

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université de DJILALI BOUNAËMA, Khemis Miliana



Faculté des Sciences et de la Technologie
Département de Mathématiques et d'Informatique

MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

pour obtention du diplôme de :

Master en Mathématique

Spécialité : Analyse Mathématique et Applications

Thème :

**Sur les applications de la méthode MFTDM pour
résoudre les equations
différentielles fractionnaires**

Présenté par :

BELKACEM ERRAHMANI Nour-elhouda.

Soutenue le 10/07/2023, devant la jury composé de :

Président :Mme F.Meghatria	Université de Khemis Miliana
Examineur 1 :Mr M.Houas	Université de Khemis Miliana
Examineur 2 :Mr A.Kellech	Université de Khemis Miliana
Encadreur : Mme Chita.Fouzia	Université de Khemis Miliana

Remerciement

Tout d'abord, je remercie Dieu tout-puissant de m'avoir donnée la patience, la volonté, la santé pour réaliser ce travail.

Je tiens à remercier vivement mon promoteur Mme Chita Fouzia pour son soutien indéfectible durant la préparation de ce mémoire.

Aussi je tiens à remercier par l'occasion tous les membres de jury pour l'honneur qu'il me font en acceptant de présider et examiner ce travail.

Un merci spécial à ma mère, que dieu ait pitié de son âme.

Un très grand merci à ma famille : mon père, mon époux, mon frère, mes sœurs et mes amies pour leur encouragements.

Dédicace

Ce travail est dédié :

A l'âme de ma mère

A mon père

A mon époux Yacine

A ma famille : mon frère Mohamed, et mes sœurs

A ma belle famille

A toute personne qui m'a soutenue, aidé ou contribué de près ou de loin.

Nour-Elhouda.

Résumé

Dans cet mémoire, on a appliqué la méthode MFTDM combiné avec la transformation de Laplace (MFTDLM), et MFTDM combiné avec la transformation de Sumudu (MFTDSM) pour résoudre les équation différentielles d'ordre fractionnaire. L'algorithme proposé fournit la solution sous forme de série qui converge rapidement vers la solution exacte si elle existe.

Mots-clés : *Équation différentielle fractionnaire, la méthode MFTDM, la transformation de Laplace, la transformation de Sumudu, la dérivée au sens de Caputo.*

Summary

In this thesis, we applied the MFTDM method combined with Laplace transform (MFTDLM), and MFTDM combined with Sumudu transform (MFTDSM) to solve differential equations of fractional order. The algorithm of this proposed method provides the solution in the form of a series which quickly converges to the exact solution if it exists.

key words : *Fractional differential equations, the MFTDM method, the Laplace transform, the Sumudu transform, the derivative in the sens of Caputo.*

Table des matières

1	Notions préliminaires	8
1.1	Fonctions spécial	8
1.1.1	La fonction Gamma	8
1.1.2	La fonction de Mittag-Leffler	9
1.2	Intégrales et dérivées fractionnaires	9
1.2.1	Intégrale fractionnaire	9
1.2.2	Dérivée fractionnaire au sens de Caputo	10
1.3	Transformation de Laplace	10
1.3.1	Définition et propriétés	11
1.3.2	Transformée inverse de Laplace	12
1.3.3	Transformé de Laplace pour l'intégrale fractionnaire	12
1.3.4	Transformé de Laplace de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo . . .	13
1.3.5	Applications de la transformation de Laplace aux équations différentielles	14
1.4	Transformation de Sumudu	15
1.4.1	définition et propriétés	15
1.4.2	Transformée inverse de Sumudu	16
1.4.3	Transformation de Sumudu pour l'intégrale fractionnaire	17
1.4.4	Transformation de Sumudu de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo	17
1.5	Applications de la transformation de Sumudu aux équations différentielles . . .	17
2	La méthode Multistage Telescoping Decomposition (MFTDM)	19
2.1	Description de la méthode	19
2.1.1	La méthode de (Multistage Fractional Telescoping Decomposition Method)(MFTDM)	20
2.2	La convergence de la méthode MFTDM	20
2.3	Estimation d'erreur	21
2.4	Exemple d'une équation différentielle résolue par la méthode TDM.	21
2.5	Résolution d'une EDO de deuxième ordre par la méthode TDM	23
2.6	Application de la méthode TDM pour la résolution de l'équation différentielle fractionnaire	23
3	La méthode MFTDM combiné avec quelques transformations	25
3.1	MFTDM combinée avec la transformation de Laplace MFTDLM	25
3.1.1	Résolution de l'équation différentielle fractionnaire non-linéaire	25
3.1.2	Résolution de l'équation aux dérivées partielle fractionnaire non-linéaire	30
3.2	MFTDM combiné avec la transformé de Sumudu (MFTDSM)	33
3.2.1	Résolution de l'équation différentielle fractionnaire non-linéaire	33
3.2.2	Résolution de l'équation aux dérivées partielles fractionnaire non-linéaire	38

3.3	Applications	41
3.3.1	Application de MFTDLM aux equations différentielles fractionnaires . . .	41
3.3.2	Application de MFTDSM aux equations différentielles fractionnaires . . .	44
3.4	Conclusion	46
	Références	48

Introduction

Le calcul fractionnaire traite des intégrales et des dérivées d'ordre réel ou même complexe. Il est une généralisation du calcul classique. Ses origines remontent à la fin du 17ième siècle, Le concept de dérivé fractionnaire est apparu pour la première fois dans une célèbre correspondance entre G.A. de L'Hospital et G.W. Leibniz, en 1695.

Le calcul fractionnaire a été construit sur des fondations formelles par de nombreux mathématiciens, par exemple Liouville, Riemann, Euler, Lagrange, Heaviside, Fourier, Abel etc.

Au cours des soixante dernières années, le calcul fractionnaire avait joué un rôle très important dans divers domaines tels que la physique, la chimie, la mécanique, électricité, biologie, économie, théorie du contrôle, traitement du signal et de l'image, biophysique, phénomènes de flux sanguin, aérodynamique, ajustement de données expérimentales, etc.

La méthode "Telescoping Decomposition method"(TDM) a été proposée par AlRefai et al en 2008 [5]. Cette méthode a été appliquée pour résoudre les équations différentielles non linéaire du premier ordre

$$\begin{cases} u(t) &= f(t, u, u_t), t \in [0, T] \\ u(0) &= u_0 \end{cases}$$

Bouhassoun et al [5] ont appliqué la méthode TDM aux équations différentielles fractionnaires(FTDM), ils ont révélé que cette méthode donne de bonnes solutions approximatives quand les intervalles considérés sont petits.

Dans le cas contraire la méthode commence à diverger tôt. Pour pallier a cet effet et améliorer ainsi cette méthode, Bouhassoun En 2013 [6] a utilisé la stratégie de Multistage (MFTDM), avec laquelle de bon résultats ont été obtenus.

L'objectif de cet mémoire est d'appliquer la méthode de Multistage Fractional Telescoping Decomposition et aussi la méthode de combinaison qui consiste à utiliser la méthode **MFTDM** avec quelques transformations pour résoudre des équations différentielles fractionnaires.

Notre travail est organisé selon le plan suivant :

Dans le premier chapitre, nous présentons quelques préliminaires concernant les outils de base du calcul fractionnaire et la transformation de **Laplace** et de **Sumudu** pour résoudre les équations différentielles fractionnaires.

Dans le deuxième chapitre, nous exposons la méthode de Mutistage Fractional Telescoping Decomposition **MFTDM**, sa convergence, et quelques exemples .

Dans le troisième chapitre, nous citons la combinaison de la MFTDM avec **Laplace** (**MFTDLM**) et avec **Sumudu** (**MFTDSM**), Ainsi que les applications numériques de ces méthodes aux équations différentielles fractionnaires.

Enfin, nous terminons notre travail par une conclusion et quelques références.

Notions préliminaires

Ce chapitre sera consacré aux définitions élémentaires et notions de base relatif au calcul fractionnaire tels que : l'intégration fractionnaire, la dérivation fractionnaire aux sens de Caputo, et définitions de certaines fonctions, dont la fonction Gamma et Mittag-Leffler qui jouent un rôle très important dans la théorie du calcul fractionnaire et ces applications. Aussi nous présentons quelques transformations comme Laplace et Sumudu

1.1 Fonctions spécial

1.1.1 La fonction Gamma

La fonction Gamma est une fonction complexe, considérée également comme une fonction spéciale. Elle prolonge la fonction factorielle à l'ensemble des nombres complexe [7].

Définition 1.1.1. On appelle fonction **Gamma**, la fonction définit par l'intégrale suivant :

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx, \alpha > 0$$

Propriétés 1.1.1. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction **Gamma** satisfait les propriétés suivantes :

1. $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)$. En effet, par intégration par partie :

$$\begin{aligned} \Gamma(\alpha + 1) &= \int_0^{+\infty} e^{-x} x^\alpha dx \\ &= [-e^{-x} x^\alpha]_0^{+\infty} + \alpha \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\alpha-1} dx \\ &= \alpha\Gamma(\alpha) \end{aligned}$$

2. $\Gamma(\alpha + n) = \alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2)\dots(\alpha + n - 1)\Gamma(\alpha)$
3. $\Gamma(n + 1) = n!$. On a $\Gamma(1) = 1$, par utilisant la propriété(1.1), on obtient

$$\begin{aligned} \Gamma(2) &= 1\Gamma(1) = 1! \\ \Gamma(3) &= 2\Gamma(2) = 2.1! = 2! \\ \Gamma(4) &= 3\Gamma(3) = 3.2! = 3! \\ &\vdots \\ \Gamma(n + 1) &= n\Gamma(n) = n!. \end{aligned}$$

1.1.2 La fonction de Mittag-Leffler

La généralisation de la fonction exponentielle e^t à un seul paramètre par G-M. la fonction Mittag-Leffler est désignée par la relation [18]

$$E_\alpha(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}. \quad (1.1)$$

La fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres a été introduite par Agarwal. Elle est définie par la développement en série

$$E_{\alpha,\beta}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}. \quad (1.2)$$

Pour $\beta = 1$, on retrouve la relation (1.1). A partir de (1.2), on démontre que

$$E_{1,1}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(k + 1)} = e^t$$

1.2 Intégrales et dérivées fractionnaires

1.2.1 Intégrale fractionnaire

Définition 1.2.1. Soit $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, on appelle intégrale fractionnaire d'ordre α de f , l'intégrale suivante :

$$I_a^\alpha[f(x)] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt$$

Exemple 1. Soit $f(x) = (x-a)^\beta$, $\beta > -1$

-Calculer $I_a^\alpha[f(x)]$.

Par définition, on a :

$$I_a^\alpha[f(x)] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} (t-a)^\beta dt.$$

On pose : $t = a + (x-a)y$; $dt = (x-a)dy$.

Si $t = a \rightarrow y = 0$; $t = x \rightarrow y = 1$

Alors :

$$\begin{aligned} I_a^\alpha[f(x)] &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 ((x-a) - (x-a)y)^{\alpha-1} ((x-a)y)^\beta (x-a)dy \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (x-a)^{\alpha-1} (1-y)^{\alpha-1} (x-a)^{\beta+1} y^\beta dy \\ &= \frac{(x-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-y)^{\alpha-1} y^\beta dy \\ &= \frac{(x-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \beta(\alpha, \beta + 1) \\ &= \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)} (x-a)^{\alpha+\beta} \end{aligned}$$

1.2.2 Dérivée fractionnaire au sens de Caputo

Définition 1.2.2. Soit $m - 1 < \alpha < m, m \in \mathbb{N}^*$, et $f \in C^m([a, b])$ on appelle dérivée fractionnaire de f au sens de **Caputo**, la fonction définit par [7] :

$${}^c D_a^\alpha [f(x)] = I_a^{m-\alpha} [f^{(m)}(x)] = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^x (x-s)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(s) ds.$$

Exemple 2. Soit; $f(x) = (x-a)^\beta, \beta > -1$
-Calculer ${}^c D_a^\alpha [f(x)]$.

$$\begin{aligned} {}^c D_a^\alpha [f(x)] &= {}^c D_a^\alpha [(x-a)^\beta] \\ &= I^{m-\alpha} \left[\left(\frac{d}{dx} \right)^m (x-a)^\beta \right] \\ &= I^{m-\alpha} \left[\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-m+1)} (x-a)^{\beta-m} \right] \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-m+1)} I^{m-\alpha} [(x-a)^{\beta-m}] \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-m+1)} \frac{\Gamma(\beta-m+1)}{\Gamma(\beta-m+m-\alpha+1)} (x-a)^{\beta-m+m-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} (x-a)^{\beta-\alpha} \end{aligned}$$

Proposition 1.2.1.

1. Soit $m - 1 < \alpha < m$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$${}^c D_a^\alpha [\lambda f(x) + \mu g(x)] = \lambda {}^c D_a^\alpha [f(x)] + \mu {}^c D_a^\alpha [g(x)].$$

2. ${}^c D_a^\alpha [I_a^\alpha [f(x)]] = f(x)$.

3. En générale, on a pas : $I_a^\alpha [{}^c D_a^\alpha [f(x)]] = f(x)$.

4. $I_a^\alpha [{}^c D_a^\alpha [f(x)]] = f(x) + \sum_{j=0}^{m-1} \frac{f^{(j)}}{j!} (x-a)^j$.

5. Si $0 \leq \alpha \leq \beta \leq 1$, et $\alpha + \beta \leq 1$, et $f \in C^1$. Alors

$${}^c D_a^\alpha [{}^c D_a^\beta [f(x)]] = {}^c D_a^{\alpha+\beta} [f(x)] = {}^c D_a^\beta [{}^c D_a^\alpha [f(x)]].$$

1.3 Transformation de Laplace

Transformation de Laplace est une méthode utilisé pour résoudre des équations telle que les équations différentielles linéaires et les équations fractionnaires, cette méthode fut introduite par le mathématicien Pierre-Simon de Laplace en 1737, elle a pris son nom « Transformation de Laplace » [2].

1.3.1 Définition et propriétés

Définition 1.3.1. Soit f une fonction réelle, on appelle **transformation de Laplace** de f , la fonction F défini par :

$$F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt = L[f(t), s]$$

Si on a une fonction de deux variables $f(x, t)$, alors

$$L[f(x, t)] = F(x, s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(x, t) dt.$$

Propriétés 1.3.1.

1. **linéarité :**

Soient f, g deux fonctions continues sur \mathbb{R} , admettant des transformations de Laplace, alors

$$\begin{aligned} L[(\alpha f + \beta g), s] &= \alpha L[f(t), s] + \beta L[g(t), s] \\ &= \alpha F(s) + \beta G(s). \end{aligned}$$

2. **Multiplication par un constante :**

La transformation de **Laplace** de n'importe quelle fonction $f(t)$ multiplié a un nombre constante $c \in \mathbb{R}$ est défini comme suit :

$$L[cf(t)] = cL[f(t)]$$

3. **Dérivée**

Soit f une fonction continue et dérivable, la transformation de **Laplace** de la première dérivée est donnée par :

$$\begin{aligned} L[f'(t)] &= sL[f(t)] - f(0) \\ &= sF(s) - f(0). \end{aligned}$$

Pour la dérivée second :

$$L[f''(t)] = s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)$$

Pour la troisième dérivée on a :

$$L[f^{(3)}(t)] = s^3 F(s) - s^2 f(0) - sf'(0) - f''(0)$$

Et pour la transformé de la n -ième dérivée :

$$\begin{aligned} L[f^{(n)}(t)] &= s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - \dots - sf^{n-2}(0) - f^{n-1}(0) \\ &= s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0) \end{aligned}$$

4. **Produit de convolution**

On a :

$$\begin{aligned} (f * g)(t) &= \int_0^t f(t-s)g(s) ds \\ &= \int_0^t f(s)g(t-s) ds. \end{aligned}$$

Alors la transformation de **Laplace** sera comme suit :

$$L[(f * g)(t)] = F(s).G(s)$$

Où , $F(s), G(s)$ sont la transformation de **Laplace** de f, g (respectivement)

1.3.2 Transformée inverse de Laplace

Définition 1.3.2. La transformation inverse de **Laplace** est donnée par :

$$f(t) = L^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st} F(s) ds.$$

Dans le tableau suivant la transformation de **Laplace** de quelques fonctions usuelles

$F(s)$	$f(t) = L^{-1}[F(s), t]$
$\frac{1}{s}$	1
$\frac{1}{s^\alpha}$	$\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$
$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}
$\frac{1}{(s+a)^\alpha}$	$\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-at}$
$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\cos(at)$
$\frac{a}{s^2+a^2}$	$\sin(at)$
$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\cosh(at)$
$\frac{a}{s^2-a^2}$	$\sinh(at)$
$\frac{1}{s^\alpha - a}$	$t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(at^\alpha)$
$\frac{s^\alpha}{s(s^\alpha + a)}$	$E_\alpha(-at^\alpha)$
$\frac{a}{s(s^\alpha + a)}$	$1 - E_\alpha(-at^\alpha)$
$\frac{1}{s^\alpha(s-a)}$	$t^\alpha E_{1,\alpha+1}(at)$
$\frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha - a}$	$t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(at^\alpha)$
$\frac{1}{(s-a)(s-b)}$	$\frac{1}{a-b} (e^{at} - e^{bt})$

TABLE 1.1 – Transformation de Laplace de quelques fonctions

Exemple 3. Utiliser le tableau pour calculer $L^{-1}F(s)$, avec

$$F(s) = \frac{1}{s+4} + \frac{s}{s^2+9}$$

$$\begin{aligned} L^{-1}F(s) &= L^{-1} \frac{1}{s+4} + L^{-1} \frac{s}{s^2+9} \\ &= e^{-4t} + \cos(3t) \end{aligned}$$

1.3.3 Transformé de Laplace pour l'intégrale fractionnaire

L'intégrale fractionnaire de $f(t)$ d'ordre α définie par :

$$\begin{aligned} I^\alpha[f(t)] &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds. \\ &= \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} * f(t). \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned} L[I^\alpha f(t)] &= L\left[\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} * f(t)\right] \\ &= L\left[\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right] \cdot L[f(t)] \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} L[t^{\alpha-1}] \cdot L[f(t)]. \end{aligned}$$

Pour $L[t^{\alpha-1}] = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-st} dt$.

