

République Algérienne Démocratique et Populaire



Ministère de l'Enseignement Supérieur et
de la Recherche Scientifique



Université Djilali Bounaâma-Khemis Miliana

Faculté des Sciences et de la Technologie

Département de Mathématiques et Informatique

MÉMOIRE

présenté en vue de l'obtention du

DIPLÔME DE MASTER EN MATHÉMATIQUES

Spécialité : Analyse Mathématique et Applications

Par

Karmouch Wissam

**Etude qualitative et quantitative de certains problèmes
aux limites**

Soutenue publiquement le 09/07/2023, devant le jury composé de

Encadrant :	Mr.B.Chaouchi	MCA	Univ. Khemis Miliana
Examineur 1 :	Mr.O.Benniche	MCA	Univ. Khemis Miliana
Examinatrice 2 :	Mme.L.Djouamai	MCB	Univ. Khemis Miliana
Président :	Mr.A.Kali	MCB	Univ. Khemis Miliana

Année universitaire 2022/2023



Remerciements

Tout d'abord, je remercie Dieu le tout puissant de m'avoir donné la foie et le courage pour réaliser ce modeste travail, puis je veux exprimer ma profonde gratitude à mes parents pour tant d'amours et de soutiens moraux.

J'adresse le grande remerciement à mon encadreur Mr.Belkacem Chaouchi qui a proposé le thème de ce mémoire, pour ses conseils et ses dirigés du début à la fin de ce travail.

Je remercie les membres du jury pour l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant de siéger à ce défense et de revoir ce travail.

Je remercie aussi les professeurs de mathématiques et à tout ce qui m'ont enseigné au longe de ma vie scolaire.

Mes sentiments de gratitude et aussi de chaleureux remerciements vont à mes camarades de la promotion 2022-2023 et à mes amis surtout rania, hafsa, zahira, hayat, nihad, manal..., pour leur compagnie, leur aide, leur humour, et leur soutien moral aux moments où tout allait mal.

Enfin, à tous ceux qui ont pas été mentionnés et qui ont contribué à la réalisation de prés ou de loin de ce travail, merci.



Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à

Mes parents, mes frères.

Mes amis et collègues.

pour Moi-même.

Wissam

TABLE DES MATIÈRES

Généralités et notions de bases sur les équations différentielles	Page 9
1.1 Équations différentielles ordinaires	10
1.2 Équations différentielles ordinaires d'ordre n	10
1.3 Équations différentielles ordinaires linéaires d'ordre n	11
1.4 Etude des équations différentielles ordinaires d'ordre 2	11
1.5 Résolution des équations différentielles du second ordre à coefficients constantes	13
1.5.1 Équations différentielles homogènes du second ordre	13
1.5.2 Équations différentielles non homogènes du second ordre	14
Sur la fonction de Green associée à une E.D.O.	Page 20
2.1 Définition, existence et unicité de la fonction de Green	21
2.2 Calcul de la fonction de Green associée à des E.D.O. linéaires à coefficients constants	29
Etude qualitative et quantitative de certaine E.D.O par la méthode P.G.E.S.	Page 37
3.1 Etude d'une equation d'ordre 2 par la méthode P.G.E.S [9]	38
3.1.1 Position du problème	38
3.1.2 Calcul de la fonction de Green	38
3.1.3 Méthode itérative de Green-Picard	40
3.1.4 Analyse de convergence	41
3.2 Etude d'une equation d'ordre 3 par la méthode P.G.E.S [8]	48
3.2.1 Position du problème	48
3.2.2 Calcul de la fonction de Green pour une E.D.O d'ordre 3	49
3.2.3 Schéma intégré du Green-Picard(P.G.E.S)	50
3.2.4 Analyse de convergence	51

Liste des tableaux

1.1	Les formes des solutions particulières pour les différentes formes des seconds membres	15
3.1	Erreur absolue de la solution approchée d'itérations.	46
3.2	Erreur maximale en utilisant P.G.E.S pour différents nombres d'itération.	57
3.3	Erreur maximale en utilisant P.G.E.S pour différents nombres d'itération.	58

Table des figures

1.1	Louis Cauchy (1789-1857)	9
1.2	Daniel Bernoulli (1720-1725)	9
1.3	Vincenzo Riccati (1707-1775)	9
1.4	Giuseppe Peano (1858-1932)	9
2.1	George Green (1793-1841)	20
3.1	Solutions numériques de (3.55)-(3.56) pour $b = -1$, en utilisant P.G.E.S.	47
3.2	Solutions numériques de (3.58)-(3.59) pour $a = \sqrt{2}$, en utilisant P.G.E.S.	48

Notations générales

E.D.O	Équations différentielles ordinaires.
$G(x, s)$	La fonction de Green.
$W(y_1, y_2, \dots, y_n)$	Le déterminant de Wronskie des fonctions données.
\mathbb{R}	Ensemble des nombres réels.
\mathbb{N}	Ensemble des entier naturels.
I	L'intervalle de \mathbb{R} .
$[a, b]$	Intervalle fermé de \mathbb{R} d'extrémités a et b .
(a, b)	Intervalle ouvert de \mathbb{R} d'extrémités a et b .
$\mathcal{C}(I)$	L'espace des fonctions continus sur l'intervalle I .

Introduction

Lors de l'étude des phénomènes naturels, les solutions de plusieurs problèmes de la Physique, de la Chimie et de la Biologie ou d'autres sciences, sont rarement exprimables sous forme d'une relation directe entre les grandeurs décrivant l'un ou l'autre processus évolutif.

Cependant, dans la plupart des cas, on peut parvenir à établir une relation entre les grandeurs (fonctions) et les vitesses de leur changement c'est-à-dire on peut parvenir à trouver des équations dans lesquelles des fonctions inconnues entrent sous le signe de dérivée. Ces équations sont dites équations différentielles.[10]

La découverte des équations différentielles remonte à l'invention du calcul et de l'intégration par le math Newton et Leibniz dans le deuxième chapitre de ses travaux en 1671, cette dernière se définit par la relation entre les fonctions et leurs dérivées. Dans les applications, les fonctions représentent généralement des grandeurs physiques et les dérivées représentent leurs taux de changement.

Les équations différentielles jouent un rôle fondamental dans l'étude à la fois en mathématiques pures et appliquées.

En effet, en mathématiques pures, l'objet principal des équations différentielles est d'établir des résultats purement théoriques qui permettraient de trouver des résultats sur les solutions (existence, unicité, stabilité,...) sans les connaître explicitement vu que la résolution explicite de la plupart des équations différentielles reste encore un problème ouvert.

En mathématiques appliquées, les équations différentielles sont utilisées pour modéliser des nombreux phénomènes comme l'épidémiologie en médecine, la théorie de la combustion en chimie, l'économie, la biologique ou dans la dynamique des population. En particulier, en mécanique et en physique par exemple à résoudre les problèmes des petites oscillations mécaniques, la propagation des ondes, de la théorie du potentiel... etc. C'est pourquoi les scientifiques et les chercheurs ont été intéressés par l'étude de leurs deux aspects ; théorique et analytique.

Dans ce travail, on a présenté une étude qui repose sur les méthodes dites itératives. Généralement, elles impliquent la notation de fonction de Green.

Il est difficile de fixer le début précis d'un sujet qui existe maintenant sous le nom de "fonction de Green", mais l'origine de la méthode peut certainement être associée au travail original de George Green (1793 – 1841).

En 1828, George Green a été introduire pour les besoins de l'électromagnétisme. Le mémoire de Green restera confidentiel jusqu'à sa republication en trois parties, à partir de 1850, les fonction de Green qui seront dénommées ainsi par Rieman en 1869, seront alors abondamment utilisées, notamment par Neumann en 1877 pour sa théorie du potentiel Newtonien dans un espace à deux dimensions, puis en 1882 par Kirchff pour l'équation de propagation des ondes dans un espace à trois dimensions, et enfin par Helmholtz en acoustique.

Dans ce travail, nous avons une synthèse de l'étude faite dans le travail de [8] et [9].

Les deux étude font appel aux méthodes d'itération de Picard.

La méthode d'itération a été introduite pour la première fois par Liouville en 1837, puis Picard a développé pour les équations différentielles ordinaires en 1890.

La méthode itération utilisée dans ce travail est introduite pour la résolution numérique d'une problème de valeur limite. La stratégie à cette approche construire un opérateur intégrale qui est exprimé en termes de la fonction de Green. Ensuite, nous appliquant le itération de de point fixe de Picard à cet opérateur intégrale qui donne lieu à cette nouvelle technique itérative.

Notre mémoire se compose de plusieurs chapitres à savoir :

Le premier chapitre est consacré à donner un aperçu générale sur les équations différentielles ordinaires et quelques méthodes de résolution.

Dans le deuxième chapitre, nous avons défini la fonction de Green pour certaines classes de problème aux limites. Ensuite, nous présentons une méthode de calcul de la fonction de Green associée à des équations différentielles ordinaires linéaires d'ordre n à coefficients constants avec des conditions aux limites linéaires.

Dans le troisième chapitre, nous introduisons une méthode itérative visant à obtenir des solutions approchées pour équations différentielles ordinaires connue par P.G.E.S.

Généralités et notions de bases sur les équations différentielles

1.1	Équations différentielles ordinaires	10
1.2	Équations différentielles ordinaires d'ordre n	10
1.3	Équations différentielles ordinaires linéaires d'ordre n	11
1.4	Etude des équations différentielles ordinaires d'ordre 2	11
1.5	Résolution des équations différentielles du seconde ordre à coefficients constantes	13
1.5.1	Équations différentielles homogènes du second ordre	13
1.5.2	Équations différentielles non homogènes du second ordre	14



FIGURE 1.1 – Louis Cauchy (1789-1857)



FIGURE 1.2 – Daniel Bernoulli (1720-1785)



FIGURE 1.3 – Vincenzo Riccati (1707-1775)



FIGURE 1.4 – Giuseppe Peano (1858-1932)

Dans ce chapitre, on donne quelques propriétés et résultats classiques sur les équations différentielles, on se concentre sur l'étude des équations différentielles ordinaires. Les résultats de ce chapitre se trouvent dans [1],[5],[6],[7].

1.1 Équations différentielles ordinaires

On appelle une équation différentielle ordinaire toute équation représentant une relation entre une variable x d'une fonction y et ses dérivées .

Exemple 1.1.1

Voici quelques exemples d'équations différentielles ordinaires

1. $y'(x) + 2y(x) = 0$.
2. $y''(x) + y'(x) - 5y(x) = 0$.
3. $y^{(4)}(x) - y''(x) + 5xy(x) = x + 1$.

1.2 Équations différentielles ordinaires d'ordre n

Définition 1.2.1

Soit E un espace vectoriel normé et $U \subset \mathbb{R} \times E^{n+1}$ un ouvert non vide .

Une équation différentielle ordinaire notée **E.D.O**, d'ordre n est une relation entre une fonction inconnue $x \rightarrow y(x)$ et ses dérivées $y', y'', \dots, y^{(n)}$ et qui s'écrit sous la forme classique

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (1.1)$$

où $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ et on appelle ordre de l'équation le degré le plus élevé figurant dans l'équation.

Remarque 1.2.1

1. On prendra x dans un intervalle I de \mathbb{R} (c'est-à-dire $U \subset I \times E^{n+1}$).
2. On dit que cette équation est scalaire si F est à valeurs dans \mathbb{R} .
3. La solution y en général sera à valeur dans \mathbb{R}^N .

Une équation différentielle d'ordre n peut être exprimé sous une autre forme plus pratique dite la forme normalisée

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}).$$

Exemple 1.2.2

Soit l'équation différentielle d'ordre deux

$$y'' - 5y + x = 0.$$

On peut l'écrire sous la forme

$$y'' = 5y - x.$$

Définition 1.2.2 (Le problème de Cauchy)

On considère l'équation

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}). \quad (1.2)$$

Le problème qui consiste à trouver des solutions

$$x \mapsto y(x), x \in I \subset \mathbb{R},$$

satisfaisant aux conditions initiales

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, y''(x_0) = y''_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, x_0 \in I, \quad (1.3)$$

s'appelle **problème de Cauchy** associée à l'équation (1.2).

Définition 1.2.3

On dit que $y : I \rightarrow \mathbb{R}^N$ est une solution de problème de Cauchy si y est solution de E.D.O (1.2) et en plus

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, y''(x_0) = y''_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, x_0 \in I. \quad (1.4)$$

Définition 1.2.4

On appelle solution générale de l'équation (1.2) l'ensemble de toutes ses solutions définies par

$$y = \varphi(x, c_1, c_2, \dots, c_n),$$

où c_1, c_2, \dots, c_n sont des constantes arbitraires.

1.3 Équations différentielles ordinaires linéaires d'ordre n

Définition 1.3.5

On appelle équation différentielle linéaire d'ordre n , toute équation qui s'écrit sous la forme canonique

$$a_0(x)y^{(n)}(x) + a_1(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_{n-1}(x)y'(x) + a_n(x)y(x) = f(x), \quad (1.5)$$

où a_0, a_1, \dots, a_n et f sont des fonctions continues sur l'intervalle I de \mathbb{R} , avec $a_0(x) \neq 0$.

1.4 Etude des équations différentielles ordinaires d'ordre 2

Dans cette section, on concentre sur les équations d'ordre 2.

Définition 1.4.6

Une équation différentielle ordinaire du second ordre est une équation dans laquelle la dérivée seconde $y''(x)$ est exprimée en fonction d'une variable x de $y(x)$ et de la dérivée première $y'(x)$

$$y'' = f(x, y, y'). \quad (1.6)$$

Définition 1.4.7

On appelle équation différentielle ordinaire linéaire du second ordre toute équation de la forme canonique

$$a_0(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_2(x)y(x) = f(x), \quad x \in [a, b], \quad (1.7)$$

où y est une fonction inconnue, a_0, a_1, a_2 et f sont des fonctions connues et continues sur $[a, b]$ avec $a_0(x) \neq 0$.

Remarque 1.4.2

Les fonctions a_0, a_1 et a_2 sont appelées **coefficients** de l'E.D.O d'ordre 2 et la fonction f **second membre** de l'E.D.O d'ordre 2.

Les équations linéaires d'ordre 2, ont fait l'objet d'une étude approfondie. On donnera dans cette section un résumé sur cette étude.

Les propriétés des solutions des équations différentielles d'ordre 2 sont résumées dans le lemme suivant :

Lemme 1.4.1 [7]

L'espace des solutions est \mathbb{R} – espace vectoriel.

On considère l'équation différentielle du second ordre suivante

$$a_0(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_2(x)y(x) = 0, \quad x \in [a, b]. \quad (1.8)$$

1. Il existe exactement deux solutions y_1 et y_2 de l'équation (1.8) qui sont linéairement indépendantes sur $[a, b]$. C'est-à-dire il n'existe pas une constante c tel que

$$y_1(x) = cy_2(x), \quad \forall x \in [a, b].$$

2. Si y_1 et y_2 sont deux solutions de l'équation (1.8), c_1 et c_2 sont deux constantes arbitraires alors $c_1y_1 + c_2y_2$ est une solution de l'équation (1.8).
3. Si y_1 et y_2 sont linéairement indépendantes alors toute solution y de (1.8) peut s'écrire sous la forme :

$$y(x) = k_1y_1(x) + k_2y_2(x), \quad \forall x \in [a, b],$$

où k_1 et k_2 sont des constantes.

