République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de La Recherche Scientifique
Université Djilali Bounaâma-Khemis Miliana
Faculté des Sciences et de la technologie
Département de Mathématiques et informatique

Approximation de (Hermite)-Padé et irrationalité

Présenté par :

Benzohra Imene

Encadrant :
Ali Krelifa
Président :
Omar Benniche
Examinateurs :

1- Boualem Sadaoui

2- Yousef Naas

Niveau : Master 2 Analyse Mathématique et Applications

Année universitaire : 2022-2023

Table des matières

Introduction

Chapitre 1 *Rappel sur les polynômes orthogonaux*

1.1 Fonctionnelle moment et orthogonalité . . . 7

1.2 Polynôme orthogonaux . . . 8

1.2.1 Existence des suites de polynômes orthogonaux . . . 10

1.2.2 Relation de récurrence . . . 11

1.2.3 Racines des polynômes orthogonaux . . . 14

1.3 Les fractions continues . . . 15

1.3.1 Fraction continue et relation de récurrence : . . . 17

Chapitre 2 *La méthode de l'approximation de Padé*

2.1 L'approximation de Padé . . . 20

2.1.1 Polynôme du Taylor . . . 20

2.2 Calcul Analytique . . . 25

2.2.1 Quelque propriétés : . . . 30

2.2.2 Table de Padé : . . . 32

Chapitre 3 *Application*

3.1 L'approximation de Padé et polynôme orthogonal . . . 35

3.2 Temporisation et l'approximation de Padé : . . . 38

3.2.1 Approximation des fonctions de transfert temporises . . . 40

Bibliographie

Remerciement

Et parce que les études sont avant tout, ce travail et le fruit de 5 années d' études .
Je remercie Dieu qui m'a destiné à cela et m'a aidé à arriver ici, j'ai eu l'honneur d'étudier avec vous et tout cela est grâce à lui.
Sincères remerciements et appréciation au professeur d'encadrement, M. Ali Kerlifa. Je le remercie de m'avoir encadré, orienté, aidé et conseillé.
Je tiens également à remercier le professeur M.Chaouchi de m'avoir aidé à terminer cette recherche.
Nos vifs remerciements aux membres des jurys M. Omar Benniche et M. Boualem Sadaoui et M. Yousef Naas pour avoir accepté d'examiner notre modeste travail .
J'adresse mes sincères remerciements et ma gratitude à tous les professeurs de mathématiques qui m'ont enseigné et m'ont fait bénéficier de leurs connaissances au cours de mon parcours universitaire, sans oublier les personnes qui m'ont poussé à atteindre ce stade. Merci beaucoup à mes parents et frères et à tous qui m'a soutenu. À tous ces intervenants, je présente mes remerciements, mon respect et ma gratitude.

Résume

Le but de cette étude est de donne une idée sur les approximations aux sens de Padé et verrons sa signification et ses caractéristiques les plus importantes, et étudierons comment la calculer et leurs applications dans l'analyse mathématique et informatique.

Introduction

En mathématiques, la convergence a été si cruciale qu'elle a fait l'objet d'un Grand prix de l'Académie des sciences de Paris en 1906, remporté par Padé lui-même [15] .
Lorsqu'il est difficile de trouver une solution à un problème, nous avons recours à "l'approximation", qui est une méthode numérique pour étendre une fonction à un polynôme (qui a des propriétés meilleures et plus faciles), et nous facilite ainsi la résolution du problème complexe.

En 1892, Henri Padé a mis sa Thèse (sur l'approximation), il a posé le problème comme suit : Soit la fonction f tel que :

$$f(x) = c_0 + c_1 x^1 + c_2 x^2 + \ldots$$

donc on va trouver un ensemble de fractions rationnelles qui sont en relation avec le variable x qui approxime $f(x)$ au voisinage de 0.

La solution du problème est donnée par les approximant de Padé, cette solution présente simplement l'avantage de calculer facilement en accélérant la convergence de la série initial.
Henri Padé $(1863 - 1953)$ a révolutionné l'approche des fractions continues en cherchant à construire des fractions rationnelles qui approximaient au mieux localement une fonction analytique donnée, tout en limitant les degrés des numérateurs et des dénominateurs. Ses travaux ont permis de classer les fractions continues et de construire toutes les fractions continues régulières de la fonction exponentielle.
Avec le développement de l'informatique, les polynômes orthogonaux sont devenus des outils d'approximation très utiles, et pour cette raison resteront les études de ces polynômes .

Cette mémoire étudiera l'approximation de Padé en générale en donnant les définitions et les théorèmes et quelque proposition concernant les calcules des approximations.
Dans le premier chapitre de cette recherche, nous découvrirons les polynômes orthogonaux, leurs propriétés les plus importantes, et verrons les fractions continues, ce qui nous aide à comprendre le contenu du deuxième chapitre.

Dans le deuxième chapitre, nous aborderons l'une des meilleures façons d'approximer une fonction, qui est « l'approximation de Padé ». Nous verrons sa signification et ses caractéristiques les plus importantes, et étudierons comment la calculer.

Enfin, nous voyons son utilité et comment l'utiliser dans le troisième chapitre .

CHAPITRE 1

Rappel sur les polynômes orthogonaux

1.1 Fonctionnelle moment et orthogonalité

1. Sur l'intervalle $I =]a,b[\in \mathbb{R}$, avec $(-\infty \leq a < b \leq +\infty)$ on introduit la fonction Φ est une fonction intégrable a valeur réelles strictement positive suivent :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_a^b \mid x^n \mid \Phi(x)dx < \infty$$

La fonction Φ est dite fonction poids sur I.

2. Supposons que $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base canonique de l'espace $R[x]$ (l'espace vectoriel des fonctions polynomiales à coefficient réels).

Remarque :

On peut écrire la fonction e_n par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, e_n(x) = x^n.$$

Définition 1.1. *La suite* $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mu_n = \int_a^b x^n \Phi(x)dx$$

est dite suite des moment associés à la fonction poids Φ *sur* I.

Remarque : On a

$$\langle e_n | e_m \rangle = \mu_{n+m}, \quad \text{pour } n,m \in \mathbb{N}$$

Définition 1.2. *Soit* $\{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$ *une suite de nombres complexes .*
Une forme linéaire L est dite fonctionnelle moment déterminée par la suite formelle des moments $\{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$ *si elle vérifie pour tout nombre complexe* α_i *et tout polynôme* $\pi_i(x), \quad \{i = 1,2\}$ *on a :*

$$L[x^n] = \mu_n, \quad n \geq 0$$

$$L[\alpha_1\pi_1 + \alpha_2\pi_2] = \alpha_1 L[\pi_1] + \alpha_2 L[\pi_2]$$

Remarque :

Le nombre μ_n est appelé le moment d'ordre n et si $\pi(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k$ on peut écrit $L[\pi(x)] = \sum_{k=0}^{n} c_k \mu_k$.

Définition 1.3. *On dite qu'une fonctionnelle moment L est définie positive si pour tout polynôme* $\pi(x) \geq 0$ *tel que pour tout x on a* $L[\pi(x)] > 0$ *.*

1.2 Polynôme orthogonaux

Définition 1.4. *On appelle la suite* $\{P_n(x)\}_{n\geq 0}$ *une suite de polynômes orthogonaux par rapport à la fonctionnelle moment L si :*

(i) P_n *est un polynôme de degré n,*

(ii) $L[P_m P_n] = 0, \quad m \neq n$ *et* $m,n \geq 0,$

(iii) $L[P_n^2] \neq 0, \quad n \geq 0.$

Exemple :

La suite de polynôme de Tchebychev de première espèce pour $n \in \mathbb{N}$,

$$T_n(x) = cosn\theta, \quad \theta \in [-\pi, \pi]$$

est orthogonal a la fonction de poids $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, i.e. ;

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} T_n(x) T_m(x) dx = 0, \quad (n \neq m)$$

En effet par le changement de variable $x = cos\theta$

On a

$$\begin{cases} dx = -sin\theta d\theta = -\sqrt{1-(cos\theta)^2} d\theta \\ \theta = arccos(x) \end{cases}$$

Donc

$$I = \int_{-1}^{1} T_n(x) T_m(x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_{-1}^{1} T_n(x) T_m(x) \frac{dx}{\sqrt{1-(cos\theta)^2}}$$

$$I = \int_{\pi}^{0} cos(n\theta) cos(m\theta) \left(\frac{1}{\sqrt{1-(cos\theta)^2}}\right)\left(-\sqrt{1-(cos\theta)^2} d\theta\right).$$

$$= \int_{0}^{\pi} cos(n\theta) cos(m\theta) d\theta.$$

Remarquons que

$$cos((n+m)\theta) + cos((n-m)\theta) = 2cos(n\theta)cos(m\theta)$$

alors

$$I = \frac{1}{2} \int_{0}^{\pi} cos((n+m)\theta) + cos((n-m)\theta) d\theta$$

1. Si $m \neq n$
$$I = \frac{1}{2} \left[\frac{sin(n+m)\theta}{n+m} + \frac{sin(n-m)\theta}{n-m} \right]_0^{\pi} = 0$$
2. Si $m = n = 0$
$$I = \int_0^{\pi} d\theta = \pi$$
3. Si $n = m \neq 0$
$$I = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (cos((n+m)\theta + 1) d\theta = \frac{\pi}{2}$$

donc

$$\int_0^{\pi} cos(n\theta)cos(m\theta)d\theta = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } n = m \neq 0 \\ 0 & \text{si } \ n \neq m \\ \pi & \text{si } n = m = 0 \end{cases}.$$

