} u = (0, t) = u(L, t) = w = (0, t) = w(L, t) = 0 \text{ pour tout } t > 0 \\ w_x = (0, t) = w_x(L, t) = \theta_x(0, t) = \theta_x(L, t) = 0 \text{ pour tout } t > 0 \end{cases} \quad (\text{II.8})$$

et les données initiales

$$\begin{cases} u(0, \cdot) = u_0, u_t(0, \cdot) = u_1, w(0, \cdot) = w_0, w_t(0, \cdot) = w_1, \\ \theta(0, \cdot) = \theta_0, \theta_t(0, \cdot) = \theta_1, \\ w_t(x, t - \tau) = f_0(x, t - \tau) \text{ sur } (0, L) \times (0, \tau). \end{cases} \quad (\text{II.9})$$

Soit maintenant ξ une constante positive telle que :

$$\tau |\mu_2| < \xi < \tau (2\mu_1 - |\mu_2|) \quad (\text{II.10})$$

et soit $U = (w, w_t, u, u_t, \theta, q, z)^T$, alors $U_t = (w_t, w_{tt}, u_t, u_{tt}, \theta_t, q_t, z_t)^T$. introduisant la fonction vécérielle $\varphi = w_t$, et $\psi = u_t$, le système (II.1)-(II.9) peut être écrit comme

$$\begin{cases} U_t = AU + \mathcal{F}(U) \\ U(0) = (w_0, w_1, u_0, u_1, \theta_0, q_0, f_0) \end{cases} \quad (\text{II.11})$$

et l'opérateur linéaire A est défini par :

$$\mathcal{A}U = \begin{pmatrix} \varphi \\ -d_2 w_{xxxx} - \mu_1 \varphi - \mu_2 z(\cdot, 1) \\ \psi \\ d_1 u_{xx} - \delta \theta_x \\ -q_x - \delta \psi_x \\ -\gamma q - \theta_x \\ -\frac{1}{\tau} z_\rho \end{pmatrix} \quad (\text{II.12})$$

et

$$\mathcal{F}(U) = \begin{pmatrix} 0 \\ d_1 \left[\left(u_x + \frac{1}{2} (w_x)^2 \right) w_x \right]_x \\ \frac{d_1}{2} (w_x)_x^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, U_0 = \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \\ u_0 \\ u_1 \\ \theta_0 \\ q_0 \\ f_0 \end{pmatrix}, \quad (\text{II.13})$$

avec domaine

$$D(A) = \left\{ \begin{array}{l} (w, \varphi, u, \psi, \theta, q, z)^T \in [H^4(0, L) \cap H_0^2(0, L)] \times H_0^1(0, L) \\ \times [H^2(0, L) \cap H_0^2(0, L)] \times H_0^1(0, L) \times L^2(0, L) \times L^2(0, L) \\ \times L^2((0, L), H_0^1(0, 1)), \varphi = z(\cdot, 0) \text{ in } (0, L) \end{array} \right\} \quad (\text{II.14})$$

Notons H l'espace de Hilbert

$$H := \{ H_0^2(0, L) \times L^2(0, L) \times H_0^1(0, L) \times L^2(0, L) \times L^2(0, L) \times L^2(0, L) \}.$$

Nous allons montrer que A engendre un C_0 semi-groupe sur H . Définissons sur l'espace de Hilbert H le produit scalaire, pour $U = (w, \varphi, u, \psi, \theta, q, z)^T$, $\tilde{U} = (\tilde{w}, \tilde{\varphi}, \tilde{u}, \tilde{\psi}, \tilde{\theta}, \tilde{q}, \tilde{z})^T$

$$\begin{aligned} \langle U, \tilde{U} \rangle &= \int_0^L \varphi \tilde{\varphi} dx + \int_0^L \psi \tilde{\psi} dx + \int_0^L \theta \tilde{\theta} dx + \int_0^L q \tilde{q} dx + d_2 \int_0^L w_{xx} \tilde{w}_{xx} dx \\ &\quad + d_1 \int_0^L u_x \tilde{u}_x dx + \int_0^L \zeta \int_0^1 z \tilde{z} d\rho dx. \end{aligned}$$

II.2 L'existence et l'unicité de la solution

On étudions l'existence et l'unicité de la solution avec la méthode de semi-groupes.

Proposition: II.2.1 Soit $(w, \varphi, u, \psi, \theta, q, z)^T \in H$. Pour toute donnée initiale $U_0 \in H$ existe une solution unique $U \in C([0, \infty), H)$ pour le problème (II.11). De plus, si $U_0 \in D(\mathcal{A})$, alors

$$U \in C([0, \infty), D(\mathcal{A})) \cap C^1([0, \infty), H)$$

Preuve. Nous montrons que l'opérateur A engendre un C_0 semi-groupe dans H . Dans cette étape, nous prouvons que l'opérateur A est dissipatif. Soit $U = (w, \varphi, u, \psi, \theta, q, z)^T$

$$\langle AU, U \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} \varphi \\ -d_2 w_{xxxx} - \mu_1 \varphi - \mu_2 z(\cdot, 1) \\ \psi \\ d_1 u_{xx} - \delta \theta_x \\ -q_x - \delta \psi_x \\ -\gamma q - \theta_x \\ -\frac{1}{\tau} z_\rho \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w \\ \varphi \\ u \\ \psi \\ \theta \\ q \\ z \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\begin{aligned} &= -\mu_1 \int_0^L \varphi^2 dx - d_2 \int_0^L \varphi w_{xxxx} dx + d_1 \int_0^L \psi u_{xx} dx \\ &\quad - \delta \int_0^L \psi \theta_x dx - \int_0^L q_x \theta dx - \delta \int_0^L \theta \psi_x dx - \gamma \int_0^L q^2 dx \\ &\quad - \int_0^L q \theta_x dx + d_2 \int_0^L w_{xx} \varphi_{xx} dx + d_1 \int_0^L \psi_x u_x dx \\ &\quad - \mu_2 \int_0^L \varphi z(x, 1) dx - \frac{\zeta}{\tau} \int_0^L \int_0^1 z(x, \rho) z_\rho(x, \rho) d\rho dx \end{aligned} \tag{II.15}$$