Lemme 1.4.2 [7]

Si on connaît une solution y_1 de l'équation (1.8) alors on peut déterminer l'autre solution par la méthode de variation de la constante. La deuxième solution y_2 s'écrit sous la forme

$$y_2(x) = y_1(x) \int^x \frac{1}{y_1^2(t)} \exp\left(-\int^t \frac{a_1(s)}{a_0(s)} ds\right) dt. \quad (1.9)$$

Exemple 1.4.3

L'équation suivante :

$$x^2y'' - 3xy' + 4y = 0, \quad x \in \mathbb{R}_+,$$

admet la fonction $y_1(x) = x^2$ comme solution et d'après la formule (1.9)

$$y_2(x) = x^2 \int^x \frac{1}{t^4} \exp\left(-\int^t \frac{-3s}{s^2} ds\right) dt = x^2 \int^x \frac{1}{t^4} t^3 dt = x^2 \ln x$$

est aussi une solution de cette équation.

Définition 1.5.8

Soient y_1 et y_2 sont des fonctions des x , le déterminant

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_1' y_2$$

est appelé le **déterminant de Wronski** ou **Wronskien** des fonctions données.

Théorème 1.4.1

Soient y_1 et y_2 sont deux solutions de l'équation (1.8) **linéairement dépendantes** sur $[a, b]$, leur Wronskien est **nul sur $[a, b]$** .

Preuve

Soient y_1 et y_2 sont deux solutions de l'équation (1.8) **linéairement dépendantes**. En effet, si $y_1 = \lambda y_2$, $y_1' = \lambda y_2'$ où $\lambda = \text{const}$ et

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda y_2 & y_2 \\ \lambda y_2' & y_2' \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} y_2 & y_2 \\ y_2' & y_2' \end{vmatrix} = 0.$$

Théorème 1.4.2 [7]

Soient y_1 et y_2 deux solutions de l'équation (1.8) sont **linéairement indépendantes** sur $[a, b]$ si et seulement si leurs Wronskien défini par

$$W(x) = W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

est **différent de zéro** pour tout $x \in [a, b]$.

Théorème 1.4.3 [7]

Soient y_1 et y_2 sont deux solutions de l'équation (1.8). Pour tout $x \in [a, b]$ on a

$$W(y_1, y_2)(x) = W(y_1, y_2)(x_0) \exp\left(-\int_{x_0}^x \frac{a_1(t)}{a_0(t)} dt\right),$$

où x_0 est un point de l'intervalle $[a, b]$.

1.5 Résolution des équations différentielles du seconde ordre à coefficients constantes

Dans cette section, on rappelle quelques résultats classiques concernant E.D.O d'ordre 2 à coefficients constants.

1.5.1 Équations différentielles homogènes du second ordre

Soit l'équation linéaire homogène du second ordre

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0, \tag{1.10}$$

où a_0, a_1 et a_2 sont des constantes réelles et $a_0 \neq 0$.

Définition 1.5.9

L'équation

$$a_0 k^2 + a_1 k + a_3 = 0, k \in \mathbb{C}$$

est appelée l'équation caractéristique associée à (1.10).

Soit $\Delta = a_1^2 - 4a_0a_3$ est le discriminant de l'équation caractéristique associée à (1.10).

On distingue 3 cas possibles

- ▶ Si $\Delta > 0$, l'équation caractéristique possède deux racines réelles distinctes $k_1 \neq k_2$ et la solution de (1.10) donnée sous la forme

$$y(x) = \lambda e^{k_1 x} + \mu e^{k_2 x}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

- ▶ Si $\Delta = 0$, l'équation caractéristique possède une racine double k_0 et la solution de (1.10) donnée sous la forme

$$y(x) = (\lambda + \mu x) e^{k_0 x}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

- ▶ Si $\Delta < 0$, l'équation caractéristique possède deux racines complexes conjuguées $k_1 = \alpha + i\beta$, $k_2 = \alpha - i\beta$ et la solution de (1.10) donnée sous la forme

$$y(x) = (\lambda \cos(\beta x) + \mu \sin(\beta x)) e^{\alpha x}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Exemple 1.5.4

Soit l'équation suivante

$$y'' + 2y' - 3y = 0. \quad (1.11)$$

L'équation (1.11) est une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2.

L'équation caractéristique associée à (1.11) est

$$k^2 + 2k - 3 = 0,$$

admet deux racines réelles distinctes $k_1 = 1$ et $k_2 = -3$.

D'où, la solution générale de (1.11) s'écrit sous la forme

$$y(x) = \lambda e^x + \mu e^{-3x}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

1.5.2 Équations différentielles non homogènes du second ordre

Soit l'équation différentielle non homogène du second ordre

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x), \quad (1.12)$$

où a_0, a_1 et a_2 sont des constantes réelles et $a_0 \neq 0$ avec $f(x) \neq 0$.

La solution de cette equation est donnée par

$$y = y_p + y_h,$$

où y_h est la solution homogène de l'équation et y_p est la solution particulier .

On résume les cas possibles dans le tableau suivant :

	Second membre de l'équation différentielle	Racine de l'équation caractéristique	Forme de la solution particulier
1	$p_n(x)$.	Le zéro est un racine de l'équation caractéristique.	$Q_n(x)x^k$.
		Le zéro n'est pas racine de l'équation caractéristique.	$Q_n(x)$.
2	$e^{\alpha x}P_n(x)$.	Le nombre α est un racine de l'équation caractéristique.	$Q_n(x)x^k e^{\alpha x}$.
		Le nombre α n'est pas un racine de l'équation caractéristique.	$Q_n(x)e^{\alpha x}$.
3	$\lambda \cos(\beta x) + \mu \sin(\beta x)$.	Les nombres $\pm i\beta$ sont racines de l'équation caractéristique .	$(A \cos(\beta x) + B \sin(\beta x))x^k$.
		Les nombres $\pm i\beta$ ne sont pas racines de l'équation caractéristique.	$(A \cos(\beta x) + B \sin(\beta x))$.
4	$e^{\alpha x}P_n(x) \cos(\beta x) + e^{\alpha x}Q_m(x) \sin(\beta x)$	Les nombres $\alpha \pm i\beta$ sont racines de l'équation caractéristique .	$x^k e^{\alpha x} (\tilde{P}_s(x) \cos(\beta x) + \tilde{Q}_s(x) \sin(\beta x))$.
		Les nombres $\alpha \pm i\beta$ ne sont pas racines de l'équation caractéristique.	$e^{\alpha x} (\tilde{P}_s(x) \cos(\beta x) + \tilde{Q}_s(x) \sin(\beta x))$.

TABLE 1.1 – Les formes des solutions particulières pour les différentes formes des seconds membres

Exemple 1.5.5

Soit l'équation suivante

$$y'' - y = x^2 + x + 1. \quad (1.13)$$

L'équation (1.13) est une équation différentielle linéaire non homogène d'ordre 2.

1. La solution homogène y_h associée à (1.13)

$$y'' - y = 0. \quad (1.14)$$

L'équation caractéristique associée à (1.14) est

$$k^2 - 1 = 0,$$

admet deux racines réelles distinctes $k_1 = 1$ et $k_2 = -1$. D'où, la solution générale de (1.14) s'écrit sous la forme

$$y_h(x) = \lambda e^x + \mu e^{-x}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

2. la solution particulière y_p associée à (1.13)

On a le seconde membre de l'équation (1.13) est

$$f(x) = x^2 + x + 1,$$

comme 0 n'est pas une racine de l'équation caractéristique, donc la solution particulière donnée sous la forme :

$$y_p(x) = ax^2 + bx + c \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

On a

$$\begin{cases} y_p' = 2ax + b \\ y_p'' = 2a \end{cases}$$

En substituant dans l'équation (1.13) les expressions de y_p et y_p'' , on trouve

$$\begin{aligned} (1.13) &\Leftrightarrow 2a - (ax^2 + bx + c) = x^2 + x + 1 \\ &\Leftrightarrow -ax^2 - bx + 2a - c = x^2 + x + 1. \end{aligned}$$

Par identification, on trouve le système suivant :

$$\begin{cases} -a = 1 \\ -b = 1 \\ 2a - c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \\ c = -3. \end{cases}$$

D'où, la solution particulière y_p est

$$y_p(x) = -x^2 - x - 3,$$

donc la solution générale de l'équation (1.13) est

$$\begin{aligned} y(x) &= y_h + y_p \\ &= \lambda e^x + \mu e^{-x} - x^2 - x - 3, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Exemple 1.5.6

Soit l'équation suivante

$$y'' + y' = \tan x. \quad (1.15)$$

La solution de l'équation homogène associée est de la forme

$$y_h(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

La solution de l'équation (1.15) donnée en appliquant la méthode de variation de constant

$$y(x) = c_1(x) \cos x + c_2(x) \sin x,$$

où $c_1(x), c_2(x)$ sont des fonctions de x . Composons à cet effet le système suivant

$$\begin{cases} c_1' \cos x + c_2' \sin x = 0 \\ -c_1' \sin x + c_2' \cos x = \tan x, \end{cases}$$

on en tire

$$c_1'(x) = \cos x - \frac{1}{\cos x}, c_2'(x) = \sin x.$$

En intégrant, on obtient

$$c_1(x) = \sin x - \frac{1}{2} \ln |1 - \sin^2 x| + \tilde{c}_1, c_2(x) = -\cos x + \tilde{c}_2.$$

Donc la solution générale de l'équation (1.15) est

$$y(x) = \tilde{c}_1 \cos x + \tilde{c}_2 \sin x - \frac{\cos x}{2} \ln |1 - \sin^2 x|.$$

Théorème 1.4.4 (Principe de superposition) [6]

Si $y_k(x)$ est solution de l'équation

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = f_k(x), k = 1, 2, \dots, m, \quad (1.16)$$

alors la fonction $y(x) = \sum_{k=1}^m y_k(x)$ est solution de l'équation

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = \sum_{k=1}^m f_k(x). \quad (1.17)$$

Exemple 1.5.7

Soit l'équation suivante

$$y'' - 2y' + y = 2x^2 \cosh x = x^2(e^x + e^{-x}). \quad (1.18)$$

L'équation (1.18) est une équation différentielle linéaire non homogène d'ordre 2.

La solution homogène y_h associée à (1.18)

$$y'' - 2y' + y = 0. \quad (1.19)$$

L'équation caractéristique associée à (1.19) est

$$k^2 - 2k + 1 = 0,$$

admet une racine double $k_1 = k_2 = -1$. D'où, la solution générale de (1.19) s'écrit sous la forme

$$y_h(x) = e^{-x}(c_1 + c_2x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Pour trouver une solution particulière y_p de l'équation (1.18) cherchons des solutions de deux équation

$$y'' - 2y' + y = x^2 e^x. \quad (1.20)$$

$$y'' - 2y' + y = x^2 e^{-x}. \quad (1.21)$$

1. La solution particulière y_{p1} associée à (1.20).

comme 1 n'est pas une racine de l'équation caractéristique, donc la solution particulière donnée sous la forme :

$$y_{p1}(x) = e^x(ax^2 + bx + c).$$

On a

$$\begin{cases} y_p' = e^x(ax^2 + (2a+b)x + (c+b)) \\ y_p'' = e^x(ax^2 + (4a+b)x + (2a+c+2b)) \end{cases}$$

En introduisant l'expression de y, y' et y'' dans (1.20) et par identification, on trouve

$$\begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ b = -\frac{1}{2} \\ c = \frac{3}{8}. \end{cases}$$

D'où, la solution particulière y_{p1} est

$$y_{p1}(x) = e^x \left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8} \right).$$

2. La solution particulière y_{p2} associée à (1.21).

comme -1 est une racine double de l'équation caractéristique, donc la solution particulière donnée sous la forme :

$$y_{p2}(x) = e^{-x}(ax^4 + bx^3 + cx^2).$$

Par identification, on trouve

$$\begin{cases} a = \frac{1}{12} \\ b = 0 \\ c = 0. \end{cases}$$

D'où, la solution particulière y_{p2} est

$$y_{p2}(x) = e^{-x} \frac{1}{12} x^4.$$

En vertu du principe de superposition, la solution particulière y_p de l'équation donnée sera égale à la somme des solutions y_{p1} et y_{p2} équations (1.20) et (1.21)

$$y_p(x) = e^{-x} \frac{1}{12} x^4 + e^x \left(\frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{2} x \frac{3}{8} \right).$$

La solution générale de l'équation (1.18)

$$y(x) = e^{-x} (c_1 + c_2 x) + e^{-x} \frac{1}{12} x^4 + e^x \left(\frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{2} x \frac{3}{8} \right).$$

où c_1 et c_2 sont des constantes réelles arbitraires.

Sur la fonction de Green associée à une E.D.O.

2.1 Définition, existence et unicité de la fonction de Green 21
2.2 Calcul de la fonction de Green associée à des E.D.O. linéaires à coefficients constants 29

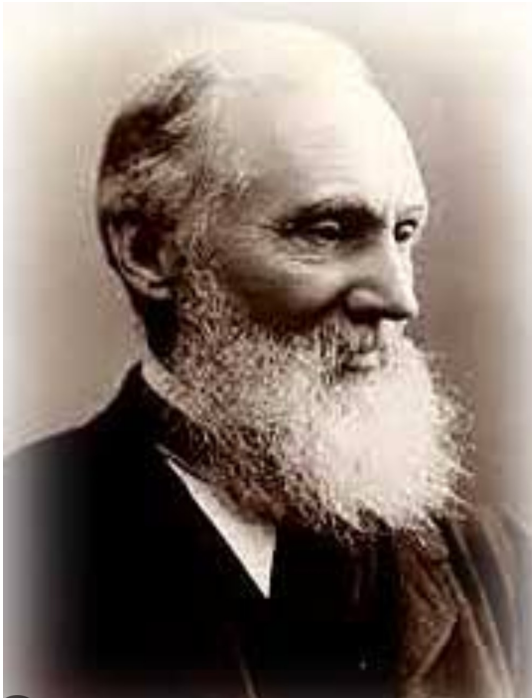


FIGURE 2.1 – George Green (1793-1841)

Dans la plupart des résultats évoqués dans ce chapitre ont fait une étude approfondie dans les références [2],[3],[4].

2.1 Définition, existence et unicité de la fonction de Green

Considérons le problème aux limites à deux points d'ordre n de la forme suivante

$$\begin{cases} L_n y(x) = f(x), & x \in I \equiv [a, b], \\ B_i(y) = \gamma_i, & i = 1, \dots, m, \end{cases} \quad (2.1)$$

où

$$L_n y(x) \equiv a_0(x)y^{(n)}(x) + a_1(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_{n-1}(x)y'(x) + a_n(x)y(x), \quad x \in I,$$

et

$$B_i(y) = \sum_{j=0}^{n-1} (\alpha_j^i y^{(j)}(a) + \beta_j^i y^{(j)}(b)), \quad i = 1, \dots, m, \quad m \leq n, \quad (2.2)$$

où

- α_j^i, β_j^i sont des constantes réelles pour $i = 1, \dots, m, j = 0, \dots, n-1$.
- f et a_k sont des fonctions continues sur I pour $k = 0, \dots, n$, et on suppose que dans notre travail $a_0(x) \neq 0$ pour $x \in I$.