On pose : $y = st$; $\Rightarrow dy = s dt$

Alors,

$$\begin{aligned} L[t^{\alpha-1}] &= \int_0^{+\infty} \frac{y^{\alpha-1}}{s^{\alpha-1}} e^{-y} \frac{dy}{s} \\ &= \frac{1}{s} \int_0^{+\infty} y^{\alpha-1} e^{-y} dy \\ &= s^{-\alpha} \Gamma(\alpha). \end{aligned}$$

Donc, $\frac{1}{\Gamma(\alpha)} L[t^{\alpha-1}] = s^{-\alpha}$, et $L[f(t)] = F(s)$.

D'où ,

$$L[I^\alpha[f(t)]] = s^{-\alpha} F(s).$$

1.3.4 Transformé de Laplace de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo

Théorème 1.3.1. [2] Supposons que $F(s)$ est la transformation de **Laplace** de f , alors la transformation de **Laplace** de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre α , $n - 1 < \alpha < n$ est donné par :

$$L[{}^c D^\alpha f(t)] = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0)$$

Preuve 1. On a : ${}^c D^\alpha f(t) = I^{n-\alpha}[D^n f(t)]$.

Posons : $g(t) = D^n f(t)$.

$$\begin{aligned} {}^c D^\alpha f(t) &= I^{n-\alpha}[g(t)] \\ L[{}^c D^\alpha f(t)] &= L[I^{n-\alpha}[g(t)]] \\ &= s^{-(n-\alpha)} G(s). \end{aligned}$$

Où ,

$$\begin{aligned} G(s) &= L[g(t)] = L[D^n f(t)] \\ &= s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0). \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} L[{}^c D^\alpha[f(t)]] &= s^{-(n-\alpha)} s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0). \\ &= s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0). \end{aligned}$$

1.3.5 Applications de la transformation de Laplace aux équations différentielles

Exemple 4. [1] Soit l'équation

$$u'(t) + u(t) = 1 \tag{1.3}$$

Avec la condition initial $u(0) = 0$

En appliquant transformation de Laplace aux deux cotés de (1.3), on obtient

$$\begin{aligned} L[u'(t)] + L[u(t)] &= L[1] \\ sL[u(t)] - u(0) + L[u(t)] &= \frac{1}{s} \end{aligned} \tag{1.4}$$

D'où

$$L[u(t)](s+1) = \frac{1}{s}$$

Alors

$$L[u(t)] = \frac{1}{s(s+1)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}$$

On conclut que

$$u(t) = L^{-1} \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} \right] = 1 - e^{-t}$$

Exemple 5. [2] Soit l'équation suivante

$${}^c D^{2/3} u(x) = 2u(x) + 2 \tag{1.5}$$

Appliquant la transformation de Laplace aux deux cotés de (1.5), on trouve

$$\begin{aligned} L[{}^c D^{2/3} u(x)] &= L[2u(x) + 2] \\ s^{2/3} L[u(x)] - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\frac{2}{3}-k-1} u^{(k)}(0) &= 2L[u(x)] + \frac{2}{s} \end{aligned}$$

Si on pose $\sum_{k=0}^{n-1} s^{\frac{2}{3}-k-1} u^{(k)}(0) = b$, alors on obtient

$$\begin{aligned} s^{2/3} L[u(x)] - b &= 2L[u(x)] + \frac{2}{s} \\ L[u(x)](s^{\frac{2}{3}} - 2) &= b + \frac{2}{s} \\ L[u(x)] &= \frac{b}{s^{\frac{2}{3}} - 2} + \frac{2}{s(s^{\frac{2}{3}} - 2)} \end{aligned}$$

L'inverse de Laplace nous donne

$$u(x) = bt^{-\frac{1}{3}} E_{\frac{2}{3}, \frac{2}{3}}(2t^{\frac{2}{3}}) + 1 - E_{\frac{2}{3}}(2t^{\frac{2}{3}})$$

1.4 Transformation de Sumudu

Transformation de **Sumudu** introduite par Watugala en 1993, a été fréquemment utilisé pour résoudre des équations différentielles ordinaire. La transformation de **Sumudu** donne des résultats dans certains les cas où d'autres échouent. De plus, pour certains problèmes cette transformation donne de meilleurs résultats par rapport à la transformation de **Laplace**.

1.4.1 définition et propriétés

Définition 1.4.1. Soit l'ensemble A des fonctions f , définit par [1]

$$A = \{f(t); \exists M, \tau_1, \tau_2 > 0; |f(t)| < Me^{t/\tau_j} \quad \text{si } t \in (-1)^j \times [0, \infty)\}$$

Pour $f \in A$; sa transformation de **sumudu** est définie par :

$$G(u) = S[f(t)] = \int_0^{+\infty} f(ut)e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t/u}}{u} f(t) dt. \quad u \in (\tau_1, \tau_2), \operatorname{Re}(u) > 0$$

Exemple 6. Appliquer la transformation de **Sumudu** à la fonction

$$f(t) = \cos(at), t \geq 0.$$

Par l'intégration par parties, on trouve

$$\begin{aligned} S[\cos(at)] &= \int_0^{\infty} \cos(uat)e^{-t} dt \\ &= 1 - (ua)^2 \int_0^{\infty} \cos(uat)e^{-t} dt \\ &= \frac{1}{1 + (au)^2}. \end{aligned}$$

Théorème 1.4.1. [3] Soient $f \in A$, $F(s)$ est sa transformation de **Laplace**, La transformation de **sumudu** G de $f(t)$ est donnée par :

$$G(u) = \frac{F(1/u)}{u}$$

Preuve 2. La transformation de **Laplace** de la fonction $f(t)$, pour $\operatorname{Re}(s) > 0$ est définie par

$$F(s) = L[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt,$$

après un changement de variable, $w = st$ avec $dw = sdt$,

$$F(s) = L[f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-w} f(w/s) dw/s = \frac{S[f(t)]_{u=1/s}}{s} = G(1/s)/s,$$

qui alternativement après réglage, $s = 1/u$, donne

$$G(u) = \frac{F(1/u)}{u}$$

Propriétés 1.4.1.

1. *linéarité :*

$$S[\alpha f(t) + \beta g(t)] = \alpha S[f(t)] + \beta S[g(t)]$$

2. *Transformation de Sumudu de la convolution :*

$$S[(f * g)(t)] = uS[f(t)].S[g(t)]$$

3. *Dérivées :*

Soit $n = 1$, et soit $G_1(u)$ la transformation de **Sumudu** de la première dérivée $f^1(t)$, de la fonction $f(t)$. Alors

$$S \left[\frac{df(t)}{dt} \right] = G_1(u) = \frac{G(u) - f(0)}{u}.$$

Pour $n = 2$, on a

$$S \left[\frac{d^2 f(t)}{dt^2} \right] = G_1(u) = \frac{1}{u^2} \left[G(u) - f(0) - u \frac{df(0)}{dt} \right].$$

Si nous continuons de la même manière, nous obtenons la transformation de **Sumudu** de la dérivée d'ordre n , comme suit :

$$S \left[\frac{d^n f(t)}{dt^n} \right] = G_n(u) = \frac{G(u)}{u^n} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{u^{n-k}}$$

1.4.2 Transformée inverse de Sumudu

La transformation inverse de **Samudu** est donnée par la formule suivante :

$$f(t) = S^{-1}[G(u)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{ut} G\left(\frac{1}{u}\right) \frac{du}{u}.$$

Dans le tableau suivant la transformation de **Sumudu** de quelques fonctions usuelles

$S[f(t)]$	$f(t) = S^{-1}[G(u), t]$
1	1
u	t
u^α	$\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$
u^{n-1}	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}, n = 1, 2, \dots$
u^{a-1}	$\frac{t^{a-1}}{\Gamma(a)}, a > 0$
$\frac{1}{1-au}$	e^{at}
$\frac{u}{(1-au)^2}$	te^{at}
$\frac{u}{(1-au)(1-bu)}, a \neq b$	$\frac{1}{(a-b)}(e^{at} - e^{bt})$
$\frac{1}{1+\omega^2 u^2}$	$\cos \omega t$

TABLE 1.2 – La transformation de Sumudu de quelques fonctions

Exemple 7. Utilisant le tableau pour calculer $S^{-1}G(u)$ avec

$$G(u) = \frac{u}{(1-4u)^2} + \frac{1}{1+u^2}$$

$$\begin{aligned} S^{-1}[G(u)] &= S^{-1} \left[\frac{u}{(1-4u)^2} \right] + S^{-1} \left[\frac{1}{1+u^2} \right] \\ &= te^{4t} + \cos t \end{aligned}$$

1.4.3 Transformation de Sumudu pour l'intégrale fractionnaire

Théorème 1.4.2. [13] Si $G(u)$ est Sumudu de $f(t)$, alors la transformation de Sumudu de l'intégrale fractionnaire d'ordre α est donnée par

$$S[D^\alpha f(t)] = u^\alpha G(u), \quad \text{Re}(\alpha) > 0.$$

1.4.4 Transformation de Sumudu de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo

Théorème 1.4.3. [14] Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha > 0$ tels que $n - 1 < \alpha \leq n$ et $G(u)$ la transformé de Sumudu de la fonction $f(t)$, alors la transformation de Sumudu de la dérivée fractionnaire de Caputo de $f(t)$ d'ordre α est donnée par :

$$S[{}^c D^\alpha f(t), u] = u^{-\alpha} G(u) - \sum_{k=0}^{n-1} u^{k-\alpha} f^{(k)}(0); \quad 0 \leq n - 1 < \alpha \leq n.$$

Si f une fonction de deux variables, alors

$$S[{}^c D^\alpha f(x, t), u] = u^{-\alpha} G(x, u) - \sum_{k=0}^{n-1} u^{k-\alpha} f^{(k)}(x, 0); \quad 0 \leq n - 1 < \alpha \leq n.$$

1.5 Applications de la transformation de Sumudu aux équations différentielles

Exemple 8. [14] On considère l'équation suivante

$${}^c D^\alpha y(t) + ay(t) = 0, \quad 0 < \alpha \leq 1 \tag{1.6}$$

Avec $y(0) = c_1$, tel que a, c_1 sont des constantes, et ${}^c D^\alpha$ est la dérivée fractionnaire au sens de Caputo

Appliquant Sumudu aux deux cotés de (1.6), on obtient

$$\begin{aligned} S[{}^c D^\alpha y(t)] + aS[y(t)] &= 0 \\ u^{-\alpha} S[y(t)] - u^{-\alpha} y(0) + aS[y(t)] &= 0 \\ S[y(t)](u^{-\alpha} + a) &= c_1 u^{-\alpha} \\ S[y(t)] &= \frac{c_1 u^{-\alpha}}{(u^{-\alpha} + a)} \\ S[y(t)] &= \frac{c_1}{(au^\alpha + 1)} \end{aligned}$$

Prenant l'inverse de la transformation de Sumudu, on trouve

$$y(t) = c_1 E_\alpha(-at^\alpha).$$

Exemple 9. [15] Soit l'équation fractionnaire suivante

$$D^{1/2}y(t) - y(t) = -1, \quad D^{1/2}y(0) = 0. \quad (1.7)$$

On applique la transformation de Sumudu aux deux membres de (1.7) comme suit

$$\begin{aligned} S[D^{1/2}y(t)] - S[y(t)] + S[1] &= 0 \\ S[D^{1/2}y(t)] - S[y(t)] &= -S[1] \\ u^{-1/2}S[y(t)] - u^{-1}D^{1/2}y(0) - S[y(t)] &= -1 \\ S[y(t)](u^{-1/2} - 1) &= -1 \\ S[y(t)] &= \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{u} - 1} = \frac{u + \sqrt{u}}{u - 1} \\ &= \frac{u - 1 + 1 + \sqrt{u}}{u - 1} = 1 - \frac{1}{1 - u} - \frac{\sqrt{u}}{1 - u} \end{aligned}$$

L'inverse de Sumudu nous donne

$$y(t) = 1 - e^t - e^t \operatorname{erf} \sqrt{t}$$

La méthode Multistage Telescoping Decomposition (MFTDM)

La méthode de Telescoping Decomposition (**TDM**) a été proposée par Ali-Refai en 2008 [8] pour résoudre une équation différentielle ordinaire. Cette méthode est une forme modifiée de la méthode **ADM** où les polynômes d'Adomian ne sont pas à calculer.

La méthode **TDM** a été appliquée à des équations différentielles d'ordre 2, à des équations d'ordre fractionnaire (FTDM), et en 2013 bouhassoun [6] a utilisée la stratégie de Multistage (MFTDM).

la solution numérique selon la méthode (TDM) est de considérée une série de fonctions qui converge vers la solution exacte quand elle existe.

2.1 Description de la méthode

Pour illustrer les idées de base de cette méthode, on considère une équation différentielle non linéaire suivante

$$Lu + Ru + Nu = g(\tau) \tag{2.1}$$

Avec les conditions initiales

$$u^{(k)}(0^+) = C_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Tel que L est un opérateur linéaire, N est un opérateur non linéaire, R est la partie linéaire restante et g une fonction donnée.

Le principe de la **TDM** est de considérer la solution u sous forme d'une série infinie

$$u(\tau) = \sum_{r=0}^{\infty} u_r(\tau) \tag{2.2}$$

et le terme non linéaire Nu comme une suite infinie des termes .

$$Nu(\tau) = \sum_{r=0}^{\infty} N_r u(\tau) \tag{2.3}$$

D'où, Nu peut être calculer par :

$$\begin{cases} N_0 u(\tau) = Nu_0(\tau) \\ N_r u(\tau) = NU_r(\tau) - NU_{r-1}(\tau). \end{cases}$$

Avec,

$$U_r(\tau) = \sum_{k=0}^r u_k(\tau), \quad U_{r-1}(\tau) = \sum_{k=0}^{r-1} u_k(\tau). \quad r = 1, 2, 3, \dots$$

Et on peut écrire Ru comme :

$$Ru(\tau) = \sum_{r=0}^{\infty} Ru_r(\tau).$$

g : est la fonction source.

2.1.1 La méthode de (Multistage Fractional Telescoping Decomposition Method)(MFTDM)

[6]Le principe de **MFTDM** est basé sur la décomposition de l'intervalle du temps $[0, T]$ en une suite de sous-intervalles

$$[t_0, t_1], [t_1, t_2], \dots, [t_{N-1}, t_N], \quad \text{telque} \quad t_0 = 0, t_N = T \quad \text{et} \quad \bigcup_0^{N-1} [t_i, t_{i+1}] = [0, T],$$

où les sous-intervalles ayant la même longueur, ie, $\Delta t_i = \Delta t, (i = 0, 1, \dots, N - 1)$.

Plus précisément l'équation (2.3) peut être résolu par **TDM** dans chaque intervalle séquentiel $\Omega_i (i = 0, 1, \dots, N - 1)$.

La solution du problème (2.1) est fourni par morceaux, on aura dans $\Omega_0 = [\tau_0, \tau_1]$

$$\Phi_{N_0}^0(\tau) = \sum_{k=0}^{N_0} u_k^0(\tau) = u_0^0(\tau) + u_1^0(\tau) + \dots + u_{N_0}^0(\tau)$$

Et dans chaque intervalle $\Omega_i = [\tau_i, \tau_{i+1}], (i = 0, 1, \dots, N - 1)$, on mets

$$\begin{cases} u_0^i(\tau) & = \Phi_{N_0}^{i-1}(\tau) \\ \Phi_{N_0}^i(\tau) & = \sum_{k=0}^{N_0} u_k^i(\tau) \end{cases}$$

2.2 La convergence de la méthode MFTDM

Dans cette section, on étudie la convergence de la méthode MFTDM. Soit l'équation

$$Lu + Nu = g(\tau) \tag{2.4}$$

Théorème 2.2.1. Soient $u_n(\tau)$, et $u(\tau)$ sont définies dans l'espace de Banach $\mathbb{C}([0, T], \|\cdot\|)$. Alors, la solution approximative de la série $\{u_n(\tau)\}_{n=1}^{\infty}$ définie par (2.2) converge vers la solution exacte $u(\tau)$ de (2.4).

Preuve 3. Soit $s_n(\tau)$ la suite des sommes partielles de la série $\{u_n(\tau)\}_{n=1}^{\infty}$ définie par

$$s_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$$

On va montrer que $(s_n)_{n \leq \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{C}[0, T], \|\cdot\|$.