Par intégration par parties, on obtient

$$\begin{aligned} \langle AU, U \rangle &= -\mu_1 \int_0^L \varphi^2 dx - \delta \int_0^L \psi \theta_x dx - \int_0^L q_x \theta dx \\ &\quad - \delta \int_0^L \theta \psi_x dx - \gamma \int_0^L q^2 dx - \int_0^L q \theta_x dx \\ &\quad - \mu_2 \int_0^L \varphi z(x, 1) dx - \frac{\zeta}{\tau} \int_0^L \int_0^1 z(x, \rho) z_\rho(x, \rho) d\rho dx \end{aligned}$$

ainsi,

$$\begin{aligned} \langle AU, U \rangle = & -\mu_1 \int_0^L \varphi^2 dx - \mu_2 \int_0^L \varphi z(x, 1) dx - \gamma \int_0^L q^2 dx \\ & - \frac{\zeta}{\tau} \int_0^L \int_0^1 z(x, \rho) z_\rho(x, \rho) d\rho dx. \end{aligned} \quad (\text{II.16})$$

Maintenant, grâce à l'inégalité de Young, (II.6) et (II.10), on obtient

$$\begin{aligned} \langle AU, U \rangle = & - \left(\mu_1 - \frac{\zeta}{2\tau} - \frac{|\mu_2|}{2} \right) \int_0^L \varphi^2 dx - \gamma \int_0^L q^2 dx \\ & - \left(\frac{\zeta}{2\tau} - \frac{|\mu_2|}{2} \right) \int_0^L z^2(x, 1) dx \leq 0. \end{aligned} \quad (\text{II.17})$$

Par conséquent, l'opérateur A est dissipatif. Maintenant, nous allons prouver que l'opérateur $\lambda I - A$ est surjectif pour $\lambda > 0$. A cet effet, soit

$$(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7)^T \in H$$

nous cherchons

$$U = (w, \varphi, u, \psi, \theta, q, z)^T \in D(\mathcal{A})$$

solution du système d'équations suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda w - \varphi = f_1 \\ \lambda \varphi + d_2 w_{xxxx} + \mu_1 \varphi + \mu_2 z(\cdot, 1) = f_2, \\ \lambda z + \frac{1}{\tau} z_\rho = f_3 \\ \lambda u - \psi = f_4 \\ \lambda \psi - d_1 u_{xx} + \delta \theta_x = f_5 \\ \lambda \theta + q_x + \delta \psi_x = f_6 \\ \lambda q + \gamma q + \theta_x = f_7 \end{array} \right. \quad (\text{II.18})$$

Supposons que nous ayons trouvé w, u . Par conséquent, la première et la troisième équation de (II.18) donnent

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi = \lambda w - f_1 \\ \psi = \lambda u - f_3 \end{array} \right. \quad (\text{II.19})$$

On a $\varphi \in H_0^1(0, L)$ et $\psi \in H_0^1(0, L)$. plus, par (II.19) on peut trouver $z(x, 0) = \varphi(x)$ pour $x \in (0, L)$.

En suivant la même approche que dans [10], en utilisant les équations pour z dans (II.18), et on a

$$\lambda z(x, \rho) + \frac{1}{\tau} z_\rho(x, \rho) = f_3(x, \rho) \quad \text{pour } x \in [0, L] \quad , \quad \rho \in [0, 1]. \quad (\text{II.20})$$

alors

$$z(x, \rho) = \varphi(x) e^{-\lambda \tau \rho} + \tau e^{-\lambda \tau \rho} \int_0^\rho f_3(x, s) e^{\lambda \tau s} ds \quad (\text{II.21})$$

De (II.19) nous obtenons

$$z(x, \rho) = \lambda w(x) e^{-\lambda \tau \rho} - f_1 e^{-\lambda \tau \rho} + \tau e^{-\lambda \tau \rho} \int_0^\rho f_3(x, s) e^{\lambda \tau s} ds$$

En utilisant (II.18) et (II.19) les fonctions w et u vérifiant le système suivant,

$$\begin{cases} \lambda^2 w + d_2 w_{xxxx} + \mu_1 \varphi + \mu_2 z(\cdot, 1) = \lambda f_1 + f_2, \\ \lambda^2 u - d_1 u_{xx} + \delta \theta_x = \lambda f_3 + f_4, \end{cases}$$

Résoudre le système (II.18) revient à trouver

$$(w, u) \in [H^4(0, L) \cap H_0^2(0, L)] \times [H^2(0, L) \cap H_0^2(0, L)]$$

tel que,

$$\begin{cases} \int_0^L (\lambda^2 w \eta + \mu_1 \varphi \eta + d_2 w_{xx} \eta_{xx} + \mu_2 z(\cdot, 1) \eta) dx = \int_0^L (\lambda f_1 + f_2) \eta dx \\ \int_0^L (\lambda^2 u \zeta - d_1 u_x \zeta_x + \delta \theta \zeta_x) dx = \int_0^L (\lambda f_3 + f_4) \zeta dx \end{cases} \quad (\text{II.22})$$

pour tout $(\eta, \zeta) \in H_0^1(0, L) \times H_0^1(0, L)$. De II.5, on a :

$$z(x, 1) = \lambda w(x) e^{-\lambda \tau} - f_1 e^{-\lambda \tau} + \tau e^{-\lambda \tau} \int_0^1 f_3(x, s) e^{\lambda \tau s} ds$$

Par conséquent, le problème (II.22) est équivalent au problème

$$a((w, u), (\eta, \zeta)) = L(\eta, \zeta) \quad (\text{II.23})$$

où la forme bilinéaire

$$a : [H_0^2(0, L) \times H_0^1(0, L)]^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

et la forme linéaire

$$L : H_0^2(0, L) \times H_0^1(0, L) \rightarrow \mathbb{R}$$

sont définis par

$$\begin{aligned} a((w, u), (\eta, \zeta)) &= \int_0^L (\lambda^2 (w + \mu_1 \varphi + \mu_2 z(\cdot, 1)) w + d_2 w_{xx} \eta_{xx}) dx \\ &+ \int_0^L (\lambda^2 u \zeta + (\delta \theta - d_1 u_x) \zeta_x) dx \end{aligned} \quad (\text{II.24})$$

et

$$L(\eta, \zeta) = \int_0^L (\lambda f_1 + f_2) \eta dx + \int_0^L (\lambda f_3 + f_4) \zeta dx$$