Définition 1.5. *On dit qu'une fonctionnelle moment L est régulière (ou bien admissible) si on peut lui associer une suite* $\{P_n(x)\}_{n\geq 0}$ *vérifiant les propriétés (ii) et (iii) de la définition* (1.4)*.*

1.2.1 Existence des suites de polynômes orthogonaux

Définition 1.6. *Le déterminant de Hankel d'ordre n est définie par :*

$$\triangle_n = \det[u_{i+j}]_{i,j=0}^{n} = \begin{vmatrix} u_0 & u_1 & \cdots & u_n \\ u_1 & u_2 & \cdots & u_{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_n & u_{n+1} & \cdots & u_{2n} \end{vmatrix}$$

Notation :

On note le déterminant de la matrice suivant par H_n^m

$$\begin{pmatrix} u_m & u_{m+1} & \cdots & u_{m+n-1} \\ u_{m+1} & u_{m+2} & \cdots & u_{m+k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_{m+n-1} & u_{m+n} & \cdots & u_{m+2n-2} \end{pmatrix}$$

Le théorème suivent donne l'existence d'une suite de polynôme orthogonaux :

Théorème 1.1. *Une fonctionnelle moment L dont la suite des moments est notée* $\{u_n\}$ *est régulière, si et seulement si elle vérifier le critère de Hamburger i.e ;*

$$\triangle_n = \det[u_{i+j}]_{i,j=0}^{n} \neq 0, \quad n \geq 0$$

preuve

En effet $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_{nk}x^k$

alors

$$L[x^m P_n(x)] = \sum_{k=0}^{n} c_{nk} u_{k+m} = k_n \delta_{nm}, \quad k_n \neq 0, \quad m \leq n$$

$$\Longleftrightarrow \begin{vmatrix} u_0 & u_1 & \cdots & u_n \\ u_1 & u_2 & \cdots & u_{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_n & u_{n+1} & \cdots & u_{2n} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_{n0} \\ c_{n1} \\ \vdots \\ c_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ k_{nn} \end{vmatrix}$$

De plus $L[x^m P_n(x)]$ admet une solution unique si et seulement si pour tout naturel n, $\triangle_n = \det[u_{i+j}]_{i,j=0}^{n} \neq 0$

1.2.2 Relation de récurrence

Les polynômes orthogonaux sont caractérises par une relation de récurrence, i.e, Chaque polynôme T_n admet une relation de récurrence.

Proposition 1.1

Soit $\{P_n(x)\}_{n\geq 0}$ une suite de polynôme orthogonale par rapport à une fonctionnelle moment régulière L. La suite $\{P_n(x)\}_{n\geq 0}$ vérifie la relation récurrence d'ordre deux suivante :

$$P_{n+1}(x) = (x - \beta_n) P_n(x) - \gamma_n P_{n-1}(x), \quad n \geq 0$$

où $P_{-1}(x) = 0$, γ_0 est une constante arbitraire et $\gamma_n \neq 0, \forall n \geq 1$.

Exemple :

1- Les polynômes de Tchebychev de seconde espèce $\forall n \in \mathbb{N}$, $T_n(cos\theta) = \dfrac{sin((n+1)\theta)}{sin\theta}$, $\theta \in [-\pi, \pi]$ est vérifie la relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} T_0(x) = 1 \\ T_1(x) = 2x \\ T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x). \end{cases}$$

En effet Par récurrence

1.1 Pour $n = 0$

$$T_0(x) = \frac{sin((1)\theta)}{sin\theta} = 1$$

Et pour $n = 1$:

$$T_1(x) = \frac{sin((2)\theta)}{sin\theta}$$

$$T_1(x) = \frac{2sin(\theta)cos(\theta)}{sin\theta} = 2cos(\theta)$$

alors

$$T_1(x) = 2x$$

1.2 Suppose que la relation est vrai d'ordre n et pour $n+1$ on a :

$$T_{n+1}(x) = \frac{sin((n+2)\theta)}{sin\theta}$$

$$= \frac{sin((n+1)\theta+\theta)}{sin\theta} = \frac{sin((n+1)\theta)cos(\theta)+cos((n+1)\theta)sin(\theta)}{sin\theta}$$

Remarque :

$$sin((n+1)\theta)+sin((n-1)\theta) = 2sin(n\theta)cos(\theta)$$

$$sin((n+1)\theta) = 2sin(n\theta)cos(\theta)-sin((n-1)\theta)$$

si on divise sur $sin(\theta)$ on trouve :

$$\frac{sin((n+1)\theta)}{sin(\theta)} = 2cos(\theta)\frac{sin(n\theta)}{sin(\theta)} - \frac{sin((n-1)\theta)}{sin(\theta)}$$

donc

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

d'où la résultat.

2- Les polynôme de Hermite de degré n est $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}$ vérifier la relation de récurrence suivent :

$$\begin{cases} H_0(x) = 1 \\ H_1(x) = 2x \\ H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - H'_n(x). \end{cases}$$

Ainsi, par récurrence :

2.1 Pour $n = 0$:

$$H_0(x) = (-1)^0 e^{x^2}\frac{d^0}{dx^0}e^{-x^2}$$
$$= e^{x^2}e^{-x^2} = 1$$

pour $n=1$:

$$H_1(x) = -e^{x^2}\frac{d}{dx}e^{-x^2} = 2xe^{x^2}e^{-x^2}$$

$$H_1(x) = 2x$$

2.2 Supposent que la relation est vrai d'ordre n et pour $n+1$ on a :

$$H_n'(x) = (-1)^n \left[2xe^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2} + e^{x^2}\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}e^{-x^2}\right]$$

$$H_n'(x) = 2x(-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2} + (-1)^{-1}(-1)^{n+1}e^{x^2}\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}e^{-x^2}$$

donc

$$H_n'(x) = 2xH_n(x) - H_{n+1}(x)$$

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - H_n'(x)$$

d'où la résultat.

3- Les polynômes de Laguerre

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!}h_n^{(n)}(x) \text{ avec } h_n(x) = x^n e^{-x}.$$

sont vérifier la relation de récurrence suivant :

$$(n+1)L_{n+1} + (X-2n-1)L_n + nL_{n-1} = 0.$$

En effet :

Soit la fonction génératrice du polynôme de Laguerre

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)t^n = \frac{e^{\frac{-xt}{1-t}}}{1-t}$$

On dérive cette fonction par rapport a t on trouve

$$\sum_{n=0}^{\infty} nL_n(x)t^{n-1} = \frac{e^{\frac{-xt}{1-t}}}{(1-t)^2} - \frac{xe^{\frac{-xt}{1-t}}}{(1-t)^3}$$

alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} nL_n(x)t^{n-1} = \frac{1}{1-t}\left[\frac{e^{\frac{-xt}{1-t}}}{(1-t)}\right] - \frac{x}{(1-t)^2}\left[\frac{e^{\frac{-xt}{1-t}}}{(1-t)}\right]$$

donc

$$\sum_{n=0}^{\infty} nL_n(x)t^{n-1} = \frac{1}{1-t}\sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)t^n - \frac{x}{(1-t)^2}\sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)t^n$$

On multiple cette equation par $(1-t)^2$

$$(1-t)^2\sum_{n=0}^{\infty} nL_n(x)t^{n-1} = (1-t)\sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)t^n - x\sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)t^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} nL_n(x)t^{n-1} - 2\sum_{n=0}^{\infty} nL_n(x)t^n + \sum_{n=0}^{\infty} nL_n(x)t^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)t^n - \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)t^{n+1} - x\sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)t^n$$

Par la comparaison de coefficient de t^n on trouve :

$$(n+1)L_{n+1}(x) - 2nL_n(x) + (n-1)L_{n-1}(x) = L_n(x) - L_{n-1}(x) - xL_n(x)$$

$$(n+1)L_{n+1}(x) = L_n(x) - nL_{n-1}(x) + 2nL_n(x) - xL_n(x)$$

donc

$$(n+1)L_{n+1}(x) = (2n - x + 1)L_n(x) - nL_{n-1}(x)$$

d'où la résultat.

Théorème 1.2. *"Théorème de Favard"*

Soient $\{\beta_n\}_{n\geq 0}$ et $\{\gamma_n\}_{n\geq 0}$ deux suites de nombres complexes et $\{P_n\}_{n\geq 0}$ une suite définie par la relation de récurrence :

$$\begin{cases} P_{n+1}(x) = (x - \beta_n)P_n(x) - \gamma_n P_{n-1}(x) \\ P_{-1}(x) = 0, \quad P_0(x) = 1, \end{cases} \tag{1.1}$$

alors, il existe une fonctionnelle moment L unique telle que $L[1] = \mu_0 = \gamma_0$ et

$$L[P_m P_n] = 0, \text{ si } m \neq n \geq 0$$

De plus, L est régulière si et seulement si $\gamma_n \neq 0, \quad n \geq 0,$ et L est définie positive si et seulement si β_n sont réel et les $\gamma_n > 0, \quad n \geq 0$.

