

République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
جامعة الجيلالي بونعاما خميس مليانة
Université Djilali Bounaama de Khemis Miliana
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département des Sciences de la Matière



Mémoire de fin d'étude

En vue de l'obtention d'un diplôme de Master en Physique
Spécialité: Physique théorique

Thème :

*Etude du moment hexadécapolaire des noyaux atomiques
dans l'appariement entre particules identiques*

Devant le jury composé de :

- | | | | | | |
|---|-----------------|-------------|-----|-------|--------------|
| - | Mr. | D. Benzaid | MCA | UDBKM | President |
| - | M ^{me} | K. Redaouia | MCB | UDBKM | Examinatrice |
| - | Mr. | M. Douici | MCB | UDBKM | Encadreur |

Présenté par :

M^{lle} MISSOUM Ichrak

Année universitaire : 2022/2023

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



Remerciement

Tout d'abord, je remercie Allah Tout-Puissant de m'avoir accordé le succès dans ce travail pour terminer mon parcours d'étude. Louange à Dieu toujours et à jamais pour sa générosité.

Je tiens à exprimer ma gratitude et mon remerciement envers mon encadreur monsieur *Dr. M DOUICI*, de m'avoir encadré et de son suivi permanent de mon travail.

Je voudrais remercier également et chaleureusement les membres du jury, monsieur *Dr. D BENZAID* et madame *Dr. K REDAOUIA*, pour leur contribution à l'évaluation de ce travail.

Mes remerciements s'adressent également aux enseignants du département des sciences de la matière de ma branche "physique théorique" pour leurs efforts en vue de notre réussite.

À mon Université DJILALI BOUNAAMA de Khemis Miliana où j'ai appris et réussi à achever mon parcours d'études, merci.

Je terminerai mes dernières lignes par un amour et spécial remerciement, toute ma reconnaissance et ma profonde gratitude à mes très chers parents, sans oublier mon cher frère et ma chère sœur pour leurs soutiens, encouragements et leur inestimable affection, et à toutes les personnes m'ont aidé au long de mes études.



Dédicace

Les jours ont passé et je suis sur le point de terminer mon parcours d'études. Des émotions mixtes et de beaux souvenirs que les jours nous ont laissés.

Je dédie ce travail, les fruits de mes efforts et ma joie :

À mes très chers parents, mon père DJILALI et la plus belle mère KHEIRA, qui se sont assurés de m'élever et de m'éduquer et qui ont la raison de ma réussite, que dieu les gardes et les protèges.

À mon cher frère ABDEL MALEK, qui me soutient, que Dieu le protège.

À ma chère sœur KHOULOUD, le trésor de mon cœur, je lui souhaite le succès au baccalauréat.

À ma famille et tous ceux que j'aime.

À moi-même.



ملخص

هذا العمل محصور في إطار دراسة عزم سداسي القطب الكهربائي في حالة الاقتران بين الجسيمات المتطابقة (نيوترون-نيوترون وبروتون-بروتون) للأنوية زوجية-زوجية وفردية-زوجية. كخطوة أولى، بدأنا بتقديم تذكير بالنماذج النووية وهي نموذج القطرة السائلة ونموذج الغلاف للجسيمات المستقلة. كتبنا الهاملتون للنظام النووي والذي كتبناه خطيا عن طريق نظرية ويك لإيجاد معادلات الدوال الموجية للجسيمات زوجية-زوجية وفردية-زوجية. في الخطوة الثانية تم إيجاد معادلات عزم سداسي القطب الكهربائي بين الجسيمات المتطابقة للدوال الموجية زوجية-زوجية وفردية-زوجية. في الخطوة الأخيرة تم معالجة عزم سداسي القطب الكهربائي عدديا بواسطة الطاقات والحالات الذاتية لـوود ساكسون على نواة الكريبتون ونظائرها.

الكلمات المفتاحية: عزم سداسي القطب الكهربائي؛ الاقتران النووي؛ النماذج النووية

Résumé

Au cours de ce travail nous avons étudié le moment hexadécapolaire électrique dans le cas de l'appariement nucléaire entre particules identiques des noyaux pair-pairs et pair-impairs. Pour cela nous avons écrit l'hamiltonien dans sa forme générale. Ce hamiltonien a été diagonalisé par le théorème de Wick qui nous a permis de trouver les fonctions d'ondes d'un nombre pair-pairs et pair-impairs de particules. Nous avons ensuite, établi les expressions du moment hexadécapolaire électrique entre les particules identiques correspondants les fonctions d'ondes. Sur le plan numérique le moment hexadécapolaire a été calculé pour des noyaux krypton et ses isotopes en utilisant les énergies et états propres d'un champ moyen déformé de Woods-Saxon.

Mots clés: Moment hexadécapolaire électrique; Appariement nucléaire; Modèles nucléaires; Energies de Woods-Saxon.

Abstract

During this work we have studied the electrical hexadecapole moment in the case of pairing nuclear of the even-even and even-odd nuclei. We have written the Hamiltonian in its general form. This Hamiltonian was diagonalized by the Wick theorem and which allowed us to find the functions of an even-even and odd-even number of particles. We then established the expressions of the electrical hexadecapole moment between the identical particles corresponding to the wave functions. Numerically, the hexadecapole moment has been calculated for krypton nuclei and its isotopes using the energies and eigenstates of a deformed Woods-Saxon mean field.

Keywords: Electrical hexadecapole moment; Pairing nuclear; Nuclear models; Woods-Saxon energies.

Table des matières

| | |
|--|-----------|
| Introduction | 5 |
| 1 Les corrélations d'appariement nucléaire | 7 |
| 1.1 Introduction | 7 |
| 1.2 Le noyau atomique | 8 |
| 1.3 Modèles nucléaires | 8 |
| 1.3.1 Modèle de la goutte liquide | 8 |
| 1.3.2 Modèle en couches | 9 |
| 1.4 Hamiltonien du système | 17 |
| 1.4.1 Hamiltonien en seconde quantification | 17 |
| 1.4.2 Force d'appariement | 18 |
| 1.4.3 Théorie BCS | 19 |
| 1.4.4 Transformation de Bogoliubov-Valatin | 20 |
| 1.5 Equations de gap | 20 |
| 2 Fonctions d'ondes d'un nombre pair et impair de particules | 26 |
| 2.1 Introduction | 26 |
| 2.2 Fonction d'onde d'un nombre pair de particules | 26 |
| 2.2.1 Valeur moyenne de l'opérateur d'un nombre pair de particules | 28 |
| 2.3 Fonction d'onde d'un nombre impair de particules | 29 |
| 2.3.1 Valeur moyenne de l'opérateur d'un nombre impair de particules | 30 |
| 2.4 Moments multipolaires nucléaires | 30 |

| | |
|---|-----------|
| <i>Table des matières</i> | 2 |
| 2.4.1 Moment hexadécapolaire électrique | 31 |
| 3 Résultats numériques et discussion | 33 |
| 4 Conclusion | 39 |
| Bibliographie | 41 |

Table des figures

| | | |
|-----|---|----|
| 1-1 | Les niveaux d'énergie des nucléons dans le modèle en couches [4]. | 16 |
| 3-1 | Evolution des probabilités d'occupation et d'inoccupation en fonction des niveaux individuels du noyau. | 34 |
| 3-2 | Variation de la constante d'appariement des protons (p-p) en fonction de nombre de neutrons N du noyau de krypton. | 37 |
| 3-3 | Evolution du moment hexadécapolaire électrique en fonction de nombre de neutrons N du noyau de krypton. | 38 |

Liste des tableaux

- 3.1 Calcul le moment hexadécapolaire électrique de quelques noyaux pairs-pairs, le nombre de proton (colonne 2), le nombre de neutron (colonne 3), le gap d'appariement (Mev) (colonne 4) et le constant d'appariement (Mev) (colonne 5), les valeurs de moment hexadécapolaire électrique ($barn^2$) de quelques noyaux pair-pairs (colonnes 6). Les valeurs de moment hexadécapolaire électrique calculés par la Méthode RMF (Ref. [31]) ($barn^2$) de quelques noyaux pair-pairs (colonnes 7) 36
- 3.2 Calcul le moment hexadécapolaire électrique de quelques noyaux pairs-impairs, le nombre de proton (colonne 2), le nombre de neutron (colonne 3), le gap d'appariement (Mev) (colonne 4) et le constant d'appariement (Mev) (colonne 5), les valeurs de moment hexadécapolaire électrique ($barn^2$) de quelques noyaux pair-impairs (colonnes 6) 36

Introduction

En structure nucléaire, les moments multipolaires jouent un rôle important pour décrire le noyau atomique. Parmi les moments les plus connus on cite le moment quadripolaire, le moment octupolaire et le moment hexadécapolaire. L'étude du moment hexadécapolaire électrique permet de connaître certaines propriétés comme la forme et la déformation des noyaux atomiques. Il permet ainsi de mettre en évidence la déformation des noyaux par rapport à la forme sphérique ou bien il permet de mesurer la déviation de la distribution de charge par rapport à la sphéricité. Le noyau atomique est un objet très complexe, son étude demeure un problème majeur pour les physiciens. Le développement de techniques expérimentales de plus en plus performantes permet désormais de produire et d'étudier la structure de ces noyaux. Ceux-ci présentent de nouveaux comportements par rapport aux noyaux stables, dont les propriétés sont bien reproduites par les modèles théoriques. L'un des premiers modèles du noyau, proposé par Weizsäcker en 1935 [1], est celui de la goutte liquide où le noyau est assimilé à un fluide classique constitué de nucléons qui sont confinés dans un volume fini de l'espace par l'interaction forte. Le deuxième modèle est le modèle en couches [2, 3], où les nucléons sont considérés comme des particules indépendantes, l'un de l'autre, rend naturelle l'existence d'un potentiel moyen dans lequel évoluent les nucléons. Le problème qui se pose alors en physique nucléaire est la définition de ce potentiel moyen qui a la particularité ici d'être produit par les nucléons eux-mêmes. Les potentiels cités ici sont le potentiel d'oscillateur harmonique, le potentiel de Woods-Saxon et le potentiel du couplage spin-orbite.