Exemple 2.1.1

1. Soit le problème aux limites associé à une équation d'ordre 2

$$\begin{cases} a_0(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_2(x)y(x) = f(x), & x \in [a, b], \\ B_1(y) = \sum_{j=0}^1 (\alpha_j^1 y^{(j)}(a) + \beta_j^1 y^{(j)}(b)) = \alpha_0^1 y(a) + \beta_0^1 y(b) + \alpha_1^1 y'(a) + \beta_1^1 y'(b), \\ B_2(y) = \sum_{j=0}^1 (\alpha_j^2 y^{(j)}(a) + \beta_j^2 y^{(j)}(b)) = \alpha_0^2 y(a) + \beta_0^2 y(b) + \alpha_1^2 y'(a) + \beta_1^2 y'(b). \end{cases}$$

2. Soit le problème aux limites associé à une équation d'ordre 3

$$a_0(x)y'''(x) + a_1(x)y''(x) + a_2(x)y'(x) + a_3(x)y(x) = f(x), \quad x \in [a, b].$$

Alors, les conditions (2.2) sont données par

$$\begin{aligned} B_1(y) &= \sum_{j=0}^2 (\alpha_j^1 y^{(j)}(a) + \beta_j^1 y^{(j)}(b)) \\ &= \alpha_0^1 y(a) + \beta_0^1 y(b) + \alpha_1^1 y'(a) + \beta_1^1 y'(b) + \alpha_2^1 y''(a) + \beta_2^1 y''(b), \\ B_2(y) &= \sum_{j=0}^2 (\alpha_j^2 y^{(j)}(a) + \beta_j^2 y^{(j)}(b)) \\ &= \alpha_0^2 y(a) + \beta_0^2 y(b) + \alpha_1^2 y'(a) + \beta_1^2 y'(b) + \alpha_2^2 y''(a) + \beta_2^2 y''(b), \\ B_3(y) &= \sum_{j=0}^2 (\alpha_j^3 y^{(j)}(a) + \beta_j^3 y^{(j)}(b)) \\ &= \alpha_0^3 y(a) + \beta_0^3 y(b) + \alpha_1^3 y'(a) + \beta_1^3 y'(b) + \alpha_2^3 y''(a) + \beta_2^3 y''(b). \end{aligned}$$

3. Soit le problème aux limites associé à une équation d'ordre 4

$$a_0(x)y''''(x) + a_1(x)y'''(x) + a_2(x)y''(x) + a_3(x)y'(x) + a_4(x)y(x) = f(x), \quad x \in [a, b].$$

Alors, les conditions (2.2) sont données par

$$\begin{aligned} B_1(y) &= \sum_{j=0}^3 (\alpha_j^1 y^{(j)}(a) + \beta_j^1 y^{(j)}(b)) \\ &= \alpha_0^1 y(a) + \beta_0^1 y(b) + \alpha_1^1 y'(a) + \beta_1^1 y'(b) + \alpha_2^1 y''(a) + \beta_2^1 y''(b) + \alpha_3^1 y'''(a) + \beta_3^1 y'''(b), \\ B_2(y) &= \sum_{j=0}^3 (\alpha_j^2 y^{(j)}(a) + \beta_j^2 y^{(j)}(b)) \\ &= \alpha_0^2 y(a) + \beta_0^2 y(b) + \alpha_1^2 y'(a) + \beta_1^2 y'(b) + \alpha_2^2 y''(a) + \beta_2^2 y''(b) + \alpha_3^2 y'''(a) + \beta_3^2 y'''(b), \\ B_3(y) &= \sum_{j=0}^3 (\alpha_j^3 y^{(j)}(a) + \beta_j^3 y^{(j)}(b)) \\ &= \alpha_0^3 y(a) + \beta_0^3 y(b) + \alpha_1^3 y'(a) + \beta_1^3 y'(b) + \alpha_2^3 y''(a) + \beta_2^3 y''(b) + \alpha_3^3 y'''(a) + \beta_3^3 y'''(b), \\ B_4(y) &= \sum_{j=0}^3 (\alpha_j^4 y^{(j)}(a) + \beta_j^4 y^{(j)}(b)) \\ &= \alpha_0^4 y(a) + \beta_0^4 y(b) + \alpha_1^4 y'(a) + \beta_1^4 y'(b) + \alpha_2^4 y''(a) + \beta_2^4 y''(b) + \alpha_3^4 y'''(a) + \beta_3^4 y'''(b). \end{aligned}$$

Remarque 2.1.1

1. L'ensemble des solutions de l'équation linéaire

$$L_n y(x) = 0$$

est un sous-espace vectoriel de dimension n de $C^n(I)$, n'importe quelle base d'un tel sous-espace s'appellera un **ensemble fondamental de solutions de l'équation** $L_n y(x) = 0$.

2. Le problème homogène

$$\begin{cases} L_n y(x) = 0, \quad x \in I, \\ B_i(y) = 0, \quad i = 1, \dots, m, m \leq n \end{cases} \quad (2.3)$$

est dit **k -compatible**, $0 \leq k \leq n$ si son ensemble des solutions est de dimension k .

Proposition 2.1.1 [2]

Soit $\{y_1, \dots, y_n\}$ l'ensemble fondamental de solutions de $L_n y(x) = 0$. Le problème (2.3) est **k -compatible** si et seulement si,

$$\text{rang} \begin{pmatrix} B_1(y_1) & \cdots & B_1(y_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_m(y_1) & \cdots & B_m(y_n) \end{pmatrix} = n - k.$$

Corollaire 2.1.1

Le problème homogène (2.3) admet seulement la solution triviale si et seulement si ,

$$\text{rang} \begin{pmatrix} B_1(y_1) & \cdots & B_1(y_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_m(y_1) & \cdots & B_m(y_n) \end{pmatrix} = n.$$

En particulier le nombre des conditions aux bords m doit être égale à n (l'ordre de l'équation).
Pour illustrer les résultats théoriques, on donnera ici un exemple pratique.

Exemple 2.1.2

Soit le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} y''(x) + y(x) = 0, & x \in [0, 1], \\ y(0) = y(1) = 0. \end{cases} \quad (2.4)$$

Ici $n = m = 2$.

L'équation du problème (2.4) a pour solution générale

$$y(x) = \lambda \cos(x) + \mu \sin(x), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Donc, d'une part, on a

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y(1) = 0. \end{cases} \Rightarrow \lambda = \mu = 0,$$

d'où le problème (2.4) admet seulement la solution triviale $y = 0$.

D'autre part, on a

$$\begin{cases} y_1(x) = \cos(x) \\ y_2(x) = \sin(x) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} B_1(y) = y(0) \\ B_2(y) = y(1). \end{cases}$$

Alors

$$\begin{cases} B_1(y_1) = 1 \\ B_1(y_2) = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} B_2(y_1) = \cos(1) \\ B_2(y_2) = \sin(1), \end{cases}$$

et on a :

$$\text{rang} \begin{pmatrix} B_1(y_1) & B_1(y_2) \\ B_2(y_1) & B_2(y_2) \end{pmatrix} = \text{rang} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \cos(1) & \sin(1) \end{pmatrix} = 2 = n.$$

Comme conséquence de la [proposition 2.1.1](#) et du [corollaire 2.1.1](#) on obtient le célèbre théorème de Fredholm.

Théorème 2.1.1 (Alternative de Fredholm) [2]

Le problème non homogène

$$\begin{cases} L_n y(x) = f(x), & x \in I, \\ B_i(y) = \gamma_i, & i = 1, \dots, n, \end{cases} \quad (2.5)$$

où le nombre de conditions aux bords est égal à l'ordre de l'équation, admet une solution unique si et seulement si, le problème homogène

$$\begin{cases} L_n y(x) = 0, & x \in I, \\ B_i(y) = 0, & i = 1, \dots, n, \end{cases} \quad (2.6)$$

admet comme **seule solution la solution triviale** ($y \equiv 0$).

Définition 2.1.1

Une fonction $G : I \times I \rightarrow \mathbb{R}$ est appelée fonction de Green associée au problème (2.3) si elle satisfait les six propriétés suivantes :

1. G est définie sur le carré $I \times I$.
2. Pour $k = 0, 1, \dots, n-2$, G est **continue** et possède des dérivées partielles $\frac{\partial^k G}{\partial x^k}$ **continues** sur $I \times I$ pour tout $n \geq 2$.
3. $\frac{\partial^{n-1} G}{\partial x^{n-1}}$ et $\frac{\partial^n G}{\partial x^n}$ **existent** et elles sont **continues** sur les triangles $a \leq s < x \leq b$ et $a \leq x < s \leq b$.
4. Pour chaque $x \in (a, b)$ les limites $\frac{\partial^{n-1} G}{\partial x^{n-1}}(x, x^+)$ et $\frac{\partial^{n-1} G}{\partial x^{n-1}}(x, x^-)$ **existent** (i.e., les limites de $\frac{\partial^{n-1} G}{\partial x^{n-1}}(x, s)$ quand $(x, s) \mapsto (x, x)$ avec $s > x$ ou $s < x$) et de plus

$$\frac{\partial^{n-1} G}{\partial x^{n-1}}(x, x^+) - \frac{\partial^{n-1} G}{\partial x^{n-1}}(x, x^-) = -\frac{1}{a_0(x)}.$$

5. Pour chaque $s \in (a, b)$, la fonction $x \mapsto G(x, s)$ est **solution de l'équation différentielle** $L_n y = 0$, pour $x \in [a, s)$ et $x \in (s, b]$, s'est-à-dire

$$a_0(x) \frac{\partial^n G}{\partial x^n}(x, s) + a_1(x) \frac{\partial^{n-1} G}{\partial x^{n-1}}(x, s) + \dots + a_{n-1}(x) \frac{\partial G}{\partial x}(x, s) + a_n(x) G(x, s) = 0,$$

sur les deux intervalles.

6. Pour chaque $s \in (a, b)$, la fonction $x \mapsto G(x, s)$ **vérifie les conditions aux bords** $B_i(G(\cdot, s)) = 0$, $i = 1, \dots, m$, c'est-à-dire

$$\sum_{j=0}^{n-1} \left(\alpha_j^i \frac{\partial^j G}{\partial x^j}(a, s) + \beta_j^i \frac{\partial^j G}{\partial x^j}(b, s) \right) = 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

Remarque 2.1.2

La fonction de Green $G(x, s)$ est définie comme la solution du problème

$$LG(x, s) = \delta(x - s),$$

où $\delta(x - s)$ est fonction delta de Dirac.

Remarque 2.1.3

L'importance principale de la définition précédente est que l'opérateur intégrale, dont le noyau est la fonction de Green, nous donne la solution du problème

$$\begin{cases} L_n y(x) = f(x), & x \in I, \\ B_i(y) = 0, & i = 1, \dots, m. \end{cases} \quad (2.7)$$

Théorème 2.1.2

Soit G la fonction de Green du problème homogène (2.3). Alors, pour toute fonction continue f ,

$$y(x) = \int_a^b G(x, s) f(s) ds, \quad x \in I \quad (2.8)$$

est une solution du problème (2.7).

Preuve

On se restreint au cas simple $n = 2$ et $m = 1$.

Soit la fonction y définie par :

$$y(x) = \int_a^b G(x, s) f(s) ds = \int_a^x G(x, s) f(s) ds + \int_x^b G(x, s) f(s) ds.$$

Etape 01 : y est un solution de l'équation $L_2 y(x) = f(x)$, $x \in [a, b]$

Grâce à la dérivabilité de G^1 par rapport à x dans chaque des intervalles, on obtient

$$\begin{aligned} y'(x) &= G(x, x) f(x) + \int_a^x \frac{\partial G}{\partial x}(x, s) f(s) ds - G(x, x) f(x) + \int_x^b \frac{\partial G}{\partial x}(x, s) f(s) ds \\ &= \int_a^b \frac{\partial G}{\partial x}(x, s) f(s) ds. \end{aligned}$$

1. Formule de dérivation d'une intégrale [5]

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\int_{u(x)}^{v(x)} f(x, s) ds \right) = v'(x) f(x, v(x)) - u'(x) f(x, u(x)) + \int_{u(x)}^{v(x)} \frac{\partial f(x, s)}{\partial x} ds.$$

$$\begin{aligned}
y''(x) &= \int_a^x \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(t, x) f(s) ds + f(x) \frac{\partial G}{\partial x}(x, x^-) + \int_x^b \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(x, s) f(s) ds - f(x) \frac{\partial G}{\partial x}(x, x^+) \\
&= \int_a^b \frac{\partial_2 G}{\partial x^2}(x, s) f(s) ds - f(x) \left[\frac{\partial G}{\partial x}(x, x^+) - \frac{\partial G}{\partial x}(x, x^-) \right].
\end{aligned}$$

Où

$$\frac{\partial G}{\partial x}(x, x^+) - \frac{\partial G}{\partial x}(x, x^-) = -\frac{1}{a_0(x)},$$

d'après le propriété 4 de G , on trouve l'expression

$$y'' = \int_a^b \frac{\partial_2 G}{\partial x^2}(x, s) f(s) ds + \frac{f(x)}{a_0(x)},$$

gardant dans l'esprit que la fonction $x \mapsto G(x, s)$ est solution de l'équation $L_2 y(x) = 0$ pour tout $x \neq s$, on obtient

$$\begin{aligned}
a_0(x) y''(x) + a_1(x) y'(x) + a_2(x) y(x) \\
&= \int_a^b \left[a_0(x) \frac{\partial_2 G}{\partial x^2}(x, s) + a_1(x) \frac{\partial G}{\partial x}(x, s) + a_2(x) G(x, s) \right] f(s) ds + f(x) \\
&= f(x).
\end{aligned}$$

Etape 02 : La fonction y vérifie les conditions aux bords homogène

$$\begin{aligned}
B_1(y) &= \alpha_0^1 y(a) + \beta_0^1 y(b) + \alpha_1^1 y'(a) + \beta_1^1 y'(b) \\
&= \int_a^b \left[\alpha_0^1 G(a, s) + \beta_0^1 G(b, s) + \alpha_1^1 \frac{\partial G}{\partial x}(a, s) + \beta_1^1 \frac{\partial G}{\partial x}(b, s) \right] f(s) ds \\
&= \int_a^b B_1(G(., s)) f(s) ds \\
&= 0 \text{ (car } B_1(G(., s)) = 0 \text{)}. \square
\end{aligned}$$

Théorème 2.1.3 (Existence et unicité de la fonction de Green)

Supposons que le problème homogène (2.6) a seulement la solution triviale. Alors, il existe une **unique** fonction de Green G , associée à (2.6). De plus, pour toute fonction continue f , la solution unique du problème

$$\begin{cases} L_n y(x) = f(x), & x \in I, \\ B_i(y) = 0, & i = 1, \dots, n \end{cases} \quad (2.9)$$

est donnée par l'expression (2.8).

Preuve

Soit la fonction de Green associée au problème de Cauchy

$$\begin{cases} L_n y(x) = 0, & x \in I, \\ y^{(i)}(a) = 0, & i = 0, \dots, n-1 \end{cases} \quad (2.10)$$

est donnée par

$$\tilde{K}(x, s) = \begin{cases} K(x, s), & \text{si } a \leq s \leq x, \\ 0, & \text{si } x < s \leq b, \end{cases}$$

avec

$$K(x, s) := \frac{\begin{vmatrix} y_1'(s) & y_2'(s) & \cdots & y_n'(s) \\ y_1(s) & y_2(s) & \cdots & y_n(s) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(s) & y_2^{(n-2)}(s) & \cdots & y_n^{(n-2)}(s) \\ y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \end{vmatrix}}{a_0(s) W(y_1, \dots, y_n)(s)}.$$

Ici $\{y_1, \dots, y_n\}$ est l'ensemble fondamentale de solutions de l'équation $L_n y(x) = 0$, et

$$W(y_1, \dots, y_n)(s) = \begin{vmatrix} y_1'(s) & y_2'(s) & \cdots & y_n'(s) \\ y_1(s) & y_2(s) & \cdots & y_n(s) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(s) & y_2^{(n-1)}(s) & \cdots & y_n^{(n-1)}(s) \end{vmatrix}$$

est son Wronskien correspondant.

La fonction \tilde{K} satisfait les conditions (1) – (6), de la définition 2.1.1, pour le problème (2.10).