1.2.3 Racines des polynômes orthogonaux

Théorème 1.3. *Soit $\{P_n\}$ une suite de polynôme orthogonaux par rapport a la fonction poids ϕ dans l'intervalle non vide $]a,b[$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, le polynôme P_n admet n racines réelles simples dans $]a,b[$.*

Preuve

1- Si $n = 1$, P_1 est de degré 1 alors il s'annule au plus une fois.

2- Supposons que P_n ne changé pas le signe sur $]a,b[$ pour tout $n \geq 1$ alors :

$$\langle P_n, P_0 \rangle = \int_a^b P_n(x)P_0(x)\Phi(x)dx$$

$$\langle P_n, 1\rangle = \int_a^b P_n(x)\Phi(x)dx \neq 0$$

mais$\langle P_n, 1\rangle = 0$ contradiction. Donc il existe une racine réelle de P_n dans $]a,b[$.

3- Supposons que P_n admet un racine α_1 de multiplicité $j \geq 2$ dans $]a,b[$ alors on a :

$$P_n(x) = (x-\alpha_1)^2 Q_{n-2}(x), \text{ avec } Q_{n-2} \in R_{n-2}[x]$$

alors :

$$\langle P_n, Q_{n-2}\rangle = 0$$

mais

$$\langle P_n, Q_{n-2}\rangle = \int_a^b (x-\alpha_1)^2 Q_{n-2}^2(x)\Phi(x)dx > 0$$

donc tout les racines de P_n dans $]a,b[$ sont simple .

4- Soit $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_j$ les racines de P_n, $j < n$ on effet :

$$P_n(x) = \prod_{k=1}^{j}(x-\alpha_k)Q_{n-j}(x),$$

avec $Q_{n-j} \in R_{n-j}[x]$ et ne changé pas ca signe sur $]a,b[$ alors :

$$\langle P_n, \prod_{k=0}^{j}(x-\alpha_k)\rangle = 0$$

mais

$$\langle P_n, \prod_{k=0}^{j}(x-\alpha_k)\rangle = \int_a^b \prod_{k=0}^{j}(t-\alpha_k)^2 Q_{n-j}(t)\phi(t)dt \neq 0$$

est impossible, donc $j = n$ et toutes les $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_j \in]a,b[$.

1.3 Les fractions continues

Définition 1.7. *On appelle fraction continue[3] toute expression de la forme :*

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\dots + \cfrac{1}{a_n}}}} \tag{1.2}$$

les quantités $a_0, a_1, ..., a_n$ sont appelés les quotients partiels et peut être considéré comme nombre naturel , nombres real ou complexe, ou bien fonctions de plusieurs variable.

Exemple :

- $\frac{61}{27} = 2 + \frac{7}{27} = 2 + \frac{1}{\frac{27}{7}} = 2 + \cfrac{1}{3 + \frac{6}{7}}$
- $\frac{256}{195} = 1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{5 + \frac{1}{12}}}$

Notation :

On peut écrire la forme (1.2) par ces termes quotients partiels , notée :

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\dots + \frac{1}{a_n}}}} = [a_0, a_1, \dots, a_n] \tag{1.3}$$

Exemple :

- $\frac{60}{26} = 2 + \cfrac{1}{3 + \frac{1}{4}} = [2,3,4]$
- $\frac{285}{86} = 3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{2 + \frac{1}{2}}}} = [3,3,5,2,2]$

1.3.1 Fraction continue et relation de récurrence :

Théorème

[3] Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suit réels avec $(a_n \neq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N})$. Si les suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux solution de l'équation de récurrence suivent :

$$\begin{cases} u_0 = 0, u_1 = b_0 \\ v_0 = 1, v_1 = a_0 \\ T_{n+1} = a_n T_n + b_n T_{n-1}, \text{ avec } (n \geq 1) \end{cases}$$

alors $\forall n \geq 1$:

$$\frac{u_n}{v_n} = \cfrac{b_0}{a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \ddots a_{n-2} + \cfrac{b_{n-1}}{a_{n-1}}}}}$$

.

Théorème

Soit $[a_0, a_1, ..., a_N]$ [6] une fraction continue finie. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$[a_0, a_1, ..., a_n] = \frac{p_n}{q_n}$$

où p_n et q_n sont des entiers définie pour tout $n \in [2, N]$:

$$\begin{cases} p_0 = a_0 \\ p_1 = a_1 a_0 + 1 \\ p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2} \end{cases}$$
$$\begin{cases} q_0 = 1 \\ q_1 = a_1 \\ q_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2} \end{cases}$$

Preuve :

Par récurrence on a

pour n=0

$$\frac{p_0}{q_0} = \frac{a_0}{1} = [a_0]$$

pour n=1

$$\begin{aligned}[a_0,a_1] &= a_0+\frac{1}{a_1}\\ &= \frac{a_0a_1}{a_1}\frac{p_1}{q_1}\end{aligned}$$

Supposons que la relation est vrai pour n et on vérifier pour $n+1$.

En effet :

$$[a_0,a_1,\ldots,a_n]=\frac{p_n}{q_n} \text{ avec } n\in[2,N-1]$$

$$[a_0,a_1,\ldots a_{n-1},a_n]=\frac{a_np_{n-1}+p_{n-2}}{a_nq_{n-1}+q_{n-2}}$$

où les p_{n-1},p_{n-2}et q_{n-1},q_{n-2} ne dépende de $a_0,a_1,\ldots,a_{n-1},a_n,a_{n+1}$ de plus, on a :

$$[a_0,a_1,\ldots,a_{n-1},a_n,a_{n+1}]=[a_0,a_1,\ldots,a_{n-1},a_n+\frac{1}{a_{n+1}}]$$

En changer a_{n+1} par $a_n+\frac{1}{a_{n+1}}$ dans l'équation précédent on trouve :

$$\begin{aligned}[a_0,a_1,\ldots a_{n-1},a_n] &= \frac{(a_n+\frac{1}{a_{n+1}})p_{n-1}+p_{n-2}}{a_n+\frac{1}{a_{n+1}}q_{n-1}+q_{n-2}}\\ &= \frac{(\dfrac{a_{n+1}a_n+1}{a_{n+1}})p_{n-1}+p_{n-2}}{(\dfrac{a_{n+1}a_n+1}{a_{n+1}})q_{n-1}+q_{n-2}}\\ &= \frac{(a_{n+1}a_n+1)p_{n-1}+a_{n+1}p_{n-2}}{(a_{n+1}a_n+1)q_{n-1}+a_{n+1}q_{n-2}}\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} &= \frac{a_{n+1}(a_np_{n-1}+p_{n-2})+p_{n-1}}{a_{n+1}(a_nq_{n-1}+q_{n-2})+q_{n-1}}\\ &= \frac{a_{n+1}p_n+p_{n-1}}{a_{n+1}q_n+q_{n-1}}\\ &= \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\end{aligned}$$

.

Corollaire 1

Pour tout $n\geq 2$, on a :

$$p_nq_{n-2}=p_{n-2}q_n+(-1)^na_n,$$

avec $p_{n-1}q_{n-2}-p_{n-2}p_{n-1}=(-1)^n$ alors

$$\frac{p_n}{q_n}=\frac{p_{n-2}}{q_{n-2}}+\frac{(-1)^na_n}{q_nq_{n-2}}$$

.

Preuve :

On utilise la relation de récurrence, pour $n \geq 2$:

$$p_n q_{n-2} - p_{n-2} q_n = (a_n p_{n-1} + p_{n-2}) q_{n-2} - p_{n-2}(a_n q_{n-1} + q_{n-2})$$

$$= a_n p_{n-1} q_{n-2} + p_{n-2} q_{n-2} - p_{n-2} a_n p_{n-1} - p_{n-2} q_{n-2}$$

$$= a_n (p_{n-1} q_{n-2} - p_{n-2} p_{n-1})$$

$$= a_n (-1)^n.$$

donc

$$p_n q_{n-2} = p_{n-2} q_n + (-1)^n a_n$$

La division sur $q_n q_{n-2}$, on trouve :

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{p_{n-2}}{q_{n-2}} + \frac{(-1)^n a_n}{q_n q_{n-2}}$$

.

CHAPITRE 2

La méthode de l'approximation de Padé

2.1 L'approximation de Padé

L'approximation de Padé est une méthode pour approche une fonction par une forme rationnel. Cette technique a été développé en 1890 par le mathématicien Henri Padé (1863-1953), Dans sa formulation, il reposait sur l'extension de la fonction sous la forme d'une fraction, son numérateur et son dénominateur deux polynômes P et Q n'ont pas de dénominateur commun.

2.1.1 Polynôme du Taylor

La formule de Taylor est une extension d'une fonction sous la forme d'un polynôme au voisinage d'un point, dont les coefficients représentent les dérivées de la fonction en un point, ainsi nommé d'après le mathématicien Brook Taylor en 1712.

Définition 2.1. *On appelle le polynôme de Taylor d'ordre n de la fonction f au point a la somme suivent :*

$$f_n(a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(a)$$

Théorème 2.1. *Soit f une fonction de classe $\mathbb{C}^n$ définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et a un point intérieure à I, alors $\forall h \in$ tel que $a+h$ dans I on a :*

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!}f^{(2)}(a) + \ldots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a) + h^n\varepsilon(h)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(a) + h^n\varepsilon(h)$$

où $\varepsilon(h)$ est une fonction tend vers 0 si h tend vers 0.