On peut vérifier que a est continu et coercitif, et que L est continu. Donc en appliquant le théorème de Lax-Milgram, on en déduit que pour tout $(\eta, \zeta) \in H_0^1(0, L) \times H_0^1(0, L)$ le problème (II.23) admet une unique solution $(w, u) \in H^2(0, L) \times H_0^1(0, L)$. En appliquant la régularité elliptique classique, il découle de (II.22) que $(w, u) \in H^4(0, L) \times H_0^2(0, L)$. Par conséquent, l'opérateur $(\lambda I - \mathcal{A})$ est surjectif pour tout $\lambda > 0$. Maintenant, nous prouvons que l'opérateur F est localement Lipschitz dans H . En fait, si $U = (w, \varphi, u, \psi, \theta, q, z)^T$, $\tilde{U} = (\tilde{w}, \tilde{\varphi}, \tilde{u}, \tilde{\psi}, \tilde{\theta}, \tilde{q}, \tilde{z})^T$ appartiennent à H , on a

$$\|\mathcal{F}(U) - \mathcal{F}(\tilde{U})\|_H^2 = d_1 \left(\left| \left(u_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right) w_x - \left(\tilde{u}_x + \frac{1}{2} \tilde{w}_x^2 \right) \tilde{w}_x \right|_x^2 + \left| \frac{1}{2} (w_x^2 - \tilde{w}_x^2)_x \right|^2 \right) = d_1 (|h|^2 + |g|^2) \quad (\text{II.25})$$

où $h = \left[\left(u_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right) w_x - \left(\tilde{u}_x + \frac{1}{2} \tilde{w}_x^2 \right) \tilde{w}_x \right]_x$ et $g = \frac{1}{2} (w_x^2 - \tilde{w}_x^2)_x$. Ajoutant et soustrayant le terme $\left(u_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right) \tilde{w}_x$ à l'intérieur de la norme $|h|$, on obtient

$$\begin{aligned} |h| &\leq \|w_x - \tilde{w}_x\|_{L^\infty(0, L)} \left| u_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right| + \|\tilde{w}_x\|_{L^\infty(0, L)} |u_x - \tilde{u}_x| \\ &+ \frac{1}{2} \|\tilde{w}_x\|_{L^\infty(0, L)} |w_x + \tilde{w}_x| \|w_x - \tilde{w}_x\|_{L^\infty(0, L)}. \end{aligned} \quad (\text{II.26})$$

En utilisant le plongement de $H^1(0, L)$ dans $L^\infty(0, L)$ on a de II.26 que

$$|h| \leq k \left(\|U\|_H, \|\tilde{U}\|_H \right) \|U - \tilde{U}\|_H \quad (\text{II.27})$$

En utilisant à nouveau le plongement de $H^1(0, L)$ dans $L^\infty(0, L)$, on voit aussi que

$$|g| \leq k \left(\|U\|_H, \|\tilde{U}\|_H \right) \|U - \tilde{U}\|_H \quad (\text{II.28})$$

En combinant (II.25), (II.27) et (II.28), il s'ensuit que $F(U)$ est localement continue de Lipschitz dans H .

Par conséquent, le résultat d'existence et d'unicité du théorème découle du théorème de Hille-Yosida.

II.3 Décroissance exponentielle

Dans cette partie nous étudions la stabilité de la solution avec la méthode de L'énergie. L'énergie associée de ce système est définie par :

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ w_t^2 + u_t^2 + \theta^2 + q^2 + d_2 w_{xx}^2 + d_1 \left(u_x + \frac{1}{2} (w_x)^2 \right)^2 \right\} dx + \frac{\xi}{2} \int_0^L \int_0^1 z^2(x, \rho, t) d\rho dx. \quad (\text{II.29})$$

Lemme: II.3.1 Soit (w, u, θ, q, z) la solution de (II.7)-(II.8). Alors la fonctionnelle énergétique $E(t)$, définie par

$$E(t) \leq \alpha E(0) e^{-\beta t}, \text{ pour tout } t \geq 0$$

satisfait

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E(t) \leq & -\gamma \int_0^L q^2 dx - \left(\mu_1 - \frac{\xi}{2\tau} - \frac{|\mu_2|}{2} \right) \int_0^L w_t^2 dx \\ & - \left(\frac{\xi}{2\tau} - \frac{|\mu_2|}{2} \right) \int_0^L z^2(x, 1, t) dx \end{aligned} \quad (\text{II.30})$$

pour prouver notre résultat principal on a besoin des lemmes suivants :

Preuve. Nous multiplions la première à quatre équations dans (II.7) par u_t, w_t, θ, q respectivement, en intégrant sur $(0, L)$, et l'équation (II.6) par $\frac{\xi}{\tau} z$ sur $(0, L) \times [0, 1]$, en utilisant l'intégration

par parties avec les conditions aux limites II.8, on obtient.

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{2dt} \int_0^L w_t^2 dx - d_1 \int_0^L \left[\left(u_x + \frac{1}{2} (w_x)^2 \right) w_x \right]_x w_t dx + d_2 \frac{d}{2dt} \int_0^L (w_{xx})^2 dx \\
& + \mu_1 \int_0^L w_t^2 dx + \mu_2 \int_0^L z(x, 1, t) w_t dx = 0, \\
& \frac{d}{2dt} \int_0^L u_t^2 dx - d_1 \int_0^L \left[\left(u_x + \frac{1}{2} (w_x)^2 \right) \right]_x u_t dx + \delta \int_0^L \theta_x u_t dx = 0, \\
& \frac{d}{2dt} \int_0^L \theta^2 dx + \int_0^L q_x \theta dx - \delta \int_0^L u_t \theta_x dx = 0, \\
& \frac{d}{2dt} \int_0^L q^2 dx + \gamma \int_0^L q^2 dx - \int_0^L \theta q_x dx = 0, \\
& \xi \frac{d}{2dt} \int_0^L \int_0^1 z^2(x, \rho, t) d\rho dx + \frac{\xi}{2\tau} \int_0^L (z^2(x, 1, t) - z^2(x, 0, t)) dx = 0,
\end{aligned} \tag{II.31}$$

avec

$$\frac{\xi}{\tau} \int_0^L \int_0^1 \frac{d}{2d\rho} z^2(x, \rho, t) d\rho dx = \frac{\xi}{2\tau} \int_0^L (z^2(x, 1, t) - z^2(x, 0, t)) dx$$

En résumé, on obtient

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{2dt} \int_0^L w_t^2 dx + \frac{d}{2dt} \int_0^L u_t^2 dx + d_2 \frac{d}{2dt} \int_0^L (w_{xx})^2 dx + \frac{d}{2dt} \int_0^L \theta^2 dx \\
& + \frac{d}{2dt} \int_0^L q^2 dx + \xi \frac{d}{2dt} \int_0^L \int_0^1 z^2(x, \rho, t) d\rho dx \\
& + d_1 \int_0^L \left(u_x + \frac{1}{2} (w_x)^2 \right) u_{xt} dx + d_1 \int_0^L \left(u_x + \frac{1}{2} (w_x)^2 \right) w_x w_{xt} dx \\
& + \gamma \int_0^L q^2 dx + \mu_1 \int_0^L w_t^2 dx + \mu_2 \int_0^L z(x, 1, t) w_t dx \\
& + \frac{\xi}{2\tau} \int_0^L (z^2(x, 1, t) - z^2(x, 0, t)) dx = 0.
\end{aligned}$$