D'autre part les corrélations d'appariement nucléaire ont un effet significatif dans le moment hexadécapolaire électrique. En effet, dans les noyaux ayant un nombre de protons

différent de celui de neutrons, les niveaux de Fermi des systèmes protons et neutrons sont séparés et éloignés, donc l'appariement neutron-proton est faible devant l'appariement entre particules identiques proton-proton et neutron-neutron. Par contre, dans le cas où les protons et les neutrons sont voisins, leurs niveaux de Fermi des systèmes neutrons et protons sont voisins donc l'appariement neutron-proton est très important que l'appariement entre particules identiques [3 – 11]. Les corrélations d'appariement peuvent en effet exister dans le cas isovectoriel ($T = 1$) qui permet de décrire à la fois l'appariement entre particules identiques et l'appariement neutron-proton et dans le cas isoscalaire ($T = 0$) qui correspond uniquement à l'appariement neutron-proton. L'interaction d'appariement nucléaire est généralement traité dans le cadre de la théorie (Bardeen, Cooper et Schrieffer) *BCS* [12].

Le but du présent travail est d'étudier le moment hexadécapolaire électrique dans le cas de l'appariement entre particules identiques pour des noyaux atomiques pair-pairs et pair-impairs.

Dans le premier chapitre, nous allons rappeler les modèles nucléaires qui décrivent le noyau atomique à savoir le modèle de la goutte liquide et le modèle en couches à particules indépendantes. Par la suite nous allons traiter l'appariement nucléaire entre particules identiques. Nous commencerons par écrire l'hamiltonien du système nucléaire qui sera linéarisé par l'utilisation de théorème de Wick. Par cette dernière nous pouvons établir les équations de gap qui seront les amplitudes de probabilité d'occupation et d'inoccupation de particules, la constante d'appariement et la demi-largeur du gap.

Le deuxième chapitre sera consacré à l'étude des fonctions d'ondes d'un système nucléaire de nombre pairs et impairs de particules. La suite du travail sera consacré ainsi à établir l'expression du moment hexadécapolaire électrique pour un nombre pair-pairs de particules et pour un nombre pair-impairs de particules.

Le dernier chapitre sera consacré au calculs numérique des équations de gap et de moment hexadécapolaire électrique en se basant sur les énergies et états propres d'un champ moyen déformé de Woods-Saxon [13].

Chapitre 1

Les corrélations d'appariement nucléaire

1.1 Introduction

Le noyau fait partie intégrante de l'atome et de sa partie centrale, et la complexité du noyau atomique nous a causé des difficultés à comprendre sa structure et ses propriétés géométriques.

Notre étude s'intéresse aux corrélations d'appariement nucléaires dans le cas isovectorel qui correspond les particules identiques neutron-neutron (n-n) et proton-proton (p-p). Pour plus comprendre le noyaux atomique et ses propriétés nous allons dans ce chapitre présenter deux modèles nucléaires importantes pour étudier les caractéristiques et la structure nucléaire des noyaux qui sont parmi les premiers et les anciens modèles, le modèle de la goutte liquide et le modèle en couches à particules indépendantes. Le modèle de la goutte liquide est un modèle approximatif qui ressemble au noyau atomique d'une goutte de liquide et permet d'établir la formule semi-empirique de Bethe-Weizsäcker. Il permet de connaître l'énergie de liaison des noyaux atomiques et sa stabilité et leur masse dans leur état fondamental. Le modèle en couches à particules indépendantes permet d'expliquer un certain nombre de phénomènes comme, les états excités, l'existence des couches, les

nombres magiques, la déformation du noyau, les réactions nucléaires, la fission nucléaire, etc.

L'objet du présent chapitre est de écrire l'hamiltonien dans sa forme générale en représentation de particules et de le diagonalise par le théorème de Wick en utilisant la transformation de Bogoliubov-Valatin qui relie les opérateurs de création et d'annihilation de particules en fonction des opérateurs de création et d'annihilation de quasi-particules par les amplitudes de probabilités d'occupation et d'inoccupation de particules pour trouver les équations de gap.

1.2 Le noyau atomique

L'atome est constitué d'un noyau au centre et des électrons électriquement chargée négative qui tournent autour de ce noyau. Le noyau est constitué des nucléons qui sont les protons et les neutrons, où les protons ont une charge électrique positive et les neutrons électriquement neutre.

1.3 Modèles nucleaires

1.3.1 Modèle de la goutte liquide

Le modèle de la goutte liquide à été proposé en 1935 par Von Weizsäcker donnant une approche semi-empirique de l'énergie de liaison pour des noyaux appartenant à la vallée de stabilité. C'est le premier modèle qui considère le noyau comme un ensemble de nucléons traités de manière collective interagissant entre eux par interaction forte. Ce modèle macroscopique permet de reproduire les masses atomiques avec une assez bonne précision et permet décrire certaines propriétés des noyaux (l'énergie de liaison, le rayon, la densité nucléaire). Il considère la densité volumique de charge est incompressible et constante dans le noyau. A partir de ces hypothèses Beth et Bâcher (1936) ont proposé

la formule semi-empirique suivante [2, 14] :

$$B(A, Z) = a_v A - a_s A^{2/3} - a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_a \frac{(N - Z)^2}{A} \pm \delta(A) \quad (1.1)$$

où A est le numéro atomique, Z est le nombre de protons et N est le nombre de neutrons.

- le terme a_v est un terme de volume identique pour tout le noyau ($a_v = 15.56 \text{ Mev}$).
- le terme a_s est terme de perte d'énergie pour les nucléons près de la surface ($a_s = 17.23 \text{ Mev}$).
- le terme a_c est un terme de répulsion électrostatique entre proton ($a_c = 0.7 \text{ Mev}$).
- le terme a_a est un terme d'asymétrie, favorise la symétrie entre protons et neutrons ($a_a = 23.6 \text{ Mev}$).
- le terme $\delta(A)$ est un terme d'appariement quantique d'où :

$$\delta(A) = \begin{cases} 33.6A^{-3/4} & \text{si } N \text{ et } Z \text{ sont pairs} \\ -33.6A^{-3/4} & \text{si } N \text{ et } Z \text{ sont impairs} \\ 0 & \text{si } A = N + Z \text{ est impair} \end{cases}$$

Le modèle de la goutte liquide a réussi d'expliquer certains phénomènes de la physiques nucléaires mais il n'a pas pu expliquer d'autres comme la structure des noyaux. Par conséquent, le modèle en couches (modèle à particules indépendantes) doit être utilisé pour expliquer tous les problèmes des noyaux atomiques.

1.3.2 Modèle en couches

C'est un modèle du noyau atomique à particules indépendantes à pour objectif de décrire la structure des noyaux où les nucléons sont arrangés dans des couches ou des niveaux dans les noyaux. Les nucléons sont soumis au mouvement dans un champ moyen nucléaire, chaque nucléon se déplace dans un champ moyen créé par l'interaction avec les autres nucléons approximativement.

La complexité qui se produit dans le noyau et le modèle en couches nous amène à

la mécanique quantique, pour déterminer la configuration d'un noyau atomique à l'état fondamental, et il est nécessaire de résoudre l'équation de Schrödinger. Alors, en résolvant cette équation pour un nucléon, puis en généralisant le cas pour tous les nucléons du noyau atomique. L'équation de Schrödinger s'écrit [15–18] :

$$H\Psi(\vec{r}) = E\Psi(\vec{r}) \quad (1.2)$$

où H représente l'opérateur hamiltonien composé deux termes cinétique et potentiel comme suit :

$$H = T + V \quad (1.3)$$

avec E est l'énergie du système et Ψ est la fonction d'onde.

on peut écrire :

$$\begin{aligned} H &= \frac{p^2}{2m} + V(r) \\ &= \frac{-\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}^2 + V(r) \end{aligned} \quad (1.4)$$

avec $p = -i\hbar\vec{\nabla}$ et $V(r)$ est le potentiel de l'oscillateur harmonique qui s'écrit :

$$V(r) = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 \quad (1.5)$$

on remplace l'équation (1.4) dans (1.2), on obtient :

$$\left[\frac{-\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}^2 + V(r) \right] \Psi(\vec{r}) = E \Psi(\vec{r})$$

d'où

$$\left[\vec{\nabla}^2 + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V(r)) \right] \Psi(\vec{r}) = 0 \quad (1.6)$$

En utilisant pour cette dernière expression le laplacien en coordonnées sphériques (r, θ, ϕ)

par :

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{1}{\hbar^2 r^2} L^2 \quad (1.7)$$

avec L^2 est l'opérateur de moment angulaire dans l'espace des coordonnées, et son état propre est la fonction harmonique sphérique $Y_{\ell,m}(\theta, \phi)$ "la fonction propre des opérateurs L^2 et L_z " donne :

$$\begin{aligned} L^2 Y_{\ell,m}(\theta, \phi) &= -\hbar^2 \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] Y_{\ell,m}(\theta, \phi) \\ &= \hbar^2 \ell(\ell + 1) Y_{\ell,m}(\theta, \phi), \end{aligned} \quad (1.8)$$

et

$$L_z Y_{\ell,m}(\theta, \phi) = -i\hbar^2 \frac{\partial}{\partial \phi} Y_{\ell,m}(\theta, \phi). \quad (1.9)$$

Et comme r et (θ, ϕ) sont indépendants, donc on peut trouver la fonction d'onde pour résoudre l'équation de Schrödinger :

$$\Psi_{n,\ell,m}(r) = \frac{U_{n,\ell}(r)}{r} Y_{\ell,m}(\theta, \phi) \quad (1.10)$$

où $\frac{U_{n,\ell}}{r}$ est une fonction d'onde radiale qui dépend de r , donc nous obtenons l'équation radiale :

$$\left[\left(\frac{\partial^2 U_{n,\ell}(r)}{\partial r^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E_{n,\ell} - V(r) - \frac{\hbar^2 \ell(\ell + 1)}{2mr^2} \right) \right) U_{n,\ell}(r) \right] = 0 \quad (1.11)$$

on remplace l'équation (1.5) dans (1.11), on trouve :

$$\left[\left(\frac{\partial^2 U_{n,\ell}(r)}{\partial r^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E_{n,\ell} - \frac{1}{2} m \omega^2 r^2 - \frac{\hbar^2 \ell(\ell + 1)}{2mr^2} \right) \right) U_{n,\ell}(r) \right] = 0 \quad (1.12)$$