En utilisant le schéma itératif

$$\begin{cases} s_0 = 0 \\ s_{n+1} = N(s_n + u_0) = N(\sum_{k=0}^n u_k(\tau)). \end{cases}$$

On considère

$$\begin{aligned}
 \|s_{n+1} - s_n\| &= \|u_{n+1}\| \\
 &\leq \alpha \|u_n\| \\
 &\leq \alpha^2 \|u_{n-1}\| \\
 &\leq \dots \leq \alpha^{n+1} \|u_0\|.
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Maintenant, pour chaque $n, m \in \mathbb{N}, n \geq m$, il y a deux sommes partielles arbitraires s_n et s_m , à l'aide de (2.5) et l'inégalité triangulaire, il vient successivement :

$$\begin{aligned}
 \|s_n - s_m\| &\leq \|s_n - s_{n-1}\| + \|s_{n-1} - s_{n-2}\| + \dots + \|s_{m+1} - s_m\| \\
 &\leq [\alpha^n + \alpha^{n-1} + \alpha^{n-2} + \dots + \alpha^{m+1}] \|u_0\| \\
 &\leq \alpha^{m+1} [\alpha^{n-m-1} + \alpha^{n-m-2} + \alpha^{n-2} + \dots + \alpha + 1] \|u_0\| \\
 &\leq \alpha^{m+1} \left(\frac{1 - \alpha^{n-m}}{1 - \alpha} \right) \|u_0\|.
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Comme $0 < \alpha < 1$, on a $1 - \alpha^{n-m} < 1$ et par suite

$$\|s_n - s_m\| \leq \frac{\alpha^{m+1}}{1 - \alpha} \|u_0\|.$$

Comme u_0 est borné,

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \|s_n - s_m\| = 0.$$

Par conséquent, (s_n) est une suite de Cauchy dans l'espace complet $(\mathbb{C}[0, T], \|\cdot\|)$, donc elle est convergente, ie

$$\exists s \in \mathbb{C}[0, T] \quad \text{avec} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \sum_{k=0}^n u_k = s$$

2.3 Estimation d'erreur

Théorème 2.3.1. *L'erreur de troncature absolue maximale de la solution sous forme de la série (2.3) du problème (2.1), est estimée par :*

$$\left| u(\tau) - \sum_{k=0}^m u_k(\tau) \right| \leq \frac{\alpha^{m+1}}{1 - \alpha} \|u_0\|. \tag{2.7}$$

2.4 Exemple d'une équation différentielle résolue par la méthode TDM.

Exemple 10. [17] On considère l'équation différentielle

$$u' = 2u - u^2, u(0) = 1 \tag{2.8}$$

Nous appliquons la méthode TDM pour obtenir

$$u(\tau) = u(0) + \int_0^\tau (2u - u^2) d\tau = 1 + \int_0^\tau (2u - u^2) d\tau$$

Nous prenons :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0(\tau) = 1 \\ u_1(\tau) = \int_0^\tau (2u_0 - (u_0)^2) d\tau = \tau \\ u_2(\tau) = \int_0^\tau [2(u_0 + u_1) - (u_0 + u_1)^2] d\tau - \int_0^t (2u_0 - (u_0)^2) = \int_0^\tau [2(1 + \tau) - (1 + t)^2] d\tau - \int_0^t d\tau; \\ \quad = \frac{-\tau^2}{3} \\ u_3(\tau) = \int_0^\tau [2(u_0 + u_1 + u_2) - (u_0 + u_1 + u_2)^2] d\tau - \int_0^\tau [2(u_0 + u_1) - (u_0 + u_1)^2] \\ \quad = \frac{2\tau^5}{15} - \frac{\tau^7}{63} \\ u_4(\tau) = \int_0^\tau [2(\sum_{i=0}^3 u_i) - (\sum_{i=0}^3 u_i)^2] d\tau - \int_0^\tau [2(\sum_{i=0}^2 u_i) - (\sum_{i=0}^2 u_i)^2] \\ \quad = \frac{-22\tau^7}{315} - \frac{11\tau^9}{2835} - \frac{134\tau^{11}}{51975} + \frac{4\tau^{13}}{12285} - \frac{\tau^{15}}{59535} + \dots \end{array} \right.$$

Ainsi la solution approximative est donnée par

$$u(\tau) = \sum_{r=0}^{\infty} u_r(\tau) = 1 + \tau - \frac{\tau^3}{3} + \frac{2\tau^5}{15} - \frac{17\tau^7}{315} + \frac{11\tau^9}{2835} + \dots = 1 + \tanh(\tau)$$

Le choix de la condition initiale n'est pas unique

Dans l'exemple ci-dessous, la valeur $u_0 = \tau$ peut être prise comme condition initiale de l'équation (2.9).

Exemple 11. [16] Considérons l'équation suivante

$$u'(\tau) = 1 + u^2(\tau); \quad u(0) = 0 \tag{2.9}$$

La solution exacte de l'équation (2.9) est $u(\tau) = \tan(\tau)$ dont le développement en série de Taylor au voisinage de 0 à l'ordre 9 est :

$$u(\tau) = \tau + \frac{\tau^3}{3} + \frac{2\tau^5}{15} + \frac{17\tau^7}{315} + \frac{62\tau^9}{2835} + \dots$$

Nous avons $u(\tau) = u(0) + \tau + \int_0^\tau u^2 d\tau$, et comme $u(0) = 0$, en commençant par $u_0 = \tau$ nous obtenons :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1(\tau) = \frac{1}{3}\tau^3 \\ u_2(\tau) = \frac{2}{15} + \frac{1}{63}\tau^7 \\ u_3(\tau) = \frac{4}{105}\tau^7 + \frac{38}{2835}\tau^9 + \frac{134}{51975}\tau^{11} + \frac{4}{12285}\tau^{13} + \frac{1}{59535}\tau^{15} \\ u_4(\tau) = \frac{8}{945}\tau^9 + \frac{148}{31185}\tau^{11} + \frac{11344}{6081075}\tau^{13} + \frac{366292}{638512875}\tau^{15} \\ \quad + \frac{1522814}{10854718875}\tau^{17} + \dots + \frac{1}{10987690297}\tau^{31}. \end{array} \right.$$

Par conséquent

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \dots = \tau + \frac{1}{3}\tau^3 + \frac{2}{15}\tau^5 + \frac{17}{315}\tau^7 + \frac{62}{2835}\tau^9 + O[\tau]^{11}.$$

Exemple 12. [17] Soit l'équation différentielle partielle

$$u_\tau + u.u_x = x + x\tau^2, \quad u(x, 0) = 0;$$

nous appliquons la méthode TDM, pour trouver

$$u(x, \tau) = u(x, 0) + \int x d\tau + \int x\tau^2 dt - \int uu_x d\tau,$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0(\tau) = x\tau \\ u_1(\tau) = \frac{x\tau^3}{3} - \int x\tau^2 d\tau = \frac{x\tau^3}{3} - \frac{x\tau^3}{3} = 0. \end{array} \right.$$

Donc la solution est donnée par $u(x, \tau) = x\tau$

2.5 Résolution d'une EDO de deuxième ordre par la méthode TDM

Dans cette section, nous allons appliquer la méthode TDM pour résoudre les équations différentielles d'ordre fractionnaire, que nous appellerons FTDM [17]

Exemple 13. *Considérons l'équation suivante :*

$$u_{xx} - uu_{\tau\tau} = 2 - 2(\tau^2 + x^2),$$

avec les conditions initiales

$$u(x, 0) = x^2, u(0, \tau) = \tau^2, u_x(0, \tau) = 0.$$

Cette équation est mise la sous forme $u_{xx} = f(x, \tau, u, u_{\tau\tau})$ et grâce à une double intégration de u_{xx} , nous obtenons

$$\begin{cases} u(x, \tau) &= u(x, 0) + xu_x(x, 0) + \int \int f(x, \tau, u, u_{\tau\tau}) dx dx \\ &= \tau^2 + \int \int [2 - 2(\tau^2 + x^2) + uu_{\tau\tau}] dx dx \\ &= \tau^2 + x^2 - x^2\tau^2 - \frac{x^2}{6} + \int \int [uu_{\tau\tau}] dx dx. \end{cases}$$

Nous prenons comme condition initiale $u_0 = \tau^2 + x^2$.

$$\begin{cases} u_1(x, \tau) &= -x^2\tau^2 - \frac{x^2}{6} + \int \int [2(\tau^2 + x^2)] dx dx \\ u_1(x, \tau) &= -x^2\tau^2 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^2}{6} = 0, \end{cases}$$

donc la solution est égale à

$$u(x, \tau) = \sum_{r=0}^{\infty} u_r(x, \tau) = \tau^2 + x^2.$$

2.6 Application de la méthode TDM pour la résolution de l'équation différentielle fractionnaire

Exemple 14. [6] *Soit l'équation différentielle fractionnaire non linéaire suivante*

$${}^c D^\alpha u(\tau) + \tau u^2(\tau) = \frac{32}{21\Gamma(3/4)} \tau^{7/4} + \tau^5, u(0) = 0$$

Selon la méthode FTDM, et pour $\alpha = \frac{1}{4}$, nous obtenons

$$\begin{cases} u_1(\tau) &= I^{\frac{1}{4}} f(\tau, u_0(\tau)) = \tau^2 + 0.649137\tau^{\frac{21}{4}} \\ u_2(\tau) &= I^{\frac{1}{4}} f(\tau, u_0(\tau) + u_1(\tau)) - I^{\frac{1}{4}} f(\tau, u_0(\tau)) = -0.649137\tau^{\frac{21}{4}} - 0.75091\tau^{\frac{27}{4}} - 0.2258\tau^{\frac{47}{4}} \\ u_3(\tau) &= I^{\frac{1}{4}} f(\tau, u_0(\tau) + u_1(\tau) + u_2(\tau)) - I^{\frac{1}{4}} f(\tau, u_0(\tau) + u_1(\tau)) = 1.110223024626 \cdot 10^{-16} \tau^{\frac{21}{4}} + 0.75091\tau \\ &\quad + 1.03183\tau^{\frac{47}{4}} + 0.228051\tau^{15} - 0.272273\tau^{\frac{73}{4}} - 0.157046\tau^{\frac{43}{2}} - 0.0227726\tau^{\frac{99}{4}}, \end{cases}$$

donc les quatre premiers termes des solutions approximatives sont

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^3 u_r(\tau) &= \tau^2 + 5.551115123 \cdot 10^{-16} \tau^{\frac{21}{4}} - 5.67653490795 \cdot 10^{-16} \tau^{\frac{17}{2}} + 0.80603\tau^{\frac{47}{4}} \\ &\quad + 0.228051\tau^{15} - 0.272273\tau^{\frac{73}{4}} - 0.157046\tau^{\frac{43}{2}} - 0.0227726\tau^{\frac{99}{4}} + \dots \end{aligned}$$

Exemple 15. [6] *Considérons l'équation fractionnaire de Riccati*

$$\frac{d^\alpha u}{d\tau^\alpha} = -u^2(\tau) + 1, 0 < \alpha < 1,$$

la condition initiale est $u(0) = 0$.

Par l'utilisation de Maple, les premiers termes de la série sont donnés par

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1(\tau) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\tau^\alpha \\ u_2(\tau) = I^\alpha(-u_1^2 - 2u_0u_1) = \frac{-\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)^2\Gamma(3\alpha+1)}t^{3\alpha} \\ u_3(\tau) = I^\alpha(-u_2^2 - u_1u_2 - 2u_0u_2) = \frac{\Gamma(2\alpha+1)^2\Gamma(6\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)^4\Gamma(3\alpha+1)^2\Gamma(7\alpha+1)}t^{7\alpha} \\ \quad - \frac{2\Gamma(2\alpha+1)\Gamma(4\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)^3\Gamma(3\alpha+1)\Gamma(5\alpha+1)}t^{5\alpha} \\ \vdots \end{array} \right.$$

donc les quatre premiers termes des solutions approximatives sont

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^3 u_r(\tau) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\tau^\alpha + \frac{-\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)^2\Gamma(3\alpha+1)}\tau^{3\alpha} + \frac{\Gamma(2\alpha+1)^2\Gamma(6\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)^4\Gamma(3\alpha+1)^2\Gamma(7\alpha+1)}\tau^{7\alpha} \\ &\quad - \frac{2\Gamma(2\alpha+1)\Gamma(4\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)^3\Gamma(3\alpha+1)\Gamma(5\alpha+1)}\tau^{5\alpha} + \dots \end{aligned}$$

La méthode MFTDM combiné avec quelques transformations

Dans ce qui suit, nous exposons les principes de la méthode " Multistage Telescoping Decomposition " combinée avec les transformations de Laplace et Sumudu.

3.1 MFTDM combinée avec la transformation de Laplace MFTDLM

3.1.1 Résolution de l'équation différentielle fractionnaire non-linéaire

considérons l'équation différentielle fractionnaire d'ordre α , ($n - 1 < \alpha < n$, $n = 1, 2, \dots$)

$${}^c D_\tau^\alpha u(\tau) + Ru(\tau) + Nu(\tau) = g(\tau). \quad (3.1)$$

Et les conditions initiales

$$u^{(k)}(0^+) = c_k; \quad k = 0, 1, \dots, n - 1. \quad (3.2)$$

Où ${}^c D^\alpha$ est dérivées fractionnaires au sens de Caputo de la fonction $u(\tau)$. R est le reste de la partie linéaire, N représente l'opérateur différentiel non-linéaire général, et $g(\tau)$ est le terme source.

Théorème 3.1.1. *La solution de l'équation différentielle non-linéaire avec une dérivée fractionnaire au sens de Caputo (3.1),(3.2) par **MFTDLM** est donnée sous la forme d'une série infinie qui converge vers la solution exacte .*

Preuve 4. *On applique la transformation de **Laplace** aux deux cotés de (3.1), il vient*

$$L[D_\tau^\alpha u(\tau)] + L[Ru(\tau)] + L[Nu(\tau)] = L[g(\tau)]$$

*En utilisant la propriété de la transformation de **Laplace**, nous avons*

$$L[u(\tau)] = \sum_{k=0}^{n-1} s^{-k-1} u^{(k)}(0) + s^{-\alpha} [L[g(\tau)] - L[Ru(\tau)] - L[Nu(\tau)]] \quad (3.3)$$

*Par utilisation de la transformé **inverse de Laplace** aux deux membres de l'équation (3.3), cela implique*

$$u(\tau) = G(\tau) - L^{-1} [s^{-\alpha} L[Ru(\tau) + Nu(\tau)]] \quad (3.4)$$

Où $G(\tau)$ représente le terme découlant des termes sources et des conditions initiales prescrites. Maintenant, on applique la méthode **TDM**

$$u(\tau) = \sum_{r=0}^{\infty} u_r(\tau) \quad (3.5)$$

Décomposant le terme non-linéaire comme suit

$$Nu(\tau) = \sum_{r=0}^{\infty} N_r u(\tau) \quad (3.6)$$

En substituant (3.4),(3.5) et (3.6), on aura

$$\sum_{r=0}^{\infty} u_r(\tau) = G(\tau) - L^{-1} \left[s^{-\alpha} L \left[\sum_{r=0}^{\infty} Ru_r(\tau) + \sum_{r=0}^{\infty} N_r u(\tau) \right] \right] \quad (3.7)$$

qui est la combinaison de la méthode MFTDM et de la transformé de Laplace (MFTDLM) .

En utilisant les polynômes N_r et par comparaisons avec les mêmes puissance de u , on obtient les approximations suivantes

$$\begin{aligned} u_0(\tau) &= G(\tau) \\ u_1(\tau) &= -L^{-1} [s^{-\alpha} L[Ru_0(\tau) + N_0 u(\tau)]] \\ u_2(\tau) &= -L^{-1} [s^{-\alpha} L[Ru_1(\tau) + N_1 u(\tau)]] \\ &\vdots \end{aligned}$$

Alors les itérations sont définie par

$$\begin{cases} u_0(\tau) &= G(\tau); \\ u_{r+1}(\tau) &= -L^{-1} [s^{-\alpha} L[Ru_r(\tau) + N_r u(\tau)]] \end{cases}$$

La solution approximative est donc

$$u(\tau) = u_0(\tau) + u_1(\tau) + u_2(\tau) + \dots$$

Exemple 16. [6] Résoudre l'équation différentielle fractionnaire non-linéaire suivante par **MFTDLM**

$${}^c D^\alpha u(\tau) = 1 - u^2, \tau > 0, 0 < \alpha \leq 1 \quad (3.8)$$

Si $\alpha = 1$, la solution exacte de (3.8) est

$$u(\tau) = \tanh(\tau)$$

On applique la transformé de **Laplace** sur les deux cotés de (3.8), on obtient

$$\begin{aligned} L[D^\alpha(u(\tau))] &= L[1 - u^2(\tau)] \\ L[u(\tau)] &= \sum_{k=0}^{n-1} s^{-k-1} u^{(k)}(0) + s^{-\alpha} [L[1] - L[u^2(\tau)]] \end{aligned}$$

On considère la condition initial $u(0) = 0$, on trouve

$$L[u(\tau)] = \frac{1}{s^{\alpha+1}} - s^{-\alpha}L[u^2(\tau)]$$

La transformée **inverse de Laplace** nous donne

$$u(\tau) = \frac{\tau^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} - L^{-1}[s^{-\alpha}L[u^2(\tau)]]$$

Appliquant la **TDLM**, on aura

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_r(\tau) = \frac{\tau^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} - L^{-1}[s^{-\alpha}L[\sum_{r=0}^{\infty} N_r u(\tau)]] \quad (3.9)$$

Par la comparaison de deux cotés de (3.9), on a

$$\begin{cases} u_0(\tau) &= \frac{\tau^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \\ u_{r+1}(\tau) &= -L^{-1}[s^{-\alpha}L[N_r u(\tau)]] \end{cases}$$

