

République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
جامعة الجبلاي بونعامة خميس مليانة
Université Djilali Bounaâma de Khemis Miliana
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département des Sciences de la Matière



Mémoire de fin d'étude

En vue de l'obtention d'un diplôme de Master en physique « science et technologie »
Spécialité : physique théorique « science de la matière »

Thème :

Groupes et algèbres de Lie pour la physique

Devant le jury composé de :

Dr. Mazouz Amel	Présidente	MCB	(Université de khemis Miliana)
Dr. Ayadi Souad	Encadreur	MCA	(Université de khemis Miliana)
Dr. Slimane Leila	Examinatrice	MCB	(Université de khemis Miliana)

Présenté par :

BENRABAH ABDALLAH

Année universitaire : 2022 / 2023

REMERCIEMENT

*Mes vifs remerciements sont d'abord adressés à **Dr. Souad Ayadi**, qui a fait l'honneur de diriger ce travail de recherche. Je tiens à lui exprimer ma gratitude et mon profond respect. Je tiens également à exprimer une reconnaissance aux membres du jury :*

*- **Dr. Mazouz Amel**, de m'avoir honoré de présider le jury de la soutenance.*

*- **Dr. Slimane Leila**, d'avoir accepté d'examiner ce mémoire.*

Je vous remercie sincèrement d'avoir accepté d'examiner avec soin le contenu de ce travail. J'exprime également ma gratitude à toutes les personnes qui m'ont apporté leur assistance et ont contribué à l'accomplissement de ce travail et mes remerciements vont aussi à tous mes collègues du département des sciences de matière de l'université de Khemis Miliana

À vous tous, j'adresse mes remerciements empressés et le témoignage de ma et fidèle amitié.

DEDICACE

Je dédie ce travail avec une profonde appréciation à mes collègues de cette promotion physique 2023, à ma mère, mon cher père, mes chers frères et à toute ma famille, un remerciement spécial pour vous avec ma gratitude sincère.

Votre présence a illuminé mon chemin et m'a donné la force de surmonter les obstacles.

Merci du fond du cœur pour tout ce que vous avez fait.

Benrabah abdallah

RESUME

Les groupes de Lie constituent un outil puissant pour comprendre les principes fondamentaux de la physique, ils jouent un rôle fondamental dans notre compréhension des lois naturelles, révélant des régularités et des constantes structurant les systèmes physiques. La théorie des groupes permet de classer et de décrire ces groupes, en utilisant l'algèbre de Lie, afin de formuler les équations qui les caractérisent. Ainsi, elle offre un cadre précis pour représenter et étudier ces structures complexes. L'utilisation de cette théorie a permis de mieux appréhender les fondements des lois de la nature et d'établir des connexions profondes entre les différentes branches de la physique.

Dans notre travail nous allons aborder de manière concise sur la base essentielle des groupes de Lie, en explorant les concepts fondamentaux, principes élémentaires et les notions fondamentales qui les caractérisent, ainsi que certaines avancées dans ce domaine. Passons par des applications et des représentations concrètes et des schémas pour illustrer les concepts fondamentaux des groupes de Lie, en mettant en évidence les similitudes et les différences entre différents groupes.

Mots clés : groupe de Lie ; algèbre de Lie ; théorie de groupe.

ABSTRACT

Lie groups play a crucial role in understanding the fundamental principles of physics, they are fundamental to our understanding of natural laws, revealing regularities and constants that shape physical systems. The theory of groups enables the classification and description of these groups, using Lie algebra to formulate the equations that characterize them ; it provides a precise framework for representing and studying these complex structures.

The use of this theory has enhanced our understanding of the foundations of natural laws and establishes deep connections across different branches of physics . In our work we will concisely explore the essential foundations of Lie groups, investigating the fundamental concepts and principles that define them, we will conduct in-depth studies on Lie groups and their applications in physics, discussing fundamental concepts and properties of groups and Lie algebras. As well some advances in this field, we will employ concrete applications and diagrams to illustrate the fundamental concepts of Lie groups, highlighting similarities and differences among different groups.

Key Word : Lie groups, Lie algebra, group theory .

ملخص

تلعب مجموعات لي دورًا حاسمًا في فهم المبادئ الأساسية للفيزياء، فهي أساسية لفهم قوانين الطبيعة، حيث تكشف عن تنظيمات وثوابت تشكل الأنظمة الفيزيائية.

نظرية المجموعات تمكّن من تصنيف ووصف هذه المجموعات، باستخدام جبر لي لصياغة المعادلات التي تميّزها، حيث توفر إطارًا دقيقًا لتمثيل ودراسة هذه الهياكل المعقدة. استخدام هذه النظرية قد عزز فهمنا للمبادئ الأساسية لقوانين الطبيعة وأنشأ ارتباطات عميقة في مختلف فروع الفيزياء.

في عملنا، سنبحث بإيجاز في الأسس الأساسية لمجموعات لي، ونستكشف المفاهيم والمبادئ الأساسية التي تحددنا، وسنجري دراسات معمقة حول مجموعات لي وتطبيقاتها في الفيزياء، مع مناقشة المفاهيم الأساسية والخصائص للمجموعات وجبر لي، بالإضافة إلى التطورات الحديثة في هذا المجال. نستخدم تطبيقات ورسومات ملموسة لتوضيح المفاهيم الأساسية لمجموعات لي، مع تسليط الضوء على التشابهات والاختلافات بين المجموعات المختلفة.

الكلمات المفتاحية: مجموعات لي، جبر لي، نظرية المجموعات.

TABLE DE MATIERE

REMERCIEMENT.....	i
DEDICACE.....	ii
RESUME.....	iii
TABLE DE MATIERE.....	v
LISTE DES FIGURES.....	vii
LISTE DES TABLEAUX.....	vii
TABLE DE NOTATION.....	viii
introduction.....	1
CHAPITRE 01 : PRELIMINAIRES.....	3
1.1 Généralités.....	3
1.1.1 Loi de composition interne.....	3
1.1.2 Groupe Abélien.....	4
1.1.3 Ordred'un groupe.....	5
1.1.4 Morphisme et isomorphisme d'un groupe.....	6
1.1.5 Sous-groupe normal-quotient.....	7
1.1.6 Classe d'un groupe.....	7
1.1.7 Groupes monogène-groupe cyclique.....	8
1.1.8 Représentation d'un groupe.....	10
1.2Groupes finis.....	11
1.2.1Groupes finis qui servent en physique.....	12
1.3 Groupes continus.....	15
1.3.1Groupes continus qui servent en physique.....	16
1.3.2 Groupes continus (SO2) (SO3) (SU).....	17
1.3.3 Autresexemplesde groupes.....	18
1.4 Théorie de Gauge.....	21
CHAPITRE 02 : GROUPE ET ALGEBRE DE LIE.....	25
2.1 Notions de base.....	25
2.2 Sous-groupesde Lie.....	26
2.3 Algèbre de Lie définie par un groupe de Lie.....	27
2.3.1Application exponentielle de groupes de Lie et Algèbre de Lie.....	28
2.3.2 Espace tangent de toutes les courbes autour de l'identité de tous les groupes.....	29

2.3.3	Dimension d'un groupe de Lie	31
2.3.4	Types de groupes de Lie	32
2.4	Propriétés de groupes et algèbres de Lie	33
2.4.1	Isomorphisme et homomorphisme.....	33
2.4.2	Représentations	35
2.5	Groupes et algèbres de Lie qui servent en théorie des groupes.....	36
2.6	Groupe des déplacements d'un espace euclidien	39
CHAPITRE 03 : APPLICATIONS EN PHYSIQUE		42
3.1	Transformations continu	42
3.2	Étude de $SU(2)$	43
3.2.1	Représentations irréductibles de $SL(2; \mathbb{C})$	47
3.2.2	Études des racines de $SL(3; \mathbb{C})$	49
3.2.3	$SU(3)$ et les Quarks.....	55
3.3	Étude du groupe $SO(3)$	57
3.4	Relation entre les groupes $SO(3)$ et $SU(2)$	59
3.6	Découvertes fondamentales en physique.....	61
Conclusion.....		64
Bibliographie.....		65

LISTE DES FIGURES

Figure 1.1 : Opérations de symétrie de C_{3v}	13
Figure 1.2 : Molécule de méthane CH_4	19
Figure 1.3 :Cristal de $NaCl$ (sel).	20
Figure 1.4 :Les physiciens.....	20
Figure 1.5 : symétrie de jauge locale.	21
Figure 1.6 : Modèle standard des particules élémentaires.....	22
 Figure 2.1 : Les protagonistes.....	 25
 Figure 3.1 : Les groupes de Coxeter-dynkin dans le plan avec les diagrammes équivalents [18].	 50
Figure 3.2 : $sl(3; \mathbb{R})$ dynkin Diag.....	53
Figure 3.3 : l'isomorphisme exceptionnel.....	54
Figure 3.4 :Classification en octet des baryons et des Mésons [3].....	55
Figure 3.5 : Représentation des baryons dans le diagramme $(Y; D_j(J_3) = T_3)$	56
Figure 3.6 :Représentation des mésons dans le diagramme $(Y; D_j(J_3) = T_3)$	57
Figure 3.7 : Rotation et déplacement de R d'un angle $\pi/2$ sur l'axe $e_1 e_2 e_3$	58
Figure 3.8 :Représentation du système de racine du groupe E_8	62

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 3.1 : des principales caractéristiques des groupes $SO(3)$ et $SU(2)$	61
--	----

TABLE DE NOTATION

1. **Groupe diédral D_n** : groupe des symétries d'un polygone régulier à n côtés.
2. **Groupe symétrique S_n** : groupe de toutes les permutations d'un ensemble de n éléments.
3. **Groupe de symétrie C_{3v}** : groupe des symétries d'un triangle équilatéral.
4. **Groupe unitaire spécial $SU(n)$** : groupe des matrices unitaires $n \times n$, avec un déterminant égal à 1.
5. **Groupe $U(1)$** : groupe qui décrit les transformations de phase d'un champ complexe.
6. **Groupe $SO(3)$** : groupe des rotations dans l'espace à trois dimensions.
7. **Groupe $SU(2)$** : décrit les rotations dans l'espace à trois dimensions avec des matrices unitaires 2×2 .
8. **Groupe linéaire général $GL(n, R)$** : groupe des matrices carrées $n \times n$, avec des coefficients réels, dont le déterminant est non nul.
9. **Groupe de Poincaré** : groupe de symétries de l'espace-temps de la relativité restreinte.
10. **Groupe $E(n)$** : groupe des déplacements d'un espace euclidien où n est la dimension de l'espace euclidien.

INTRODUCTION

Un groupe est une structure mathématique utilisée pour étudier l'impact des symétries et des invariances de la nature sur les formalismes. En physique, cet outil permet de décrire les systèmes naturels.

Le concept de groupe peut jouer un rôle abstrait en mathématiques. Or, dans divers domaines d'application tels que les particules élémentaires, la chimie organique tridimensionnelle, la cristallographie et l'informatique, les groupes de Lie se sont naturellement introduits dans de nombreuses questions de mathématiques pures et appliquées.

Les groupes de Lie sont des groupes continus, décrits par plusieurs paramètres réels, qui peuvent être classés selon leurs propriétés algébriques (abéliens, simples, semi-simples, résolubles) ou topologiques (connexes, simplement connexes, compacts). L'utilisation de la théorie des groupes en physique remonte au début du 20^e siècle lorsque les physiciens ont commencé à étudier les propriétés quantiques de la matière et des particules subatomiques. En somme, la théorie des groupes et de l'algèbre de Lie joue un rôle crucial dans la compréhension de la structure des symétries en physique.

Les groupes de symétrie fournissent un cadre mathématique pour décrire la structure de la nature à un niveau fondamental, et l'algèbre de Lie fournit des outils pour comprendre les propriétés mathématiques des groupes de symétrie. La théorie des groupes de Lie est devenue un outil indispensable pour comprendre les particules subatomiques, la structure de l'espace-temps et les lois nécessaires de la nature.

Le développement de la mécanique quantique dans les années 1920 a révélé que les particules subatomiques ont des propriétés particulières qui ne peuvent être expliquées par la physique classique. Les fondateurs de la mécanique quantique, Werner Heisenberg et Erwin Schrödinger, ont utilisé des mathématiques sophistiquées pour décrire ces propriétés quantiques.

Les groupes de symétrie ont alors joué un rôle important dans ces développements, en particulier le groupe de symétrie de la rotation de l'espace à trois dimensions, connu sous le nom de groupe $SO(3)$.

Dans les années 1950 et 1960, la théorie des groupes a été utilisée pour comprendre la structure des particules subatomiques, telles que les hadrons et les leptons.

Les physiciens ont découvert que les particules peuvent être classées en fonction de leur comportement sous les transformations de groupes de symétries. Cette classification, qui a conduit au développement de la théorie des groupes de Lie, fournit un cadre mathématique permettant de comprendre la structure des groupes de symétrie. Les algèbres de Lie semi-simples ont une importance particulière en physique. Réellement parlant, elles décrivent les symétries de base de la nature

Les physiciens ont utilisé l'algèbre de Lie pour comprendre la structure des groupes de symétrie tels que $SU(2)$ et $SU(3)$, qui sont importants pour la description des interactions nucléaires fortes et de la structure des particules subatomiques.

Notre travail qui s'intéresse aux groupes et algèbre de Lie est répartie en trois chapitres :

En premier lieu, nous commencerons par une vue générale des groupes avec quelques exemples dans le premier chapitre. Dans le deuxième chapitre, nous étudierons les algèbres de Lie, qui sont des structures algébriques utilisées pour étudier les groupes de Lie. Nous commencerons par définir les algèbres de Lie en termes de leurs opérations et de leurs propriétés algébriques, ainsi que leur lien avec les groupes de Lie. Dans le troisième chapitre, nous nous intéressons à l'application des groupes de Lie en physique. Pour ce faire, nous aborderons la notion de représentations de groupes de Lie et d'algèbres de Lie. Nous verrons comment les groupes de Lie peuvent être représentés par des matrices, et comment les algèbres de Lie sont représentées par matrice et des équations différentielles ainsi que leur impact dans le domaine physique quantique.

CHAPITRE 01 : PRELIMINAIRES

1.1 Généralités

Pour débiter, nous allons présenter les notions de bases d'un groupe, c'est un thème central des mathématiques modernes. On rappelle que la théorie des groupes est l'étude des structures algébriques. Comme énoncé précédemment, on retrouve la notion de groupe dans divers domaines tels- que l'algèbre. Nous pouvons également retrouver cette notion de groupe, avec les mêmes caractéristiques, en physique pour comprendre la subatomique, la théorie de la relativité, la théorie quantique et la science des matériaux.

Nous commencerons par présenter les concepts de la loi de composition interne, suivi des groupes abéliens, l'ordre d'un groupe, les morphismes et les isomorphismes de groupe, les sous-groupes normaux et les quotients, les classes de groupe, les groupes monogènes et cycliques, et les représentations de groupe. Nous poursuivrons avec une étude des groupes finis, en mettant l'accent sur ceux qui ont des applications en physique. Ensuite, nous explorerons les groupes continus. Nous porterons une attention particulière aux groupes $SO(2)$, $SO(3)$ et SU , ainsi qu'à d'autres exemples de groupes. Enfin, nous aborderons les théories de jauge, basées sur les symétries de jauge et trouvent des applications importantes en physique des particules et en théorie des champs.

Dans l'ensemble, ce chapitre vise à fournir une introduction claire et détaillée aux groupes.

1.1.1 Loi de composition interne

Définition :

La loi de multiplication (composition) interne est une opération binaire dans un ensemble qui associe à chaque paire d'éléments de l'ensemble un élément de cet ensemble[1].