1. La fonction \tilde{K} est définie sur le carré $I \times I$.
2. Pour $k = 0, 1, 2, \dots, n-2$, les dérivées partielles $\frac{\partial^k \tilde{K}}{\partial x^k}$ existent et elles sont données par
 - (a) pour $a \leq s \leq x$:

$$\frac{\partial^k \tilde{K}}{\partial x^k}(x, s) = \frac{\begin{vmatrix} y_1'(s) & y_2'(s) & \cdots & y_n'(s) \\ y_1(s) & y_2(s) & \cdots & y_n(s) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(s) & y_2^{(n-2)}(s) & \cdots & y_n^{(n-2)}(s) \\ y_1^{(k)}(x) & y_2^{(k)}(x) & \cdots & y_n^{(k)}(x) \end{vmatrix}}{a_0(s) W(y_1, \dots, y_n)(s)},$$

- (b) pour $x < s \leq b$:

$$\frac{\partial^k \tilde{K}}{\partial x^k}(x, s) = 0,$$

ainsi, elles sont **continues** sur $I \times I$ pour tout $n \geq 2$ (notons que si $s = x$ alors deux lignes sont égales dans le déterminant).

Par conséquent, la condition (2) de la **définition 2.1.1** est satisfaite.

3. La même formule est également valide sur les deux triangle pour les dérivées partielles

$$\frac{\partial^{n-1} \tilde{K}}{\partial x^{n-1}}(x, s) \text{ et } \frac{\partial^n \tilde{K}}{\partial x^n}(x, s),$$

donc la condition (3) est également satisfaite.

4. Pour chaque $x \in (a, b)$ les limites

$$\frac{\partial^{n-1} \tilde{K}}{\partial x^{n-1}}(x, x^+) = 0$$

et

$$\frac{\partial^{n-1} \tilde{K}}{\partial x^{n-1}}(x, x^-) = \frac{\partial^{n-1} K}{\partial x^{n-1}}(x, x^-) = \frac{\begin{vmatrix} y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) & \cdots & y_n''(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(x) & y_2^{(n-2)}(x) & \cdots & y_n^{(n-2)}(x) \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}}{a_0(x) w(y_1, \dots, y_n)(x)} = \frac{1}{a_0(x)},$$

sont **existes**, donc la condition (4) est vérifiée.

5. Sur le premier triangle, $a \leq s < x$ pour s fixé, $\tilde{K}(x, s)$ est un combinaison linéaire de y_1, \dots, y_n , ce qui entraîne que la condition (5) est satisfaite.

6. pour tout $s \in (a, b)$, on a

$$\frac{\partial^k K}{\partial x^k}(a, s) = 0, \quad k = 0, \dots, n-1,$$

donc la condition (6) est vérifiée.

maintenant, afin de construire une fonction de Green G pour le problème (2.6), considérons n fonctions continues sur I , notées c_1, \dots, c_n , et cherchons une fonction G sous la forme

$$G(x, s) = \tilde{k}(x, s) + c_1(s)y_1(x) + \dots + c_n(s)y_n(x).$$

La fonction G satisfait les conditions (1) – (5). Il reste à prouver qu'il est possible de choisir c_1, \dots, c_n , telles que la condition (6) soit satisfaite par G pour le problème (2.6), c'est-à-dire, pour chaque $s \in (a, b)$ nous devons vérifier que

$$B_i(G(., s)) = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad \forall s \in I.$$

Par linéarité, nous avons

$$B_i(G(., s)) = B_i(\tilde{K}(., s)) + \sum_{j=1}^n c_j(s) B_i(y_j), \quad i = 1, \dots, n,$$

ce qui entraîne que $(c_1(s), \dots, c_n(s))$ est une solution du système linéaire

$$\begin{pmatrix} B_1(y_1) & \cdots & B_1(y_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_n(y_1) & \cdots & B_n(y_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1(s) \\ \vdots \\ c_n(s) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} B_1(\tilde{K}(\cdot, s)) \\ \vdots \\ B_n(\tilde{K}(\cdot, s)) \end{pmatrix}.$$

Puisque le problème homogène (2.6) a seulement la solution triviale, le [corollaire\(2.1.1\)](#) assure que le range de la matrice précédent est égale à n . Donc, la seule solution de ce système est donnée par

$$\begin{pmatrix} c_1(s) \\ \vdots \\ c_n(s) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} B_1(y_1) & \cdots & B_1(y_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_n(y_1) & \cdots & B_n(y_n) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} B_1(\tilde{K}(\cdot, s)) \\ \vdots \\ B_n(\tilde{K}(\cdot, s)) \end{pmatrix}.$$

De plus, de cette expression, nous savons que les fonctions c_1, \dots, c_n sont continues et par conséquent, G est un fonction de Green pour le problème (2.6). Du [théorème\(2.1.2\)](#) nous avons

$$y(x) = \int_a^b G(x, s) f(s) ds, \quad x \in I$$

est un solution du problème (2.9) et de plus, d'après l'alternative de Fredholm (voir [théorème\(2.1.1\)](#)), cette solution est unique.

Maintenant, pour prouver l'unicité de la fonction de Green, nous supposons que H est une autre fonction vérifiant les conditions (1) – (6) pour le problème (2.6), puis pour tout $x \in I$ et toute fonction continue f , on aura

$$\int_a^b G(x, s) f(s) ds = \int_a^b H(x, s) f(s) ds, \quad x \in I$$

alors

$$\int_a^b [G(x, s) - H(x, s)] f(s) ds = 0, \quad x \in I,$$

ce qui entraîne que

$$G(x, s) = H(x, s). \square$$

2.2 Calcul de la fonction de Green associée à des E.D.O. linéaires à coefficients constants

Dans cette section nous traitons le problème aux limites

$$\begin{cases} L_n y(x) = f(x), & x \in I, \\ B_i(y) = 0, & i = 1, \dots, n, \end{cases} \quad (2.11)$$

où

$$L_n y(x) = y^n(x) + a_1 y^{n-1}(x) + \dots + a_{n-1} y'(x) + a_n y(x), \quad x \in I,$$

avec $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$.

De plus nous supposons que les fonctions linéaires B_i définie par (2.2), avec $a_i, \alpha_i^j, \beta_i^j \in \mathbb{R}$ pour $i = 1, \dots, n$ et $j = 1, \dots, n-1$, sont telles que le problème homogène associé

$$\begin{cases} L_n y(x) = 0, & x \in I, \\ B_i(y) = 0, & i = 1, \dots, n \end{cases} \quad (2.12)$$

a seulement la solution triviale $y \equiv 0$.

Remarquons que ces deux problèmes sont des cas particuliers de (2.9) et de (2.6) respectivement. Nous présentons une méthode pour calculer explicitement la fonction de Green, une telle méthode nous permettra d'obtenir son expression en résolvant un système algébrique linéaire de n équations à n inconnues.

Théorème 2.2.4

Soit r l'unique solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y^{(n)}(x) + \sum_{i=0}^{n-1} a_{n-i} y^{(i)}(x) = 0, & x \in \mathbb{R}, \\ y^{(i)}(0) = 0, & i = 0, \dots, n-2, \\ y^{(n-1)}(0) = 1. \end{cases} \quad (2.13)$$

Alors, l'unique solution du problème de Cauchy non homogène

$$\begin{cases} y^{(n)}(x) + \sum_{i=0}^{n-1} a_{n-i} y^{(i)}(x) = f(x), & x \in I, \\ y^{(i)}(a) = \lambda_i, & i = 0, \dots, n-1, \end{cases} \quad (2.14)$$

avec $f \in C(I)$ et $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, \dots, n-1$, est donnée par

$$y(x) = \int_a^x r(x-s) f(s) ds + \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k y_k(x), \quad (2.15)$$

où

$$y_k(x) = r^{(n-k-1)}(x-a) + \sum_{j=k+1}^{n-1} a_{n-j} r^{(j-k-1)}(x-a), \quad x \in \mathbb{R}, \quad k = 0, \dots, n-1. \quad (2.16)$$

Preuve

D'une part, soit la fonction v définie par

$$v(x) = \int_a^x r(x-s) f(s) ds, \quad x \in I.$$

D'après la Formule de dérivation d'une intégrale, nous obtenons

$$v^{(i)}(x) = \int_a^x r^{(i)}(x-s) f(s) ds, \quad x \in I, \quad i = 0, \dots, n-1,$$

et

$$v^{(n)}(x) = \int_a^x r^{(n)}(x-s) f(s) ds + f(x), \quad x \in I.$$

Par conséquent,

$$v^{(i)}(a) = 0, \quad \forall i = 0, \dots, n-1$$

et, pour tout $x \in I$,

$$v^{(n)}(x) + \sum_{i=0}^{n-1} a_{n-i} v^{(i)}(x) = \int_a^x \left[r^{(n)}(x-s) + \sum_{i=0}^{n-1} a_{n-i} r^{(i)}(x-s) \right] f(s) ds + f(x) = f(x).$$

C'est-à-dire v est l'unique solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} v^{(n)}(x) + \sum_{i=0}^{n-1} a_{n-i} v^{(i)}(x) = f(x), \quad x \in I, \\ v^{(i)}(a) = 0, \quad i = 0, \dots, n-1. \end{cases}$$

D'autre part, on a

$$\begin{cases} r^{(n)}(x) + \sum_{i=0}^{n-1} a_{n-i} r^{(i)}(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}_+, \\ r(0) = r'(0) = \dots = r^{(n-2)}(0) = 0 \\ r^{(n-1)}(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (r')^{(n)}(x) + \sum_{i=0}^{n-1} a_{n-i} (r')^{(i)}(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}_+, \\ r'(0) = \dots = r^{(n-2)}(0) = 0 \\ r^{(n-1)}(0) = 1 \\ r^{(n)}(0) = -a_1. \end{cases}$$

Donc la fonction

$$x \mapsto y_{n-2}(x) = r'(x-a) + a_1 r(x-a)$$

est l'unique solution du problème de Cauchy posé sur l'intervalle I

$$\begin{cases} y^{(n)}(x) + \sum_{i=0}^{n-1} a_{n-i} y^{(i)}(x) = 0, & x \in I, \\ y^{(i)}(a) = 0, & i = 0, \dots, n-1, i \neq n-2 \\ y^{(n-2)}(a) = 1. \end{cases}$$

De façon similaire, nous pouvons prouver que pour tout $j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, la fonction y_{n-j-1} définie par

$$y_{n-j-1}(x) = r^{(j)}(x-a) + \sum_{k=n-j}^{n-1} a_{n-k} r^{(k-n+j)}(x-a)$$

est l'unique solution du problème

$$\begin{cases} y^{(n)}(x) + \sum_{i=0}^{n-1} a_{n-i} y^{(i)}(x) = 0, & x \in I, \\ y^{(i)}(a) = 0, & i = 0, \dots, n-1, i \neq n-j-1 \\ y^{(n-j-1)}(a) = 1. \end{cases} \quad (2.17)$$

Par conséquent,

$$y(x) = v(x) + \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i y_i(x), \quad x \in I$$

est l'unique solution du problème de Cauchy non homogène (2.14). \square

Du résultat précédent, nous savons que l'unique solution du problème de Cauchy (2.14), posé sur l'intervalle $[a, b]$, est donnée par l'expression (2.15), où r est la solution unique du problème de Cauchy (2.13), les fonctions y_k vérifiant (2.16) et λ_k sont des paramètres réels donnés. D'une façon similaire à la preuve du [théorème \(2.1.3\)](#), si nous considérons le problème aux bords (2.11), nous chercherons une fonction de Green de la forme

$$G(x, s) = \begin{cases} r(x-s) + \sum_{k=0}^{n-1} y_k(x) d_k(s), & \text{si } a \leq s \leq x \leq b, \\ \sum_{k=0}^{n-1} y_k(x) d_k(s), & \text{si } a \leq x < s \leq b, \end{cases} \quad (2.18)$$

où les fonctions réelles continues d_k sont les inconnues.

De (2.8) et (2.18), nous obtenons

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{j=0}^{n-1} \left(\alpha_j^i y^{(j)}(a) + \beta_j^i y^{(j)}(b) \right) \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \left[\alpha_j^i \int_a^b \sum_{k=0}^{n-1} y_k^{(j)}(a) d_k(s) f(s) ds + \beta_j^i \int_a^b r^{(j)}(b-s) f(s) ds + \beta_j^i \int_a^b \sum_{k=0}^{n-1} y_k^{(j)}(b) d_k(s) f(s) ds \right] \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \left[\beta_j^i \int_a^b r^{(j)}(b-s) f(s) ds \right] + \sum_{j=0}^{n-1} \int_a^b d_k(s) \left[\alpha_j^i \sum_{k=0}^{n-1} y_k^{(j)}(a) + \beta_j^i \sum_{k=0}^{n-1} y_k^{(j)}(b) \right] f(s) ds \\
&= \int_a^b \left[\sum_{j=0}^{n-1} \beta_j^i r^{(j)}(b-s) + \sum_{k=0}^{n-1} d_k(s) B_i(y_k) \right] f(s) ds.
\end{aligned}$$

Puisque r, y_k et B_i sont obtenues précédemment, en résolvant le système linéaire

$$\sum_{k=0}^{n-1} d_k(s) B_i(y_k) = - \sum_{j=0}^{n-1} \beta_j^i r^{(j)}(b-s), \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.19)$$

notons que le système (2.19) est équivalent à

$$\begin{pmatrix} B_1(y_0) & \cdots & B_1(y_{n-1}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_n(y_0) & \cdots & B_n(y_{n-1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_0(s) \\ \vdots \\ d_{n-1}(s) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{n-1} \beta_j^1 r^{(j)}(b-s) \\ \vdots \\ \sum_{j=0}^{n-1} \beta_j^n r^{(j)}(b-s) \end{pmatrix}. \quad (2.20)$$

Nous obtenons l'expression de $d_k(s)$ et donc la formule de $G(x, s)$.

Puisque le problème a seulement la solution triviale, le [théorème\(2.1.1\)](#) et le [corollaire\(2.1.1\)](#) assurent que le système précédent admet une seule solution.