Les solutions de cette équation sont à la forme polynomiale, comme suit :

$$U_{n,\ell} \propto e^{-\frac{m\omega r^2}{2\hbar}} r^{\ell+1} L_{\frac{n+\ell-1}{2}}^{\frac{\ell+1}{2}} \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} r \right) \quad (1.13)$$

et l'énergie des états liés est donnée par :

$$E = \hbar\omega \left(2n + \ell - \frac{1}{2} \right) \quad (1.14)$$

où n est un nombre quantique radial ($n = 1, 2, \dots, \infty$) et ℓ est un nombre quantique du

moment angulaire orbital ($\ell = 0, 1, 2, \dots, \infty$) qui correspondent respectivement les sous-couches $s, p, d, f, g, h, i, j, \dots$

On peut relier le nombre n avec le nombre quantique principal N qui représente les couches défini par l'expression suivante :

$$N = 2n + \ell - 2 \quad (1.15)$$

L'expression de l'énergie (1.14) s'écrit alors :

$$E = \hbar\omega \left(N + \frac{3}{2} \right) \quad (1.16)$$

L'augmentation de la dégénérescence dans les valeurs propres de l'énergie correspondant à différentes combinaisons de ℓ et de n donnent les états (ℓ, n) suivants :

- pour les nombres pairs de N on a :

$$(\ell, n) = \left(0, \frac{N+2}{2} \right), \left(2, \frac{N}{2} \right), \dots, (N+1) \quad (1.17)$$

- pour les nombres impairs de N on a :

$$(\ell, n) = \left(1, \frac{N+1}{2} \right), \left(3, \frac{N-1}{2} \right), \dots, (N+1) \quad (1.18)$$

Exemple :

$$N = 0 \rightarrow (\ell, n) = (0, 1), (2, 0), \dots (1) \rightarrow 1s$$

$$N = 1 \rightarrow (\ell, n) = (1, 1), (3, 0), \dots (2) \rightarrow 1p$$

$$N = 2 \rightarrow (\ell, n) = (0, 2), (2, 1), \dots (3) \rightarrow 2s, 1d$$

$$N = 3 \rightarrow (\ell, n) = (1, 2), (3, 1), \dots (4) \rightarrow 2p, 1f$$

La dégénérescence de chaque couches se calcule à partir de la relation [14] :

$$d_\ell = 2(2\ell + 1) \quad (1.19)$$

Potentiel de Woods-Saxon

Roger Woods et David Saxon créés un potentiel central pour réaliser le champ moyen empirique, qui a la même forme que la densité du noyau (qui peut être décrite par une distribution de Fermi), qui s'écrit par [19] :

$$V(r)_{centre} = \frac{-V_0}{1 + e^{(r-R)/a}} \quad (1.20)$$

où V_0 est la profondeur du puits nucléaire, R est le rayon nucléaire et a est l'épaisseur de la surface nucléaire qui introduit la notion de peau nucléaire.

et les valeurs de ces paramètres sont les suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} V_0 = -50 \text{ Mev} \\ a = 0.5 \text{ Fm} \\ R = 1.1 A^{\frac{1}{3}} \\ r = 1.2 \text{ Fm} \end{array} \right.$$

Potentiel de spin-orbite

En 1949, M.G Mayer et H.Jensen ont suggéré qu'à l'intérieur du noyau il existe une forte interaction spin-orbite, et par conséquent, le potentiel perçu par un nucléon est de la forme [16] :

$$V_{s-o} = f(r) \vec{L} \cdot \vec{S} \quad (1.21)$$

où \vec{L} et \vec{S} sont les opérateurs de moment angulaire orbital et de spin pour un nucléon. $f(r)$ est une fonction arbitraire des coordonnées radiales ($f(r) \langle 0 \rangle$).

Couplage spin-orbite

Dans la physique atomique, une interaction spin-orbite sépare les deux niveaux d'énergie dégénérés $j = \ell \pm \frac{1}{2}$ et produit une structure fine, de sorte que l'état avec $j = \ell + \frac{1}{2}$

peut avoir une énergie plus basse que l'état avec $j = \ell - \frac{1}{2}$, ce qui est contraire à ce qui se passe dans les atomes [16].

M. G Mayer, D. Haxel, J. Jensen et H. Suess, ont trouvés la solution à ce problème et consistent à ajouter une interaction spin-orbite pour chaque nucléon et à la décrire par un terme (ℓs) supplémentaire dans le potentiel V_{s-o} [15].

$$V'_{s-o} = V_{s-o} \ell s \quad (1.22)$$

Le terme spin-orbite rompt la dégénérescence de sorte que l'énergie dépend maintenant de trois nombres quantiques, le nombre principal n , le nombre quantique du moment angulaire orbital ℓ et le nombre quantique du moment angulaire total J est alors donné par J [16] :

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S} \quad (1.23)$$

si on fait le tout au carré, on trouve :

$$\vec{J}^2 = \vec{L}^2 + \vec{S}^2 + 2\vec{L}\vec{S}$$

donc :

$$\vec{L}\vec{S} = \frac{1}{2} \left(\vec{J}^2 - \vec{L}^2 - \vec{S}^2 \right) \quad (1.24)$$

Le moment angulaire total J est la combinaison du moment angulaire orbital et du spin du nucléon [20], donc les opérateurs L^2 et S^2 sont commutent avec J^2 alors sont deviens [17] :

$L^2 = \ell(\ell + 1)$, $S^2 = s(s + 1)$ et $J^2 = j(j + 1)$ et $s = \frac{1}{2}$, on trouve :

$$\begin{aligned} \ell s &= \frac{1}{2} [j(j + 1) - \ell(\ell + 1) - s(s + 1)] \\ &= \frac{1}{2} \left[j(j + 1) - \ell(\ell + 1) - \frac{3}{4} \right] \end{aligned}$$

alors

$$\begin{cases} \text{Pour } j = \ell + \frac{1}{2} \rightarrow \ell s = \frac{\ell}{2} \\ \text{Pour } j = \ell - \frac{1}{2} \rightarrow \ell s = -\frac{(\ell+1)}{2} \end{cases}$$

par consequence, le potentiel spin-orbite prend la forme suivant :

$$V_{s-o} = \frac{1}{2}f(r) \left[j(j+1) - \ell(\ell+1) - \frac{3}{4} \right] \quad (1.25)$$

- Le potentiel globale dans ce cas prend la forme suivant :

$$\begin{aligned} V_{globale} &= V_{O-H} - D\ell^2 - V_{S-O} \\ &= V_{O-H} - D\ell(\ell+1) - \frac{1}{2}f(r) \left[j(j+1) - \ell(\ell+1) - \frac{3}{4} \right] \end{aligned} \quad (1.26)$$

- Les énergies des nucléons dans le modèle en couches s'écrivent :

$$\begin{aligned} E_{nlj} &= \hbar\omega \left(2n + \ell - 2 + \frac{3}{2} \right) \\ &= \hbar\omega \left(2(n-1) + \ell + \frac{3}{2} \right) - D\ell(\ell+1) - \frac{1}{2}f(r) \left[j(j+1) - \ell(\ell+1) - \frac{3}{4} \right] \end{aligned} \quad (1.27)$$

cela implique que les énergies des nucléons dans le modèle en couche s'écrivent :

$$\begin{aligned} \ell s = \frac{\ell}{s} &\rightarrow E_{n,\ell} = -\frac{\ell}{2}f(r) \\ \ell s = -\frac{(\ell+1)}{s} &\rightarrow E_{n,\ell} = -\frac{(\ell+1)}{2}f(r) \end{aligned}$$

- La différence entre les énergies potentiels est :

$$\Delta E_{n,\ell} = \left(-\frac{\ell}{2}f(r) \right) - \left(-\frac{(\ell+1)}{2}f(r) \right) = -\frac{(2\ell+1)}{2}f(r)$$

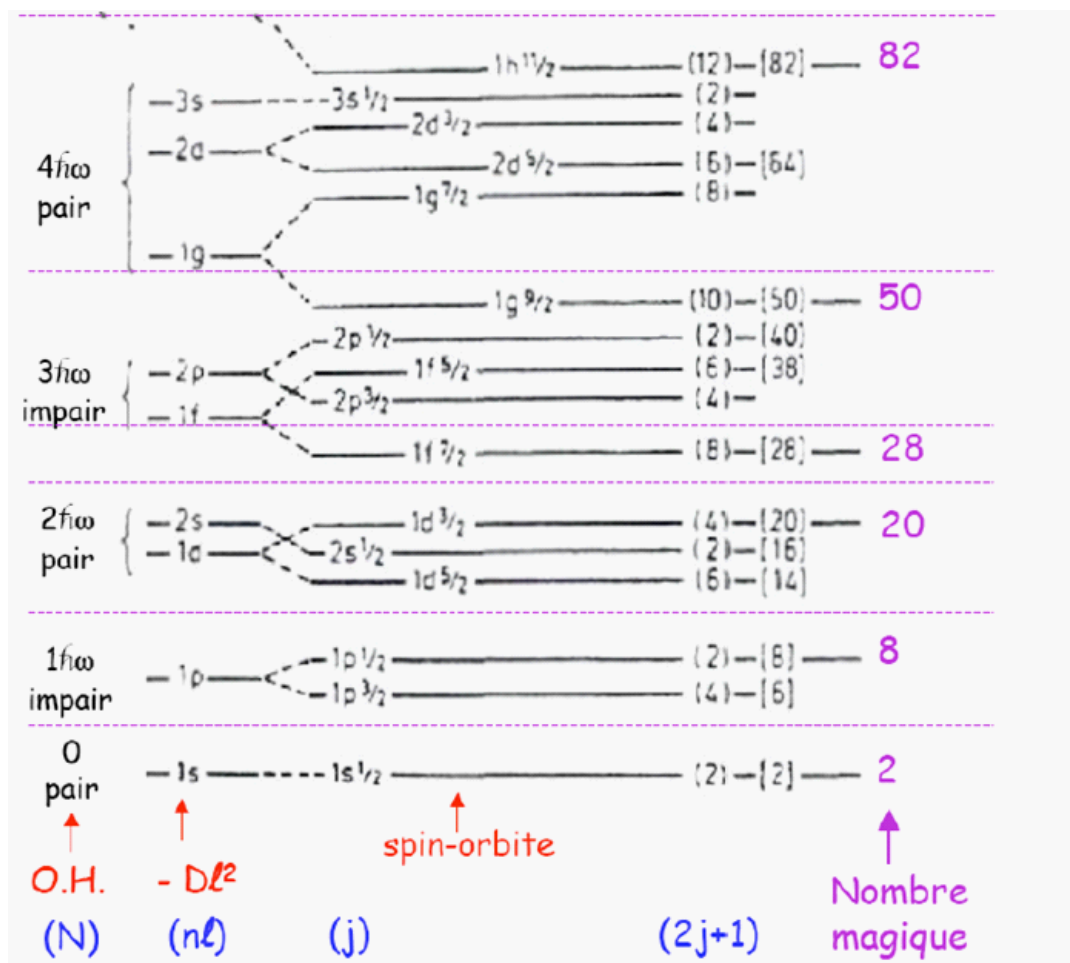


FIG. 1-1: Les niveaux d'énergie des nucléons dans le modèle en couches [4].