Plus précisément, si A est un ensemble et $*$ est une opération binaire sur A , alors $*$ est une loi de multiplication interne sur A si, pour tout a et b dans A , le résultat de l'opération

$a * b$ Est également un élément de A .

Par exemple :

Soit l'ensemble $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. On définit la loi de multiplication interne $*$ sur A comme suit :

Pour tout a et b dans A , $a * b$ est le produit de a et b

Exemples :

$$2 * 3 = 6 \notin A$$

$$4 * 0 = 0$$

$$1 * 1 = 1$$

On peut vérifier que cette opération ne satisfait pas les propriétés d'une loi de multiplication (composition) interne : Pour tout a et b dans A , $a * b$ est un élément de A .

On dira que :

1. L'opération est **associative** si pour tout a, b et c dans A ,

$$(a * b) * c = a * (b * c) \dots \dots \dots (1.1)$$

2. Il existe un **élément neutre** pour cette opération qu'on note **1** si pour tout a dans A ,

$$a * 1 = 1 * a = a \dots \dots \dots (1.2)$$

3. On dira que a' est le **symétrique** de a dans A si

$$a * a' = a' * a = 1 \dots \dots \dots (1.3)$$

1.1.2 Groupe Abélien

Définition :

Les groupes Abéliens sont nommés d'après le mathématicien norvégien Niels Henrik Abel, qui a étudié les propriétés de ces groupes au début du 19^e siècle, c'est un groupe dans lequel l'ordre des éléments influe sur un résultat de l'opération, si G est un groupe Abélien alors en détail, un groupe Abélien est un groupe $(G, *)$ tel que :

Pour tout a et b dans G

$$a * b = b * a$$

C'est ce qu'on appelle la commutativité

Où $*$ est l'opération du groupe

Exemples de groupes abéliens :

➤ L'ensemble des entiers relatifs $(\mathbb{Z})$ avec l'opération d'addition est un groupe Abélien. Effectivement, l'addition est commutative, et l'élément neutre est 0

Tout élément (a) a un inverse opposé $-a$, qui satisfait :

$$a + (-a) = 0$$

➤ L'ensemble des nombres réels positifs $(\mathbb{R}^+)$ avec l'opération de multiplication est un groupe Abélien. En effet, la multiplication est commutative, et l'élément neutre est 1.

Tout élément a a un inverse multiplicatif $\frac{1}{a}$ qui satisfait

$$a \times \frac{1}{a} = 1$$

➤ L'ensemble des matrices carrées $n \times n$ avec l'opération d'addition est un groupe Abélien. En effet, l'addition de matrices est commutative, et l'élément neutre est la matrice nulle 0.

Toute matrice A a un inverse opposé $-A$, qui satisfait

$$A + (-A) = 0$$

➤ L'ensemble des vecteurs dans l'espace euclidien n -dimensionnel $(\mathbb{R}^n)$ avec l'opération de l'addition de vecteurs est un groupe Abélien. Évidemment, l'addition de vecteurs est commutative, et l'élément neutre est le vecteur nul

Tout vecteur $\vec{v}$ a un inverse opposé $-\vec{v}$, qui satisfait

$$\vec{v} + (-\vec{v}) = 0$$

1.1.3 Ordre d'un groupe

L'ordre d'un groupe est le nombre d'éléments qu'il contient. On le note généralement $|G|$. L'ordre d'un groupe peut avoir des conséquences importantes sur ses propriétés.

Exemple :

Le théorème de **Lagrange** énonce que, pour tout groupe fini G et tout sous-groupe H de G , l'ordre de H divise l'ordre de G

Ce théorème est souvent utilisé pour prouver l'existence de sous-groupes d'un certain ordre dans un groupe donné.

L'ordre d'un groupe **fini** est simplement le nombre d'éléments qu'il contient. Pour un groupe **infini**, l'ordre peut être infini ou dénombrable (c'est-à-dire en correspondance bijective avec les entiers naturels).

Par exemple :

Le groupe des entiers relatifs, noté $(\mathbb{Z}, +)$, est un groupe infini dénombrable, car il contient une infinité dénombrable d'éléments.

1.1.4 Morphisme et isomorphisme d'un groupe

Définition d'un morphisme :

Un morphisme de groupe est une fonction qui préserve la structure de groupe entre deux groupes. Plus particulièrement, soit $(G, *)$ et $(H, \oplus)$ deux groupes, un morphisme de groupe $f : G \rightarrow H$ est une fonction qui satisfait la propriété suivante[2] :

$$\text{Pour tout } a, b \in G : f(a * b) = f(a) \oplus f(b) \dots\dots\dots (1.4)$$

Remarque :

Un morphisme de groupe est une fonction qui respecte l'opération de groupe, c'est-à-dire que l'image de la combinaison de deux éléments est égale à la combinaison des images de ces éléments.

Définition d'un isomorphisme

Un isomorphisme de groupe $f : G \rightarrow H$ est un morphisme de groupe bijectif [3].

En d'autres termes, f est une fonction qui satisfait les propriétés suivantes :

1. Pour tous a, b dans G : $f(a * b) = f(a) \oplus f(b)$ (la structure de groupe est **préservée**)
2. Pour tous h dans H , il existe un a dans G tel que : $f(a) = h$ (f est **surjective**)
3. Pour tous a, b dans G : si $f(a) = f(b)$, alors $a = b$ (f est **injective**)

Les isomorphismes de groupes sont importants car ils permettent de classifier les groupes en fonction de leur structure et simplifient l'étude des propriétés algébriques des groupes.

1.1.5 Sous-groupe normal-quotient

Définition : Un sous-groupe normal est donc un sous-groupe particulier de G qui est "compatible" avec la structure de groupe G , dans le sens où il permet de définir un groupe quotient.

Les sous-groupes normaux et les sous-groupes quotients sont importants en théorie des groupes car ils permettent de caractériser les groupes simples, qui sont les groupes qui n'ont pas de sous-groupes normaux non triviaux et permettent aussi de simplifier l'étude des groupes en les ramenant à des groupes plus simples.

Exemple :

Pour étudier un groupe G , il peut être utile de considérer ses sous-groupes normaux et les groupes quotients correspondants.

Soit $\mathcal{N}$ un sous-groupe normal d'un groupe G . Le sous-groupe quotient $\frac{G}{\mathcal{N}}$ est défini comme l'ensemble des classes latérales de $\mathcal{N}$ dans G , chaque élément g de G appartient à une unique classe latérale, où n est un élément de $\mathcal{N}$. On note cette ensemble $\frac{G}{\mathcal{N}}$.

La différence principale entre un sous-groupe normal et un sous-groupe quotient est que le premier est un sous-groupe de G qui est "invariant" par conjugaison dans G , tandis que le second est un groupe qui est obtenu en prenant l'ensemble des classes latérales d'un sous-groupe normal de G .

Le sous-groupe quotient permet de factoriser G par $\mathcal{N}$ et de construire un nouveau groupe à partir des classes latérales.

1.1.6 Classe d'un groupe

En physique, la notion de classe est souvent utilisée pour décrire les éléments d'un groupe qui sont "équivalents" les uns aux autres par une certaine relation. Plus spécifiquement, si $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur un groupe G , alors les classes d'équivalence (ou classes latérales) pour si $\mathcal{R}$ sont définies comme les ensembles d'éléments de G qui sont équivalents entre eux par $\mathcal{R}$.

Les classes d'équivalences peuvent être utilisées pour partitionner un groupe G en ensembles disjoints.

De plus, chaque classe d'équivalence peut être représentée par un élément "représentatif" de la classe, qui est souvent choisi pour être un élément canonique de la classe.

Par exemple, dans le groupe des entiers relatifs $\mathbb{Z}$, la classe latérale d'un élément a est de la forme

$$a + nk : k \text{ Dans } \mathbb{Z}$$

Où a est un entier fixé et n est un entier positif fixé.

Les classes d'équivalence sont également importantes pour étudier les sous-groupes et les sous-groupes normaux d'un groupe G .

Par exemple, si $\mathcal{N}$ est un sous-groupe normal de G , alors les classes latérales de $\mathcal{N}$ forment un groupe quotient, qui est un outil utile pour étudier la structure de G .

De plus, les classes latérales de $\mathcal{N}$ peuvent être utilisées pour décrire la structure de certains sous-groupes de G , tels- que les sous-groupes engendrés par des éléments spécifiques de G .

1.1.7 Groupes monogène-groupe cyclique

Définition

Un groupe est dit cyclique s'il peut être généré à partir d'un seul élément, puisque les éléments sont commutatifs avec leurs puissances. En effet, tout élément du groupe peut être obtenu en effectuant des opérations de multiplication ou d'exponentiation d'un élément générateur. En algèbre, un groupe cyclique ou groupe monogénique est un groupe qui a un élément connu sous le nom de générateur, qui peut être utilisé pour exprimer tout autre élément du groupe par multiplication.

Groupe monogène additif :

La loi du groupe monogène additif peut être exprimée comme suit :

Pour tout entier n, m dans le groupe, l'opération de composition est définie par :

Pour tout élément $g \in G$ il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel-que

$$n \ g = g + g + g + \dots + g \dots \dots \dots (n \text{ Fois})$$

Groupe monogène multiplicatif :

La loi du groupe monogène multiplicatif peut être exprimée comme suit :

Pour tout entier n, m dans le groupe, l'opération de composition est définie par :

$$g^n = g * g * g * \dots \dots \dots (n \text{ Fois})$$

Pour un groupe cyclique ou monogénique :

Soit G un groupe cyclique ou **monogénique** avec un générateur g .

Les éléments de G peuvent être exprimés de la manière suivante :

$$\begin{aligned} g^0 &= e \quad ; \quad g^1 = g \quad ; \quad g^2 = g * g \quad ; \\ g^3 &= g * g * g; \quad g^n = g * g * \dots * g \quad (n \text{ fois}) \end{aligned}$$

Dans cette suite, g^0 représente l'élément neutre ou l'identité du groupe, généralement noté e .

Si nous avons un groupe cyclique **additif** avec un générateur g

La suite mathématique serait :

$$\begin{aligned} 0 * g &= 0 \quad ; \quad 1 * g = g \quad ; \quad 2 * g = g + g \quad ; \\ 3 * g &= g + g + g; \quad n * g = g + g + \dots + g \quad (n \text{ fois}) \end{aligned}$$

En d'autres termes, la différence principale entre le groupe cyclique est monogène réside dans la façon dont les groupes sont présentés

Un groupe cyclique met l'accent sur la possibilité de générer tout le groupe à partir d'un seul élément générateur, tandis qu'un groupe monogène met l'accent sur l'existence d'un générateur qui peut être utilisé pour exprimer tous les éléments du groupe.

Cependant, il convient de noter que dans la pratique, parce qu'un groupe cyclique est en effet un groupe monogène. La distinction précise entre les deux dépend souvent du contexte et de la terminologie spécifique utilisée.[4]

1.1.8 Représentation d'un groupe

En théorie des groupes, une représentation d'un groupe G est une manière d'associer à chaque élément g de G une matrice $A(g)$ qui préserve la structure du groupe [5].

Groupe cyclique :

Le groupe cyclique Z_n est un groupe fini avec n éléments. Une représentation du groupe Z_n est donnée par les matrices de rotation. Prenons un exemple de groupe Z_3 :

Le groupe cyclique, Z_3 également connu sous le nom de groupe des entiers modulo 3 sa représentation matricielle de Z_3 est une matrice 3×3 , où chaque colonne représente un élément de Z_3 .

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dans cette représentation, la multiplication matricielle correspond à l'opération du groupe dans Z_3 .

Par exemple :

Si nous voulons multiplier 1 et 2 dans Z_3 , nous pouvons effectuer la multiplication matricielle de la deuxième et de la troisième colonne

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Groupe diédral :

Le groupe diédral D_n est le groupe de symétrie d'un polygone régulier à n côtés. Une représentation de D_n est donnée par les matrices d'identité, de rotation et de réflexion. Exemple de groupe D_2 une matrice 2×2 :

Pour l'identité (e) :

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour la réflexion (r) :

$$r = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour obtenir le résultat de la composition de la réflexion r avec elle-même, nous voulons effectuer la multiplication matricielle suivante :

$$e = r * r = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $r * r = e$ dans $D2$.

Groupe symétrique :

Le groupe symétrique S_n est le groupe de toutes les permutations d'un ensemble de n éléments. Une représentation de S_n est donnée par les matrices de permutation par exemple Le groupe symétrique S_3 est un groupe de permutations des trois éléments $\{1, 2, 3\}$:

Identité (e): (1)(2)(3)

Permutation 2 : (1 3)(2) Permutation 3 : (2 3)(1) Permutation 4 : (1 2)(3)

Permutation 5 : (1 2 3) Permutation 6 : (1 3 2)

Dans cette notation, chaque parenthèse représente un cycle.

Par exemple :

(1 2) Signifie que l'élément 1 est permuté avec l'élément 2, tandis que (1 2 3) signifie que l'élément 1 est permuté avec l'élément 2, lequel est ensuite permuté avec l'élément 3.

Les représentations sont également utilisées en physique, où elles fournissent un moyen de décrire les symétries des systèmes physiques en termes de groupes de symétrie.

1.2 Groupes finis

Définition :

Soit G le groupe La loi de composition de ce groupe est généralement notée de manière multiplicative, ce qui signifie que si nous prenons deux éléments a et b du groupe G , leur composition sera notée ab .

L'élément neutre du groupe G est symbolisé par 1, ce qui signifie que pour tout élément a de G , a multiplié par 1 est égal à a .

Cependant, dans le cas spécifique où le groupe G est Abélien (c'est-à-dire commutatif), la loi de composition est notée de manière additive.

Dans ce cas, l'élément neutre du groupe est représenté par le symbole 0, ce qui signifie que pour tout élément a de G , a ajouté à 0 est égal à a .

On dit que G est un groupe fini lorsque l'ensemble G est fini. Le nombre d'éléments de G est alors noté $|G|$ et est appelé ordre du groupe.[4]

Comme G est fini Le **principe de Dirichlet des tiroirs** (ou des cages à pigeons) permet de montrer que l'ensemble $E_g = \{k \in \mathbb{N}^* \mid g^k = 1, g \in G, \}$ est non vide.

Il admet donc un plus petit élément, est ce qui signifie qu'il existe au moins un entier k qui satisfait cette condition que l'on appelle l'ordre de g .

En résumé ; le principe de Dirichlet garantit qu'un groupe fini contient un élément dont la puissance est égale à l'élément neutre, et l'ordre de cet élément est le plus petit entier positif pour lequel cette égalité se produit

1.2.1 Groupes finis qui servent en physique

Il existe de nombreuses représentations de groupes finis. On donne quelques exemples de représentations de groupes finis :

Exemples de représentations des groupes finis: S_n, S_3, C_{3v} et D_3

- Groupe symétrique S_n :

Comme mentionné précédemment, une représentation de S_n est donnée par les matrices de permutation.

Par exemple :

Pour le groupe S_n avec $n = 3$, nous avons les **six** permutations suivantes :

L'élément d'identité e : $(1\ 2\ 3)$

Les transpositions $(1\ 2)$, $(1\ 3)$ et $(2\ 3)$

Les permutations $(1\ 2\ 3)$ et $(1\ 3\ 2)$

Les matrices de permutation correspondantes sont :

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(12) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(1\ 3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(2\ 3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(1\ 2\ 3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(1\ 3\ 2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

• **Groupe symétrique S_3 :**

Le groupe symétrique S_3 est le groupe de toutes les permutations de trois éléments. Il a six éléments et peut être représenté graphiquement par un triangle.