Exemple 2.2.3

On considère le problème aux limites du second ordre

$$\begin{cases} y'' = f(x), & x \in [0, 1], \\ y(0) = 0, y(1) = 0. \end{cases} \quad (2.21)$$

Ici

$$\begin{aligned}
L_2 y(x) &= y''(x) \quad (a_1 = 0, a_2 = 0). \\
B_1(y) &= y(0) \quad (\alpha_0^1 = 1, \alpha_1^1 = 0, \beta_0^1 = 0, \beta_1^1 = 0). \\
B_2(y) &= y(1) \quad (\alpha_0^2 = 1, \alpha_1^2 = 0, \beta_0^2 = 1, \beta_1^2 = 0).
\end{aligned}$$

La fonction de Green associée aux problème homogène

$$\begin{cases} y'' = 0, & x \in [0, 1], \\ y(0) = 0, & y(1) = 0, \end{cases}$$

s'écrit sous la forme

$$G(x, s) = \begin{cases} r(x-s) + y_0(x)d_0(s) + y_1(x)d_1(s), & \text{si } 0 \leq s \leq x \leq 1, \\ y_0(x)d_0(s) + y_1(x)d_1(s), & \text{si } 0 \leq x \leq s \leq 1, \end{cases}$$

où r vérifie le problème de Cauchy

$$\begin{cases} r''(x) = 0, & x > 0, \\ r(0) = 0, \\ r'(0) = 1. \end{cases}$$

On trouve $y_0(x) = x$, $y_1(x) = 1$ et $r(x) = x$. Par suite, les fonctions continues d_0 et d_1 vérifient le système linéaire

$$\begin{pmatrix} B_1(y_0) & B_1(y_1) \\ B_2(y_0) & B_2(y_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_0(s) \\ d_1(s) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 \\ 1-s \end{pmatrix},$$

d'autre part, on a

$$\begin{cases} y_0(x) = x \\ y_1(x) = 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} B_1(y) = y(0) \\ B_2(y) = y(1) \end{cases} \quad \text{alors} \quad \begin{cases} B_1(y_0) = 0 \\ B_1(y_1) = 1 \\ B_2(y_0) = 1 \\ B_2(y_1) = 1, \end{cases}$$

qui est équivalent à

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_0(s) \\ d_1(s) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 \\ 1-s \end{pmatrix}.$$

Alors

$$\begin{cases} d_0(s) = -(1-s), \\ d_1(s) = 0. \end{cases}$$

D'où

$$G(x, s) = \begin{cases} s(x-1), & \text{si } 0 \leq s \leq x \leq 1, \\ x(s-1), & \text{si } 0 \leq x \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Exemple 2.2.4

Soit le problème aux limites associé à une équation d'ordre 4

$$\begin{cases} y^{(4)} = 0, \\ y(0) = 0, y'(0) = 0, \\ y(1) = 0, y'(1) = 0. \end{cases} \quad (2.22)$$

Tout solution de (2.22) est de la forme

$$y(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3.$$

Donc

$$\begin{cases} y_0(x) = 1, y_1(x) = x, \\ y_2(x) = x^2, y_3(x) = x^3. \end{cases}$$

Et

$$\begin{cases} L_4 y(x) = y^{(4)}, & x \in [0, 1] \quad (a_0 = 1, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = 0.) \\ B_1(y) = y(0), & (\alpha_0^1 = 1, \quad \alpha_1^1 = 0, \quad \alpha_2^1 = 0, \quad \alpha_3^1 = 0, \quad \beta_0^1 = 0, \quad \beta_1^1 = 0, \quad \beta_2^1 = 0, \quad \beta_3^1 = 0.) \\ B_2(y) = y'(0), & (\alpha_0^2 = 0, \quad \alpha_1^2 = 1, \quad \alpha_2^2 = 0, \quad \alpha_3^2 = 0, \quad \beta_0^2 = 0, \quad \beta_1^2 = 0, \quad \beta_2^2 = 0, \quad \beta_3^2 = 0.) \\ B_3(y) = y(1), & (\alpha_0^3 = 0, \quad \alpha_1^3 = 0, \quad \alpha_2^3 = 0, \quad \alpha_3^3 = 0, \quad \beta_0^3 = 1, \quad \beta_1^3 = 0, \quad \beta_2^3 = 0, \quad \beta_3^3 = 0.) \\ B_4(y) = y'(1), & (\alpha_0^4 = 1, \quad \alpha_1^4 = 0, \quad \alpha_2^4 = 0, \quad \alpha_3^4 = 0, \quad \beta_0^4 = 0, \quad \beta_1^4 = 1, \quad \beta_2^4 = 0, \quad \beta_3^4 = 0.) \end{cases}$$

Nous cherchons la fonction de Green sous forme

$$G(x, s) = \begin{cases} r(x-s) + \sum_{k=0}^3 y_k(x) d_k(s), & \text{si } 0 \leq s \leq x \leq 1, \\ \sum_{k=0}^3 y_k(x) d_k(s), & \text{si } 0 \leq x \leq s \leq 1, \end{cases}$$

où $r(x) = \frac{1}{6}x^3$ est le unique solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} r^{(4)}(x) = 0, x > 0, \\ r(0) = 0, r'(0) = 0, \\ r''(0) = 0, r^{(3)}(0) = 1. \end{cases}$$

Il nous reste à déterminer les fonctions continues d_k pour $k = 0, \dots, 3$ qui vérifient le système linéaire

$$\begin{pmatrix} B_1(y_0) & B_1(y_1) & B_1(y_2) & B_1(y_3) \\ B_2(y_0) & B_2(y_1) & B_2(y_2) & B_2(y_3) \\ B_3(y_0) & B_3(y_1) & B_3(y_2) & B_3(y_3) \\ B_4(y_0) & B_4(y_1) & B_4(y_2) & B_4(y_3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_0(s) \\ d_1(s) \\ d_2(s) \\ d_3(s) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^3 \beta_j^1 r^{(j)} (1-s) \\ \sum_{j=0}^3 \beta_j^2 r^{(j)} (1-s) \\ \sum_{j=0}^3 \beta_j^3 r^{(j)} (1-s) \\ \sum_{j=0}^3 \beta_j^4 r^{(j)} (1-s) \end{pmatrix}.$$

Ce système est équivalent à

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_0(s) \\ d_1(s) \\ d_2(s) \\ d_3(s) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r(1-s) \\ r'(1-s) \end{pmatrix},$$

dont la résolution donne

$$\begin{cases} d_0(s) = 0, d_1(s) = 0, \\ d_2(s) = -\frac{1}{2}(1-s)^3 + \frac{1}{2}(1-s)^2, \\ d_3(s) = \frac{1}{3}(1-s)^3 - \frac{1}{2}(1-s)^2. \end{cases}$$

D'où

$$G(x, s) = \begin{cases} \left(\frac{x^3}{2} - x^2 + \frac{x}{2} \right) s^2 - \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{6} \right) s^3, & \text{si } 0 \leq s \leq x \leq 1, \\ \left(\frac{s^3}{2} - s^2 + \frac{s}{2} \right) x^2 - \left(\frac{s^3}{3} - \frac{s^2}{2} + \frac{1}{6} \right) x^3, & \text{si } 0 \leq x \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Etude qualitative et quantitative de certaine E.D.O par la méthode P.G.E.S.

3.1	Etude d'une equation d'ordre 2 par la méthode P.G.E.S [9]	38
3.1.1	Position du problème	38
3.1.2	Calcul de la fonction de Green	38
3.1.3	Méthode itérative de Green-Picard	40
3.1.4	Analyse de convergence	41
3.2	Etude d'une equation d'ordre 3 par la méthode P.G.E.S [8]	48
3.2.1	Position du problème	48
3.2.2	Calcul de la fonction de Green pour une E.D.O d'ordre 3	49
3.2.3	Schéma intégré du Green-Picard(P.G.E.S)	50
3.2.4	Analyse de convergence	51

Dans ce chapitre, on utilisera les fonction de Green associées à des E.D.O pour introduire une méthode itérative, connue dans la littérature par l'abréviation P.G.E.S.

Ce chapitre constitue une introduction et un début pour comprendre ce genre des méthodes.

Ce chapitre a pour but l'application de P.G.E.S dans l'étude des équations différentielles ordinaires.

On s'intéresse à l'étude d'une E.D.O d'ordre 2 dans un intervalle semi borné. Et comme deuxième étape l'étude d'une E.D.O d'ordre 3.

3.1 Etude d'une équation d'ordre 2 par la méthode P.G.E.S [9]

3.1.1 Position du problème

On considère le problème aux limites non linéaire suivant

$$y''(x) - r^2 y(x) = F(x, y(x), y'(x), y''(x)), x \in [0, +\infty), \quad (3.1)$$

avec les conditions aux bords suivantes

$$y(0) = \alpha, y(+\infty) = \beta, \quad (3.2)$$

où $F(x, y, y', y'')$ est continue sur $[0, +\infty) \times \mathbb{R}^3$ et α, β et r sont des constantes réelles. Il est important de mentionner que, sans perte de généralité, la méthode peut s'appliquer à une classe plus étendue que celle (3.1), donnée par

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = F(x, y(x), y'(x), y''(x)), x \in [0, +\infty), \quad (3.3)$$

pour autant que les solutions de l'équation homogène sont bornées à l'infini.

3.1.2 Calcul de la fonction de Green

Pour le traitement de la méthode proposée, nous devons obtenir la fonction de Green pour l'opérateur linéaire

$$L[y] = y'' - r^2 y. \quad (3.4)$$

On suppose que y_1, y_2 sont des solutions de $L[y] = 0$.

On s'inspirant [9], page 4 la fonction de Green sera une combinaison linéaire de y_1 et y_2 pour précisément on a :

$$G(x, s) = \begin{cases} c_1 y_1 + c_2 y_2, & 0 < s < x, \\ d_1 y_1 + d_2 y_2, & x < s < +\infty. \end{cases} \quad (3.5)$$

On rappelle que la fonction de Green¹ est définie comme une solution de

$$\begin{cases} L[G(x, s)] \equiv G_{ss}(x, s) - r^2 G(x, s) = \delta(x - s), \\ G(x, 0) = G(x, +\infty) = 0, \end{cases} \quad (3.6)$$

1. $\delta(x - s)$ est la fonction delta de Dirac définie par les deux conditions suivantes

$$\delta(x - s) = \begin{cases} 0 & x \neq s \\ +\infty & x = s. \end{cases}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - s) dx = 1.$$

et vérifiant les propriétés suivantes

1. G est continue à $x = s$:

$$G(x, s)_{s \rightarrow x^-} = G(x, s)_{s \rightarrow x^+}. \quad (3.7)$$

2. Discontinuité de saute de G' à $x = s$:

$$1 + G_s(x, s)_{s \rightarrow x^-} = G_s(x, s)_{s \rightarrow x^+}. \quad (3.8)$$

D'abord, on trouve la fonction de Green pour l'opérateur linéaire

$$L[y] = y'' - r^2 y$$

et les conditions aux bords (3.2). Par utilisation des propriétés précédentes de la fonction de Green, on obtient

La solution générale de l'équation homogène est

$$y_h(x) = c_1 e^{rx} + c_2 e^{-rx},$$

ainsi, la fonction de Green à la forme suivante

$$G(x, s) = \begin{cases} c_1 e^{r(s-x)} + c_2 e^{-r(s+x)}, & 0 < s < x, \\ d_1 e^{r(x-s)} + d_2 e^{-r(x+s)}, & x < s < +\infty. \end{cases} \quad (3.9)$$

La condition $G(x, 0) = 0$ pour $0 < s < x$, implique que $c_1 + c_2 = 0$, et la condition $G(x, +\infty) = 0$ pour $x < s < +\infty$ est vérifiée.

Depuis $G(x, s)$ est continue à $x = s$, alors

$$c_1 + c_2 e^{-2rs} = d_1 + d_2 e^{-2rs}. \quad (3.10)$$

A partir de la condition de saut, nous avons

$$G_s(x, s)_{s \rightarrow x^-} - G_s(x, s)_{s \rightarrow x^+} = 1, \quad (3.11)$$

$$c_1 r - c_2 r e^{-2rs} + d_1 r + d_2 r e^{-2rs} = 1.$$

Depuis (3.10) et (3.11), nous avons

$$c_1 = \frac{1}{2r}, \quad d_1 = \frac{1}{2r}, \quad (3.12)$$

$$c_2 = -\frac{1}{2r}, \quad d_2 = -\frac{1}{2r}.$$

Donc

$$G(x, s) = - \begin{cases} \frac{1}{2r} e^{r(s-x)} + \frac{1}{2r} e^{-r(s+x)}, & 0 < s < x, \\ \frac{1}{2r} e^{-r(s+x)} - \frac{1}{2r} e^{r(x-s)}, & x < s < +\infty. \end{cases} \quad (3.13)$$

Par conséquent, la solution particulière y_p de problème (3.1)-(3.2) est donnée par

$$y_p(x) = \int_0^{+\infty} G(x, s) F(s, y_p(s), y_p'(s), y_p''(s)) ds. \quad (3.14)$$

Remarque 3.1.1

On note à ce niveau que le rôle des variables figurant dans l'expression de la fonction de Green $(x, s) \mapsto G(x, s)$ est très important. En effet, on sait que d'après [9] que

$$G^*(s, x) = -G(x, s). \quad (3.15)$$

Pour plus de détails, le lecteur peut consulter la même référence section 2 page 5.

3.1.3 Méthode itérative de Green-Picard

La stratégie du schéma proposé consiste à définir un opérateur intégral exprimé en termes de fonction de Green du terme linéaire correspondant dans le problème aux limites, puis à mettre deux schémas itératifs à point fixe connus par les schémas de Picard et de Mann.

D'abord, nous définissons l'opérateur intégral suivant

$$T[y] = \int_0^{+\infty} G(x, s) [y''(s) - r^2 y(s)] ds, \quad (3.16)$$

qui peut être réécrite pour une solution particulière y_p comme suite

$$\begin{aligned} T[y_p] &= \int_0^{+\infty} G(x, s) [y_p''(s) - r^2 y_p(s) - F(s, y_p(s), y_p'(s), y_p''(s))] ds \\ &+ \int_0^{+\infty} G(x, s) F(s, y_p(s), y_p'(s), y_p''(s)) ds. \end{aligned} \quad (3.17)$$

D'après (3.14) on obtient

$$T[y_p] = y_p + \int_0^{+\infty} G(x, s) [y_p''(s) - r^2 y_p(s) - F(s, y_p(s), y_p'(s), y_p''(s))] ds. \quad (3.18)$$

La dernière équation constitue notre définition de l'opérateur intégral à utiliser pour construire le schéma itératif à point fixe. Par commodité, nous remplaçons y_p par y dans l'équation (3.18).

Schéma intégré du Green-Picard (P.G.E.S)

En utilisant l'opérateur $T[y]$ dans (3.18), par le schéma des points fixes de Picard

$$y_{n+1} = T[y_n], n \geq 0,$$

le schéma d'itération P.G.E.S est donnée par

$$y_{n+1}(x) = y_n(x) + \int_0^{+\infty} G(x, s) [y_n''(s) - r^2 y_n(s) - F(s, y_n(s), y_n'(s), y_n''(s))] ds, \quad (3.19)$$

où $n = 0, 1, 2, \dots$

Remarque 3.1.2

Il existe une autre approche plus générale, connue sous le nom **schéma d'itération de Mann**. L'opérateur T est donné par

$$y_{n+1} = (1 - \alpha_n)y_n + \alpha_n T[y_n], n \geq 0, \quad (3.20)$$

où $\alpha_n \in [0, 1]$.

Donc

$$\begin{aligned} y_{n+1}(x) &= (1 - \alpha_n)y_n(x) + \alpha_n \left[y_n(x) + \int_0^{+\infty} G(x, s) \left[y_n''(s) - r^2 y_n(s) - F(s, y_n(s), y_n'(s), y_n''(s)) \right] ds \right], \\ &= y_n(x) + \alpha_n \int_0^{+\infty} G(x, s) \left[y_n''(s) - r^2 y_n(s) - F(s, y_n(s), y_n'(s), y_n''(s)) \right] ds, \end{aligned} \quad (3.21)$$

où $n = 0, 1, 2, \dots$

Nous notons ici que **l'itération de Picard est un cas particulier de l'itération de Mann** avec $\alpha_n = 1$. La fonction de départ y_0 est choisie pour être la solution de $L[y] = 0$ avec les conditions aux bords (3.2). Il convient de noter que le deuxième terme de schéma à savoir

$$\int_0^{+\infty} G(x, s) \left[y_n''(s) - r^2 y_n(s) - F(s, y_n(s), y_n'(s), y_n''(s)) \right] ds, \quad (3.22)$$

satisfait les conditions homogènes $y(0) = 0$ et $y(+\infty) = 0$ pour tout $n \geq 0$.

3.1.4 Analyse de convergence

Dans cette section, on concentre sur l'analyse de convergence de la méthode présentée.

Théorème 3.1.1

Supposons que $F(s, y, y', y'')$ est une fonction continue dont la dérivée par rapport à y, y' et y'' est bornée par L_1, L_2 et L_3 respectivement. Soit

$$K := \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r} + 1 \right) L_c < 1, \quad (3.23)$$

où

$$L_c = \max\{L_1, L_2, L_3\}. \quad (3.24)$$

Alors la suite itération $\{y_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ donnée par (3.19) où $x \in [0, +\infty)$ et utilisant n'importe quelle fonction de départ bornée sur $[0, +\infty)$, convergence uniformément vers la solution exacte $y(x)$ du problème (3.1)-(3.2).