Maintenant, en utilisant le fait que

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{2dt} d_1 \int_0^L \left(u_x + \frac{1}{2} (w_x)^2 \right)^2 dx = d_1 \int_0^L \left(u_x + \frac{1}{2} (w_x)^2 \right) u_{xt} dx \\
& + d_1 \int_0^L \left(u_x + \frac{1}{2} (w_x)^2 \right) w_x w_{xt} dx
\end{aligned}$$

nous arrivons à

$$\frac{d}{2dt} \int_0^L \left[w_t^2 + u_t^2 + d_2 (w_{xx})^2 + \theta^2 + q^2 + d_1 \left(u_x + \frac{1}{2} (w_x)^2 \right)^2 \right].$$

$$\begin{aligned}
& + \xi \int_0^1 z^2(x, \rho, t) d\rho \Big] + \gamma \int_0^L q^2 dx + \mu_1 \int_0^L w_t^2 dx \\
& + \mu_2 \int_0^L z(x, 1, t) w_t dx + \frac{\xi}{2\tau} \int_0^L (z^2(x, 1, t) - z^2(x, 0, t)) dx = 0.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
E'(t) &= -\gamma \int_0^L q^2 dx - \mu_1 \int_0^L w_t^2 dx - \mu_2 \int_0^L z(x, 1, t) w_t dx \\
&\quad - \frac{\xi}{2\tau} \int_0^L (z^2(x, 1, t) - z^2(x, 0, t)) dx
\end{aligned}$$

Enfin, en utilisant l'inégalité de Young, la relation (II.10) et (II.7), on obtient

$$E'(t) \leq - \left(\frac{\xi}{2\tau} - \frac{|\mu_2|}{2} \right) \int_0^L z^2(x, 1, t) - \left(\mu_1 - \frac{\xi}{2\tau} - \frac{|\mu_2|}{2} \right) \int_0^L w_t^2 dx - \gamma \int_0^L q^2 dx$$

Lemme: II.3.2 Soit (u, w, θ, q, z) une solution de (II.7)-(II.8). Et soit

$$f_1(t) := \int_0^L \left(\int_0^x q(t, y) dy \right) \theta dx, \quad t \geq 0 \tag{II.32}$$

et soit pour tout $\varepsilon_3 > 0$, alors on a,

$$f_1'(t) \leq -\frac{1}{2} \int_0^L \theta^2 dx + \varepsilon_3 \int_0^L u_t^2 dx + C_1(\varepsilon_3) \int_0^L q^2 dx, \quad t \geq 0 \tag{II.33}$$

$$\text{où, } C_1(\varepsilon_3) = \left(1 + \frac{\delta^2}{4\varepsilon_3} + \frac{\gamma^2}{2} \right).$$

Preuve. En exploitant (II.33) et en intégrant par parties, on a

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} f_1(t) &= \int_0^L q^2 dx - \delta \int_0^L \left(\int_0^x q(t, y) dy \right) u_{tx} dx \\
&\quad - \gamma \int_0^L \left(\int_0^x q(t, y) dy \right) \theta dx - \int_0^L \theta dx.
\end{aligned} \tag{II.34}$$

En utilisant les inégalités de Young et de Poincaré, on obtient

$$-\gamma \int_0^L \left(\int_0^x q(t, y) dy \right) \theta dx \leq \frac{1}{2} \int_0^L \theta^2 dx + \frac{\gamma^2}{2} \int_0^L q^2 dx \tag{II.35}$$

$$-\delta \int_0^L \left(\int_0^x q(t, y) dy \right) u_{tx} dx \leq \varepsilon_3 \int_0^L u_t^2 dx + \frac{\delta^2}{4\varepsilon_3} \int_0^L q^2 dx. \quad (\text{II.36})$$

En substituant (II.35) et (II.36) dans (II.34), on obtient immédiatement (II.33).

Afin d'éliminer le terme frontière dans II.51, nous introduisons la fonction suivante

$$m(x) = 2 - \frac{4}{L}x, \quad x \in [0, L]$$

Lemme: II.3.3 Soit (u, w, θ, q, z) une solution de (II.7)-(II.8). et soit

$$f_2(t) := \int_0^L u_t m u_x dx + \int_0^L w_t m w_x dx - \int_0^L (\theta + \delta u_x) m q dx, t \geq 0. \quad (\text{II.37})$$

On a alors l'estimation suivante

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f_2(t) &\leq \gamma \int_0^L \theta^2 dx + \left(\gamma + \frac{\gamma^2 \delta^2}{4} \right) \int_0^L q^2 dx + \frac{2}{L} \int_0^L u_t^2 dx \\ &- d_1 [u_x^2(L) + u_x^2(0)] + \left(1 + \frac{2d_1}{L} \right) \int_0^L u_x^2 dx \\ &+ \left(\frac{2}{L} + \mu_1 \right) \int_0^L w_t^2 dx + \mu_1 \int_0^L w_x^2 dx \\ &+ \frac{8d_1}{L} \int_0^L \left(u_x + \frac{1}{2} (w_x)^2 \right)^2 dx + \frac{6d_2}{L} \int_0^L w_{xx}^2 dx \\ &+ \mu_2 \int_0^L z^2(x, 1, t) dx + \mu_2 \int_0^L w_x^2 dx. \end{aligned} \quad (\text{II.38})$$

Preuve : La différenciation directe, utilisant la deuxième équation de (II.7) et l'intégration par parties, conduit à