1.4 Hamiltonien du système

1.4.1 Hamiltonien en seconde quantification

Dans un système à particules indépendantes et de nombre de nucléons A quelconque, ainsi qu'on n'est pas d'interaction entre neutron N et proton P , alors l'hamiltonien réel du système dans ce cas s'écrit [3-11] :

$$H = H_0 + V \quad (1.28)$$

avec H_0 est le champ moyen à particules indépendante, et V est l'interaction résiduelle entre nucléons.

H_0 s'écrit la formalisme de "la seconde quantification" est donné par [3 – 10] :

$$H_0 = \sum_{\nu} \varepsilon_{\nu} a_{\nu}^{+} a_{\nu} \quad (1.29)$$

où :

ε_{ν} représente l'énergie d'une particule dans le niveau $|\nu\rangle$.

a_{ν}^{+} représente l'opérateur de création des particules sur le niveau $|\nu\rangle$.

a_{ν} représente l'opérateur d'annihilation des particules sur le niveau $|\nu\rangle$.

D'après les règles d'anticommutations des fermions, on a :

$$\{a_{\nu}^{+}, a_{\mu}^{+}\} = a_{\nu}^{+} a_{\mu}^{+} + a_{\mu}^{+} a_{\nu}^{+} = 0$$

et

$$\{a_{\nu}, a_{\mu}\} = a_{\nu} a_{\mu} + a_{\mu} a_{\nu} = 0$$

alors

$$\{a_{\nu}^{+}, a_{\mu}^{+}\} = \{a_{\nu}, a_{\mu}\} = 0 \quad (1.30)$$

et

$$\{a_{\nu}^{+}, a_{\mu}\} = a_{\nu}^{+} a_{\mu} + a_{\mu} a_{\nu}^{+} = \delta_{\nu\mu} \quad (1.31)$$

L'interaction résiduelle entre les nucléons peut s'écrire à la forme suivante :

$$V = \frac{1}{4} \sum_{k\ell mn} \langle k\ell | V | mn \rangle a_k^+ a_\ell^+ a_m a_n \quad (1.32)$$

le terme $\langle k\ell | V | mn \rangle$ est les éléments de matrice antisymétriques de V , que l'on suppose constant par rapport à la rotation et inversible au sens du temps :

$$\langle k\ell | V | mn \rangle = s_k s_\ell s_m s_n \langle -m - n | V | -k - \ell \rangle = \langle \tilde{m}\tilde{n} | V | \tilde{k}\tilde{\ell} \rangle \quad (1.33)$$

où l'état $|\tilde{k}\rangle$ est renversé par rapport au sens du temps de $|k\rangle$ ($|\tilde{k}\rangle = s_k | -k \rangle$) et \sim désigne est le renversement par rapport au sens du temps avec s_k étant le facteur de phase et ($\varepsilon_k = \varepsilon_{\tilde{k}}$).

1.4.2 Force d'appariement

Belyaev a introduit le concept d'interaction résiduelle pour expliquer l'effet d'appariement, qui se produit lorsque deux états sont inversés l'un de l'autre par rapport au sens du temps. Cette force est définie par ses éléments de matrice [21] :

$$\langle k\ell | V | mn \rangle = -4G \delta_{k\tilde{\ell}} \delta_{m\tilde{n}} \quad (1.34)$$

où G est la force d'appariement qui est supposée constante.

Au but de connaître l'effet d'une telle interaction, on suppose pour chaque type de nucléon des neutrons ou bien des protons, et en remplaçant les expressions (1.29) et (1.32) dans (1.28), ce qui entraîne l'hamiltonien du système suivant :

$$H = \sum_{\nu} \varepsilon_{\nu} a_{\nu}^+ a_{\nu} + \frac{1}{4} \sum_{k\ell mn} \langle k\ell | V | mn \rangle a_k^+ a_\ell^+ a_m a_n \quad (1.35)$$

on remplace l'expression (1.34) dans (1.35), on a :

$$\begin{aligned}
H &= \sum_{\nu} \varepsilon_{\nu} a_{\nu}^{\dagger} a_{\nu} + \frac{1}{4} \sum_{k\ell m\tilde{n}} (-4G\delta_{k\tilde{\ell}}\delta_{m\tilde{n}}) a_k^{\dagger} a_{\tilde{\ell}}^{\dagger} a_m a_{\tilde{n}} \\
&= \sum_{\nu} \varepsilon_{\nu} (a_{\nu}^{\dagger} a_{\nu} + a_{\tilde{\nu}}^{\dagger} a_{\tilde{\nu}}) - G \sum_{k\tilde{m}0} a_k^{\dagger} a_{\tilde{k}}^{\dagger} a_m a_{\tilde{m}} \\
&= \sum_{\nu} \varepsilon_{\nu} (a_{\nu}^{\dagger} a_{\nu} + a_{\tilde{\nu}}^{\dagger} a_{\tilde{\nu}}) - G \sum_{\nu,\mu} a_{\nu}^{\dagger} a_{\tilde{\nu}}^{\dagger} a_{\mu} a_{\tilde{\mu}} \tag{1.36}
\end{aligned}$$

$$\text{avec } \delta_{k\tilde{\ell}} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = \tilde{\ell} \\ 0 & \text{si } k \neq \tilde{\ell} \end{cases}$$

Opérateur nombre de particules N Pour décrire un système constitué de n particules, l'opérateur hamiltonien doit être commuter avec l'opérateur de nombre de particules N , qui est donné par la relation suivante :

$$\begin{aligned}
N &= \sum_{\nu} a_{\nu}^{\dagger} a_{\nu} \\
&= \sum_{\nu} (a_{\nu}^{\dagger} a_{\nu} + a_{\tilde{\nu}}^{\dagger} a_{\tilde{\nu}}) \tag{1.37}
\end{aligned}$$

Ainsi, il s'agit maintenant de déterminer les fonctions propres de H et N (les états $|\phi\rangle$), ce problème est résolu approximativement par la théorie de Bardeen Cooper et Schrieffer (BCS).

1.4.3 Théorie BCS

En 1957 Bardeen, Cooper et Schrieffer ont formulé cette théorie pour expliquer la supraconductivité dans les matériaux sous l'effet de l'interaction attractive des électrons. Belyaev a utilisée cette théorie dans la physique nucléaire pour étudier les corrélations d'appariement dans les noyaux, dans lesquels les recouvrements des fonctions d'ondes des deux nucléons appariés sont prises en considération et les fonctions *BCS* sont fonctions propres de H , mais le nombre de particules N n'est que moyennement conservé, qui

s'écrit [4] :

$$n_0 = \langle BCS | N | BCS \rangle \quad (1.38)$$

où n_0 est le nombre réel de particules de système (nombre conservé).

1.4.4 Transformation de Bogoliubov-Valatin

Cette transformation est la combinaison linéaire des opérateurs de création et d'annihilation de vrais particules, qui sont les opérateurs α_ν et α_ν^+ , ils s'écrit [19, 20] :

$$\begin{cases} \alpha_\nu = u_\nu a_\nu - v_\nu a_\nu^+ \\ \alpha_\nu^+ = u_\nu a_\nu^+ - v_\nu a_\nu \end{cases} \quad (1.39)$$

avec u_ν et v_ν sont respectivement les amplitudes des probabilités d'occupation et d'occupation de particules dans l'état $|\nu\rangle$.

La transformation inverse de Bogoliubov-Valatin s'écrit à partir de l'expression (1.39) comme suit :

$$\begin{cases} a_\nu = u_\nu \alpha_\nu + v_\nu \alpha_\nu^+ \\ a_\nu^+ = u_\nu \alpha_\nu^+ + v_\nu \alpha_\nu \end{cases} \quad (1.40)$$

Donc il est possible de définir une nouvelle représentation comme "la représentation quasi particulaire" dont le vide, est noté : $|BSC\rangle$ ou $|0\rangle$ est défini par l'équation :

$$\alpha_\nu |BSC\rangle = 0 ; \quad \langle BSC | \alpha_\nu^+ = 0 \quad (1.41)$$

1.5 Equations de gap

On diagonalise et en linéarisant approximativement l'hamiltonien H (1.36) par le théorème de Wick, et on minimise la valeur moyenne de H calculée sur l'état $|BSC\rangle$ par les paramètres u_ν et v_ν , alors on trouve un hamiltonien auxiliaire H' exprimé en

représentation quasi-particule par :

$$\begin{aligned}
H' &= H - \lambda N \\
&= \sum_{\nu \rangle 0} \varepsilon_\nu (a_\nu^+ a_\nu + a_{\tilde{\nu}}^+ a_{\tilde{\nu}}) - G \sum_{\nu, \mu \rangle 0} a_\nu^+ a_{\tilde{\nu}}^+ a_\mu a_{\tilde{\mu}} - \lambda \sum_{\nu \rangle 0} (a_\nu^+ a_\nu + a_{\tilde{\nu}}^+ a_{\tilde{\nu}}) \\
&= \sum_{\nu \rangle 0} (\varepsilon_\nu - \lambda) (a_\nu^+ a_\nu + a_{\tilde{\nu}}^+ a_{\tilde{\nu}}) - G \sum_{\nu, \mu \rangle 0} a_\nu^+ a_{\tilde{\nu}}^+ a_\mu a_{\tilde{\mu}} \tag{1.42}
\end{aligned}$$

avec λ est le paramètre de lagrange.

