

Université Djilali BOUNAAMA Khemis Miliana
Faculté des Sciences et de la Technologie
Conseil Scientifique de la Faculté



جامعة الجبلاي بونعامه خميس مليانة
كلية العلوم والتكنولوجيا
المجلس العلمي للكلية

Réf: 04/02/UNDBKM/FST/CSF/2026

• EXTRAIT DU PV
DE LA REUNION EXTRA ORDINAIRE DU CONSEIL SCIENTIFIQUE DE LA FACULTE
DU 28/04/2026

L'an deux mille vingt-six (2026), le vingt-huit (28) avril, une réunion extraordinaire du Conseil scientifique de la Faculté des sciences et de la technologie s'est tenue à 10 h 00 dans la salle de réunion de la faculté.

DEROULEMENT

Après une allocution de bienvenue prononcée par le Président du Conseil scientifique, et en présence des membres, la séance a été déclarée ouverte. Les points inscrits à l'ordre du jour ont ensuite été examinés et débattus comme suit :

Objet : EXPERTISE DES POLYCOPIES PEDAGOGIQUES

Le Conseil Scientifique de la Faculté a validé la conformité des photocopiés pédagogiques présentés par les enseignants listés ci-dessous, sur la base des rapports favorables émis par les experts, comme détaillé ci-après :

➤ **Auteur du photocopié : TOUHARI Mahfoud (MCA), Département de Génie Civil et d'Architecture**

Intitulé du photocopié	Béton Armé 2
Destiné aux étudiants	L3Génie Civil
Experts du photocopié :	

YAHMI Djamel	MCA	Univ-Khemis Miliana
HANNICHE Abderrahmene	MCA	Univ-Tipaza

L'ordre du jour achevé, la séance fut levée à 12h30.



République Algérienne Démocratique et Populaire
Université Djilali Bounaama Khemis Miliana
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département de Génie Civil et d'Architecture

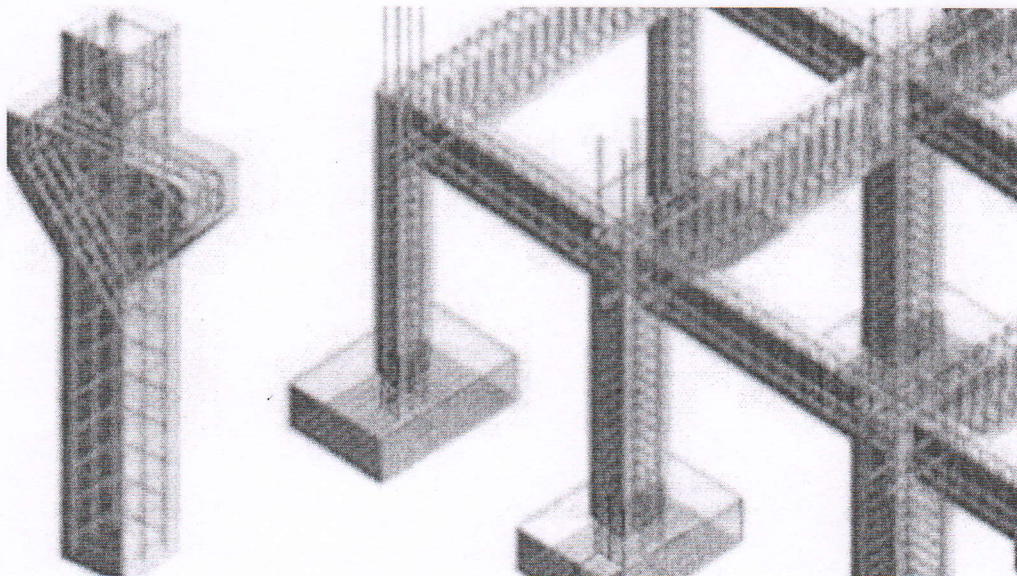


Polycopié

Cours De :

Béton Armé 2

Destiné aux étudiants de 3ème année Licence Génie Civil



Présenté Par: **Dr TOUHARI Mahfoud**
Maître de conférences A

Année universitaire 2025 /2026

Avant-propos



Ce polycopié de **Béton Armé** a été élaboré conformément au canevas de la troisième année licence en Génie civil, dans le but de fournir aux étudiants un support pédagogique clair, structuré et accessible pour l'étude et la compréhension des principes fondamentaux du béton armé.

Ce polycopié est destiné aux étudiants de troisième année licence en Génie Civil et s'inscrit dans le cadre de leur formation académique selon le programme officiel.

Le béton armé constitue aujourd'hui l'un des matériaux les plus utilisés dans le domaine du génie civil, en raison de ses qualités mécaniques, de sa durabilité et de sa polyvalence. La maîtrise de son comportement, ainsi que des méthodes de dimensionnement et de vérification des structures, représente donc une étape essentielle dans la formation de tout futur ingénieur ou technicien.

Ce document regroupe les notions de base nécessaires à l'analyse et au calcul des éléments en béton armé, en s'appuyant sur des approches théoriques accompagnées d'exemples pratiques. Une attention particulière a été accordée à la clarté des explications afin de faciliter l'assimilation des concepts, tout en respectant les normes et les règles en vigueur.

Ce polycopié n'a pas la prétention d'être exhaustif, mais il vise à constituer un outil de travail efficace, permettant aux étudiants de consolider leurs connaissances et de développer leur autonomie dans la résolution de problèmes.

Nous tenons à exprimer notre profonde gratitude aux experts qui ont contribué à l'évaluation et à l'amélioration de ce travail, en particulier le **Docteur HENNICHE Abderrahmene** de l'Université de Tipaza et le **Docteur YAHMI Djamel** de l'Université de Khemis Miliana, pour leurs remarques pertinentes, leurs conseils avisés et leur précieuse contribution.

Nous espérons que ce support contribuera à la réussite des apprenants et à leur préparation aux défis du domaine du génie civil.

Table des matières



Chapitre I : Calcul de sections en béton armé soumises à la flexion simple

I.I. Définitions	1
I.II. Calcul à l'état limite ultime de résistance ELU	1
I.II.1. Hypothèses de calcul.....	1
I.II.2. Diagramme des déformations limites de la section « Règle des trois Pivots ».....	3
I.II.2.1 Positions particulières	3
I.II.2.2 Positions particulières avec la valeur de α	4
I.II.2.3 Conclusion pratique de la déformation de la section pour l'ELU	5
I. II.2.4 Application (Règle des Trois Pivots)	8
I.II.3 calcul des sections soumise à la flexion simple	13
I. II.3.1 Etablissement des formules de calcul	13
I.II.3.2 Etablissement des formules de calcul pour une section rectangulaire	15
I.II.3.2.1 Section rectangulaire sans armatures comprimées $A_{sc} = 0$	15
I.II.3.2.2 Positions particulières avec la valeur de μ	16
I.II.3.2.3 Application « Dimensionnement d'une section rectangulaire à l'ELU »	20
I.II.3.3 Calcul des sections en T	25
I.II.3.3.1 Largeurs des tables de compression des poutres en T	25
I.II.3.3.2 Section sans aciers comprimés.....	26
I.II.3.3.3 Section avec aciers comprimés	28
I.II.3.3.4 Calcul de la section fictive 2	29
I.III. Calcul à l'état limite ultime de service ELS	32
I.III.1. Généralités	32
I.III.2. Calcul des contraintes à l'état-limite de service	33
I.III.2.1. Détermination de l'axe neutre	33
I.III.2.2. Moment d'inertie de la section	34
I.III.3. Calcul d'une section rectangulaire lorsque l'ELS est le plus défavorable	35
I.III.3.1. La condition de compression du béton est assurée, la condition de fissuration n'est pas assurée.....	35
I.III.3.2. La condition de compression du béton n'est pas assurée	38
I.III.3.3. La section comporte des armatures tendues et des armatures comprimées..	39
I.III.4. Calcul d'une section en T lorsque l'ELS est le plus défavorable	43
I.III.4.1. Moment résistant de la table de compression	43



I.III.4.2. Moment sollicitant $M_{ser} = M_{bt}$	44
I.III.4.1. Moment sollicitant $M_{ser} > M_{bt}$	45

Chapitre II : Effort tranchant

II.1. Base de calcul	49
II.2. Résistance des âmes – Section courantes	50
II.3. Vérification du béton de l'âme	51
II.4. Calcul des armatures transversales	52
II.5. Répartition des armatures transversales « Méthode de Caquot »	54
II.6. Règle de coutures	54
II.7. Influence de l'effort tranchant au voisinage des appuis	55
II.7.1 Vérification de la compression du béton	55
II.7.2 Vérification de la Section minimale d'armature longitudinale inférieure sur appui de rive:	57

Chapitre III : Calcul de sections en B.A soumises à la flexion composée

III .1. Définitions	66
III.2. Section Entièrement tendue	66
III.2.1 Etat Limite Ultime d'une section entièrement tendue	66
III.2.2 Etat Limite de Service d'une section entièrement tendue	67
III.3 Section Partiellement comprimée	68
III.4 Section Entièrement comprimée	69
III.5 Applications	72
III.5.1 Section Entièrement Tendus	72
III.5.2 Section Partiellement comprimée	78
III.5.2 Section Partiellement comprimée	83

Chapitre VI : Torsion

VI.1. Rappels sur la Théorie élémentaire	86
VI.1.1. Définition	86
VI.1.2. Application à une section creuse	88
VI.1.3. Exemples de sollicitations en torsion	88
VI.2. Vérification du béton	89
VI.2.1. Sections creuses	89



VI.2.2. Sections pleines	90
VI.2.3. Calcul et vérification de la contrainte de béton	90
VI.3. Dimensionnement des armatures	91
VI.3.1. Dimensionnement des armatures longitudinales de torsion	91
VI.3.2. Dimensionnement des armatures transversales de torsion	91
VI.4. Application	91

Liste des figures

Figure I.1. Diagramme contraintes déformations de l'acier	1
Figure I.2. Diagramme Parabole-Rectangle du béton	2
Figure I.3. Diagramme Rectangle Simplifié du béton.....	2
Figure I.4. Allure de déformation à l'ELU	3
Figure I.5. Positions particulières avec la valeur de α	4
Figure I.6. Diagramme des déformations de la section.....	5
Figure I.7. Différents diagrammes de déformation possible	6
Figure I.8. Allure de déformation et de contraintes (section forfaitaire).....	15
Figure I.9. Allure de déformation et de contraintes (section rectangulaire sans A_{sc}).....	16
Figure I.10. Positions particulières avec la valeur de μ	16
Figure I.11. Organigramme de calcul du béton armé à la flexion simple à l'ELU	24
Figure I.12. Elément en béton armé de section en forme d'un té	24
Figure I.13. Largeur de la table de compression	25
Figure I.14. Principe de calcul à l'ELU d'une section en T, avec : $M_t \geq M_u$	25
Figure I.15. Principe de calcul à l'ELU d'une section en T, avec : $M_t < M_u$	26
Figure I.17. Schéma de calcul à l'ELS d'une section rectangulaire.....	33
Figure I.18. Schéma de calcul à l'ELS section rectangulaire sans armatures comprimées	34
Figure I.19. Sections rectangulaires fléchies à l'ELS. Courbes a $\alpha_1 = f_u$	37
Figure I.20. Diagramme des contraintes d'une section rectangulaire fléchie à l'ELS	37
Figure I.20. Organigramme de calcul à l'ELS d'une section rectangulaire	41
Figure I.21. Equilibre statique d'une section en Té à l'ELUR soumise au moment M_{bt}	42
Figure I.22. Section rectangulaire fictive de calcul pour la section en Té.....	43
Figure II.1 Résistance des âmes – Section courantes	50
Figure II.2 Vérification de la compression du béton.	55
Figure II.3 Poutre à nervure rectangulaire reposant sur un appui ou sur un mur.....	56
Figure II.4 Poutre à nervure rectangulaire reposant sur un appareil d'appui	50
Figure 3.1. Section soumise à la flexion composée.....	65
Figure 3.1. Schéma de calcul d'une section Entièrement tendue.....	66
Figure.III.3. Distribution des déformations et des efforts à l'ELS dans une section soumise à la flexion composée	67
Figure 3.4. Droites de déformation en flexion composée dans le cas où la section est partiellement tendue/comprimée.	67
Figure IV.1. Barre circulaire encastrée soumise à un moment de torsion.	85

Figure IV.2. Contrainte de cisaillement.....	86
Figure IV.3. Exemples de sollicitations en torsion	87
Figure IV.4. Moment de torsion sur des sections creuses	87

Liste des Tableaux

Tableau I.1. Conclusion Pratique pour la flexion simple	4
Tableau III.1.Calcul des efforts pour une section partielement comprimée	80

Chapitre I : Calcul de sections en béton armé soumises à la flexion simple

Chapitre I : Calcul de sections en béton armé soumises à la flexion simple

I.I. Définitions

Une section de poutre est sollicitée en flexion simple lorsque le torseur gauche des éléments de réduction dans cette section se réduit, outre l'effort tranchant, à un couple de moment M .

Le dimensionnement des sections, vis-à-vis du moment de flexion, s'effectuera en considérant l'état limite ultime de résistance ; ensuite il faudra vérifier que le dimensionnement ainsi obtenu satisfait aux conditions d'état limite de service vis-à-vis de la durabilité et des déformations.

En fin, un pourcentage minimal d'armatures devra être respecté afin de s'assurer de la condition de non fragilité d'un élément en béton armé.

I.II. Calcul à l'état limite ultime de résistance ELU

I.II.1. Hypothèses de calcul

1. Conservation des sections :

Les sections droites, planes avant déformations, restent planes après déformation. C'est l'hypothèse classique de Navier-Bernoulli, qui est à la base de tous les calculs de flexion. Il en résulte que le diagramme des déformations est représenté par une droite et que la déformation d'une fibre est proportionnelle à sa distance à l'axe neutre.

2. Adhérence Acier-Béton :

On suppose qu'il n'y a pas de glissement relatif entre les armatures d'acier et le béton. Il en résulte que chaque barre d'acier subit la même déformation que la gaine de béton qui l'entoure ; cette gaine de béton étant supposée non fissurée pour les armatures tendues.

3. Les déformations des sections à l'ELU sont limitées pour :

- L'allongement de l'acier à 10 ‰,
- Le raccourcissement unitaire du béton à 3.5 ‰ en flexion et 2‰ à la compression simple

4. La résistance à la traction du béton est négligée à cause de la fissuration

5. Le diagramme contrainte-déformation de l'acier et de béton sont respectivement :

5.1 Diagramme Elastique-parfaitement plastique pour l'acier

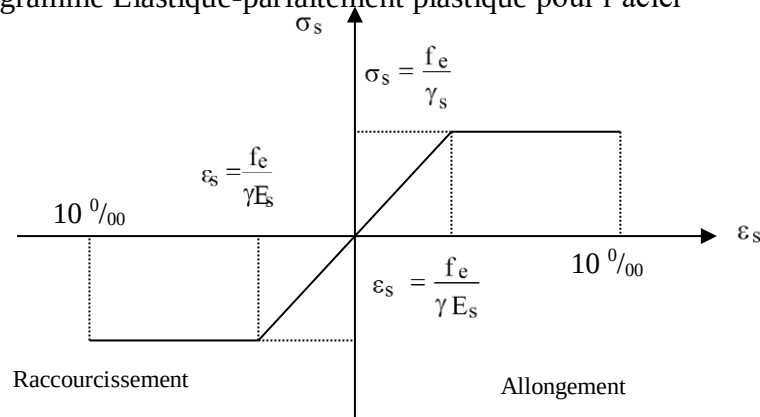


Figure I.1. Diagramme contraintes déformations

5.2 Diagramme Parabole-Rectangle

Le diagramme contrainte-déformation du béton peut être utilisé dans tous les cas, ce diagramme de calcul dit « Parabole-rectangle ». Il comporte un arc de parabole du second degré suivi d'un segment de droite parallèle à l'axe des déformations ε_{bc} et tangent à la parabole en son sommet. Ce segment s'étend entre les valeurs 2‰ et 3,5‰ de la déformation ε_{bc} . l'arc de parabole s'étend de l'origine des déformations jusqu'à son sommet de coordonnées $\varepsilon_{bc} = 2‰$ et $\sigma_{bc} = 0,85 \cdot f_{c28} / \gamma_b$.

Le diagramme ci-dessous schématise ces dispositions.

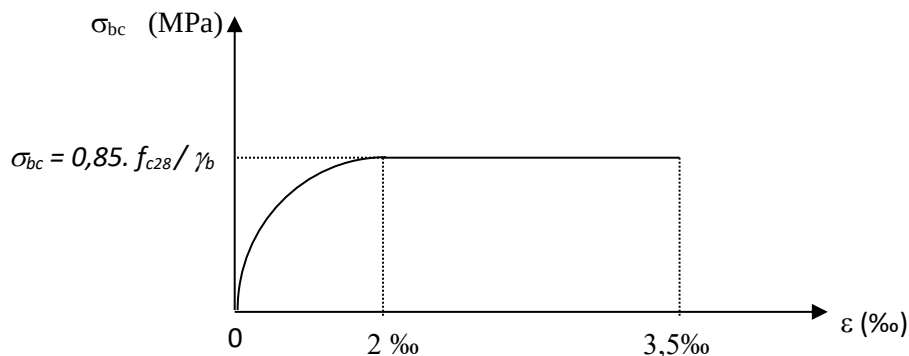


Figure I.2. Diagramme Parabole-Rectangle du béton

5.3 Diagramme Rectangle Simplifié

Lorsque la section n'est pas entièrement comprimée, il est loisible d'utiliser le diagramme rectangulaire simplifié défini ci-après, dans le quel Y désigne la distance de l'axe neutre de la déformation à la fibre la plus comprimée.

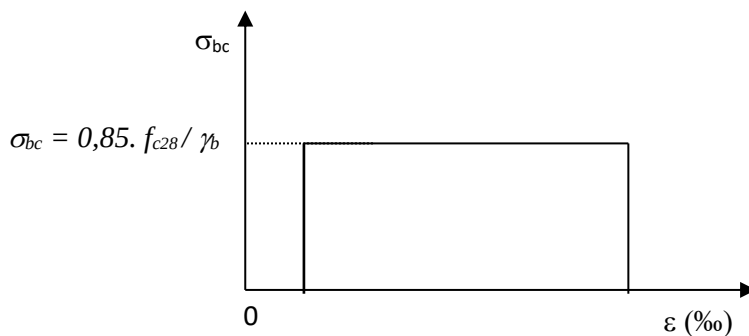


Figure I.3. Diagramme Rectangle Simplifié du béton

Sur une distance $0,2Y$ à partir de l'axe neutre la contrainte est nulle. Sur la distance $0,8Y$, la contrainte vaut $0,85 \cdot f_{cj} / \gamma_b$ pour les zones comprimées dont la largeur est croissante (ou constante) vers les fibres les plus comprimées et $0,8 \cdot f_{c28} / \gamma_b$ pour les zones comprimées dont la largeur est décroissante vers ces mêmes fibres.

Les coefficients de sécurité :

Situation durable $\gamma_b = 1,5$ et $\gamma_s = 1,15$

Situation accidentelle $\gamma_b = 1,15$ et $\gamma_s = 1$

I.II.2. Diagramme des déformations limites de la section « Règle des trois Pivots »

Le problème consiste à trouver les positions limites du diagramme des déformations d'une section, de sorte qu'aucune des déformations limites fixées précédemment ne soit dépassée.

En fonction des hypothèses retenues, l'état limite ultime peut être atteint de deux façons :

- Par écoulement plastique des aciers $\varepsilon_s = 10 \text{ ‰}$ (PIVOT A)
- Par écrasement du béton $\varepsilon_{bc} = 3.5 \text{ ‰}$ (PIVOT B)

PIVOT A :

Cet état est caractérisé par les déformations suivantes :

$\varepsilon_s = 10 \text{ ‰}$ et $0 \leq \varepsilon_{bc} \leq 3.5 \text{ ‰}$ notons que $\alpha = y/d$ donc $0 \leq \alpha \leq 0.259$

PIVOT B :

Cet état est caractérisé par les déformations suivantes :

$\varepsilon_b = 10 \text{ ‰}$ et $0 \leq \varepsilon_s < 10 \text{ ‰}$ notons que $\alpha = y/d$ donc $0.259 < \alpha \leq 1$

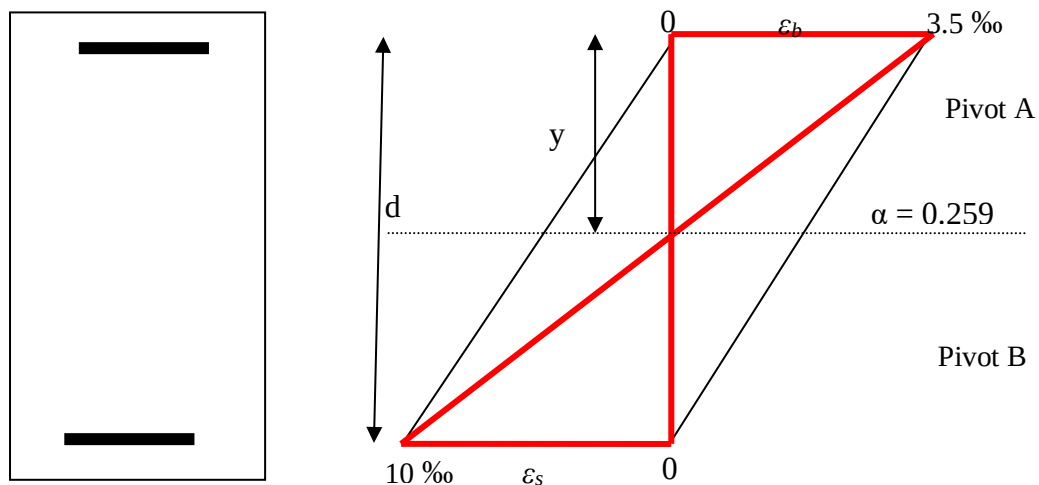


Figure I.4. Allure de déformation à l'ELU

Le mode d'obtention de l'état limite ultime est déterminé en comparant α à $\alpha_{AB}=0.259$, valeur qui correspond à un état limite ultime atteint simultanément dans l'acier et le béton.

I.II.2.1 Positions particulières

1. La rupture se fait simultanément par écrasement de béton et par écoulement des aciers : $\varepsilon_{bc}=3.5 \text{ ‰}$ et $\varepsilon_s=10 \text{ ‰}$ donc $\alpha = 0.259$
2. Etat limite ultime avec : $\varepsilon_b < 2 \text{ ‰}$ et $\varepsilon_s=10 \text{ ‰}$ donc $\alpha < 0.167$
Si $\alpha < 0.167$, $\varepsilon_b < 2 \text{ ‰}$ et $\sigma_b < f_{bu}$ le béton travail mal, la section est surdimensionnée en béton

Solution :

Il faut augmenter la section des aciers tendus ou réduire la section de béton

3. Etat limite ultime avec : $\varepsilon_b = 3.5 \text{ ‰}$ et $\varepsilon_s = \varepsilon_{sel}$ donc $\alpha = \alpha_l$

Si $\varepsilon_b = 3.5 \text{ ‰}$ et $\varepsilon_s = \varepsilon_{sel}$, $\alpha = \alpha_l = \frac{3.5}{3.5 + \alpha_{sel}}$ qui est fonction de la nuance des armatures.

Si $\alpha > \alpha_l$, $\varepsilon_s < \varepsilon_{sel}$, $\sigma_s < \sigma_s = \frac{f_e}{\gamma_s}$: les aciers travaillent insuffisamment.

Solution : Il faut augmenter la section du béton ou ajouter les aciers comprimés ($A_{sc} \neq 0$).

I.II.2.2 Positions particulières avec la valeur de α

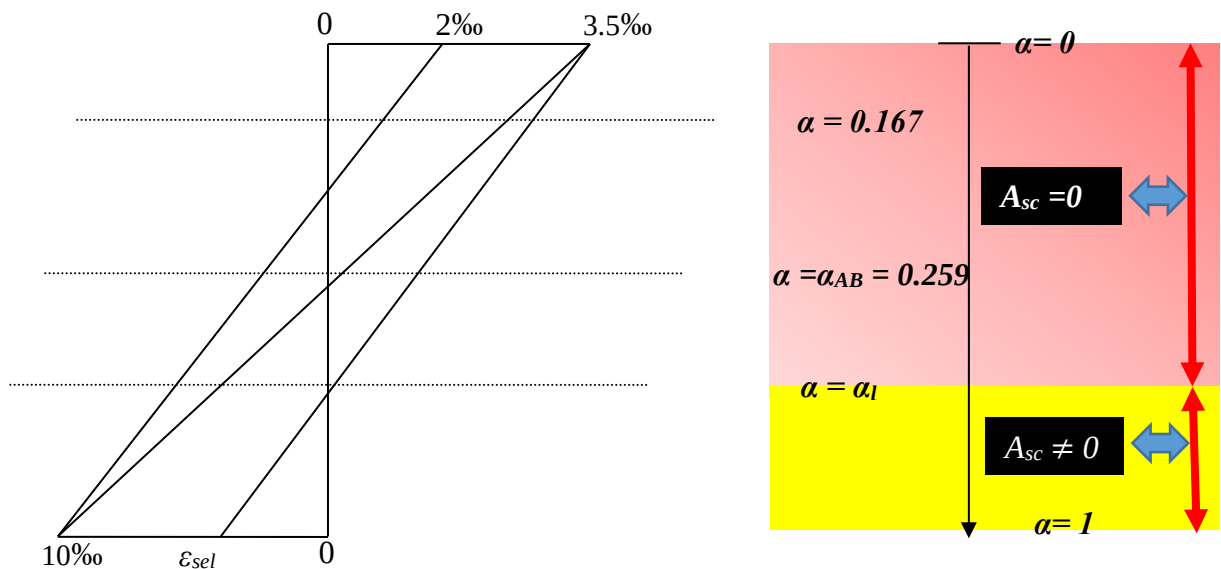


Figure I.5. Positions particulières avec la valeur de α

Une fois calculée la valeur du coefficient α on détermine le mode d'obtention de l'état limite ultime et le type de diagramme des déformations en comparant cette valeur aux valeurs limites indiquées précédemment.