Remarque :

Si en prend x= a+h , on peut écrire la formule du Taylor sera sous la forme suivent :

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + (x-a)^n\varepsilon(x-a)$$

où $\varepsilon(x-a)$ tend vers 0 si x tend vers a.

Exemple :

1. La formule de Taylor pour la fonction $cos(x)$ en 0 a l'ordre $2n$ est :

$$cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n}\varepsilon(x)$$

2. La formule de Taylor pour la fonction $f(x) = ln(1+x)$ au point 0 d'ordre n est :

$$ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + x^n\varepsilon(x)$$

Définition 2.2. *L'approximation de Padé d'une fonction $f(x)$ est la fonction rationnelle*

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$

où P_n est un polynôme de dégrée inférieure où égal n et Q_m est un polynôme de dégrée inférieure ou égale à m, leur coefficients sont déterminé par l'équation :

$$f(x) - \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = O(x^{n+m+1})$$

Remarque :

Les deux polynôme $P_n(x)$ et $Q_m(x)$ n'ont pas de point commun facteur

Définition 2.3. *On dit qu'une fonction Analytique f admet une approximation de Padé d'ordre (n,m) sur l' intervalle $]-R,R[$, avec $R>0$ s'il existe deux polynômes non nuls P de degré n et Q de degré m premiers entre eux et un réel $r\in]0,R[$ tel que :*

$$\begin{cases} Q(0)=1 \\ f(x)=\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}+O(x^{n+m+1}) \text{ sur }]-r,r[\end{cases}$$

Remarque :

1- Pour tout $n\in\mathbb{N}$, la fraction $\dfrac{P}{1}$ est une approximation de Padé d'ordre $(n,0)$ de la fonction $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, où $P(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$.

2- On dit que l'approximation est diagonale si $n=m$, On note l'approximation de Padé d'ordre (n,m) de f par $[n/m]_f$.

Exemple :

Un approximation $[1/1]_f$ de la fonction $f(x)=ln(1-2x)$ est une fraction rationnelle de la forme $\dfrac{a+bx}{1+cx}$ telle que :

$$ln(1-2x)-\frac{a+bx}{1+cx}=O(x^2).$$

donc $a=0$, $b=-2$, $c=-1$.

d'où l'approximation de Padé de la fonction f est $\dfrac{-2x}{1-x}$

Théorème 2.2. *Soient f une fonction analytique sur l'intervalle $]-R,R[$, avec $R>0$ et $(n,m)\in\mathbb{N}$. La fonction f admet une approximation de padé [12] d'ordre (n,m) si,et seulement si, il existe deux polynômes non nuls P et Q de degré n et m premiers entre eux, un réel $r\in]0,R[$ et une fonction analytique w sur $]-r,r[$ tel que :*

$$\begin{cases} Q_m(0)=1 \\ \forall x\in]-r,r[, \quad Q_m(x)f(x)-P_n(x)=x^{n+m+1}w(x). \end{cases}$$

Preuve :

1- $(\Rightarrow)$ Soit une fonction $g(x)=Q_m(x)f(x)-P_n(x)$ et supposons que f admet une approximation de Padé d'ordre (n,m), alors la fonction g est développable en série entière sur $]-R,R[$.

Si on prendre $M = sup\{Q_m(x), x \in [-r,r]\}$, il existe un réel M' telle que :

$$\begin{aligned}\forall x \in]-r,r[, |g(x)| &= |Q_m(x)f(x) - P_n(x)| \\ &\leq |Q_m(x)||f(x) - \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}| \\ &\leq M \mid x^{n+m+1}\varepsilon(x) \mid \\ &\leq MM' \mid x^{n+m+1} \mid .\end{aligned}$$

donc $g(x) = O(x^{n+m})$. Puisque le développement limité d'ordre $n+m$ en 0 est unique, on peut déduit que :

$$\forall x \in]-R,R[, g(x) = \sum_{k=n+m+1}^{+\infty} a_k x^k = x^{n+m+1}w(x)$$

avec w développable en série entière sur $]-R,R[$

2- $(\Leftarrow)$ Supposons que la fonction w est analytique sur $]-r,r[$ où $r \in]0,R]$ et qu'il existe deux polynômes premiers entre eux P_n et Q_n non nuls tels que :

$$\forall x \in]-r,r[, Q_m(x)f(x) - P_n(x) = x^{n+m+1}w(x)$$

En effet

Pour r petit et posons que $Q(x) \neq 0$, $\forall x \in [-r,r]$ et :

$$\begin{aligned}|f(x) - \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}| &\leq \mid x^{n+m+1} \mid |\frac{W(x)}{Q(x)} \mid \\ &\leq C \mid x^{n+m+1} \mid\end{aligned}$$

Théorème 2.3. *Soient f une fonction analytique sur l'intervalle $]-R,R[$, avec $R > 0$ et $(n,m) \in \mathbb{N}$ et*

$$G(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$

où $P_n(x)$ et $Q_m(x)$ sont des polynômes d'ordre n, m non nuls premiers entre eux et $Q_m(0) = 1$. La fraction rationnelle G est une approximation de Padé d'ordre (n,m) de f si, et seulement si :

$$f^{(k)}(0) - G^{(k)}(0) = 0 \quad pour\ k = 0,1,2,...,n+m. \tag{2.1}$$

Preuve :

1- $(\Rightarrow)$ Posons $N = n+m$, Le cas où G est une approximation de padé d'ordre (n,m) de la fonction f on a :

$$f(x) - G(x) = O(x^{N+1}).$$

D'après la l'unicité du Développement Limite d'ordre N au point 0, on déduire que :

$$G^{(k)}(0) = f^{(k)}(0), \text{ pour } 0 \leq k \leq N.$$

2- $(\Leftarrow)$ Le développement de Taylor de la fonction f est :

$$f(x) = \sum_{k \geq 0} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} + O(x^{k+1}).$$

On a :

$$f^{(k)}(0) = G^{(k)}(0) \qquad \text{pour } k = 0, 1, 2, \dots, n+m.$$

Si on remplacer $f^{(k)}(0)$ par $G^{(k)}(0)$ dans le développement de Taylor de f on trouve :

$$f(x) = G(x) + O(x^{k+1}).$$

Remarque

- Si $n = N$ et $m = 0$, l'approximation de Padé est un polynôme de degré N de Maclaurin .

Corollaire 2

Si la fonction f est développable en série de Maclaurin au voisinage de 0 admet une approximation de Padé d'ordre (n,m), alors les polynômes P_n et Q_m sont uniquement déterminés.

Preuve :

Supposons que la fonction f admet deux approximation de Padé d'ordre (n,m) donc :

$$f(x) - \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = O(x^{n+m+1})$$
$$f(x) - \frac{P_n^*(x)}{Q_m^*(x)} = O^*(x^{n+m+1})$$

D'apprêt le Théorème président, on peut écrite :

$$\begin{cases} Q_m(x)f(x) - P_n(x) = x^{n+m+1}w(x), \\ Q_m^*(x)f(x) - P_n^*(x) = x^{n+m+1}w_*(x) \end{cases}$$

où les fonctions $w(x)$ et $w^*(x)$ étant développables en série entière en 0, on déduit que :

$$Q_m(x)P_n^*(x) - Q_m^*(x)P_n(x) = x^{n+m+1}w_{**}(x)$$

avec

$$Q_mP_n^*(x) - Q_m^*P_n \text{ dans } R_{n+m}[x]$$

on déduit que :

$$Q_mP_n^*(x) - Q_m^*P_n = 0.$$

Et car les polynômes P_n et Q_m sont premiers entre eux et ainsi que les polynômes P_n^* et Q_m^*, donc :

$$P_n = P_n^*$$

$$Q_m = Q_m^*$$

et

$$Q_m(0) = Q_m^*(0) = 1.$$

2.2 Calcul Analytique

Il y a plusieurs méthodes pour calculer l'approximation de Padé, on choisit l'approximation de Taylor .

Supposons que f est développable en série de MacLaurin ($f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x_i$) et soit

$$R_{n,m}(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$

avec $q_0 = 1$ tel que les polynômes P_n, Q_m en $R_{n,m}$ est construit de sorte qu'il concorde avec la fonction f à $x = 0$.

On considéré la différence suivent :

$$f(x) - R_{n,m}(x) = x^{n+m+1}\varepsilon(x)$$

$$f(x) - \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = x^{n+m+1}\varepsilon(x)$$

$$f(x)Q_m(x) - P_n(x) = x^{n+m+1}\varepsilon(x)Q_m(x)$$

donc

$$f(x)Q_m(x) - P_n(x) = x^{n+m+1}\varepsilon_1(x) = O(x^{n+m+1})$$

i.e.,

$$(\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i)(\sum_{i=0}^{m} q_i x^i) - \sum_{i=0}^{n} p_i x^i = \sum_{i=n+m+1}^{\infty} c_i x^i \tag{2.2}$$

Le choix des coefficient $p_0, p_1, ..., p_n$ et $q_1, ..., q_m$ basé sur la relation suivent :

$$f^{(k)}(0) = R^{(k)}(0) \text{ pour } k = 0, 1, 2, ..., N \tag{2.3}$$

Si $n = N$ et $m = 0$, l'approximation de Padé est polynôme de Nth MacLaurin et l'équation (2.2) est équivalence a $f(x) - W(x) = 0$ admet le point 0 comme une racine de multiplicité d'ordre $N + 1$.