Afin de diagonaliser l'hamiltonien (1.42) en utilisant le théorème de Wick [33], soit :

$$a_\nu^+ a_\nu = a_\nu^+ a_\nu : a_\nu^+ a_\nu : \tag{1.43}$$

$$a_{\tilde{\nu}}^+ a_{\tilde{\nu}} = a_{\tilde{\nu}}^+ a_{\tilde{\nu}} : a_{\tilde{\nu}}^+ a_{\tilde{\nu}} : \tag{1.44}$$

$$\begin{aligned}
a_\nu^+ a_{\tilde{\nu}}^+ a_\mu a_{\tilde{\mu}} &= a_\nu^+ a_{\tilde{\nu}}^+ a_\mu a_{\tilde{\mu}} - a_\nu^+ a_{\tilde{\mu}} a_{\tilde{\nu}}^+ a_\mu + a_\nu^+ a_\mu a_{\tilde{\nu}}^+ a_{\tilde{\mu}} + a_\nu^+ a_{\tilde{\nu}}^+ : a_{\tilde{\mu}} a_\mu : \\
&- a_\nu^+ a_{\tilde{\mu}} : a_{\tilde{\nu}}^+ a_\mu : + a_\nu^+ a_\mu : a_{\tilde{\nu}}^+ a_{\tilde{\mu}} : + : a_\nu^+ a_{\tilde{\nu}}^+ : a_{\tilde{\mu}} a_\mu - \\
&: a_\nu^+ a_{\tilde{\mu}} : a_{\tilde{\nu}}^+ a_\mu + : a_\nu^+ a_\mu : a_{\tilde{\nu}}^+ a_{\tilde{\mu}} + : a_\nu^+ a_{\tilde{\nu}}^+ a_{\tilde{\mu}} a_\mu : \tag{1.45}
\end{aligned}$$

Les résultats de calcul de l'hamiltonien H' peuvent être présentés sous la forme :

$$H' = E_0 + H_{11} + H_{22} + H_{residuel} \tag{1.46}$$

où

E_0 est une constante qui contient les termes entièrement contractés.

H_{11} est contient les produits normaux de deux opérateurs α^+ et α .

H_{22} est contient les termes en $\alpha^+ \alpha^+$ et $\alpha \alpha$.

$H_{residuel}$ est le produit normal de $: a_\nu^+ a_{\tilde{\nu}}^+ a_\mu a_{\tilde{\mu}} :$ s'écrit :

$$H_{residuel} = H_{22} + H_{33} + H_{44} \tag{1.47}$$

E_0 s'exprime comme suit :

$$\begin{aligned}
E_0 &= \sum_{\nu \rangle 0} (\varepsilon_\nu - \lambda) (v_\nu^2 + v_\nu^2) - G \sum_{\nu, \mu \rangle 0} (u_\nu v_\nu u_\mu v_\mu) + (v_\nu^2 \delta_{\nu\mu} v_\nu^2 \delta_{\nu\mu}) \\
&= 2 \sum_{\nu \rangle 0} (\varepsilon_\nu - \lambda) v_\nu^2 - G \sum_{\nu, \mu \rangle 0} (u_\nu v_\nu u_\mu v_\mu) + G \sum_{\nu \rangle 0} v_\nu^4 \\
&= 2 \sum_{\nu \rangle 0} \left(\varepsilon_\nu - \lambda - \frac{1}{2} G v_\nu^2 \right) v_\nu^2 - G \sum_{\nu \rangle 0} u_\nu^2 v_\nu^2 \\
&= 2 \sum_{\nu \rangle 0} \left(\varepsilon_\nu - \lambda - \frac{1}{2} G v_\nu^2 \right) v_\nu^2 - \frac{\Delta^2}{G}
\end{aligned} \tag{1.48}$$

où nous avons posé :

$$\Delta = G \sum_{\nu \rangle 0} u_\nu v_\nu \tag{1.49}$$

Cette grandeur désigne la mesure de la demi-largeur du gap spectral en quasi-particules.

Les expressions H_{11} , H_{22} et H_{33} sont données par les relations suivantes :

$$H_{11} = \sum_{\nu \rangle 0} \{ (\varepsilon_\nu - \lambda) - G v_\nu^2 (u_\nu^2 - v_\nu^2) + 2G u_\nu v_\nu \} (\alpha_\nu^+ \alpha_\nu + \alpha_\nu^+ \alpha_{\tilde{\nu}}) \tag{1.50}$$

$$H_{22} = \sum_{\nu \rangle 0} (\varepsilon_\nu - \lambda - G v_\nu^2) u_\nu v_\nu - G (u_\nu - v_\nu) \sum_{\mu \rangle 0} u_\mu v_\mu \tag{1.51}$$

$$H_{\text{residuel}} = -G \sum_{\nu, \mu \rangle 0} : a_\nu^+ a_\nu^+ a_{\tilde{\mu}} a_\mu : \tag{1.52}$$

La valeur moyenne de l'hamiltonien \hat{H} s'exprime comme suit :

$$\begin{aligned}
\langle \hat{H} \rangle &= E_0 = 2 \sum_{\nu \rangle 0} \left(\varepsilon_\nu - \lambda - \frac{1}{2} G v_\nu^2 \right) v_\nu^2 - G \left(\sum_{\nu \rangle 0} u_\nu v_\nu \right)^2 \\
&= 2 \sum_{\nu \rangle 0} (\varepsilon_\nu - \lambda) v_\nu^2 - \frac{1}{2} G v_\nu^4 - G \left(\sum_{\nu \rangle 0} u_\nu v_\nu \right)^2
\end{aligned} \tag{1.53}$$

Si on suppose que v_ν^4 est très petite, donc ça être négligeable dans l'expression de E_0 ,

alors :

$$\langle \hat{H} \rangle = E_0 = 2 \sum_{\nu \neq 0} (\varepsilon_\nu - \lambda) v_\nu^2 - G \left(\sum_{\nu \neq 0} u_\nu v_\nu \right)^2 \quad (1.54)$$

L'approximation des quasi particules indépendantes consiste à annuler le terme H_2 et à négliger les termes résiduel. Pour simplifier les calculs, l'approximation de la quasi-particule implique la négligence du terme H_{11} et H_{22} , donc l'hamiltonien \hat{H} il vient :

$$\begin{aligned} \hat{H} &= E_0 + H_{\text{residuel}} \\ &= E_0 + \sum_{\nu \neq 0} E_\nu (\alpha_\nu^+ \alpha_\nu + \alpha_{\bar{\nu}}^+ \alpha_{\bar{\nu}}) \end{aligned} \quad (1.55)$$

où E_ν est l'énergie d'une quasi particule, qui égale :

$$E_\nu = \sqrt{(\varepsilon_\nu - \lambda - Gv_\nu^2)^2 + \Delta^2} \quad (1.56)$$

Pour trouver les probabilités d'occupation et d'inoccupation u_ν^2 et v_ν^2 , on dérive E_0 par rapport à v_ν qui égale à la dérivation de E_0 par rapport à u_ν , donc on trouve deux équations dépend de ces derniers et par calcul et simplification on trouve :

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_0}{\partial u_\nu} &= \frac{\partial E_0}{\partial v_\nu} = 0 \\ 4v_\nu (\varepsilon_\nu - \lambda - Gv_\nu^2) - 2\Delta \left(v_\nu \frac{\partial u_\nu}{\partial v_\nu} + u_\nu \right) &= 0 \end{aligned} \quad (1.57)$$

D'après la condition de normalisation $u_\nu^2 + v_\nu^2 = 1$ on peut écrire :

$$\frac{\partial u_\nu}{\partial v_\nu} = -\frac{v_\nu}{u_\nu} \quad (1.58)$$

on remplace (1.58) dans (1.57) :

$$2u_\nu v_\nu (\varepsilon_\nu - \lambda - Gv_\nu^2) - \Delta (u_\nu^2 - v_\nu^2) = 0 \quad (1.59)$$

En identifiant $\cos^2 \theta_v + \sin^2 \theta_v = 1$ avec $u_v^2 + v_v^2 = 1$, soit :

$$\begin{cases} u_v = \cos \theta_v = 1 - \sin \theta_v \\ v_v = \sin \theta_v = 1 - \cos \theta_v \end{cases} \quad (1.60)$$

on remplace l'expression (1.60) dans (1.59) on trouve :

$$\sin 2\theta_v = \frac{\Delta}{\sqrt{(\varepsilon_v - \lambda - Gv_v^2)^2 + \Delta^2}} \quad (1.61)$$

et

$$\begin{aligned} u_v^2 - v_v^2 &= \cos^2 \theta_v - \sin^2 \theta_v \\ &= \sqrt{1 - \sin^2 \theta_v} \\ &= \sqrt{1 - \frac{\varepsilon_v - \lambda - Gv_v^2}{(\varepsilon_v - \lambda - Gv_v^2)^2 + \Delta^2}} \end{aligned} \quad (1.62)$$

on trouve finalement les paramètres u_v et v_v par les expressions suivantes :

$$\left. \begin{aligned} u_v^2 \\ v_v^2 \end{aligned} = \frac{1}{2} \left[1 \pm \frac{\varepsilon_v - \lambda}{\sqrt{(\varepsilon_v - \lambda)^2 + \Delta^2}} \right] \right\} \quad (1.63)$$

De la même façon on calcule la condition de conservation de nombre de particule comme

suit :

$$\begin{aligned}
n_0 &= \langle BSC | N | BSC \rangle \\
&= \left\langle BSC \left| \sum_{\nu} (a_{\nu}^+ a_{\nu} + a_{\tilde{\nu}}^+ a_{\tilde{\nu}}) \right| BSC \right\rangle \\
&= \left\langle BSC \left| \sum_{\nu} [(u_{\nu} \alpha_{\nu}^+ + v_{\nu} \alpha_{\tilde{\nu}}) (u_{\nu} \alpha_{\nu} + v_{\nu} \alpha_{\tilde{\nu}}^+) + (u_{\nu} \alpha_{\tilde{\nu}}^+ - v_{\nu} \alpha_{\nu}) (u_{\nu} \alpha_{\tilde{\nu}} - v_{\nu} \alpha_{\nu}^+)] \right| BSC \right\rangle \\
&= \left\langle BSC \left| \sum_{\nu} v_{\nu}^2 (\delta_{\tilde{\nu}\nu} - \alpha_{\nu} \alpha_{\tilde{\nu}}) + v_{\nu}^2 (\delta_{\nu\nu} - \alpha_{\nu} \alpha_{\nu}) \right| BSC \right\rangle \\
&= 2 \sum_{\nu} v_{\nu}^2
\end{aligned} \tag{1.64}$$

En remplaçant l'expression (1.63) dans l'expression (1.64) on obtient :

$$n_0 = \sum_{\nu} \left\{ 1 - \frac{\varepsilon_{\nu} - \lambda}{\sqrt{(\varepsilon_{\nu} - \lambda)^2 + \Delta^2}} \right\} \tag{1.65}$$

Finalement, on définit l'équation du gap comme suit :

$$\Delta = G \sum_{\nu} u_{\nu} v_{\nu} \tag{1.66}$$

Quant à l'énergie d'hamiltonien du système, elle est s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned}
E_{BSC} &= \langle BSC | H | BSC \rangle \\
&= \langle BSC | H' + \lambda N | BSC \rangle \\
&= \langle BSC | H | BSC \rangle + \langle BSC | \lambda N | BSC \rangle \\
&= E_0 + 2\lambda \sum_{\nu} v_{\nu}^2 \\
&= 2 \sum_{\nu} \varepsilon_{\nu} v_{\nu}^2 - \frac{\Delta^2}{G}
\end{aligned} \tag{1.67}$$

Chapitre 2

Fonctions d'ondes d'un nombre pair et impair de particules

2.1 Introduction

Nous intéressons dans cette partie de trouver les fonctions d'ondes des noyaux et les valeurs moyennes des opérateurs d'un système pairs et impairs de particules. Passant par les moments multipolaires nucléaires qui nous donne une définition de la forme du noyau pour le but d'étudier le moment hexadécapolaire électrique des noyaux pairs et impairs.