Tableau 1.1. Conclusion Pratique pour la flexion simple

Valeur α	ELU	Pivot	ε_s (‰)	ε_{bc} (‰)	σ_b	$\sigma_{b \max}$
< 0.167	Ecoulement plastiques des aciers	A	10	< 2	f_{su}	$< f_{bu}$
0.167			10	2	f_{su}	f_{bu}
0.167-0.259			10	2-3.5	f_{su}	f_{bu}
0.259			10	3.5	f_{su}	f_{bu}
0.259- α_l	Ecrasement du béton	B	$\varepsilon_{sel}-10$	3.5	f_{su}	f_{bu}
α_l			ε_{sel}	3.5	f_{su}	f_{bu}
$> \alpha_l$			ε_{sel}	3.5	$< f_{su}$	f_{bu}

I.II.2.3 Conclusion pratique de la déformation de la section pour l'ELU

Le problème consiste à trouver les positions limites du diagramme des déformations d'une section, de sorte qu'aucune des déformations limites fixées précédemment ne soit dépassée à l'état- limite ultime. Le diagramme des déformations de la section représenté par une droite, est supposé passer par l'un des trois points *A*, *B* ou *C* (figures 6-7). Ces points, appelés pivots (d'où le nom "Règle des trois pivots") sont définis de la manière suivante.

Le point A correspond à un allongement de 10 ‰ de l'armature la plus tendue, supposée concentrée au centre de gravité de l'ensemble des armatures tendues;

Le point B correspond à un raccourcissement de 3,5 ‰ du béton de la fibre la plus comprimée;

Le point C correspond à un raccourcissement de 2 ‰ de la fibre de béton située à une distance égale à $(3/7)h$ (h étant la hauteur totale de la section) de la fibre la plus comprimée.

Sur le diagramme (fig. 2.1) on peut distinguer *trois domaines*.

Domaine 1. Le diagramme des déformations passe par le point *A*.

Il peut alors occuper l'une des positions représentées sur les figures 2.2 *a*, *b*, *c* et *d*.

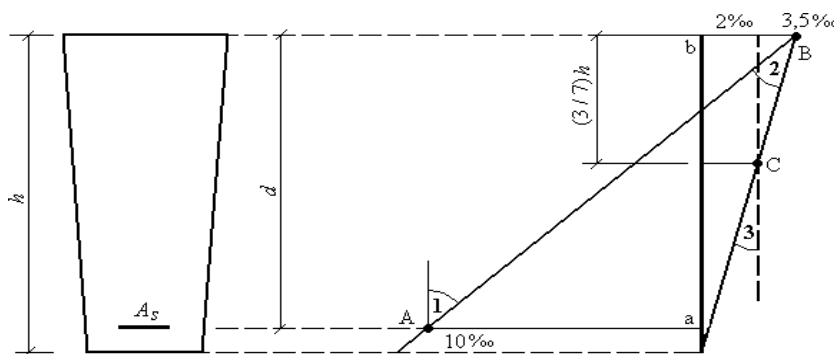
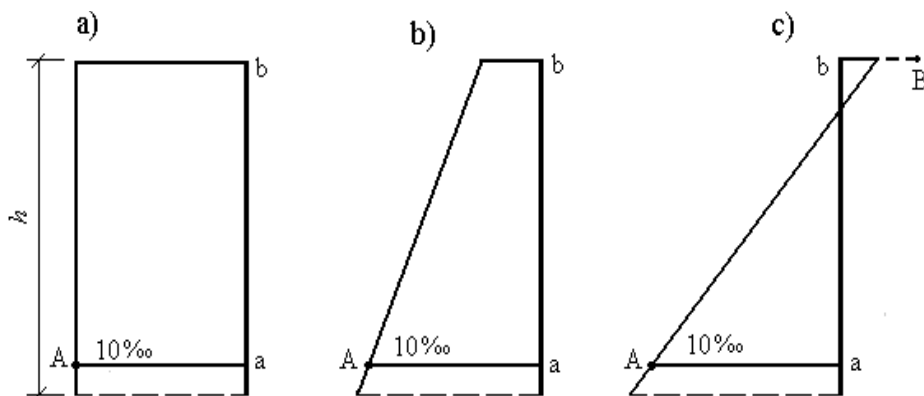


Figure I.6. Diagramme des déformations de la section



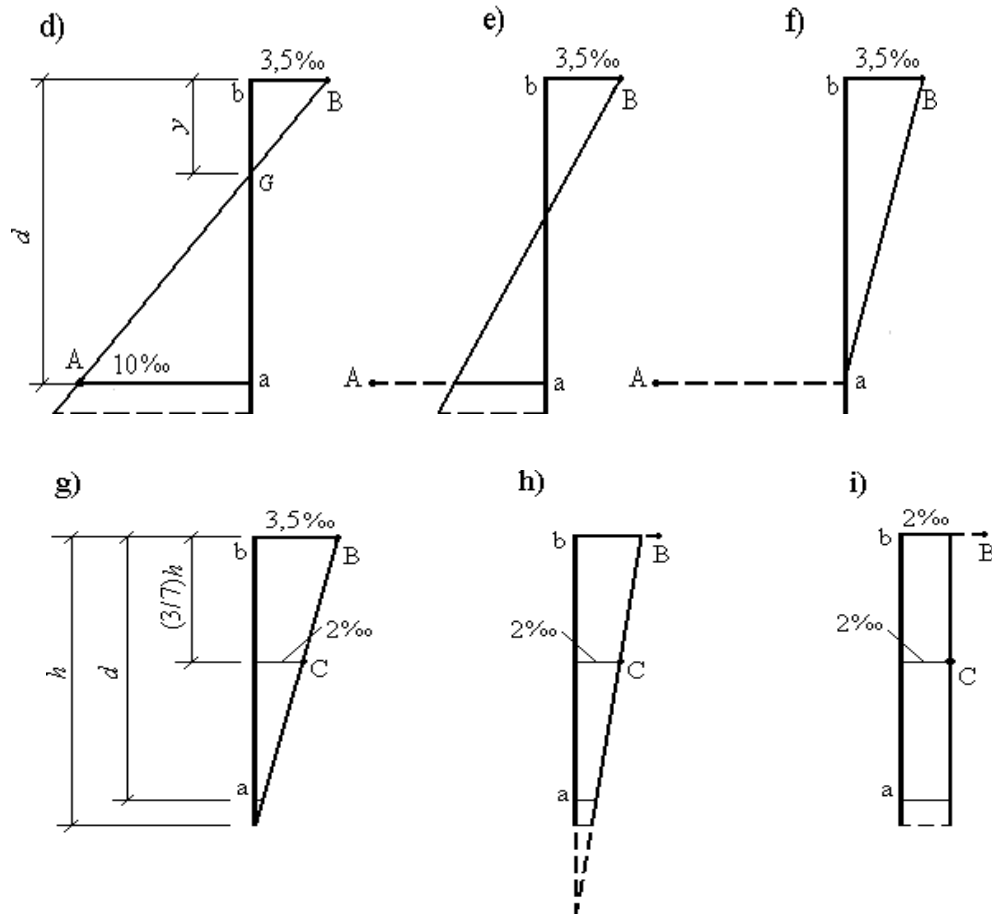


Figure I.7. Différents diagrammes de déformation possible

La figure I.7,a correspond au cas de la traction simple. Toutes les fibres s'allongent de la même quantité. Le béton se fissure et ne participe donc pas à l'équilibre des sollicitations. La pièce sera hors service lorsque la déformation de l'acier vaudra 10 ‰. La limite correspond sur le diagramme à la verticale passant par le point A.

La figure I.7,b correspond au cas où la section serait entièrement tendue. Ceci se présente lorsque l'effort normal est un effort de traction et que son excentricité est faible. A l'état-limite, la fibre la plus tendue aura un allongement de 10 ‰, et la moins tendue $\varepsilon_s < 10$ ‰. Plus l'excentricité augmente, plus la tension minimale tend vers 0, les droites de déformation pivotent donc autour de point A.

La figure I.7,c correspond au cas de la flexion simple ou de la flexion composée (flexion-traction, flexion-compression). Dans ce cas la section est partiellement tendue et partiellement comprimée, mais le béton comprimé n'atteint pas son raccourcissement ultime. La section comporte alors une zone comprimée et une zone tendue.

La figure I.7,d correspond aux mêmes cas que ceux de la figure I.7,c, lorsque le béton atteint son raccourcissement ultime. C'est un cas limite pour le *domaine 1*, puisque après le diagramme des déformations va pivoter autour du point *B*. On ne peut dépasser la position *AB* qui correspond à un raccourcissement $\varepsilon_{bc} = 3,5 \text{ ‰}$ de la fibre de béton la plus comprimée et à un allongement de 10 ‰ de la fibre la plus tendue. La position limite *AB* correspond à un axe neutre situé à la distance y de la fibre la plus comprimée. La position de l'axe neutre correspondant à ce cas limite peut être déterminée en considérant les triangles semblables *GbB* et *GaA* (avec d étant la hauteur utile de la section) :

$$\frac{Bb}{Aa} = \frac{y}{d-y} \quad \text{ou encore : } \frac{3.5}{10} = \frac{y}{d-y}$$

D'où on trouve : $y = 0,259 d$.

Le cas particulier où $\varepsilon_s = 10 \text{ ‰}$ et $\varepsilon_{bc} = 2 \text{ ‰}$ correspond à : $y = 0,167 d$.

Donc si :

- $y \leq 0,259 d$ le diagramme des déformations passe par le point *A* ;
- $y > 0,259 d$ le diagramme des déformations passe par le point *B*.

Pour augmenter la zone comprimée, on ne peut plus augmenter ε_{bc} au-delà de 3,5 ‰, il faut donc diminuer la contrainte σ_s . La droite des déformations pivote autour du point *B*, alors on se trouve dans le *domaine 2*.

Domaine 2. Le diagramme des déformations passe par le point "*B*". Il peut alors occuper l'une des positions représentées sur les figures 7 d, e, f et g.

La figure 7,d correspond au cas limite examiné ci-dessus. La figure 7,e correspond au cas de la flexion simple ou de la flexion composée (flexion-traction, flexion-compression, cas des grandes excentricités), lorsque le béton a atteint son raccourcissement ultime 3,5 ‰, l'allongement des aciers est alors inférieur à 10 ‰.

La figure 7,f correspond au cas de la flexion composée avec effort normal de compression lorsque le béton de la zone la plus comprimée à un raccourcissement ultime 3,5 ‰, mais l'allongement des aciers est devenu nul (la contrainte dans les armatures sera donc également nulle). Dans ce cas limite on a : $y = d$.

La figure I.7,g correspond au même cas que ce de la figure I.7,f (flexion-compression, cas des faibles excentricités), lorsque le béton de la fibre la plus comprimée à atteint son raccourcissement ultime et lorsque le béton de la fibre moins comprimée a un raccourcissement nul. C'est un cas limite pour le *domaine 2*, puisque après le diagramme des déformations va pivoter autour du point "*C*". Dans ce cas limite on a : $y = h$.

Il résulte de ce qui précède que le diagramme des déformations passera par le point *B* quand:

$$0,259 d \leq y \leq h.$$

Domaine 3. Toute la section est comprimée et la droite des déformations tourne autour du point C. Ce diagramme des déformations peut alors occuper l'une des positions (figure 7, g, h et i). La figure 7,g correspond au cas limite examiné ci-dessus. La figure 7,h correspond au cas de la flexion composée avec effort normal de compression lorsque la section est entièrement comprimée. Dans ce cas l'axe neutre se trouve en dehors de la section et le raccourcissement du béton est, dans toute la section, inférieur à son raccourcissement ultime.

La figure 7,i correspond au cas de la compression simple. Le raccourcissement du béton est égal à 2 ‰ sur toute la hauteur de la section. Donc, dans le cas de la compression simple ou composée on a :

- $2 ‰ \leq \varepsilon_{bc} \leq 3,5 ‰$ sur la fibre la plus comprimée ;
- $\varepsilon_{bc} \leq 2 ‰$ sur la fibre la moins comprimée.

Le diagramme des déformations passera par le point C si l'on a : $y \geq h$

I.II.2.4 Application (Règle des Trois Pivots)

Exercice 1 :

Soit une section en béton armé d'une section rectangulaire (a x h)

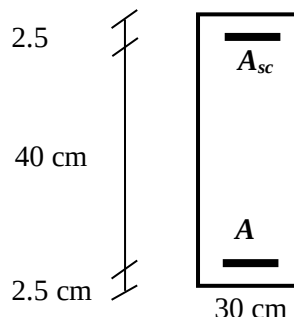
1. Dans quel pivot se trouve l'état de déformation à l'ELU pour les cas suivants
2. Calculer le coefficient α . (Fe400, $f_{c28} = 25$ MPa).
3. Commenter sur chaque cas

- $\varepsilon_b = 3,5 ‰$ et $\varepsilon_s = 5 ‰$;
- $\varepsilon_b = 1 ‰$ et $\varepsilon_s = 10 ‰$;
- $\varepsilon_b = 3,5 ‰$ et $\varepsilon_s = 10 ‰$;
- $\varepsilon_b = 2 ‰$ et $\varepsilon_s = 4 ‰$;
- $\varepsilon_b = 3,5 ‰$ et $\varepsilon_s = 1,5 ‰$;

Exercice 2

Soit la section rectangulaire ci-dessous soumise à une sollicitation à l'ELU tel que la position de l'axe neutre $y = 20$ cm.

1. Dans quel pivot se trouve l'état de déformation de cette section ;
2. Evaluer les déformations au niveau fibres particuliers ε_b ; ε_{sc} ; ε_s et déduire les contraintes σ_{bc} ; σ_{sc} et σ_{st}
3. Calculer les forces F_{sc} ; F_s ; F_{bc} ;
4. Refaire les questions 1 à 3 pour $y=10$ cm

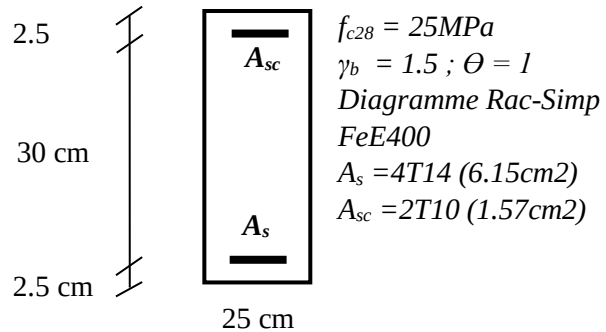


$f_{c28} = 25 \text{ MPa}$
 $\gamma_b = 1,5$; $\Theta = 1$
Diagramme Rac-Simp
FeE400
 $A_s = 4T16 (8,04 \text{ cm}^2)$
 $A_{sc} = 2T10 (1,57 \text{ cm}^2)$

Exercice 3

Soit la section rectangulaire ci-dessous soumise à une sollicitation à l'ELU tel que :
 $\alpha / \alpha_{AB} = 1.5$

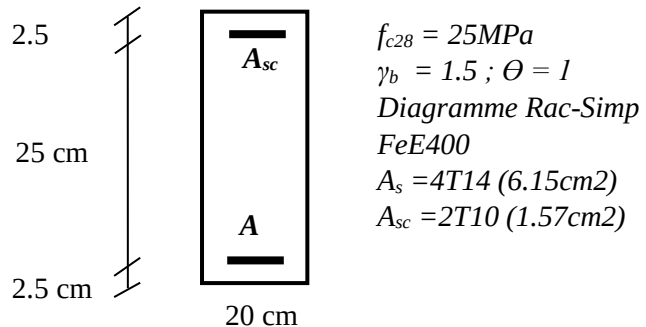
1. Dans quel pivot se trouve l'état de déformation
2. Evaluer les déformations au niveau fibres particulières ε_b ; ε_{sc} ; ε_s et déduire les contraintes σ_{sc} et σ_{st}
3. Calculer les forces F_{sc} ; F_s ; F_{bc} ;



Exercice 4

Soit la section rectangulaire ci-dessous soumise à une sollicitation à l'ELU tel que la rupture se fait lorsque $\alpha / \alpha_{AB} = 0.6$

1. Dans quel pivot se trouve l'état de déformation
2. Evaluer les déformations au niveau fibres particulières ε_b ; ε_{sc} ; ε_s et déduire les contraintes σ_{sc} et σ_{st}
3. Calculer les forces F_{sc} ; F_s ; F_{bc} ;



Solutions :

Exercice 1

1. $\varepsilon_b = 3.5 \text{ ‰}$ et $\varepsilon_s = 5 \text{ ‰}$;

$\varepsilon_b = 3.5 \text{ ‰}$ et $\varepsilon_s < 10 \text{ ‰}$ on est dans le pivot B

$$\alpha = \frac{\varepsilon_b}{\varepsilon_b + \varepsilon_s} = \frac{3.5}{5 + 3.5} = 0.412$$

2. $\varepsilon_b = 1 \text{ ‰}$ et $\varepsilon_s = 10 \text{ ‰}$;

$\varepsilon_s = 10 \text{ ‰}$ et $\varepsilon_b < 3.5 \text{ ‰}$ on est dans le pivot A

$$\alpha = \frac{\varepsilon_b}{\varepsilon_b + \varepsilon_s} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{1 + 10} = 0.091$$

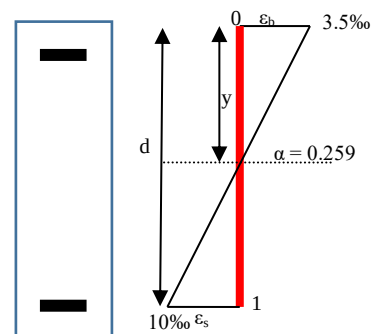
3. $\varepsilon_b = 3.5 \text{ ‰}$ et $\varepsilon_s = 10 \text{ ‰}$;

$\varepsilon_b = 3.5 \text{ ‰}$ et $\varepsilon_s = 10 \text{ ‰}$; on est dans le pivot A

$$\alpha = \frac{\varepsilon_b}{\varepsilon_b + \varepsilon_s} \Rightarrow \alpha_{AB} = \frac{3.5}{3.5 + 10} = 0.259$$

4. $\varepsilon_b = 2 \text{ ‰}$ et $\varepsilon_s = 4 \text{ ‰}$;

$\varepsilon_b = 2 \text{ ‰} < 3.5 \text{ ‰}$ et $\varepsilon_s = 4 \text{ ‰} < 10 \text{ ‰}$ Pas de Pivot



5. $\varepsilon_b = 3.5 \text{ ‰}$ et $\varepsilon_s = 2 \text{ ‰} < 10 \text{ ‰}$; Pivot B

Commentaires sur les quatre cas différents

On a

$$\alpha_{AB} = \frac{3.5}{10 + 3.5} = 0.259$$

et

$$\alpha_{2\text{‰}} = \frac{2}{2 + 10} = 0.167$$

et

$$\alpha_l = \frac{\varepsilon_b}{\varepsilon_b + \varepsilon_{sel}} \Rightarrow \alpha_l = \frac{3.5}{3.5 + 400 / (1.15 * 2 * 10^5)} = 0.668$$

- 1^{er} cas

- La rupture se fait par écrasement du béton.
- $\alpha_{2\text{‰}} < \alpha = 0.412 < \alpha_l$ un bon dimensionnement du béton et de l'acier

- 2^{ème} cas

- La rupture se fait par allongement des aciers

- $\alpha = 0.091 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{1+10} = 0.091$ Surdimensionnement du béton

Augmenter la section de l'acier tendue ou bien réduire la section du béton

- 3^{ème} cas

- La rupture se fait simultanément par un écrasement du béton et allongement des aciers
- $\varepsilon_b = 3.5 \text{ ‰}$ et $\varepsilon_s = 10 \text{ ‰}$; on est dans le pivot A
 $\alpha_{2\text{‰}} < \alpha = 0.412 < \alpha_l$ Un bon dimensionnement du béton et de l'acier

- 4^{ème} cas

- $\varepsilon_b = 2 \text{ ‰}$ et $\varepsilon_s = 4 \text{ ‰}$; pas de rupture
- Ni le béton atteint la déformation ultime $\alpha_b = 3.5\text{‰}$ ni l'acier atteint la déformation ultime $\alpha_s = 10\text{‰}$

- 5^{ème} cas

- $\varepsilon_b = 3.5 \text{ ‰}$ et $\varepsilon_s = 2 \text{ ‰} < 10 \text{ ‰}$; Pivot B la rupture se fait par écrasement du béton
 $\alpha = 0.7 > \alpha_l = 0.668$ Un surdimensionnement de l'acier

Augmenter la section de béton ou bien ajouter des armatures comprimées

Exercice 2

1. $\alpha = \frac{y}{d} = \frac{20}{42.5} = 0.471$ Donc on a $\alpha = 0.471 > \alpha_{AB} = 0.259 \Rightarrow$ on est dans le

Pivot B

2. Evaluer les déformations au niveau des fibres ε_b ; ε_{sc} ; ε_s

Pivot B $\Rightarrow \varepsilon_b = 3.5 \text{ ‰}$

$$\frac{3.5}{y} = \frac{\varepsilon_s}{d-y} \Rightarrow \varepsilon_s = \frac{3.5(d-y)}{y}$$

$$\varepsilon_s = \frac{3.5(42.5 - 20)}{20} = 3.94\text{‰}$$

$$\frac{3.5}{y} = \frac{\varepsilon_{sc}}{d-d'} \Rightarrow \varepsilon_{sc} = \frac{3.5(y-d')}{y}$$

$$\varepsilon_s = \frac{3.5(20 - 2.5)}{20} = 3.06\text{‰}$$

Déduire σ_{bc} σ_{sc} et σ_s

σ_{bc}

On a $\Rightarrow \varepsilon_b = 3.5\text{‰} > 2\text{‰} \Rightarrow \sigma_{bc} = f_{bu} = \frac{0.85 f_{c28}}{\gamma_b \theta}$

$$\sigma_{bc} = f_{bu} = \frac{0.85 * 25}{1.5} = 14.167 \text{ MPa}$$

σ_s

$$\varepsilon_s = 3.94\text{‰} > \varepsilon_{sel} = 1.74\text{‰} \Rightarrow \sigma_s = f_{su} = \frac{f_e}{\gamma_s}$$

$$\sigma_s = f_{su} = \frac{400}{1.15} = 347.83 \text{ MPa}$$

σ_{sc}

$$\varepsilon_s = 3.06\text{‰} > \varepsilon_{sel} = 1.74\text{‰} \Rightarrow \sigma_s = f_{su} = \frac{f_e}{\gamma_s}$$

$$\sigma_s = f_{su} = \frac{400}{1.15} = 347.83 \text{ MPa}$$

3. Calculer les forces F_{sc} ; F_s ; F_{bc} ;

$$F_{bc} = 0.8 y b f_{bu} = 0.8 * 0.2 * 0.3 * 14.167 * 10^3 = 680.02 \text{ kN}$$

$$F_s = A_s * \sigma_s = 8.04 * 10^{-4} * 347.82 * 10^3 = 279.65 \text{ kN}$$

$$F_{sc} = A_{sc} * \sigma_s = 1.57 * 10^{-4} * 347.82 * 10^3 = 54.61 \text{ kN}$$

2ème Cas : $y = 10 \text{ cm}$

$$\alpha = \frac{y}{d} = \frac{10}{42.5} = 0.235 \text{ Donc on a } \alpha = 0.235 < \alpha_{AB} = 0.259 \Rightarrow \text{on est dans le Pivot A}$$