Preuve

Soit $\mathcal{C}^2[0, 1]$ l'espace des fonction muni de la norme maximale définie par

$$\|y\|_2 = \max_{[0, +\infty)} (|y(x)| + |y'(x)| + |y''(x)|).$$

Etape 01 : Nous commençons par calculer l'intégrale suivant deux fois par parties, on trouve

$$I = \int_0^{+\infty} G(x, s) y''(s) ds,$$

on a

$$u = G(x, s) \quad u' = G_s(x, s),$$

$$dv = y''(s) \quad v = y'(s),$$

alors

$$I = G(x, +\infty) y'(+\infty) - G(x, 0) y'(0) - \int_0^{+\infty} G_s(x, s) y'(s) ds. \quad (3.25)$$

Ensuite, nous répétons le même argument, nous obtenons

$$\begin{aligned} I &= G(x, +\infty) y'(+\infty) - G(x, 0) y'(0) - G_s(x, +\infty) y(+\infty) \\ &+ G_s(x, 0) y(0) + \int_0^{+\infty} G_{ss}(x, s) y(s) ds. \end{aligned} \quad (3.26)$$

On remplace (3.26) dans le schéma itérative (3.19), on obtient

$$\begin{aligned} y_{n+1}(x) &= y_n(x) + G(x, +\infty) y'_n(+\infty) - G_s(x, +\infty) y_n(+\infty) - G(x, 0) y'_n(0) + G_s(x, 0) y_n(0) \\ &+ \int_0^{+\infty} (G_{ss}(x, s) - r^2 G(x, s)) y_n(s) ds - \int_0^{+\infty} G(x, s) F(s, y_n(s), y'_n(s), y''_n(s)) ds, \end{aligned} \quad (3.27)$$

où $G(x, s)$ la fonction de Green donnée par (3.13) satisfait les conditions aux bords homogènes $G(x, 0) = G(x, +\infty) = 0$ et y_n satisfait les conditions aux bords $y_n(0) = \alpha, y_n(+\infty) = \beta$. Donc la dernière équation se simplifie en

$$\begin{aligned} y_{n+1}(x) &= y_n(x) + \alpha G_s(x, 0) - \beta G_s(x, +\infty) + \int_0^{+\infty} (G_{ss}(x, s) - r^2 G(x, s)) y_n(s) ds \\ &- \int_0^{+\infty} G(x, s) F(s, y_n(s), y'_n(s), y''_n(s)) ds, \end{aligned} \quad (3.28)$$

d'après la définition de la fonction de Green, on a

$$G_{ss}(x, s) - r^2 G(x, s) = \delta(x - s),$$

par conséquence

$$\int_0^{+\infty} (G_{ss}(x, s) - r^2 G(x, s)) y_n(s) ds = \int_0^{+\infty} \delta(x - s) y_n(s) ds = y_n(x). \quad (3.29)$$

D'après (3.13), nous avons $G_s(x, 0) = e^{-rx}$, $G_s(x, +\infty) = 0$. En utilisant (3.29) et (3.13) dans (3.28), on obtient

$$y_{n+1}(x) = \alpha e^{-rx} + \int_0^{+\infty} G(x, s) F(s, y_n(s), y'_n(s), y''_n(s)) ds. \quad (3.30)$$

Etape 02 : On définit un opérateur

$$T_G : \mathcal{C}^2[0, 1] \rightarrow \mathcal{C}^2[0, 1],$$

comme suite

$$T_G[y] = \alpha e^{-rx} + \int_0^{+\infty} G(x, s) F(s, y_n(s), y'_n(s), y''_n(s)) ds. \quad (3.31)$$

Par un calcul simple, on obtient

$$g_1(x) = \int_0^{+\infty} |G(x, s)| ds = \frac{1}{r^2} (1 - e^{-rx}). \quad (3.32)$$

Par conséquent, la valeur maximale de $g_1(x)$ sur $[0, +\infty)$ est

$$\int_0^{+\infty} |G(x, s)| ds \leq \frac{1}{r^2}. \quad (3.33)$$

En appliquant le théorème de la valeur moyenne et le fait que $F_y, F_{y'}$ et $F_{y''}$ sont limités par L_1, L_2 et L_3 respectivement, on obtient

$$\begin{aligned} |T_G(y) - T_G(v)| &= \left| \int_0^{+\infty} G(x, s) [F(s, y, y', y'') - F(s, v, v', v'')] ds \right| \\ &\leq \int_0^{+\infty} |G(x, s)| |F(s, y, y', y'') - F(s, v, v', v'')] ds \\ &\leq \int_0^{+\infty} |G(x, s)| |F_y(y - v) + F_{y'}(y' - v') + F_{y''}(y'' - v'')| ds \\ &\leq \max_{[0, +\infty)} [|F_y| |y - v| + |F_{y'}| |y' - v'| + |F_{y''}| |y'' - v''|] \int_0^{+\infty} |G(x, s)| ds \\ &\leq \max_{[0, +\infty)} [L_1 |y - v| + L_2 |y' - v'| + L_3 |y'' - v''|] \int_0^{+\infty} |G(x, s)| ds \\ &\leq \max\{L_1, L_2, L_3\} \max_{[0, +\infty)} [|y - v| + |y' - v'| + |y'' - v''|] \int_0^{+\infty} |G(x, s)| ds \\ &= L_c \|y - v\|_2 \int_0^{+\infty} |G(x, s)| ds \\ &\leq \frac{1}{r^2} L_c \|y - v\|_2. \end{aligned} \quad (3.34)$$

D'après l'inégalité (3.33), les évaluations suivantes s'ensuivent facilement

$$\begin{aligned} g_2(x) &= \int_0^{+\infty} |G_x(x, s)| ds = \frac{1}{r} (e^{-2rx} - e^{-rx} + 1). \\ g_3(x) &= \int_0^{+\infty} |G_{xx}(x, s)| ds = 1 - e^{-rx}. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Notons que sur $[0, +\infty)$, la valeur maximale de $g_2(x)$ est $\frac{1}{r}$ et le maximum de $g_3(x)$ est 1. De la même manière, en suivant l'analyse se l'équation (3.34) et on utilisant (3.35), on obtient

$$\begin{aligned} \left| (T_G(y))'(x) - (T_G(v))'(x) \right| &\leq L_c \|y - v\|_2 \int_0^{+\infty} |G_x(x, s)| ds \\ &\leq \frac{1}{r} L_c \|y - v\|_2, \end{aligned} \quad (3.36)$$

et

$$\begin{aligned} \left| (T_G(y))''(x) - (T_G(v))''(x) \right| &\leq L_c \|y - v\|_2 \int_0^{+\infty} |G_{xx}(x, s)| ds \\ &\leq L_c \|y - v\|_2. \end{aligned} \quad (3.37)$$

En ajoutant le côté gauche des trois inégalités (3.34), (3.36) et (3.37), on obtient

$$\|T_G(y) - T_G(v)\|_2 \leq \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r} + 1 \right) L_c \|y - v\|_2, \quad (3.38)$$

où

$$\|y - v\|_2 = \max_{[0, +\infty)} \left[|y(x) - v(x)| + |y'(x) - v'(x)| + |y''(x) - v''(x)| \right].$$

De l'hypothèse de théorème, à savoir que $K := \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r} + 1 \right) L_c < 1$, il résulte que

$$\|T_G(y) - T_G(v)\|_2 \leq k \|y - v\|_2, \quad (3.39)$$

avec $0 < k < 1$. Donc T_G est contractante. On a alors

$$\begin{aligned} \|y_{n+1} - y_n\|_2 &= \|T_G(y_n) - T_G(y_{n-1})\|_2 \\ &\leq K \|y_n - y_{n-1}\|_2 \\ &\leq K^n \|y_1 - y_0\|_2. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Si $m > n > 0$, alors

$$\begin{aligned} \|y_m - y_n\|_2 &\leq \|y_m - y_{m-1}\|_2 + \dots + \|y_{n+1} - y_n\|_2 \\ &\leq (K^{m-1} + \dots + K^n) \|y_1 - y_0\|_2 \\ &\leq K^n (1 + K + K^2 + \dots + K^{m-n}) \|y_1 - y_0\|_2 \\ &= \frac{K^n}{1 - K} \|y_1 - y_0\|_2. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Notons que si $n \rightarrow \infty$, alors $m \rightarrow \infty$, et de plus $K^n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$ car $K < 1$. Cette dernière équation implique que la suite $\{y_n\}$ est suite de Cauchy, et alors converge vers y^* . Si on laisse $m \rightarrow \infty$, on obtient l'estimation d'erreur

$$\|y^* - y_n\|_2 \leq \frac{K^n}{1 - K} \|y_1 - y_0\|_2. \quad (3.42)$$

Puisque T_G est contractant, alors elle est continue. D'après (3.27) et (3.31), notre schéma se lit comme suit $y_{n+1} = T[y_n]$. Par conséquent

$$T[y^*] = \lim_{n \rightarrow \infty} T[y_n] = \lim_{n \rightarrow \infty} y_{n+1} = y^*. \quad (3.43)$$

Dans ce qui suit, on donnera quelques exemples numériques. On note ici que l'analyse des résultats numériques n'ont pas fait l'objet d'une étude approfondie.

On donne ici quelques exemples juste pour analyser et voir la performance des méthodes itératives. La plupart des résultats sont détaillés dans [9]

Exemple 3.1.1

1. L'énoncé position du problème :

On considère le problème aux limites suivant

$$y''(x) - 16y(x) + y'(x)y''(x) = (-x^2 + 3x - 2)e^{-2x} - (15x + 2)e^{-x}, x \in [0, +\infty), \quad (3.44)$$

avec les conditions aux bords

$$y(0) = 0, y(+\infty) = 0. \quad (3.45)$$

On transforme ce problème au problème de l'étude (3.1), on obtient

$$y''(x) - 16y(x) = -y'(x)y''(x) + (-x^2 + 3x - 2)e^{-2x} - (15x + 2)e^{-x}, x \in [0, +\infty), \quad (3.46)$$

avec les conditions aux bords

$$y(0) = 0, y(+\infty) = 0. \quad (3.47)$$

La solution exact de problème (3.44)-(3.45) donnée par

$$y(x) = xe^{-x}.$$

2. L'itération de la méthode P.G.E.S :

Etape 01 : calculer de la fonction de Green

On trouve la fonction de Green pour l'opérateur linéaire $L[y] = y'' - 16y$ avec les conditions aux bords (3.47). Par utilisation des propriétés (3.6), (3.7) et (3.8) la fonction de Green donnée par

$$G(x, s) = - \begin{cases} -\frac{1}{8}e^{4(s-x)} + \frac{1}{8}e^{-4(s+x)}, & 0 < s < x, \\ \frac{1}{8}e^{-4(s+x)} - \frac{1}{8}e^{4(x-s)}, & x < s < +\infty. \end{cases} \quad (3.48)$$

Etape 02 : le schéma d'itération de P.G.E.S

On applique le schéma d'itération de P.G.E.S (3.19) où l'itération initiale y_0 doit satisfaire l'équation homogène linéaire $L[y] = y'' - 16y = 0$ avec les conditions aux bords (3.47), on obtient

$$\begin{aligned} y_0 &= 0, \\ y_{n+1}(x) &= y_n(x) - \int_0^x \left(-\frac{1}{8}e^{4(s-x)} + \frac{1}{8}e^{-4(s+x)} \right) \\ &\quad \times \left[y_n''(s) - 16y_n(s) + y_n'(s)y_n''(s) - (-s^2 + 3s - 2)e^{-2s} + (15s + 2)e^{-s} \right] ds \\ &\quad - \int_x^{+\infty} \left(\frac{1}{8}e^{-4(s+x)} - \frac{1}{8}e^{4(x-s)} \right) \\ &\quad \times \left[y_n''(s) - 16y_n(s) + y_n'(s)y_n''(s) - (-s^2 + 3s - 2)e^{-2s} + (15s + 2)e^{-s} \right] ds. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Remarque 3.1.3

les itérations supérieures s'avèrent longues et compliquées, il suffit donc de ne traiter que les deux premières itérations

$$\begin{aligned} y_0 &= 0, \\ y_1 &= \frac{1}{216} e^{-4x} (216xe^{3x} + 18x^2e^{2x} - 66xe^{2x} + 61e^{2x} - 61). \end{aligned} \quad (3.50)$$

Les résultats numériques sont donnés dans le tableau (3.1).

Le taux de convergence est lent pour les petites valeurs de x . Les itérations convergent très rapidement vers la solution exacte pour des valeurs plus grandes de x .

x	Erreur	x	Erreur
0.5	2.48445×10^{-5}	14	1.54084×10^{-27}
1	2.33334×10^{-6}	16	5.21950×10^{-31}
2	1.55521×10^{-8}	18	1.75372×10^{-34}
4	5.77744×10^{-12}	20	5.88452×10^{-38}
6	1.97601×10^{-14}	40	$2. \times 10^{-55}$
8	5.70138×10^{-18}	60	0.
10	9.81870×10^{-21}	80	0.
12	4.34756×10^{-24}	100	0.

TABLE 3.1 – Erreur absolue de la solution approchée d'itérations.

On note ici que la situation est critique pour certains valeurs de r . En effet dans l'exemple suivant on constate que la méthode peut ne pas être convergente. Ce qui nous oblige à voir d'autre méthode plus précisément la méthode de Mann. Comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 3.1.2

On peut même faire appliquer les résultats du [théorème 3.1.1](#) sur une équation d'ordre 3.

1. L'énoncé position du problème :

On considère le problème aux limites suivant

$$2y'''(x) + y'(x) - (y'(x))^2 = 0, x \in [0, +\infty), \quad (3.51)$$

avec les conditions aux bords

$$y(0) = 0, y'(0) = b + 1, y'(+\infty) = 1. \quad (3.52)$$

Si on pose $u(x) = y'(x)$, alors l'équation (3.51) se simplifie en

$$2u''(x) + u(x) - (u(x))^2 = 0, x \in [0, +\infty), \quad (3.53)$$

avec les conditions aux bords

$$u(0) = b + 1, u(+\infty) = 1. \quad (3.54)$$

Par commodité, nous utilisons la transformation linéaire $v(x) = u(x) - 1$, on obtient

$$v''(x) - \frac{1}{2}v(x) = \frac{1}{2}(v(x))^2, x \in [0, +\infty), \quad (3.55)$$

avec les conditions aux bords

$$v(0) = b, v(+\infty) = 0. \quad (3.56)$$

Nous allons résoudre le problème ci-dessus pour le choix de $b = -1$. Comparer avec équation (3.1), nous avons maintenant $r = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$. Ainsi, selon le critère de convergence, le P.G.E.S peut diverger.

2. L'itération de la méthode P.G.E.S :

Etape 01 : calculer de la fonction de Green

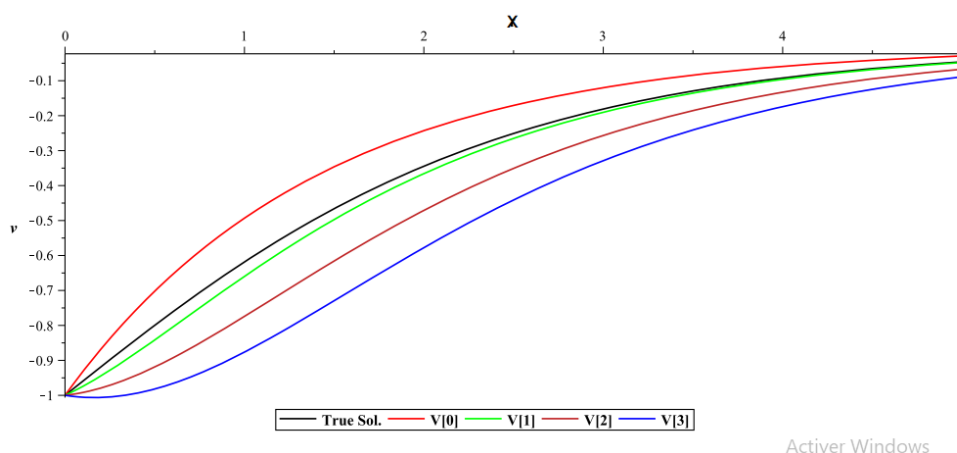
La fonction de Green pour l'opérateur linéaire $L[v] = v'' - \frac{1}{2}v$ avec les conditions aux bords (3.56) est donné par (3.13) avec $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Etape 02 : le schéma d'itération de P.G.E.S

On applique le schéma d'itération de P.G.E.S (3.19) pour (3.55) où l'itération initiale v_0 doit satisfaire l'équation homogène linéaire $L[v] = v'' - \frac{1}{2}v = 0$ avec les conditions aux bords $v(0) = -1$, $v(+\infty) = 0$, on obtient

$$\begin{aligned} v_0 &= -e^{-x/\sqrt{2}}, \\ v_{n+1} &= v_n + \int_0^{+\infty} G(x,s) \left[v_n'' - \frac{1}{2}v_n - \frac{1}{2}v_n^2 \right] ds. \end{aligned} \quad (3.57)$$

La figure (3.1) montre la divergence des solutions approchées générées.