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^L m u_t u_x dx &= d_1 \int_0^L \left[\left(u_x + \frac{1}{2} (w_x)^2 \right) \right]_x m u_x dx - \delta \int_0^L \theta_x m u_x dx \\ &+ \int_0^L u_t m u_{tx} dx \\ &= d_1 \int_0^L u_{xx} m u_x dx + d_1 \int_0^L w_x w_{xx} m u_x dx - \delta \int_0^L \theta_x m u_x dx \\ &+ \int_0^L u_t m u_{tx} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{d_1}{2} [mu_x^2]_{x=0}^{x=L} - \frac{d_1}{2} \int_0^L m_x u_x^2 dx + d_1 \int_0^L w_x w_{xx} m u_x dx \\
&- \delta \int_0^L \theta_x m u_x dx - \frac{1}{2} \int_0^L m_x u_t^2 dx \\
&= -d_1 [u_x^2(L) + u_x^2(0)] + \frac{2d_1}{L} \int_0^L u_x^2 dx \\
&+ d_1 \int_0^L w_x w_{xx} m u_x dx - \delta \int_0^L \theta_x m u_x dx + \frac{2}{L} \int_0^L u_t^2 dx,
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \int_0^L u_t m u_x dx &= d_1 \int_0^L u_{xx} m u_x dx + d_1 \int_0^L w_x w_{xx} m u_x dx \\
&- \delta \int_0^L \theta_x m u_x dx + \int_0^L u_t m u_{tx} dx \\
\frac{d}{dt} \int_0^L u_t m u_x dx &= \frac{d_1}{2} [mu_x^2]_{x=0}^{x=L} - \frac{d_1}{2} \int_0^L m_x u_x^2 dx - \delta \int_0^L \theta_x m u_x dx \\
&+ d_1 \int_0^L w_x w_{xx} m u_x dx - \frac{1}{2} \int_0^L m_x u_t^2 dx \\
\frac{d}{dt} \int_0^L u_t m u_x dx &\leq -d_1 [u_x^2(L) + u_x^2(0)] + \frac{2d_1}{L} \int_0^L u_x^2 dx + \frac{2}{L} \int_0^L u_t^2 dx \\
&+ d_1 \int_0^L w_x w_{xx} m u_x dx - \delta \int_0^L \theta_x m u_x dx
\end{aligned} \tag{II.39}$$

De même, en utilisant la première équation de (II.7), nous avons

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \int_0^L w_t m w_x dx &= +d_1 \int_0^L \left(\left(u_x + \frac{1}{2} (w_x)^2 \right) w_x \right)_x m w_x dx \\
&- \mu_1 \int_0^L w_t m w_x dx - d_2 \int_0^L w_{xxxx} m w_x dx \\
&+ \int_0^L w_t m w_{tx} dx - \mu_2 \int_0^L z(x, 1, t) m w_x dx \\
&= -d_1 \int_0^L \left(\left(u_x + \frac{1}{2} (w_x)^2 \right) w_x \right) (m_x w_x + m w_{xx}) dx \\
&- \mu_1 \int_0^L w_t m w_x dx + d_2^L \int_0^L w_{xxx} (m_x w_x + m w_{xx}) dx \\
&- \frac{1}{2} \int_0^L m_x w_t^2 dx - \mu_2^L m w_x z(x, 1, t) dx \\
&= +\frac{4d_1}{L} \int_0^L \left(u_x + \frac{1}{2} (w_x)^2 \right) w_x^2 dx - d_1 \int_0^L w_x w_{xx} m u_x dx \\
&- \mu_1 \int_0^L w_t m w_x dx - \frac{d_1}{2} \int_0^L w_x^2 w_x m w_{xx} dx - \frac{4d_2}{L} \int_0^L w_{xxx} w_x dx \\
&+ d_2 \int_0^L w_{xxx} m w_x dx + \frac{2}{L} \int_0^L w_t^2 dx - \mu_2 \int_0^L m w_x z(x, 1, t) dx
\end{aligned} \tag{II.40}$$

$$\begin{aligned}
&= + \frac{4d_1}{L} \int_0^L \left(u_x + \frac{1}{2} (w_x)^2 \right) w_x^2 dx - d_1 \int_0^L w_x w_{xx} m u_x dx \\
&- \mu_1 \int_0^L w_t m w_x dx - \frac{d_1}{4} \int_0^L w_x^2 q ((w_x)^2)_x dx \\
&+ \frac{4d_2}{L} \int_0^L w_{xx}^2 dx - d_2 [w_{xx}^2(L) + w_{xx}^2(0)] + \frac{2d_2}{L} \int_0^L w_{xx}^2 dx \\
&+ \frac{2}{L} \int_0^L w_t^2 dx - \mu_2 \int_0^L m w_x z(x, 1, t) dx \\
&\leq - \mu_1 \int_0^L w_t m w_x dx + \frac{4d_1}{L} \int_0^L \left(u_x + \frac{1}{2} (w_x)^2 \right) w_x^2 dx \\
&- d_1 \int_0^L w_x w_{xx} m u_x dx - \frac{d_1}{2L} \int_0^L w_x^4 dx + \frac{6d_2}{L} \int_0^L w_{xx}^2 dx + \frac{2}{L} \int_0^L w_t^2 dx \\
&+ \mu_2 \int_0^L z^2(x, 1, t) dx + \frac{\mu_2}{4} \int_0^L (m w_x)^2 dx,
\end{aligned} \tag{II.41}$$

en utilisant l'inégalité de Young, on trouve

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \int_0^L w_t m w_x dx &\leq \left(\frac{2}{L} + \mu_1 \right) \int_0^L w_t^2 dx + \mu_1 \int_0^L w_x^2 dx \\
&+ \frac{8d_1}{L} \int_0^L \left(u_x + \frac{1}{2} (w_x)^2 \right)^2 dx - d_1 \int_0^L w_x w_{xx} m u_x dx \\
&+ \frac{6d_2}{L} \int_0^L w_{xx}^2 dx + \mu_2 \int_0^L z^2(x, 1, t) dx + \frac{\mu_2}{4} \int_0^L (m w_x)^2 dx.
\end{aligned}$$

Finallement,

$$\begin{aligned}
&- \frac{d}{dt} \int_0^L (\theta + \delta u_x) m q dx = - \int_0^L (\theta_t + \delta u_{tx}) m q dx - \int_0^L (\theta + \delta u_x) m q_t dx \\
&= \int_0^L q_x m q dx - \int_0^L (\theta + \delta u_x) m (-\gamma q - \theta_x) dx \\
&= \int_0^L q_x m q dx + \gamma \int_0^L \theta m q dx + \int_0^L \theta m \theta_x dx \\
&+ \gamma \delta \int_0^L q m u_x dx + \delta \int_0^L \theta_x m u_x dx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^L m_x q^2 dx + \gamma \int_0^L \theta m q dx + \frac{1}{2} \int_0^L m_x \theta^2 dx \\
&+ \gamma \delta \int_0^L q m u_x dx + \delta \int_0^L \theta_x m u_x dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{2}{L} \int_0^L q^2 dx + \gamma \int_0^L \theta m q dx - \frac{2}{L} \int_0^L \theta^2 dx \\
&+ \gamma \delta \int_0^L q m u_x dx + \delta \int_0^L \theta_x m u_x dx \\
&\leq \gamma \int_0^L \theta m q dx + \gamma \delta \int_0^L q m u_x dx + \delta \int_0^L \theta_x m u_x dx,
\end{aligned} \tag{II.42}$$

en utilisant l'inégalité de Young, nous trouvons

$$\begin{aligned}
&-\frac{d}{dt} \int_0^L (\theta + \delta u_x) m q dx \leq \int_0^L u_x^2 dx + \left(\gamma + \frac{\gamma^2 \delta^2}{4} \right) \int_0^L q^2 dx \\
&+ \gamma \int_0^L \theta^2 dx + \delta \int_0^L \theta_x m u_x dx
\end{aligned} \tag{II.43}$$