Donc, on choisit $p_0, p_1, ..., p_n$et $q_1, ..., q_m$ de sorte que le membre du côté droite de l'équation (2.2) de termes de degré supérieure N alors :

$$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 ...)(1 + q_1 x + ... + q_m x^m) - (p_0 + p_1 x + ... + p_n x^n) = \sum_{i=n+m+1}^{\infty} c_i x^i \tag{2.4}$$

On définie $p_{n+1} = p_{n+2} = ... = p_N = 0$ et $q_{m+1} = q_{m+2} = ... = p_N = 0$ pour exprimer les coefficients de x^k dans l'équation (2.3) comme :

$$(\sum_{i=0}^{k} a_i q_{k-i}) - p_k$$

De plus, l'équation (2.4) contient $(N + 1)$ équation au $(N + 1)$ inconnues

$$\sum_{i=0}^{k} a_i q_{k-i} = p_k \text{ avec } k = 0, 1, 2, ..., N$$

. C-à-d :

$$\begin{cases} a_0 & = p_0 \\ q_1 a_0 + a_1 & = p_1 \\ q_2 a_0 + q_1 a_1 + a_2 & = p_2 \\ q_3 a_0 + q_2 a_1 + q_1 a_2 + a_3 & = p_3 \\ \vdots & \\ q_m a_{n-m} + q_{m-1} a_{n-m+1} + ... + a_n & = p_n. \end{cases} \tag{2.5}$$

et

$$\begin{cases} q_m a_{n-m+1} + q_{m-1} a_{n-m+2} + ... + q_1 a_n + a_{n+1} & = 0 \\ q_m a_{n-m+2} + q_{m-1} a_{n-m+3} + ... + q_1 a_{n+1} + a_{n+2} & = 0 \\ \vdots & \\ q_m a_n + q_{m-1} a_{n+1} + ... + q_1 a_{n+m-1} + a_{n+m} & = 0. \end{cases} \tag{2.6}$$

Le system (2.6) est équivalent à :

$$\begin{pmatrix} a_{n-m+1} & a_{n-m+2} & \cdots & a_{n+1} \\ a_{n-m+2} & a_{n-m+3} & \cdots & a_{n+2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & a_{n+1} & \cdots & a_{n+m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_m \\ q_{m-1} \\ \vdots \\ q_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.7}$$

on remarque dans ce système la matrice de Hankel.

le système

$$(2.5) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & a_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & a_{n+1} & \cdots & a_{n-m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

Les m équations dans (2.5) dont les inconnues $q_1, q_2, ..., q_m$. Ensuite, les équations de (2.4) sont utilisées avec succès pour trouver $p_0, p_1, ..., p_n$.

Exemple :

Soit $f(x) = ln(1-x)$ et son approximation de Padé d'ordre [5,4] est :

$$R_{2,2}(x) = \frac{\frac{x^2}{2} - x}{\frac{x^2}{6} - x + 1}$$

En effet :

— La formule de Taylor pour la fonction $ln(1-x)$ en 0 est :

$$ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - ...$$

Dans ce cas, l'équation (2.2) devient :

$$(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ...)(1 + q_1 x + q_2 x^2) - p_0 - p_1 x - p_2 x^2 =$$

$$0 + 0x + 0x^2 + 0x^3 + 0x^4 + c_5 x^5 + c_6 x^6 + ...$$

Lorsque les coefficients des cinq premières puissances de x sont comparés, nous obtenons le système d'équations linéaires suivant :

$$
\begin{aligned}
0 &= p_0 \\
q_1 0 - 1 &= p_1 \\
q_2 0 - q_1 - \frac{1}{2} &= p_2 \\
-q_2 - \frac{1}{2}q_1 - \frac{1}{3} &= 0 \\
-\frac{1}{2}q_2 - \frac{1}{3}q_1 - \frac{1}{4} &= 0.
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

On résolu le système (2.9) on obtient :

$$
\begin{aligned}
p_0 &= 0 \\
p_1 &= -1 \\
q_2 &= -\frac{1}{3} - \frac{1}{2}q_1 \\
-\frac{1}{2}(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2}q_1) - \frac{1}{3}q_1 - \frac{1}{4} &= 0.
\end{aligned}
$$

Ce qui donne :

$$
\begin{aligned}
q_1 &= -1 \\
q_2 &= \frac{1}{6} \\
p_2 &= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

donc

$$R_{2,2}(x) = \frac{\frac{x^2}{2} - x}{\frac{x^2}{6} - x + 1}$$

d'où la résultat.

Théorème 2.4. *La condition suffisante pour l'existence et l'unicité de l'approximation de padé [11] est* $det[H_m^{n-m+1}(f)] \neq 0$*, i,e :*

$$
det[H_m^{n-m+1}(f)] = \begin{vmatrix} a_{n-m+1} & a_{n-m+2} & \cdots & a_n \\ a_{n-m+2} & a_{n-m+3} & \cdots & a_{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & a_{n+1} & \cdots & a_{n+m-1} \end{vmatrix} \neq 0
$$

Remarque : Cette condition affirmer l'unicité de l'approximation $[n/m]$, mais ne permet pas d'affirmer que les polynômes P et Q sont de degré n et m.

Exemple :

Soit $f(x) = cos(x)$,calculons H_2^2 de cette fonction.

$$H_2^2(cos) = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_2 & c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

qui est inversible

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc l'approximation de Padé $[2/2]$ de la fonction f est existe,

$$\begin{pmatrix} q_2 \\ q_1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_3 \\ c_4 \end{pmatrix}.$$

$$-\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{24} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{12} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

An suite

$$\begin{pmatrix} c_0 & 0 & 0 \\ c_1 & c_0 & 0 \\ c_2 & c_1 & c_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{-1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{-5}{12} \end{pmatrix}$$

donc

$$P_2(x) = 1 + 0x + (\frac{-5}{12})x^2$$

$$Q_2(x) = 1 + 0x + (\frac{1}{12})x^2$$

L'approximation $[2/2]$ de la fonction est :

$$[2/2]_f = \frac{1 - \frac{5x^2}{12}}{\frac{x^2}{12} + 1}$$

2.2.1 Quelque propriétés :

Proposition 2.1

Soit la fonction f de classe $\mathbb{C}^{\infty}$. Supposons que f admet un approximation de padé d'ordre $[n/m]$ et la fonction g tel que $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ alors l'approximation de padé de g est :

$$[m/n]_g = \frac{1}{[n/m]_f}$$

Preuve :

Posons $f = \dfrac{1}{g}$, comme la fonction f admet un approximation de Padé d'ordre (n,m) alors :

$$[n/m]_f \Longleftrightarrow f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} + x^{n+m}\varepsilon(x)$$

$$Q_m(x)f(x) - P_n(x) = x^{n+m}\varepsilon(x)$$

On fait la multiplication par g, on trouve :

$$Q_m(x) - P_n(x)g(x) = x^{n+m}\varepsilon_1(x)$$

$$g(x) = \frac{Q_m(x)}{P_n(x)} + x^{n+m}\varepsilon_1(x)$$

$$[m/n]_g = \frac{1}{[n/m]_f}$$

Proposition 2.2

1- Soit $g(x) = f(ax), \quad a \neq 0$ alors, l'approximation de padé d'ordre (n,m) de la fonction g est :

$$[n/m]_g(x) = [n/m]_f(ax)$$

2- Soit $g(x) = f(x^k)$ alors pour tout i, j tel que $i + j \leq k - 1$ on a :

$$[nk+1/mk+j]_g(x) = [n/m]_f(x^k)$$

Exemple :

L'approximation de padé d'ordre $(1,2)$ de la fonction $f(x) = e^x$ est :

$$[1/2]_f = \frac{6+2x}{6-4x+x^2}$$

- Soit $g(x) = e^{-x}$, on déduire $[1/2]_g$ et $[2/1]_g$.

En effet :

1- Remarque que $g(x) = e^{-x} = f(-x)$ donc

$$\begin{aligned}[1/2]_g(x) &= [1/2]_f(-x)\\ &= \frac{6+2(-x)}{6-4(-x)+(-x)^2}\\ &= \frac{6-2x}{6+4x+x^2}.\end{aligned}$$

2- Remarque que $g(x) = e^{-x} = \dfrac{1}{e^x} = \dfrac{1}{f(x)}$ donc

$$\begin{aligned}[2/1]_g(x) &= \frac{1}{[1/2]_f(x)}\\ &= \frac{1}{\frac{6+2x}{6-4x+x^2}}\\ &= \frac{6-4x+x^2}{6+2x}\end{aligned}$$

Proposition 2.3

Soit la fonction f de classe $\mathbb{C}^{\infty}$, supposons que l'approximation $[n/m]_f$ existe et unique alors il a la même parité que f

Preuve :

Supposons que f est paire alors $f(x) = f(-x)$, l'approximation de padé de f est :

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} + O(x^{n+m})$$

c-a-d :

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} + x^{n+m}\varepsilon(x)$$

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{P_n(-x)}{Q_m(-x)} + (-x)^{n+m}\varepsilon(-x)\\ &= \frac{P_n(-x)}{Q_m(-x)} + (-1)^{n+m}x^{n+m}\varepsilon(-x)\end{aligned}$$

$$f(x) = \frac{P_n(-x)}{Q_m(-x)} + x^{n+m}\varepsilon_1(x)$$

$$f(x) = \frac{P_n(-x)}{Q_m(-x)} + O(x^{n+m})$$

et par l'unicité de l'approximation an trouve : $P_n(-x) = P_n(x)$ et $Q_m(-x) = Q_m(x)$.