Evaluer les déformations au niveau des fibres ε_b ; ε_{sc} ; ε_s

Pivot A $\Rightarrow \varepsilon_s = 10\text{‰}$

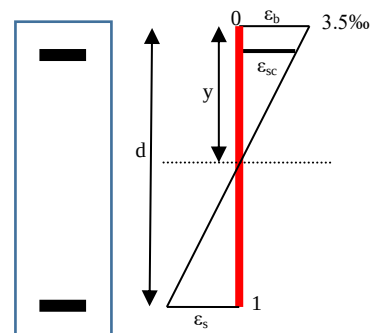
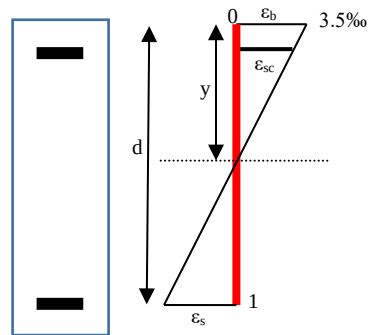
$$\frac{\varepsilon_b}{y} = \frac{10}{d-y} \Rightarrow \varepsilon_b = \frac{10y}{d-y}$$

$$\varepsilon_b = \frac{10 * 10}{42.5 - 10} = 3.08\text{‰}$$

$$\frac{10}{d-y} = \frac{\varepsilon_{sc}}{y-d'} \Rightarrow \varepsilon_{sc} = \frac{10(y-d')}{d-y}$$

$$\varepsilon_{sc} = \frac{10(10 - 2.5)}{42.5 - 10} = 2.31\text{‰}$$

Déduire σ_{bc} σ_{sc} et σ_s



σ_{bc}

$$\text{On a } \Rightarrow \varepsilon_s = 3.08 \text{ ‰} > 2 \text{ ‰} \Rightarrow \sigma_{bc} = f_{bu} = \frac{0.85 f_{c28}}{\gamma_b \cdot \theta}$$

$$\sigma_{bc} = f_{bu} = \frac{0.85 \cdot 25}{1.5} = 14.167 \text{ MPa}$$

σ_s

$$\varepsilon_s = 10 \text{ ‰} > \varepsilon_{sel} = 1.74 \text{ ‰} \Rightarrow \sigma_s = f_{su} = \frac{f_e}{\gamma_s}$$

$$\sigma_s = f_{su} = \frac{400}{1.15} = 347.83 \text{ MPa}$$

σ_{sc}

$$\varepsilon_s = 2.31 \text{ ‰} > \varepsilon_{sel} = 1.74 \text{ ‰} \Rightarrow \sigma_s = f_{su} = \frac{f_e}{\gamma_s}$$

$$\sigma_s = f_{su} = \frac{400}{1.15} = 347.83 \text{ MPa}$$

4. Calculer les forces F_{sc} ; F_s ; F_{bc} ;

$$F_{bc} = 0.8 y b f_{bu} = 0.8 \cdot 0.1 \cdot 0.3 \cdot 14.167 \cdot 10^3 = 340.01 \text{ kN}$$

$$F_s = A_s \cdot \sigma_s = 8.04 \cdot 10^{-4} \cdot 347.82 \cdot 10^3 = 279.65 \text{ kN}$$

$$F_{sc} = A_{sc} \cdot \sigma_s = 1.57 \cdot 10^{-4} \cdot 347.82 \cdot 10^3 = 54.61 \text{ kN}$$

Exercice 3

1. $\alpha / \alpha_{AB} = 1.5 \Rightarrow \alpha > \alpha_{AB} \Rightarrow$ pivot B

2. ε_b ; ε_{sc} ; ε_s

$$\frac{3.5}{y} = \frac{\varepsilon_s}{d-y} \Rightarrow \varepsilon_s = \frac{3.5(d-y)}{y} \Rightarrow \varepsilon_s = \frac{3.5(1-\alpha)}{\alpha}$$

$$\frac{\alpha}{\alpha_{AB}} = 1.5 \Rightarrow \alpha = 0.259 \cdot 1.5 = 0.388$$

$$\varepsilon_s = \frac{3.5(1 - 0.388)}{0.388} = 5.51 \text{ ‰}$$

$$\frac{3.5}{y} = \frac{\varepsilon_{sc}}{y-d'} \Rightarrow \varepsilon_{sc} = 3.5 \left(1 - \frac{d'}{ad} \right)$$

$$\varepsilon_{sc} = 3.5 \left(1 - \frac{2.5}{0.388 \cdot 32.5} \right) = 2.81 \text{ ‰}$$

Déduire σ_{bc} σ_{sc} et σ_s

σ_{bc}

$$\text{On a } \Rightarrow \varepsilon_b = 3.5 \text{ ‰} > 2 \text{ ‰} \Rightarrow \sigma_{bc} = f_{bu} = \frac{0.85 f_{c28}}{\gamma_b \cdot \theta}$$

$$\sigma_{bc} = f_{bu} = \frac{0.85 \cdot 25}{1.5} = 14.167 \text{ MPa}$$

σ_s

$$\varepsilon_s = 5.51 \text{ ‰} > \varepsilon_{sel} = 1.74 \text{ ‰} \Rightarrow \sigma_s = f_{su} = \frac{f_e}{\gamma_s}$$

$$\sigma_s = f_{su} = \frac{400}{1.15} = 347.83 \text{ MPa}$$

$$\varepsilon_{sc} = 2.81\text{‰} > \varepsilon_{sel} = 1.74\text{‰} \Rightarrow \sigma_{sc} = f_{su} = \frac{f_e}{\gamma_s}$$

$$\sigma_s = f_{su} = \frac{400}{1.15} = 347.83 \text{ MPa}$$

Calcul les Forces F_{bu} , F_s et F_{sc}

$$F_{bc} = 0.8b\alpha d f_{bu} = 0.8 * 0.25 * 0.338 * 0.325 * 14.167 * 10^3 = 306.46 \text{ kN}$$

$$F_s = A_s * \sigma_s = 6.15 * 10^{-4} * 347.82 * 10^3 = 213.91 \text{ kN}$$

$$F_{sc} = A_{sc} * \sigma_s = 1.57 * 10^{-4} * 347.82 * 10^3 = 54.61 \text{ kN}$$

Exercice 4

$$1. \alpha / \alpha_{AB} = 0.6 \Rightarrow \alpha < \alpha_{AB} \Rightarrow \text{pivot A}$$

$$2. \varepsilon_b ; \varepsilon_{sc} ; \varepsilon_s$$

$$\text{Pivot A} \Rightarrow \varepsilon_s = 10\text{‰}$$

$$\frac{\varepsilon_b}{\alpha d} = \frac{10}{d - \alpha d} \Rightarrow \frac{\varepsilon_b}{\alpha} = \frac{10}{1 - \alpha} \Rightarrow \varepsilon_b = 10 \frac{\alpha}{1 - \alpha}$$

$$\frac{\alpha}{\alpha_{AB}} = 0.6 \Rightarrow \alpha = 0.155$$

$$\varepsilon_b = 10 \frac{0.155}{1 - 0.155} = 1.83\text{‰}$$

$$\frac{10}{d - y} = \frac{\varepsilon_{sc}}{y - d'} \Rightarrow \varepsilon_{sc} = \frac{10(y - d')}{d - y} \Rightarrow \varepsilon_{sc} = \frac{10(\alpha - \frac{d'}{d})}{1 - \alpha}$$

$$\varepsilon_{sc} = \frac{10(0.155 - \frac{2.5}{27.5})}{1 - 0.155} = 0.76\text{‰}$$

Déduire σ_{bc} σ_{sc} et σ_s

σ_{bc}

$$\text{On a} \Rightarrow \varepsilon_s = 1.83\text{‰} < 2\text{‰} \Rightarrow \sigma_{bc} = 0.25 f_{bc} \cdot 10^3 \varepsilon_{bc} (4 - 10^3 \varepsilon_{bc})$$

$$\sigma_{bc} = 0.25 * 14.167 * 1.83(4 - 1.83) = 14.06 \text{ MPa}$$

$$\varepsilon_s = 10\text{‰} > \varepsilon_{sel} = 1.74\text{‰} \Rightarrow \sigma_s = f_{su} = \frac{f_e}{\gamma_s}$$

$$\sigma_s = f_{su} = \frac{400}{1.15} = 347.83 \text{ MPa}$$

$$\varepsilon_{sc} = 0.75\text{‰} < \varepsilon_{sel} = 1.74\text{‰} \Rightarrow \sigma_{sc} = E_s \varepsilon_{sc}$$

$$\sigma_{sc} = 0.76 * 2 * 10^2 = 152 \text{ MPa}$$

$$3. \text{ Calculer les forces } F_{sc} ; F_s ; F_{bc} ;$$

$$F_{bc} = 0.8b\alpha d f_{bu} = 0.8 * 0.2 * 0.155 * 0.275 * 14.06 * 10^3 = 95.87 \text{ kN}$$

$$F_s = A_s * \sigma_s = 6.15 * 10^{-4} * 347.82 * 10^3 = 213.91 \text{ kN}$$

$$F_{sc} = A_{sc} * \sigma_s = 1.57 * 10^{-4} * 152 * 10^3 = 23.86 \text{ kN}$$

I.II.3 Calcul des sections soumises à la flexion simple à l'ELU

I.II.3.1 Etablissement des formules de calcul

La flexion simple se rencontre très souvent dans les ouvrages en béton armé : planchers, murs de soutènement, ponts, etc. Comme, en général, la section droite des éléments de ces ouvrages est une section rectangulaire ou une section en T , alors on examine successivement ces deux types de sections.

Une section droite d'une pièce (pièce possédant un plan de symétrie et chargée symétriquement par rapport à ce plan) est soumise à la flexion simple si les forces agissant à gauche de la section pouvaient être réduites, par rapport à un point quelconque de l'axe de symétrie de cette section, à un couple de moment de flexion M et un effort tranchant V . Etant donné qu'en flexion simple l'effort normal est égal à nul ($N = 0$), donc on n'a pas à se préoccuper de la stabilité de forme pour les pièces soumises à la sollicitation envisagée ; dans ces conditions on ne considérera que l'état-limite ultime de résistance. Ensuite il faudra vérifier que le dimensionnement ainsi obtenu satisfait aux conditions d'état-limite de service vis-à-vis de la durabilité et des déformations.

Il faut noter qu'une section soumise à la flexion simple n'est jamais entièrement comprimée, donc il existe une zone tendue, où les efforts de traction sont repris par des armatures, et la zone comprimée, où les efforts de compression sont repris par le béton et par des armatures qui se trouvent dans cette zone.

La figure 3.1 représente pour une section rectangulaire le diagramme des déformations (a) et le diagramme des contraintes (b). Les notations utilisées sont les suivantes :

- b , largeur de la section ;
- h , hauteur totale de la section ;
- d , hauteur utile de la section (distance entre le centre de gravité des armatures tendues et la fibre la plus comprimée) ;
- y , distance de l'axe neutre à la fibre la plus comprimée ;
- A_s et A_{sc} est respectivement la section totale des armatures tendues et comprimées;
- ε_{bc} , raccourcissement unitaire du béton de la fibre la plus comprimée ;
- ε_s et ε_{sc} est respectivement la déformation unitaire des armatures tendues et comprimées;
- σ_{bc} , contrainte du béton dans la zone comprimée ;
- σ_s , contrainte de traction dans les armatures tendues ;
- N_b , résultante des efforts de compression dans le béton ;
- N_s , et N_{sc} est respectivement la résultante des efforts de traction dans les armatures tendues et comprimées;
- z , bras de levier (distance entre N_s et N_b).

Le diagramme réel des contraintes du béton comprimé qui peut être utilisé dans tous les cas où des éléments sont soumis à la flexion simple, est le diagramme dit "parabole-rectangle". Les

équations d'équilibre pour le diagramme considéré s'obtiennent en écrivant que la somme des projections des résultantes des efforts longitudinaux sur l'axe de l'élément est nulle, et que la somme des moments de ces résultantes (exprimés par rapport à A_s) équilibre le moment extérieur M_u .

Soit une section sollicitée par un moment de flexion M_u :

Les résultantes des contraintes sont :

- Compression dans le béton : $N_b = \int_0^{\alpha d} \sigma_{bc}(y) \cdot b(y) dy$
- Compression dans l'acier : $N_{sc} = A_{sc} \sigma_{sc}$ avec $\sigma_{sc} = f(\varepsilon_{sc})$
- Traction dans l'acier : $N_s = A_s \sigma_s$ avec $\sigma_s = f(\varepsilon_s)$

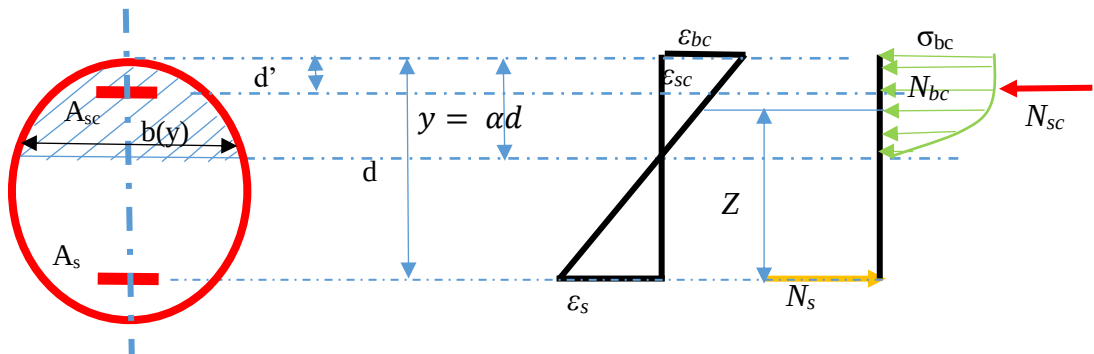


Figure I.8. Allure de déformation et de contraintes (section forfaitaire)

Les équations d'équilibre s'obtiennent en écrivant que la somme des résultantes des contraintes est nulle et que la somme des moments de ces résultantes (exprimés par rapport à A_s) équilibre le moment extérieur M_u :

Somme des Forces : $N_b + N_{sc} + N_s = 0$

Somme des Moments : $M_u = M_b + M_{sc}$

$$M_u = Z N_b + A_{sc} \sigma_{sc} (d - d')$$

Le domaine le plus économique correspond à : $0.167 \leq \alpha \leq \alpha_{limite}$

- Si α tend vers α_{limite} : on a une petite section de béton avec beaucoup d'armatures,
- Si α tend vers 0.167 : on a une grande section de béton avec peu d'armatures,

I.II.3.2 Etablissement des formules de calcul pour une section rectangulaire

Pour une section en béton armé soumise à la flexion simple, l'utilisation du diagramme rectangle simplifié est autorisée.

I.II.3.2.1 Section rectangulaire sans armatures comprimées ($A_{sc} = 0$)

Somme des Forces : $N_b + N_s = 0$

Somme des Moments : $M_u = M_b = Z N_b$

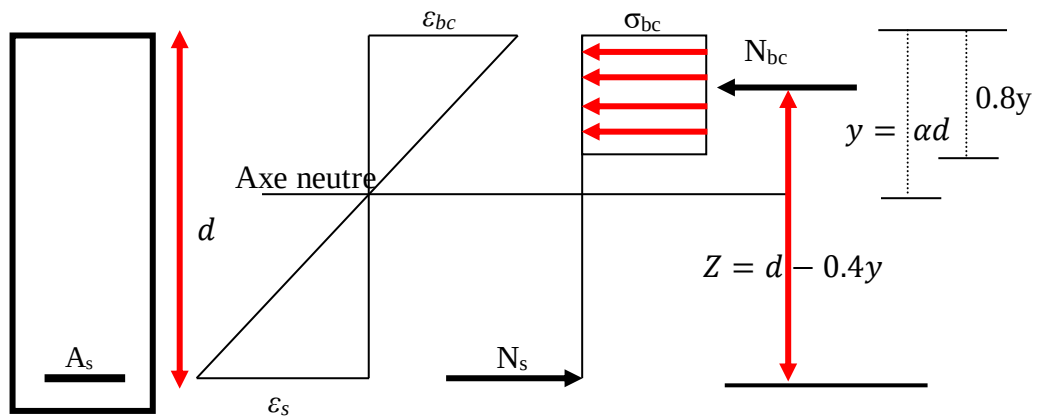


Figure I.9. Allure de déformation et de contraintes (section rectangulaire sans A_{sc})

$$\begin{aligned}
 N_b - N_b &= 0 \\
 0.8yb f_{bu} - A_s \sigma_s &= 0 \text{ avec } y = \alpha d \\
 N_b - N_b &= 0 \Rightarrow 0.8 \alpha b d f_{bu} - A_s \sigma_s = 0 \\
 M_u &= M_b \\
 M_u &= 0.8 \alpha b d f_{bu} * Z \\
 M_u &= 0.8 \alpha b d^2 f_{bu} (1 - 0.4\alpha) \\
 \mu &= 0.8\alpha(1 - 0.4\alpha) \text{ donc } \mu = \frac{M_u}{b d^2 f_{bu}}
 \end{aligned}$$

I.II.3.2.2 Positions particulières avec la valeur de μ

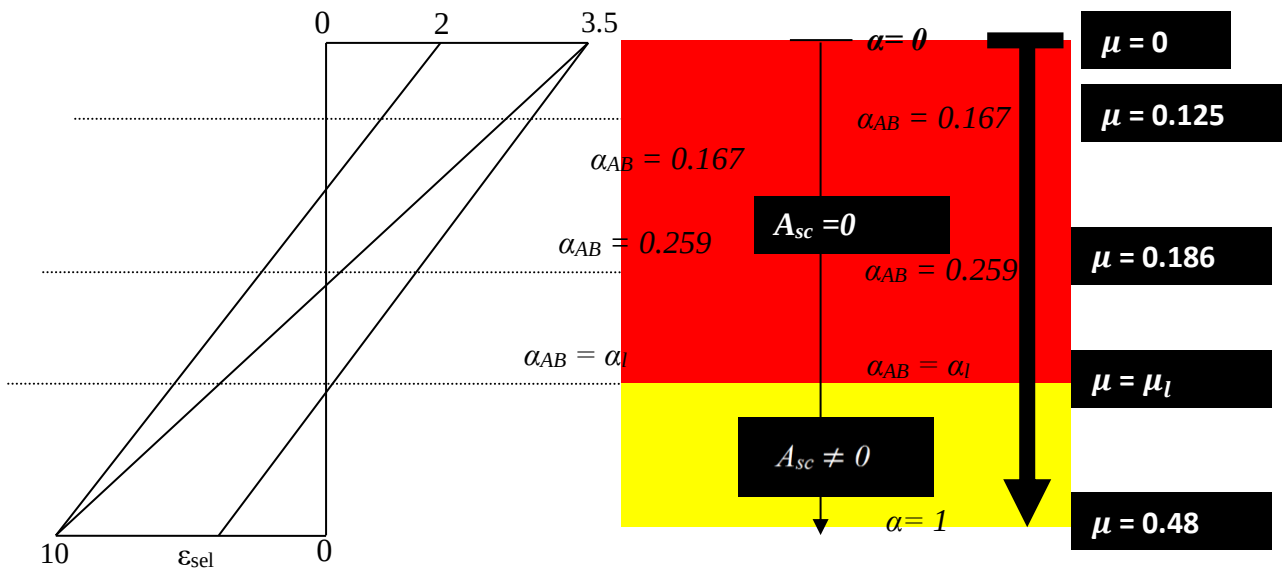


Figure I.10. Positions particulières avec la valeur de μ

Si $\mu \leq \mu_l \Rightarrow A_{sc} = 0$

$$\mu = 0.8\alpha(1 - 0.4\alpha) \Rightarrow \alpha = 1.25(1 - \sqrt{1 - 2\mu})$$

Section d'acier nécessaire pour équilibrer le béton

Pour obtenir la valeur de σ_s , on utilise le diagramme de déformation.

La déformation de l'acier vaut : $\varepsilon_s = \frac{1-\alpha}{\alpha} 3.5\text{‰}$,

On peut distinguer deux situations par cette relation :

- Si $\varepsilon_s \geq \varepsilon_{sel}$: dans ce cas $\sigma_s = f_{su} = f_e/\gamma_s$, et par conséquent : $A_s = \frac{0.8abdf_{bu}}{\sigma_s}$
- Si $\varepsilon_s < \varepsilon_{sel}$: dans ce cas: $\varepsilon_b=3.5 \text{ ‰}$ (Picot B), donc $\alpha > \alpha_l$ et $\mu > \mu_l$, donc $\sigma_s < \sigma_s = \frac{f_e}{\gamma_s}$: les aciers travaillent insuffisamment.

Solution : Il faut augmenter la section du béton ou ajouter les aciers comprimés ($A_{sc} \neq 0$).

I.II.3.2.3 Section rectangulaire avec armatures comprimées ($A_{sc} \neq 0$) ($\alpha > \alpha_l$ et $\mu > \mu_l$)

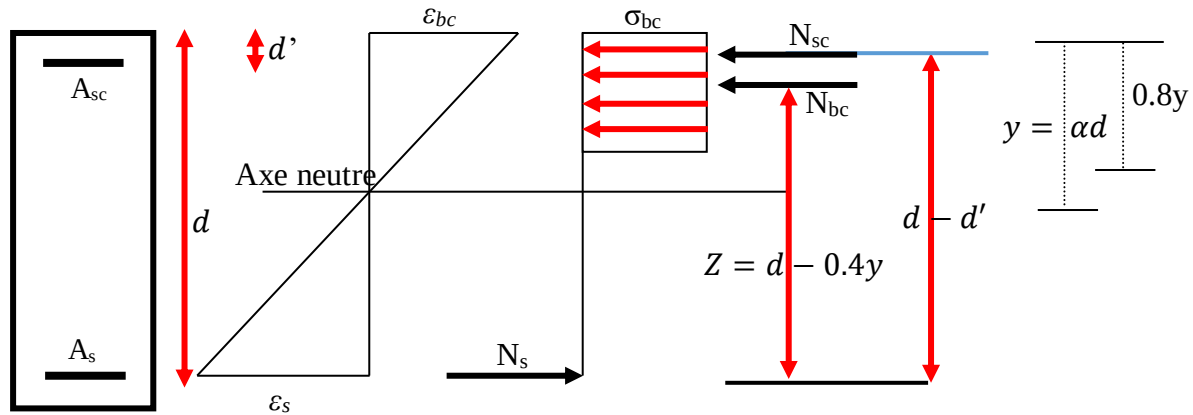


Figure I.11. Allure de déformation et de contraintes (section rectangulaire avec A_{sc})

Les déformations des armatures valent respectivement ε_s dans les armatures tendues et ε_{sc} dans les armatures comprimées :

$$\varepsilon_s = \frac{1-\alpha}{\alpha} 3.5$$

et

$$\varepsilon_{sc} = (1 - \frac{d'}{\alpha d}) 3.5$$

Valeurs desquelles on déduit les contraintes σ_s et σ_{sc} dans les armatures :

$$0.8abdf_{bu} + A_{cs}\sigma_{sc} - A_s\sigma_s = 0$$

$$M_u = 0.8abd^2f_{bu}(1 - 0.4\alpha) + A_{cs}\sigma_{sc}(d - d')$$

On dispose uniquement deux équations pour déterminer les trois inconnues A_s , A_{sc} , et α ; il faut donc choisir l'une de ces grandeur ; ce choix est totalement libre mais dans la grande majorité

des cas, on choisit α pour obtenir la plus faible section totale d'acier A_s et A_{sc} , le calcul donc on prend $\alpha = \alpha_l$.

$$A_{sc} = \frac{M_u - \mu b d^2 f_{bu}}{\sigma_{sc}(d - d')}$$

et

$$A_s = \frac{A_{sc}\sigma_{sc} + 0.8\alpha b d f_{bu}}{\sigma_s}$$

σ_s et σ_{sc} étant déterminés à partir de :

$$\varepsilon_s = \frac{1 - \alpha}{\alpha} 3.5$$

et

$$\varepsilon_{sc} = \left(1 - \frac{d'}{\alpha d}\right) 3.5$$

La part du moment de flexion équilibrée par le béton doit être au moins égale à 60% de M_u , pour éviter la non-fragilité du béton.

$$A_{sc} = \frac{M_u - M_{bl}}{\sigma_{sc}(d - d')}$$

et

$$A_s = \frac{A_{sc}\sigma_{sc} + 0.8\alpha_l b d f_{bu}}{\sigma_s}$$

L'organigramme représenté dans la figure 12, récapitule les démarches de calcul d'une section rectangulaire soumise à la flexion simple à l'état limite ultime.