D'où

$$\begin{cases} N_0 u(\tau) &= N u_0(\tau) \\ N_r u(\tau) &= N U_r(\tau) - N U_{r-1}(\tau), \quad r = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Utilisant la formule d'itération, on obtient

$$\begin{aligned} u_0(\tau) &= \frac{\tau^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)} \\ u_1(\tau) &= -\frac{\Gamma(2\alpha + 1)}{\Gamma^2(\alpha + 1)\Gamma(3\alpha + 1)}\tau^{3\alpha} \\ u_2(\tau) &= \frac{2\Gamma(2\alpha + 1)\Gamma(4\alpha + 1)}{\Gamma^3(\alpha + 1)\Gamma(3\alpha + 1)\Gamma(5\alpha + 1)}\tau^{5\alpha} - \frac{\Gamma^2(2\alpha + 1)\Gamma(6\alpha + 1)}{\Gamma^4(\alpha + 1)\Gamma^2(3\alpha + 1)\Gamma(7\alpha + 1)}\tau^{7\alpha} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Avec

$$\begin{cases} N_0 u(\tau) &= \frac{\tau^{2\alpha}}{\Gamma^2(\alpha+1)} \\ N_1 u(\tau) &= -\frac{2\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma^3(\alpha+1)\Gamma(3\alpha+1)}\tau^{4\alpha} + \frac{\Gamma^2(2\alpha+1)}{\Gamma^4(\alpha+1)\Gamma^2(3\alpha+1)\Gamma(7\alpha+1)}\tau^{7\alpha} + \dots \end{cases}$$

Donc la solution approximative de (3.8) à l'aide de trois premiers termes est donnée par

$$\begin{aligned} u(\tau) &= \frac{\tau^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} - \frac{\Gamma(2\alpha + 1)}{\Gamma^2(\alpha + 1)\Gamma(3\alpha + 1)}\tau^{3\alpha} + \frac{2\Gamma(2\alpha + 1)\Gamma(4\alpha + 1)}{\Gamma^3(\alpha + 1)\Gamma(3\alpha + 1)\Gamma(5\alpha + 1)}\tau^{5\alpha} \\ &\quad - \frac{\Gamma^2(2\alpha + 1)\Gamma(6\alpha + 1)}{\Gamma^4(\alpha + 1)\Gamma^2(3\alpha + 1)\Gamma(7\alpha + 1)}\tau^{7\alpha} + \dots \end{aligned}$$

si on prend $\alpha = 1$, $N_0 = 3$, $N = 6$, $\Delta\tau = 0.5$, on aura la solution approximative de **MFTDLM** pour (3.8) :

$$\begin{cases} \Phi_3^0(\tau) &= \tau - \frac{1}{3}\tau^3 + \frac{2}{15}\tau^5 - \frac{1}{63}\tau^7 + \frac{38}{2835}\tau^9 - \frac{1142}{155925}\tau^{11} + \frac{13324}{6081075}\tau^{13} + \dots; 0 \leq \tau \leq 0,5. \\ \Phi_3^1(\tau) &= 0.4621177611 + 0.7864471749\tau - 0.3634312077\tau^2 + 0.0942010423\tau^3 + \dots; 0.5 \leq \tau \leq 1. \\ \Phi_3^2(\tau) &= 0.9105026758 + 0.1709848774\tau - 0.1556821884\tau^2 + 0.08475408998\tau^3 + \dots; 1 \leq \tau \leq 1.5. \\ \Phi_3^3(\tau) &= 1.057037938 - 0.1173292024\tau + 0.1240214181\tau^2 - 0.091985609950\tau^3 + \dots; 1.5 \leq \tau \leq 2 \\ \Phi_3^4(\tau) &= 0.0999269383 + 0.9238879998\tau - 0.1914271794\tau^2 - 0.1268605330\tau^3 + \dots; 2 \leq \tau \leq 2.5. \\ \Phi_3^5(\tau) &= 0.2628541656 + 0.7476511107\tau - 0.2199651331\tau^2 - 0.02381716917\tau^3 + \dots; 2.5 \leq \tau \leq 3. \end{cases}$$

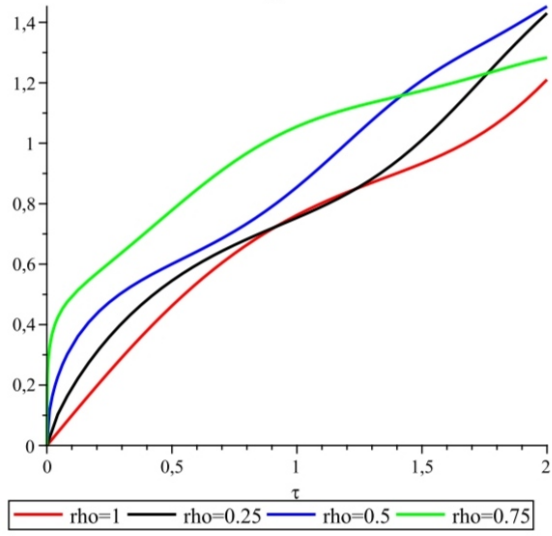


FIGURE 3.1 – La solution approximative de (3.8)

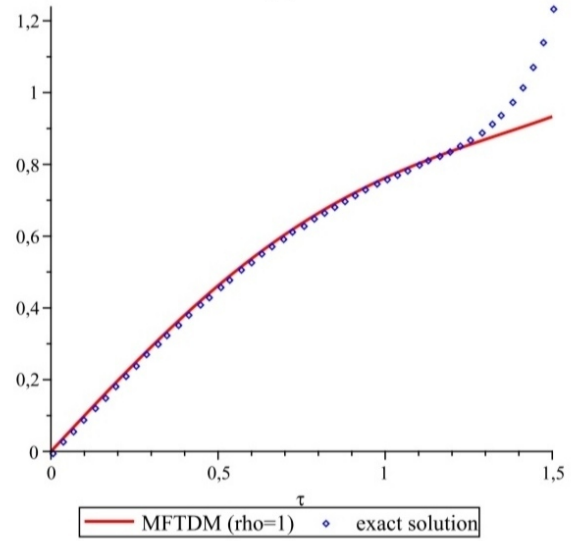


FIGURE 3.2 – La solution exacte de (3.8)

Exemple 17. *x [6] On considère l'équation fractionnaire non-linéaire suivante :*

$$D_{\tau}^{\alpha}u(\tau) = 1 + 2u(\tau) - u^2(\tau), \tau > 0, 0 < \alpha \leq 1 \quad (3.10)$$

Avec la condition initiale $u(0) = 0$

Si $\alpha = 1$, la solution exacte de (3.10) est :

$$u(\tau) = 1 + \sqrt{2} \tanh(\sqrt{2}\tau - \ln(\sqrt{2} + 1))$$

*On applique **Laplace** aux deux cotés de (3.10) avec la condition initiale, On trouve :*

$$\begin{aligned} L[u(\tau)] &= \sum_{k=0}^{n-1} s^{-k-1}u^{(k)}(0) + s^{-\alpha}L[1] + 2s^{-\alpha}L[u(\tau)] - s^{-\alpha}L[u^2(\tau)] \\ L[u(\tau)] &= s^{-\alpha-1} + 2s^{-\alpha}L[u(\tau)] - s^{-\alpha}L[u^2(\tau)] \end{aligned}$$

L'inverse de Laplace donne

$$u(\tau) = \frac{\tau^{\alpha}}{\Gamma(\alpha + 1)} + 2L^{-1}[s^{-\alpha}L[u(\tau)]] - L^{-1}[s^{-\alpha}L[u^2(\tau)]] \quad (3.11)$$

*Appliquant **TDM**, on obtient*

$$\sum_{r=0}^{\infty} u(\tau) = \frac{\tau^{\alpha}}{\Gamma(\alpha + 1)} + 2L^{-1} \left[s^{-\alpha}L \left[\sum_{r=0}^{\infty} u_r(\tau) \right] \right] - L^{-1} \left[s^{-\alpha}L \left[\sum_{r=0}^{\infty} N_r u(\tau) \right] \right] \quad (3.12)$$

On compare les deux cotés de (3.12), on aura

$$\begin{cases} u_0(\tau) &= \frac{\tau^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}; \\ u_{r+1}(\tau) &= 2L^{-1} [s^{-\alpha}L[u_r(\tau)]] - L^{-1} [s^{-\alpha}L[N_r u(\tau)]] . \end{cases} \quad (3.13)$$

Utilisant l'équation (3.13), pour avoir

$$\begin{aligned} u_0(\tau) &= \frac{\tau^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \\ u_1(\tau) &= \frac{2}{\Gamma(2\alpha+1)}\tau^{2\alpha} - \frac{\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma^2(\alpha+1)\Gamma(3\alpha+1)}\tau^{3\alpha} \\ u_2(\tau) &= \frac{4}{\Gamma(3\alpha+1)}\tau^{3\alpha} - \left(\frac{2\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma^2(\alpha+1)\Gamma(4\alpha+1)} + \frac{4\Gamma(3\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(2\alpha+1)\Gamma(4\alpha+1)} \right) \tau^{4\alpha} \\ &\quad + \left(\frac{2\Gamma(2\alpha+1)\Gamma(4\alpha+1)}{\Gamma^3(\alpha+1)\Gamma(3\alpha+1)\Gamma(5\alpha+1)} - \frac{4\Gamma(4\alpha+1)}{\Gamma^2(2\alpha+1)\Gamma(5\alpha+1)} \right) \tau^{5\alpha} + \frac{4\Gamma(5\alpha+1)}{\Gamma^2(\alpha+1)\Gamma(3\alpha+1)\Gamma(6\alpha+1)}\tau^{6\alpha} \\ &\quad - \frac{\Gamma^2(2\alpha+1)\Gamma(6\alpha+1)}{\Gamma^4(\alpha+1)\Gamma^2(3\alpha+1)\Gamma(7\alpha+1)}\tau^{7\alpha} \\ &\quad \vdots \end{aligned}$$

Avec

$$\begin{cases} N_0 u(\tau) &= \frac{\tau^{2\alpha}}{\Gamma^2(\alpha+1)} \\ N_1 u(\tau) &= -\frac{2\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma^3(\alpha+1)\Gamma(3\alpha+1)}\tau^{4\alpha} + \frac{\Gamma^2(2\alpha+1)}{\Gamma^4(\alpha+1)\Gamma^2(3\alpha+1)\Gamma(7\alpha+1)}\tau^{7\alpha} + \dots \end{cases}$$

Donc la solution approximative de (3.10) à l'aide de trois premiers termes est donnée par

$$\begin{aligned} u(\tau) &= \frac{\tau^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{2}{\Gamma(2\alpha+1)}\tau^{2\alpha} + \left(\frac{4}{\Gamma(3\alpha+1)} - \frac{\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma^2(\alpha+1)\Gamma(3\alpha+1)} \right) \tau^{3\alpha} \\ &\quad - \left(\frac{2\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma^2(\alpha+1)\Gamma(4\alpha+1)} + \frac{4\Gamma(3\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(2\alpha+1)\Gamma(4\alpha+1)} \right) \tau^{4\alpha} \\ &\quad + \left(\frac{2\Gamma(2\alpha+1)\Gamma(4\alpha+1)}{\Gamma^3(\alpha+1)\Gamma(3\alpha+1)\Gamma(5\alpha+1)} - \frac{4\Gamma(4\alpha+1)}{\Gamma^2(2\alpha+1)\Gamma(5\alpha+1)} \right) \tau^{5\alpha} \\ &\quad + \frac{4\Gamma(5\alpha+1)}{\Gamma^2(\alpha+1)\Gamma(3\alpha+1)\Gamma(6\alpha+1)}\tau^{6\alpha} - \frac{\Gamma^2(2\alpha+1)\Gamma(6\alpha+1)}{\Gamma^4(\alpha+1)\Gamma^2(3\alpha+1)\Gamma(7\alpha+1)}\tau^{7\alpha} + \dots \end{aligned}$$

On pose $\alpha = 1, N_0 = 3, N = 5, \Delta t = 0.2$, à l'aide de Maple on trouve la solution approximative de **MFTDLM** pour (3.10)

$$\begin{cases} \Phi_3^0(\tau) &= \tau + \tau^2 + \frac{1}{3}\tau^3 - \frac{1}{3}\tau^4 - \frac{7}{15}\tau^5 - \frac{1}{5}\tau^6 + \frac{29}{105}\tau^7 + \frac{89}{420}\tau^8 - \frac{163}{5670}\tau^9 \dots; 0 \leq \tau \leq 0.2. \\ \Phi_3^1(\tau) &= 0.2419752631 + 1.425398498\tau + 1.080487321\tau^2 - 1.312295479\tau^3 + \dots; 0.2 \leq \tau \leq 0.4 \\ \Phi_3^2(\tau) &= 0.9535645123 + 1.997843746\tau + 0.09277084869\tau^2 - 1.327587972\tau^3 + \dots; 0.4 \leq \tau \leq 0.6. \\ \Phi_3^3(\tau) &= 1.952280315 + 1.093162202\tau - 1.040996846\tau^2 + 2.625460030\tau^3 + \dots; 0.6 \leq \tau \leq 0.8 \\ \Phi_3^4(\tau) &= 2.375614376 + 0.1076850885\tau - 0.1481331558\tau^2 + 0.1319840397\tau^3 + \dots; 0.8 \leq \tau \leq 1. \end{cases}$$

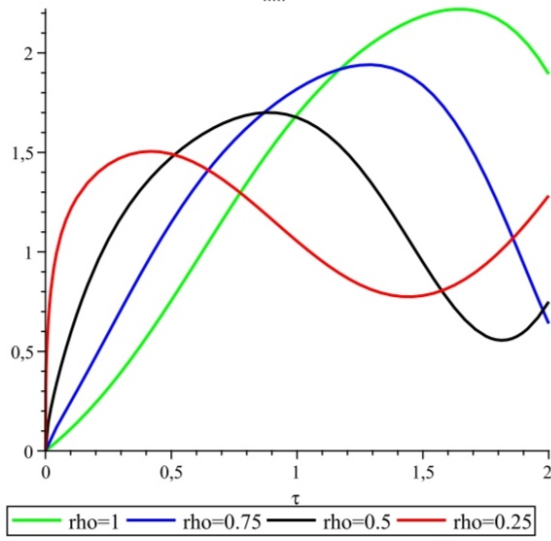


FIGURE 3.3 – La solution approximative de l'équation (3.10)

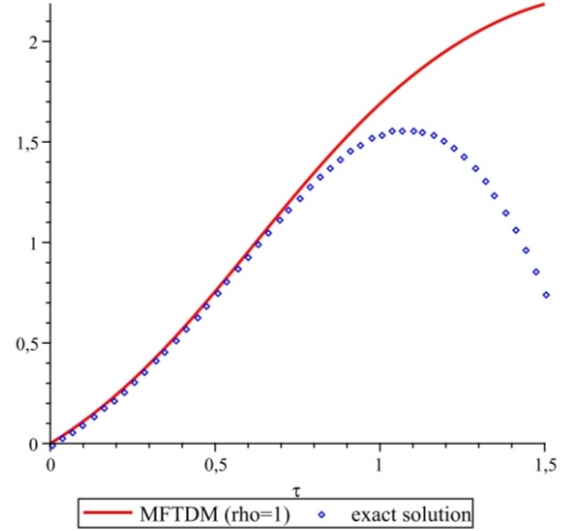


FIGURE 3.4 – La solution exacte de (3.10)

3.1.2 Résolution de l'équation aux dérivées partielle fractionnaire non-linéaire

On considère une équation aux dérivées partielles fractionnaire non linéaire générale de la forme

$${}^c D_\tau^\alpha u(x, \tau) + Ru(x, \tau) + Nu(x, \tau) = g(x, \tau) \quad (3.14)$$

Où $\tau > 0, x \in \mathbb{R}, n - 1 < \alpha \leq n, n = 1, 2, \dots$ avec condition initial

$$\left[\frac{\partial^{n-1} u(x, \tau)}{\partial \tau^{n-1}} \right]_{\tau=0} = h_{n-1}(x) \quad (3.15)$$

${}^c D_\tau^\alpha u(x, \tau)$ est la dérivé fractionnaire de $u(x, \tau)$ au sens de Caputo, R est l'opérateur différentiel linéaire, N représente l'opérateur différentiel non-linéaire général et $g(x, \tau)$ est le terme source. On applique **Laplace** sur les deux cotés de (3.14), et utilisant ces propriétés de différenciation, on obtient

$$L[u(x, \tau)] = \sum_{k=0}^{n-1} h_k(x) s^{-k-1} + s^{-\alpha} [L[g(x, \tau)] - L[Ru(x, \tau)] - L[Nu(x, \tau)]] \quad (3.16)$$

La transformé **inverse de Laplace** sur (3.16) et les conditions initiales, donne

$$u(x, \tau) = G(x, \tau) - L^{-1}[s^{-\alpha} L[Ru(x, \tau) + Nu(x, \tau)]] \quad (3.17)$$

Tel que

$$G(x, \tau) = \sum_{k=0}^{n-1} h_k(x) s^{-k-1} + s^{-\alpha} L[g(x, \tau)]$$

Nous appliquons la **TDM**, et supposant que la solution peut être exprimée comme une série infinie

$$u(x, \tau) = \sum_{r=0}^{\infty} u_r(x, \tau) \quad (3.18)$$

Ainsi décompose le terme non-linéaire Nu en série

$$Nu(x, \tau) = \sum_{r=0}^{\infty} N_r u(x, \tau) \quad (3.19)$$

En utilisant (3.18) et (3.19), donc (3.17) sera réécrire comme suit

$$\sum_{r=0}^{\infty} u(x, \tau) = G(x, \tau) - L^{-1} \left[s^{-\alpha} L \left[\sum_{r=0}^{\infty} Ru_r(x, \tau) + \sum_{r=0}^{\infty} N_r u(x, \tau) \right] \right] \quad (3.20)$$

En comparant les deux cotés de (3.20), les relations récursives sont données par

$$\begin{cases} u_0(x, \tau) &= G(x, \tau) \\ u_{r+1}(x, \tau) &= -L^{-1} [s^{-\alpha} L [Ru_r(x, \tau) + N_r u(x, \tau)]] \end{cases}$$