Proposition 2.4

1- Soit $g(x) - x^k f(x) = 0$, alors l'approximation de padé d'ordre (n,m) de la fonction g est :

$$[n+k/m]_g(x) = x^k [n/m]_f(x)$$

2- Soit $g(x) = \dfrac{a+bf(x)}{c+df(x)}$ avec a,b,c et $d \in \mathbb{R}$ tel que $c+df(0) \neq 0$ alors :

$$[n/m]_g(x) = \frac{a+b[n/m]_f(x)}{c+d[n/m]_f(x)}$$

2.2.2 Table de Padé :

Henri Padé résume les premier ordre de l'approximation de padé dans un tableau .

Le tableau suivant permet d'afficher les premiers termes des polynômes P_n et Q_m de l'approximation de padé .

m \ n	0	1	2	3	4
0	[0/0]	[1/0]	[2/0]	[3/0]	[4/0]
1	[0/1]	[1/1]	[2/1]	[3/1]	[4/1]
2	[0/2]	[1/2]	[2/2]	[3/2]	[4/2]
3	[0/3]	[1/3]	[2/3]	[3/3]	[4/3]
4	[0/4]	[1/4]	[2/4]	[3/4]	[4/4]

Exemple :

Soit la fonction $f(x) = e^{2x}$ pour faire l'approximation de padé de cette fonction on a le développement de Taylor :

$$f(x) = 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^4 + O(x^5)$$

on résolvant les systèmes, on obtiens la table :

m \ n	0	1	2	$\cdots$
0	1	2x+1	$2x^2+2x+1$	...
1	1/(1-2x)	(1+x)/(1-x)	$-(2x^2+4x+3)/(2x-3)$	...
2	$1/(2x^2-2x+1)$	$(2x+3)/(2x^2-4x+3)$	...	...
$\vdots$	$3/(-4x^3+6x^2-6x+3)$	...	...	...

pour $n=1$ et $m=2$, les polynômes P_n est de degré 1 et Q_m est de degré 2 on obtient le système suivent :

$$\begin{cases} a_0 = p_0 = 1 \\ q_1 + 2 & = p_1 \\ q_2 + q_1 2 + 2 & = 0 \\ q_2 2 + q_1 2 + \dfrac{4}{3} & = 0 \end{cases}$$

donc

$$q_2 + (\frac{4}{3} - 2) = 0 \Longrightarrow q_2 = \frac{2}{3}$$

et

$$\frac{2}{3} + 2q_1 + 2 = 0 \Longrightarrow q_1 = \frac{-4}{3}$$

$$\begin{cases} p_0 = 1 \\ \dfrac{-4}{3} + 2 = p_1 \Longrightarrow p_1 = \dfrac{2}{3} \\ q_1 = \dfrac{-4}{3} \\ q_2 = \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

alors

$$P_1(x) = \frac{2}{3}x + 1$$

et

$$Q_2(x) = \frac{2}{3}x^2 + \frac{-4}{3}x + 1$$

donc

$$[1/2]_f(x) = \frac{\frac{2}{3}x + 1}{\frac{2}{3}x^2 + \frac{-4}{3}x + 1}$$

$$[1/2]_f(x) = \frac{2x+3}{2x^2-4x+3}$$

on remplace le résultat dans la case $[1/2]$ dans la table de Padé .

Remarque :

les sommes partielles de la série f est formée dans la première ligne du table de Padé

CHAPITRE 3

Application

3.1 L'approximation de Padé et polynôme orthogonal

Sur l'espace vectoriel E des polynômes à valeurs complexe on définie la forme linéaire c par :

$$c(x^k) = c_k \text{ avec } k = 0, 1, \ldots$$

Définition 3.1. *la famille des polynômes P_k est dit forme une famille de polynômes orthogonaux par rapport à c si pour tout $n \geq 0$ le polynômes P_n est exactement de degré n et si*

$$c(x^i P_n(x)) = 0, \forall i = 0, \ldots, n-1 \textit{ avec } P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} P_i x^i$$

i,e :

$$\begin{pmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_n \\ c_1 & c_2 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_n & c_{n+1} & \cdots & c_{2n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ a \end{pmatrix}$$

avec a un nombre réel.

Soit $Z_m(x) = \sum_{i=0}^{m} q_i x^{m-i}$ avec $q_0 = 1$ est un polynôme de degré m unitaire et orthogonal par rapport a la fonctionnelle de moments c $(c_{n-m+1}, c_{n-m+2}, ..., c_{n+m})$.i.e ;

$$c(Z_m Z_n) = 0 \text{ si } n \neq m$$

Et on rappelle le système (2.7) peut être écrit sous la forme :

$$\begin{pmatrix} a_{n-m+1} & a_{n-m+2} & \cdots & a_n \\ a_{n-m+2} & a_{n-m+3} & \cdots & a_{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & a_{n+1} & \cdots & a_{n+m-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_m \\ q_{m-1} \\ \vdots \\ q_1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_{n+2} \\ \vdots \\ a_{n+m} \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

Si on compare les coefficient $1, q_1, ..., q_m$ de système (3.1) avec les coefficient de Z_m on trouve que les $1, q_1, ..., q_m$ de ce système est comme les coefficient renversés du polynôme Z_m c-a-d :

le polynômes Q_m est réciproque de Z_m, i.e :

$$Q_m(x) = x^m Z_m(\frac{1}{x})$$

La numérateur de l'approximation vérifier le système suivent :

$$\begin{pmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_n \\ 0 & c_0 & \cdots & c_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

donc on peut calcule l'approximation de Padé de la forme $[k/k+1]_f$ a partir de la relation de récurrence de polynôme orthogonal , on obtient les dénominateurs par renverse les coefficients des polynômes orthogonaux et on trouve les numérateurs par calculer les associés des polynômes orthogonaux après on renversant les coefficient.

Exemple :

Soit la fonction $f(x) = \dfrac{1 - x + 2x^2 - x^3}{x^3 - 1}$

On extrait les moments fonctionnelle par le développement de Taylor de f on trouve :

$$f(x) = -1 + x - 2x^2 + x^4 - 2x^5 + O(x^6)$$

donc les moments est $c = -1, 1, -2, 1, -2, ...$ on applique la récurrence à trois termes pour obtiens le polynômes orthogonaux par rapport a c

d'après la proposition suivent :

Proposition 3.1

La suite $\{P_n(x)\}_{n\geq 0}$ vérifie la récurrence d'ordre deux suivante :

$$P_{n+1}(x) = (x-\beta_{n+1})P_n(x) - \gamma_{n+1}P_{n-1}(x), \quad n \geq 0$$

avec $P_{-1} \equiv 0, P_0 \equiv 1$ et :

$$\begin{cases} \gamma_{k+1} = \dfrac{c(x^k P_k)}{c(x^{k-1}P_{k-1})} \\ \beta_{k+1} = \dfrac{c(x^{k+1}P_k)}{c(x^k P_k)} - \dfrac{c(x^k P_{k-1})}{c(x^{k-1}P_{k-1})} \end{cases}$$

On obtient :$P_{-1}(x) = 0, P_0(x) = 1 \qquad P_1(x) = (x-\beta_1)P_0(x) - \gamma_1 P_{-1}(x) = x - \beta_1$ avec

$$\beta_1 = \frac{c(x^0 P_{-1})}{c(x^{-1}P_{-1})} - \frac{c(x^1 P_0)}{c(x^0 P_0)}$$

$$= -\frac{c(x^1 P_0)}{c(x^0 P_0)} = -\frac{1}{-1} = 1$$

donc $P_1(x) = x - 1. \qquad P_2(x) = (x-\beta_2)P_1(x) - \gamma_2 P_0(x) = (x-\beta_2)(x+1) - \gamma_2$ avec

$$\begin{cases} \gamma_2 = \dfrac{c(x^1 P_1)}{c(x^0 P_0)} \\ \beta_2 = \dfrac{c(x^2 P_1)}{c(x^1 P_1)} - \dfrac{c(x^1 P_0)}{c(x^0 P_0)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \gamma_2 = \dfrac{c(x^2 - x)}{c_0} = \dfrac{-2-1}{-1} = 3 \\ \beta_2 = \dfrac{c(x^3 - x^2)}{c(x^2 - x)} - \dfrac{c(x)}{c_0} = \dfrac{2}{3} + 1 = \dfrac{5}{3} \end{cases}$$

donc $P_2(x) = (x - \frac{5}{3})(x-1) - 3 = x^2 - \frac{8}{3}x - \frac{4}{3}$.