• **Groupe de symétrie C_{3v} :**

Le groupe C_{3v} est le groupe de symétrie d'un triangle équilatéral. Il a six éléments et peut être représenté graphiquement par un triangle.

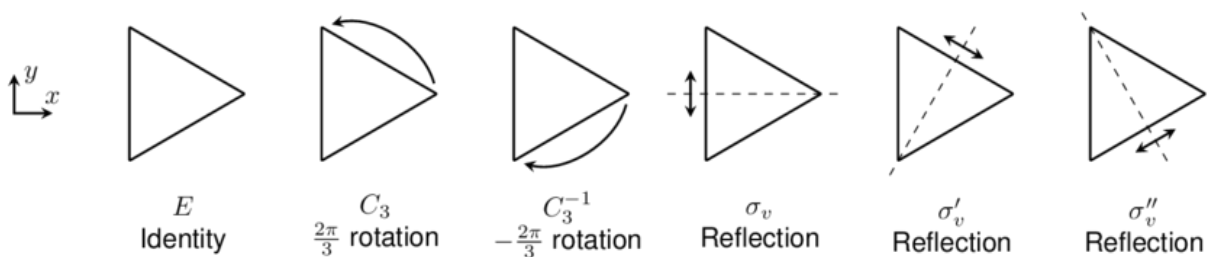


Figure 1.1 : Opérations de symétrie de C_{3v}

- E : Opération d'identité (pas de symétrie).
- C_3 : Rotation de 120 degrés vers le haut
- C_3^{-1} : Rotation de 240 degrés vers le sens opposé de C_3
- σ_v : première Réflexion par rapport à un axe passant par le milieu de x
- σ'_v : deuxième Réflexion par rapport à l'axe x

- σ_v : troisième Réflexion par rapport au l'axe x est y qui sépare à deux triangles

Ces opérations de symétrie décrivent les différentes transformations que l'on peut effectuer sur le triangle équilatéral tout en conservant sa forme.

Les matrices de représentation de groupe correspondantes sont :

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C_3 = \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_v = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \sigma_{v'} = \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ces exemples de représentations sont toutes des représentations de matrices.

Une petite application pour le groupe C_{3v} :

Soit un triangle équilatéral ABC .

Appliquons les opérations de symétrie du groupe C_{3v} à un point $P(x, y)$ situé à l'intérieur du triangle.

Utilisons les matrices de représentations pour déterminer les images de P après chaque opération de symétrie.

1. Réflexion verticale (σ_v) :

Appliquons la réflexion verticale à P en utilisant la matrice de représentation σ_v :

$$P' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \\ z \end{pmatrix}$$

L'image de P après la réflexion verticale est $P'(x, -y)$.

2. Rotation de 120 degrés dans le sens des aiguilles d'une montre (C_3) :

Appliquons la rotation de 120 degrés à P en utilisant la matrice de représentation C_3 :

$$P' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{x}{2} - y\frac{\sqrt{3}}{2} \\ x\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{y}{2} \\ z \end{pmatrix}$$

3. Réflexion diagonale ($\sigma v'$) :

Appliquons la réflexion diagonale à P en utilisant la matrice de représentation $\sigma v'$:

$$P'' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{x}{2} + y\frac{\sqrt{3}}{2} \\ x\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{y}{2} \\ z \end{pmatrix}$$

Cet exemple nous permet de comprendre le rôle des opérations de symétrie du groupe C_{3v} et d'utiliser les matrices de représentation pour effectuer des transformations géométriques sur un point donné.

Cependant, il existe également des représentations de groupes finis en termes d'autres structures, telles que les polynômes ou les fonctions.

1.3 Groupes continus

Définition :

Un groupe continu est un groupe mathématique qui est défini comme un ensemble de transformations continues qui possèdent une structure de groupe.

En d'autres termes, un groupe continu est un groupe dont les éléments sont des transformations continues, telles que des transformations linéaires, des rotations, des translations, des symétries, etc.

Les transformations continues sont des fonctions qui conservent la continuité de l'espace sur lequel elles agissent.

Elles peuvent être définies par des équations différentielles ou des équations aux dérivées partielles.

Un exemple de groupe continu serait le groupe des nombres réels non nuls sous l'opération de la multiplication. Ce groupe est continu car il est possible de trouver une suite

de nombres réels non nuls qui se rapproche arbitrairement d'une valeur donnée, et l'opération de multiplication est continue sur cet ensemble. Ce groupe est également abélien (commutatif), car l'ordre de multiplication des éléments n'affecte pas le résultat final.

1.3.1 Groupes continus qui servent en physique

Il existe plusieurs groupes continus importants en physique, on cite quelques exemples

Le groupe de Lorentz :

Ce groupe décrit les transformations de l'espace-temps de la relativité restreinte. Il est composé de deux parties : le groupe de *Poincaré*, qui inclut les translations dans l'espace-temps, et le groupe de *Lorentz propre*, qui inclut les rotations et les transformations de Lorentz.

Le groupe des rotations dans l'espace à trois dimensions :

ce groupe décrit les rotations dans l'espace à trois dimensions et est important en mécanique classique et en physique quantique.

Le groupe des transformations conformes :

Ce groupe décrit les transformations qui préservent les angles entre les courbes et est important en théorie des champs conformes.

• Le groupe $SU(2)$:

Ce groupe décrit les rotations dans l'espace à trois dimensions mais peut également être utilisé pour décrire les états quantiques de particules de $\text{spin} \frac{1}{2}$; Il est utilisé en physique des particules et en physique quantique.

• Le groupe $SU(3)$:

Ce groupe décrit les rotations dans un espace complexe à trois dimensions et est utilisé pour décrire les interactions entre particules composées de **quarks**, appelées **Hadrons**. Il est utilisé en physique des particules et en physique nucléaire.

• Le groupe $U(1)$:

Ce groupe décrit les transformations de phase d'un champ complexe et est utilisé pour décrire les interactions électromagnétiques en physique des particules et en électrodynamique quantique.

Ces groupes continus sont importants en physique car ils permettent de décrire les systèmes fondamentaux de la nature et de formuler les lois physiques en termes mathématiques précis.

1.3.2 Groupes continus ($SO(2)$ ($SO(3)$ (SU

Les groupes continus de $SO(2)$, $SO(3)$ et $SU(2)$ sont des exemples importants de groupes. Le groupe $SO(2)$ est le groupe des rotations du plan euclidien à deux dimensions.

Les éléments de ce groupe sont des matrices de rotation de la forme :

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

Où θ est un angle de rotation.

Ce groupe est commutatif et est isomorphe au groupe des nombres réels modulo 2π .

• Le groupe $SO(3)$:

C'est le groupe des rotations dans l'espace à trois dimensions. Les éléments de ce groupe sont des matrices de rotation 3×3 qui préservent la norme euclidienne.

$$R(\theta_x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta_x) & -\sin(\theta_x) \\ 0 & \sin(\theta_x) & \cos(\theta_x) \end{pmatrix} \quad R(\theta_y) = \begin{pmatrix} \cos(\theta_y) & 0 & \sin(\theta_y) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\theta_y) & 0 & \cos(\theta_y) \end{pmatrix}$$

$$R(\theta_z) = \begin{pmatrix} \cos(\theta_z) & -\sin(\theta_z) & 0 \\ \sin(\theta_z) & \cos(\theta_z) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le groupe $SO(3)$ est non-commutatif, ce qui signifie que l'ordre des rotations peut affecter le résultat final, et il est isomorphe au groupe des rotations dans l'espace projectif à trois dimensions.

Ces matrices de rotation sont utilisées pour représenter les transformations de l'espace tridimensionnel dans le groupe $SO(3)$.

• Le groupe $SU(2)$:

C'est le groupe des matrices unitaires 2×2 avec déterminant 1.

Les éléments de ce groupe sont des matrices de la forme :

$$U(\theta, \varphi, \psi) = \begin{pmatrix} e^{i(\theta+\psi)/2} * \cos(\varphi/2) & -e^{i(\theta-\psi)/2} * \sin(\varphi/2) \\ e^{i(\psi+\theta)/2} * \sin(\varphi/2) & e^{-i(\theta+\psi)/2} * \cos(\varphi/2) \end{pmatrix}$$

Il convient de noter que ces matrices sont des matrices unitaires 2×2 avec un déterminant de 1 ce qui signifie qu'elles préservent la norme et sont inversibles où θ , φ , et ψ sont des angles. Ce groupe est non-commutatif et est isomorphe au groupe des rotations dans l'espace à trois dimensions avec une double réouverture. Ces groupes sont très importants en physique des particules et en physique quantique, où ils sont utilisés pour décrire les symétries et les interactions fondamentales de la matière.

1.3.3 Autres exemples de groupes

1.3.3.1 Groupes de symétries moléculaires

Les groupes de symétries moléculaires correspondent à des ensembles de déplacements dans l'espace qui préservent la structure d'une molécule. Les molécules sont composées d'atomes d'un ou plusieurs éléments chimiques. Les groupes de symétries moléculaires correspondent à des déplacements dans l'espace qui envoient chaque atome de la molécule sur un autre atome du même élément.

Exemple :

La molécule de méthane CH_4 est constituée de 4 atomes d'hydrogène placés aux sommets d'un tétraèdre régulier, et d'un atome de carbone situé au centre. Ainsi, le groupe de symétrie de cette molécule est le groupe T de symétrie du tétraèdre régulier.

La molécule de méthane (CH_4) possède un groupe de symétrie appelé groupe tétraédrique T_d . Ce groupe de symétrie comprend différentes transformations qui préservent les propriétés moléculaires. Les transformations incluent **Identité** (E) ; **Rotation**

d'ordre 3 (C_3) Cette transformation représente une rotation de 120 degrés dans le sens antihoraire autour d'un axe passant par le centre de la molécule ; **Réflexion (σ)** ; **Rotation d'ordre 2 (C_2)** etc.... Ainsi que d'autres transformations qui représentent les différentes symétries et rotations possibles pour la molécule de méthane dans le groupe tétraédrique T_d

Elles permettent de décrire comment la molécule se transforme sous ces opérations de symétrie.

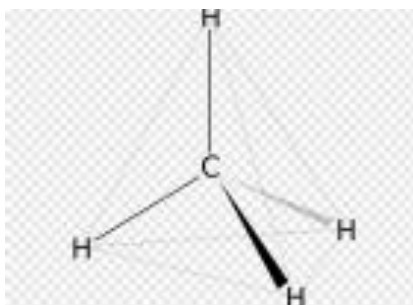


Figure 1.2 : Molécule de méthane CH_4 .

1.3.3.2 Groupes cristallographiques

Un groupe cristallographique est un ensemble de symétries qui préservent la structure d'un cristal. Les groupes cristallographiques sont classés en 230 types différents en fonction de leurs symétries, qui peuvent inclure des rotations, des réflexions et des translations. Ces groupes cristallographiques sont utilisés pour décrire la symétrie des cristaux et peuvent aider à déterminer leur structure atomique et moléculaire. Les cristaux sont des solides caractérisés par l'agencement des molécules de manière à ce qu'un petit ensemble de molécules, appelé motif, engendre l'ensemble du cristal par des déplacements, le motif est répété périodiquement à travers tout le cristal pour former sa structure [6].

Quelques exemples de groupes cristallographiques :

1. **Groupe ponctuel** : Le groupe de symétrie le plus simple est le groupe ponctuel, qui décrit les symétries au niveau des points. Il comprend des opérations telles que l'identité, les rotations d'ordre n , les réflexions et les inversions.

2. **Groupe planaire** : Ce groupe de symétries décrit les symétries au niveau d'un plan. Il comprend des opérations telles que les rotations d'ordre n autour d'un axe perpendiculaire au plan, les réflexions par rapport au plan et les glissements de plan.

3. **Groupe spatial** : Ce groupe de symétries décrit les symétries tridimensionnelles. Il comprend des opérations telles que les rotations d'ordre n autour d'un axe, les réflexions par rapport à un plan et les translations.

Exemple de groupe cristallographie NA CL :

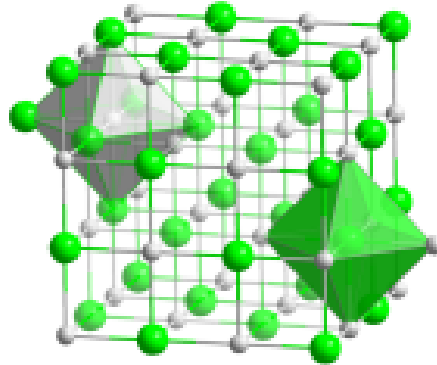


Figure 1.3 : Cristal de NA Cl (sel).

1.3.3.3 Groupes de Galilée et de Poincaré

Les groupes de Galilée et de Poincaré sont deux groupes importants en physique qui décrivent les symétries de l'espace et du temps. Le groupe de Galilée décrit les symétries en physique non relativiste, tandis que le groupe de Poincaré décrit les symétries en relativité restreinte et générale. Les deux groupes sont des outils mathématiques.



Henri Poincaré
1854-1912



Galilée
1564-1642

Figure 1.4 : Les physiciens.

Chapitre 01 : Préliminaires

Les lois de la physique sont caractérisées par leurs symétries, qui sont des transformations de l'espace-temps préservant ces lois. Les changements de référentiels galiléens, c'est-à-dire les changements de coordonnées, préservent les lois de la mécanique par exemple. Les transformations du groupe de Galilée-Newton sont décrites par :

$$x' = x - vt \quad t' = t \quad \dots\dots\dots (1.5)$$

En relativité restreinte, les groupes de symétries sont le groupe de Galilée-Newton et le groupe de Lorentz, où c 'est la vitesse de la lumière dans le vide. Les transformations du groupe de Galilée-Newton préservent les lois de la mécanique, tandis que les transformations du groupe de Lorentz préservent les lois de l'électromagnétisme de Maxwell, comme l'a remarqué Poincaré. Les transformations du groupe de Lorentz sont décrites par des équations incluant le facteur de Lorentz et la vitesse de la lumière.

Les transformations du groupe de Lorentz, en revanche, sont décrites par :

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}, \quad t' = \frac{t - (v/c)^2 x}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

1.4 Théorie de Gauge

Ces dernières années, les théories de jauge ont connu un développement spectaculaire et sont devenues omniprésentes. Elles reposent sur une distinction entre symétrie interne globale et symétrie interne locale. Dans le cas d'une symétrie globale, l'action d'un groupe G sur un champ $\phi(x)$ ne dépend pas du point x , tandis que dans le cas d'une symétrie locale, l'action $de G$ varie d'un point à un autre.

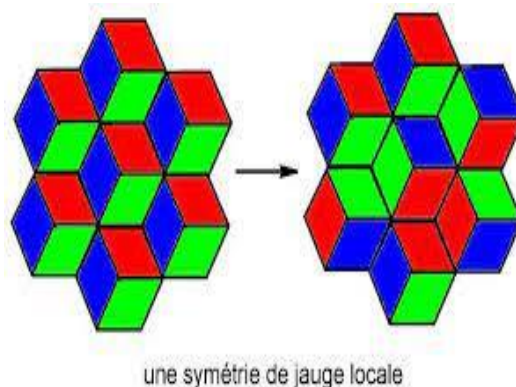


Figure 1.5 : symétrie de jauge locale.