2.2 Fonction d'onde d'un nombre pair de particules

L'approximation indépendante des quasi-particules stipule que l'état fondamental du système de particules est le vide des quasi-particules. Cet état de vide particulier est obtenu à partir du vrai vide de particules $|0\rangle$ via l'élimination de certains facteurs.

Puisque toutes les particules sont des quasi-particules, et par l'utilisation de la trans-

formation inverse de Bogoliubov-Valatin nous pouvons exprimer ceci comme suit :

$$\begin{aligned}
|\psi\rangle &= |BSC\rangle \\
&= \prod_{v>0} \alpha_v \alpha_{\bar{v}} |0\rangle \\
&= \prod_{v>0} (u_\nu a_\nu - v_\nu a_{\bar{v}}^+) (u_\nu a_{\bar{v}} + v_\nu a_\nu^+) |0\rangle \\
&= \prod_{v>0} (u_\nu^2 a_\nu a_{\bar{v}} + u_\nu v_\nu a_\nu a_\nu^+ - v_\nu u_\nu a_{\bar{v}}^+ a_{\bar{v}} - v_\nu^2 a_{\bar{v}}^+ a_\nu^+) |0\rangle \\
&= \prod_{v>0} (u_\nu v_\nu a_\nu a_\nu^+ - v_\nu^2 a_{\bar{v}}^+ a_\nu^+) |0\rangle \\
&= \prod_{v>0} (u_\nu v_\nu (\delta_{v\bar{v}} - a_\nu a_\nu^+) - v_\nu^2 a_{\bar{v}}^+ a_\nu^+) |0\rangle \\
&= \prod_{v>0} v_\nu (u_\nu + v_\nu a_\nu^+ a_{\bar{v}}^+) |0\rangle
\end{aligned} \tag{2.1}$$

où l'état $|0\rangle$ représente le vrai vide de particules et les paramètres u_ν et v_ν sont respectivement les amplitudes des probabilités d'occupation et d'inoccupation de particules dans l'état $|v\rangle$.

L'état $|\psi\rangle$ doit être orthonormalisé s'écrit de la forme suivante :

$$|\psi\rangle = \frac{|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|\psi\rangle}} \tag{2.2}$$

et le conjugué de l'état ψ est :

$$\langle\psi| = \prod_{v>0} \langle 0| \alpha_{\bar{v}}^+ \alpha_v^+ = \prod_{v>0} v_\nu \langle 0| (u_\nu + v_\nu a_{\bar{v}}^+ a_\nu^+) \tag{2.3}$$

et

$$\begin{aligned}
\langle \psi | \psi \rangle &= \prod_{\nu} \langle 0 | (u_{\nu} + v_{\nu} a_{\nu}^{\dagger} a_{\nu}^+) (u_{\nu} + v_{\nu} a_{\nu}^+ a_{\nu}^{\dagger}) | 0 \rangle \\
&= \prod_{\nu} v_{\nu}^2 \langle 0 | (u_{\nu}^2 + u_{\nu} v_{\nu} a_{\nu}^+ a_{\nu}^{\dagger} + v_{\nu} a_{\nu}^{\dagger} a_{\nu}^+ u_{\nu} + v_{\nu}^2 a_{\nu}^{\dagger} a_{\nu}^+ a_{\nu}^+ a_{\nu}^{\dagger}) | 0 \rangle \\
&= \prod_{\nu} v_{\nu}^2 \langle 0 | (u_{\nu}^2 + v_{\nu}^2 a_{\nu}^{\dagger} a_{\nu}^+ a_{\nu}^+ a_{\nu}^{\dagger}) | 0 \rangle \\
&= \prod_{\nu} v_{\nu}^2 (u_{\nu}^2 + v_{\nu}^2) \\
&= \prod_{\nu} v_{\nu}^2
\end{aligned} \tag{2.4}$$

on remplace (2.1) et (2.4) dans (2.2) on trouve la fonction d'onde d'un nombre paires de particules :

$$|\psi\rangle = \prod_{\nu} (u_{\nu} + v_{\nu} a_{\nu}^{\dagger} a_{\nu}^+) |0\rangle \tag{2.5}$$

2.2.1 Valeur moyenne de l'opérateur d'un nombre pair de particules

La valeur moyenne de l'opérateur d'un nombre pair de particules N (1.37) s'écrit, en appliquant l'action de ce dernier sur la fonction d'onde (2.5), comme :

$$\begin{aligned}
\langle \psi | N | \psi \rangle &= \prod_{\nu} \langle 0 | (u_j + v_j a_j^{\dagger} a_j^+) \sum_{\nu} (a_{\nu}^+ a_{\nu}) (u_j + v_j a_j^+ a_j^{\dagger}) | 0 \rangle \\
&= \prod_{\nu} \langle 0 | (u_j + v_j a_j^{\dagger} a_j^+) \sum_{\nu} (a_{\nu}^+ a_{\nu} + a_{\nu}^{\dagger} a_{\nu}^{\dagger}) (u_j + v_j a_j^+ a_j^{\dagger}) | 0 \rangle \\
&= 2 \sum_{\nu} v_{\nu}^2
\end{aligned} \tag{2.6}$$

2.3 Fonction d'onde d'un nombre impair de particules

Un noyau atomique peut être excité dans un état rotationnel ou dans un état vibrationnel. On peut également avoir des états excités par cassure des paires. La fonction d'onde d'un nombre impaire de particules dans lequel une particule célibataire occupe l'état ν du modèle à particules indépendantes s'écrit :

$$\begin{aligned} |v\rangle &= \alpha_\nu^+ |\psi\rangle \\ &= |\psi_\nu\rangle \end{aligned} \quad (2.7)$$

On remplace l'opérateur de création d'une quasiparticule (1.39) dans cette dernière expression on obtient :

$$\begin{aligned} |\psi_\nu\rangle &= (u_\nu a_\nu^+ - v_\nu a_{\bar{\nu}}) \prod_{\substack{j)0 \\ j \neq \nu}} (u_j + v_j a_j^+ a_{\bar{j}}^+) |0\rangle \\ &= a_\nu^+ \prod_{\substack{j)0 \\ j \neq \nu}} (u_j + v_j a_j^+ a_{\bar{j}}^+) |0\rangle \\ &= a_\nu^+ |\psi_j\rangle \end{aligned} \quad (2.8)$$

2.3.1 Valeur moyenne de l'opérateur d'un nombre impair de particules

La valeur moyenne de l'opérateur d'un nombre impair de particules (1.37) s'écrit, en appliquant l'action de ce dernier sur la fonction d'onde (??), comme :

$$\begin{aligned}
\langle \psi_v | N | \psi_v \rangle &= \langle \psi | a_\nu^+ \sum_{k)0} \left(a_k^+ a_k + a_k^+ a_{\bar{k}} \right) a_\nu^+ | \psi \rangle \\
&= 2 \sum_{v)0} v_v^2 \langle \psi | (\delta_{vv} - a_\nu^+ a_\nu) | \psi \rangle + \sum_{k)0} \langle \psi | (u_k^2 - v_k^2) (\delta_{kk} - a_k^+ a_k) (\delta_{kk} - a_k^+ a_k) | \psi \rangle \\
&= 1 + 2 \sum_{\substack{k)0 \\ k \neq v}} v_k^2 \tag{2.9}
\end{aligned}$$

2.4 Moments multipolaires nucléaires

La forme du noyau est généralement décrite par un ensemble d'opérateurs moments multipolaires, définis par [5, 6, 22] :

$$\widehat{Q}_\lambda = \begin{cases} \widehat{r}^2 & \text{si } \lambda = 0 \\ \widehat{r}^\lambda P_\lambda(\cos \theta) & \text{si } \lambda > 0 \end{cases} \tag{2.10}$$

où $P_\lambda(\cos \theta)$ sont les polynômes de Legendre d'ordre λ .

La valeur moyenne de l'opérateur d'ordre $\lambda = 0$ définit le rayon quadratique des systèmes neutrons et protons, qui est généralement sensible au changement de la taille du noyau, tandis que les valeurs moyennes des opérateurs d'ordres plus élevés sont plutôt sensibles à la variation de la forme nucléaire. Ces grandeurs apportent des informations sur la structure du noyau. $\lambda = 2$ et 4 correspondent respectivement aux moments quadripolaire et hexadécapolaire électriques. Nous nous intéressons dans ce travail aux moments hexadécapolaire électrique $\lambda = 4$.

Dans le formalisme de la seconde quantification, un opérateur à un corps quelconque

s'écrit dans le formalisme comme suit :

$$\widehat{O} = \sum_{ij, t't'} \langle it | \widehat{O} | jt' \rangle a_{it}^+ a_{jt'} \quad (2.11)$$

où $\langle it | \widehat{O} | jt' \rangle$ ($t, t' = n, p$) sont les éléments de matrice de l'opérateur \widehat{O} sur la base des états à particules indépendantes.