$P_3(x) = (x-\beta_3)P_2(x) - \gamma_3 P_1(x)$

$$\begin{cases} \gamma_3 = \dfrac{c(x^2 P_2)}{c(x^1 P_1)} \\ \beta_3 = \dfrac{c(x^3 P_2)}{c(x^2 P_2)} - \dfrac{c(x^2 P_1)}{c(x^1 P_1)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \gamma_3 = \dfrac{c(x^4 - \frac{8}{3}x^3 - \frac{4}{3}x^2)}{c(x^2 - x)} = \dfrac{1 + \frac{8}{3}}{-3} = -\dfrac{11}{9} \\ \beta_3 = \dfrac{c(x^5 - \frac{8}{3}x^4 - \frac{4}{3})}{c(x^4 - \frac{8}{3}x^3 - \frac{4}{3}x^2)} - \dfrac{c(x^3 - x^2)}{c(x^2 - x)} = \dfrac{-2 - \frac{8}{3}}{\frac{11}{3}} - \dfrac{2}{2-1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \gamma_3 = -\dfrac{11}{9} \\ \beta_3 = -\dfrac{36}{11} \end{cases}$$

$$P_3(x) = (x+\frac{36}{11})(x^2-\frac{8}{3}x-\frac{4}{3})+\frac{11}{9}(x-1)$$

$$P_3(x) = x^3+\frac{20}{33}x^2-\frac{611}{99}x+\frac{553}{99}$$

donc

$$\begin{cases} P_{-1}(x) = 0 \\ P_0(x) = 1 \\ P_1(x) = x-1 \\ P_2(x) = x^2-\dfrac{8}{3}x-\dfrac{4}{3} \\ P_3(x) = x^3+\dfrac{20}{33}x^2-\dfrac{611}{99}x+\dfrac{553}{99} \end{cases}$$

Par la même méthode on trouve les associés,

$$\begin{cases} Q_{-1}(x) = 0 \\ Q_0(x) = -1 \\ Q_1(x) = -x-3 \\ Q_2(x) = -x^2-\dfrac{7}{6}x-\dfrac{3}{6} \end{cases}$$

pour obtient l'approximation de padé $[n/(n+1)]$, il suffit de renverse les coefficient, par exemple :

$$x^2P_2(\frac{1}{x}) = -\frac{4}{3}x^2-\frac{8}{3}x+1$$

$$xQ_1(\frac{1}{x}) = -3x-1$$

alors

$$[1/2]_f = \frac{-9x-3}{-4x^2-8x+3}$$

3.2 Temporisation et l'approximation de Padé :

L'approximation de Padé est très importante dans la conception de systèmes de contrôle, car elle représente les retards dans les modèles de systèmes dynamiques .
La transformée de Laplace [4] d'un système avec un retard de T secondes est donné par :

$$L(f(t-T)) = F(s)e^{-Ts}$$

Dans les système dynamique, la modélisation mathématique de décalage temporel entre un changement d'une entrée et le changement correspondent de la sortie est basé sur la fonction de transfert

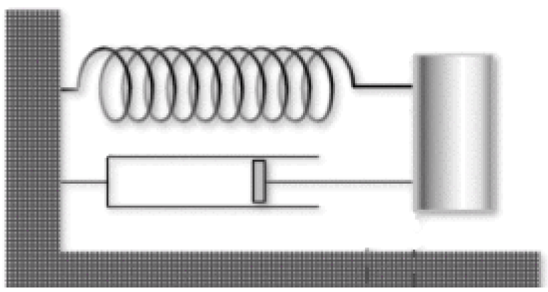
$$G(s) = \frac{N(s)}{M(s)}$$

$$= \frac{\alpha_n s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \ldots + \alpha_1 s + \alpha_0}{s^m + \beta_{m-1} s^{m-1} + \ldots + \beta_1 s + \beta_0} e^{-Ts}$$

où e^{-Ts} est transformée de Laplace du temps de retard et T est la durée de délai en secondes.

Exemple :

Le système d'amortisseur d'un masse $m = 2$ est lié à l'extrémité libre d'un ressort de raideur $k = 3$ et un amortisseur a coefficient $a = 0.7$



4-

Supposons que la force appliqué à la masse est l'entrée N de t et la position de la masse est la sortie M de t

- Si on suppose qu'il n'y a pas de retard dans le système, alors la fonction de transfert de la force d'entrée à la position de sortie est :

$$G(s) = \frac{N(s)}{M(s)} = \frac{1}{ms^2 + as + k}$$

donc

$$G(s) = \frac{1}{2s^2 + 0.7s + 3}$$

- Si on supposons que le vrai capteur ait un certain retard de 1 seconde (lors du calcul et de l'affichage des résultats), alors on utilise la fonction de transfert :

$$G(s) = \frac{1}{2s^2 + 0.7s + 3} e^{-1s}$$

3.2.1 Approximation des fonctions de transfert temporises

On approche la fonction de transfert [4] du retard à l'aide d'une fonction rationnelle suivent :

$$R_{n,m}(Ts) = \frac{1 - (asT) + \frac{asT^2}{2!} + ... + (-1)^n \frac{(asT)^n}{n!}}{1 + (bsT) + \frac{(bsT)^2}{2!} + ... + \frac{(bsT)^m}{m!}}$$

où a, b sont des coefficient bien choisir.

En général, le degré du numérateur est choisi égal au degré du dénominateur dans l'approximation de Padé $R_{m,m}(Ts)$.

Approximation des fonctions de transfert de retard et séries de Taylor

L'utilisation du développement de Taylor de la fonction e^{-sT} :

$$e^{-sT} = 1 - (sT) + \frac{sT^2}{2!} + ... + (-1)^n \frac{(sT)^n}{n!} + O((sT)^{n+1})$$

permit de faire une approximation de la fonction de transfert de retard $R_{m,0}(Ts)$ mais ne remplit pas les conditions de réalisation physique, avec les zéros instables dans la fonction de transfert qu'il introduit. Par contre, le développement au moyen de la série de Taylor en un polynôme au dénominateur $R_{0,m}(Ts)$ satisfait aux conditions fortes de réalisabilité physique mais le polynôme est instable pour des degrés supérieurs de 4 .

En effet

$$e^{-sT} = e^{-(\frac{T}{2} + \frac{T}{2})s} = e^{-s\frac{T}{2}} e^{-s\frac{T}{2}}$$
$$= \frac{e^{-s\frac{T}{2}}}{e^{s\frac{T}{2}}}$$

Le principal avantage de cette modification est une précision d'approximation plus élevée également pour les polynômes de degré inférieur, mais les inconvénients de méthodes précédentes restent .

Approximation de Padé de la fonction de transfert de temporisation

L'application de l'approximation de Padé est la meilleure méthode souvent utilisée d'approximation rationnelle de la fonction de transfert de retard.

On effet

$$e^{-sT} \approx \sum_{i=0}^{n+m} (-1)^i \frac{(sT)^i}{i!} = \frac{\sum_{i=0}^{n} p_i(sT)}{\sum_{i=0}^{m} q_i(sT)}$$

avec $q_0 = 1$.

$$(\sum_{i=0}^{n+m} (-1)^i \frac{(sT)^i}{i!})(\sum_{i=0}^{m} q_i(sT)) = \sum_{i=0}^{n} p_i(sT)$$

Donc on obtiens le système suivent :

$$\begin{pmatrix} a_{n-m+1} & a_{n-m+2} & \cdots & a_{n+1} \\ a_{n-m+2} & a_{n-m+3} & \cdots & a_{n+2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & a_{n+1} & \cdots & a_{n+m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_m \\ q_{m-1} \\ \vdots \\ q_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & a_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & a_{n+1} & \cdots & a_{n-m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$$

on résolu les systèmes et on trouve les coefficient p_i et q_i.

Remarque :

On peut obtient les coefficient de Padé p_i et q_i par une autre manière :

- Le cas où les deux polynômes ont le même dégrée $(n = m)$, on peut trouve les formules sous la forme :

$$p_i = (-1)^i \frac{(2n-i)!n!}{(2n!)i!(n-i)!}$$

et

$$q_i = \frac{(2n-i)!n!}{(2n!)i!(n-i)!}$$

avec $i = 0, ..., n$

donc

1- pour $n = 1$ on a :

$$R_{1,1}(sT) = \frac{p_0 + p_1(sT)}{1 + q_1(sT)}$$

- pour $i = 0$

$$p_0 = (-1)^0 \frac{(2n)!n!}{(2n!)0!(n)!} = 1$$

- pour $i = 1$

$$p_1 = (-1)\frac{(2n-1)!n!}{(2n!)1!(n-1)!} = -\frac{(2n-1)!(n-1)!n}{(2n-1)!2n!(n-1)!}$$

$$p_1 = -\frac{1}{2}$$

on déduit

$$q_1 = \frac{1}{2}$$

alors

$$R_{1,1}(sT) = \frac{1 - \frac{1}{2}(sT)}{1 + \frac{1}{2}(sT)}$$

$$R_{1,1}(sT) = \frac{2 - sT}{2 + sT}$$

2- pour $n = 2$ on a :

$$R_{2,2}(sT) = \frac{1 - \frac{1}{2}(sT) + p_2(sT)^2}{1 + \frac{1}{2}(sT) + q_2(sT)^2}$$