Organigramme de calcul du béton armé à la flexion simple (ELU)

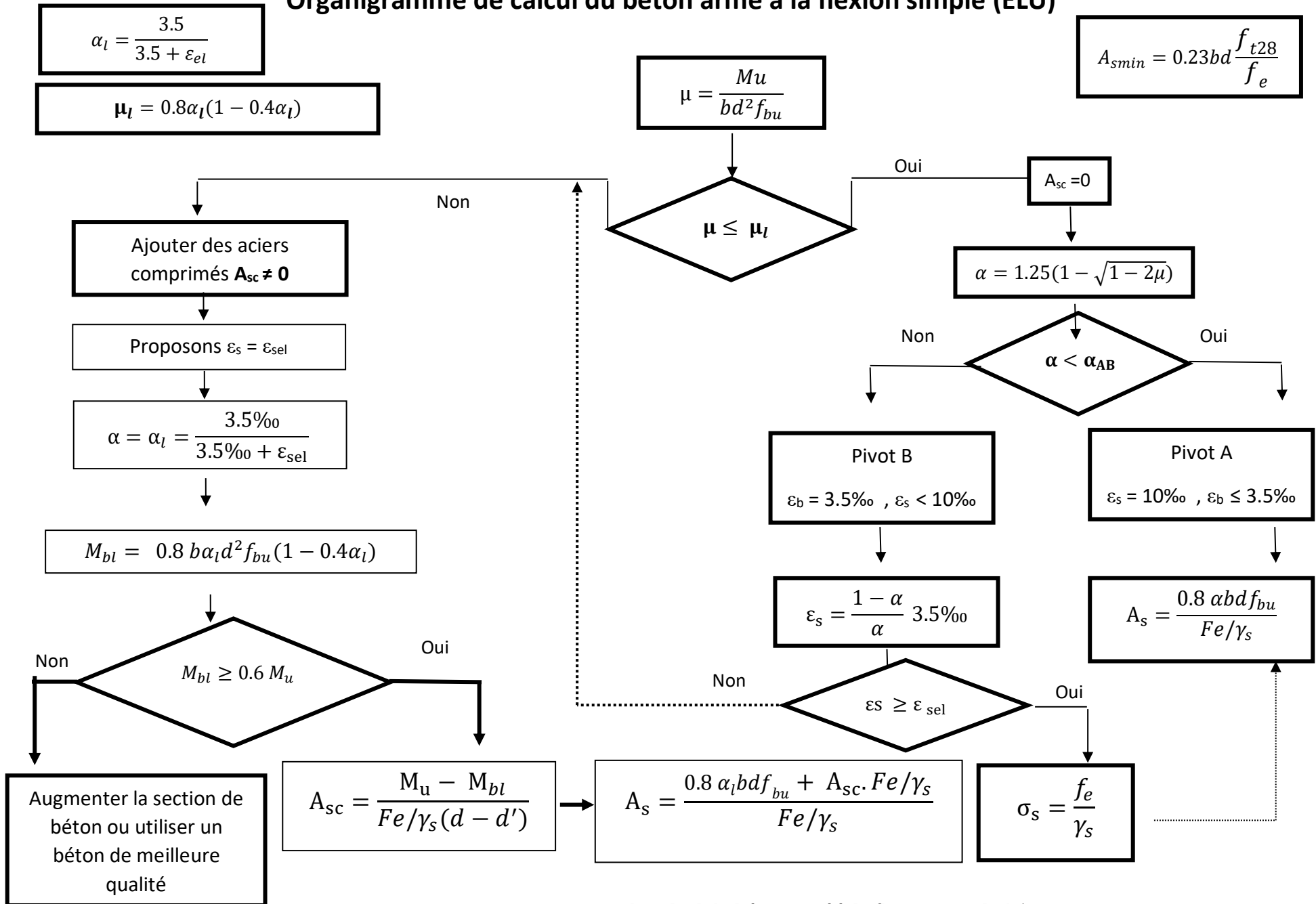


Figure I.17. Organigramme de calcul du béton armé à la flexion simple à l'ELU

I.III. Calcul à l'état limite ultime de service ELS

Lorsqu'après avoir dimensionné la section à l'ELU, la vérification à l'ELS n'est pas assurée, il faut redimensionner la section à l'ELS.

I.III.1. Généralités

Les états-limites de service sont des états au-delà desquels la structure (ou un élément de la structure) est mise hors service, c'est -à-dire qu'elle ne satisfait plus les conditions normales d'exploitation. Concernant ces états-limites de service, les vérifications portent sur :

- un état-limite de compression du béton : il s'agit de vérifier que la contrainte de compression dans le béton à l'ELS, ne dépasse pas la valeur admissible $\sigma_b \leq \overline{\sigma}_b$
- un état-limite d'ouverture des fissures : il s'agit de vérifier que la contrainte de traction dans les armatures tendues à l'ELS, ne dépasse pas la valeur admissible $\sigma_s \leq \overline{\sigma}_s$;
- un état-limite de déformation : la déformation d'un élément fléchi doit rester dans les limites admises.

Dans les calculs relatifs aux états-limites de service (les sollicitations étant obtenues à l'aide de la combinaison d'action correspondant à l'état - limite de service), on admet les hypothèses suivantes :

- Les sections droites, planes avant déformation, restent planes après déformation. On a vu qu'il résultait de cette hypothèse, que le diagramme des déformations était représenté par une droite et que la déformation d'une fibre était proportionnelle à sa distance à l'axe neutre.
- Il n'y a pas de glissement relatif entre les armatures et le béton.
- Le béton tendu est négligé.
- Le béton et l'acier sont considérés comme des matériaux linéairement élastiques, c'est -à-dire que la contrainte est proportionnelle à la déformation, donc : $\sigma = E \varepsilon$
- Par convention, le rapport entre les coefficients d'élasticité longitudinale de l'acier et du béton ou coefficient d'équivalence, est pris égal à : $n = E_s/E_b = 15$
- On ne déduit pas dans les calculs les aires des aciers de l'aire du béton comprimé. On suppose en outre que la section d'acier est concentrée en son centre de gravité, pourvu que l'erreur ainsi commise sur les déformations unitaires ne dépasse pas 15 %.

Les hypothèses indiquées ci-dessus sont celles qui étaient admises dans les règlements ayant précédé les règles CBA 93 (B.A.E.L), et en particulier, dans les règles CCBA-68. Elles permettent d'appliquer au béton armé les formules de la résistance des matériaux établies pour les corps homogènes, il suffit pour cela d'homogénéiser les sections de béton armé. Cette homogénéisation s'obtient:

- en remplaçant une section d'acier d'aire A_s par une section de béton d'aire $n A_s = 15 A_s$, ayant même centre de gravité que la section d'acier considérée ;
- en admettant que chaque élément d'aire de béton conserve sa valeur géométrique dans la zone comprimée de la section et a une valeur nulle dans la zone tendue.

I.III.2. Calcul des contraintes à l'état-limite de service

Soit une section rectangulaire soumise à la flexion simple sous l'effet d'un moment M

- y_{ser} la hauteur du béton de la zone comprimée pour état limite de service).
- I le moment d'inertie de la section totale homogène par rapport au centre de gravité.
- La contrainte à une distance x de l'axe neutre est : $\sigma(x) = \frac{M_{ser}}{I} x = k x$
- La contrainte maximale dans le béton comprimé ($x = y_{ser}$) : $\sigma_{bc} = k y_{ser}$
- La contrainte maximale dans le béton comprimé ($x = d - y_{ser}$) : $\sigma_s = 15k (d - y_{ser})$
- La contrainte maximale dans le béton comprimé ($x = y_{ser} - d'$) : $\sigma_{sc} = 15k (y_{ser} - d')$

I.III.2.1. Détermination de l'axe neutre

a) Détermination de l'axe neutre méthode 2

Soit y la distance du centre de gravité de la section homogène (par lequel passe l'axe neutre) à la fibre la plus comprimée ; on calcule l'ordonnée X_G du centre de gravité par rapport à l'axe neutre et on écrit qu'elle est nulle :

Soit X_{Gbc} et B_c l'ordonnée du centre de gravité et l'aire de la section de béton comprimé :

$$S.X_G = \int_0^y b(x).x.d x + n.A'_s(y - d') + n A_s(d - y) = 0$$

Ou

$$B_c.S.X_G + nA'_s(y - d') - n A_s(d - y) = 0$$

b) Inertie de section homogène réduite

On néglige l'inertie des aciers par rapport à leur propre centre de gravité et on applique le théorème d'Huyghens :

$$I = \int_0^y b(x).x^2.d x + n.A'_s(y - d')^2 + n A_s(d - y)^2 = 0$$

c) Calcul des contraintes

La section étant soumise à un moment M_{ser} , la contrainte à une distance x de l'axe neutre est :
La contrainte maximale dans le béton vaut :

$$\sigma_b(x) = \frac{M_{ser}}{I} x$$

On pose :

$$K = \frac{M_{ser}}{I}$$

Et on a :

- Contrainte maximale dans le béton comprimé ($x=y$) : $\sigma_{bc} = k.y$
- Contrainte maximale dans le béton tendu ($x=y$) : $\sigma_s = n.k.(d - y)$
- Contrainte maximale dans l'acier comprimé ($x=y$) : $\sigma_{sc} = n.k.(y - d')$
- d) cas de la section rectangulaire

$$X_{Gbc} = y/2 \quad \text{et } B_b = b \cdot y \text{ d'où}$$

$$b \frac{y^2}{2} + nA_{sc}(y - d') - nA_s(d - y) = 0$$

On procède à la solution de l'équation de deuxième degré suivante ; puis on calcule le moment d'inertie I :

$$by^2 + 30(A_s + A_{sc})y - 30(dA_s + d'A_{sc}) = 0$$

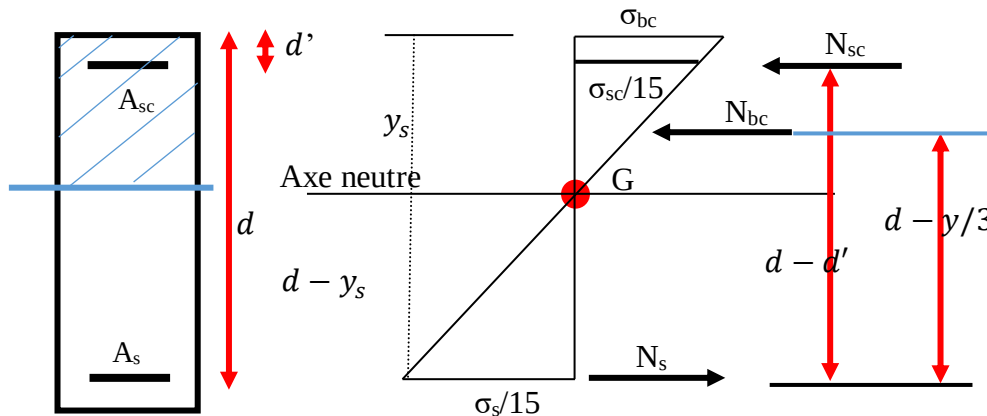


Figure I.17. Schéma de calcul à l'ELS d'une section rectangulaire

d) Nouvelle position de l'axe neutre (détermination de y_{ser})

D'après les conditions d'équilibre statique :

$$\Sigma F = 0, \Sigma M = 0.$$

Les efforts agissants dans la section (figure I.17) à l'état-limite de service sont :

$$N_{bc} = \frac{b \cdot y_s \cdot \sigma_{bc}}{2} = \frac{k \cdot b \cdot y_s^2}{2}$$

$$N_{sc} = A_{sc} \cdot \sigma_{sc} = 15A_{sc} \cdot k \cdot (y_s - d')^2$$

$$N_s = A_s \cdot \sigma_s = 15A_s \cdot k \cdot (d - y_s)^2$$

Alors, $\Sigma F = 0$, donne : $N_s - N_{bc} - N_{sc} = 0$, ou encore :

$$15A_s \cdot k \cdot (d - y_s)^2 - \frac{k \cdot b \cdot y_s^2}{2} - 15A_{sc} \cdot k \cdot (y_s - d')^2 = 0 \Rightarrow$$

$$b \cdot y_s^2 + 30(A_{sc} + A_s)y_s - 30(d'A_{sc} + dA_s) = 0$$

Pour le cas de la section rectangulaire considérée, la solution de l'équation est :

$$y = \frac{15(A_s + A_{sc})}{b} \left[\sqrt{1 + \frac{b(dA_s + d'A_{sc})}{7.5(A_s + A_{sc})^2}} - 1 \right]$$

I.III.2.2. Moment d'inertie de la section

En prenant la somme des moments par rapport au point G on a : $\Sigma M = 0$; ce qui donne:

$$M_{ser} - N_{bc} \left(\frac{2y_s}{3} \right) - N_{sc}(y_s - d') + N_s(d - y_s) = 0 \Rightarrow$$

En remplaçant M_{ser} ; N_{bc} ; N_{sc} par leurs valeurs, on obtient :

$$\frac{M_{ser}}{k} = \frac{b \cdot y_s^3}{3} + 15A_{sc} \cdot (y_s - d')^2 + 15A_s \cdot (d - y_s)^2$$

Le moment d'inertie de la section rectangulaire totale rendue homogène par rapport à l'axe neutre a pour expression :

$$I = \frac{by^3}{3} + 15[A_s(d - y)^2 + A_{sc}(y - d')^2]$$

y_s et I connus, il est maintenant possible de déterminer les valeurs des contraintes σ_{bc} et σ_s et de les comparer aux valeurs admissibles. Si une au moins des conditions suivantes : ($\sigma_b \leq \bar{\sigma}_b$; $\sigma_s \leq \bar{\sigma}_s$), on procède à un redimensionnement de la section, sinon on garde les sections déterminées à l'ELU.

I.III.3. Calcul d'une section rectangulaire lorsque l'ELS est le plus défavorable

I.III.3.1. La condition de compression du béton est assurée, la condition de fissuration n'est pas assurée

Dans ce cas, il faut recalculer la section d'aciers tendus A_s , en admettant que ces armatures travaillent au maximum possible ($\sigma_s = \bar{\sigma}_s$).

1^{er} Cas : La section ne comporte que des armatures tendues (Figure I.18).

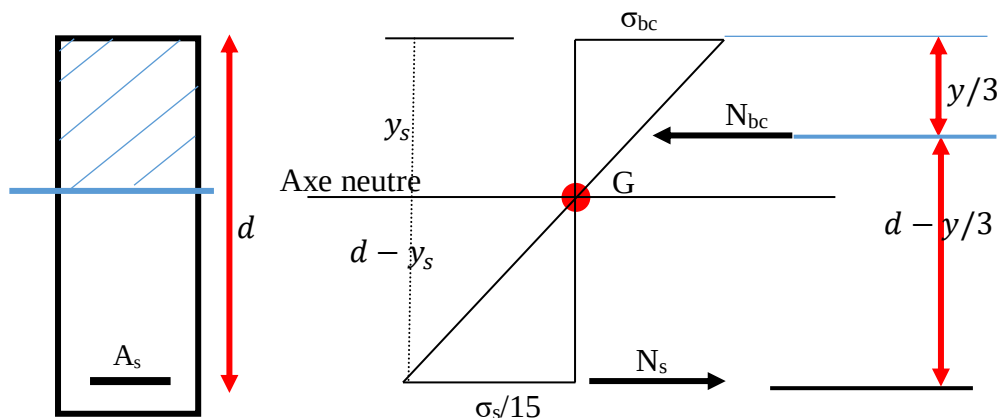


Figure I.18. Schéma de calcul à l'ELS d'une section rectangulaire fléchie sans armatures comprimées

Pour le schéma considéré (Figure I.18.) on a :

$$\sum F = 0 \Rightarrow N_{bc} - N_s = 0 \text{ avec } N_{bc} = \frac{b \cdot y_s \cdot \sigma_{bc}}{2} \text{ et } N_s = A_s \cdot \bar{\sigma}_s$$

On peut écrire :

$$\frac{b \cdot y_s \cdot \sigma_{bc}}{2} - A_s \cdot \bar{\sigma}_s$$

D'autre part :

$$\Sigma M = 0 \Rightarrow N_{bc} \left(d - \frac{y_s}{3} \right) = \frac{1}{2} b \cdot y_s \cdot \sigma_{bc} \left(d - \frac{y_s}{3} \right)$$

En faisant travailler les aciers à leur maximum, on peut prendre $\sigma_s = \bar{\sigma}_s$

En outre, en considérant les triangles semblables, on peut écrire avec :

$$\frac{\sigma_{bc}}{\alpha_1 d} = \frac{\bar{\sigma}_s}{15d(1 - \alpha_1)}$$

D'où :

$$\sigma_{bc} = \frac{\alpha_1}{1 - \alpha_1} \frac{\bar{\sigma}_s}{15}$$

En remplaçant σ_{bc} par son expression dans l'équation de M_{ser} et après transformations, on obtient l'équation :

$$\alpha_1^3 \bar{\sigma}_s - 3\alpha_1^2 \bar{\sigma}_s - \frac{90M_{ser}}{bd^2} \alpha_1 + \frac{90M_{ser}}{bd^2} = 0$$

Ayant pour solution (utile) :

$$\alpha_1 = 1 + 2\sqrt{\lambda} \cos\left(\frac{4\pi}{3} + \frac{\varphi}{3}\right)$$

Avec :

$$\lambda = 1 + v; v = \frac{30M_{ser}}{bd^2 \bar{\sigma}_s}; \text{ et } \cos\varphi = \frac{1}{\lambda\sqrt{\lambda}}$$

Connaissant la valeur de α_1 , on peut déterminer la nouvelle section d'armatures tendues A_s à partir de l'équation d'équilibre des forces : $N_b = N_s$:

$$A_s = \frac{by_s \sigma_{bc}}{2\bar{\sigma}_s} = \frac{\alpha_1 bd \sigma_{bc}}{2\bar{\sigma}_s}$$

Avec :

$$\frac{\sigma_{bc}}{\bar{\sigma}_s} = \frac{\alpha_1}{15(1 - \alpha_1)}$$

Ce qui donne en définitive :

$$A_s = \frac{\alpha_1^2}{30(1 - \alpha_1)} bd$$

On peut aussi utiliser les abaques ci-dessous (Figure I.19.) pour déterminer les valeurs de α_1 , en fonction des valeurs de u .

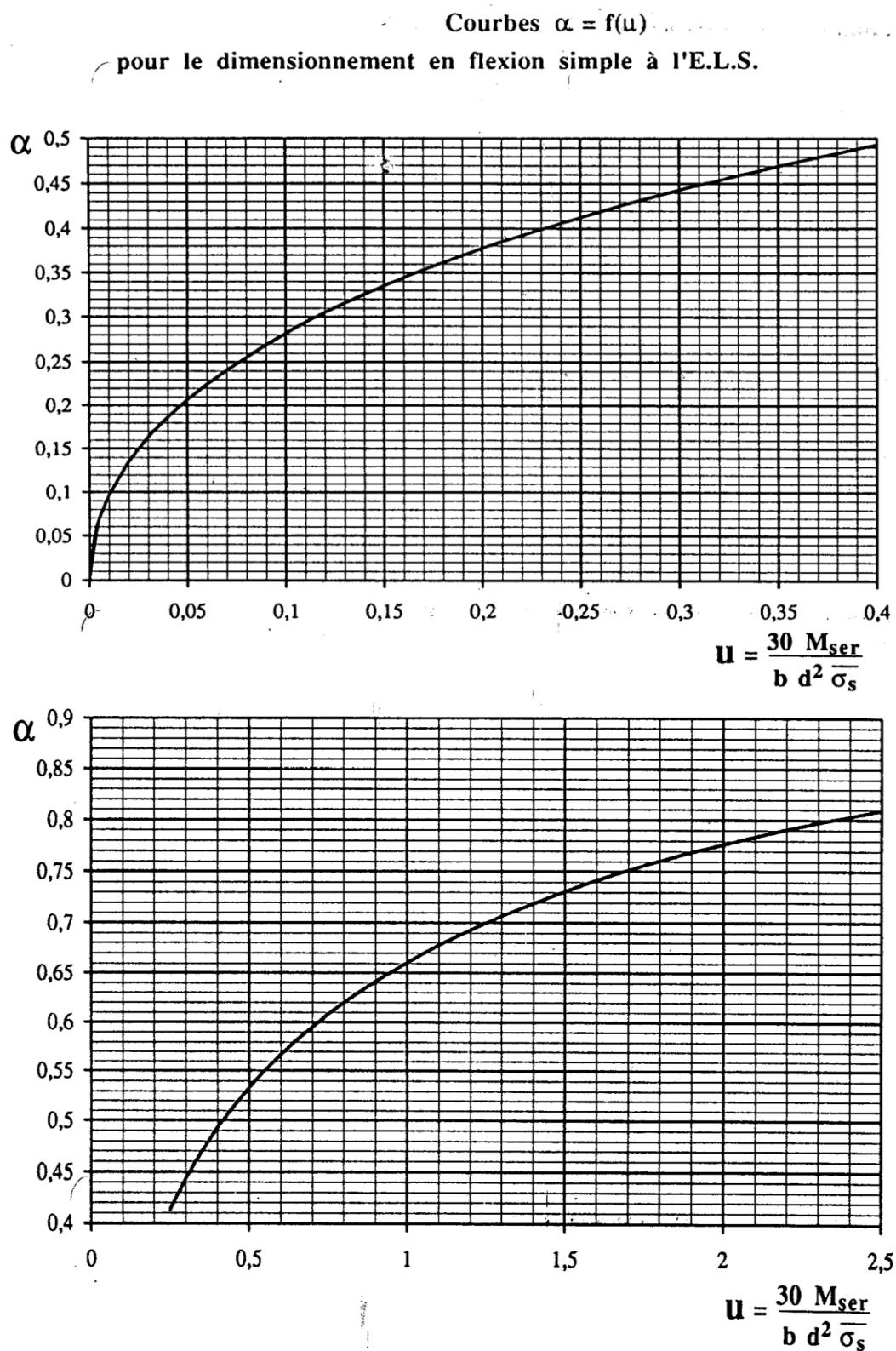


Figure I.19. Sections rectangulaires fléchies à l'ELS. Courbes $\alpha_1 = f(u)$

I.III.3.2. La condition de compression du béton n'est pas assurée

Si la condition de compression du béton n'est pas assurée, donc $\sigma_{bc} > 0.6f_{cj}$ on peut soit redimensionner la section du béton, soit introduire des armatures comprimées (ou augmenter leur section s'il y en a déjà).

Pour aboutir aux dimensions minimales de la section, on fait travailler les deux matériaux à leurs limites $\bar{\sigma}_s$ et $\bar{\sigma}_b = 0.6f_{cj}$

La position de l'axe neutre peut être déterminée d'après les triangles semblables (figure I.20) :

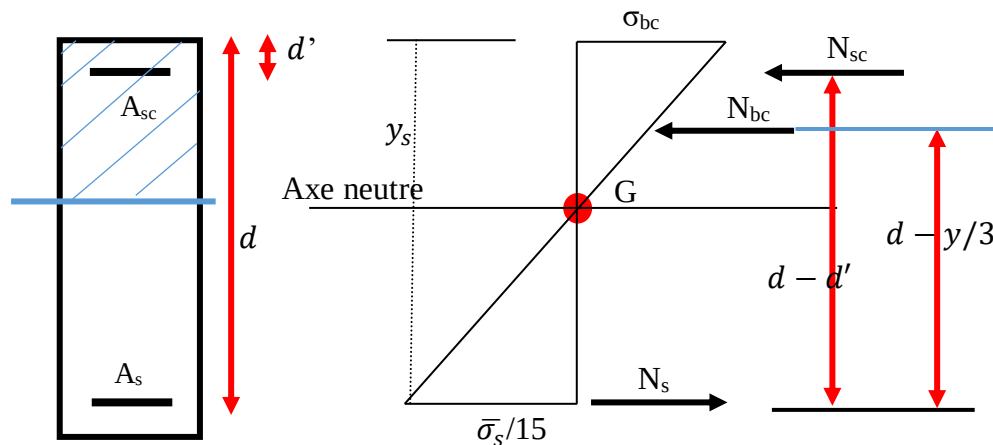


Figure I.20. Diagramme des contraintes d'une section rectangulaire fléchie à l'ELS

A partir de la figure I.20, on peut écrire en utilisant la théorie des triangles semblables :

$$\frac{\frac{\bar{\sigma}_b}{n}}{\left(\frac{\bar{\sigma}_s}{n}\right)} = \frac{0.6f_{cj}}{\left(\frac{\bar{\sigma}_s}{n}\right)}$$

Ou encore :

$$\frac{0.6f_{cj}}{\left(\frac{\bar{\sigma}_s}{n}\right)} = \frac{\alpha_1}{1 - \alpha_1}$$

D'où on trouve :

$$\alpha_1 = \frac{0.6f_{cj}}{0.6f_{cj} + \frac{\bar{\sigma}_s}{n}}$$

Avec $n = 15$, on a définitivement :

$$\alpha_1 = \frac{9f_{cj}}{9f_{cj} + \bar{\sigma}_s}$$

L'équilibre de la section (sans armatures comprimées) s'écrit :

$$M_{ser} = \left[b \cdot y_s \cdot \sigma_{bc} \cdot \left(d - \frac{y_s}{3} \right) \right] / 2$$

Ou encore avec $y_s = \alpha_1 d$

$$M_{ser} = 0.5b \cdot \alpha_1 \cdot d \cdot 0.6f_{cj}d \left(1 - \frac{\alpha_1}{3}\right) = 0.1bd^2 f_{cj} \alpha_1 (3 - \alpha_1)$$

D'où

$$bd^2 = \frac{10M_{ser}}{\alpha_1(3 - \alpha_1)f_{cj}}$$

Ou encore :

$$bd^2 = \frac{10M_{ser}(9f_{cj} + \bar{\sigma}_s)^2}{27f_{cj}^2(6f_{cj} - \bar{\sigma}_s)}$$

D'après cette équation on précise les dimensions b et d , ensuite on détermine la section des armatures tendues :

$$A_s = \frac{0.3\alpha_1 b d f_{cj}}{\bar{\sigma}_s}$$

I.III.3.3. La section comporte des armatures tendues et des armatures comprimées.