En additionnant (II.39), (II.41) et (II.42), on conclut

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} f_2(t) &\leq \gamma \int_0^L \theta^2 dx + \left(\gamma + \frac{\gamma^2 \delta^2}{4} \right) \int_0^L q^2 dx + \frac{2}{L} \int_0^L u_t^2 dx \\
&- d_1 [u_x^2(L) + u_x^2(0)] + \left(1 + \frac{2d_1}{L} \right) \int_0^L u_x^2 dx \\
&+ \left(\frac{2}{L} + \mu_1 \right) \int_0^L w_t^2 dx + \mu_1 \int_0^L w_x^2 dx \\
&+ \frac{8d_1}{L} \int_0^L \left(u_x + \frac{1}{2} (w_x)^2 \right)^2 dx + \frac{6d_2}{L} \int_0^L w_{xx}^2 dx \\
&+ \mu_2 \int_0^L z^2(x, 1, t) dx + \mu_2 \int_0^L w_x^2 dx.
\end{aligned}$$

Lemme: II.3.4 Soit (u, w, θ, q, z) une solution de (II.7)-(II.8). et soit

$$f_3(t) = \int_0^L \left(u_t u + \frac{1}{2} w_t w + \frac{\mu_1}{4} w^2 \right) dx, t \geq 0. \tag{II.44}$$

Alors on a, pour tout $\varepsilon_1 > 0$,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} f_3(t) &\leq -d_1 \int_0^L \left(u_x + \frac{1}{2} (w_x)^2 \right)^2 dx - \frac{d_2}{4} \int_0^L (w_{xx})^2 dx \\
&+ \varepsilon_1 \int_0^L u_x^2 dx + \frac{\delta^2}{4\varepsilon_1} \int_0^L \theta^2 dx + \int_0^L u_t^2 dx \\
&+ \frac{\mu_2^2 c_p^2}{2d_2} \int_0^L z^2(x, 1, t) dx + \frac{1}{2} \int_0^L w_t^2 dx,
\end{aligned} \tag{II.45}$$

pour tout $t \geq 0$

Preuve. En différenciant la fonctionnelle $I_1(t)$ et en utilisant la première et la seconde équation

de (II.7), on obtient

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}f_3(t) = & -d_1 \int_0^L \left(u_x + \frac{1}{2} (w_x)^2 \right) u_x dx - \delta \int_0^L \theta u_x dx + \int_0^L u_t^2 dx \\ & - \frac{d_1}{2} \int_0^L \left(u_x + \frac{1}{2} (w_x)^2 \right) w_x^2 dx - \frac{d_2}{2} \int_0^L w_{xx}^2 dx - \mu_2 \frac{1}{2} \int_0^L z(x, 1, t) w dx \\ & + \frac{1}{2} \int_0^L w_t^2 dx \end{aligned} \quad (\text{II.46})$$

En utilisant les inégalités de Young et de Poincaré, on obtient

$$-\mu_2 \frac{1}{2} \int_0^L z(x, 1, t) w dx \leq \frac{d_2}{4} \int_0^L w_{xx}^2 dx + \frac{\mu_2^2 c_p^2}{2d_2} \int_0^L z^2(x, 1, t) dx \quad (\text{II.47})$$

et

$$-\delta \int_0^L \theta u_x dx \leq \varepsilon_1 \int_0^L u_x^2 dx + \frac{\delta^2}{4\varepsilon_1} \int_0^L \theta^2 dx \quad (\text{II.48})$$

En insérant (II.47) et (II.48) dans (II.46), alors, on obtient (II.45).

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}f_3(t) = & \int_0^L u_t^2 dx + \int_0^L \left[d_1 \left(u_x + \frac{1}{2} (w_x)^2 \right)_x - \delta \theta_{tx} \right] u dx \\ & + \frac{1}{2} \int_0^L \left[d_1 [(u_x + \frac{1}{2} (w_x)^2) w_x]_x - d_2 w_{xxxx} - \mu_2 w_t \right] w dx + \frac{\mu_2}{2} \int_0^L w_t w dx \\ & + \int_0^L z^2(x, 1, t) dx + \frac{\mu_2}{8} \int_0^L w^2 dx. \\ = & \int_0^L u_t^2 dx - d_1 \int_0^L \left(u_x + \frac{1}{2} (w_x)^2 \right) u_x dx + \delta \int_0^L \theta u_x dx \\ & + \frac{1}{2} \int_0^L w_t^2 dx - \frac{d_1}{2} \int_0^L \left(u_x + \frac{1}{2} (w_x)^2 \right) w_x^2 dx \\ & - \frac{d_2}{2} \int_0^L (w_{xx})^2 dx + \frac{\mu_2}{2} \int_0^L z^2(x, 1, t) dx + \frac{\mu_2}{8} \int_0^L w^2 dx. \end{aligned} \quad (\text{II.49})$$

En utilisant les inégalités de Young et Poincaré nous donne :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}f_3(t) \leq & -d_1 \int_0^L \left(u_x + \frac{1}{2} (w_x)^2 \right)^2 dx - \frac{d_2}{4} \int_0^L (w_{xx})^2 dx \\ & + \varepsilon_1 \int_0^L u_x^2 dx + \int_0^L u_t^2 dx + \frac{\delta^2}{4\varepsilon_1} \int_0^L \theta^2 dx \\ & + \frac{\mu_2^2 c_p^2}{2d_2} \int_0^L z^2(x, 1, t) dx + \frac{1}{2} \int_0^L w_t^2 dx, \end{aligned}$$

d'où le resultat désiré.