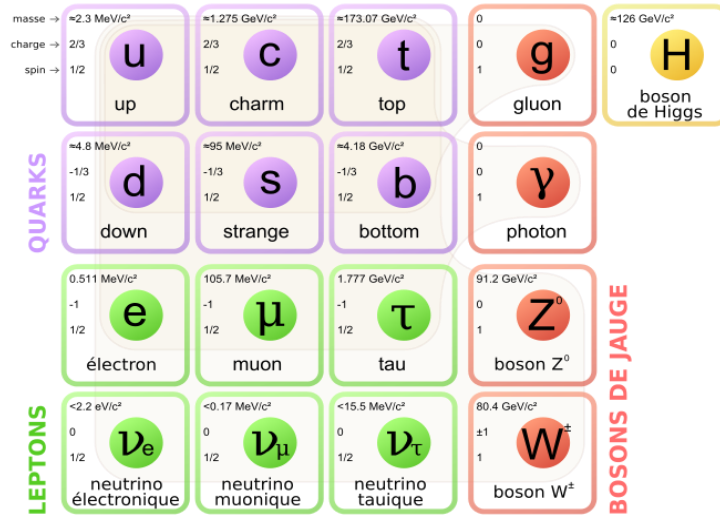


Figure 1.6 : Modèle standard des particules élémentaires.

1. La figure (1.5) : représente Le modèle standard des particules élémentaires est une théorie de jauge qui décrit l'interaction électrofaible et forte entre les particules élémentaires
2. La figure (1.6) : représente La symétrie de jauge locale est une théorie de groupe où l'action du groupe de jauge varie en fonction de la position.

Les théories de jauge, qui reposent sur une telle symétrie locale, sont basées sur des groupes de jauge. Les théories de jauge sont basées sur des équations qui décrivent les champs de jauge et les interactions entre eux. La théorie de jauge est une théorie de champ basée sur des groupes de jauge. Par exemple, la théorie électrofaible est décrite par les équations de l'interaction électrofaible :

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}i\gamma^\mu(D_\mu - ig\frac{\tau_a}{2}W_\mu^a - ig'B_\mu Y)\psi + |D_\mu\phi|^2 - V(\phi) \quad \text{..... (1.6)}$$

De même, la chromodynamique quantique, qui décrit l'interaction forte, est décrite par les équations de la QCD [7].

$$\mathcal{L}_{QCD} = -\frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu} + \bar{q}_i i\gamma^\mu (D_\mu)_{ij} q_j - m_i \bar{q}_i q_i, \quad \text{..... (1.7)}$$

En effet La QCD est une théorie non Abélienne, ce qui signifie que les gluons eux-mêmes portent une charge de couleur et peuvent interagir entre eux. Cette propriété de l'interaction forte conduit à des phénomènes tels que le confinement des quarks, c'est-à-dire

qu'ils ne peuvent pas être observés directement en tant que particules libres, mais seulement sous forme de particules composites.

Les théories de jauge ont été très fructueuses dans la physique moderne, notamment dans la description des interactions électromagnétiques (théorie électrofaible basée sur le groupe de jauge $SU(2) \times U(1)$ et des interactions fortes (QCD basée sur le groupe de jauge $SU(3)$). Elles ont permis de formuler le modèle standard de la physique des particules, qui est une théorie unifiée décrivant les interactions fondamentales et les particules élémentaires connues.

Les équations fondamentales des théories de jauge sont connues sous le nom d'équations de Yang-Mills. Dans le cas le plus simple, les équations de Yang-Mills peuvent être écrites comme suit :

$$D_\mu F_{\mu\nu} = j_\nu \dots\dots\dots (1.8)$$

$F_{\mu\nu}$: Le tenseur de champ de jauge

D_μ : La dérivée covariante

j_ν : représente les sources de courant associées aux particules chargées.

Ces équations expriment l'équilibre entre les forces de jauge et les sources de courant. Elles décrivent comment les champs de jauge interagissent avec les particules chargées et comment ils se propagent dans l'espace-temps.

Plusieurs différents contextes de la théorie de jauge impliquent l'électrodynamique quantique (QED) : L'équation de Yang-Mills pour l'interaction électromagnétique est donnée par :

$$\partial_\mu A_\mu = -e J_\mu \dots\dots\dots (1.9)$$

Où

A_μ : est le champ de jauge électromagnétique (le photon)

J_μ : est le courant électrique des particules chargées

e : est la charge électrique

Un autre exemple de cette théorie de jauge qu'on appelle la Théorie de Jauge Unifiée. (théorie électrofaible) : Dans le cadre de la théorie électrofaible, les équations de Yang-Mills combinent l'interaction électromagnétique (basée sur le groupe de jauge $U(1)$) et l'interaction faible (basée sur le groupe de jauge $SU(2)$)

Ces équations décrivent l'interaction entre les champs de jauge

$W_{\pm}, Z^0$ (Bosons de jauge faible) et les courants associés.

En résumé :

Les théories de jauge utilisent des symétries de jauge basées sur des groupes de transformations pour décrire les interactions fondamentales.

La théorie des groupes joue un rôle crucial dans la formulation et l'étude de ces théories, en fournissant un cadre mathématique pour comprendre les symétries et les structures sous-jacentes.

CHAPITRE 02 : GROUPE ET ALGÈBRE DE LIE

Dans cette partie, nous allons définir les groupes et l'algèbre de Lie ainsi que leurs représentations et leurs dimensions ainsi que la symétrie en physique et ses différentes propriétés utilisées en physique.

2.1 Notions de base

La théorie des groupes est un domaine de recherche en mathématiques et en physique qui a été initié par des scientifiques tels qu'Évariste Galois, Sophus Lie, John Von Neumann et Paul Dirac. Ces scientifiques ont tous apporté des contributions importantes au développement de cette théorie, notamment en ce qui concerne la symétrie continue, les groupes de transformations et les applications en physique.

Leurs travaux ont jeté les bases de la théorie des groupes, qui continue d'être un domaine de recherche dynamique et important aujourd'hui. Les groupes de Lie sont nommés ainsi en l'honneur du mathématicien norvégien Sophus Lie, qui les a introduits afin d'étudier certaines propriétés des équations différentielles telle que la théorie de groupes de Lie qui décrit la symétrie continue (en) en mathématiques[8].



John Von Neumann

1903-1957

Évariste Galois

1811-1832

Sophus Lie

1842- 1899

Paul Dirac

1902-1984

Figure 2.1 : Les protagonistes.

Un groupe de Lie est un groupe qui est également une variété différentielle, c'est-à-dire un espace localement euclidien où l'on peut définir des notions telles que la dérivée, l'intégration, etc...[9].

D'une manière cohérente. Une algèbre de Lie est un espace vectoriel muni d'une opération bilinéaire appelée crochet de Lie, qui satisfait certaines propriétés algébriques.

Le crochet de Lie mesure la non-commutativité de l'opération binaire associée au groupe de transformations, et il permet de décrire la structure interne du groupe de manière abstraite.

Un groupe de Lie G est un groupe topologique, localement compact, qui est également une variété différentielle telle que les applications de multiplication et de passage à l'inverse sont de classe $\mathbb{C}^\infty$.

$$G \times G \rightarrow G \quad \dots\dots\dots (2.1)$$

La loi de groupe de Lie est une opération binaire qui combine deux éléments d'un groupe de Lie pour en produire un troisième. Cette opération est généralement notée en utilisant le symbole " * ".

La loi de groupe de Lie doit satisfaire certaines propriétés pour que le groupe soit considéré comme un groupe de Lie. Si g est une algèbre de Lie, alors le crochet de Lie est une application bilinéaire, qui à chaque paire d'éléments (X, Y) lui a associé un nouvel élément $[X, Y]$ de g .

Cette opération doit satisfaire les propriétés suivantes :

1. **Antisymétrie** : $[X, Y] = -[Y, X]$ pour tout X, Y dans g .
2. **Identité de Jacobi** : $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$ pour tout X, Y, Z dans g .
3. **Linéarité à droite** : $[X, aY + bZ] = a[X, Y] + b[X, Z]$ pour tout X, Y, Z dans g et a, b dans le corps sur lequel est définie l'algèbre.

Le crochet de Lie permet de décrire la structure interne de l'algèbre de Lie de manière abstraite, sans faire référence aux éléments concrets de l'algèbre.

Cette structure peut ensuite être utilisée pour étudier les propriétés de symétrie et de transformation continue associées au groupe de transformations correspondant.

2.2 Sous-groupes de Lie

Un sous-groupe de Lie est un sous-groupe d'un groupe de Lie qui est lui-même un groupe de Lie. Dans la physique fondamentale, nous utilisons les groupes de Lie de $GL(n, \mathbb{C})$ et surtout les groupes spéciaux unitaires $SU_n(\mathbb{C})$ [10]. On dit que le sous-groupe de Lie est muni d'une structure de variété différentielle telle que les opérations de groupe sont des fonctions lisses.

Un exemple simple de sous-groupe de Lie est le cercle unité S^1 , qui est un sous-groupe de Lie muni de la multiplication euclidienne.

De manière plus générale, toute sous-variété différentielle régulière d'un groupe de Lie est un sous-groupe de Lie.

Les sous-groupes de Lie ont des propriétés intéressantes qui permettent de les étudier de manière approfondie, par exemple, **le théorème de Cartan** :

Soit g une algèbre de Lie semi-simple et h une sous-algèbre de Cartan de g . Alors, tout élément régulier de g appartient à une unique sous-algèbre de Borel de g ; qu'il montre que tout sous-groupe de Lie compact d'un groupe de Lie semi-simple est contenu dans un tore maximal, qui est un sous-groupe de Lie Abélien maximal.

Un exemple concret de sous-groupe de Lie est le groupe spécial linéaire $SL(n, \mathbb{R})$, qui est le groupe des matrices réelles $n \times n$ ayant un déterminant égal à 1. Ce groupe est un sous-groupe de Lie de $GL(n, \mathbb{R})$, le groupe des matrices réelles $n \times n$ inversibles, muni de la multiplication matricielle. $SL(n, \mathbb{R})$ est un sous-groupe de Lie car il est fermé dans $GL(n, \mathbb{R})$ et il est muni d'une structure de variété différentielle régulière induite par l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$. Les opérations de groupe de $SL(n, \mathbb{R})$ (multiplication et inversion) sont des fonctions lisses par rapport à cette structure.

2.3 Algèbre de Lie définie par un groupe de Lie

Définition :

Algèbre de Lie définie par un groupe de Lie est une construction mathématique qui permet d'associer à chaque groupe de Lie une algèbre de Lie, qui est une structure algébrique qui capture l'essence de la géométrie de ce groupe. C'est-à-dire un groupe continu et différentiable muni d'une structure de variété

différentielle. L'algèbre de Lie ainsi définie est une algèbre de Lie réelle, c'est-à-dire une algèbre vectorielle réelle munie d'une opération de Lie. Elle est souvent notée $\mathfrak{g}$, et on parle de l'algèbre de Lie associée à G

Les groupes de Lie et les algèbres de Lie sont étroitement liés car chaque groupe de Lie est associé à une algèbre de Lie qui capture l'essence de sa géométrie. D'une façon générale, l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie est l'ensemble des vecteurs tangents à ce groupe en l'identité, muni d'une opération de crochet de Lie qui permet de décrire les transformations infinitésimales de ce groupe autour de son identité.

2.3.1 Application exponentielle de groupes de Lie et Algèbre de Lie

L'exponentielle d'un groupe de Lie est généralement définie par une série de Taylor, où chaque terme de la série est une puissance de l'argument de la fonction. La forme de la série de Taylor dépend du groupe de Lie considéré et de la structure de son algèbre de Lie. Cependant, pour les groupes de Lie simples telles que $SU(2)$ ou $SO(3)$, l'exponentielle peut être calculée explicitement à l'aide de formules trigonométriques.

L'application exponentielle prend un élément de l'algèbre de Lie et le transforme en un élément du groupe de Lie en utilisant une courbe intégrale.

Plus précisément, soit X un élément de l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie G . Nous considérons la courbe.

$$c(t) = \exp(tX),$$

t : est un paramètre réel. Cette courbe est une courbe de groupe de Lie qui *satisfait*.

$$c(0) = e$$

e : est l'identité du groupe G L'application exponentielle est alors définie comme :

$$\exp(X) = c(1) .$$

L'application exponentielle est une bijection locale, c'est-à-dire que pour tout élément X de l'algèbre de Lie, il existe un voisinage U de l'identité dans G tel que l'application exponentielle soit une bijection de l'ensemble des vecteurs tangents en l'identité de U à U .

Cela signifie que l'on peut définir une application inverse locale appelée l'application logarithmique, qui à tout élément de G près de l'identité associe un élément de l'algèbre de Lie. L'application exponentielle est donc une façon de passer de la description locale du groupe de Lie à la description globale, et l'application logarithmique est la réciproque de cette transformation.

L'exponentielle de l'algèbre de Lie de Pauli peut être écrite explicitement en termes de matrices de Pauli, qui sont définies comme suit :

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

L'exponentielle de l'algèbre de Lie de Pauli est donnée par la formule suivante :

$$\exp(i\theta(\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\sigma})/2) = \cos(\theta/2)I + i(\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\sigma})\sin(\theta/2) \dots \dots \dots (2.2)$$

Où $\mathbf{a}$ est un vecteur réel de trois composantes, θ est un paramètre réel et I est la matrice identité. Cette formule permet de transformer un élément algébrique de $SU(2)$ en un élément du groupe lui-même.

2.3.2 Espace tangent de toutes les courbes autour de l'identité de tous les groupes

Pour tout groupe de Lie G , l'espace tangent de toutes les courbes autour de l'identité est l'algèbre de Lie de G , notée $\mathfrak{g}$.

Cet espace est constitué de tous les vecteurs tangents à G en l'identité, c'est-à-dire de toutes les dérivées tangentes possibles à des courbes passant par l'identité de G .

Ces vecteurs tangents peuvent être combinés via l'opération de crochet de Lie pour obtenir d'autres vecteurs tangents

Cette opération décrit comment les vecteurs tangents évoluent le long des courbes infinitésimales dans le groupe de Lie, et est essentielle pour comprendre la géométrie de G . [11]

Exemple :

Soit $G = (\mathbb{R}^*, \times)$, le groupe multiplicatif des nombres réels non nuls avec l'opération de multiplication. Dans ce cas, l'élément identité est 1

Pour trouver l'espace tangent nous devons considérer les courbes passant par l'identité au temps de cette courbure

$$c(t) = e^t$$

e : est la constante d'Euler (~ 2.718) et t est le paramètre réel.

$$a \ t = 0$$

$$c'(0) = e^0 = 1.$$

D'une manière générale, pour le groupe multiplicatif des nombres réels non nuls $(\mathbb{R}^*, \times)$, l'espace tangent à l'identité est $T_1(\mathbb{R}^*) = \{k * 1 \mid k \in \mathbb{R}\}$

Où : 1 représente le vecteur tangent à la courbe

$$c(t) = e^t \text{ à } t = 0$$

$k * 1$ Représente une multiplication scalaire de ce vecteur tangent.

Remarque :

- **Le groupe de Lie $U(n)$** est l'ensemble des *matrices* $n \times n$ unitaires

. C'est-à-dire des matrices X telles que $XX^T = I$,

Où T désigne la transposition conjuguée et I la matrice identité. C'est un groupe de Lie compact.

- **Le groupe de Lie $SU(n)$** est le sous-groupe de $U(n)$ des matrices unitaires de déterminant 1, c'est-à-dire des matrices X telles que $XX^T = I$ et $\text{Det}(X) = 1$.

- **Le groupe de Lie $SO(n)$** est l'ensemble des matrices $n \times n$ orthogonales, c'est-à-dire des matrices X telles que $XX^T = I$ et $\text{Det}(X) = 1$, Où T désigne la transposition.

C'est un groupe de Lie non compact.

Remarque : Les matrices unitaires carrées à coefficients réels sont les matrices orthogonales.