Si par application de la méthode pour une section qui ne comporte que des armatures, on trouve $\sigma_{bc} > \bar{\sigma}_{bc}$, il est nécessaire de prévoir des armatures comprimées (ou d'augmenter les dimensions de la section du béton).

Si on décide d'introduire des armatures comprimées, on prend la contrainte de service et on fait le calcul par la méthode suivante. Par conséquent, on calcule le coefficient α_1 :

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{15(y_s - d')\bar{\sigma}_{bc}}{y_s} \\ &= \frac{9f_{cj}}{9f_{cj} \cdot \bar{\sigma}_s} \end{aligned}$$

Ensuite on détermine $y_s = \alpha_1 d$ la contrainte de l'armature comprimée :

$$\frac{\bar{\sigma}_{bc}}{y_s} = \frac{\sigma_{sc}}{15(y_s - d')}$$

D'où :

$$\begin{aligned} \sigma_{sc} &= \frac{15(y_s - d')\bar{\sigma}_{bc}}{y_s} \\ &= 9f_{cj} \frac{1 - d'}{\alpha_1 d} \end{aligned}$$

L'effort normal dans le béton comprimé est :

$$N_{bc} = 0.5\bar{\sigma}_{bc} b \alpha_1 \cdot d$$

Le moment repris par le béton comprimé (par rapport au centre de gravité des armatures tendues) est :

$$\begin{aligned}M_{bc} &= N_{bc} \left(\frac{d - \alpha_1 d}{3} \right) \\&= 0.5 \bar{\sigma}_{bc} b \alpha_1 \cdot d \cdot d \left(1 - \frac{\alpha_1}{3} \right) \\&= 0.1 f_{cj} \alpha_1 (3 - \alpha_1) b d^2\end{aligned}$$

L'effort normal repris par les armatures comprimées :

$$N_{sc} = A_{sc} \sigma_{sc}$$

Le moment repris par les armatures comprimées :

$$M_{sc} = N_{sc} (d - d') = A_{sc} \sigma_{sc} (d - d')$$

$$M_{sc} = M_{ser} - M_{bc}$$

Les nouvelles sections d'armatures seront obtenues par :

$$\begin{aligned}A_{sc} &= \frac{M_{sc}}{\sigma_{sc} (d - d')} \\&= \frac{M_{ser} - 0.1 \alpha_1 (3 - \alpha_1) b d^2}{\sigma_{sc} (d - d')} f_{cj} \\A_s &= \frac{A_{sc} \sigma_{sc} + 0.3 \alpha_1 b d^2 f_{cj}}{\bar{\sigma}_s}\end{aligned}$$

L'organigramme suivant récapitule le calcul à l'ELS d'une section rectangulaire en béton armé soumise à la flexion simple :

Vérification des contraintes à l'ELS

Déterminer la position de l'axe neutre à l'ELS →

Calculer l'inertie I →

Calculer et vérifier les contraintes du Béton et de l'Acier →

$$by^2 + 30(A_s + A_{sc})y - 30(dA_s + d'A_{sc}) = 0$$

$$I = \frac{by^3}{3} + 15[A_s(d-y)^2 + A_{sc}(y-d')^2]$$

$$y = \frac{15(A_s + A_{sc})}{b} \left[\sqrt{1 + \frac{b(dA_s + d'A_{sc})}{7.5(A_s + A_{sc})^2}} - 1 \right]$$

- $K = \frac{M_{ser}}{I}$
- $\sigma_{bc} = k \cdot y$
- $\sigma_s = n \cdot k \cdot (d - y)$
- $\sigma_{sc} = n \cdot k \cdot (y - d')$
- $\bar{\sigma}_{bc} = 0.6 f_{c28}$
- $\sigma_s \leq \bar{\sigma}_s$
- F-P $\sigma_s = \min \left[\frac{2}{3} f_e; 110 \sqrt{nftj} \right]$
- FTP $\sigma_s = \min \left[\frac{1}{2} f_e; 90 \sqrt{nftj} \right]$

Calcul les armatures à l'ELS

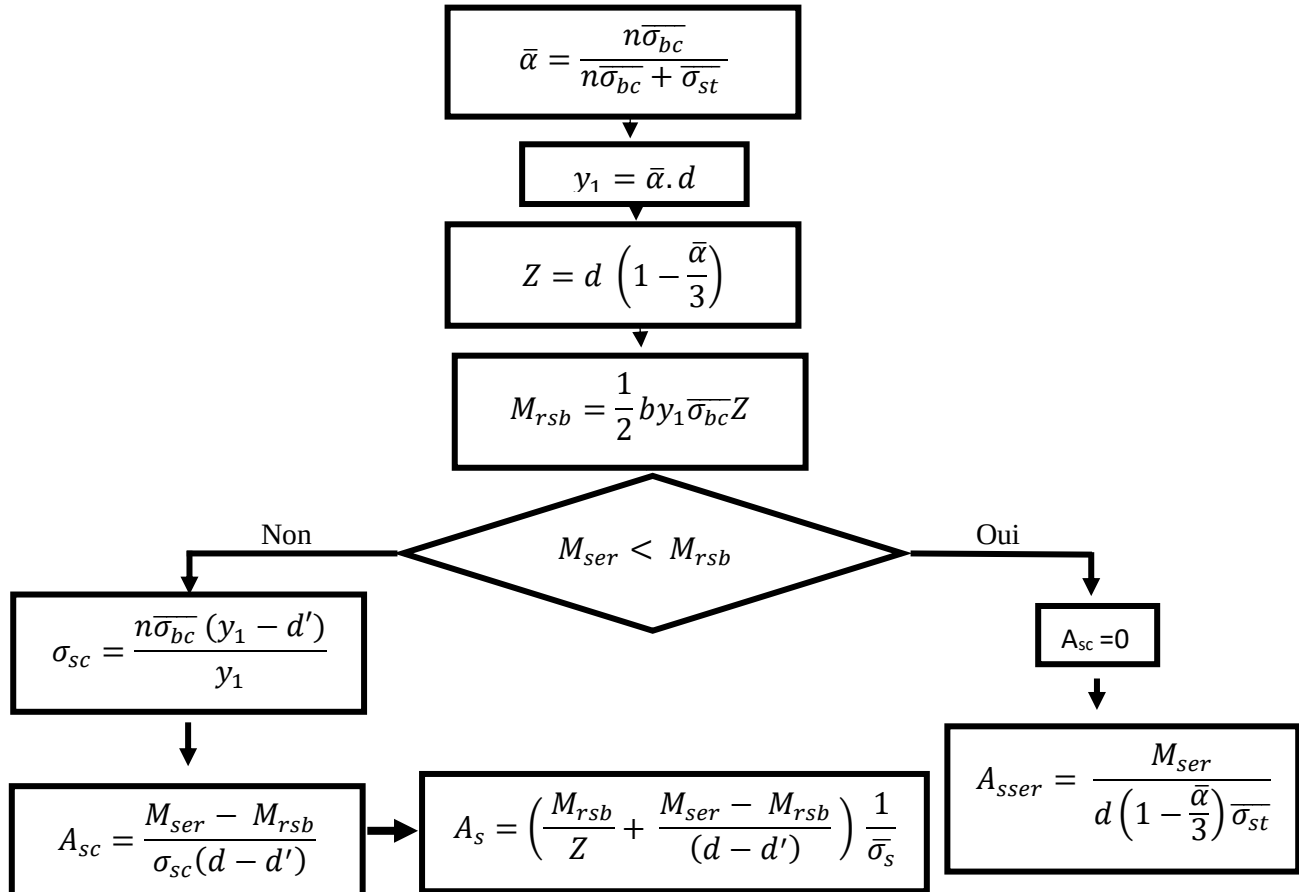


Figure I.20. Organigramme de calcul à l'ELS d'une section rectangulaire

I.III.4. Calcul d'une section en Té lorsque l'ELS est le plus défavorable

I.III.4.1. Moment résistant de la table de compression

Le moment résistant du béton d'une section en té lorsque la table de compression est totalement comprimée est égale à (Figure I.21) :

$$M_{bt} = F_{bc} \cdot Z = 0.5bh_0 \cdot \overline{\sigma}_{bc} \left(d - \frac{h_0}{3} \right)$$

Calcul des armatures

Pour le calcul des armatures longitudinales, il faut considérer deux cas :

I.III.4.2. Msollicitant $M_{ser} = M_{bt}$

Comme le béton tendu est négligé, le calcul peut se faire pour une section rectangulaire ($b \times h$), (Figure I.22)

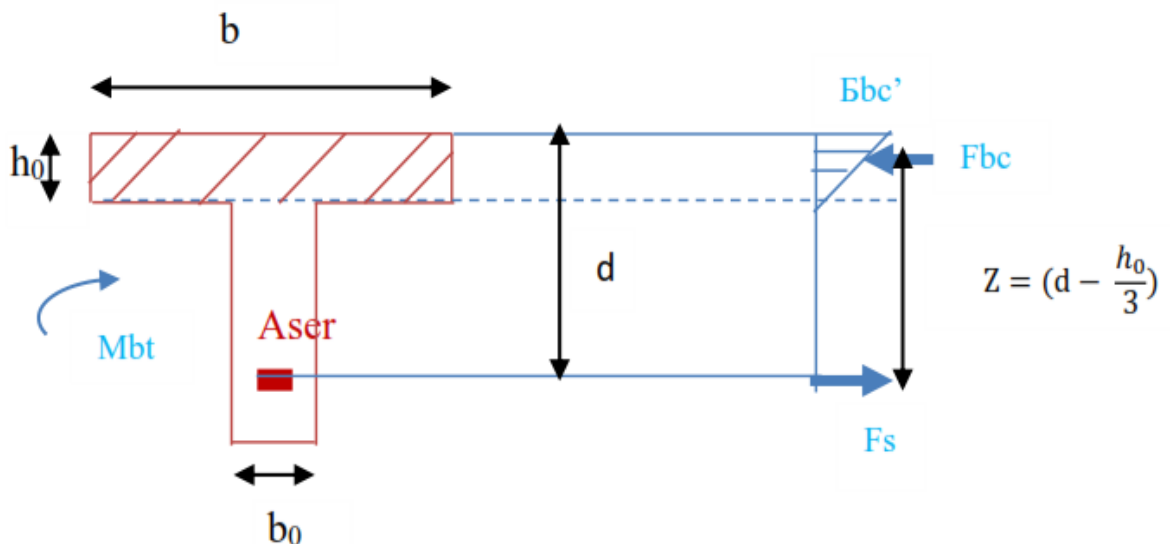


Figure I.21. Equilibre statique d'une section en T à l'ELUR soumise au moment M_{bt}

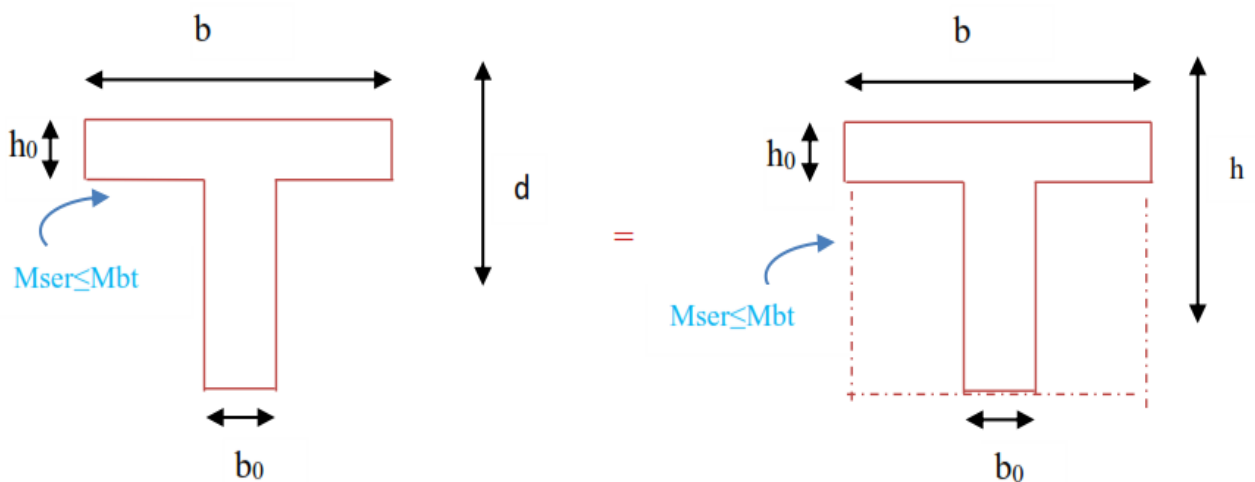


Figure I.22. Section rectangulaire fictive de calcul pour la section en T

Dans ce cas les armatures comprimées ne sont pas nécessaires.

Le calcul des armatures peut se faire par la méthode approchée, où la valeur du bras de levier est prise égale à :

$$Z = d - 0.5h_0$$

Et la section des armatures tendues à l'ELS, vaut :

$$A_{sser} = M_{sser} / (Z \cdot \sigma_s)$$

I.III.4.3. Moment sollicitant $M_{ser} > M_{bt}$

Dans ce cas, la section en T est partagée en deux sections fictives. Une section qui comprend les ailettes de la table de compression soumise à un moment (M_1), correspondant à son moment de résistance. Une deuxième section qui correspond à la nervure de la section en té et qui est sollicité par un moment (M_2), qui est la différence entre le moment sollicitant extérieur M_{ser} et le moment (M_1).

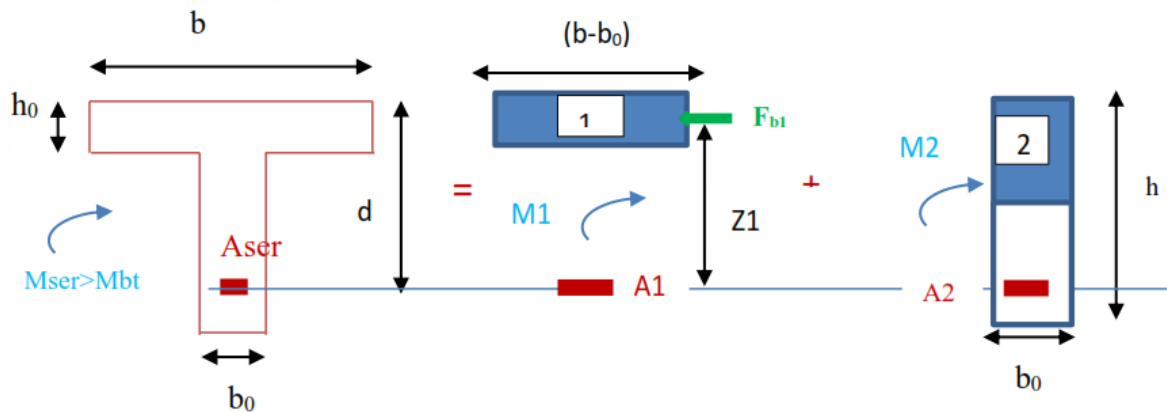


Figure I.23. Schéma de calcul d'une section T à l'ELS

Pour la section 1, le moment résistant des ailettes de la table de compression a pour valeur :

$$M_1 = F_{b1} \cdot Z_1 = 0.5(b - b_0)h_0 \cdot \overline{\sigma}_{bc} \left(d - \frac{h_0}{3} \right)$$

Et la section des armatures A1, a pour valeur :

$$A_{s1} = \frac{M_{1r}}{\left(d - \frac{h_0}{3} \right) \overline{\sigma}_s}$$

Pour la section 2, le moment sollicitant est pris égal à :

$$M_2 = M_U - M_1$$

Et la section des armatures tendues A_2 et éventuellement la section des armatures comprimées A_{sc} , sont calculées pour une section rectangulaire de dimensions ($b_0 \times h$), soumise au moment M_2 .

Finalement :

$A_{ser} = A_1 + A_2$, et éventuellement : A_{sc} = armatures comprimées.

I.III.4.4. Application

Soit une poutre en porte à faux soumise à une charge d'exploitation uniformément répartie (q).

1. Tracer les courbes du moment fléchissant (M) à ELU et ELS de la poutre console.
2. Présenter le schéma de calcul de la section.
3. Déterminer les armatures longitudinales à E.L.U de la poutre.
4. Vérifier les contraintes à l'ELS
5. Déterminer les armatures longitudinales à ELS de la poutre.
6. Présenter le ferrailage complet de la poutre.

FeE400, $f_{c28} = 25$ MPa, Fissuration Préjudiciable, Situation durable.

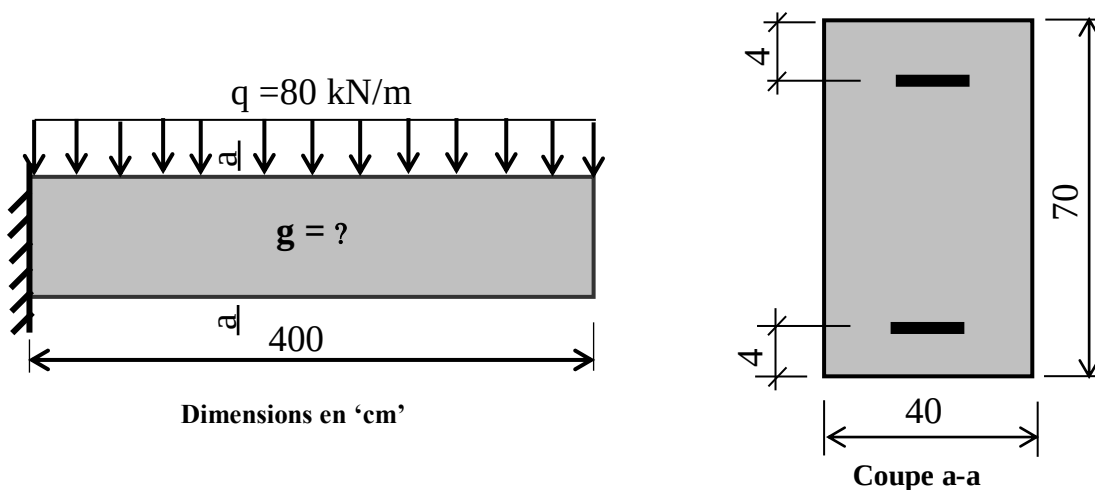


Fig.1 (b). Dimensions en 'cm'

Solution :

1. Tracer les courbes du moment fléchissant (M) à ELU et ELS de la poutre console.

$$M_u = -\frac{N_u l^2}{2}; \quad M_s = -\frac{N_s l^2}{2}$$

$$N_u = 1.35(0.4 \times 0.7) + 1.5 \times 80 = 129.45 \text{ kN/m}$$

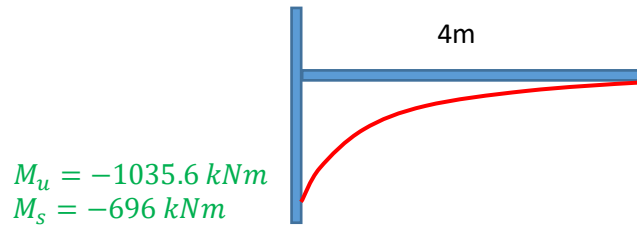
$$N_s = 0.4 \times 0.7 \times 25 + 80 = 87 \text{ kN/m}$$

$$M_u = -\frac{129.45 \times 4^2}{2} = -1035.6 \text{ kNm}$$

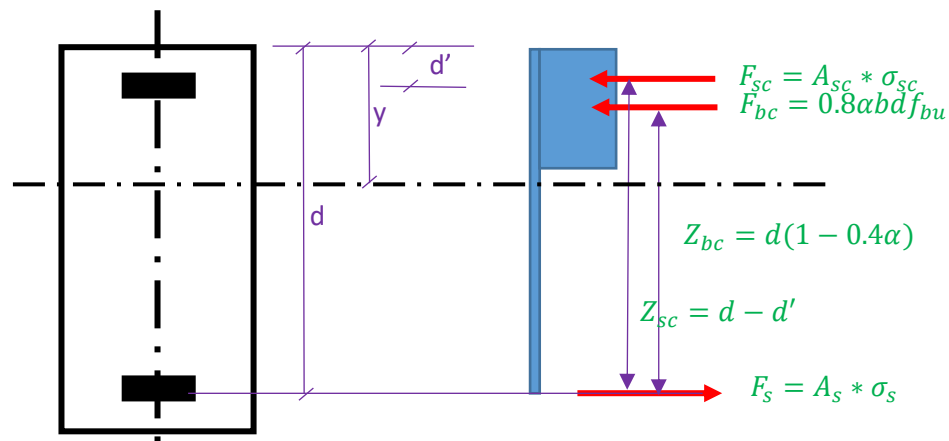
$$M_u = -1035.6 \text{ kNm}$$

$$M_s = -\frac{87 * 4^2}{2} = -696 \text{ kNm}$$

$$M_s = -696 \text{ kNm}$$



2. Présenter le schéma de calcul de la section.



3. Détermination les armatures longitudinales à E.L.U de la poutre.

$$\mu = \frac{Mu}{bd^2 f_{bu}}$$

$$\mu = \frac{1035.6 * 10^{-3}}{0.4 * 0.66^2 * 14.167} = 0.419$$

$$\mu_l = 0.8 \alpha_l (1 - 0.4 \alpha_l)$$

$$\mu_l = 0.8 * 0.668 * (1 - 0.4 * 0.668) = 0.392$$

$$\mu = 0.419 > \mu_l = 0.392 \Rightarrow A_{sc} \neq 0$$

$$M_{bl} = 0.8 b \alpha_l d^2 f_{bu} (1 - 0.4 \alpha_l)$$

$$M_{bl} = 1000 * 0.8 * 0.4 * 0.668 * 0.66^2 * 14.167 (1 - 0.4 * 0.668) = 966.69 \text{ kNm}$$

$$M_{bl} = 966.69 \text{ kNm}$$

$$M_{bl} = 966.69 \text{ kNm} > M_u = 621.36 \text{ kNm}$$

$$A_{sc} = \frac{M_u - M_{bl}}{Fe/\gamma_s(d - d')}$$

$$A_{sc} = \frac{(1035.6 - 966.69) * 10^{-3}}{347.82(0.66 - 0.04)} = 3.2 * 10^{-4} m^2$$

$$A_{sc} = 3.2 \text{ cm}^2$$

$$A_s = \frac{F_{bl} + A_{sc} \cdot Fe/\gamma_s}{Fe/\gamma_s}$$

$$A_s = \frac{0.8 * 0.668 * 0.4 * 0.66 * 14.167 + 3.2 * 10^{-4} * 347.82}{347.82} = 60.66 * 10^{-4} m^2$$

$$A_s = 60.66 \text{ cm}^2$$

4. Vérification des contraintes à l'ELS

Détermination de la position de l'axe neutre à l'ELS

$$by_s^2 + 30(A_s + A_{sc})y_s - 30(dA_s + d'A_{sc}) = 0$$

$$40y_s^2 + 30(3.2 + 60.66)y_s - 30(66 * 60.66 + 4 * 3.2) = 0$$

$$40 y_s^2 + 1915.69 y_s - 120492.19 = 0$$

La solution de cette équation de de seconde ordre est :
 $y_{s1} = -83.83 \text{ cm}$ et $y_{s2} = 35.93 \text{ cm}$

Donc la solution adéquate de cette équation est :

$$y_s = 35.93 \text{ cm}$$

Calculer l'inertie I

$$I = \frac{by_s^3}{3} + 15[A_s(d - y_s)^2 + A_{sc}(y_s - d')^2]$$

$$I = \frac{40 * 35.93^3}{3} + 15[60.66(66 - 35.93)^2 + 3.2(35.93 - 4)^2]$$

$$I = 1490073.56 \text{ cm}^4$$

$$I = 14.9 * 10^{-3} m^4$$

$$K = \frac{M_{ser}}{I}$$

$$K = \frac{696 * 10^{-3}}{14.9 * 10^{-3}} = 46.71 \text{ MN/m}^3$$

$$K = 46.71 \text{ MN/m}^3$$

$$\sigma_{bc} = k \cdot y_s$$

$$\sigma_{bc} = 46.71 * 0.359 = 16.78 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{bc} = 16.78 \text{ MPa}$$

$$\sigma_s = n \cdot k \cdot (d - y_s)$$

$$\sigma_s = 15 \cdot 46.71 \cdot (0.66 - 0.359) = 210.65 \text{ MPa}$$

$$\sigma_s = 210.65 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{sc} = n \cdot k \cdot (y_s - d')$$

$$\sigma_{sc} = 15 * 46.71 * (0.359 - 0.04) = 223.75 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{sc} = 223.75 \text{ MPa}$$

$$\bar{\sigma}_c = 0.6 f_{c28}$$

$$\bar{\sigma}_c = 0.6 * 25 = 15 \text{ MPa}$$

$$\bar{\sigma}_c = 15 \text{ MPa}$$

$$\bar{\sigma}_s = \min \left[\frac{2}{3} f_e; 110 \sqrt{n f_t j} \right]$$

$$\bar{\sigma}_s = \min \left[\frac{2}{3} * 400; 110 \sqrt{1.6 * 2.1} \right]$$

$$\bar{\sigma}_s = \min(266.67; 201.63) = 201.63 \text{ MPa}$$

$$\bar{\sigma}_s = 201.63 \text{ MPa}$$

On a :

$$\sigma_{bc} = 16.78 \text{ MPa} < \bar{\sigma}_c = 15 \text{ MPa} \quad \text{CNV}$$

$$\sigma_s = 210.65 \text{ MPa} < \bar{\sigma}_s = 201.63 \text{ MPa} \quad \text{CNV}$$