Finalement, la solution approximative est donc

$$u(x, \tau) = u_0(x, \tau) + u_1(\tau) + u_2(\tau) + \dots$$

Exemple 18. *Considérons l'équation aux dérivées partielle non linéaire fractionnaire suivante*

$$D^\alpha u(x, \tau) + u(x, \tau)u_x(x, \tau) - u_x(x, \tau) = 0, 0 < \alpha \leq 1. \quad (3.21)$$

Et la condition initial $u(x, 0) = x + 1$

Si $\alpha = 1$, la solution exacte de (3.21) est

$$u(x, \tau) = 1 + \frac{x}{1 + \tau} = 1 + x(-\tau + \tau^2 - \tau^3 + \tau^4 - \tau^5 + \tau^6 - \tau^7 + \tau^8 - \tau^9 + \dots)$$

*Selon **TDM**, on a*

$$\begin{cases} u_0(x, \tau) &= x + 1; \\ u_{r+1}(x, \tau) &= -L^{-1} [s^{-\alpha} L [(u_r)_x(x, \tau)]] - L^{-1} [s^{-\alpha} L [N_r u(x, \tau)]]. \end{cases} \quad (3.22)$$

Utilisant (3.22) pour obtenir

$$u_0(x, \tau) = x + 1;$$

$$u_1(x, \tau) = -x \frac{\tau^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)};$$

$$u_2(x, \tau) = 2x \frac{\tau^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} - x \frac{\Gamma(2\alpha + 1)}{\Gamma^2(\alpha + 1)\Gamma(3\alpha + 1)} \tau^{3\alpha};$$

$$u_3(x, \tau) = -4x \frac{\tau^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha + 1)} + \left(2x \frac{\Gamma(2\alpha + 1)}{\Gamma^2(\alpha + 1)\Gamma(4\alpha + 1)} + 4x \frac{\Gamma(3\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(2\alpha + 1)\Gamma(4\alpha + 1)} \right) \tau^{4\alpha}$$

$$- \left(2x \frac{\Gamma(2\alpha + 1)\Gamma(4\alpha + 1)}{\Gamma^3(\alpha + 1)\Gamma(3\alpha + 1)\Gamma(5\alpha + 1)} + 4x \frac{\Gamma(4\alpha + 1)}{\Gamma^2(2\alpha + 1)\Gamma(5\alpha + 1)} \right) \tau^{5\alpha}$$

$$+ 4x \frac{\Gamma(5\alpha + 1)}{\Gamma^2(\alpha + 1)\Gamma(3\alpha + 1)\Gamma(6\alpha + 1)} \tau^{6\alpha} - x \frac{\Gamma^2(2\alpha + 1)\Gamma(6\alpha + 1)}{\Gamma^4(\alpha + 1)\Gamma^2(3\alpha + 1)\Gamma(7\alpha + 1)} \tau^{7\alpha};$$

\vdots

Alors la solution approximative de l'équation (3.21) à l'aide de quatres premiers termes sera comme suit

$$\begin{aligned}
 u(x, \tau) = & x + 1 - x \frac{\tau^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + 2x \frac{\tau^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} - \left(x \frac{\Gamma(2\alpha + 1)}{\Gamma^2(\alpha + 1)\Gamma(3\alpha + 1)} + 4x \frac{1}{\Gamma(3\alpha + 1)} \right) \tau^{3\alpha} \\
 & + \left(2x \frac{\Gamma(2\alpha + 1)}{\Gamma^2(\alpha + 1)\Gamma(4\alpha + 1)} + 4x \frac{\Gamma(3\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(2\alpha + 1)\Gamma(4\alpha + 1)} \right) \tau^{4\alpha} \\
 & - \left(2x \frac{\Gamma(2\alpha + 1)\Gamma(4\alpha + 1)}{\Gamma^3(\alpha + 1)\Gamma(3\alpha + 1)\Gamma(5\alpha + 1)} + 4x \frac{\Gamma(4\alpha + 1)}{\Gamma^2(2\alpha + 1)\Gamma(5\alpha + 1)} \right) \tau^{5\alpha} \\
 & + 4x \frac{\Gamma(5\alpha + 1)}{\Gamma^2(\alpha + 1)\Gamma(3\alpha + 1)\Gamma(6\alpha + 1)} \tau^{6\alpha} - x \frac{\Gamma^2(2\alpha + 1)\Gamma(6\alpha + 1)}{\Gamma^4(\alpha + 1)\Gamma^2(3\alpha + 1)\Gamma(7\alpha + 1)} \tau^{7\alpha} + \dots
 \end{aligned}$$

Prenant $\alpha = 1, N_0 = 3, N = 5, \Delta\tau = 0.4$, avec Maple on obtient la solution approximative suivante :

$$\begin{cases}
 \Phi_3^0(\tau) = 1 + x(-\tau + \tau^2 - \tau^3 + \tau^4 - \frac{13}{15}\tau^5 + \frac{2}{3}\tau^6 - \frac{29}{63}\tau^7 + \frac{71}{252}\tau^8 - \frac{86}{567}\tau^9 + \dots; 0 \leq \tau \leq 0.4. \\
 \Phi_3^1(\tau) = 1 + x(0.69600000 - 0.48441600\tau + 0.33715353\tau^2 - 0.23465886\tau^3) + \dots; 0.4 \leq \tau \leq 0.8. \\
 \Phi_3^2(\tau) = 1 + x(0.40410012 - 0.16329691\tau + 0.065988302\tau^2 - 0.026665881\tau^3) + \dots; 0.8 \leq \tau \leq 1.2. \\
 \Phi_3^3(\tau) = 1 + x(0.25708834 - 0.066094416\tau + 0.016992104\tau^2 - 0.0043684719\tau^3) + \dots; 1.2 \leq \tau \leq 1.6 \\
 \Phi_3^4(\tau) = 1 + x(0.17694380 - 0.031309109\tau + 0.0055399529\tau^2 - 0.00098026033\tau^3) + \dots; 1.6 \leq \tau \leq 1.
 \end{cases}$$

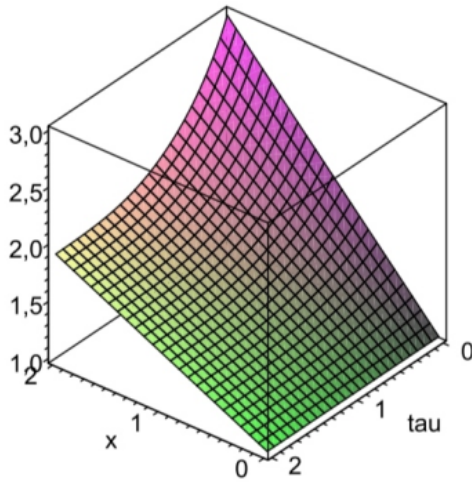


FIGURE 3.5 – La solution approximative de (3.21)

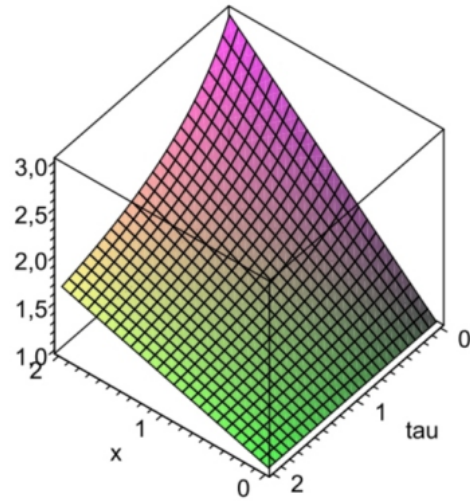


FIGURE 3.6 – La solution exacte de (3.21)

Exemple 19. Considérons l'équation aux dérivées partielles fractionnaire non-linéaire

$$D_\tau^\alpha u(x, \tau) + \frac{2}{\tau} u(x, \tau) u_x(x, \tau) = 0, x \neq 0, 1 < \alpha \leq 2. \tag{3.23}$$

Sous les conditions initiales $u(x, 0) = 0, u_\tau(x, 0) = \frac{1}{x}$

Si $\alpha = 2$, la solution exacte de (3.23) est :

$$u(x, \tau) = \tan\left(\frac{\tau}{x}\right) = \frac{\tau}{x} + \frac{\tau^3}{3x^3} + 2\frac{\tau^5}{15x^5} + \frac{17\tau^7}{315x^7} + \frac{62\tau^9}{2835x^9} + \frac{1382\tau^{11}}{155925x^{11}} + \dots$$

De la formule (3.17), on obtient

$$\begin{cases} u_0(x, \tau) &= \frac{\tau}{x}; \\ u_{r+1}(x, \tau) &= -2L^{-1}[s^{-\alpha}L[N_r u(x, \tau)]]. \end{cases} \quad (3.24)$$

Utilisant (3.24), on trouve

$$\begin{aligned} u_0(x, \tau) &= \frac{\tau}{x}; \\ u_1(x, \tau) &= \frac{2}{\Gamma(\alpha + 2)} \frac{\tau^{\alpha+1}}{x^3}; \\ u_2(x, \tau) &= \frac{16}{\Gamma(2\alpha + 2)} \frac{\tau^{2\alpha+1}}{x^5} + \frac{24\Gamma(2\alpha + 2)}{\Gamma^2(\alpha + 2)\Gamma(3\alpha + 2)} \frac{\tau^{3\alpha+1}}{x^7}; \\ &\vdots \end{aligned}$$

Donc, la solution approximative à l'aide de trois premiers termes représente comme

$$u(x, \tau) = \frac{\tau}{x} + \frac{2}{\Gamma(\alpha + 2)} \frac{\tau^{\alpha+1}}{x^3} + \frac{16}{\Gamma(2\alpha + 2)} \frac{\tau^{2\alpha+1}}{x^5} + \frac{24\Gamma(2\alpha + 2)}{\Gamma^2(\alpha + 2)\Gamma(3\alpha + 2)} \frac{\tau^{3\alpha+1}}{x^7} + \dots$$

Posons $\alpha = 2, N_0 = 3, N = 1$, on obtient la solution approximative de **MFTDLM** pour (3.23)

$$u(x, \tau) = \frac{\tau}{x} + \frac{\tau^3}{3x^3} + \frac{2\tau^5}{15x^5} + \frac{17\tau^7}{315x^7} + \frac{62\tau^9}{2835x^9} + \frac{1142\tau^{11}}{155925x^{11}} + \frac{13324\tau^{13}}{6081075x^{13}} + \dots; 0 \leq \tau \leq \tau_i.$$

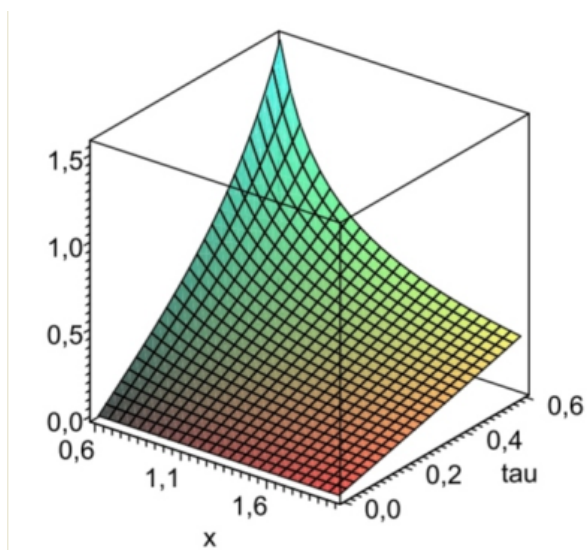


FIGURE 3.7 – La solution approximative pour l'équation (3.23)

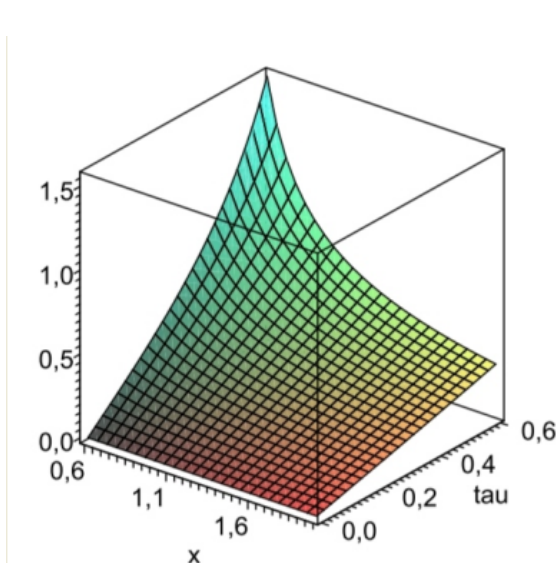


FIGURE 3.8 – La solution exacte de (3.23)

3.2 MFTDM combiné avec la transformé de Sumudu (MFTDSM)

3.2.1 Résolution de l'équation différentielle fractionnaire non-linéaire

On considère l'équation différentielle fractionnaire d'ordre α , ($n - 1 < \alpha < n$, $n = 1, 2, \dots$)

$${}^c D_\tau^\alpha u(\tau) + Ru(\tau) + Nu(\tau) = g(\tau). \quad (3.25)$$

Et les conditions initiales

$$u^{(k)}(0^+) = c_k; \quad k = 0, 1, \dots, n - 1. \quad (3.26)$$

Où ${}^c D^\alpha$ est dérivées fractionnaires au sens de Caputo de la fonction $u(\tau)$. R est le reste de la partie linéaire, N représente l'opérateur différentiel non-linéaire général. Et $g(\tau)$ est le terme source.

Théorème 3.2.1. *La solution de l'équation différentielle non-linéaire avec une dérivée fractionnaire au sens de Caputo (3.25),(3.26) par MFTDSM est donnée sous la forme d'une série infinie qui converge vers la solution exacte comme suit.*

Preuve 5. *On applique la transformé de Sumudu aux deux cotés de (3.25), on obtient*

$$S[D_\tau^\alpha u(\tau)] + S[Ru(\tau)] + S[Nu(\tau)] = S[g(\tau)]$$

En utilisant la propriété de la transformé de Sumudu, on obtient la forme suivante :

$$S[u(\tau)] = \sum_{k=0}^{n-1} v^k u^{(k)}(0) + v^\alpha [S[g(\tau)] - S[Ru(\tau)] - S[Nu(\tau)]]$$

En faisant la transformé inverse de Sumudu de chaque coté de l'équation, cela donne

$$u(\tau) = G(\tau) - S^{-1} [v^\alpha S[Ru(\tau) + Nu(\tau)]] \quad (3.27)$$

Où $G(\tau)$ représente le terme issu des termes sources et des conditions initiales prescrites. La TDM représente la solution comme une série infinie

$$u(\tau) = \sum_{r=0}^{\infty} u_r(\tau) \quad (3.28)$$

Et le terme non-linéaire par :

$$Nu(\tau) = \sum_{r=0}^{\infty} N_r u(\tau) \quad (3.29)$$

Substitution (3.27),(3.28) et (3.29), on aura

$$\sum_{r=0}^{\infty} u_r(\tau) = G(\tau) - S^{-1} \left[v^\alpha S \left[\sum_{r=0}^{\infty} Ru_r(\tau) + \sum_{r=0}^{\infty} N_r u(\tau) \right] \right]. \quad (3.30)$$

Nous comparons les deux cotés de (3.30) les itérations sont définie par des relations récursives.

$$\begin{cases} u_0(\tau) & = G(\tau); \\ u_{r+1}(\tau) & = -S^{-1} [v^\alpha S [Ru_r(\tau) + N_r u(\tau)]] \end{cases}$$

Ainsi, la solution approximative est donc

$$u(\tau) = u_0(\tau) + u_1(\tau) + u_2(\tau) + \dots$$

Exemple 20. [6] *Dans cette partie nous appliquons la MTDSTM pour résoudre l'équation différentielle fractionnaire non-linéaire suivante :*

$$D^\alpha u(\tau) = 1 - u^2, \tau > 0, 0 < \alpha \leq 1 \quad (3.31)$$

Et la condition initiale $u(0) = 0$.