• **Le groupe de Lie $SL(n, \mathbb{R})$** est le groupe spécial linéaire, c'est-à-dire l'ensemble des matrices $n \times n$ de déterminant 1 à coefficients réels

C'est un groupe de Lie non compact.

• **Le groupe de Lie $SL(n, \mathbb{C})$** est le sous-groupe de $GL(n, \mathbb{C})$ des matrices de déterminant 1, c'est-à-dire des matrices X telles que $\text{Det}(X) = 1$.

C'est un groupe de Lie non compact.

Donc une algèbre $\mathfrak{g}$ (qui sont respectivement contenues dans une algèbre de Lie) est dite compacte si elle est l'algèbre d'un groupe de Lie compact. Différentes algèbres de Lie données en exemple plus haut

Il vient que, l'espace tangent de toutes les courbes autour de l'identité d'un groupe de Lie est l'algèbre de Lie associée à ce groupe[12]

2.3.3 Dimension d'un groupe de Lie

La dimension d'un groupe de Lie est définie comme la dimension de la variété différentielle qui le définit. La loi de dimension d'un groupe de Lie est donnée par la formule suivante :

$$\dim(G) = \dim(T_e(G)) \dots \dots \dots (2.3)$$

Où $\dim(G)$ est la dimension du groupe de Lie G et $\dim(T_e(G))$ est la dimension de l'espace tangent de G en l'identité e ; la dimension du groupe de Lie est égale à la dimension de l'espace tangent de ce groupe en l'identité. Cette loi est une conséquence de la définition même des groupes de Lie, qui sont des groupes continus et différentiables munis d'une structure de variété différentielle.

La plupart des groupes de Lie étudiés ont une dimension finie, ce qui signifie que leur variété différentielle est un espace euclidien de dimension finie.

Par exemple, le groupe spécial linéaire $GL(n, \mathbb{R})$ est un groupe de Lie de dimension n^2 , car il est constitué de matrices $n \times n$ à coefficients réels.

2.3.4 Types de groupes de Lie

Les groupes de Lie sont classés selon leurs propriétés algébriques (Abélien, simple, semi-simple, résoluble), ou bien topologiques (connexe, simplement connexe, compact). Il existe plusieurs types de groupes de Lie, classés en fonction de leur structure et de leurs propriétés.

- **Groupes de Lie simples** : Ce sont des groupes de Lie qui ne peuvent pas être décomposés en un produit de groupes de Lie plus simples.

Les groupes de Lie simples sont d'une importance particulière en physique théorique et en mathématiques, car ils constituent les blocs de construction de nombreux autres groupes de Lie.

- **Groupes de Lie semi-simples** : Ce sont des groupes de Lie qui peuvent être décomposés en un produit de groupes de Lie simples.

- **Groupes de Lie compacts** : Ce sont des groupes de Lie pour lesquels l'ensemble des éléments du groupe est borné

- **Groupes de Lie non-compacts** : Ce sont des groupes de Lie pour lesquels l'ensemble des éléments du groupe n'est pas borné.

Les groupes de Lie non-compacts sont souvent associés aux symétries continues. [8]

- **Groupes de Lie nilpotents** : Ce sont des groupes de Lie pour lesquels toutes les valeurs de leur algèbre de Lie sont nulles.

Les groupes de Lie nilpotents sont utilisés pour décrire les mouvements d'objets mathématiques tels que les surfaces.

- **Groupes de Lie solvables** : Ce sont des groupes de Lie pour lesquels il existe une suite finie de sous-groupes, chacun étant un groupe de Lie nilpotent, qui conduit au groupe de Lie complet.

Il existe d'autres classifications de groupes de Lie, en fonction de leur structure algébrique ou de leurs propriétés géométriques.

2.4 Propriétés de groupes et algèbres de Lie

Les groupes de Lie et les algèbres de Lie sont étroitement liés, et de nombreuses propriétés des groupes de Lie ont leur correspondance dans les algèbres de Lie associées. Les propriétés importantes des groupes de Lie et de leurs algèbres de Lie associées :

1. Homomorphisme de groupes de Lie : Tout homomorphisme de groupes de Lie est également un homomorphisme d'algèbres de Lie.

2. Algèbre de Lie associée : À tout groupe de Lie est associée une algèbre de Lie, qui est l'espace tangent en l'identité du groupe de Lie. Cette algèbre de Lie contient des informations sur la géométrie locale du groupe de Lie.

3. Sous-algèbres de Lie : Les sous-groupes de Lie correspondent à des sous-algèbres de Lie.

4. Générateurs infinitésimaux : Les éléments de l'algèbre de Lie sont appelés les générateurs infinitésimaux du groupe de Lie, car ils décrivent les mouvements infinitésimaux autour de l'identité.

5. Crochets de Lie : Les crochets de Lie dans l'algèbre de Lie correspondent aux commutateurs de groupes de Lie.

6. Exponentielle : Tout élément de l'algèbre de Lie peut être exponentiel pour donner un élément du groupe de Lie correspondant.

7. Théorème de Lie : Tout sous-groupe fermé d'un groupe de Lie est également un groupe de Lie.

2.4.1 Isomorphisme et homomorphisme

Pour le groupe de Lie :

Un homomorphisme de groupes de Lie est une application entre deux groupes de Lie qui préserve la structure du groupe et la structure de variété différentielle.

Théorème de Cartan-Von-Neumann : tout sous-groupe fermé d'un groupe de Lie possède une unique structure différentielle pour laquelle le morphisme d'inclusion est un plongement.

Un homomorphisme de groupes de Lie de G dans H est une application différentiable. Pour tout $a, b \in G$

$$f : G \rightarrow H \quad \text{Telle- que} \quad f(ab) = f(a)f(b) \dots\dots\dots (2.4)$$

- Un isomorphisme de groupe de Lie est un homomorphisme de groupes de Lie qui est également une bijection. Plus précisément, soit G et H deux groupes de Lie.

• Un isomorphisme de groupes de Lie de G dans H est une application différentiable bijective $f : G \rightarrow H$

Telle-que $f(ab) = f(a)f(b)$ pour tout $a, b \in G$

Pour l'algèbre de lie :

- Un morphisme d'algèbres de Lie est une application linéaire qui préserve la structure de l'algèbre de Lie. Pour préciser davantage, soit g et h deux algèbres de Lie.

- Un morphisme d'algèbres de Lie de g dans h est une application linéaire

$$f : g \rightarrow h \text{ telle que pour tout } x, y \text{ dans } g, \text{ on a [13] :}$$

$$f([x, y]) = [f(x), f(y)]$$

Ou bien $f(\exp(tx)) = \exp(t\phi(x)) \dots\dots\dots (2.5)$

$[x, y]$: est le crochet de Lie de x et y dans g

$[f(x), f(y)]$: est le crochet de Lie correspondant de $f(x)$ et $f(y)$ dans h .

Effectivement, si g et h sont deux algèbres de Lie et $f : g \rightarrow h$ est un morphisme d'algèbres de Lie, alors toute représentation de g induit une représentation correspondante de h par la composition avec f .

2.4.2 Représentations

Une représentation d'un groupe de Lie est une action linéaire de ce groupe sur un espace vectoriel. En détail, soit G un groupe de Lie et V un espace vectoriel.

Une représentation de G sur V est une application $\rho : G \rightarrow GL(V)$ qui associe à chaque élément g de G une transformation linéaire $\rho(g)$ de V , telle que :

$$\text{Pour tout } g_1, g_2 \in G : \quad \rho(e) = Id_V \quad \text{et}$$

$$\rho(g_1 g_2) = \rho(g_1) \rho(g_2) \dots \dots \dots (2.6)$$

e : est l'élément neutre de G et Id_V est l'identité linéaire de V (c'est-à-dire que l'élément neutre de G agit comme l'identité sur V).

Exemple la représentation de $SO(3)$ sur l'espace des fonctions d'onde décrit comment les rotations de l'espace affectent les propriétés physiques d'un système quantique, tandis que la représentation de $SO(1,3)$ sur l'espace des vecteurs de position et de temps décrit comment les transformations de Lorentz affectent la structure de l'espace-temps.

Exemple :

Un exemple courant de représentation d'un groupe de Lie est la représentation de $SO(3)$ sur l'espace tridimensionnel $\mathbb{R}^3$; $SO(3)$ est le groupe des rotations dans l'espace tridimensionnel, c'est-à-dire les transformations qui préservent les distances et les angles entre les vecteurs.

La représentation de $SO(3)$ sur $\mathbb{R}^3$ est définie comme suit : pour chaque rotation R dans $SO(3)$, nous associons une transformation linéaire.

$$T(R) \in \mathbb{R}^3$$

Qui agit sur un vecteur v comme suit :

$$T(R)(v) = R \cdot v$$

Cette représentation a les propriétés suivantes :

$$\bullet T(R_1 R_2) = T(R_1) T(R_2) \quad \text{Pour toutes rotations } R_1 \text{ et } R_2 \text{ dans } SO(3).$$

• $T(I) = Id_{\mathbb{R}^3}$ Où I est l'élément neutre de $SO(3)$ et $Id_{\mathbb{R}^3}$ est l'identité linéaire de $\mathbb{R}^3$

• **La première propriété** montre que l'action de $SO(3)$ sur $\mathbb{R}^3$

• **La seconde propriété** montre que l'élément neutre de $SO(3)$ agit comme l'identité sur $\mathbb{R}^3$

2.5 Groupes et algèbres de Lie qui servent en théorie des groupes

La théorie des groupes est étroitement liée à la théorie des algèbres de Lie, car l'algèbre de Lie associée à un groupe de Lie est un outil important pour étudier la structure et les propriétés du groupe [14]. On donne quelques exemples de groupes et d'algèbres de Lie qui sont importants en théorie des groupes.

• **Groupe linéaire général $GL(n, R)$** : c'est le groupe des matrices carrées $n \times n$ avec des coefficients réels, dont le déterminant est non nul. L'algèbre de Lie associée est l'algèbre de Lie des matrices $n \times n$, notée $gl(n, R)$

Cette algèbre est utilisée pour étudier les groupes de Lie semi-simples, qui sont des groupes de Lie complexes qui n'ont pas de facteur abélien dans leur décomposition en facteurs simples

• **Groupe unitaire spécial $SU(n)$** : c'est le groupe des matrices unitaires $n \times n$, Avec un déterminant égal à 1.

L'algèbre de Lie associée est l'algèbre de Lie $su(n)$, qui est une sous-algèbre de l'algèbre de Lie $gl(n, \mathbb{C})$.

Elle est utilisée pour les groupes de Lie compacts, qui sont des groupes de Lie dont la topologie est celle d'un espace métrique complet et qui sont donc bien adaptés à l'étude des phénomènes physiques.

Exemple : L'équation de Schrödinger est une équation fondamentale en mécanique quantique qui décrit l'évolution dans le temps d'un système quantique ; elle est décrite par une fonction d'onde qui peut être représentée par un vecteur dans un espace de Hilbert.

Groupe de Poincaré : c'est le groupe de symétries de l'espace-temps de la relativité restreinte, qui comprend les translations dans l'espace et le temps, les rotations de l'espace et les transformations de Lorentz.

L'algèbre de Lie associée est l'algèbre de Lie de Poincaré, qui est une algèbre de Lie semi-simple. Elle est utilisée pour étudier les symétries de l'espace-temps et les lois de conservation associées.

Exemple :

Le groupe de Poincaré est un exemple important de groupe de Lie utilisé en physique, en particulier en relativité restreinte

Ce groupe est constitué des transformations de Lorentz et des translations dans l'espace-temps de

Minkowski. Il peut être représenté mathématiquement par :

$$P = (x, \lambda) : x \in \text{Minkowski}, \lambda \in SO(1,3) \dots\dots\dots (2.7)$$

$x \in \text{Minkowski}$: Où **Minkowski** est l'espace-temps de Minkowski

x : est un élément de l'espace-temps de Minkowski

L'espace-temps de Minkowski est une extension de l'espace tridimensionnel habituel avec une dimension temporelle supplémentaire

Elle joue un rôle important dans la théorie de la relativité restreinte pour décrire les événements physiques en incorporant le concept d'espace et de temps dans une seule entité mathématique

Les coordonnées x : représentent les positions spatio-temporelles des événements $SO(1,3)$ est le groupe de rotations de Lorentz, et x représente une translation dans l'espace-temps

Un exemple d'application du groupe de Poincaré en physique est la description des particules relativistes

En relativité restreinte, la masse d'une particule est reliée à son énergie et à son moment cinétique par la célèbre relation $E = mc^2$.

Groupe de Lie des rotations dans l'espace tridimensionnel : Ce groupe est noté $SO(3)$ et décrit les rotations autour des trois axes de l'espace. Les générateurs de ce groupe sont les moments angulaires

Un exemple d'exercice consiste à calculer le moment angulaire d'un objet en rotation autour d'un axe donné.

• **Exemple :**

L'algèbre de Lie de $SO(3)$ est donnée par :

$$[X_i, X_j] = i\epsilon_{ijk} * X_k \dots \dots \dots (2.8)$$

ϵ_{ijk} : est le symbole de **Levi-Civita**

X_i, X_j, X_k : Sont les matrices de l'**algèbre de Lie**

Une base possible pour cette algèbre de Lie est donnée par les matrices suivantes :

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad X_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ces matrices vérifient la relation d'antisymétrie $X_j = -X_j^T$ et la relation de commutation

$$[X_i, X_j] = i\epsilon_{ijk} * X_k \dots \dots \dots (2.9)$$

L'exponentielle de cette algèbre de Lie est donnée par la formule suivante

$$\exp(i\theta X) = \cos(\theta)I + i(\sin(\theta)/\theta)X \dots \dots \dots (2.10)$$

Où X est une matrice générique de l'algèbre de Lie, θ est un paramètre réel et I est la matrice identité

Exemple :

Si nous prenons $X = X_1$ et $\theta = \pi/2$, nous pouvons calculer l'exponentielle de l'algèbre de Lie de **$SO(3)$** comme suit :

$$\exp(i\frac{\pi}{2}X_1) = \cos(\pi/2)I + i\frac{(\sin(\pi/2))}{(\pi/2)}X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \dots \dots \dots (2.11)$$

Où X_1 : C'est le générateur associé à la rotation autour de l'axe x . Il est défini dans l'algèbre de Lie de $SO(3)$ et correspond à une matrice

I : C'est la matrice identité 3×3 .

$(\exp(i\frac{\pi}{2}X_1) = \cos(\pi/2)I + i\frac{\sin(\pi/2)}{(\pi/2)}X_1)$: Cette formule est basée sur la série de Taylor de l'exponentielle. Elle nous permet de calculer l'exponentielle d'une matrice antisymétrique comme X_1 en termes de fonctions trigonométriques.

Cela signifie que l'élément algébrique X_1 de l'algèbre de Lie de $SO(3)$ correspond à la rotation de $\pi/2$ radians autour de l'axe x dans l'espace tridimensionnel.[15]

• **Groupe de Lie des transformations de jauge** : Ce groupe est noté $U(1), SU(2), SU(3)$ ou d'autres groupes de Lie plus complexes et décrit les transformations qui préservent les propriétés physiques d'un système malgré des changements de phase

Les générateurs de ce groupe sont les champs de jauge.

• **L'algèbre de Lie de Pauli** : Cette algèbre de Lie est associée au groupe de Lie $SU(2)$, qui est le groupe de Lie des rotations dans l'espace à trois dimensions

Elle est utilisée pour décrire les propriétés des particules ayant un spin de $\frac{1}{2}$, comme les électrons. [9]

2.6 Groupe des déplacements d'un espace euclidien

Le groupe des déplacements d'un espace euclidien se nomme le groupe euclidien. Il est noté $E(n)$, où n est la dimension de l'espace euclidien. Le groupe euclidien comprend tous les mouvements rigides, qui comprennent les translations, les rotations et les réflexions, qui préservent les distances et les angles dans l'espace euclidien [6].