Lemme: II.3.5 *Soit (u, w, θ, q, z) une solution de (II.7)-(II.8). pour tout $\varepsilon_2 > 0$, et soit*

$$f_4(t) := \int_0^L \left(\int_0^x \theta(t, y) dy \right) u_t dx, \quad t \geq 0 \quad (\text{II.50})$$

Alors on a,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f_4(t) &\leq -\frac{\delta}{2} \int_0^L u_t^2 dx + \varepsilon_2 \int_0^L \left(u_x + \frac{1}{2} (w_x)^2 \right)^2 dx \\ &+ C(\varepsilon_2) \int_0^L \theta^2 dx + \varepsilon_2 u_x^2(L) + \frac{1}{2\delta} \int_0^L q^2 dx, \quad t \geq 0, \end{aligned} \quad (\text{II.51})$$

$$\text{où, } C(\varepsilon_2) = \left[\frac{d_1^2}{4\varepsilon_2} (1+L) + \delta \right].$$

Preuve. Une différentiation de (II.50) et avec les conditions aux limites donne

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f_4(t) &= +\delta \int_0^L \theta^2 dx - \int_0^L q u_t dx - \delta \int_0^L u_t^2 dx \\ &- d_1 \int_0^L \left(u_x + \frac{1}{2} (w_x)^2 \right) \theta dx + d_1 \left(\int_0^L \theta dx \right) u_x(L). \end{aligned} \quad (\text{II.52})$$

En rappelant l'inégalité de Young pour le dernier terme de (II.52), on obtient pour tout $\varepsilon_2 > 0$,

$$d_1 \left(\int_0^L \theta dx \right) u_x(L) \leq \varepsilon_2 u_x^2(L) + \frac{d_1^2 L}{4\varepsilon_2} \int_0^L \theta^2 dx$$

et notre conclusion suit.

Lemme: II.3.6 *La fonctionnelle $I_5(t)$*

$$f_5(t) = \int_0^L \int_0^1 e^{-2\tau\rho} z^2(x, \rho, t) d\rho dx \quad (\text{II.53})$$

satisfait l'estimation pour une constante positive m_1

$$\frac{d}{dt} f_5(t) \leq -I_5(t) - \frac{m_1}{2\tau} \int_0^L z^2(x, 1, t) dx + \frac{1}{2\tau} \int_0^L w_t^2(x, t) dx. \quad (\text{II.54})$$

Preuve : En différenciant $I_5(t)$, et en utilisant l'équation (II.6), on obtient

$$\frac{d}{dt} \left(\int_0^L \int_0^1 e^{-2\tau\rho} z^2(x, \rho, t) d\rho dx \right) = -\frac{1}{\tau} \int_0^L \int_0^1 e^{-2\tau\rho} z z_\rho(x, \rho, t) d\rho dx$$

$$\begin{aligned}
&= - \int_0^L \int_0^1 e^{-2\tau\rho} z^2(x, \rho, t) d\rho dx \\
&\quad - \frac{1}{2\tau} \int_0^L \int_0^1 \frac{d}{d\rho} (e^{-2\tau\rho} z^2(x, \rho, t)) d\rho dx.
\end{aligned}$$

L'estimation ci-dessus implique qu'il existe une constante positive m_1 telle que (II.54) est vérifiée.

Maintenant, on pose et on montre le deuxième résultat principal. D'abord, nous introduisons la fonctionnelle

$$\mathcal{L}(t) = NE(t) + N_1 f_1 + \varepsilon_2 f_2 + \delta \frac{d_1}{4} f_3 + d_1 f_4 + f_5 \quad (\text{II.55})$$

Théorème: II.3.1 Supposons que les données initiales soient données en H . Alors, l'énergie $E(t)$ décroît exponentiellement, c'est-à-dire qu'il existe deux constantes positives α et β indépendantes des données initiales telles que

$$E(t) \leq \alpha E(0) e^{-\beta t}, \text{ pour tout } t \geq 0 \quad (\text{II.56})$$

Preuve on utilise (II.30), (II.45), (II.51), (II.33), (II.38), (II.54) et les relations :

$$\begin{aligned}
\int_0^L u_x^2 dx &\leq 2 \int_0^L \left(u_x + \frac{1}{2} (w_x^2) \right) dx + \frac{1}{2} \int_0^L w_x^2 dx \\
&\leq 2 \int_0^L \left(u_x + \frac{1}{2} (w_x^2) \right) dx + \frac{L}{4} \int_0^L w_x^2 dx
\end{aligned}$$

on trouve

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}'(t) &\leq - \left[\gamma N - \frac{d_1}{2\delta} - C_1(\varepsilon_3) N_1 - \varepsilon_2 \left(\gamma + \frac{\gamma^2 \delta^2}{4} \right) \right] \int_0^L q^2 dx \\
&\quad - \left[N \left(\mu_1 - \frac{\xi}{2\tau} - \frac{|\mu_2|}{2} \right) - \frac{\delta d_1}{8} - \varepsilon_2 \left(\frac{2}{L} + \mu_1 \right) - \frac{1}{2\tau} \right] \int_0^L w_t^2 dx \\
&\quad - \left[N \left(\frac{\xi}{2\tau} - \frac{|\mu_2|}{2} \right) - \frac{\delta d_1 \mu_2^2 C_p^2}{8d_2} - \mu_2 \varepsilon_2 + \frac{m_1}{2\tau} \right] \int_0^L z^2(x, 1, t) dx \\
&\quad - \left[\frac{\delta d_1^2}{4} - \varepsilon_2 d_1 - \frac{8\varepsilon_2 d_1}{L} - \frac{\delta \varepsilon_1 d_1}{2} - 2\varepsilon_2 \left(1 + \frac{2d_1}{L} \right) \right] \int_0^L \left(u_x + \frac{1}{2} (w_x)^2 \right)^2 dx \\
&\quad - \left[\frac{\delta d_1 d_2}{16} - \frac{6\varepsilon_2 d_2}{L} - \frac{C_p \delta \varepsilon_1 d_1}{16} - \frac{L \varepsilon_2 C_p}{4} \left(1 + \frac{2d_1}{L} \right) - \varepsilon_2 C_p (\mu_1 + \mu_2) \right] \int_0^L (w_{xx})^2 dx \\
&\quad - \left[\frac{1}{2} N_1 - \frac{\delta^3 d_1}{16\varepsilon_1} - C(\varepsilon_2) d_1 - \gamma \varepsilon_2 \right] \int_0^L \theta^2 dx \\
&\quad - \left[\frac{\delta d_1}{4} - \varepsilon_3 N_1 - \frac{2\varepsilon_2}{L} \right] \int_0^L u_t^2 dx \\
&\quad - f_5(t)
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}'(t) &\leq -\eta_1 \int_0^L q^2 dx - \eta_2 \int_0^L w_t^2 dx - \eta_3 \int_0^L z^2(x, 1, t) dx \\
&- \eta_4 \int_0^L \left(u_x + \frac{1}{2} (w_x)^2 \right)^2 dx - \eta_5 \int_0^L w_{xx}^2 dx - \eta_6 \int_0^L \theta^2 dx \\
&- \eta_7 \int_0^L u_t^2 dx - f_5(t),
\end{aligned} \tag{II.57}$$