Si $\alpha = 1$, la solution exacte de (3.31) est

$$u(\tau) = \tanh(\tau)$$

Prendre la transformé de **Sumudu** de (3.31), on obtient

$$\begin{aligned} S[D^\alpha u(\tau)] &= S[1 - u^2(\tau)] \\ S[u(\tau)] &= \sum_{k=0}^{n-1} v^k u^{(k)}(0) + v^\alpha [S[1] - S[u^2(\tau)]] \end{aligned}$$

considérons la condition initial , on trouve

$$S[u(\tau)] = v^\alpha - v^\alpha S[u^2(\tau)]$$

La transformé **inverse de Sumudu** implique que

$$u(\tau) = \frac{\tau^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)} - S^{-1}[v^\alpha S[u^2(\tau)]] \quad (3.32)$$

Maintenant on applique la **TDM**, on aura

$$\sum_{r=0}^{\infty} u_r(\tau) = \frac{\tau^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)} - S^{-1}[v^\alpha S[\sum_{r=0}^{\infty} N_r u(\tau)]] \quad (3.33)$$

Comparer les deux cotés de (3.33) , on a

$$\begin{cases} u_0(\tau) &= \frac{\tau^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}; \\ u_{r+1}(\tau) &= -S^{-1}[v^\alpha S[N_r u(\tau)]]. \end{cases}$$

D'où

$$\begin{cases} N_0 u(\tau) &= N u_0(\tau) \\ N_r u(\tau) &= N U_r(\tau) - N U_{r-1}(\tau), \quad r = 1, 2, \dots \end{cases}$$

En utilisant la formule d'itération, on obtient

$$\begin{aligned} u_0(\tau) &= \frac{\tau^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)} \\ u_1(\tau) &= -\frac{\Gamma(2\alpha + 1)}{\Gamma^2(\alpha + 1)\Gamma(3\alpha + 1)} \tau^{3\alpha} \\ u_2(\tau) &= \frac{2\Gamma(2\alpha + 1)\Gamma(4\alpha + 1)}{\Gamma^3(\alpha + 1)\Gamma(3\alpha + 1)\Gamma(5\alpha + 1)} \tau^{5\alpha} - \frac{\Gamma^2(2\alpha + 1)\Gamma(6\alpha + 1)}{\Gamma^4(\alpha + 1)\Gamma^2(3\alpha + 1)\Gamma(7\alpha + 1)} \tau^{7\alpha} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Avec

$$\begin{aligned} N_0 u(\tau) &= \frac{\tau^{2\alpha}}{\Gamma^2(\alpha + 1)} \\ N_1 u(\tau) &= -\frac{2\Gamma(2\alpha + 1)}{\Gamma^3(\alpha + 1)\Gamma(3\alpha + 1)} \tau^{4\alpha} + \frac{\Gamma^2(2\alpha + 1)}{\Gamma^4(\alpha + 1)\Gamma^2(3\alpha + 1)\Gamma(7\alpha + 1)} \tau^{7\alpha} + \dots \end{aligned}$$

Alors on a la solution approximative de (3.31) suivante :

$$u(\tau) = \frac{\tau^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} - \frac{\Gamma(2\alpha + 1)}{\Gamma^2(\alpha + 1)\Gamma(3\alpha + 1)}\tau^{3\alpha} + \frac{2\Gamma(2\alpha + 1)\Gamma(4\alpha + 1)}{\Gamma^3(\alpha + 1)\Gamma(3\alpha + 1)\Gamma(5\alpha + 1)}\tau^{5\alpha} - \frac{\Gamma^2(2\alpha + 1)\Gamma(6\alpha + 1)}{\Gamma^4(\alpha + 1)\Gamma^2(3\alpha + 1)\Gamma(7\alpha + 1)}\tau^{7\alpha} + \dots$$

Prenant $\alpha = 1, N_0 = 3, N = 6, \Delta\tau = 0.5$, on trouve la solution approchée de **MFTDSM** pour (3.31) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi_3^0(\tau) = \tau - \frac{1}{3}\tau^3 + \frac{2}{15}\tau^5 - \frac{1}{63}\tau^7 + \frac{38}{2835}\tau^9 - \frac{1142}{155925}\tau^{11} + \frac{13324}{6081075}\tau^{13} + \dots; 0 \leq \tau \leq 0.5. \\ \Phi_3^1(\tau) = 0.46211776 + 0.78644717\tau - 0.36343120\tau^2 + 0.09420104\tau^3 + \dots; 0.5 \leq \tau \leq 1 \\ \Phi_3^2(\tau) = 0.91050267 + 0.17098487\tau - 0.15568218\tau^2 + 0.084754089\tau^3 + \dots; 1 \leq \tau \leq 1.5. \\ \Phi_3^3(\tau) = 1.0570379 - 0.11732920\tau + 0.12402141\tau^2 - 0.0919856099\tau^3 + \dots; 1.5 \leq \tau \leq 2 \\ \Phi_3^4(\tau) = 0.09992693 + 0.92388799\tau - 0.19142717\tau^2 - 0.12686053\tau^3 + \dots; 2 \leq \tau \leq 2.5. \\ \Phi_3^5(\tau) = 0.26285416 + 0.74765111\tau - 0.21996513\tau^2 - 0.023817169\tau^3 + \dots; 2.5 \leq \tau \leq 3. \end{array} \right.$$

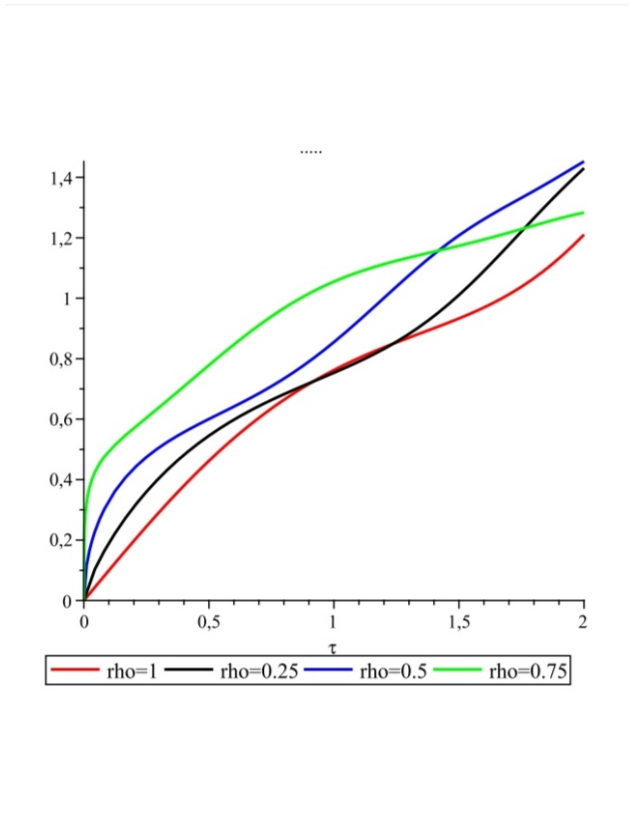


FIGURE 3.9 – La solution approximative de (3.31)

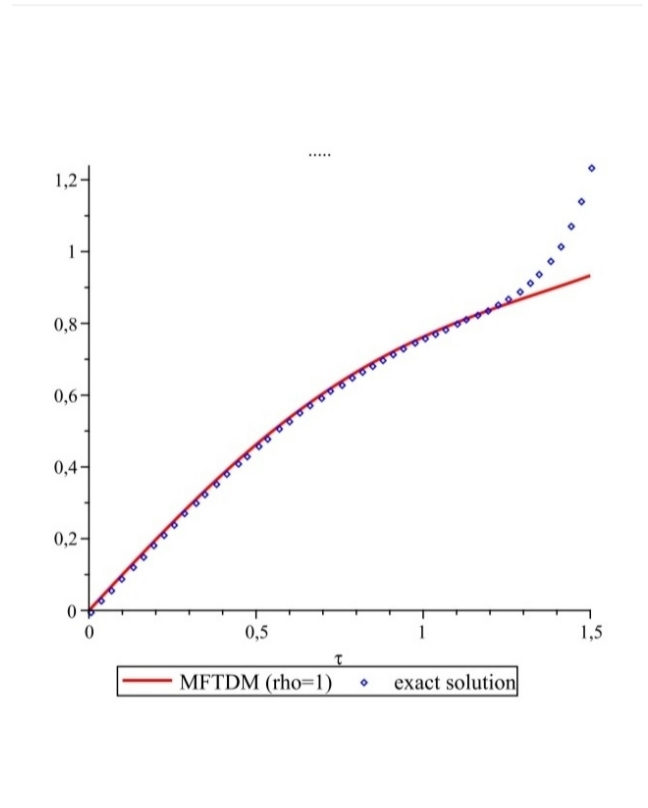


FIGURE 3.10 – La solution exacte de (3.31)

Exemple 21. [16] Dans cet exemple, on considère l'équation fractionnaire non-linéaire suivante :

$$D_\tau^\alpha u(\tau) = 1 + 2u(\tau) - u^2(\tau), \tau > 0, 0 < \alpha \leq 1 \quad (3.34)$$

Avec la condition initiale $u(0) = 0$

Si $\alpha = 1$, la solution exacte de (3.34) est :

$$u(\tau) = 1 + \sqrt{2} \tanh(\sqrt{2}t - \ln(\sqrt{2} + 1))$$

Appliquant **Sumudu** aux deux cotés de (3.34), et en utilisant sa propriété de différenciation, on obtient :

$$u(\tau) = \frac{\tau^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + 2S^{-1}[v^\alpha S[u(\tau)]] - S^{-1}[v^\alpha S[u^2(\tau)]] \quad (3.35)$$

Selon la **TDM**, on a

$$\sum_{r=0}^{\infty} u_r(\tau) = \frac{\tau^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + 2S^{-1} \left[v^\alpha S \left[\sum_{r=0}^{\infty} u_r(\tau) \right] \right] - S^{-1} \left[v^\alpha S \left[\sum_{r=0}^{\infty} N_r u(\tau) \right] \right] \quad (3.36)$$

On compare les deux cotés de (3.36), on aura

$$\begin{aligned} u_0(\tau) &= \frac{\tau^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)}; \\ u_{r+1}(\tau) &= 2S^{-1} [v^\alpha S[u_r(\tau)]] - S^{-1} [v^\alpha S[N_r u(\tau)]]. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Utilisant l'équation (3.37), pour obtenir

$$\begin{aligned} u_0(\tau) &= \frac{\tau^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \\ u_1(\tau) &= \frac{2}{\Gamma(2\alpha + 1)} \tau^{2\alpha} - \frac{\Gamma(2\alpha + 1)}{\Gamma^2(\alpha + 1)\Gamma(3\alpha + 1)} \tau^{3\alpha} \\ u_2(\tau) &= \frac{4}{\Gamma(3\alpha + 1)} \tau^{3\alpha} - \left(\frac{2\Gamma(2\alpha + 1)}{\Gamma^2(\alpha + 1)\Gamma(4\alpha + 1)} + \frac{4\Gamma(3\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(2\alpha + 1)\Gamma(4\alpha + 1)} \right) \tau^{4\alpha} \\ &+ \left(\frac{2\Gamma(2\alpha + 1)\Gamma(4\alpha + 1)}{\Gamma^3(\alpha + 1)\Gamma(3\alpha + 1)\Gamma(5\alpha + 1)} - \frac{4\Gamma(4\alpha + 1)}{\Gamma^2(2\alpha + 1)\Gamma(5\alpha + 1)} \right) \tau^{5\alpha} + \frac{4\Gamma(5\alpha + 1)}{\Gamma^2(\alpha + 1)\Gamma(3\alpha + 1)\Gamma(6\alpha + 1)} \tau^{6\alpha} \\ &- \frac{\Gamma^2(2\alpha + 1)\Gamma(6\alpha + 1)}{\Gamma^4(\alpha + 1)\Gamma^2(3\alpha + 1)\Gamma(7\alpha + 1)} \tau^{7\alpha} \\ &\vdots \end{aligned}$$

La solution approximative selon les trois premiers termes est donnée par

$$\begin{aligned} u(\tau) &= \frac{\tau^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{2}{\Gamma(2\alpha + 1)} \tau^{2\alpha} + \left(\frac{4}{\Gamma(3\alpha + 1)} - \frac{\Gamma(2\alpha + 1)}{\Gamma^2(\alpha + 1)\Gamma(3\alpha + 1)} \right) \tau^{3\alpha} \\ &- \left(\frac{2\Gamma(2\alpha + 1)}{\Gamma^2(\alpha + 1)\Gamma(4\alpha + 1)} + \frac{4\Gamma(3\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(2\alpha + 1)\Gamma(4\alpha + 1)} \right) \tau^{4\alpha} \\ &+ \left(\frac{2\Gamma(2\alpha + 1)\Gamma(4\alpha + 1)}{\Gamma^3(\alpha + 1)\Gamma(3\alpha + 1)\Gamma(5\alpha + 1)} - \frac{4\Gamma(4\alpha + 1)}{\Gamma^2(2\alpha + 1)\Gamma(5\alpha + 1)} \right) \tau^{5\alpha} \\ &+ \frac{4\Gamma(5\alpha + 1)}{\Gamma^2(\alpha + 1)\Gamma(3\alpha + 1)\Gamma(6\alpha + 1)} \tau^{6\alpha} - \frac{\Gamma^2(2\alpha + 1)\Gamma(6\alpha + 1)}{\Gamma^4(\alpha + 1)\Gamma^2(3\alpha + 1)\Gamma(7\alpha + 1)} \tau^{7\alpha} + \dots \end{aligned}$$

Posons $\alpha = 1, N_0 = 3, N = 5, \Delta t = 0.2$, on trouve la solution approximative de **MFTDSM** pour (3.34)

$$\begin{cases} \Phi_3^0(\tau) &= \tau + \tau^2 + \frac{1}{3}\tau^3 - \frac{1}{3}\tau^4 - \frac{7}{15}\tau^5 - \frac{1}{5}\tau^6 + \frac{29}{105}\tau^7 + \frac{89}{420}\tau^8 - \frac{163}{5670}\tau^9 + \dots; 0 \leq \tau \leq 0.2. \\ \Phi_3^1(\tau) &= 0.2419752631 + 1.425398498\tau + 1.080487321\tau^2 - 1.312295479\tau^3 + \dots; 0.2 \leq \tau \leq 0.4 \\ \Phi_3^2(\tau) &= 0.9535645123 + 1.997843746\tau + 0.09277084869\tau^2 - 1.327587972\tau^3 + \dots; 0.4 \leq \tau \leq 0.6. \\ \Phi_3^3(\tau) &= 1.952280315 + 1.093162202\tau - 1.040996846\tau^2 + 2.625460030\tau^3 + \dots; 0.6 \leq \tau \leq 0.8 \\ \Phi_3^4(\tau) &= 2.375614376 + 0.1076850885\tau - 0.1481331558\tau^2 + 0.1319840397\tau^3 + \dots; 0.8 \leq \tau \leq 1. \end{cases}$$

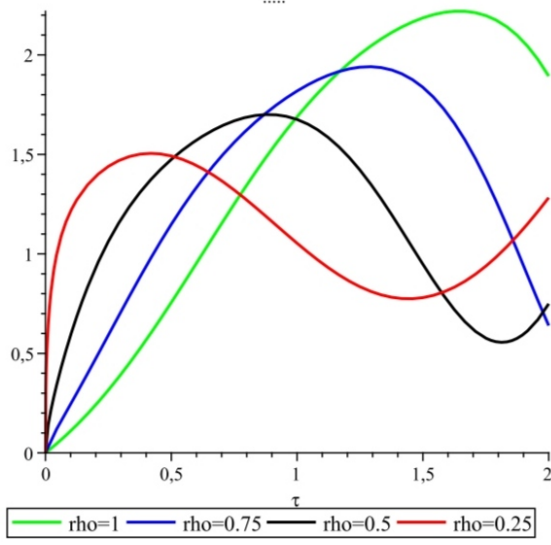


FIGURE 3.11 – La solution approximative de (3.34)

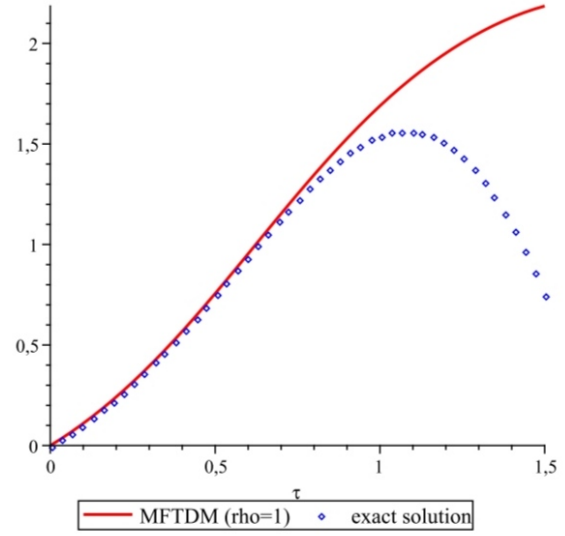


FIGURE 3.12 – La solution exacte de (3.34)

3.2.2 Résolution de l'équation aux dérivées partielles fractionnaire non-linéaire

On considère une équation aux dérivées partielles fractionnaire non linéaire générale avec condition initiale de la forme

$${}^c D_\tau^\alpha u(x, \tau) + Ru(x, \tau) + Nu(x, \tau) = g(x, \tau) \quad (3.38)$$

Où $\tau > 0, x \in \mathbb{R}, n - 1 < \alpha \leq n, n = 1, 2, \dots$ et la condition initial

$$\left[\frac{\partial^{n-1} u(x, \tau)}{\partial \tau^{n-1}} \right]_{\tau=0} = h_{n-1}(x) \quad (3.39)$$

${}^c D_\tau^\alpha u(x, \tau)$ est la dérivé fractionnaire de $u(x, \tau)$ au sens de Caputo, R est l'opérateur différentiel linéaire, N représente l'opérateur différentiel non-linéaire général et $g(x, \tau)$ est le terme source. Appliquant **Sumudu** sur les deux cotés de (3.38), et utilisant ces propriétés de différenciation, on obtient

$$S[u(x, \tau)] = \sum_{k=0}^{n-1} h_k(x) v^k + v^\alpha [S[g(x, \tau)] - S[Ru(x, \tau)] - S[Nu(x, \tau)]] \quad (3.40)$$

En prenant la transformé **inverse de Sumudu** et les conditions initiales, on trouve

$$u(x, \tau) = G(x, \tau) - S^{-1}[v^\alpha S[Ru(x, \tau) + Nu(x, \tau)]] \quad (3.41)$$

Tel que

$$G(x, \tau) = \sum_{k=0}^{n-1} h_k(x) v^k + v^\alpha S[g(x, \tau)]$$

Maintenant nous appliquons la nouvelle **TDM**, on peut supposer que la solution peut être exprimée comme une série infinie

$$u(x, \tau) = \sum_{r=0}^{\infty} u_r(x, \tau) \quad (3.42)$$

Puis décompose le terme non-linéaire Nu en série

$$Nu(x, \tau) = \sum_{r=0}^{\infty} N_r u(x, \tau) \quad (3.43)$$

En utilisant (3.42) et (3.43), nous pouvons réécrire (3.41) comme suit

$$\sum_{r=0}^{\infty} u(x, \tau) = G(x, \tau) - S^{-1} \left[v^\alpha S \left[\sum_{r=0}^{\infty} Ru_r(x, \tau) + \sum_{r=0}^{\infty} N_r u(x, \tau) \right] \right] \quad (3.44)$$