Les conditions des contraintes ne sont pas remplies, donc on doit passer au calcul des armatures à l'ELS

5. Déterminer les armatures longitudinales à ELS de la poutre.

$$\bar{\alpha} = \frac{n \bar{\sigma}_{bc}}{n \bar{\sigma}_{bc} + \bar{\sigma}_{st}}$$

$$\bar{\alpha} = \frac{15 * 15}{15 * 15 + 201.63} = 0.527$$

$$\bar{\alpha} = 0.527$$

$$M_{rb} = \frac{1}{2} \bar{\alpha} b d^2 \bar{\sigma}_{bc} \left(1 - \frac{\bar{\alpha}}{3}\right)$$

$$M_{rb} = \frac{1}{2} * 0.527 * 0.4 * 0.66^2 * 15 \left(1 - \frac{0.527}{3}\right) = 568.03 * 10^{-3} \text{ MNm}$$

$$M_{rb} = 568.03 \text{ kNm}$$

$$M_s = 696 \text{ kNm} > M_{rb} = 568.03 \text{ kNm} \Rightarrow A_{sc} \neq 0$$

$$\sigma_{sc} = \frac{n \bar{\sigma}_{bc} (\bar{\alpha} \cdot d - d')}{\bar{\alpha} \cdot d}$$

$$\sigma_{sc} = \frac{15 * 15 (0.527 * 0.66 - 0.04)}{0.527 * 0.66} = 199.14 \text{ MPa}$$

$$A_{sc} = \frac{M_{ser} - M_{rb}}{\sigma_{sc} (d - d')}$$

$$A_{sc} = \frac{0.696 - 0.568}{199.14 (0.66 - 0.04)} = 10.36 * 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$A_{sc} = 10.36 \text{ cm}^2$$

$$A_s = \left(\frac{M_{rsb}}{d \left(1 - \frac{\bar{\alpha}}{3}\right)} + \frac{M_{ser} - M_{rsb}}{(d - d')} \right) \frac{1}{\bar{\sigma}_s}$$

$$A_s = \left(\frac{0.568}{0.66 \left(1 - \frac{0.527}{3}\right)} + \frac{0.696 - 0.568}{(0.66 - 0.04)} \right) \frac{1}{201.63} = 62.02 * 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$A_s = 62.02 \text{ cm}^2$$

$$A_{sc} = \max(A_{scu}; A_{scs}) = \max(3.2; 10.36) = 10.36 \text{ cm}^2$$

$$A_s = \max(A_{su}; A_{ss}) = \max(60.62; 62.02) = 62.02 \text{ cm}^2$$

$$A_{min} = \max\left(\frac{bh}{1000}; 0.23 b_0 d \frac{f_{t28}}{f_e}\right)$$

$$A_{min} = \max\left(\frac{0.4 * 0.7}{1000}; 0.23 * 0.4 * 0.66 \frac{2.1}{400}\right)$$

$$A_{min} = \max(2.8; 3.19) = 3.19 \text{ cm}^2$$

$$A_{min} = 3.19 \text{ cm}^2$$

$$A_{stotal} = A_s + A_{sc} = 10.36 + 62.02 = 72.38 \text{ cm}^2$$

$$A_{stotal} = 72.38 \text{ cm}^2 > A_{min} = 3.19 \text{ cm}^2 \quad \text{CV}$$

7. Présentation du ferrailage longitudinal de la poutre

On adopte pour cette section le ferrailage suivant :

$$A_s = 2x4T20 + 2x4T25 = 64.98 \text{ cm}^2$$

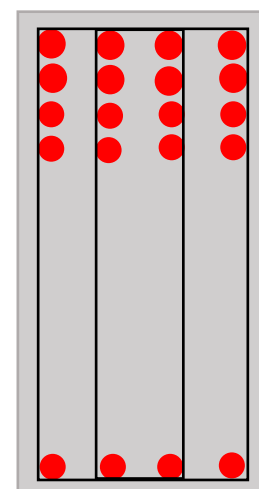
$$A_{sc} = 4T20 = 12.68 \text{ cm}^2$$

4T25

4T25

4T20

4T20



4T20

Chapitre II : Effort Tranchant

Chapitre II : Effort tranchant

II.1. Base de calcul

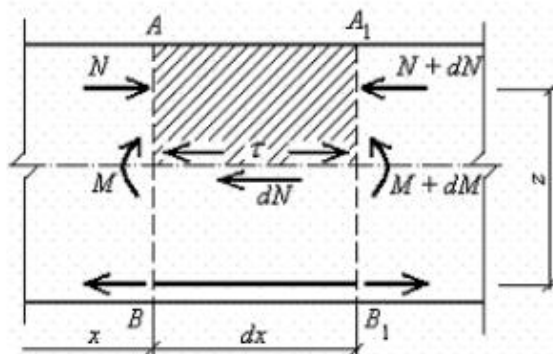
On suit l'évolution d'une poutre soumise à l'effort tranchant : au début du chargement, le béton n'est pas fissuré, l'équilibre interne est caractérisé par un état bi axial de contraintes très voisin de ce qu'il serait dans un matériau homogène (calculable par la méthode RDM). Lorsque le chargement augmente, il apparait des fissures de traction ; l'équilibre interne et il évolue en fonction de la fissuration.

Après apparition des fissures de traction, on cherche la répartition des contraintes de cisaillement ; pour une section rectangulaire (il en serait de même pour une section de T), on a :

- Dans la partie comprimée : $\tau(y) = \frac{V \cdot S(y)}{b \cdot I}$
- Où $S(y)$ représente le moment statique de l'aire située au-dessus de la fibre d'ordonnée y

Dans la partie tendue, il y a cisaillement pur, l'effort normal n'existant plus, la fissuration annulant la traction.

L'effort de glissement doit équilibrer la section hachurée :



$$\begin{aligned}
 dN &= \frac{dM}{Z} \\
 &= \frac{dM}{dx} * \frac{dx}{Z} \\
 dN &= \tau_b b_0 dx \\
 \tau_b &= \frac{V}{b_0 Z}
 \end{aligned}$$

D'autre part, dans le calcul de τ_b , intervient Z qui est inconnue : cela conduit à introduire **la contrainte tangente conventionnelle** $\tau_u = \frac{V_u}{b_0 d}$

Pour ces calculs, on prend Z de façon forfaitaire car sa variation n'a pas grande influence sur τ_b .

Le cisaillement pur sur un petit élément peut être remplacé par un état bi-axial à 45° ($+\sigma, -\sigma$), avec $\sigma = \tau_b$

Si la charge augmente, l'effort tranchant augmente, donc τ_b ; Lorsque $\sigma = \tau_b$ atteint la résistance en traction du béton, il apparaît des fissures parallèles aux efforts de compression, donc à 45° .

Si l'effort augmente encore, la fissure peut se propager dans la zone comprimée et atteindre la fibre supérieure, ce qui donne une rupture brutale bien observée expérimentalement.

La méthode courante pour éviter ce phénomène consiste donc à placer des armatures transversales, inclinées d'un angle α , la disposition la plus efficace correspond à $\alpha = 45^\circ$, mais on utilise souvent par commodité, lorsque cela est possible, $\alpha = 90^\circ$.

II.2. Résistance des âmes – Section courantes

Les règles de calcul en vigueur n'envisagent que la vérification à l'Etat Limite Ultime.

Les modes de rupture par effort tranchant conduisent à quatre Etats Limites Ultimes qui doivent être envisagés :

Effort tranchant – compression : pour lequel survient l'écrasement des bielles de béton comprimées limitées par des fissures à 45° ;

Effort tranchant – Traction : pour lequel l'armature d'âme atteint sa limite de résistance en traction ;

Effort tranchant – Flexion : pour lequel l'armature longitudinale tendue atteint sa limite de résistance ;

Assemblage : qui correspond à la ruine des organes de transmission des efforts au voisinage des zones d'application des efforts.

Pour déterminer les efforts internes dans la poutre, on utilise l'analogie du treillis de RITTER-MORSCH.

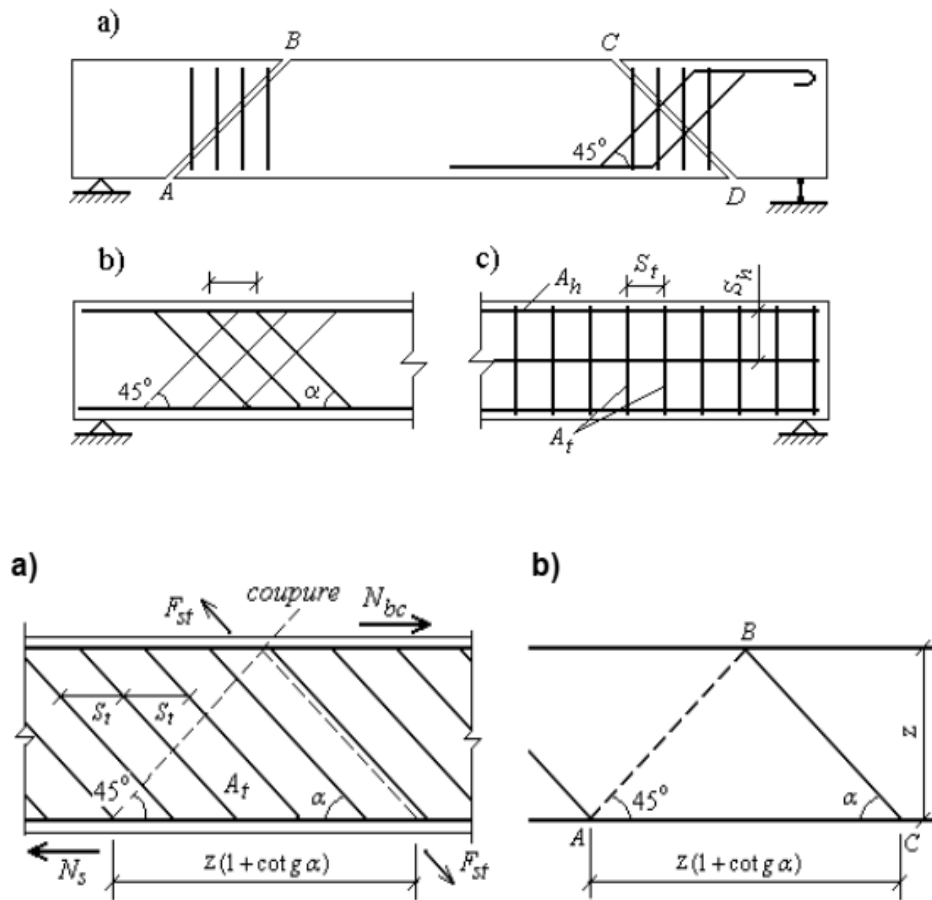


Figure II.1 Résistance des âmes – Section courantes

II.3. Vérification du béton de l'âme

Cette vérification (état-limite ultime par compression des bielles de béton) permet de préciser les dimensions de l'âme des pièces. Les contraintes tangentes τ_u , si elles sont assez élevées, elles risquent de créer des efforts de compression qui peut survenir l'écrasement des bielles de béton comprimé. Les dimensions de l'âme doivent être telles que la contrainte tangente τ_u soit limitée aux valeurs indiquées ci-après :

1) Lorsque $\alpha = 90^\circ$, la contrainte τ_u ne doit pas dépasser la plus faible des deux valeurs données par :

Si la fissuration est non préjudiciable :

$$\tau_u = \frac{V_u}{b_0 d} \leq \bar{\tau}_u = \min \left\{ 0.2 \frac{f_{cj}}{\gamma_b} ; 5 \text{ MPa} \right\}$$

Si la fissuration est préjudiciable ou très préjudiciable :

$$\tau_u = \frac{V_u}{b_0 d} \leq \bar{\tau}_u = \min \left\{ 0.15 \frac{f_{cj}}{\gamma_b} ; 4 \text{ MPa} \right\}$$

2) Lorsque $\alpha = 45^\circ$:

$$\tau_u = \frac{V_u}{b_0 d} \leq \bar{\tau}_u = \min \left\{ 0.27 \frac{f_{cj}}{\gamma_b} ; 7 \text{ MPa} \right\}$$

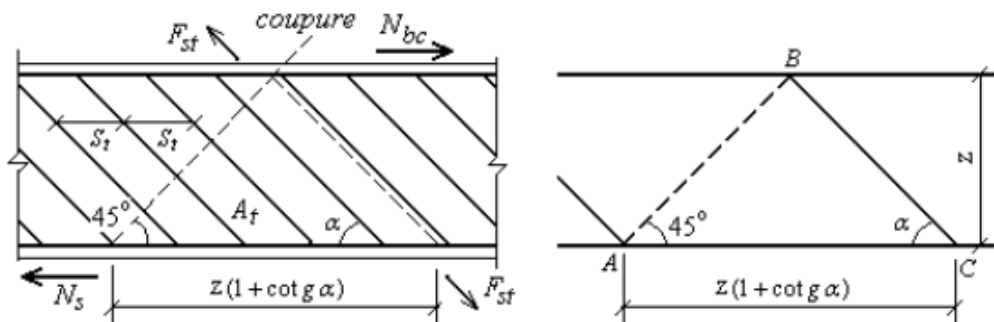
3) Lorsque ($45^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$), on détermine la valeur limite de τ_u par interpolation entre les valeurs précédentes

4) Pour des pièces dont toutes les sections droites sont **entièrement comprimées**, les limites réglementaires deviennent :

$$\tau_u = \frac{V_u}{b_0 d} \leq \bar{\tau}_u = \min \left\{ 0.06 \frac{f_{cj}}{\gamma_b} ; 1.5 \text{ MPa} \right\}$$

II.4. Calcul des armatures transversales

Soit on considère une poutre dont les armatures d'âme sont constituées de barres ayant une inclinaison α sur la ligne moyenne. On admet, qu'après fissuration, la poutre se comporte comme une poutre à treillis multiple de hauteur "z", la membrure comprimée de cette poutre étant constituée par le béton de la zone comprimée, la membrure tendue par les armatures tendues, les diagonales tendues par les barres inclinées à angle α , les diagonales comprimées par des bielles de béton inclinées à 45° .



Les armatures sont inclinées d'un angle α et ont un espacement S_t . A_t est la section résistante d'un cadre, c'est-à-dire la section totale des brins verticaux. Le nombre de cadres coupés sur un module de treillis est : $n = Z (1 + \cot g \alpha) / S_t$

En projetant l'équilibre des forces sur la verticale : $F_{st} \sin \alpha = V_u$

$$\sigma_{st} = \frac{F_{st}}{n A_t}$$

$$\sigma_{st} = \frac{V_u}{\left[A_t \sin \alpha \cdot Z (1 + \cot g \alpha) / S_t \right]}$$

$$\sigma_{st} = \left[\frac{V_u}{Z b_0} * \frac{1}{A_t / b_0 S_t} \right] / (\sin \alpha + \cos \alpha)$$

Avec :

$$\tau_b = \frac{V_u}{z b_0} ; \rho_t = \frac{A_t}{b_0 s_t} ; \sigma_{st} = \tau_b / [\rho_t (\sin \alpha + \cos \alpha)]$$

ρ_t et le pourcentage d'armature transversales dans l'âme.

D'après la théorie de Morsch, la vérification de l'ELU par traction dans les armatures d'âme doit s'écrire :

$$\tau_u = \frac{V_u}{b_0 d} \sim \tau_b \leq \frac{\tau_u - \tau_0}{\rho_t (\sin \alpha + \cos \alpha)}$$

$$\rho_t \geq \frac{\tau_u - \tau_0}{0.9 \frac{f_e}{\gamma_s} (\sin \alpha + \cos \alpha)}$$

Avec $\tau_0 = 0.3 f_{tj}^* k$ et $f_{tj}^* = \min\{f_{tj} ; 3.3 \text{ MPa}\}$

$$\rho_t \geq \frac{\tau_u - 0.3 f_{tj}^* k}{0.9 \frac{f_e}{\gamma_s} (\sin \alpha + \cos \alpha)} \text{ avec } \rho_t = \frac{A_t}{b_0 s_t}$$

k est le coefficient qui varie en fonction du type de sollicitation et de la nature de la surface de reprise de bétonnage s'il en existe. La valeur de k est la plus défavorable de celles qui découlent des articles suivants :

$k=0$ dans le cas de reprises de bétonnage n'ayant pas reçu le traitement ci-après, ou lorsque la fissuration est très préjudiciable ;

$k = 1$ dans le cas de la flexion simple ;

Dans le cas particulier de la flexion simple avec armatures droites ($\alpha = 90^\circ$) on a $\sin \alpha = 1$, $\cos \alpha = 0$ et la formule (5.10) s'écrit lorsqu'il n'y a pas de reprise de bétonnage :

$$\rho_t \geq \frac{\tau_u - 0.3 f_{tj}^* k}{0.9 \frac{f_e}{\gamma_s}} \text{ et } \rho_t = \frac{A_t}{b_0 s_t} \text{ donc } S_t \leq \frac{0.9 \frac{f_e}{\gamma_s} A_t}{(\tau_u - 0.3 f_{tj}^* k) b_0}$$

$k=1+3\sigma_{cm}/f_{cj}$ dans le cas de la flexion composée avec compression, σ_{cm} désignant la contrainte moyenne de compression de la section totale de béton sous l'effort normal de calcul ;

$k=1-10\sigma_{tm}/f_{cj}$ dans le cas de la flexion composée avec traction, σ_{tm} désignant la contrainte moyenne de traction de la section totale de béton sous l'effort normal de calcul.

Section minimale d'armatures d'âme

Quelle que soit la valeur donnée par le calcul, la quantité des armatures transversales ne doit pas être inférieure à la valeur minimale, déterminée d'après la condition de non-fragilité :

$$\frac{A_t f_e}{b_0 S_t} \geq \text{Max}\{\tau_u/2 ; 0.4 \text{MPa}\}$$

L'espacement entre les plans successifs d'armatures d'âme doit être au plus égal à la plus faible des deux valeurs :

$$S_t \leq \text{Min}\{0.9d ; 40\text{cm}\}$$

Le diamètre $\varnothing_t$ des armatures transversales d'âme doit être au moins égal à $\varnothing_l / 3$ (ici $\varnothing_l$ est le plus grand diamètre des barres longitudinales). D'autre côté le diamètre des armatures transversales doit être au plus égal à la plus petite des trois quantités suivantes:

$\varnothing_t \leq h / 35$ (h est la hauteur totale de la poutre);

$\varnothing_t \leq \varnothing_l$ ($\varnothing_l$, le diamètre des armatures longitudinales);

$\varnothing_t \leq b_0 / 10$ (b_0 , la largeur de l'âme de la poutre).

Pour calculer des armatures transversales, on prend en considération la valeur de l'effort tranchant $V_u(h/2)$, donc à la distance $h / 2$ de l'appui. Alors les contraintes tangentes τ_u (pour les formules 5.8 ... 5.14) sont données par : $\tau_u = \tau_u(h/2) = V_u(h/2) / b_0 d$.

D'autre part dans les calculs au voisinage des appuis, lorsque des charges sont appliquées à ce voisinage, on applique les modalités suivantes :

- *charges réparties* : on ne prend pas en compte les charges s'appliquant avant une distance $h/2$ du nu de l'appui considéré, car on estime que ces charges sont transmises directement à l'appui;
- *charges concentrées* : l'effort tranchant développé par une charge concentrée proche d'un appui (à la distance $a \leq 0,5 h$ de l'appui) est considéré comme directement transmise à l'appui et n'est pas prise en compte. Si la distance $0,5 h < a \leq 1,5 h$ l'effort tranchant développé par cette charge doit être multiplié par un coefficient $2 a / 3 h$.

II.5. Répartition des armatures transversales « Méthode de Caquot »

Pour les cas pratiques de répartition des armatures transversales le plus souvent on utilise les méthodes approchées : soit méthode pratique de Caquot et méthode pratique de Perchat.

Les méthodes pratiques sont applicables aux poutres de hauteur constante soumises à des charges uniformément réparties. En utilisant la méthode de *Caquot* on calcule l'écartement des armatures transversales à l'appui, puis on adopte, pour l'écartement des cadres suivants, en centimètres, la suite des nombres :

7, 8, 9, 10, 11, 13, 16, 20, 25, 35, 60.

II.6. Règle de coutures

L'expérience montre qu'il serait dangereux de compter sur le béton seul pour équilibrer un effort tangent s'exerçant sur un plan intérieur à un élément de structure. Il est donc nécessaire d'associer au béton des aciers d'attache appelés "coutures" qui traversent le plan considéré, et ancrés dans les régions de béton dont la fissuration ne compromet pas l'efficacité de l'ancrage. Cette règle est destinée à déterminer les armatures d'attache pour les plans de béton sur lesquels s'exercent un effort tangent, c'est-à-dire un effort provoqué par des contraintes tangentes, et pour lesquels il n'existe pas un mode de détermination spécifique des armatures d'attache, comme c'est le cas pour les âmes des poutres.

En pratique ces plans correspondent:

- aux surfaces de reprise de bétonnage ;
- aux plans d'attache de deux pièces entre elles.

Les plans considérés doivent être traversés par des armatures d'attache ou armatures de couture, convenablement ancrées de part et d'autre du plan sollicité, faisant avec lui un angle compris entre 45° et 90° . Si les armatures ne sont pas normales au plan, elles doivent être inclinées en sens inverse de la direction probable des fissures.

Si on appelle :

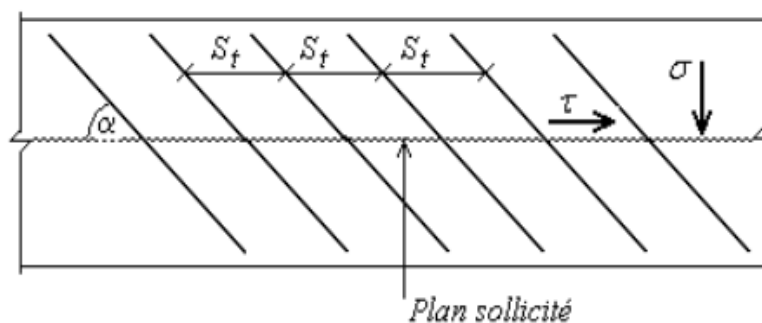
A_t , la somme des aires des sections droites des armatures de couture disposées dans un même plan ;

S_t , l'espacement des armatures de couture dans la direction parallèle au plan sollicité ;

τ , la contrainte tangente réelle (et non conventionnelle) ;

σ , la contrainte normale comptée positivement en compression, négativement en traction ; f_e , la limite d'élasticité des armatures de couture ; γ_s , le coefficient de sécurité relatif à l'acier ($\gamma_s = 1,15$) ;

α , l'angle des armatures tendues avec le plan sollicité $45^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$.



Avec ces valeurs on peut écrire la règle des coutures généralisées:

$$\frac{A_t f_e (\sin \alpha + \cos \alpha)}{b_0 S_t \gamma_s} \geq \tau_u - \sigma$$

II.7. Influence de l'effort tranchant au voisinage des appuis

Comme on a vu, précédemment, qu'il existe, dans les bielles de béton inclinées à 45° , des efforts de compression égaux à $V_u \sqrt{2}$, Il faut alors examiner ce qui se passe aux appuis.

II.7.1 Vérification de la compression du béton.