ou

$$\begin{aligned}
\eta_1 &= \left[\gamma N - \frac{d_1}{2\delta} - C_1(\varepsilon_3) N_1 - \varepsilon_2 \left(\gamma + \frac{\gamma^2 \delta^2}{4} \right) \right] \\
\eta_2 &= \left[N \left(\mu_1 - \frac{\xi}{2\tau} - \frac{|\mu_2|}{2} \right) - \frac{\delta d_1}{8} - \varepsilon_2 \left(\frac{2}{L} + \mu_1 \right) - \frac{1}{2\tau} \right] \\
\eta_3 &= \left[N \left(\frac{\xi}{2\tau} - \frac{|\mu_2|}{2} \right) - \frac{\delta d_1 \mu_2^2 c_p^2}{8d_2} - \mu_2 \varepsilon_2 + \frac{m_1}{2\tau} \right] \\
\eta_4 &= \left[\frac{\delta d_1^2}{4} - \varepsilon_2 d_1 - \frac{8\varepsilon_2 d_1}{L} - \frac{\delta \varepsilon_1 d_1}{2} - 2\varepsilon_2 \left(1 + \frac{2d_1}{L} \right) \right], \\
\eta_5 &= \left[\frac{\delta d_1 d_2}{16} - \frac{6\varepsilon_2 d_2}{L} - \frac{C_p \delta \varepsilon_1 d_1}{16} - \frac{L \varepsilon_2 C_p}{4} \left(1 + \frac{2d_1}{L} \right) - \varepsilon_2 C_p (\mu_1 + \mu_2) \right], \\
\eta_6 &= \left[\frac{N_1}{2} - \frac{\delta^3 d_1}{16\varepsilon_1} - C(\varepsilon_2) d_1 - \gamma \varepsilon_2 \right] \\
\eta_7 &= \left[\frac{\delta d_1}{4} - \varepsilon_3 N_1 - \frac{2\varepsilon_2}{L} \right].
\end{aligned}$$

D'abord, choisissons ε_1 et ε_2 assez petit

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 &< \min \left(\frac{d_1}{8}, \frac{d_2}{4C_p} \right), \\
\varepsilon_2 &< \min \left[\frac{\delta d_1 d_2}{16C_p(L+2d_1)}, \frac{\delta d_1 L}{384}, \frac{\delta d_1}{16}, \frac{\delta d_1 d_2}{64C_p(\mu_1 + \mu_2)}, \frac{\delta d_1}{128L}, \frac{\delta d_1^2}{32(L+2d_1)} \right],
\end{aligned}$$

et, nous choisissons N_1

$$\left[\frac{N_1}{2} - \frac{\delta^3 d_1}{16\varepsilon_1} - C(\varepsilon_2) d_1 - \gamma \varepsilon_2 \right] > 0$$

Ensuite, nous choisissons ε_3 si petit que,

$$\varepsilon_3 < \frac{\delta d_1}{8N_1}$$

Enfin, nous choisissons N assez grand pour que,

$$\begin{aligned}
\gamma N - \frac{d_1}{2\delta} - C_1(\varepsilon_3) N_1 - \varepsilon_2 \left(\gamma + \frac{\gamma^2 \delta^2}{4} \right) &> 0, \\
N \left(\mu_1 - \frac{\xi}{2\tau} - \frac{|\mu_2|}{2} \right) - \frac{\delta d_1}{8} - \varepsilon_2 \left(\frac{2}{L} + \mu_1 \right) - \frac{1}{2\tau} &> 0,
\end{aligned}$$

et

$$N \left(\frac{\xi}{2\tau} - \frac{|\mu_2|}{2} \right) - \frac{\delta d_1 \mu_2^2 c_p^2}{8d_2} - \mu_2 \varepsilon_2 + \frac{m_1}{2\tau} > 0$$

Donc, ce qui implique par (II.57), qu'il existe aussi $\eta_2 > 0$, tel que

$$\frac{d}{dt} \mathcal{L}(t) \leq -\eta_2 E(t), \quad \forall t > 0 \quad (\text{II.58})$$

pour quelques η_2 positifs. D'autre part, il est facile de vérifier que

$$\beta_2 E(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq \beta_1 E(t), \quad \forall t \geq 0 \quad (\text{II.59})$$

pour certaines constantes positives β_1 et β_2 . En combinant (II.58) et le membre de droite de (II.59), on conclut que

$$\frac{d}{dt} \mathcal{L}(t) \leq -\Lambda \mathcal{L}(t), \quad \forall t \geq 0 \quad (\text{II.60})$$

pour $\Lambda > 0$. Une simple intégration de (II.60) conduit à

$$\mathcal{L}(t) \leq \mathcal{L}(0) e^{-\Lambda t}, \quad \forall t > 0 \quad (\text{II.61})$$

Encore une fois, l'utilisation de (II.58) et (II.60) donne le résultat souhaité. Ceci achève la preuve du théorème I.I.1

Bibliographie

- [1] *H. Brezis, Analyse fonctionnelle Théorie et Application, Dunod, Paris (1999).*
- [2] *H. Brezis, Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations. Springer Science + Business Media, LLC (2011).*
- [3] *H. K. Khalil, Nonlinear Systems. Macmillan, New York, 3e edition, (2002).*
- [4] *D. Li, H. Queffélec, Introduction à l'étude des espaces de Banach : analyse et probabilités, Société mathématique de France, (2004).*
- [5] *A. M. Lyapunov, General Problem of the Stability of Motion (Translated from Russian to French by E. Davaux and from French to English by A. T. Fuller), Taylor Francis, London, UK, (1992).*
- [6] *S. Nicaise, C. Pignotti, Stabilization of the wave equation with boundary or internal distributed delay, Diff. Int. Eqs., 21 (9–10), 935–958, (2008).*
- [7] *A. Pazy, Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations, New York, Springer, Applied mathematical sciences, 44, (1983).*
- [8] *H. J. Poincaré, Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique, Acta Math. 13, 1–270, (1890)*
- [9] *J.J.E.SOLOTINE, Applied Nonlinear Control, Prentice Hall Englewood Cliffs, New Jersey 07632, 1991.*
- [10] *L. I. Vrabie, C_0 -semigroups and applications, Elsevier Science B. V. (2003).*