En comparant les deux cotés de (3.44), les relations récursives sont données par

$$\begin{aligned} u_0(x, \tau) &= G(x, \tau) \\ u_{r+1}(x, \tau) &= -S^{-1} [v^\alpha S [Ru_r(x, \tau) + N_r u(x, \tau)]] \end{aligned}$$

Finalement, nous avons la solution approximative

$$u(x, \tau) = \sum_{k=0}^N u_k(x, \tau)$$

Exemple 22. Nous considérons l'équation aux dérivées partielle non linéaire fractionnaire suivante

$$D^\alpha u(x, \tau) + u(x, \tau)u_x(x, \tau) - u_x(x, \tau) = 0, 0 < \alpha \leq 1. \quad (3.45)$$

Et la condition initiale $u(x, 0) = x + 1$

Si $\alpha = 1$, la solution exacte est

$$u(x, \tau) = 1 + \frac{x}{1 + \tau} = 1 + x(-\tau + \tau^2 - \tau^3 + \tau^4 - \tau^5 + \tau^6 - \tau^7 + \tau^8 - \tau^9 + \dots)$$

Selon **TDSM**, on a

$$\begin{aligned} u_0(x, \tau) &= x + 1; \\ u_{r+1}(x, \tau) &= -S^{-1} [v^\alpha [(u_r)_x(x, \tau)]] - S^{-1} [v^\alpha S [N_r u(x, \tau)]]. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Utilisant (3.46) pour obtenir

$$\begin{aligned} u_0(x, \tau) &= x + 1; \\ u_1(x, \tau) &= -x \frac{\tau^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)}; \\ u_2(x, \tau) &= 2x \frac{\tau^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} - x \frac{\Gamma(2\alpha + 1)}{\Gamma^2(\alpha + 1)\Gamma(3\alpha + 1)} \tau^{3\alpha}; \\ u_3(x, \tau) &= -4x \frac{\tau^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha + 1)} + \left(2x \frac{\Gamma(2\alpha + 1)}{\Gamma^2(\alpha + 1)\Gamma(4\alpha + 1)} + 4x \frac{\Gamma(3\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(2\alpha + 1)\Gamma(4\alpha + 1)} \right) \tau^{4\alpha} \\ &\quad - \left(2x \frac{\Gamma(2\alpha + 1)\Gamma(4\alpha + 1)}{\Gamma^3(\alpha + 1)\Gamma(3\alpha + 1)\Gamma(5\alpha + 1)} + 4x \frac{\Gamma(4\alpha + 1)}{\Gamma^2(2\alpha + 1)\Gamma(5\alpha + 1)} \right) \tau^{5\alpha} \\ &\quad + 4x \frac{\Gamma(5\alpha + 1)}{\Gamma^2(\alpha + 1)\Gamma(3\alpha + 1)\Gamma(6\alpha + 1)} \tau^{6\alpha} - x \frac{\Gamma^2(2\alpha + 1)\Gamma(6\alpha + 1)}{\Gamma^4(\alpha + 1)\Gamma^2(3\alpha + 1)\Gamma(7\alpha + 1)} \tau^{7\alpha}; \\ &\vdots \end{aligned}$$

A l'aide de quatres premiers termes la solution approximative sera comme suit

$$\begin{aligned}
 u(x, \tau) = & x + 1 - x \frac{\tau^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + 2x \frac{\tau^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} - \left(x \frac{\Gamma(2\alpha + 1)}{\Gamma^2(\alpha + 1)\Gamma(3\alpha + 1)} + 4x \frac{1}{\Gamma(3\alpha + 1)} \right) \tau^{3\alpha} \\
 & + \left(2x \frac{\Gamma(2\alpha + 1)}{\Gamma^2(\alpha + 1)\Gamma(4\alpha + 1)} + 4x \frac{\Gamma(3\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(2\alpha + 1)\Gamma(4\alpha + 1)} \right) \tau^{4\alpha} \\
 & - \left(2x \frac{\Gamma(2\alpha + 1)\Gamma(4\alpha + 1)}{\Gamma^3(\alpha + 1)\Gamma(3\alpha + 1)\Gamma(5\alpha + 1)} + 4x \frac{\Gamma(4\alpha + 1)}{\Gamma^2(2\alpha + 1)\Gamma(5\alpha + 1)} \right) \tau^{5\alpha} \\
 & + 4x \frac{\Gamma(5\alpha + 1)}{\Gamma^2(\alpha + 1)\Gamma(3\alpha + 1)\Gamma(6\alpha + 1)} \tau^{6\alpha} - x \frac{\Gamma^2(2\alpha + 1)\Gamma(6\alpha + 1)}{\Gamma^4(\alpha + 1)\Gamma^2(3\alpha + 1)\Gamma(7\alpha + 1)} \tau^{7\alpha} + \dots
 \end{aligned}$$

Prenant $\alpha = 1, N_0 = 3, N = 5, \Delta\tau = 0.4$, à l'aide Maple on trouve la solution approximative suivante :

$$\begin{cases}
 \Phi_3^0(\tau) = 1 + x(-\tau + \tau^2 - \tau^3 + \tau^4 - \frac{13}{15}\tau^5 + \frac{2}{3}\tau^6 - \frac{29}{63}\tau^7 + \frac{71}{252}\tau^8 - \frac{86}{567}\tau^9 + \dots; 0 \leq \tau \leq 0.4. \\
 \Phi_3^1(\tau) = 1 + x(0.69600000 - 0.48441600\tau + 0.33715353\tau^2 - 0.23465886\tau^3) + \dots; 0.4 \leq \tau \leq 0.8. \\
 \Phi_3^2(\tau) = 1 + x(0.40410012 - 0.16329691\tau + 0.06598830\tau^2 - 0.02666588\tau^3) + \dots; 0.8 \leq \tau \leq 1.2. \\
 \Phi_3^3(\tau) = 1 + x(0.25708834 - 0.06609441\tau + 0.01699210\tau^2 - 0.00436847\tau^3) + \dots; 1.2 \leq \tau \leq 1.6 \\
 \Phi_3^4(\tau) = 1 + x(0.17694380 - 0.03130910\tau + 0.00553995\tau^2 - 0.00098026\tau^3) + \dots; 1.6 \leq \tau \leq 1.
 \end{cases}$$

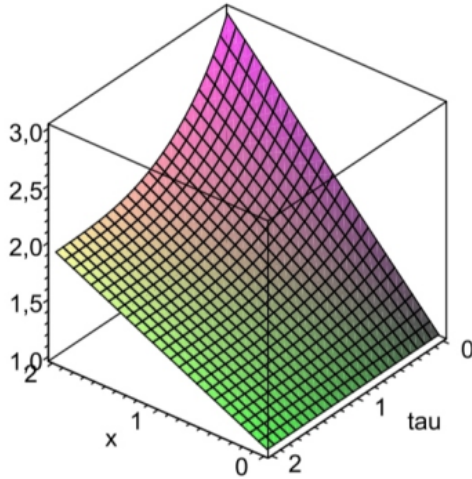


FIGURE 3.13 – La solution approximative de (3.45)

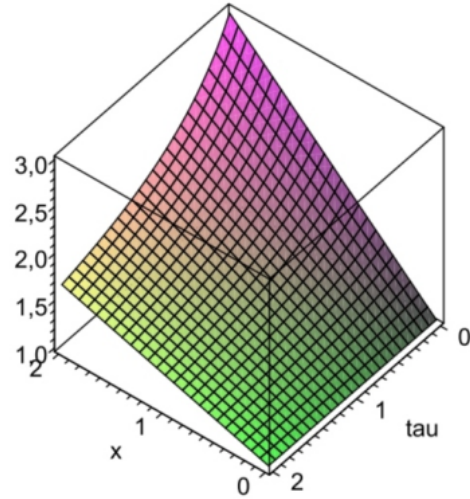


FIGURE 3.14 – La solution exacte de (3.45)

Exemple 23. On considère l'équation aux dérivées partielles fractionnaire non-linéaire

$$D_\tau^\alpha u(x, \tau) + \frac{2}{\tau} u(x, \tau) u_x(x, \tau) = 0, x \neq 0, 1 < \alpha \leq 2. \quad (3.47)$$

Sous les conditions initiales $u(x, 0) = 0, u_\tau(x, 0) = \frac{1}{x}$

Si $\alpha = 2$, la solution exacte de (3.47) est :

$$u(x, \tau) = \tan\left(\frac{\tau}{x}\right) = \frac{\tau}{x} + \frac{\tau^3}{3x^3} + 2\frac{\tau^5}{15x^5} + \frac{17\tau^7}{315x^7} + \frac{62\tau^9}{2835x^9} + \frac{1382\tau^{11}}{155925x^{11}} + \dots$$

De la formule (3.41), on obtient

$$\begin{aligned}
 u_0(x, \tau) &= \frac{\tau}{x}; \\
 u_{r+1}(x, \tau) &= -2S^{-1}[v^\alpha S[N_r u(x, \tau)]].
 \end{aligned} \quad (3.48)$$

Utilisant (3.48), on trouve

$$\begin{aligned} u_0(x, \tau) &= \frac{\tau}{x}; \\ u_1(x, \tau) &= \frac{2}{\Gamma(\alpha + 2)} \frac{\tau^{\alpha+1}}{x^3}; \\ u_2(x, \tau) &= \frac{16}{\Gamma(2\alpha + 2)} \frac{\tau^{2\alpha+1}}{x^5} + \frac{24\Gamma(2\alpha + 2)}{\Gamma^2(\alpha + 2)\Gamma(3\alpha + 2)} \frac{\tau^{3\alpha+1}}{x^7}; \\ &\vdots \end{aligned}$$

Donc, la solution approximative à l'aide de trois premiers termes représente comme

$$u(x, \tau) = \frac{\tau}{x} + \frac{2}{\Gamma(\alpha + 2)} \frac{\tau^{\alpha+1}}{x^3} + \frac{16}{\Gamma(2\alpha + 2)} \frac{\tau^{2\alpha+1}}{x^5} + \frac{24\Gamma(2\alpha + 2)}{\Gamma^2(\alpha + 2)\Gamma(3\alpha + 2)} \frac{\tau^{3\alpha+1}}{x^7} + \dots$$

En prenant $\alpha = 2, N_0 = 3, N = 1$, on obtient la solution approximative de **MTDSM** pour (3.46)

$$u(x, \tau) = \frac{\tau}{x} + \frac{\tau^3}{3x^3} + \frac{2\tau^5}{15x^5} + \frac{17\tau^7}{315x^7} + \frac{62\tau^9}{2835x^9} + \frac{1142\tau^{11}}{155925x^{11}} + \frac{13324\tau^{13}}{6081075x^{13}} + \dots; 0 \leq \tau \leq \tau_i.$$

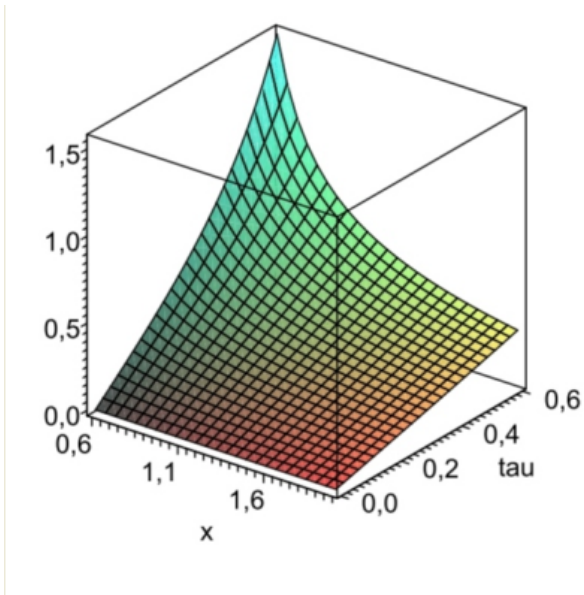


FIGURE 3.15 – La solution approximative de (3.47)

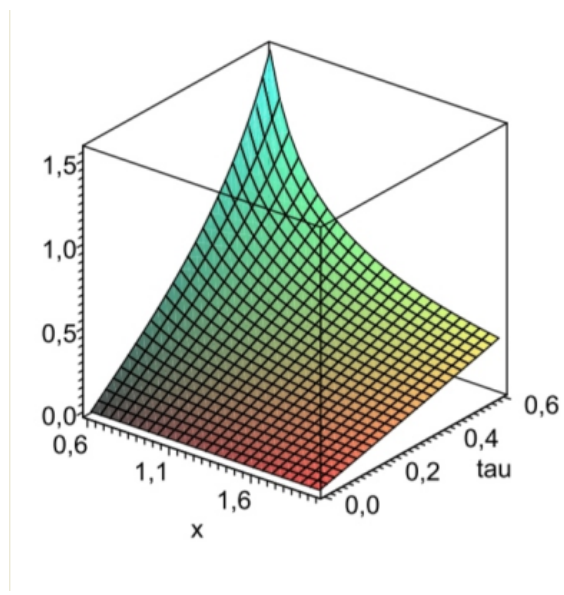


FIGURE 3.16 – La solution exacte de l'équation (3.47)

3.3 Applications

Dans cette section, on applique la méthode MFTDLM et la méthode MFTDSM pour résoudre des équations aux dérivées partielles non linéaires.

3.3.1 Application de MFTDLM aux équations différentielles fractionnaires

Dans cette section, nous allons appliquer la méthode **MFTDM** combinée avec la transformée de **Laplace** pour résoudre l'équation de **Fokker-Planck** non linéaire fractionnaire, et l'équation de **Schrodinger** non linéaire fractionnaire.

Exemple 24. On considère l'équation de Fokker-Planck non linéaire fractionnaire suivante :

$${}^c D_\tau^\alpha u = \left(\frac{x}{3}u\right)_x - \left(\frac{4}{x}u^2\right)_x + (u^2)_{xx}, 0 < \alpha \leq 1 \quad (3.49)$$

Avec les conditions initiales

$$u(x, 0) = x^2.$$

Appliquant Laplace aux deux cotés de (3.49), on obtient

$$L[D_\tau^\alpha u] = L\left[\left(\frac{x}{3}u\right)_x\right] - L\left[\left(\frac{4}{x}u^2\right)_x\right] + L[(u^2)_{xx}] \quad (3.50)$$

Utilisant les propriétés de différenciation de la transformé de Laplace, on trouve

$$L[u(x, \tau)] = u(x, 0) + s^{-\alpha} \left(L\left[\left(\frac{x}{3}u\right)_x\right] - L\left[\left(\frac{4}{x}u^2\right)_x\right] + L[(u^2)_{xx}] \right) \quad (3.51)$$

Prenant l'inverse de **Laplace**, nous donne

$$u(x, \tau) = x^2 + L^{-1} \left[s^{-\alpha} \left(L\left[\left(\frac{x}{3}u\right)_x\right] - L\left[\left(\frac{4}{x}u^2\right)_x\right] + L[(u^2)_{xx}] \right) \right] \quad (3.52)$$

La **TDM** donne,

$$\sum_{r=0}^{\infty} u_r(x, \tau) = x^2 + L^{-1} \left[s^{-\alpha} L \left[\sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{x}{3}u_r\right)_x - \sum_{r=0}^{\infty} N_r u \right] \right] \quad (3.53)$$

Tel que

$$N u = \left(\frac{4}{x}u^2\right)_x - (u^2)_{xx}$$

Comparons les deux cotés de (3.53), on obtient

$$\begin{cases} u_0(x, \tau) &= x^2; \\ u_{r+1}(x, \tau) &= L^{-1}[s^{-\alpha} L[(\frac{x}{3}u_r)_x - N_r u(x, \tau)]] \end{cases} \quad (3.54)$$

Où

$$\begin{cases} N_0 u &= N u_0 = \left(\frac{4}{x}u_0^2\right)_x - (u_0^2)_{xx}. \\ N_r u &= N U_r(x, \tau) - N U_{r-1}(x, \tau); \quad r = 1, 2, 3 \dots \end{cases}$$

En utilisant la formule d'itération, on a

$$\begin{aligned} u_0(x, \tau) &= x^2; \\ u_1(x, \tau) &= x^2 \frac{\tau^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)}. \\ u_2(x, \tau) &= x^2 \frac{\tau^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} \\ u_3(x, \tau) &= x^2 \frac{\tau^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha + 1)}. \\ u_4(x, \tau) &= x^2 \frac{\tau^{4\alpha}}{\Gamma(4\alpha + 1)}. \\ &\vdots \end{aligned}$$

Donc la solution approximative de (3.49) est comme suit :

$$u(x, \tau) = x^2 \frac{\tau^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + x^2 \frac{\tau^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} + x^2 \frac{\tau^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha + 1)} + x^2 \frac{\tau^{4\alpha}}{\Gamma(4\alpha + 1)} + \dots$$

Ainsi

$$u(x, \tau) = x^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\tau^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha + 1)} = x^2 E_\alpha(\tau^\alpha)$$

Telle que $E_\alpha(\tau^\alpha)$ est la fonction Mittag-Liffler définie comme suit :

$$E_\alpha(\tau^\alpha) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\tau^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha + 1)}.$$

Dans le cas spéciale, si $\alpha = 1$, on obtient

$$u(x, \tau) = x^2 e^\tau.$$

qui est la solution exacte de l'équation de Fokker-Planck(3.49), telle que présentée dans [9] par Adomian decomposition method (ADM), dans [10] par varational itération method (VIM) et dans [11] par homotopy perturbation method (HPM).