- pour $i = 2$

$$p_2 = \frac{(2n-2)!n!}{2n!2!(n-2)!} = \frac{(2n-2)!n(n-1)(n-2)!}{(2n-2)!(2n-1)(2n)2!(n-2)!}$$

$$p_2 = \frac{n(n-1)}{(2n-1)(2n)2!}$$

alors $p_2 = \dfrac{2}{3 \times 4 \times 2} = \dfrac{1}{12}$

donc

$$R_{2,2}(sT) = \frac{1 - \frac{1}{2}(sT) + \frac{1}{12}(sT)^2}{1 + \frac{1}{2}(sT) + \frac{1}{12}(sT)^2}$$

$$R_{2,2}(sT) = \frac{12 - 6(sT) + (sT)^2}{12 + 6(sT) + (sT)^2}$$

par la même méthode on trouve :

$$R_{3,3}(sT) = \frac{120-60(sT)+12(sT)^2-(sT)^3}{120-60(sT)+12(sT)^2-(sT)^3}$$

$$R_{4,4}(sT) = \frac{1680-840(sT)+180(sT)^2-20(sT)^3+(sT)^4}{1680-840(sT)+180(sT)^2-20(sT)^3+(sT)^4}$$

$$R_{5,5}(sT) = \frac{30240-15120(sT)+3360(sT)^2-420(sT)^3+30(sT)^4-(sT)^5}{30240+15120(sT)+3360(sT)^2+420(sT)^3+30(sT)^4+(sT)^5}$$

- Le cas où les deux polynômes ne sont pas de même dégrée $(n \neq m)$, on trouves les formules sous la forme :

$$p_i = (-1)^i \frac{(m+n-i)!n!}{(m+n!)i!(n-i)!} \text{ avec } i = 0,...,n$$

et

$$q_i = \frac{(m+n-i)!m!}{(m+n!)i!(m-i)!} \text{ avec } i = 0,...,m$$

alors

$$R_{1,2}(sT) = \frac{p_0+p_1sT}{1+q_1(sT)+q_2(sT)^2}$$

$$p_0 = (-1)^0 \frac{(m+n)!n!}{(m+n!)0!(n)!} = 1$$

pour $i = 1$, $n = 1$ et $m = 2$

$$p_1 = (-1)\frac{(m+n-1)!n!}{(m+n!)1!(n-1)!} = -\frac{(m+n-1)!n(n-1)!}{(m+n-1)!(m+n)(n-1)!}$$

$$p_1 = -\frac{n}{m+n} = -\frac{1}{3}$$

et

$$q_1 = \frac{(m+n-1)!m!}{(m+n!)1!(m-1)!} = \frac{(m+n-1)!m(m-1)!}{(m+n-1)!(m+n)(m-1)!}$$

$$q_1 = \frac{m}{m+n} = \frac{2}{3}$$

$$q_2 = \frac{(m+n-2)!m!}{(m+n!)2!(m-2)!} = \frac{(m+n-2)!m(m-1)(m-2)!}{(m+n-2)!(m+n-1)(m+n)2!(m-2)!}$$

$$q_2 = \frac{m(m-1)}{(m+n-1)(m+n)2!} = \frac{2(2-1)}{(2+1-1)(2+1)2!}$$

$$q_2 = \frac{1}{6}$$

c-à-d :

$$R_{1,2}(sT) = \frac{1-\frac{1}{3}sT}{1+\frac{2}{3}(sT)+\frac{1}{6}(sT)^2}$$

donc

$$R_{1,2}(sT) = \frac{6-2sT}{6+4(sT)+(sT)^2}$$

pour $i = 1$, $n = 1$ et $m = 5$

$$p_1 = \frac{(m+n-1)!}{(m+n)!(n-1)!} = \frac{1}{(m+n)(n-1)!}$$

$$p_1 = \frac{1}{(5+1)0!} = \frac{1}{6}$$

et

$$q_1 = \frac{(m+n-1)!m!}{(m+n)!(m-1)!} = \frac{(m+n-1)!m(m-1)!}{(m+n-1)!(m+n)(m-1)!}$$

$$q_1 = \frac{m}{m+n} = \frac{5}{6}$$

pour $i = 5$, $n = 1$

$$q_5 = \frac{(m+n-5)!m!}{(m+n)!5!(m-5)!} = \frac{(m+n-5)!m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{(m+n-5)!(m+n)(m+n-1)(m+n-2)(m+n-3)(m+n-4)5!}$$

$$q_5 = \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{(m+1)m(m-1)(m-2)(m-3)5!} = \frac{(m-4)}{(m+1)5!}$$

pour $m = 5$

$$q_5 = \frac{1}{6!} = \frac{1}{720}$$

par le même travail on obtient les coefficient q_2, q_3, q_4 et p_2, p_3, p_4 donc

$$R_{1,5}(sT) = \frac{720-120(sT)}{720+600(sT)+240(sT)^2+60(sT)^3+10(sT)^4+(sT)^5}$$

$$R_{2,5}(sT) = \frac{2520-720(sT)+60(sT)^2}{720+600(sT)+240(sT)^2+60(sT)^3+10(sT)^4+(sT)^5}$$

$$R_{3,5}(sT) = \frac{6720-2520(sT)+360(sT)^2-20(sT)^3}{720+600(sT)+240(sT)^2+60(sT)^3+10(sT)^4+(sT)^5}$$

$$R_{4,5}(sT) = \frac{15120-6720(sT)+1260(sT)^2-120(sT)^3+5(sT)^4}{720+600(sT)+240(sT)^2+60(sT)^3+10(sT)^4+(sT)^5}$$

Ce qui distingue l'approximation de Padé est que leurs polarités sont stables pour tous les ordres pratiquement utilisables et qu'elles ont tendance à se regrouper les unes avec les autres et qu'il n'y a pas de restrictions sur les degrés de chacun des polynômes.

Comparaison entre le développement de Taylor et Padé :

Bien que l'approximation de Padé d'une fonction soit extraite du développement de Taylor de la même, en les comparant entre elles on trouve que Padé donne de meilleurs résultats, Prends par exemple la fonction e^{-2s} quand le temps continue à l'infini, la fonction $f(s) = e^{-2s}$ converge vers 0. la limite de la formule de Taylor d'ordre 4

$$\lim_{s\to\infty} f_T(s) = \lim_{s\to\infty} 1 - 2s + 2s^2 - \frac{4x^3}{3} + \frac{2x^4}{3}$$

$$\lim_{s\to\infty} f_T(s) = +\infty$$

la limite de l'approximation de Padé d'ordre 4

$$\lim_{s\to\infty} f_P(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{s^2+3s+3}{s^2-3s+3}$$

$$\lim_{s\to\infty} f_P(s) = 1$$

on voir que la résultat de Padé plus proche de la fonction f par rapport au résultat de Taylor, où l'approximation de padé peut se poursuivre plus longtemps.

Bibliographie

[1] A. Draux, Polynomes Orthogonaux Formels. Applications, Berlin, 1983.

[2] A. Ralston : Základy numerické matematiky. Academia, Praha, 1973.

[3] A. Y. Khinchin. Continued fractions. University of Chicago Press, Chicago, 1964.

[4] B. C. Kuo. Automatic Control Systems. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1991.

[5] C. F. Borges, On a class of Gauss-like quadrature rules, Numer. Math. 67 (1994), 271–288.

[6] C. D. Olds. Continued fractions. Random House, New York, 1963.

[7] C. Brezinski, Padé-Type Approximation and General Orthogonal Polynomials

[8] G. H. Golub, Ch. F. van Loan : Matrix Computations. Johns Hopkins University Press, Baltimore, Maryland, 1996

[9] J. Bustamante, G. L´opez Lagomasino, Hermite-Pad´e approximation to a Nikishin type system of analytic functions, Mat. Sb. 183 (1992), 117–138 (Russian) ; Acad. Sci. Sb. Math. 77 (1994), 367–384.

[10] J. Bustamante, G. L´opez Lagomasino, Hermite-Pad´e approximation to a Nikishin type system of analytic functions, Mat. Sb. 183 (1992), 117–138 (Russian) ; Acad. Sci. Sb. Math. 77 (1994), 367–384

[11] J. Gilewicz, Approximation de padé. Springer, Berlin, (1978).

[12] J. Etienne Rombaldi . Book Interpolation et Approximation .Analyse Pour l'agrégation.

[13] U. Fidalgo Prieto, J. Ill´an, G. L´opez Lagomasino, Hermite-Pad´e approximation and simultaneous quadrature formulas, J. Approx. Theory 126 (2004), 171–197

[14] M. Vajta. Some Remarks on Padé-Approximations [on line]. In : Proceedings of the 3rd TEMPUS INTCOM Symposium on Intelligent Systems in Control and Measurement, 53-58. 9.-14.9.2000, Veszprém, Hungary. [cited : 03.07.2023].

Cites Utilisé :

[15] Wikipedia. Approximant de Pade [cited :03.07.2023]. Accessible at : https ://fr.wikipedia.org/wiki/Approximant de Pad

[16] Wolfram MathWorld. Padé Approximant [on line]. [cited :03.07.2023]. Accessible at : http ://mathworld.wolfram.com/PadeApproximant.html.