2.4.1 Moment hexadécapolaire électrique

Le moment hexadécapolaire électrique est une grandeur physique qui donne des informations sur la taille du noyau et qui mesure de combien la surface du noyau a dévié de la forme sphérique. L'opérateur moment hexadécapolaire ne concerne que le système protons, il prend la forme :

$$Q_4 = \sum_{ij} \langle i | Q_4 | j \rangle a_i^+ a_j \quad (2.12)$$

où $\langle i | Q_4 | j \rangle$ représente les éléments de matrices de Q_4 sur la base des particules indépendantes.

Moment hexadécapolaire d'un nombre pair de particules

La valeur moyenne de l'opérateur moment hexadécapolaire $Q_{4\psi}$ relativement à l'état $|\psi\rangle$ défini par (2.5) correspondant à un système pair-pair sera donnée par l'expression :

$$\begin{aligned} Q_{4\psi} &= \langle \psi | Q_4 | \psi \rangle \\ &= \sum_{ij} \langle i | Q_4 | j \rangle \langle \psi | (u_i \alpha_i^+ + v_i \alpha_i^-) (u_j \alpha_j + v_j \alpha_j^+) | \psi \rangle \\ &= \sum_i \langle \tilde{i} | Q_4 | \tilde{i} \rangle v_i^2 \\ &= 2 \sum_{i>0} \langle \tilde{i} | Q_4 | \tilde{i} \rangle v_i^2 \end{aligned} \quad (2.13)$$

Moment hexadécapolaire d'un nombre impair de particules

En utilisant la théorie BCS, la valeur moyenne du moment hexadécapolaire d'un nombre pair-impair de particules sur l'état $|\psi_v\rangle$ défini par (??) s'écrit :

$$\begin{aligned}
 \langle Q_4 \rangle_{ij} &= \sum_{ij} \langle i | Q_4 | j \rangle \langle v | a_i^+ a_j | v \rangle \\
 &= \sum_{i,j} \langle i | Q_4 | j \rangle \langle \psi | \alpha_i (u_i \alpha_i^+ + \nu_i \alpha_{\bar{i}}) (u_j \alpha_j^+ + \nu_j \alpha_{\bar{j}}) \alpha_i^+ | \psi \rangle \\
 &= \langle Q_4 \rangle_{vv} + 2 \sum_{\substack{i)0 \\ i \neq v}} \langle Q_4 \rangle_{ii} \nu_i^2
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

Chapitre 3

Résultats numériques et discussion

Pour les calculs numériques, nous avons dans un premier temps étudié la validité des équations établies dans les chapitres 1 et 2 dont les équations de gap définies par les expressions (1.63) et (1.66) et qui représentent respectivement les amplitudes de probabilité d'occupation et d'inoccupation de particules et la demie largeur de gap des niveaux individuels du noyau. Nous avons pour cela programmé les équations de gap par la méthode numérique de Newton sur le logiciel Fortran en utilisant le modèle de Richardson [28, 29]. Il consiste en un spectre discret de niveaux d'énergie équidistants doublement dégénérés et il simule ainsi le cas des noyaux déformés. Les résultats des amplitudes de probabilité d'occupation v_v^2 et d'inoccupation u_v^2 sont représentés sur la figure (3-2) pour système possédant $N = 16$ particules avec $G_{pp} = 0.475 \text{ Mev}$. On constate que les résultats à travers cette figure sont trop juste et correspondents bien l'expression analytique la condition de normalisation $u_v^2 + v_v^2 = 1$ où (voir l'expression 1.63)

Dans une deuxième étape nous avons considéré des cas réalistes en calculant le moment hexadécapolaire électrique (Q_4) dans le cas de l'appariement entre particules identique pour un système pair-pairs de particules donnée par l'expression (2.13) ainsi que pour un système pair-impairs de particules (2.14). Nous avons déterminé les valeurs de la constante d'appariement G_{pp} à partir des valeurs expérimentales des paramètres de gap Δ_{pp} des différences de masse pair-impairs définies par [30] :

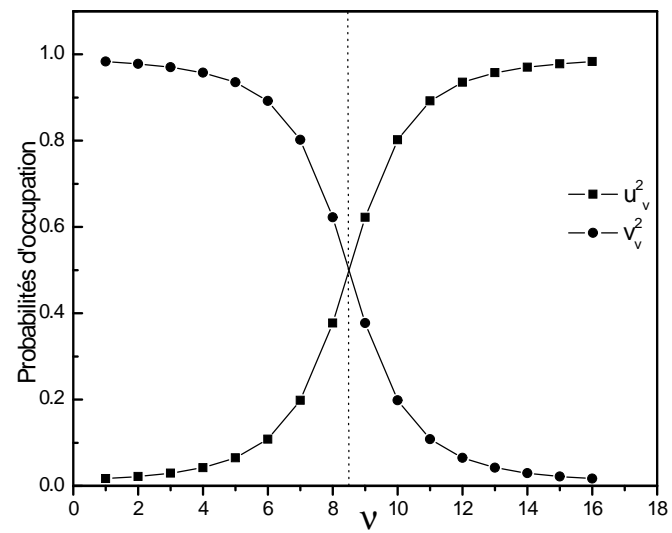


FIG. 3-1: Evolution des probabilités d'occupation et d'inoccupation en fonction des niveaux individuels du noyau.

$$\Delta_{pp}^{\text{exp}} = -\frac{1}{8} [M(Z+2, N) - 4M(Z+1, N) + 6M(Z, N) - 4M(Z-1, N) + M(Z-2, N)]$$

où M est la masse expérimentale déduite de la table de Wapstra et al [30].

Les calculs numériques de Q_4 ont été basés sur les énergies et états propres d'un champ moyen déformé de Woods-Saxon et de la paramétrisation décrite dans la Ref. [9]. Nous avons utilisé les déformations de l'état fondamental calculés par [31,32]. Nous avons calculé Q_4 pour le noyau de Krypton et ses isotopes $^{72,73,74,75,76,77,78}\text{Kr}(Z=36)$ à cause le nombre limité des valeurs expérimentales des masses disponibles pour le calcul des Δ_{pp}^{exp} a fait que nous nous sommes restreints à pris ces noyaux. Les valeurs du moment hexadécapolaire électrique calculées au moyen de l'approche BCS dans le cas de l'appariement entre particules identiques sont regroupées dans les tableaux (3-1) et (3-2). La variation de l'effet d'appariement nucléaire entre particules identiques a été considérée sur la figure (3-2) de la constante d'appariement. Cette dernière a été tracée en fonction de la variation du nombre de neutrons. On constate que l'effet d'appariement nucléaire diminue lorsque les valeurs de N augmentent sauf pour les points singlets de $N=40$ et 42 et ça due au choix de la constante d'appariement. Nous avons ensuite tracé les résultats de Q_4 sur la figure (3-3) en fonction de la variation de N du noyau de Krypton.

TAB. 3.1: Calcul le moment hexadécapolaire électrique de quelques noyaux pairs-pairs, le nombre de proton (colonne 2), le nombre de neutron (colonne 3), le gap d'appariement (Mev) (colonne 4) et le constant d'appariement (Mev) (colonne 5), les valeurs de moment hexadécapolaire électrique ($barn^2$) de quelques noyaux pair-pairs (colonnes 6). Les valeurs de moment hexadécapolaire électrique calculés par la Méthode RMF (Ref. [31]) ($barn^2$) de quelques noyaux pair-pairs (colonnes 7)

| Noyau | Z | N | Δ_{pp} | G_p | Q_4 | Q_{4-RMF} |
|------------------|-----|-----|---------------|-------|--------|-------------|
| ^{72}Kr | 36 | 36 | 2.001 | 0.121 | -0.063 | 0.049 |
| ^{74}Kr | 36 | 38 | 1.535 | 0.116 | 0.101 | 0.093 |
| ^{76}Kr | 36 | 40 | 1.675 | 0.118 | 0.113 | 0.078 |
| ^{78}Kr | 36 | 42 | 1.799 | 0.118 | -0.037 | 0.008 |

TAB. 3.2: Calcul le moment hexadécapolaire électrique de quelques noyaux pairs-impairs, le nombre de proton (colonne 2), le nombre de neutron (colonne 3), le gap d'appariement (Mev) (colonne 4) et le constant d'appariement (Mev) (colonne 5), les valeurs de moment hexadécapolaire électrique ($barn^2$) de quelques noyaux pair-impairs (colonnes 6)

| Noyau | Z | N | Δ_{pp} | G_p | Q_4 |
|------------------|-----|-----|---------------|-------|--------|
| ^{72}Kr | 36 | 36 | 2.001 | 0.121 | -0.065 |
| ^{73}Kr | 36 | 37 | 0.942 | 0.117 | 0.063 |
| ^{74}Kr | 36 | 38 | 1.535 | 0.116 | 0.117 |
| ^{75}Kr | 36 | 39 | 1.061 | 0.115 | 0.071 |
| ^{76}Kr | 36 | 40 | 1.675 | 0.119 | 0.124 |
| ^{77}Kr | 36 | 41 | 1.222 | 0.114 | 0.075 |
| ^{78}Kr | 36 | 42 | 1.799 | 0.118 | -0.039 |

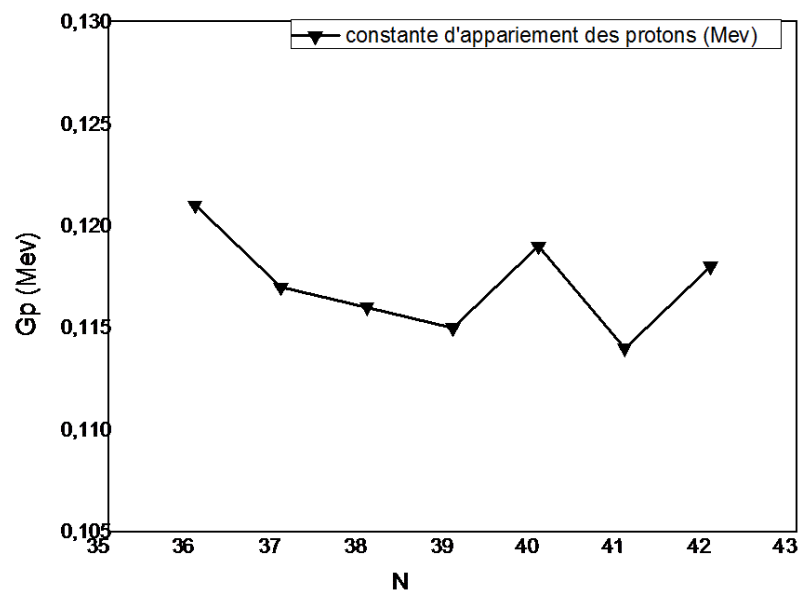


FIG. 3-2: Variation de la constante d'appariement des protons (p-p) en fonction de nombre de neutrons N du noyau de krypton.