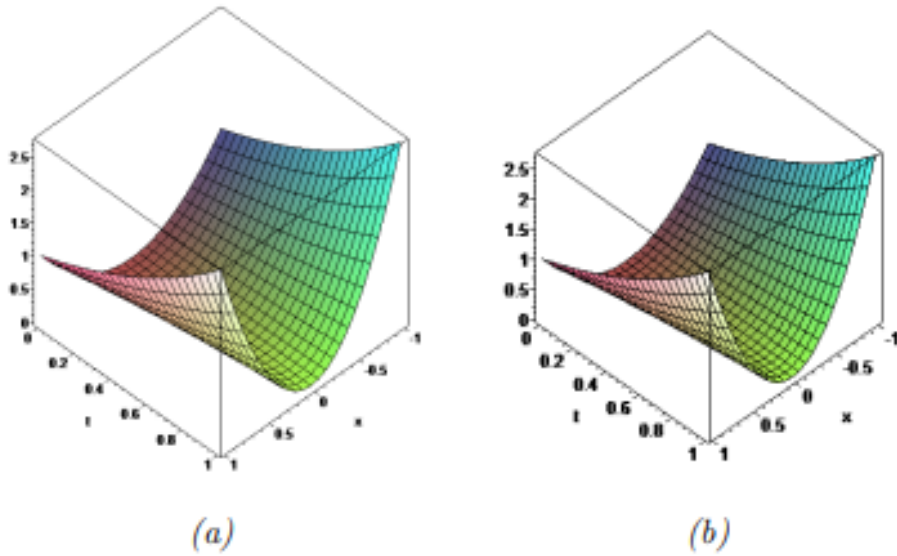


FIGURE 3.17 – (a) la solution exacte, (b) la solution approximative pour $\alpha = 1$ de (3.49)

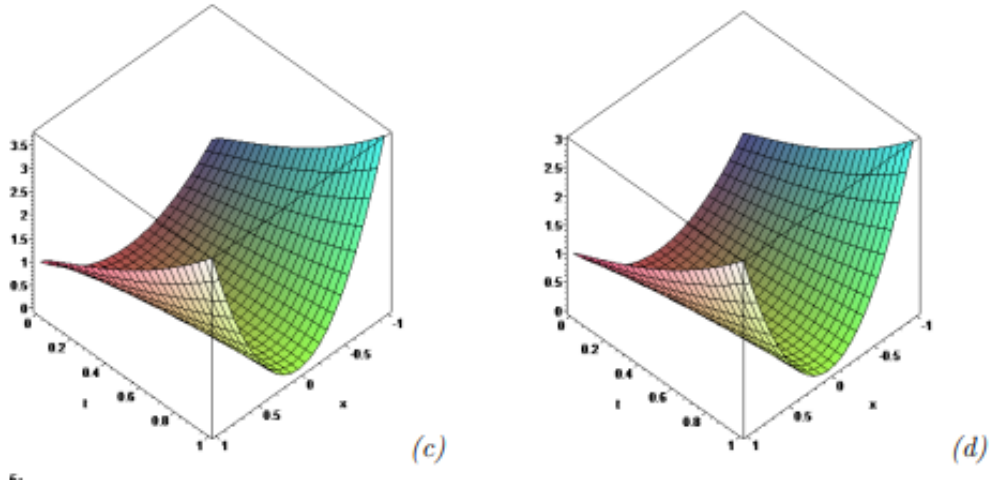


FIGURE 3.18 – (c) la solution approximative pour $\alpha = 0.7$, (d) la solution approximative pour $\alpha = 0.9$ de (3.49).

Exemple 25. Nous considérons l'équation de *Schrodinger* :

$${}^c D_\tau^\alpha u + u_{xx} - 2|u|^2 u = 0; \quad 0 < \alpha \leq 1. \quad (3.55)$$

Avec la condition

$$u(x, 0) = e^{ix}.$$

En appliquant la transformé de **Laplace** et ces de (3.59), on obtient

$$iL[D^\alpha u] = -L[u_{xx}] + 2L[|u|^2 u] \quad (3.56)$$

Utilisons les propriétés de différenciation de **Laplace** et les conditions initiales de (3.60), on trouve

$$L[u(x, \tau)] = e^{ix} + is^{-\alpha} (L[u_{xx} - 2|u|^2 u]). \quad (3.57)$$

Maintenant, on applique **l'inverse de Laplace** sur les deux cotés de (3.61)

$$u(x, \tau) = e^{ix} + L^{-1}is^{-\alpha}[L[u_{xx}] - 2L[|u|^2 u]] \quad (3.58)$$

Selon TDM, on a

$$\sum_{r=0}^{\infty} u_r(\tau) = e^{ix} + L^{-1}is^{-\alpha} \left[L \left[\sum_{r=0}^{\infty} (u_r)_{xx} - 2 \sum_{r=0}^{\infty} N_r u \right] \right]$$

3.3.2 Application de MFTDSM aux equations différentielles fractionnaires

Dans cette partie de travail nous allons appliquer la méthode MFTDSM pour résoudre l'équation de **Fokker-Planck** et **Schrodinger** non linéaire fractionnaire.

Exemple 26. On considère l'équation de *Fokker-Planck* non linéaire fractionnaire suivante :

$${}^c D_\tau^\alpha u = \left(\frac{x}{3}u\right)_x - \left(\frac{4}{x}u^2\right)_x + (u^2)_{xx}, \quad 0 < \alpha \leq 1 \quad (3.59)$$

Avec les conditions initiales

$$u(x, 0) = x^2.$$

Appliquant **Sumudu** aux deux cotés de (3.49), on obtient

$$S[D_\tau^\alpha u] = S\left[\left(\frac{x}{3}u\right)_x\right] - S\left[\left(\frac{4}{x}u^2\right)_x\right] + S[(u^2)_{xx}] \quad (3.60)$$

Utilisant les propriétés de différenciation de la transformé de **Sumudu**, on trouve

$$S[u(x, \tau)] = u(x, 0) + v^\alpha \left(S\left[\left(\frac{x}{3}u\right)_x\right] - S\left[\left(\frac{4}{x}u^2\right)_x\right] + S[(u^2)_{xx}] \right) \quad (3.61)$$

Prenant l'inverse de la transformé de **Sumudu**, nous donne

$$u(x, \tau) = x^2 + S^{-1} \left[v^\alpha \left(S\left[\left(\frac{x}{3}u\right)_x\right] - S\left[\left(\frac{4}{x}u^2\right)_x\right] + S[(u^2)_{xx}] \right) \right] \quad (3.62)$$

Selon **TDM** donne,

$$\sum_{r=0}^{\infty} u_r(x, \tau) = x^2 + S^{-1} \left[v^\alpha S \left[\sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{x}{3}u_r\right)_x - \sum_{r=0}^{\infty} N_r u \right] \right] \quad (3.63)$$

Tel que

$$N u = \left(\frac{4}{x}u^2\right)_x - (u^2)_{xx}$$

Comparons les deux cotés de (3.63), on obtient

$$\begin{cases} u_0(x, \tau) & = x^2; \\ u_{\tau+1}(x, \tau) & = S^{-1}[v^\alpha S[(\frac{x}{3}u_\tau)_x - N_\tau U(x, \tau)]] \end{cases} \quad (3.64)$$

Où

$$\begin{cases} N_0 u & = N u_0 = N u_0 = \left(\frac{4}{x}u_0^2\right)_x - (u_0^2)_{xx}. \\ N_r u & = N U_r(x, \tau) - N U_{r-1}(x, \tau); \quad r = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

En utilisant la formule d'itération, on a

$$\begin{aligned} u_0(x, \tau) &= x^2; \\ u_1(x, \tau) &= x^2 \frac{\tau^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)}; \\ u_2(x, \tau) &= x^2 \frac{\tau^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)}; \\ u_3(x, \tau) &= x^2 \frac{\tau^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha + 1)}; \\ u_4(x, \tau) &= x^2 \frac{\tau^{4\alpha}}{\Gamma(4\alpha + 1)}; \\ &\vdots \end{aligned}$$

Donc la solution approximative de (3.59) est comme suit :

$$u(x, \tau) = x^2 \frac{\tau^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + x^2 \frac{\tau^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} + x^2 \frac{\tau^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha + 1)} + x^2 \frac{\tau^{4\alpha}}{\Gamma(4\alpha + 1)} + \dots$$

Ainsi

$$u(x, \tau) = x^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\tau^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha + 1)} = x^2 E_\alpha(\tau^\alpha)$$

Telle que $E_\alpha(\tau^\alpha)$ est la fonction Mittag-Liffler définie comme suit :

$$E_\alpha(\tau^\alpha) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\tau^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha + 1)}.$$

Dans le cas spéciale, si $\alpha = 1$, on obtient

$$u(x, \tau) = x^2 e^\tau.$$

qui est la solution exacte de l'équation de Fokker-Planck(3.59), telle que présentée dans [9] par Adomian decomposition method (ADM), dans [10] par varational itération method (VIM) et dans [11] par homotopy perturbation method (HPM).

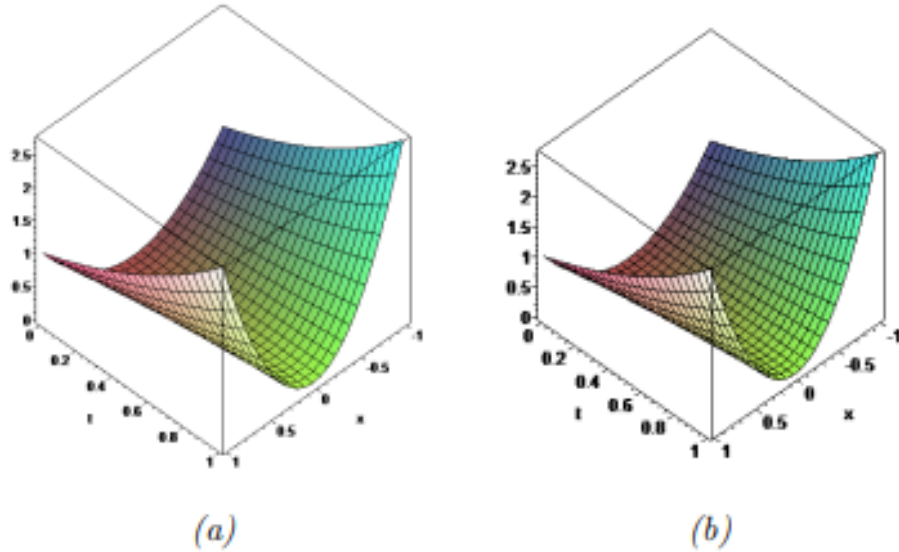


FIGURE 3.19 – (a) la solution exacte, (b) la solution approximative pour $\alpha = 1$ de (3.59)

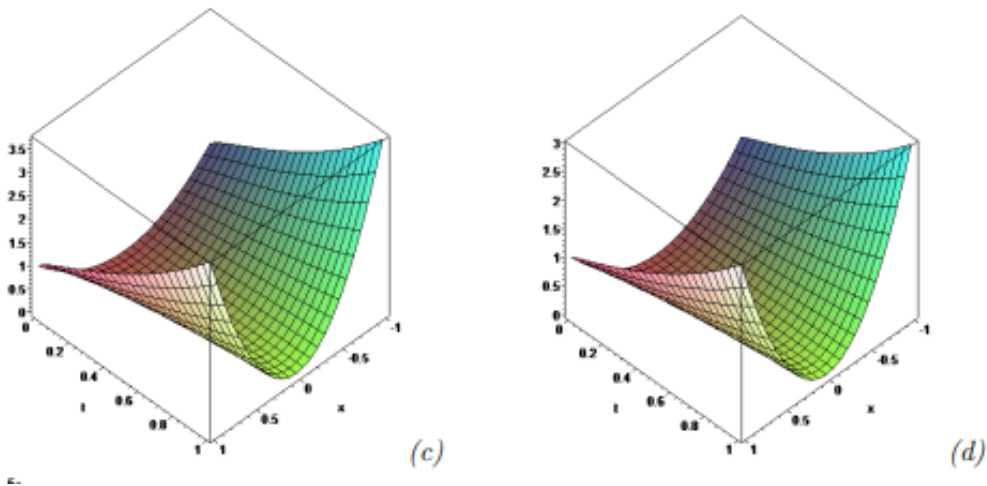


FIGURE 3.20 – (c) la solution approximative pour $\alpha = 0.7$, (d) la solution approximative pour $\alpha = 0.9$ de (3.59).

3.4 Conclusion

Ce mémoire a pour but l'étude des équations différentielles aux dérivées d'ordre fractionnaire.

Premièrement, nous avons présenté quelques outils de base utilisé dans ce travail, et aussi nous avons présenté quelques transformations pour résoudre les équations différentielles telles que la transformation de Laplace et de Sumudu.

Dans le deuxième chapitre, nous avons exposé la Telescoping Decoposition Method (TDM) et la Multistage Telescoping Decomposition Method (MFTDM), et nous avons donnée des exemples traité par cette méthode.

Dans le dernier chapitre, nous avons appliqué la méthode appelé Multistage Telescoping Decomposition Laplace Method (MFTDLM), et aussi la Multistage Telescoping Decomposition Sumudu Method (MFTDSM) pour résoudre les problèmes fractionnaires non linéaire avec conditions initiales.

Cette méthode est la combinaison de deux méthodes : Multistage Telescoping Decomposition Method et la transformation de Laplace et de Sumudu respectivement. L'algorithme proposé fournit la solution sous forme de série qui converge rapidement vers la solution exacte si elle existe. Il est clair que (MFTDLM) et (MFTDSM) donnent des bonnes résultats approximatives que (MFTDM).

Nous comptons dans l'avenir appliquer la méthode cité dans ce mémoire et développer d'autre méthode numérique de résolution des équations différentielles moins couteuse et plus précises que cette proposé dans ce mémoire.

Références

- [1] CHERIF, Mountassir HAMDI. Résolution numérique des équations différentielles et aux dérivées partielles non linéaire et d'ordre fractionnaire par la méthode HPM. Diss. UNIVERSITE D'ORAN, 2016.
- [2] Belbal, Yamina. Application de la transformation de Laplace dans la résolution Des équations différentielles fractionnaire. Diss. Université Ibn Khaldoun-Tiaret-, 2019.
- [3] F.B.M.Belgacem, A.A. Karaballi, and S.L. Kalla, Analytical investigations of the Sumudu transform and applications to integral production equations, *Mathematical Problems in Engineering* 2003(2003),no.3,103-118.
- [4] Guezaout, Noor El Houda. "Sur les équations aux dérivées partielles fractionnaires." (2019).
- [5] M. Al-Refai, "Telescoping Decomposition Method for Solving First Order Nonlinear Differential Equations," in *Proceedings of the International Multi-Conference of Engineers and Computer Scientists 2008, Vol. II (IMECS 2008)*, 2008, Hong Kong.
- [6] A. Bouhassoun, Multistage Telescoping Decomposition Method for Solving Fractional Differential Equations, *IAENG International Journal of Applied Mathematics*, 9 February 2013).
- [7] A. A. Kilbas ; H. M. Srivastava and J. J. Trujillo, " Theory and applications of fractional differential equations," Elsevier, 2006.
- [8] K. Diethelm, "The Analysis of Fractional Differential Equations," Springer, 2010
- [9] Tatari, M., Dehghan, M., and Razzaghi, M., Application of Adomian Decomposition Method for the Fokker-Planck Equation. *Math. Comp. Model.* 45 (2007), 639-650.
- [10] Sadhigi, A., Ganji, D., and Sabzehmeidavi, Y., A Study on Fokker-Planck Equation by Variational Iteration Method. *Int. J. Nonlinear. Sci.* 4 (2007), 92-102.
- [11] Biazar, J., Hosseini, K., and Gholamin, P., Homotopy Perturbation Method Fokker-Planck Equation. *Int. Math. Forum.* 19 (2008), 945-954.
- [12] Ziane, D., Belghaba, K., and Hamdi Cherif, M., Fractional Homotopy Perturbation Transform Method for Solving the Time-Fractional KdV ,K(2,2) and Burgers Equations, *Int. J. Open Probl. Comput. Math.* 8 (2015), 63-75.
- [13] Katatbeh, Qutaibeh Deeb, and Fethi Bin Muhammad Belgacem. "Applications of the Sumudu transform to fractional differential equations." *Nonlinear Studies* 18.1 (2011) : 99-112.
- [14] Bodkhe, D. S., and S. K. Panchal. "On Sumudu transform of fractional derivatives and its applications to fractional differential equations." *Asian J. Math. Comput. Res* 11.1 (2016) : 69-77.

- [15] Tuluce Demiray, Seyma, Hasan Bulut, and Fethi Bin Muhammad Belgacem. "Sumudu transform method for analytical solutions of fractional type ordinary differential equations." *Mathematical Problems in Engineering* 2015 (2015).
- [16] Al-Refai, Mohammed, Maysem Abu-Dalu, and A. Rawashdeh. "Telescoping decomposition method for solving first order nonlinear differential equations." *Proceedings of the International Multi-Conference of Engineers and Computer Scientists*. Vol. 2. 2008.
- [17] CHITA, Fouzia. *Résolution numérique des équations différentielles d'ordre fractionnaire*. Diss. Université d'Oran1-Ahmed Ben Bella, 2011.
- [18] Shukla, A. K., and J. C. Prajapati. "On a generalization of Mittag-Leffler function and its properties." *Journal of mathematical analysis and applications* 336.2 (2007) : 797-811.