Le groupe euclidien $E(n)$ peut être représenté comme un produit semi-direct du groupe euclidien spécial $SE(n)$ et du groupe de translation $T(n)$, c'est-à-dire :

$$E(n) = SE(n) \rtimes T(n).$$

Le symbole $\cap$ indique que G est le groupe principal, et que H agit sur G par des automorphismes. Le groupe euclidien spécial $SE(n)$ regroupe toutes les rotations et réflexions qui préservent un point fixe dans un espace euclidien de dimension n

Ce groupe joue un rôle essentiel dans la géométrie, la robotique, la vision par ordinateur et d'autres domaines où les transformations géométriques sont étudiées et appliquées.

Tandis que le groupe de translation comprend toutes les translations dans l'espace euclidien.

Exemple d'application :

Considérons un espace euclidien en deux dimensions, noté $\mathbb{R}^2$. Soit le point $A = (2,3)$ dans cet espace. Définissons le groupe de déplacement de $\mathbb{R}^2$ qui envoie un point A jusqu'au $B = (-1,4)$.

Le groupe des déplacements de $\mathbb{R}^2$ est formé par les transformations qui préservent les distances et les angles. Il comprend les translations et les rotations.

Pour envoyer le point

$$A = (2,3) \text{ à } B = (-1,4)$$

Nous pouvons utiliser un déplacement qui consiste en une translation et une rotation.

- **Translation** : Nous pouvons déplacer le point A vers l'origine en utilisant une translation de vecteur $t = (-2, -3)$. Cela donnera un nouveau point A' à l'origine :

$$A' = A + t = (0,0).$$

- **Rotation** : Nous pouvons ensuite effectuer une rotation de l'angle approprié autour de l'origine pour amener le point A' à B . La rotation de l'angle $\theta = \frac{3\pi}{2}$ dans le sens anti-horaire convient dans ce cas. Après la rotation, le point A' sera envoyé à :

$$B : B' = R_{\theta}(A') = (-1,4).$$

Ainsi, le déplacement qui envoie le point A à B est une translation de $(-2, -3)$ suivie d'une rotation de $\frac{3\pi}{2}$ autour de l'origine.

Cet exemple sert à illustrer comment utiliser les translations et les rotations pour effectuer des déplacements dans un espace euclidien.

CHAPITRE 03 : APPLICATIONS EN PHYSIQUE

Dans cette partie on va donner des exemples ainsi que des représentations de groupes continus et les groupes de Lie en physique et leur impact en physique quantique et développement de la physique nucléaire qu'on va parler d'une façon générale après en fait des comparaisons entre des différents groupe de Lie est le groupe continu est fini

3.1 Transformations continu

Une transformation continue est une transformation qui peut être décrite par une fonction continue sans interruption. Les exemples de transformations continues incluent les rotations continues, les translations continues, les dilatations continues.

Un exemple de groupe de transformation continue est le groupe des rotations continues en trois dimensions, noté $SO(3)$. Ce groupe représente toutes les rotations continues possibles autour de n'importe quel axe dans l'espace à trois dimensions permettant de décrire le changement graduel et continu d'un système physique d'un état à un autre

Elle peut être décrite mathématiquement par une fonction continue qui relie les états initiaux et final lorsqu'un objet est soumis à une force constante, il subit une transformation continue car sa position change de manière continue au fil du temps.

a) Cette transformation peut être décrite mathématiquement par les équations du mouvement[5].

b) Une transformation continue peut également impliquer des changements dans d'autres propriétés physiques telles que la température, la pression ou la densité.

c) Dans tous les cas, une transformation continue implique un changement graduel et continu d'un état à un autre sans interruption.

Soit une particule dont la fonction d'onde est donnée par :

$$\psi(x, t) = \sqrt{\frac{2}{\alpha}} \sin\left(\frac{\pi n x}{\alpha}\right) e^{\frac{-itE_n}{\hbar}} \dots\dots\dots (3.1)$$

α : La longueur d'une boîte

E_n : l'énergie de la particule dans l'état **n**

Recherchons l'opérateur de translation continue :

$$\hat{T} = e^{\frac{-ib\hat{p}}{\hbar}} \dots\dots\dots (3.2)$$

P : l'opérateur de l'impulsion

L'opérateur de translation continue devient :

$$\hat{T}_b = e^{i\frac{d}{dx} \frac{mb}{\hbar}} \dots\dots\dots (3.4)$$

Maintenant, nous pouvons appliquer cet opérateur à la fonction d'onde pour obtenir une nouvelle fonction d'onde

$$\psi'(x, t) = \hat{T}_b \psi(x, t) = \sqrt{\frac{2}{\alpha}} \sin\left(\frac{\pi n(x-b)}{\alpha}\right) e^{\frac{-itE_n}{\hbar}} \dots\dots\dots (3.5)$$

On voit ainsi que la fonction d'onde a été décalée de **b** dans la direction **x** comme attendu.[16]

Remarque :

Dans ce cas, l'opérateur de translation continue est un opérateur linéaire qui commute avec l'Hamiltonien de la particule.

Cela signifie que la fonction d'onde reste dans le même état quantique après une translation. Cependant, ce n'est pas toujours le cas pour les opérateurs de translations continue, et dans certains cas, une translation peut changer l'état quantique de la particule[17].

3.2 Étude de SU (2)

L'étude de $SU(2)$ concerne le groupe spécial unitaire de dimension 2 .

Ce groupe joue un rôle important notamment en physique des particules, physique nucléaire[16].

Le groupe $SU(2)$ est le groupe des matrices complexes 2×2 unitaires

$M^\dagger = M^{-1}$ qui préservent la métrique hermitienne de $\mathbb{C}^2$:

$$\eta(Mu ; Mv) = \eta(u ; v) ; \quad \forall u ; v \in \mathbb{C}^2 \quad \dots\dots\dots (3.6)$$

$$\det(M) = 1$$

Pour tout u, v appartenant à $\mathbb{C}^2$ $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{Mu} ; \mathbf{Mv}) = \boldsymbol{\eta}(\mathbf{u} ; \mathbf{v})$

$\boldsymbol{\eta}$: la métrique hermitienne.

• En physique, $SU(2)$ est particulièrement important car il décrit les rotations dans l'espace tridimensionnel. En effet, toute rotation peut être représentée par une matrice (3×3) appartenant à $SU(2)$ en utilisant le formalisme de spin

La représentation fondamentale de $SU(2)$ est donnée par les matrices de Pauli.

• Les représentations irréductibles de $SU(2)$ fournissent une base pour l'espace des états avec un moment angulaire donné.

Par exemple la représentation $S^{\frac{1}{2}}$ correspond aux particules de $\text{spin} \frac{1}{2}$, telles que les électrons.

Les matrices représentant les éléments de groupe de $SU(2)$ dans cette représentation sont données par les matrices de Pauli :

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

les baryons, et celui des particules de spin nul et de parité négative, les mésons scalaires [3].

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_8 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Ces matrices satisfont les relations de commutation des opérateurs de moment angulaire et on peut les utiliser pour construire toute rotation d'une particule de spin.

• Une application courante de $SU(2)$ en physique est dans l'étude des particules de $\text{spin} \frac{1}{2}$, comme les électrons et les protons.

Le spin est une propriété quantique qui décrit l'intrication de la particule, et $SU(2)$ décrit les opérations de rotation qui laissent invariante cette propriété.

- Les représentations irréductibles de $SU(2)$ sont des outils mathématiques importants pour comprendre la structure des états quantiques de spin $\frac{1}{2}$.

Effectivement, chaque état quantique de spin $\frac{1}{2}$ peut être associé à une représentation irréductible de $SU(2)$.

Application du groupe $SU(2)$:

Considérez le groupe $SU(2)$, qui est le groupe des matrices unitaires 2×2 avec un déterminant égal à 1 posons la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

examinons si les matrices A , B et C appartiennent au groupe $SU(2)$ et on détermine si le produit de AB appartient à $SU(2)$.

Matrice A :

Vérification de l'unitarité

$$AA^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \neq I$$

donc A n'est **pas unitaire**.

Vérification du déterminant

$$\det(A) = 1 \cdot 1 - 2 \cdot (-2) = 5,$$

donc $\det(A) \neq 1$

Ainsi, A n'appartient pas à $SU(2)$.

Matrice B : Vérification de l'unitarité

$$BB^T = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} \neq I$$

donc B n'est **pas unitaire**.

Vérification du déterminant :

$$\det(B) = 3 * 3 + (-1) * (-1) = 10 \quad ,$$

donc $\det(B) \neq 1$.

Ainsi, B **n'appartient pas à $SU(2)$**

Matrice C :

$$CC^T = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

donc C est unitaire.

2. Calcul du produit AB :

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ -7 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour déterminer si le produit AB appartient à $SU(2)$, nous devons vérifier si la matrice résultante est unitaire et a un déterminant égal à 1.

Vérification de l'unitarité :

$$(AB)(AB^T) = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ -7 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 & 0 \\ 0 & -48 \end{pmatrix} \neq I$$

Donc AB n'est **pas unitaire**.

Vérification du déterminant :

$$\det(AB) = 1 * 1 + 7 * (-7) = -48$$

Donc

$$\det(AB) \neq 1.$$

Ainsi, AB **n'appartient pas à $SU(2)$**

En résumé que seule les matrice C appartient au groupe $SU(2)$. Les matrices A et B , AB ne satisfont pas les conditions d'unitarité et de déterminant égal à 1 requises pour appartenir à $SU(2)$.

3.2.1 Représentations irréductibles de $SL(2; \mathbb{C})$

Les représentations irréductibles de $sl(2, \mathbb{C})$ sont très importantes en théorie quantique des champs. Elles jouent un rôle crucial dans la description des systèmes de l'espace-temps et des particules.

Il s'agit de l'algèbre des matrices 2×2 complexes de trace nulle

Les éléments de cette algèbre peuvent être écrits sous la forme :

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix},$$

Où a, b et c sont des nombres complexes tels que

$$a + (-a) = 0$$

$$c + b = 0$$

$$a^2 + bc = 1.$$

On peut vérifier que ces conditions impliquent que la trace de X est nulle

Maintenant, les représentations irréductibles de $sl(2, \mathbb{C})$ sont des espaces vectoriels V sur lesquels agit $sl(2, \mathbb{C})$ de manière linéaire et irréductible, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de sous-espace vectoriel de $\vec{V}$ qui soit invariant sous l'action de $sl(2, \mathbb{C})$.

La théorie de représentation montre qu'il existe une famille infinie de représentations irréductibles de $sl(2, \mathbb{C})$, qui sont étiquetées par un nombre entier ou demi-entier S appelé le **spin**.

On note ces représentations par $D^{(S)}$, où S est le spin qui caractérise la représentation.

Exemple :

Considérons les groupes représentations Soit J_x, J_y et J_z les générateurs de spin de l'**algèbre de Lie** $sl(2, \mathbb{C})$. On note que les générateurs de rotations autour des axes x, y et z , respectivement.

Ils satisfont aux relations de commutation de l'algèbre de Lie de $sl(2, \mathbb{C})$, qui décrivent les propriétés mathématiques de ces opérateurs.

On trouve les valeurs propres et les vecteurs propres de l'opérateur irréductibles de $SL(2, C)$:

$$J^2 = \hbar^2 (J_x^2 + J_y^2 + J_z^2)$$

Nous savons que J^2 et J_z commutent, donc nous pouvons trouver des vecteurs propres qui diagonalisent simultanément ces deux opérateurs.

Soit $|j, m\rangle$ un vecteur propre commun, tel que

$$J^2 |j, m\rangle = \hbar^2 j(j+1) |j, m\rangle \quad \text{et}$$

$$J_z |j, m\rangle = m \hbar |j, m\rangle$$

En utilisant les relations de commutation de $sl(2, C)$, nous avons également :

$$J_{\pm} |j, m\rangle = \hbar \sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)} |j, m \pm 1\rangle$$

Les opérateurs $J_{\pm}$ élèvent ou abaissent l'état de spin

Nous pouvons utiliser J_+ pour construire les états propres de J^2 et J_z en partant de l'état $|j, j\rangle$ avec :

$$J_z |j, j\rangle = \hbar j |j, j\rangle$$

$$J^2 |j, j\rangle = \hbar^2 j(j+1) |j, j\rangle$$

$(-j)$: représente la valeur minimale que peut prendre l'indice "**m**" dans l'état propre $|j, m\rangle$.

En appliquant J_- successivement, nous obtenons les autres états propres $|j, m\rangle$:

$$|j, j\rangle \rightarrow J_- |j, j-1\rangle$$

$$|j, j-1\rangle \rightarrow J_- |j, j-2\rangle$$

$$|j, -j+1\rangle \rightarrow J_- |j, -j\rangle$$

En utilisant la relation de normalisation $\langle j, m | j, m' \rangle = \delta_{mm'}$, nous pouvons également vérifier que ces vecteurs propres sont orthogonaux.

Aussi que les valeurs propres de J^2 sont $j(j+1)$ pour tout j entier ou demi-entier, et les vecteurs propres associés sont $|j, m\rangle$ avec m allant de $-j$ à j par incréments de 1.

3.2.2 Etudes des racines de $SL(3; \mathbb{C})$

La sous-algèbre de Lie abélienne $\mathfrak{h}$ de $SL(3, \mathbb{C})$ est formée des matrices diagonales de trace nulle et est maximale car toute sous-algèbre de $SL(3, \mathbb{C})$ comportant une matrice non diagonale de trace nulle ne peut pas être commutative.

Cette sous-algèbre de Cartan permet de caractériser l'espace de la représentation associée en utilisant les poids et les racines. Les matrices peuvent être ensuite décomposées en termes d'éléments de cette sous-algèbre.

Un exemple d'équation physique qui implique $SL(3, \mathbb{C})$ est la formule de **Gell-Mann-Nishijima**, qui relie la charge électrique, l'isospin et l'étrangeté des particules.

Cette formule peut être exprimée en termes des générateurs de l'algèbre de Lie $SL(3, \mathbb{C})$ comme suit :

$$Q = \left(\frac{2}{3}\right)Y + \left(\frac{1}{2}\right)\lambda_3 + \left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)\lambda_8 \quad \dots\dots\dots (3.7)$$

Où Q est la charge électrique, Y est l'hypercharge, et λ_3 et λ_8 sont deux des générateurs de l'algèbre de Lie de $SL(3, \mathbb{C})$ qui correspondent respectivement à l'isospin et à l'étrangeté.

Un autre exemple d'équation physique impliquant $SL(3, \mathbb{C})$ est la matrice de **Cabibbo-Kobayashi-Maskawa**, qui décrit le mélange des quarks dans les interactions faibles

Cette matrice peut être exprimée en termes des générateurs de l'algèbre de Lie $SL(3, \mathbb{C})$ comme suit :

$$V = 1 - \frac{\lambda_2}{2} + \frac{\lambda_1}{2} \quad \dots\dots\dots (3.8)$$

Où V est la matrice de **Cabibbo-Kobayashi-Maskawa**, et λ_1 et λ_2 sont deux des générateurs de l'algèbre de Lie de $SL(3, C)$ qui correspondent respectivement aux secteurs des quarks **up-down** et **charm-strange**.