Activer Windows

FIGURE 3.1 – Solutions numériques de (3.55)-(3.56) pour $b = -1$, en utilisant P.G.E.S.

Ce revers de divergence peut être facilement surmonté en utilisant une simple transformation comme suit :

$$v(x) = w(x/a), a > 0.$$

Cela transformera le problème (3.55)-(3.56) en

$$w'' - \frac{1}{2}a^2w = \frac{1}{2}a^2w^2, \quad (3.58)$$

avec les conditions aux bords

$$w(0) = b, w(+\infty) = 0. \quad (3.59)$$

Ainsi on peut choisir a de telle manière que $a^2/2 \geq 1$. En effet on a choisi $a = \sqrt{2}$ et donc l'équation différentielle devient

$$w'' - w = w^2.$$

La convergence du P.G.E.S a été lente (voir Figure (3.2)).

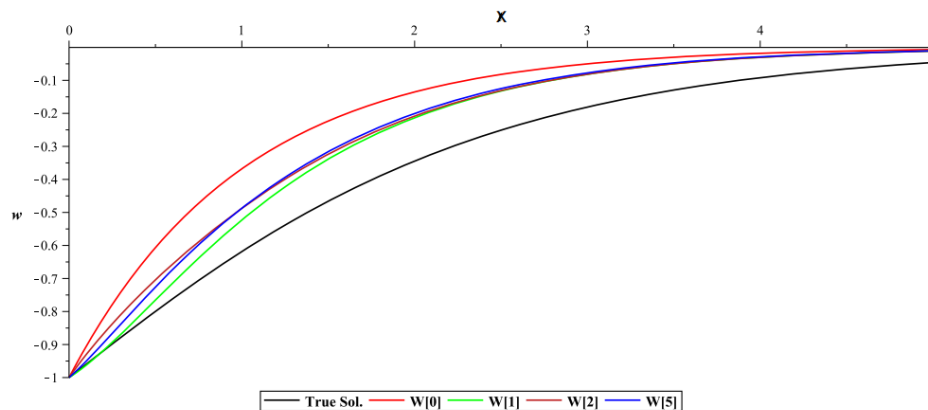


FIGURE 3.2 – Solutions numériques de (3.58)-(3.59) pour $a = \sqrt{2}$, en utilisant P.G.E.S.

3.2 Etude d'une equation d'ordre 3 par la méthode P.G.E.S [8]

On peut même étendre notre étude à des equation ordinaire d'ordre 3.

3.2.1 Position du problème

On considère le problème aux limites non linéaire suivant

$$y'''(x) = F(x, y(x), y'(x), y''(x)), x \in [0, 1], \quad (3.60)$$

avec les conditions aux bords suivantes

$$y(0) = 0, y'(0) = 0, y'(1) = 0. \quad (3.61)$$

On suppose que la fonction $F : [0, 1] \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ vérifie les hypothèses suivantes :

(H₁) $(x, y, z, w) \mapsto F(x, y, z, w)$ est **continue** sur $[0, 1] \times \mathbb{R}^3$.

(H₂) $F(x, y, z, w), F_x(x, y, z, w), F_y(x, y, z, w), F_z(x, y, z, w)$ et $F_w(x, y, z, w)$ sont **bornées**.

(H₃) $F(x, y, z, w) > 0$ sur $[0, 1] \times \mathbb{R}^3$.

3.2.2 Calcul de la fonction de Green pour une E.D.O d'ordre 3

On rappelle que le calcul de la fonction de Green d'une equation d'ordre 3 suit les démarches suivantes

On considère le problème aux limites suivants

$$\begin{cases} L[y] = a_0(x)y''''(x) + a_1(x)y''(x) + a_2(x)y'(x) + a_3(x)y(x) = 0, x \in [a, b], \\ B_1[y] = \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) + \alpha_3 y''(a) = \alpha, \\ B_2[y] = \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) + \beta_3 y''(b) = \beta, \\ B_3[y] = \gamma_1 y(c) + \gamma_2 y'(c) + \gamma_3 y''(c) = \gamma, \end{cases} \quad (3.62)$$

où $c = a$ ou b .

On appelle y_h la **solution homogène** de problème (3.62).

On considère le problème aux limites suivants

$$P_p : \begin{cases} L[y] = a_0(x)y''''(x) + a_1(x)y''(x) + a_2(x)y'(x) + a_3(x)y(x) = f(x), x \in [a, b], \\ B_1[y] = \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) + \alpha_3 y''(a) = 0, \\ B_2[y] = \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) + \beta_3 y''(b) = 0, \\ B_3[y] = \gamma_1 y(c) + \gamma_2 y'(c) + \gamma_3 y''(c) = 0. \end{cases} \quad (3.63)$$

On appelle y_p la **solution particulière** de problème (3.63) est donnée par

$$y_p(x) = \int_a^b G(x, s) f(s) ds, \quad (3.64)$$

où $G(x, s)$ est définie comme un solution de

$$\begin{cases} L[G(x, s)] = \delta(x - s), \\ B_1[G(x, s)] = B_2[G(x, s)] = B_3[G(x, s)] = 0. \end{cases} \quad (3.65)$$

D'après [8]. page 131, Pour $x \neq s$, la fonction de Green est la solution de l'équation (3.65) et donnée par

$$G(x, s) = \begin{cases} c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3, & a < x < s, \\ d_1 y_1 + d_2 y_2 + d_3 y_3, & s < x < b, \end{cases} \quad (3.66)$$

où y_1, y_2 et y_3 sont des solutions de $L[y] = 0$.

Remarque 3.2.4

Les constantes c_1, c_2, c_3, d_1, d_2 et d_3 peuvent être déterminée à l'aide des propriétés de la fonction (3.66) c'est à dire :

1. G satisfait les conditions aux bords homogènes

$$B_1[G(x, s)] = B_2[G(x, s)] = B_3[G(x, s)] = 0. \quad (3.67)$$

2. G est continue à $x = s$

$$c_1 y_1(s) + c_2 y_2(s) + c_3 y_3(s) = d_1 y_1(s) + d_2 y_2(s) + d_3 y_3(s). \quad (3.68)$$

3. G' est continue à $x = s$

$$c_1 y_1'(s) + c_2 y_2'(s) + c_3 y_3'(s) = d_1 y_1'(s) + d_2 y_2'(s) + d_3 y_3'(s). \quad (3.69)$$

4. Discontinuité de saute de G'' à $x = s$

$$\frac{1}{a_0(s)} + c_1 y_1''(s) + c_2 y_2''(s) + c_3 y_3''(s) = d_1 y_1''(s) + d_2 y_2''(s) + d_3 y_3''(s). \quad (3.70)$$

3.2.3 Schéma intégré du Green-Picard(P.G.E.S)

Pour le traitement du problème (3.62)-(3.63), on utilise la méthode d'itération connue sous le nom de Green-Picard. Pour ce la, on définit l'opérateur intégral linéaire suivant

$$T[y] = y_h + \int_a^b G(x, s) [a_0(s) y'''(s) + a_1(s) y''(s) + a_2(s) y'(s) + a_3(s) y(s)] ds, \quad (3.71)$$

par ajouter et soustraire $f(x)$, on obtient

$$\begin{aligned} T[y] &= y_h + \int_a^b G(x, s) [a_0(s) y'''(s) + a_1(s) y''(s) + a_2(s) y'(s) + a_3(s) y(s) - f(s) + f(s)] ds, \\ &= y_h + \int_a^b G(x, s) [a_0(s) y'''(s) + a_1(s) y''(s) + a_2(s) y'(s) + a_3(s) y(s) - f(s)] ds, \\ &+ \int_a^b G(x, s) f(s) ds. \end{aligned} \quad (3.72)$$

De (3.64), nous avons

$$y_p(x) = \int_a^b G(x, s) f(s) ds = y - y_h, \quad (3.73)$$

on remplace (3.73) dans (3.72), on obtient

$$\begin{aligned} T[y] &= y_h + \int_a^b G(x, s) [a_0(s) y'''(s) + a_1(s) y''(s) + a_2(s) y'(s) + a_3(s) y(s) - f(s)] ds + y - y_h, \\ &= y + \int_a^b G(x, s) [a_0(s) y'''(s) + a_1(s) y''(s) + a_2(s) y'(s) + a_3(s) y(s) - f(s)] ds. \end{aligned} \quad (3.74)$$

Par l'itération de Picard

$$y_{n+1} = T[y_n], \quad n \geq 0,$$

le schéma d'itération (P.G.E.S) est donnée par

$$y_{n+1} = y_n + \int_a^b G(x,s) \left[a_0(s) y_n'''(s) + a_1(s) y_n''(s) + a_2(s) y_n'(s) + a_3(s) y_n(s) - f(s) \right] ds. \quad (3.75)$$

La fonction de départ y_0 est choisie pour être la solution de l'équation (3.62).

3.2.4 Analyse de convergence

Dans cette section, on concentre sur l'analyse de convergence de la méthode présentée. La preuve s'applique sur l'équation différentielle non linéaire suivante

$$y'''(x) = F(x, y(x), y'(x), y''(x)), x \in [0, 1], \quad (3.76)$$

avec les conditions aux bords suivantes

$$y(0) = \alpha, y'(0) = \beta, y(1) = \gamma. \quad (3.77)$$

D'abord, on trouve la fonction de Green pour l'opérateur linéaire $L[y] = y'''$ et les conditions aux bords (3.77). par utilisée (3.66) et Remarque 3.2.4, on obtient

La solution générale de l'équation homogène est

$$y_h = ax^2 + bx + c,$$

ainsi, la fonction de Green à la forme suivant

$$G(x,s) = \begin{cases} c_1 x^2 + c_2 x + c_3, & 0 < x < s, \\ d_1 x^2 + d_2 x + d_3, & s < x < 1. \end{cases} \quad (3.78)$$

La condition $G(0,s) = 0$ pour $0 < x < s$, implique que $c_3 = 0$, et La condition $G'(0,s) = 0$ pour $0 < x < s$, implique que $c_2 = 0$.

Enfin, $G(1,s) = 0$ pour $s < x < 1$, implique que

$$d_1 + d_2 + d_3 = 0. \quad (3.79)$$

Ainsi

$$G(x,s) = \begin{cases} c_1 x^2, & 0 < x < s, \\ d_1 x^2 + d_2 x + d_3, & s < x < 1. \end{cases} \quad (3.80)$$

Depuis $G(x,s)$ est continue à $x = s$, alors

$$c_1 s^2 = d_1 s^2 + d_2 s + d_3. \quad (3.81)$$

Aussi, $G'(x,s)$ est continue à $x = s$, donc

$$2c_1 s = 2d_1 s + d_2. \quad (3.82)$$

A partir de la condition de saut, nous avons

$$\begin{aligned} G''(s^+, s) - G''(s^-, s) &= 1, \\ 2d_1 - 2c_1 &= 1. \end{aligned} \quad (3.83)$$

Depuis (3.79), (3.81), (3.82) et (3.83), nous avons

$$\begin{aligned} a_1 &= -\frac{1}{2}s^2 + s - \frac{1}{2}, & d_1 &= -\frac{1}{2}s^2 + s, \\ d_2 &= -s, & d_3 &= \frac{1}{2}s^2. \end{aligned} \quad (3.84)$$

Donc

$$G(x, s) = \begin{cases} \left(-\frac{1}{2}s^2 + s - \frac{1}{2}\right)x^2, & 0 < x < s, \\ \frac{1}{2}s^2 - sx + \left(-\frac{1}{2}s^2 + s\right)x^2, & s < x < 1. \end{cases} \quad (3.85)$$

Par conséquent, la solution particulière y_p de problème (3.76)-(3.77) est donnée par

$$y_p(x) = \int_0^1 G(x, s) F(s, y_p(s), y_p'(s), y_p''(s)) ds. \quad (3.86)$$

Nous définissons l'opérateur intégrale suivant

$$T[y_p] = \int_0^1 G(x, s) [y_p'''(s)] ds, \quad (3.87)$$

Pour plus de facilité, nous posons que $y = y_p$. En suivant une étape similaire à celle-ci dans [section 3.2.3](#), nous ajoutons et soustrayons F . Ainsi, en utilisant (3.86), on obtient

$$T[y] = y + \int_0^1 G(x, s) [y'''(s) - F(s, y(s), y'(s), y''(s))] ds. \quad (3.88)$$

En appliquant la méthode d'itération P.G.E.S pour le problème (3.76)-(3.77), on trouve

$$y_{n+1}(x) = y_n(x) + \int_0^1 G^*(x, s) [y_n'''(s) - F(s, y_n(s), y_n'(s), y_n''(s))] ds, \quad (3.89)$$

où $G^*(x, s)$ est l'adjoint de la fonction de Green donnée par

$$G^*(x, s) = - \begin{cases} \frac{1}{2}s^2 - sx + \left(-\frac{1}{2}s^2 + s\right)x^2, & 0 < s < x, \\ \left(-\frac{1}{2}s^2 + s - \frac{1}{2}\right)x^2, & x < s < 1. \end{cases} \quad (3.90)$$

Plus précisément, on obtient l'itération suivant

$$\begin{aligned} y_{n+1}(x) &= y_n(x) - \int_0^x \left(\frac{1}{2}s^2 - sx + \left(-\frac{1}{2}s^2 + s\right)x^2\right) [y_n'''(s) - F(s, y_n(s), y_n'(s), y_n''(s))] ds \\ &\quad - \int_x^1 \left(\left(-\frac{1}{2}s^2 + s - \frac{1}{2}\right)x^2\right) [y_n'''(s) - F(s, y_n(s), y_n'(s), y_n''(s))] ds, \end{aligned} \quad (3.91)$$

où y_n est l'approximation de la solution particulier.

Théorème 3.2.2

Supposons que $F(s, y, y', y'')$ est une fonction continue, dont la dérivée est bornée par rapport à y . Supposons que

$$K := \frac{2}{81}L_c < 1,$$

où

$$L_c = \max \left| \frac{\partial F}{\partial y} \right|.$$

Alors, la suite itération $\{y_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ donnée par (3.91) où $x \in [0, 1]$ et en utilisant n'importe quelle fonction de départ bornée sur $[0, 1]$, convergence uniformément vers la solution exacte $y(x)$ du problème (3.76)-(3.77).