Soit, on pose que " a " étant la longueur d'appui de la bielle d'about (la valeur de " a " sera précisée par la suite) et b_o , la largeur de la nervure de la poutre. Alors la section droite de la bielle est :

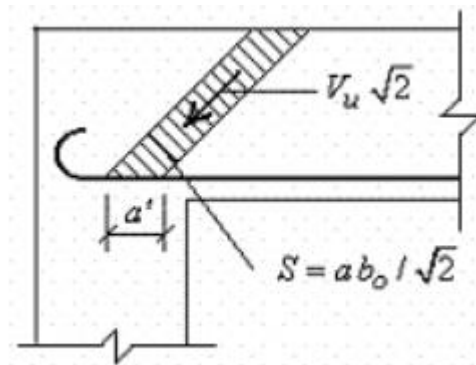


Figure II.2 Vérification de la compression du béton.

$$S = \frac{a \cdot b_o}{\sqrt{2}}$$

D'où la contrainte de la bielle : $\sigma_{bc} = \frac{V_u \sqrt{2}}{S} = \frac{2V_u}{ab_o}$

On doit avoir : $\sigma_{bc} = \frac{f_{cj}}{\gamma_b}$ mais pour tenir compte du fait que la bielle peut avoir une inclinaison légèrement différente de 45° , les règles B.A.E.L. considèrent que l'on doit avoir (en introduisant le coefficient 0.8) : $\sigma_{bc} = 0.8 \frac{f_{cj}}{\gamma_b}$

Alors on a : $2 V_u \leq 0.8 ab_o \frac{f_{cj}}{\gamma_b}$ d'où (avec $\gamma_b = 1.5$):

$$V_u \leq 0.4 ab_o \frac{f_{cj}}{\gamma_b} = 0.267 ab_o f_{cj}$$

$$V_u \leq 0.267 ab_o f_{cj}$$

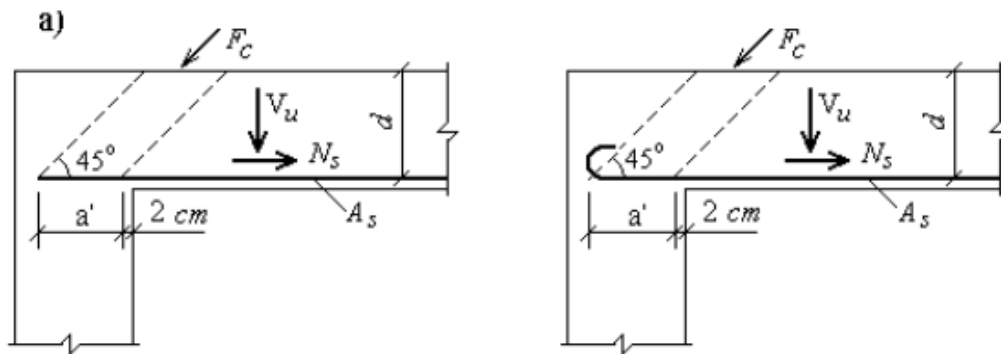


Figure II.3 Poutre à nervure rectangulaire reposant sur un appui ou sur un mur

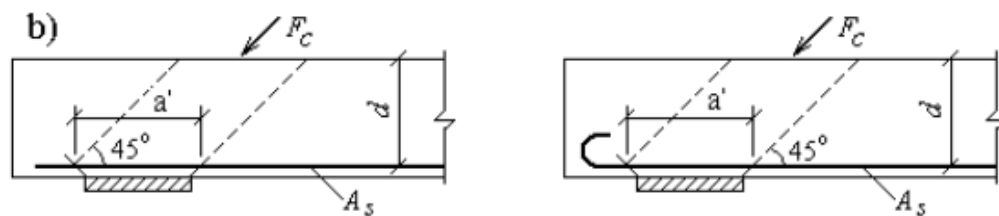
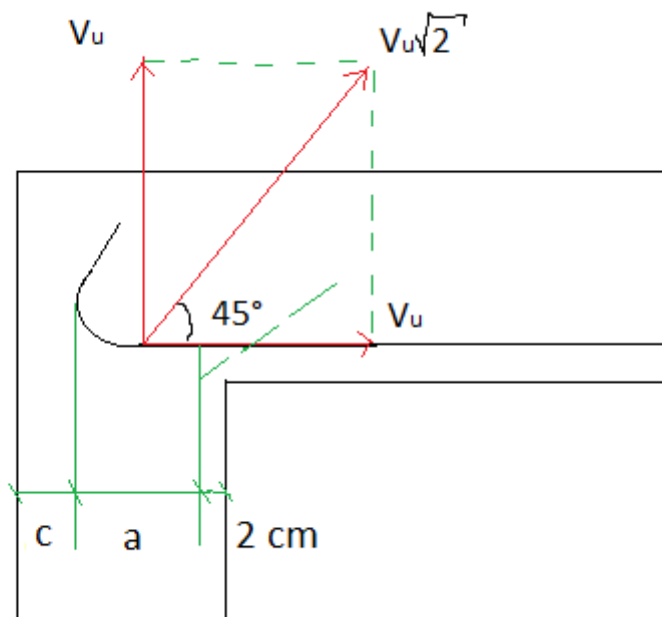


Figure II.4 Poutre à nervure rectangulaire reposant sur un appareil d'appui

Les valeurs à considérer pour a sont indiquées sur la fig. 5.14, avec au maximum, $a = 0,9 d$.
Donc

$$\frac{V_u}{0.267 ab_0 f_{cj}} \leq a \leq 0.9d$$



$$a = \text{coté de poteau} - c - 2 \text{ cm}$$

II.7.2 Vérification de la Section minimale d'armature longitudinale inférieure sur appui de rive:

L'influence de l'effort tranchant sur les armatures longitudinales inférieures peut être examinée de la manière suivante. Soit au nu d'un appui simple l'effort tranchant a une valeur V_u .

A la force de compression $V_u\sqrt{2}$ existant dans la bielle de béton à 45° , va s'opposer une réaction $V_u\sqrt{2}$ qui peut être décomposée en une force verticale V_u , équilibrée par les armatures transversales, et une force horizontale V_u qui devra être équilibrée par les armatures longitudinales. Par conséquent, si dans la section située au nu de l'appui on n'a pas besoin d'armature longitudinale vis-à-vis du moment de flexion, par contre, la prise en compte de l'effort tranchant impose que l'on ait dans cette section des armatures longitudinales d'aire A_s , telle que :

$$A_s \geq \frac{V_u \gamma_s}{f_e}$$

Pour les Appuis intermédiaires

$$A_s \geq \frac{1.15}{f_e} \left(V_u - \frac{M_u}{0.9d} \right)$$

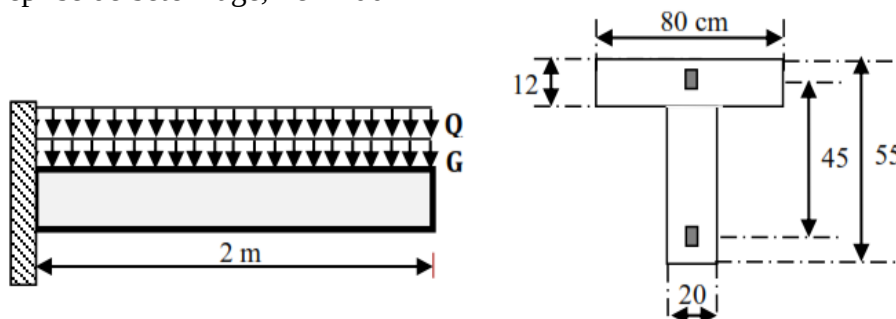
II.8. Application

Exercice 1

Soit une poutre console en béton armé de 2 m de portée et de section en T, soumise à une combinaison d'actions permanente et d'exploitation comme le montre la figure ci-contre, on vous demande de :

- 1) calculer le ferrailage longitudinal de cette console à l'E.L.U.
- 2) calculer le ferrailage transversal de cette console

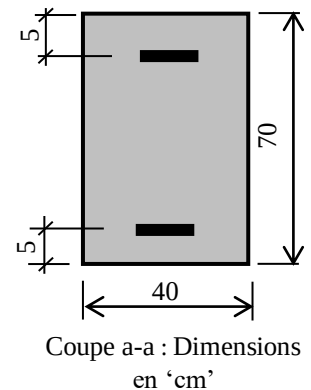
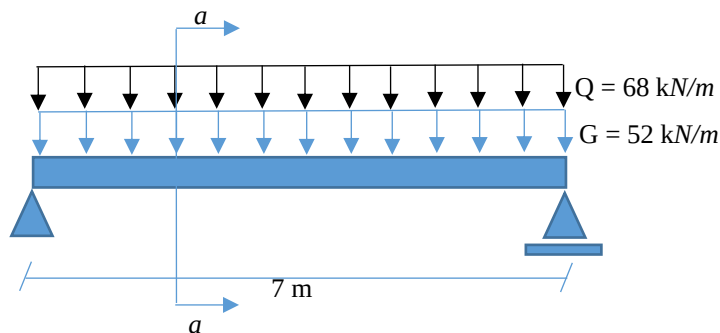
Données : $G = 25 \text{ kN/m}$ (y compris le poids propre de la poutre). et $Q = 20 \text{ kN/m}$, $f_{c28} = 20 \text{ MPa}$, Il y a reprise de bétonnage, Fe E400



Exercice 2

Une poutre de section rectangulaire de dimensions $b \times h = 40 \times 70 \text{ cm}^2$ et de la portée $l = 7 \text{ m}$ est soumise à l'action des charges uniformément réparties: permanentes $G = 52 \text{ kN/m}$, exploitation $Q = 68 \text{ kN/m}$ (les valeurs caractéristiques des charges).

1. Calculer les efforts internes (M et T) à l'état limite ultime (E.L.U) de la poutre.
2. Déterminer les armatures longitudinales à E.L.U de la poutre.
3. Calculer les armatures transversales sachant que $\alpha = 90^\circ$.
4. Vérifier les abouts de la poutre lorsqu'elle est solidaire d'un poteau de section $(30 \times 30) \text{ cm}^2$
5. Présenter le ferrailage complet de la poutre Situation durable, Fissuration Non Préjudiciable.



Exercice 1

1) Calcul des efforts internes (M et V) à l'état limite ultime (E.L.U) de la poutre

Les charges de calcul sont:

$$N_u = 1,35 G + 1,5 Q = 1,35 \times 25 + 1,5 \times 20 = 63.75 \text{ kN/m.}$$

$$N_s = G + Q = 25 + 20 = 45 \text{ kN/m.}$$

$$M = -N_u l^2 / 8$$

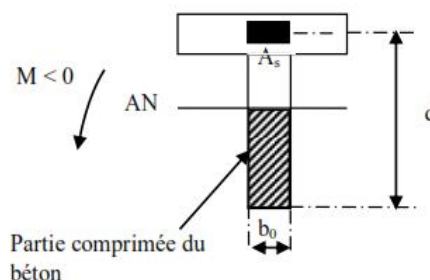
$$M_u = -63.75 \times 2^2 / 8 = -127.5 \text{ kN.m}$$

$$M_s = -45 \times 2^2 / 8 = -90 \text{ kN.m}$$

$$V_u = N_u l$$

$$V_u = 63.75 \times 2 = 127.5 \text{ kN}$$

Puisque le moment $M < 0$, les fibres tendues dans la section en Té seront en haut par rapport à l'A.N. et les fibres Comprimées seront en bas donc la forme en Té sera dans la partie tendue qui est selon les hypothèses du BAEL à l'ELU négligée → le calcul se fait pour une section rectangulaire (b_0, h).



Calcul des armatures longitudinales

$$\mu = \frac{Mu}{bd^2 f_{bu}} = \frac{127.5 * 10^3}{20 * 50^2 * 11.33} = 0.225$$

$$\mu > 0.186 \Rightarrow \text{Pivot B}$$

$$\mu_l = 0.8\alpha_l(1 - 0.4\alpha_l) = 0.392$$

$$\alpha_l = \frac{3.5}{3.5 + \varepsilon_l}$$

$$\varepsilon_{el} = \frac{f_e}{\gamma_s E_s}$$

$$\varepsilon_{el} = \frac{400}{1.15 * 2 * 10^5} = 1.73\text{‰}$$

$$\alpha_l = \frac{3.5\text{‰}}{3.5\text{‰} + \varepsilon_{sel}} = \frac{3.5}{3.5 + 1.74} = 0.668$$

$$\mu_l = 0.8 * 0.668(1 - 0.4 * 0.668) = 0.392$$

$$\mu = 0.225 < \mu_l = 0.392 \Rightarrow A_{sc} = 0$$

$$\alpha = 1.25(1 - \sqrt{1 - 2\mu})$$

$$\alpha = 1.25(1 - \sqrt{1 - 2 * 0.225}) = 0.323$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_s &= \frac{1 - 0.323}{0.323} 3.5\text{‰} = 7.34\text{‰} > \varepsilon_s \\ &= 1.74\text{‰} \Rightarrow \sigma_s = \frac{f_e}{\gamma_s} \\ &= 347.82 \text{ MPa} \end{aligned}$$

$$A_s = \frac{0.8 \alpha b d f_{bu}}{F_e / \gamma_s}$$

$$A_s = \frac{0.8 * 0.323 * 20 * 50 * 11.33}{347.82} = 8.42 \text{ cm}^2$$

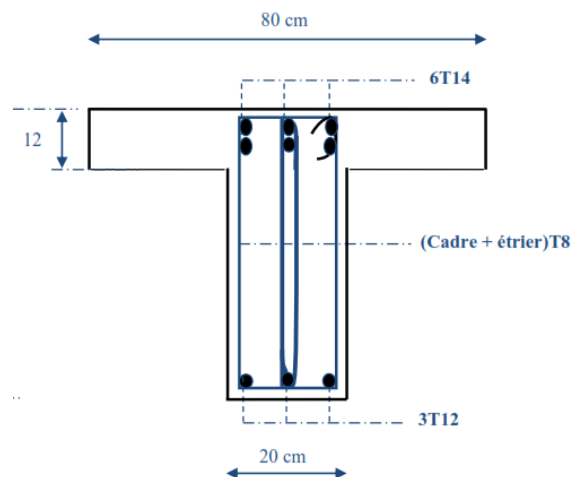
Condition de Non-fragilité du béton :

$$A_{smin} = 0.23 b d \frac{f_{t28}}{f_e}$$

$$A_{smin} = 0.23 * 20 * 50 \frac{1.8}{400} = 1.04 \text{ cm}^2$$

Dispositions constructives :

L'armature supérieure :



$$A_{\text{sadopté}} = 3 \text{ T14} = 9.24 \text{ cm}^2$$

L'armature inferieure :

$$A_{\text{sadopté}} = 3 \text{ T12} = 3.39 \text{ cm}^2$$

3. Vérification des contraintes à l'ELS :

$$A_s = 9.24 \text{ cm}^2 \text{ et } M_s = 90 \text{ kN.m}$$

Puisque la fissuration est peu préjudiciable, il faut vérifier la condition : $\sigma_{bc} < 0.6f_{28} = 12$

MPa, et $\sigma_s \leq \bar{\sigma}_s = 201.63 \text{ MPa}$.

Axe neutre élastique à l'ELS :

$$by^2 + 30(A_s + A_{sc})y - 30(dA_s + d'A_{sc}) = 0$$

Puisque $A_{sc} = 0$;

$$by^2 + 30A_sy - 30dA_s = 0$$

$$20y^2 + 277.2y - 13860 = 0 \Rightarrow y = 20.29 \text{ cm}$$

$$I = \frac{by^3}{3} + 15[A_s(d-y)^2 + A_{sc}(y-d')^2] \Rightarrow$$

$$I = \frac{20 * 20.29^3}{3} + 15 * 9.042(50 - 20.29)^2 \Rightarrow I = 178027.15 \text{ cm}^4$$

$$\sigma_{bc} = k.y = \frac{M_{ser}}{I}y = 10.26 \text{ MPa} < \bar{\sigma}_{bc} = 12 \text{ MPa}$$

$$\sigma_s = n.k.(d-y) = 15 \frac{M_{ser}}{I}(d-y) = 225.3 \text{ MPa} < \bar{\sigma}_s = 201.63 \text{ MPa}$$

4. Calcul du ferrailage transversal :

Vérification de la contrainte de cisaillement:

$$\tau_u = \frac{127.5}{200 * 5000} = 1.275 \text{ MPa}$$

$$\bar{\tau}_u = \min\left\{0.2 \frac{20}{1.5}; 5 \text{ MPa}\right\} = 2.67 \text{ MPa}$$

$$\tau_u = 1.275 \text{ MPa} < \bar{\tau}_u = 2.67 \text{ MPa} \dots CV$$

Diamètre maximal ϕ_t des armatures transversales $\phi_t \leq \min\left\{\frac{h}{35}; \phi_l; \frac{b_0}{10}\right\}$

$$\phi_t = 8 \text{ mm} < \min\left\{\frac{h}{35}; \phi_l; \frac{b_0}{10}\right\} = 1.4 \text{ cm}$$

Espacement minimal:

Comme armature transversale nous prenons des étriers en acier de $\varnothing 8 \text{ mm}$ de diamètre d'après les conditions ci-dessus. Vu que dans une section transversale on a 4 barres verticales, on trouve

$$A_t = 2.1 \text{ cm}^2$$

$$\rho_t \geq \frac{\tau_u - \tau_0}{0.9 \frac{f_e}{\gamma_s} (\sin \alpha + \cos \alpha)}$$

$$\tau_0 = 0.3 f_{tj}^* k \text{ et } f_{tj}^* = \min\{f_{tj}; 3.3 \text{ MPa}\}$$

$$f_{tj}^* = \min\{1.8; 3.3 \text{ MPa}\} = 1.8 \text{ MPa}$$

$$\tau_0 = 0.3 * 1.8 * 1 = 1.17 \text{ MPa}$$

$$\rho_t = \frac{1.275 - 0.54}{0.9 * 347.82} = 23.48 * 10^{-4}$$

Section minimale d'armatures d'âme (condition de non-fragilité)

Cette valeur de ρ_t doit être au moins égale aux valeurs minimales

$$\frac{A_t}{b_0 S_t} \geq \text{Max} \left\{ \tau_u / 2 f_e ; \frac{0.4}{f_e} \text{MPa} \right\}$$

$$\frac{A_t}{b_0 S_t} \geq \text{Max} \left\{ \frac{1.275}{2 * 400} ; \frac{0.4}{400} \text{MPa} \right\}$$

$$\frac{A_t}{b_0 S_t} \geq \text{Max} \{ 0,001594 ; 0,001 \} = 15.94 * 10^{-4}$$

$$\frac{A_t}{b_0 S_t} = 53.03 * 10^{-4} \geq \text{Max} \left\{ \tau_u / 2 f_e ; \frac{0.4}{f_e} \text{MPa} \right\} = 27.5 * 10^{-4} \quad \text{Condition de non fragilité du béton vérifiée}$$

Exercice 02

1) Calcul des efforts internes (M et V) à l'état limite ultime (E.L.U) de la poutre

Les charges de calcul sont:

$$N_u = 1,35 G + 1,5 Q = 1,35 \times (0,4 * 0,7 * 25 + 52) + 1,5 \times 68 = 181.65 \text{ kN/m.}$$

Calcul le moment fléchissant de la poutre (au milieu de la travée) :

$$M_u = N_u l^2 / 8 = 181.65 \times 7^2 / 8 = 1112.61 \text{ kN m}$$

Calcul l'effort tranchant :

$$V = N_u l / 2 = 181.65 \times 7 / 2 = 635.77 \text{ kN}$$

2) Calcul des armatures longitudinales

$$\mu = \frac{M_u}{b d^2 f_{bu}} = \frac{1112.61 * 10^{-3}}{0.3 * 0.65^2 * 11.33} = 0.58$$

$$\mu_l = 0.8 \alpha_l (1 - 0.4 \alpha_l) = 0.392$$

$$\mu > \mu_l \Rightarrow A_{sc} \neq 0$$

$$M_{bl} = 0.8 b \alpha_l d^2 f_{bu} (1 - 0.4 \alpha_l)$$

$$\alpha_l = \frac{3.5\%}{3.5\% + \epsilon_{sel}} = \frac{3.5}{3.5 + 1.74} = 0.668$$

$$M_{bl} = 0.8 * 0.4 * 0.668 * 0.65^2 * 11.33 (1 - 0.4 * 0.668) * 10^3 = 750.09 \text{ kN.m}$$

$$M_{bl} = 750.09 \text{ kN.m} > 0.6 M_{bl} = 667.56 \text{ kNm}$$

$$A_{sc} = \frac{M_u - M_{bl}}{F_e / \gamma_s (d - d')} = \frac{(1112.61 - 750.09) 10^{-3}}{347.82 (0.65 - 0.05)} = 17,37. 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$A_{sc} = 17.37 \text{ cm}^2$$

$$A_{sc} = 4T20 + 4T14 = 18.71 \text{ cm}^2$$

$$A_s = \frac{F_{bl} + A_{sc} \cdot Fe / \gamma_s}{Fe / \gamma_s}$$

$$A_s = \frac{0.8 * 0.668 * 0.4 * 0.65 * 11.33 + 17,37 \cdot 10^{-4} * 347.82}{347.82} = 27,91 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$A_s = 27,91 \text{ cm}^2$$

$$A_s = 4T20 + 8T16 = 28.64 \text{ cm}^2$$

$$A_{smin} = \max(2.8; 2.69) = 2.8 \text{ cm}^2 < A_{st} = A_{sc} + A_s = 46.62 \text{ cm}^2 \quad \text{CV}$$

3) Calcul des armatures transversales

Vérification de la contrainte tangentielle avec celle du béton admissible :

$$\tau_u = \frac{V_u}{b_0 d} = \frac{635.77}{0.4 * 0.65} = 2.44 \text{ MPa}$$

Donc nous avons que les conditions sont satisfaites, en effet :

$$\bar{\tau}_b = \min \left\{ 0.2 \frac{20}{1.5} ; 5 \text{ MPa} \right\} = \min \{ 2.67 ; 5 \text{ MPa} \} = 2.67 \text{ MPa}$$

$$\tau_u = \frac{V_u}{b_0 d} = 2.44 \text{ MPa} \leq \bar{\tau}_b = 2.67 \text{ MPa}$$

C'est-à-dire que les dimensions de la section transversale de la poutre sont suffisantes.

Calcul le ferrailage transversal

Pour le calcul le ferrailage transversal, on utilise l'effort tranchant réduit $V_u \left(\frac{h}{2} \right)$

$$V_u = -90.825 x - 635.775$$

$$X = 0.7/2 = 0.35$$

$$V_u \left(\frac{h}{2} \right) = V_u(0.35) = -90.825 x 0.35 - 635.775 = -572.198 \text{ kN}$$

L'effort tranchant maximal est égal à : $V_u \left(\frac{h}{2} \right) = 572.198 \text{ kN}$

$$\tau_u \left(\frac{h}{2} \right) = 2.2 \text{ MPa}$$

$$\rho_t \geq \frac{\tau_u - \tau_0}{0.9 \frac{f_e}{\gamma_s} (\sin \alpha + \cos \alpha)}$$

$$\tau_0 = 0.3 f_{tj}^* k \text{ et } f_{tj}^* = \min \{ f_{tj} ; 3.3 \text{ MPa} \}$$

$$f_{tj}^* = \min \{ 1.8 ; 3.3 \text{ MPa} \} = 1.8 \text{ MPa}$$

$$\tau_0 = 0.3 * 1.8 * 1 = 1.17 \text{ MPa}$$

$$\rho_t = \frac{2.2 - 0.54}{0.9 * 347.82} = 53.03 * 10^{-4}$$

Section minimale d'armatures d'âme (condition de non-fragilité)

Cette valeur de ρ_t doit être au moins égale aux valeurs minimales

$$\frac{A_t}{b_0 S_t} \geq \text{Max} \left\{ \tau_u / 2 f_e ; \frac{0.4}{f_e} \text{MPa} \right\}$$

$$\frac{A_t}{b_0 S_t} \geq \text{Max} \left\{ \frac{2.2}{2 * 400} ; \frac{0.4}{400} \text{MPa} \right\}$$

$$\frac{A_t}{b_0 S_t} \geq \text{Max} \{ 0.00275 ; 0.001 \} = 27.5 * 10^{-4}$$

$$\frac{A_t}{b_0 S_t} = 53.03 * 10^{-4} \geq \text{Max} \left\{ \tau_u / 2 f_e ; \frac{0.4}{f_e} \text{MPa} \right\} = 27.5 * 10^{-4} \quad \text{Condition de non fragilité du béton vérifiée}$$

Détermination du diamètre des armatures transversales $\varnothing_t$

Diamètre $\varnothing_t$ des armatures transversales est satisfait à la condition suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\varnothing_l}{3} &\leq \varnothing_t \leq \text{Min} \left\{ \frac{h}{35} ; \varnothing_l ; \frac{b_0}{10} \right\} \\ \Rightarrow \frac{20}{3} &\leq \varnothing_t \leq \text{Min} \left\{ \frac{700}{35} ; 20 ; \frac{400}{10} \right\} \\ &\Rightarrow 6.67 \leq \varnothing_t \leq 20 \end{aligned}$$

Comme armature transversale nous prenons des étriers en acier de $\varnothing 8 \text{ mm}$ de diamètre d'après les conditions ci-dessus. Vu que dans une section transversale on a 4 barres verticales, on trouve $A_t = 2.1 \text{ cm}^2$

Espacement entre les barres transversales :

Alors, l'espacement des étriers est égal à :

$$\rho_t = \frac{A_t}{b_0 S_t} \Rightarrow S_t = \frac{A_t}{b_0 \rho_t} = \frac{2.1}{40 * 53.03 * 10^{-4}} = 9.9 \text{ cm}$$

$$S_t \leq \text{Min} \{ 0.9d ; 40 \text{ cm} \} \Rightarrow S_t \leq \text{Min} \{ 58 ; 40 \text{ cm} \} = 40 \text{ cm}$$

Cet espacement ne dépasse pas des valeurs maximales, Donc nous prenons $S_t = 8 \text{ cm}$.