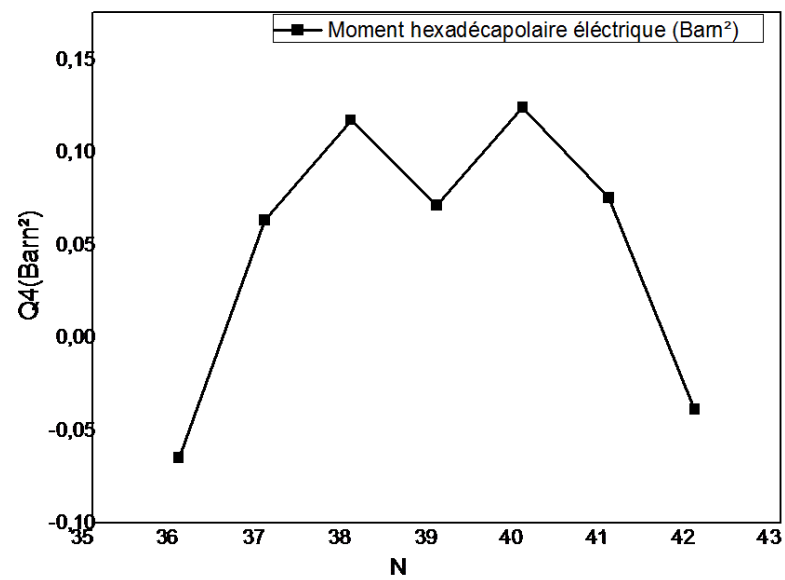


FIG. 3-3: Evolution du moment hexadécapolaire électrique en fonction de nombre de neutrons N du noyau de krypton.

Chapitre 4

Conclusion

Au cours de ce travail nous avons étudié le moment hexadécapolaire électrique dans le cas de l'appariement entre particules identiques pour des noyaux pair-pairs et pair-impairs. Pour cela, nous avons utilisé la méthode de Bardeen, Cooper et Schreiffer la théorie BCS.

Comme une première étape, nous avons étudié les modèles nucléaires qui sont exprimés par le modèle de la goutte liquide et le modèle en couches à particules indépendantes pour interpréter les propriétés du noyau. Par la suite on a résolu l'équation de Schrödinger en terme de potentiel de l'oscillateur harmonique d'un nucléon et qui après généralise le cas à tous les nucléons afin de déterminer la configuration d'un noyau atomique. Dans ce modèle, chaque neutron ou proton se déplace dans un champ moyen qui représente le potentiel moyen et qui s'appelle le potentiel de Woods-Saxon.

Dans le cas de l'appariement nucléaire entre particules identiques neutron-neutron et proton-proton nous avons écrit l'hamiltonien général du système nucléaire qui a été écrit en représentation des opérateurs de création et d'annihilation de particules, puis on a diagonalisé approximativement cet hamiltonien par le théorème de Wick en introduisant l'hamiltonien auxiliaire et qui nous a permis d'écrire ce dernier en représentation de quasi-particules par la transformation de Bogoliubov-Valatin qui relie les opérateurs de création et d'annihilation de particules en fonction des opérateurs de création et d'annihilation de quasi-particules par les amplitudes de probabilités d'occupation et d'inoccupation de

particules. Nous avons ensuite trouvé les équations de gap généralisées dont la demi-largeur du gap en fonction de la constante d'appariement, les probabilités d'occupation et d'inoccupation de particules et l'énergie BCS du système nucléaire.

Comme une seconde étape, nous avons établie les fonctions d'ondes des noyaux, comme la fonction d'onde d'un nombre pair-pairs de particules de l'état fondamental du noyau et qui a été déduite à partir de l'expression de l'état BCS en représentation de particules, et aussi la fonction d'onde d'un nombre pair-impairs de particules. Nous avons aussi établie la valeur moyenne de l'opérateur nombre de particules. Par la suite, nous avons trouvé les expressions du moment hexadécapolaire électrique dans le cas de l'appariement entre particules identiques pour la fonction d'onde d'un nombre pair-pairs de particules et pour la fonction d'onde d'un nombre pair-impairs de particules.

À la fin sur le plan numérique, nous avons calculé les amplitudes de probabilité d'occupation v_v^2 et d'inoccupation u_v^2 de particules dans le cas de l'appariement entre particules identiques pour un noyau contenant $N = 16$ particules dans le cadre du modèle de Richardson. On constate que les résultats des amplitudes de probabilité v_v^2 et u_v^2 sont juste et s'accordent avec l'expression de la condition de normalisation et ceci nous amène de conclure la validité de nos équations et notre programme de calcul. Par la suite, des cas réalistes ont été considérés sur le noyau de Krypton et ses isotopes en calculant le moment hexadécapolaire électrique dans le cas de l'appariement entre particules identiques du noyau de Krypton et ses isotopes pour un nombres pair-pairs de nucléons et pour un nombre pair-impairs de nucléons. Ces calculs ont été basé sur les énergies et étas propres d'un champ moyen déformé de Woods-Saxon. Nous avons aussi calculé la constante d'appariement Gp pour chaque noyau considéré. Les valeurs des résultats obtenus de Q_4 d'un nombre pair-impairs de particule et de Gp ont été tracé dans en fonction de nombre de neutrons N .

Les valeurs des résultats obtenus du moment hexadécapolaire électrique d'un nombre pair-pairs de particule du présent travail ont été comparés aux résultats de Lalazissis pour quelques noyaux pair-pair, ceci nous a permis de conclure que lorsque un petit changement dans valeurs de la demi-largeur du gap Δ_p fait un grand changement dans les résultats

de la constante d'appariement et le moment hexadécapolaire.

Bibliographie

- [1] C. F. von Weizsacker. *Z. Phys*, 96 :431, 1935.
- [2] P. Ring and P. Schuck, *The Nuclear Many-Body problem*, Springer, New York (1980).
- [3] S. G. Nilsson and I. Ragnarsson, *Shapes and Shells in Nuclear Structure*, Cambridge University Press (1995).
- [4] J.Kvasil, *Nuclear Structure and Nuclear Processes*, January (2019) 1044.
- [5] M. Douici, N.H. Allal, M. Fellah, N. Benhamouda and M.R. Oudih, *Int. J. Mod.Phys. E21*, 1250046 (2012).
- [6] M. Douici, N.H. Allal, M. Fellah, N. Benhamouda and M.R. Oudih, *Int. J. Mod.Phys. E22*, 1350029 (2013).
- [7] M. Douici, *Thèse de Doctorat*, USTHB (2014).
- [8] M. Douici, S. Kerrouchi, N.H. Allal and M. Fellah, *Alg. Rev. Nucl. Sci.* 8, 1 (2010).
- [9] N. H. Allal and M. Fellah, *Phys. Rev. C*50, 1404 (1994).
- [10] S. Kerrouchi, N.H. Allal, M. Fellah and M. Douici, *Int. J. Mod. Phys. E*19,1383(2010).
- [11] M. Douici, S. Kerrouchi, N.H. Allal and M. Fellah, *Alg. Rev. Nucl. Sci.* 8, 1 (2010).
- [12] J. Bardeen, L.N. Cooper and J.R. Schreifer, *Phys. Rev.* 108, 1175 (1957).
- [13] R. D Woods and D.S. Saxon, *Phys. Rev.* 95, 577(1954).
- [14] L. Valentin, "*Physique subatomique, noyaux et particules*" (Hermann, Paris, 1975).
- [15] J.L Basdevant, J. Rich and M. Spiro, *Fundamentals in Nuclear Physics*, Palaiseau, France(2005) 511.

-
- [16] A. Das and T. Ferbel, *Introduction to Nuclear and Particle Physics* (2nd Edition) (2003) 395.
- [17] B.Povh, K.Rith, C.Scholz and F.Zetsche, *Particles and Nuclei (An Introduction to the Physical Concepts Fifth Edition)*, Heidelberg(1995), 385.
- [18] Claude le sech, Christian Nge, *physique nucléaire*, Dunod, paris (2010).
- [19] B.R.Martin, *Nuclear and particle physics*, Wiley. p 226, 227 (2006).
- [20] A. Franc, J. Jolie and V. Isacker, *Symmetries in atomic nuclei*, springer. p 8, 9,10,29,30 (2009).
- [21] S. T. Belyaev, K. Dan and V. Selsk, *Mat. Fys. Medd.* 11, 31 (1959).
- [22] D.J. Rowe, "Nuclear Collective Motion" (Methuen, London, 1970).
- [23] R. W. Richardson and N. Sherman, *Nucl. Phys.* 52, 221 (1964).
- [24] R. W. Richardson and J. Math. Phys. 18, 1802 (1977).
- [25] G.A. Lalazissis and S. Raman, *Atomic Data and Nuclear Data Tables* 71, 1–40 (1999).
- [26] P. Möller, A.J. Sierk, T. Ichikawa and H. Sagawa, *Nuclear ground-state masses and deformations*, Elsevier Inc (2016) 39
- [27] J. Engel, S. Pittel, M. Stoitsov, P. Vogel and J. Dukelskey, *Phys. Rev.* C55, 1781(1997).
- [28] R. W. Richardson and N. Sherman, *Nucl. Phys.* 52, 221 (1964).
- [29] R. W. Richardson, *J. Math. Phys.* 18, 1802 (1977).
- [30] Wang, M., Huang, W. J., Kondev, F. G., Audi, G., & Naimi, S. (2021). The AME 2020 atomic mass evaluation (II). Tables, graphs and references. *Chinese Physics C*, 45(3), 030003
- [31] G. A. Lalazissis and S. Raman, *Atomic Data and Nuclear Data Tables* 71, 1–40 (1999).
- [32] P. Möller, A.J. Sierka, T. Ichikawa and H. Sagawa, *Atomic Data and Nuclear Data Tables* 109–110 (2016) 1–204.

- [33] D. M. Brink and R. A. Broglia, *Nuclear Superfluidity Pairing in Finite Systems*, Cambridge University Press (2005) 374.