L'algèbre de Lie $SL(3, C)$ fournit un cadre mathématique pour décrire les symétries et les interactions des particules élémentaires. La théorie de représentation de $SL(3, C)$ permet aux physiciens de classer et d'analyser les différents états et interactions de ces particules de manière rigoureuse et systématique.[5]

La représentation :

Le diagramme de racines représente les racines sous forme de vecteurs dans un espace à trois dimensions, connectées par des lignes qui représentent les relations entre elles. Pour dessiner le diagramme de racines de $SL(3, C)$, on utilise le diagramme de Dynkin, qui est un graphe qui encode les relations entre les racines.

R_3	$(\tilde{B}_2)$	$W_2 \times W_2$ ($\tilde{I}_2 \times \tilde{I}_2$)	V_3	$(\tilde{H}_2)$	P_3	$(\tilde{A}_2)$
$[4, 4]$		$[\infty] \times [\infty]$	$[6, 3]$		$[\Delta]$	

Figure 3.1 : Les groupes de Coxeter-dynkin dans le plan avec les diagrammes équivalents [18].

- Les **miroirs** du domaine sont nommés par les **arêtes** m_1 , m_2 , etc
- Les **sommets** sont colorés par leur ordre de **réflexion**
- Le groupe **prismatique** $[W_2 \times W_2]$ est montré comme un **doublement** de

$\mathbb{R}_3$

mais il peut aussi être créé comme des domaines rectangulaires à partir du **doublement** des **triangles** V_3 . [18]

- Le P_3 est un **doublément du triangle** V_3 .

Le diagramme de racines fournit un outil utile pour comprendre la structure et les représentations de $SL(3, \mathbb{C})$.

Exemple d'application :

Soit $\mathbf{SL}(3, \mathbb{C})$ l'algèbre de Lie associée au groupe $\mathbf{SL}(3, \mathbb{C})$ posons les matrices suivantes

$$H_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \quad H_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$H_3 = H_1 + H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Posons :

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. En vérifions que E_1, E_2 et E_3 satisfont les relations de commutation suivantes :

$$[H_1, E_1] = (H_1 * E_1 - E_1 * H_1) = 2E_1; \quad [H_1, E_2] = -2E_2$$

$$[H_1, E_3] = 0 \quad [H_2, E_1] = 0 \quad ; \quad [H_2, E_2] = 0 \quad ; \quad [H_2, E_3] = E_3$$

$$[H_1, E_1] = H_1 \cdot E_1 - E_1 \cdot H_1 = 2E_1 \quad [H_1, E_2] = H_1 \cdot E_2 - E_2 \cdot H_1 = -2E_2$$

$$[H_1, E_3] = H_1 \cdot E_3 - E_3 \cdot H_1 = 0 \quad [H_2, E_1] = H_2 \cdot E_1 - E_1 \cdot H_2 = 0$$

$$[H_2, E_2] = H_2 \cdot E_2 - E_2 \cdot H_2 = 0 \quad [H_2, E_3] = H_2 \cdot E_3 - E_3 \cdot H_2 = -2E_3$$

Donc Les relations de commutation sont vérifiées.

2. En utilisant ces relations de commutation, on montre que les matrices H_1, H_2 et $E_1 + E_2$ forment une base de $\mathfrak{h}$, est forment une base de l'algèbre de Cartan sachant que si elles sont linéairement indépendantes et si tous les autres

éléments de l'algèbre peuvent être exprimés comme des combinaisons linéaires de ces matrices

Dans le cas de $\mathbf{SL}(3, \mathbb{C})$, les matrices $H1, H2$ et $E1 + E2$ forment une base de $\mathfrak{h}$. Nous devons vérifier deux conditions

a) Les matrices sont linéairement indépendantes.

C'est-à-dire que :

$$aH1 + bH2 + c(E1 + E2) = 0$$

Implique :

$$a = b = c = 0.$$

Pour obtenir la matrice finale, nous devons aligner côte à côte (juxtaposition) ces trois matrices.

Cela donne : $H1, H2$ et $E1 + E2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, en alignant côte à côte les matrices $H1, H2$ et $E1+E2$, nous obtenons la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Si le déterminant de cette matrice est non nul, alors les matrices sont linéairement indépendantes.

En effectuant le calcul, on trouve que le déterminant est différent de 1, Ils ne sont pas linéairement indépendants mais forment une base de $\mathfrak{h}$

b) Tous les autres éléments de $\mathfrak{g}$ peuvent être exprimés comme des combinaisons linéaires de ces matrices. **$H1, H2, E1 + E2$.**

En dit que les matrices $\mathbf{H1}, \mathbf{H2}, \mathbf{E1} + \mathbf{E2}$ forment seulement une base de l'algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ de $\mathbf{SL}(3, \mathbb{C})$ m'ait ils ne sont pas linéairement Independent

3. Valeurs propres et vecteurs propres :

Nous devons résoudre les équations caractéristiques correspondantes. Pour la matrice $H1$, l'équation caractéristique est donnée par $\det(H1 - \lambda I) = 0$, où λ est la valeur propre inconnue et I est la matrice identité.

En résolvant cette équation, on obtient $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$ et $\lambda_3 = 0$ comme les valeurs propres de $H1$. Les vecteurs propres correspondants sont respectivement :

$$\text{Pour } \lambda_1 = 1 : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \quad \lambda_2 = -1 : \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \quad \lambda_3 = 0 : \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Construction du diagramme de racines :

Diagramme de racines représente les racines sous forme de vecteurs dans un espace à trois dimensions, connectées par des lignes qui représentent les relations entre elles. Pour construire le diagramme de racines de $SL(3, \mathbb{C})$, on peut utiliser diagramme de Dynkin, qui est un graphe qui encode les relations entre les racines.

Dans le diagramme de Dynkin, les racines sont représentées sous forme de nœuds, et les lignes qui les connectent indiquent si deux racines sont orthogonales ou non. Si deux racines sont orthogonales, elles sont connectées par une ligne solide, tandis que si elles ne sont pas orthogonales, elles sont connectées par une ligne en pointillé.

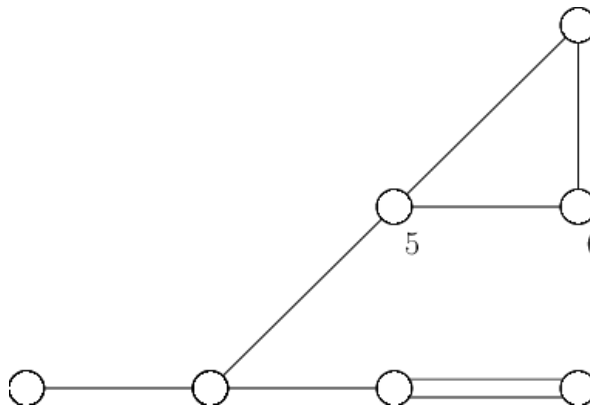


Figure 3.2: $SL(3, \mathbb{R})$ dans Dynkin Diag.

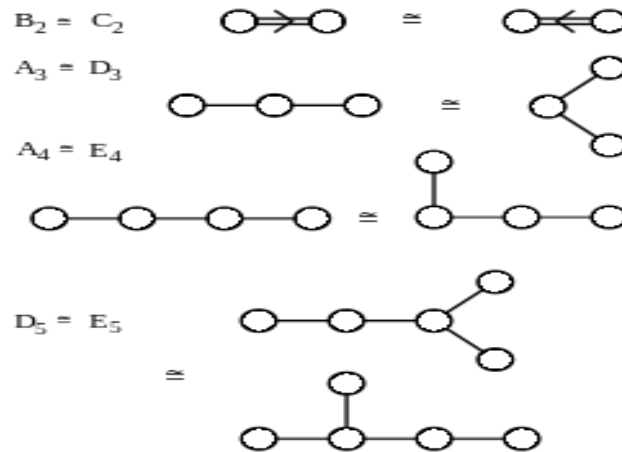


Figure 3.3 : l'isomorphisme exceptionnel.

Figure (3.2) : définit la représentation de modèle $(SL(3, R) * SL(2, R))$ dans le diagramme de Coxeter-Dynkin.

Figure (3.3) : définit les isomorphismes exceptionnels de diagrammes de Dynkin connectés se réfèrent à des correspondances particulières entre différents groupes de Lie semi-simples.

Un isomorphisme exceptionnel se produit lorsque les diagrammes de Dynkin de deux groupes de Lie différents présentent une correspondance bijective, suggérant que ces groupes partagent une structure algébrique similaire. Il existe quelques exemples remarquables d'isomorphismes entre des groupes de Lie :

- **Isomorphisme entre $SU(2)$ et $SO(3)$** : Ces deux groupes sont isomorphes et ont des diagrammes de Dynkin identiques, qui sont le diagramme A_1 .
- **Isomorphisme entre $SU(4)$ et $SO(6)$** : Ces deux groupes sont isomorphes et ont des diagrammes de Dynkin identiques, qui sont le diagramme D_3 .

Cela signifie que les groupes $SU(4)$ et $SO(6)$ partagent une structure similaire.

- **Isomorphisme entre E_6 et F_4** : Ces deux groupes sont isomorphes et ont des diagrammes de Dynkin identiques, qui sont le diagramme E_6 .

Ces isomorphismes exceptionnels sont des résultats importants, car ils permettent de relier différents groupes de Lie et d'utiliser des résultats connus sur un groupe pour en déduire des propriétés sur un autre group.

3.2.3 SU (3) et les Quarks

On traite la représentation des particules en physique à l'aide de la théorie des groupes de $SU(2)$. Les transformations induites par la représentation $D^{\frac{1}{2}}$ de $SU(2)$ peuvent différencier entre les particules telles que les protons et les neutrons.

L'opérateur d'isospin et ses valeurs propres $+\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}$ permettent de différencier les protons et les neutrons.

Les physiciens ont regroupé la plupart des particules obéissant à l'interaction forte dans deux ensembles distincts,

1. Ceux de spin $\frac{1}{2}$ et parité positive,
2. Ceux de spin $\frac{3}{2}$ et parité négative.

Ces regroupements de particules peuvent être interprétés comme des sous-ensembles d'un ensemble plus large, ce qui a conduit à l'utilisation de la théorie des groupes de Lie dans la physique des particules.

Les baryons, et celui des particules de spin nul et de parité négative, les mésons scalaires :

baryons		mésons scalaires	
Particule	Masse (MeV)	Particule	Masse
p	$938,28 \pm 0,005$	π^+	$139,58 \pm 0,01$
n	$939,57 \pm 0,005$	π^0	$134,97 \pm 0,01$
Λ^0	$115,6 \pm 0,006$	π^-	$139,58 \pm 0,01$
Σ^+	$1189,4 \pm 0,1$	K^+	$493,8 \pm 0,1$
Σ^0	$1192,5 \pm 0,1$	K^-	$493,8 \pm 0,1$
Σ^-	$1197,4 \pm 0,07$	K^0	$497,8 \pm 0,1$
Θ^0	$1314,7 \pm 0,7$	$\bar{K}^0$	$497,8 \pm 0,1$
Θ^-	$1321,3 \pm 0,2$	η^0	$548,8 \pm 0,6$

Figure 3.4 :Classification en octet des baryons et des Mésons[3].

Les physiciens de l'époque ont représenté les protons et les neutrons comme un doublet d'isospin avec une représentation $S=\frac{1}{2}$.

Ils ont alors eu l'idée de représenter tous les baryons sous forme d'un super multiple et tous les mésons sous forme d'un autre super multiple.

En utilisant ces nombres quantiques, ils ont pu représenter la charge des nucléons et des pions. Ils ont défini la charge baryonique du proton comme étant 1

En supposant que cette charge est conservée lors des phénomènes impliquant l'action de l'interaction forte, ils ont pu assimiler toutes les particules réagissant à l'interaction forte à une charge baryonique.

En représentant les baryons et les mésons dans le plan $(Y; Dj(J3))$, ils ont découvert des diagrammes intéressants.

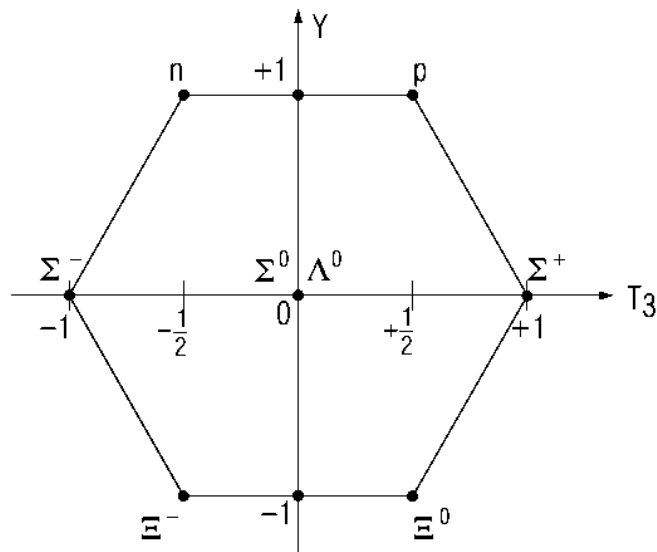


Figure 3.5: Représentation des baryons dans le diagramme $(Y; Dj(J3) = T_3)$.

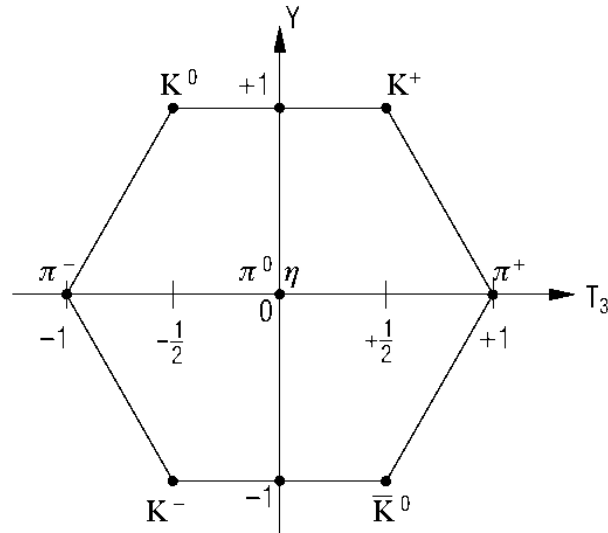


Figure 3.6 : Représentation des mésons dans le diagramme $(Y; Dj(J_3) = T_3)$.

D'autre part, les physiciens ont représenté les baryons et les mésons comme des super multiplets dans les années 60 : **l'hypercharge et la charge baryonique**.

Ils ont ensuite remarqué que la représentation dans le plan $(Y; Dj(J_3))$ des baryons et des mésons coïncide exactement avec la représentation des racines α_i et α_{i0} dans la base $(I_3; Y)$.

Ces observations ont conduit **Gell-Mann et Newman** à identifier les particules élémentaires avec les poids de différentes représentations de $SL(3, \mathbb{C})$.

Cependant, les représentations 3 et 3^* ne correspondaient pas encore à des particules observées. Mais si elles correspondaient à des particules, un système de particules on peut le décrire par un produit tensoriel de représentations de $SU(3)$.

Ils ont également montré que la différentielle de la représentation $\rho_1 * \rho_2$ était donnée par

$$(D\rho_1) * \rho_2 + (D\rho_2) * \rho_1 \dots\dots\dots (3.9)$$

3.3 Etude du groupe $SO(3)$

Le groupe $SO(3)$ est l'ensemble des matrices de rotation R dans l'espace $\mathbb{R}^3$ (transformations orthogonales de déterminant 1),

$$R^t = R^{-1} \text{ Et } \det(R) = 1.$$

L'algèbre de Lie de $SO(3)$ est constituée de vecteurs de rotation, ou générateurs infinitésimaux de rotation.