Preuve

Soit $\mathcal{C}[0, 1]$ l'espace des fonction muni de la norme maximale définie par

$$\|y\| = \max_{0 \leq x \leq 1} |y(x)|.$$

Etape 01 : Nous commençons par calculer l'intégrale suivant trois fois par parties, en tenant compte du fait que G^*, G_s^* sont continus en $[0, 1]$ et G_{ss}^* à une discontinuité de saute , on trouve

$$I = \int_0^1 G^*(x, s) y'''(s) ds,$$

on a

$$u = G^*(x, s) \quad u' = G_s^*(x, s),$$

$$dv = y'''(s) \quad v = y''(s),$$

alors,

$$I = G^*(x, 1)y''(1) - G^*(x, 0)y''(0) - \int_0^1 G_s^*(x, s)y''(s) ds. \quad (3.92)$$

Ensuite, nous répétons le même argument deux fois, nous obtenions

$$\begin{aligned} I &= G^*(x, 1)y''(1) - G^*(x, 0)y''(0) - G_s^*(x, 1)y'(1) + G_s^*(x, 0)y'(0) \\ &\quad + G_{ss}^*(x, 1)y(1) - G_{ss}^*(x, 0)y(0) - \int_0^1 G_{sss}^*(x, s)y(s) ds. \end{aligned} \quad (3.93)$$

On remplace (3.93) dans le schéma itérative (3.89), on obtient

$$\begin{aligned} y_{n+1}(x) &= y_n(x) + G^*(x, 1)y_n''(1) - G^*(x, 0)y_n''(0) - G_s^*(x, 1)y_n'(1) \\ &\quad + G_s^*(x, 0)y_n'(0) + G_{ss}^*(x, 1)y_n(1) - G_{ss}^*(x, 0)y_n(0) \\ &\quad - \int_0^1 G_{sss}^*(x, s)y_n(s) ds - \int_0^1 G^*(x, s)F(s, y_n(s), y_n'(s), y_n''(s)) ds, \end{aligned} \quad (3.94)$$

on a $G_{sss}^*(x, s) = \delta(x - s)$, alors

$$\int_0^1 G_{sss}^*(x, s) y_n(s) ds = y_n(x).$$

De plus, la fonction de Green satisfait les condition aux bords $G^*(x, 0) = G^*(x, 1) = 0$ et y_n satisfait les condition aux bords (3.77). Donc la dernière équation se simplifie en

$$\begin{aligned} y_{n+1}(x) &= \beta G_s^*(x, 0) - G_s^*(x, 1) y_n'(1) + \gamma G_{ss}^*(x, 1) \\ &\quad - \alpha G_{ss}^*(x, 0) - \int_0^1 G^*(x, s) F(s, y_n(s), y_n'(s), y_n''(s)) ds. \end{aligned} \quad (3.95)$$

D'après (3.90), nous avons $G_s^*(x, 0) = x - x^2$, $G_s^*(x, 1) = 0$, $G_{ss}^*(x, 0) = x^2 - 1$ et $G_{ss}^*(x, 1) = x^2$, par conséquence

$$\begin{aligned} y_{n+1}(x) &= \beta(x - x^2) + \gamma x^2 - \alpha(x^2 - 1) - \int_0^1 G^*(x, s) F(s, y_n(s), y_n'(s), y_n''(s)) ds \\ &= \alpha + \beta x + (\gamma - \alpha - \beta)x^2 - \int_0^1 G^*(x, s) F(s, y_n(s), y_n'(s), y_n''(s)) ds \end{aligned} \quad (3.96)$$

Etape 02 : On définit un nouvel opérateur

$$T_G : \mathcal{C}[0, 1] \rightarrow \mathcal{C}[0, 1],$$

comme suit

$$T_G[y] = \alpha + \beta x + (\gamma - \alpha - \beta)x^2 - \int_0^1 G^*(x, s) F(s, y(s), y'(s), y''(s)) ds \quad (3.97)$$

D'après le théorème de Banach-Picard, pour montre la convergence nous devons montre que T_G est contractante. A cette fine, on a

$$|T_G(y) - T_G(v)| = \left| \int_0^1 G^*(x, s) [F(s, y, y', y'') - F(s, v, v', v'')] ds \right|, \quad (3.98)$$

et essayer de trouve l'estimation appropriée, considérons

$$h(x) = \int_0^1 |G^*(x, s)| ds, \quad (3.99)$$

on va calculée l'intégration de la fonction de Green séparément, comme suit

$$\begin{aligned} J_1 &= - \int_0^x \left(\frac{1}{2}s^2 - sx + \left(-\frac{1}{2}s^2 + s \right) x^2 \right) ds = \frac{x^5}{6} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^3}{3}, \\ J_2 &= - \int_x^1 \left(-\frac{1}{2}s^2 + s - \frac{1}{2} \right) x^2 ds = \frac{x^2}{6} - \frac{x^5}{6} + \frac{x^4}{2} - \frac{x^3}{3}. \end{aligned} \quad (3.100)$$

Par simplification, on obtient

$$h(x) = J_1 + J_2 = \frac{x^2}{6} - \frac{x^3}{6}. \quad (3.101)$$

Par conséquence, la valeur extrême de $h(x)$ sur $[0, 1]$ est

$$h(x) = \int_0^1 |G^*(x, s)| ds \leq \frac{2}{81}. \quad (3.102)$$

En appliquant le théorème de la valeur moyenne pour F , on trouve

$$\begin{aligned} |T_G(y) - T_G(v)| &\leq \int_0^1 |G^*(x, s)| \left| F(s, y, y', y'') - F(s, v, v', v'') \right| ds, \\ &\leq \max_{0 \leq x \leq 1} [|F_y| |y - v|] \int_0^1 |G^*(x, s)| ds, \\ &\leq \frac{2}{81} L_c \max_{0 \leq x \leq 1} |y - v| \\ &= \frac{2}{81} L_c \|y - v\|, \end{aligned} \quad (3.103)$$

où

$$\|y - v\| = \max_{0 \leq x \leq 1} |y(x) - v(x)|, L_c = \max_{[0,1] \times \mathbb{R}^3} \left| \frac{\partial}{\partial y} F(s, y, y', y'') \right|.$$

En utilisant le fait que $K = \frac{2}{81} L_c < 1$, on obtient

$$\|T_G(y) - T_G(v)\| \leq K \|y - v\|. \quad (3.104)$$

Donc T_G est contractante. En ce qui concerne le taux de convergence, nous avons

$$\begin{aligned} \|y_{n+1} - y_n\| &= \|T_G(y_n) - T_G(y_{n-1})\| \\ &\leq K \|y_n - y_{n-1}\| \\ &\leq K^n \|y_1 - y_0\|. \end{aligned} \quad (3.105)$$

En utilisant l'inégalité ci-dessus tels que $m > n > 0$, donc

$$\begin{aligned} \|y_m - y_n\| &\leq \|y_m - y_{m-1}\| + \dots + \|y_{n+1} - y_n\| \\ &\leq (K^{m-1} + \dots + K^n) \|y_1 - y_0\| \\ &\leq K^n (1 + K + K^2 + \dots + K^{m-n}) \|y_1 - y_0\| \\ &= \frac{K^n}{1 - K} \|y_1 - y_0\|, \end{aligned} \quad (3.106)$$

où le terme $\frac{k^n}{1-k}$ est la somme infinie des la séries géométriques. Par conséquent, si $m \rightarrow \infty$, l'erreur est

$$\|y^* - y_n\| \leq \frac{k^n}{1-k} \|y_1 - y_0\|. \quad (3.107)$$

□

Exemple 3.2.3

1. L'énoncé position du problème :

On considère le problème aux limites non linéaire suivant

$$y'''(x) + y(x)y''(x) - y'^2(x) + 1 = 0, x \in [0, 1], \quad (3.108)$$

avec les conditions aux bords

$$y(0) = y(1) = y'(0) = 0. \quad (3.109)$$

On transforme ce problème au problème de l'étude (3.76), on obtient

$$y'''(x) = y'^2(x) - y(x)y''(x) - 1, x \in [0, 1], \quad (3.110)$$

avec les conditions aux bords

$$y(0) = y(1) = y'(0) = 0. \quad (3.111)$$

Le problème (3.108)-(3.109) n'a pas de solution exacte connue.

2. L'itération de la méthode P.G.E.S :

Etape 01 : calculer de la fonction de Green

On trouve la fonction de Green pour l'opérateur linéaire $L[y] = y'''$ avec les conditions aux bords (3.111). On appliquant les propriétés (3.67), (3.68), (3.69) et (3.70), on obtient

$$G(x, s) = \begin{cases} \left(-\frac{1}{2}s^2 + s - \frac{1}{2}\right)x^2, & 0 < x < s, \\ \frac{1}{2}s^2 - sx + \left(-\frac{1}{2}s^2 + s\right)x^2, & s < x < 1. \end{cases} \quad (3.112)$$

Etape 02 : le schéma d'itération de P.G.E.S

On applique le schéma d'itération de P.G.E.S (3.89) où l'itération initiale y_0 est la solution d'équation homogène linéaire $L[y] = y''' = 0$ avec les conditions aux bords (3.111), on obtient

$$\begin{aligned} y_0 &= 0, \\ y_{n+1}(x) &= y_n(x) - \int_0^x \left(\frac{1}{2}s^2 - sx + \left(-\frac{1}{2}s^2 + s\right)x^2\right) [y_n'''(s) + y_n(s)y_n''(s) - y_n'^2(s) + 1] ds \\ &\quad - \int_x^1 \left(\left(-\frac{1}{2}s^2 + s - \frac{1}{2}\right)x^2\right) [y_n'''(s) + y_n(s)y_n''(s) - y_n'^2(s) + 1] ds. \end{aligned} \quad (3.113)$$

Remarque 3.2.5

Des résultats numériques sont donnés pour illustrer la convergence et l'efficacité de la stratégie. Puisqu'il n'y a pas de solution de forme fermée pour cet exemple, nous estimons l'erreur en y_{n+1} par

$$Err(n) = |y_{n+1} - y_n|.$$

Le tableau (3.2) présente les erreurs maximales du P.G.E.S pour différents nombres d'itérations, ce qui indique sa grande précision et convergence rapide, à partir de ce tableau, nous considérons y_{10} comme représentant la vraie solution.

Itération	2	3	4	5	6
Erreur(n)	1.2×10^{-4}	1.2×10^{-7}	7.2×10^{-9}	5.5×10^{-11}	4.2×10^{-13}
Itération	7	8	9	10	
Erreur(n)	3.2×10^{-15}	2.5×10^{-17}	9.7×10^{-19}	9.7×10^{-22}	

TABLE 3.2 – Erreur maximale en utilisant P.G.E.S pour différents nombres d'itérations.

Exemple 3.2.4

1. L'énoncé position du problème :

On considère le problème aux limites non linéaire suivant

$$y'''(x) + 2e^{-3y(x)} = \frac{4}{(1+x)^3}, x \in [0, 1], \quad (3.114)$$

avec les conditions aux bords

$$y(0) = y'(0) = 1, y(1) = \ln 2. \quad (3.115)$$

On transforme ce problème au problème de l'étude (3.76), on obtient

$$y'''(x) = \frac{4}{(1+x)^3} - 2e^{-3y(x)}, x \in [0, 1], \quad (3.116)$$

avec les conditions aux bords

$$y(0) = y'(0) = 1, y(1) = \ln 2. \quad (3.117)$$

La solution exacte du problème (3.114)-(3.115) donnée par

$$y(x) = \ln(x+1).$$

2. L'itération de la méthode P.G.E.S :

Etape 01 : calculer de la fonction de Green

On trouve la fonction de Green pour l'opérateur linéaire $L[y] = y'''$ avec les conditions aux bords (3.115). On applique les propriétés (3.67), (3.68), (3.69) et (3.70), on obtient

$$G(x, s) = \begin{cases} \left(-\frac{1}{2}s^2 + s - \frac{1}{2}\right)x^2, & 0 < x < s, \\ \frac{1}{2}s^2 - sx + \left(-\frac{1}{2}s^2 + s\right)x^2, & s < x < 1. \end{cases} \quad (3.118)$$

Etape 02 : le schéma d'itération de P.G.E.S

On applique le schéma d'itération de P.G.E.S (3.89) où l'itération initiale y_0 est la solution d'équation homogène linéaire $L[y] = y''' = 0$ avec les conditions aux bords (3.115), on obtient

$$y_0 = (\ln 2 - 2)x^2 + x + 1,$$

$$y_{n+1}(x) = y_n(x) - \int_0^x \left(\frac{1}{2}s^2 - sx + \left(-\frac{1}{2}s^2 + s\right)x^2 \right) \left[y_n'''(s) + 2e^{-3y_n(s)} - \frac{4}{(1+s)^3} \right] ds \quad (3.119)$$

$$- \int_0^x \left(\left(-\frac{1}{2}s^2 + s - \frac{1}{2}\right)x^2 \right) \left[y_n'''(s) + 2e^{-3y_n(s)} - \frac{4}{(1+s)^3} \right] ds.$$

Remarque 3.2.6

Le schéma itératif (3.119) est utilisé pour générer des solutions numériques pour l'exemple 3.2.4, les erreurs absolues maximales $|y_n(x) - y(x)|$ pour différents nombres d'itérations sont rapporté dans le tableau (3.3)

Itération	2	4	6	8	10
Erreur(n)	1.6×10^{-5}	1.1×10^{-8}	7.3×10^{-12}	5.0×10^{-15}	3.3×10^{-12}
Itération	12	16	21	26	31
Erreur(n)	2.2×10^{-21}	9.6×10^{-28}	4.9×10^{-36}	1.8×10^{-46}	1.2×10^{-51}

TABLE 3.3 – Erreur maximale en utilisant P.G.E.S pour différents nombres d'itération.

Bibliographie

- [1] A.Atallah, N.Guitoubi, Résolution d'une équation différentielle du second ordre par la méthode des ondelettes, thèse de mastre, université d'Eloued. 2019-2020.
- [2] A.Cabada, J.A.Cid, B.M.Villamarin, Computation of Green's fonctions for boundary value probleme with mathimatica. 2012.
- [3] A.Cabada, Green's fonctions in the theory of ordinary differential equation. 2013.
- [4] A.Cabada, The methode of lower and apper solution for second, third, fourth and higher orderboundary value probleme.
- [5] A.Kaeloufi, Cour's de equations différentielles, Université de Béjaia. 2014-2015.
- [6] A.Tami, Equations différentielles ordinaires cours et exercices d'applications , université d'Oran. 2016-2017.
- [7] K.Kheloufi - Mebarki, Quelques résultats sur les E.D.O linéaires du second ordre. Université de Béjaia.
- [8] M.Abushammala, S.Khuri, A.Sayfy,(2015). A novel fixed point iteration method for the solution of third order boundary value problems. Applied Mathematics and Computation, 271, 131-141.
- [9] S.A.Kuri, A.Sayfy. A fixed point iteration method using Green's functions for the solution of nonlinear boundary value problems over semi-infinite intervals. International journal of computer mathematics. <https://doi.org/10.1080/00207160.2019.1615618>.
- [10] T.Morsli, M.Boukhab, A.Doudai. L'oscillation des équations différentielles. Thèse de mastre. Université de Ibn kaldoun-Tiaret. 2019-2020.

Résumé

Dans ce travail, nous avons présenté une méthode itérative basée sur l'implication de la fonction de Green associée à des équations différentielles ordinaires d'ordre n à coefficient constants avec différentes conditions aux bords.

Mots clés : fonction de Green, équations différentielles ordinaires, la méthode P.G.E.S.

Abstract

In this work, we presented an iterativ method based on the use of the well know Green's function for some ordinary differential equations of order n with constant coefficients associated to severd boundary conditions.

Key words : Green's function, ordinary differential equations , Picard's Green's Embedded Scheme.

المخلص

في هذا العمل، قدمنا طريقة تكرارية تستند الى استخدام دالة قرين المرتبطة بالمعادلات التفاضلية العادية من الرتبة n مع معاملات ثابتة بشروط حدية مختلفة.

الكلمات المفتاحية : دالة قرين، المعادلات التفاضلية العادية، الطريقة التكرارية لقرين و بيكارد.