Ces vecteurs peuvent être représentés par des matrices antisymétriques

3×3 , Notées : J_x, J_y et J_z . Ces matrices satisfont les relations de commutation suivantes :

$$[J_x, J_y] = iJ_z$$

$$[J_y, J_z] = iJ_x$$

$$[J_z, J_x] = iJ_y$$

Les éléments du groupe de $SO(3)$ peuvent être représentés par des exponentielles de ces vecteurs de rotation.

Par exemple :

Une rotation d'un angle θ autour de l'axe z est donnée par l'exponentielle $i\theta J_z$.

Plus généralement, toute rotation peut être exprimée comme une combinaison linéaire des vecteurs de rotation J_x, J_y et J_z .

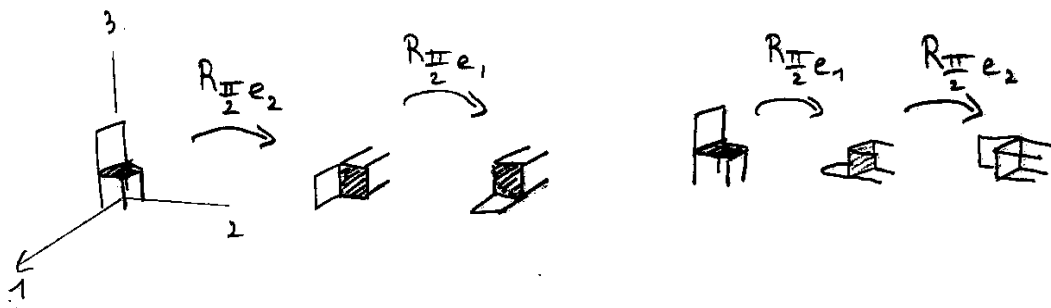


Figure 3.7: Rotation et déplacement de R d'un angle de $\frac{\pi}{2}$ sur l'axe $e(1\ 2\ 3)$.

Les représentations irréductibles de $SO(3)$ fournissent une base pour l'espace des états avec un moment angulaire donné.

1) Par exemple : la représentation $s = \frac{1}{2}$ correspond aux particules de spin $\frac{1}{2}$, telles que les électrons.

Les matrices représentant les éléments de groupe de $SO(3)$ dans cette représentation sont données par les matrices de Pauli :

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Un autre exemple :

Est la représentations $S = 1$, qui correspond aux particules de spin 1, telles que les photons.

Les matrices représentant les éléments de groupe de $SO(3)$ dans cette représentation sont données par les matrices de **Gell-Mann** :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \lambda_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Soit $R \in SO(3)$ qui est une rotation dans $\mathbb{R}^3$. On note $\vec{U} \in \mathbb{R}^3$;

$\{\vec{U}\} = 1$, la direction de l'axe de rotation, et $\theta \in [-\pi, \pi]$ l'angle de rotation autour de cet axe la rotation correspondante clairement

$\vec{U} = (U_1; U_2; U_3)$ caractérise une rotation de façon unique, tant que $|\theta| \neq \pi$. C'est un système de coordonnées sur $SO(3)$

Par contre si $|\theta| = \pi$, on a $R(-\pi; u) = R(\pi; u)$

Définissons le groupe comme l'ensemble des matrices orthogonales 3×3 avec le déterminant 1 :

$$SO(3) = \{ R \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \mid R^t R = I, \det(R) = 1 \}$$

Cela signifie que le produit de la transposée de R avec R égal à la matrice identité I .

3.4 Relation entre les groupes $SO(3)$ et $SU(2)$

Les groupes de Lie $SO(3)$ et $SU(2)$ ont tous deux une dimension de 3, ce qui signifie que leurs algèbres de Lie sont isomorphes. Cela implique que près de

l'identité, la structure des deux groupes est équivalente car la structure du groupe près de l'identité est déterminée par l'algèbre de Lie de ses générateurs.

Cependant, on a vu que la topologie des espaces $SO(3)$ et $SU(2)$ est différente. En d'autres termes, la façon dont les éléments du groupe sont connectés ou "collés" ensemble est différente pour les deux groupes. Dans le cas de $SO(3)$, chaque élément du groupe peut être représenté comme une rotation de l'espace tridimensionnel, tandis que dans le cas de $SU(2)$, chaque élément du groupe peut être représenté comme une combinaison de rotations de l'espace à quatre dimensions

Nous pouvons obtenir une paramétrisation explicite d'une rotation dans $SO(3)$ en utilisant les angles d'Euler ou la matrice de rotation de **Rodrigues** cette paramétrisation permet de nous décrire l'orientation de l'objet ou du système physique à l'aide de trois angles[11].

Mathématiquement, l'isomorphisme de Lie entre $SO(3)$ et $SU(2)$ est établi en utilisant la notion d'algèbre de Lie. Les algèbres de Lie associées à ces deux groupes sont isomorphes. L'algèbre de Lie de $SO(3)$ est l'algèbre des matrices antisymétriques 3×3 .

On peut construire une correspondance univoque entre les deux groupes en utilisant les quaternions. Les quaternions sont des nombres hypercomplexes qui généralisent les nombres complexes et qui peuvent être utilisés pour décrire des rotations en trois dimensions, les quaternions unitaires peuvent être identifiés avec le groupe $SU(2)$, tandis que les rotations en trois dimensions peuvent être identifiées avec le groupe $SO(3)$.

Cette correspondance est connue sous le nom d'isomorphisme de **Hopf** et permet de lier les propriétés des représentations de $SO(3)$ et de $SU(2)$.

La théorie des représentations de groupes permet également de lier les propriétés des particules élémentaires (comme les électrons, les quarks, etc.) avec les propriétés des groupes de symétrie (comme **$SO(3)$** et **$SU(2)$**).

Cela a conduit à des développements importants en physique théorique, tels que la théorie quantique des champs et la théorie de jauge.

On résume notre travail dans un tableau récapitulatif qui représente des principales caractéristiques des groupes $SO(3)$ et $SU(2)$:

	$SO(3)$	$SU(2)$
Dimension	3	2
Algèbre de Lie	$SO(3)$	$SU(2)$
Représentation fondamentale	Matrices de rotation 3×3	Matrices de Pauli 2×2
Représentations irréductibles	Caractérisées par le moment angulaire (spin).	Caractérisées par le spin.
Relation avec $SU(2)$	$SO(3)$ est le groupe quotient de $SU(2)$ par son centre.	$SU(2)$ est le double recouvrement universel de $SO(3)$.

Tableau 3.1: les principales caractéristiques des groupes $SO(3)$ et $SU(2)$

Il est important de noter que le groupe $SU(2)$ est un double recouvrement universel de $SO(3)$, ce qui signifie qu'il existe une correspondance bijective entre les éléments de $SU(2)$ et les éléments de $SO(3)$ avec une relation de recouvrement.

En d'autres termes, chaque élément de $SO(3)$ a une unique pré-image dans $SU(2)$.

3.6 Découvertes fondamentales en physique

Les physiciens ont émis l'hypothèse de l'existence de trois nouveaux quarks, en plus des quarks up, down et Strange, à partir de considérations théoriques, notamment par **Glashow** à partir de 1964.

Ces nouveaux quarks seraient le charme, le top et le Bottom. En plus des propriétés déjà connues, telles que la charge hadronique, la charge et l'isospin, ils ont introduit un nouveau nombre quantique, la charge de couleur.

Cette nouvelle description des particules soumises à l'interaction forte ne serait plus décrite par $SU(3)$, mais par $SU(4)$, ce qui complique encore les représentations (il faut se placer en trois dimensions).

La découverte de nombreuses particules se plaçant sur les poids des représentations de $SU(4)$ dans les accélérateurs semble confirmer l'existence de ces six quarks.

Un physicien amateur du nom de **Garrett Lisi** a proposé une théorie selon laquelle l'ensemble des champs de particules élémentaires connus (particules + particules virtuelles véhiculant les interactions) pourrait être représenté à l'aide de systèmes de racine du groupe E_8 , en se basant sur le modèle standard.

- Sa théorie permettrait ainsi de décrire l'ensemble des champs constituant l'univers dans un même principe unificateur.
- Sa théorie, bien qu'elle soit très esthétique sur le papier, est cependant encore hautement spéculative et très discutée dans le milieu des physiciens théoriciens.

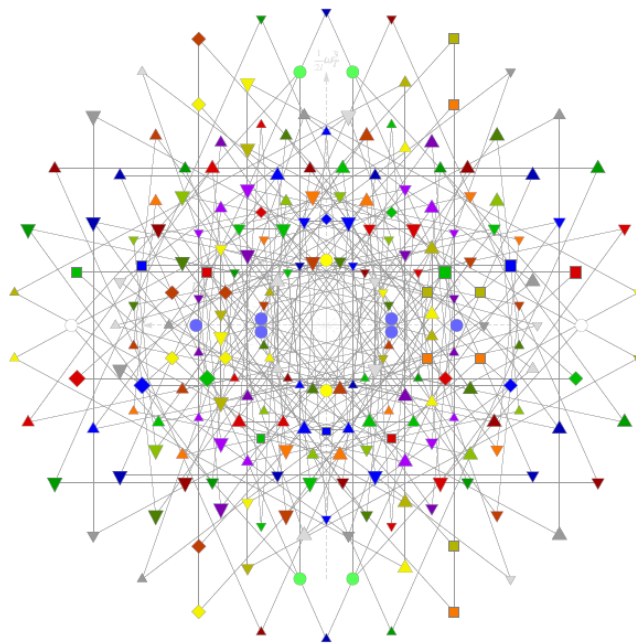


Figure 3.8: Représentation du système de racine du groupe E_8 .

La figure (3.8) représente E_8 qui est un groupe de Lie exceptionnel de dimension 24 .

Sa représentation en système de racine est caractérisée par son système de racine, qui décrit les valeurs propres des éléments du groupe dans une base appropriée.

1) Notre exploration des groupes de Lie nous a permis de constater qu'à tout sous-groupe fermé de $GL(n; C)$ correspond une algèbre de Lie définie à l'aide de l'application exponentielle. Ce résultat peut être généralisé à tous les groupes de Lie, ce qui a conduit à introduire les systèmes de racines pour les algèbres de Lie semi-simples, représentables par des diagrammes de Dynkin[16].

2) Nous avons également constaté que la correspondance biunivoque entre les couples $(L; H)$ et $(\Phi; E)$, où L est une algèbre de Lie semi-simple, H son niveau maximal et Φ son système de racine, et E l'espace euclidien associé, permettait de classer les algèbres de Lie semi-simples et donc les groupes de Lie correspondants, à l'aide de leurs systèmes de racine.

3) À partir de ces résultats, nous avons tenté de démontrer dans la partie consacrée à la relation entre les groupes de Lie et la physique, que les symétries de la nature pouvaient être décrites à l'aide des groupes de Lie.

4) Nous avons notamment montré que le groupe de Lie $SU(3)$ qui joue un rôle fondamental en physique nucléaire, puisque les particules sensibles à l'interaction forte peuvent être vues comme des poids de représentations de ce groupe. Sa présence comme groupe de symétrie implique la conservation de nouveaux nombres quantiques lors des réactions nucléaires, à savoir l'isospin, l'hypercharge et le nombre baryonique

Cette vision esthétique qui permettrait d'identifier l'ensemble des particules de la nature aux poids d'une représentation d'un groupe de Lie particulier est vraiment fascinante.

5) La recherche de cette beauté intrinsèque pourrait peut-être être la voie vers une nouvelle physique.

CONCLUSION

La théorie des groupes de Lie et de leurs représentations est un domaine important de la physique théorique. Elle permet de décrire les systèmes fondamentaux de la nature et d'analyser les interactions entre les différentes particules élémentaires. Dans cette théorie, l'algèbre de Lie est un outil mathématique fondamental pour décrire la structure des groupes de Lie.

Nous avons vu que les représentations des groupes de Lie sont des espaces vectoriels sur lesquels le groupe agit de façon linéaire. Les représentations irréductibles sont particulièrement importantes, car elles permettent de décomposer une représentation complexe en une somme directe de sous-représentations plus simples.

La théorie des groupes de Lie est également étroitement liée à la géométrie différentielle, car elle utilise des notions telles que les fibres vectorielles et les champs de jauge pour décrire les propriétés des groupes de Lie et de leurs représentations.

En résumé, la théorie des groupes de Lie et de leurs représentations est une branche importante de la physique théorique et des mathématiques appliquées.

Elle fournit un cadre conceptuel puissant pour comprendre les systèmes fondamentaux de la nature et les interactions entre les particules élémentaires. L'algèbre de Lie, les représentations irréductibles et la géométrie différentielle sont des outils mathématiques essentiels pour étudier les propriétés des groupes de Lie et de leurs représentations.

Bibliographie

- [1] : N. Bourbaki, Éléments de mathématique : Théorie des ensembles, Chapitres 1 à 4. Springer, 1994.
- [2] : M. Artin, Algebra Vol. 1, Prentice Hall, 2010.
- [3] : I. N. Herstein, Topics in Algebra, Vol. 2, John Wiley & Sons, 1975.
- [4] : J. J. Rotman, An Introduction to the Theory of Groups, Springer Science & Business Media, 1995
- [5] : B. C. Hall, Lie groups, Lie algebras, and representations : An Elementary Introduction, Vol. 222, Springer, 2015.
- [6] : V. Savona, Théorie de la représentation des groupes discrets et ses applications en physique du solide et des molécules, 91 pages, École Polytechnique Fédérale de Lausanne, 2004-2005.
- [7] : P. Michael E., An Introduction to Quantum Field Theory, in D. V. Schroeder, Westview Press, 1995.
- [8] : M. Wüstner, Supplements on the Theory of Exponential Lie Groups, Journal of Algebra, Vol. 265, 148–170, 2003.
- [9] : M. Briant, L. Chesnel, B. Schubnel, La loi de groupe de Lie est une opération binaire qui combine deux éléments d'un groupe de Lie pour en produire un troisième, Juin 2008.
- [10] : M. Briant, L. Chesnel, and B. Schubnel, Des Groupes de Lie et de leurs applications en Physique Fondamentale, Juin 2008.

- [11] : J. F. Adams, Lectures on Lie Groups, University of Chicago Press, 2004.
- [12] : M. Henneaux et A. Collinucci, Représentation des groupes et application à la physique, pages 8–22 ; 147 pages, source : Compère, MATH-F410.
- [13] : H. Chajmowicz, Modélisation et simulation numérique de structures articulées flexibles, Modélisation et simulation, ENPC Paris/Marne-la-Vallée, 1996.
- [14] : Anne Moreau, Algèbres de Lie semi-simples : représentations et éléments nilpotents, en ligne : <http://math.univ-lille1.fr/>, Université de Lille, Année 2018.
- [15] : C. Duval et H.P. Künzle, Physique et Symétrie : Groupes de Lie, Branes et Principe de Dirac-Bergmann, Hermann, 2015.
- [16] : L. Chesnel, B. Schubnel, Des Groupes de Lie et de leurs applications en Physique Fondamentale, Juin 2008.
- [17] : H. Georgi, Lie Algebras in Particle Physics, Perseus Books, 1999.
- [18] : C. Chevalley, Les diagrammes de Dynkin, Claude Chevalley, p. 1–11 (1956–1958)
- [19] : J. L. Loday, "Théorie algébrique et représentations de groupes, Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, 1976
- [20] : R. H. Cushman, M. Bates, "Global aspects of classical integrable systems," 1997, Springer (Vol. 94).
- [21] : Arovas, D. Lecture Notes on Group Theory in Physics (A Work in Progress).
Département de physique, Université de Californie, San Diego, 303 pages, August 12, 2022

[22] : V. Bargmann et E. P. Wigner, Group theoretical discussion of relativistic wave equations, USA, p. 211-223, Vol. 34