La répartition des étriers suivant la longueur de la poutre est prise d'après la méthode pratique de Caquot. Le premier cadre doit être placé entre le nu de l'appui et $S_t / 2 = 8 / 2 = 4 \text{ cm}$.

L'espacement doit être répété de 3 fois (vu que la moitié de la portée de la poutre :

$l/2 = 7/2 = 3.5 \text{ m}$. L'espacement des cadres suivants est 8 cm (4 fois), ensuite $9, 10, 11, 13, 16, 20 \text{ cm}$ (4 fois),

5 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10 ; 11 ; 13 ; 16 ; 20 ; 25 ; 35 ; 40 cm.

1	4	4
4	8	32
4	9	36
4	10	40
4	11	44
4	13	52
4	16	64
4	20	80
		357

4. Vérifier les abouts de la poutre lorsqu'elle est solidaire d'un poteau de section (30 x 30) cm²

Vérification de La profondeur utile d'appui :

$a = \text{coté de poteau} - c - 2 \text{ cm}$

$a = 40 - 5 - 2 = 33 \text{ cm}$

$$\frac{V_u}{0.267 \bar{b} f_{c28}} \leq a \leq 0.9d$$

$$\frac{635.77}{0.267 * 0.3 * 20} \leq a \leq 0.9 * 0.65 \Rightarrow 100 * \frac{635.77 * 10^{-3}}{0.267 * 0.3 * 20} \leq a \leq 100 * 0.9 * 0.65$$

$$\Rightarrow 29.76 \text{ cm} \leq a \leq 58.5 \text{ cm} \quad \text{CV}$$

Vérification de la compression des bielles

$$\sigma_{bc} = \frac{2V_u}{\bar{b}a} \leq 0.8 \frac{f_{c28}}{\gamma_b}$$

$$\sigma_{bc} = \frac{2 * 635.77 * 10^{-3}}{0.4 * 0.33} \leq 0.8 \frac{20}{1.5} \Rightarrow 9.63 \text{ MPa} < 10.67 \text{ MPa}$$

Vérification de la Section minimale d'armature longitudinale inférieure sur appui de rive:

$$A_s = \frac{V_u \gamma_s}{f_e}$$

$$A_s = \frac{635.77 * 1.15 * 10^{-3}}{400} = 18.28 * 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$A_s = 18.28 \text{ cm}^2$$

La quantité d'acier inférieure au niveau de l'appui $A_s = 4T20 + 8T16 = 28.64 \text{ cm}^2$ est suffisante, donc on maintient le ferrailage calculé à la flexion simple, donc ce ferrailage est suffisant pour équilibrer le béton vis-à-vis de l'effort tranchant.

Chapitre III : Calcul de sections en B.A soumises à la flexion composée

Chapitre III : Calcul de sections en B.A soumises à la flexion composée

III .1. Définitions

Une section est soumise à la flexion composée lorsqu'elle subit :

- Un effort normal N appliqué au centre de gravité G_0 ; et un moment de flexion M_G par rapport à G_0 ;
- Un effort normal N excentré par rapport au centre de gravité G_0 d'une quantité e (excentricité), le moment induit valant alors : $M_g = N.e$

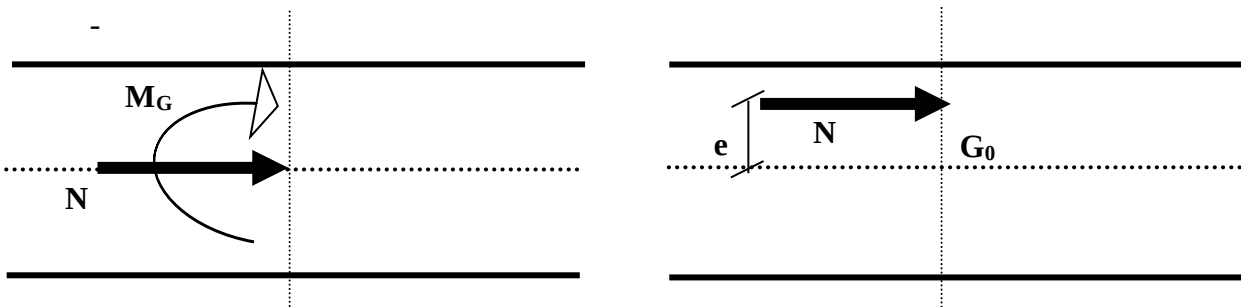


Figure 3.1. Section soumise à la flexion composée

III.2. Section Entièrement tendue

Une section entièrement tendue si elle est soumise à un effort normal de traction et si le centre de traction est situé entre les nappes d'armatures. $e_1 \leq |v_i|$ ou bien $e_1 \leq |v_s|$

III.2.1 Etat Limite Ultime d'une section entièrement tendue

Le béton étant entièrement tendu, il n'intervient pas dans la résistance de la section, donc dans les calculs qui sont ainsi valables quelle que soit la forme de la section (sauf pour calculer la section minimale d'armatures).

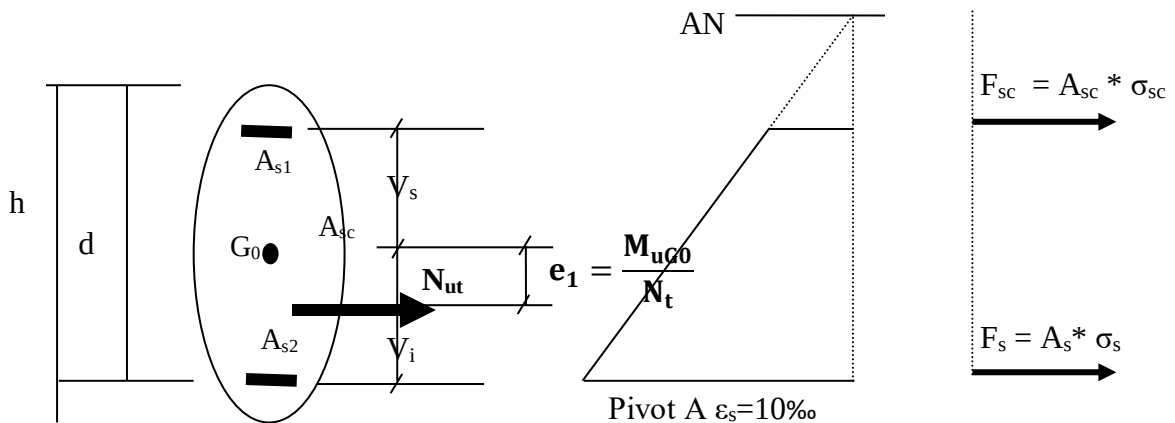


Figure 3.1. Schéma de calcul d'une section Entièrement tendue

Equations D'équilibre :

$$\begin{aligned} \text{Force : } N_{ut} &= F_s + F_{sc} \\ &= \sigma_{s1} A_{s1} + \sigma_{s2} A_{s2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Moment: } M_{ut} &= M_R \\ &= N_{ut} \cdot e_{AS} \\ N_{ut} \cdot e_{AS} &= \sigma_{s1} A_{s1} (d - d') \end{aligned}$$

En faisons travailler les armatures à leur contrainte maximales, on trouve la solution économique, qui permet de résoudre les équations :

$$A_{s1} = \frac{N_{ut} \cdot e_{AS}}{\sigma_{s1} (d - d')}$$

$$A_{s2} = \frac{1}{\sigma_{s2}} (N_{ut} - \sigma_{s1} A_{s1})$$

La section totale des armatures tendues doit répondre à la condition de non fragilité :

$$A_{st} = A_{s1} + A_{s2} \geq A_b \frac{f_{t28}}{f_e} = A_{smin}$$

III.2.2 Etat Limite de Service d'une section entièrement tendue

A) Vérification

Le béton tendu n'intervient pas, il suffit de vérifier que les contraintes dans l'acier sont inférieures à $\bar{\sigma}_s$ dans le cas de la fissuration préjudiciable ou très préjudiciable.

B) Dimensionnement :

Puisque le béton tendu est aussi négligé à l'E.L.S, l'effort extérieur N_{ser} est équilibré uniquement par les efforts élastiques dans les aciers tendus (A_{1ser} et A_{2ser}) comme la montre la Figure

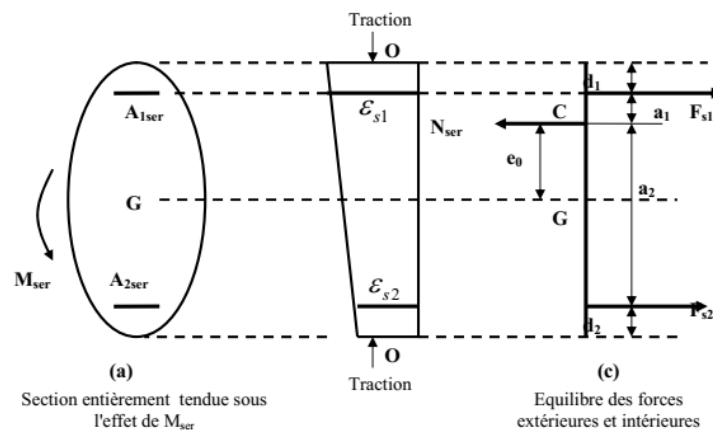


Figure.III.3. Distribution des déformations et des efforts à l'ELS dans une section soumise à la flexion composée

Solution économique : $\sigma_s = \bar{\sigma}_s$

En écrivant successivement le moment par rapport à A_{sser1} et A_{sser2} , il vient :

$$\begin{aligned}\sigma_{s1} &= \sigma_{s2} = \bar{\sigma}_s \\ F_{s1} &= A_{1ser} \sigma_{s2} = A_{1ser} \bar{\sigma}_s \\ F_{s2} &= A_{2ser} \sigma_{s2} = A_{2ser} \bar{\sigma}_s\end{aligned}$$

On écrit que le moment par rapport à une des nappes est nul puisque la section est en équilibre :

$$\begin{aligned}F_{s1}(a_1 + a_2) &= N_{ser}a_2 \Rightarrow A_{1ser} \bar{\sigma}_s(a_1 + a_2) = N_{ser}a_2 \\ A_{1ser} &= \frac{N_{ser}a_2}{(a_1 + a_2)\bar{\sigma}_s}\end{aligned}$$

Pour un raisonnement analogue, on trouve :

$$A_{2ser} = \frac{N_{ser}a_1}{(a_1 + a_2)\bar{\sigma}_s}$$

III.3 Section Partiellement comprimée

Dans ce cas, on a $0 \leq y_u \leq h$ ($0 \leq \alpha \leq h/d$), et on est dans les domaines des Pivots A et B. Le diagramme de déformation est compris entre les deux diagrammes limites AK et BC, comme définie sur la Figure 3.4. Lorsque $0 \leq y_u \leq d$ les aciers tendus sont nécessaires et si $d \leq y_u \leq h$ ils ne sont plus nécessaires (du moins, ils sont comprimés).

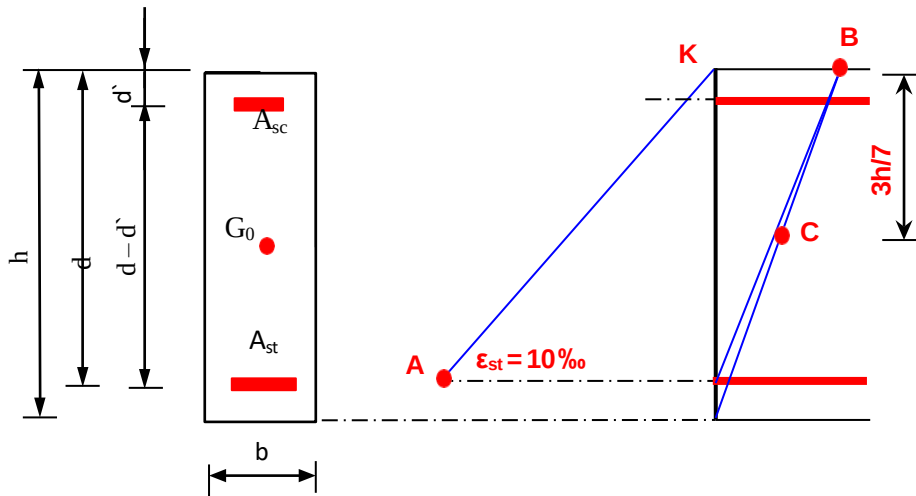


Figure 3.4. Droites de déformation en flexion composée dans le cas où la section est partiellement tendue/comprimée.

Les démarches de calcul sont les mêmes celles du cas de la flexion simple.

Equations D'équilibre :

$$\begin{aligned}\text{Force : } N_{ut} &= F_{bc} + F_{sc} - F_s \\ N_{ut} &= 0.8abdf_{bu} + \sigma_{sc}A_{sc} - \sigma_sA_s\end{aligned}$$

Moment: $M_{ut} = M_R$

$$= N_{ut} \cdot e_{AS}$$

$$= 0.8\alpha b d^2 f_{bu} (1 - 0.4\alpha) + \sigma_{sc} A_{sc} (d - d')$$

$$= 0.8\alpha b d f_{bu} + \sigma_{sc} A_{sc} - \sigma_s A_s - N_{ut} = 0$$

$$= 0.8\alpha b d f_{bu} + \sigma_{sc} A_{sc} - \sigma_s \left(A_s + \frac{N_{ut}}{\sigma_s} \right) = 0$$

On fait un changement variable $A_{s1} = \left(A_s + \frac{N_{ut}}{\sigma_s} \right)$ et on cherche la section A_{s1}

III.4 Section Entièrement comprimée

On se trouve dans cette situation si $M_{ua} > M_{BC}$, N_u étant alors un effort de compression, donc on se trouve au pivot C.

Le calcul manuel est pénible, même pour une section rectangulaire, car il n'est plus possible d'admettre pour la distribution des contraintes du béton le diagramme rectangulaire simplifié. Il vaut mieux, en ce cas, avoir recours à des abaques (**diagrammes d'interaction**) qui ont été établis, à l'aide d'un programme de calcul, pour des formes de section particulières.

Dans cette section, on présente l'organigramme de calcul des armatures, et qui résume la marche à suivre au pivot C.

Dans ce cas le diagramme de déformation passe par le pivot C et la réglementation ne recommande plus l'utilisation du diagramme rectangle simplifié, on doit alors utiliser le diagramme parabole-rectangle.

Au Pivot C : * sur la fibre la plus comprimée : $2‰ \leq \varepsilon_{bc} \leq 3.5‰$

* sur la fibre la plus comprimée : $0‰ \leq \varepsilon_{bc} \leq 2‰$

Concédons une section rectangulaire doublement armé (A_s , A_{sc}) soumise à une sollicitation (N_u , M_{G0}).

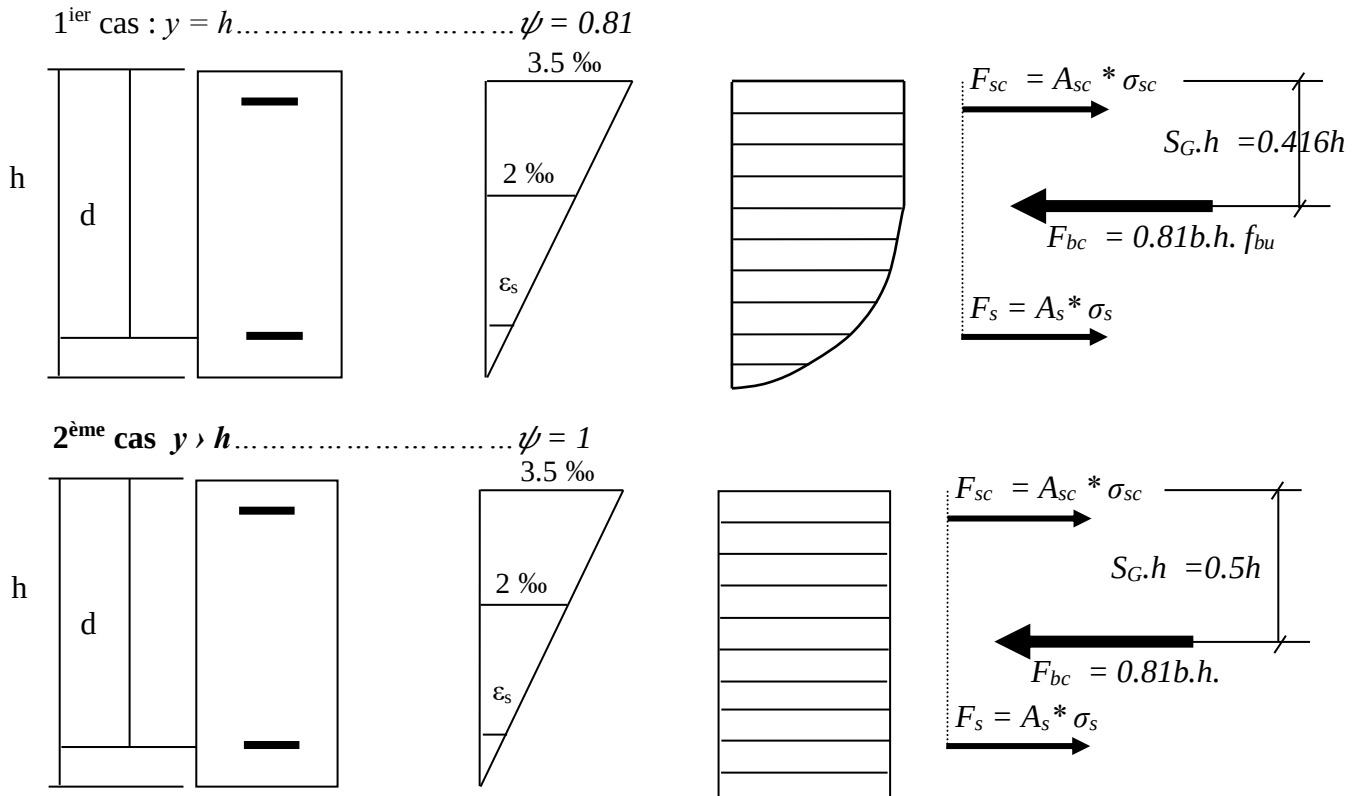


Figure 3.5. Schéma de calcul d'une section entièrement tendue

Entre les deux cas extrêmes, le diagramme de l'effort normal interne repris par le béton seul est :

$$F_{bc} = \psi b h f_{bu} \text{ avec } 0.81 \leq \psi \leq 1$$

Et le point d'application

$$S_G = 0.857 - \frac{0.357}{\psi}$$

Une section entièrement comprimée doit être répondre aux deux conditions qui sont :

$$F_{bc} \geq 0.81b.h.f_{bu} \quad \text{Et} \quad \psi \geq 0.81$$

ψ est le coefficient de remplissage

Discussion sur la valeur de ψ :

1. Lorsque $0.81 \leq \psi < 1$: Dans ce cas la section de béton peut être équilibré sans armatures inférieures c.-à-d. $A_s = 0$; $A_{sc} \neq 0$

Equations D'équilibre :

$$\begin{aligned} \text{Force : } N_u &= F_{bc} + F_s + F_{sc} \\ &= \psi b h f_{bu} + \sigma_s A_s + \sigma_{sc} A_{sc} \end{aligned}$$

$$\text{Moment: } M_{uR} = N_u \cdot e_{AS}$$

$$N_u \cdot e_{AS} = \psi \cdot b \cdot h \cdot f_{bu} \cdot (d - S_G h) + \sigma_{sc} A_{sc} (d - d')$$

On a deux équations et trois inconnus, la solution la plus économique est celle $A_s = 0$

$$(12) \equiv A_{sc} = N_u - \psi \cdot b \cdot h \cdot f_{bu}$$

ET

$$S_G = 0.857 - \frac{0.357}{\psi}$$

$$(12) \equiv N_u \cdot e_{AS}$$

$$= \psi \cdot b \cdot h \cdot f_{bu} \cdot \left(d - \left(0.857 - \frac{0.357}{\psi} \right) h \right) + (N_u - \psi \cdot b \cdot h \cdot f_{bu}) (d - d') \dots \dots (14)$$

$$(7) \equiv M_u = \psi \cdot b \cdot h^2 \cdot f_{bu} \cdot \left(\frac{d}{h} - \left(0.857 - \frac{0.357}{\psi} \right) \right) + N_u (d - d') - \psi \cdot b \cdot h^2 \cdot f_{bu} \cdot \left(\frac{d}{h} - \frac{d'}{h} \right)$$

$$(7) \equiv M_u - N_u (d - d') = \psi \cdot b \cdot h^2 \cdot f_{bu} \cdot \left(\frac{d}{h} - \left(0.857 - \frac{0.357}{\psi} \right) \right) + - \psi \cdot b \cdot h^2 \cdot f_{bu} \cdot \left(\frac{d}{h} - \frac{d'}{h} \right)$$

$$(7) \equiv \frac{M_u - N_u (d - d')}{b \cdot h^2 \cdot f_{bu}} = \psi \cdot \left(\frac{d}{h} - \left(0.857 - \frac{0.357}{\psi} \right) \right) + - \psi \cdot \left(\frac{d}{h} - \frac{d'}{h} \right)$$

$$(7) \equiv \frac{M_u - N_u (d - d')}{b \cdot h^2 \cdot f_{bu}} = \psi \cdot \left(\frac{d}{h} - \frac{d}{h} + \frac{d'}{h} - \left(0.857 - \frac{0.357}{\psi} \right) \right)$$

$$(7) \equiv \frac{M_u - N_u (d - d')}{b \cdot h^2 \cdot f_{bu}} = \psi \cdot \left(\frac{d'}{h} - \left(0.857 - \frac{0.357}{\psi} \right) \right)$$

$$(7) \equiv \frac{M_u - N_u (d - d')}{b \cdot h^2 \cdot f_{bu}} = \psi \cdot \left(\frac{d'}{h} - 0.857 \right) + 0.357$$

$$\psi = \frac{0.357 + \frac{N_u (d - d') - M_u}{b \cdot h^2 \cdot f_{bu}}}{0.857 - \frac{d'}{h}}$$

Dans ce cas :

$$\varepsilon_{sc} = 2\text{‰} \left[1 + \left(1.719 + \frac{4.09d'}{h} \right) \sqrt{1 - \Psi} \right]$$

Et

$$A_{sc} = \frac{N_u - \psi b h f_{bu}}{\sigma_{sc}}$$

$$A_s = 0$$

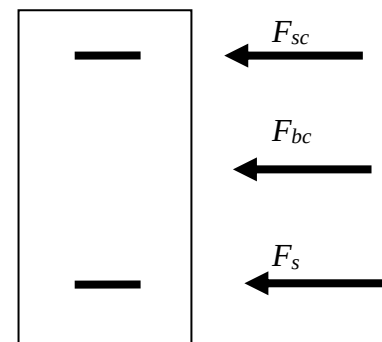
2. Lorsque $\psi \geq 1$: Dans ce cas la section de béton ne peut être assurée que si l'on introduit des armatures inférieures $A_s \neq 0$ et $A_{sc} \neq 0$

Calcul des armatures lorsque $\psi \geq 1$

Equations D'équilibre :

Dans ce cas : $\varepsilon_{sc} = \varepsilon_{bc} = \varepsilon_s = 2\text{‰}$

$\sigma_{bc} = f_{bu}$ et $\sigma_s = \sigma_{sc} = \sigma_s 2\text{‰}$



Force : $N_u = F_{bc} + F_s + F_{sc}$
 $= b h f_{bu} + \sigma_s A_s + \sigma_{sc} A_{sc}$

Moment : $M_{uR} = N_u \cdot e_{AS}$

$$N_u \cdot e_{AS} = b h f_{bu} * \left(d - \frac{h}{2} \right) + \sigma_{sc} A_{sc} (d - d')$$

$$A_{sc} = \frac{N_u \cdot e_{AS} - b h f_{bu} * \left(d - \frac{h}{2} \right)}{\sigma_{sc} (d - d')}$$

$$A_{sc} = \frac{N_u - b h f_{bu} - \sigma_{sc} A_{sc}}{\sigma_{sc}}$$

III.5 Applications

III.5.1 Section Entièrement Tendus

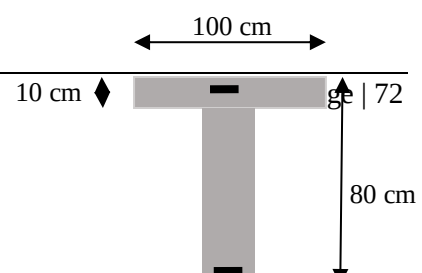
Exercice 1

Une section en béton armé de forme T dont leurs propriétés géométriques sont représentées dans la figure ci-contre. La poutre en question est sollicitée à la flexion composée par un effort normal de **traction** et à un moment de flexion :

La section est soumise à un effort normal de **traction** :

$$N_{u(ELU)} = 1000 \text{ kN} ; N_{s(ELS)} = 450 \text{ kN}$$

$$M_{u(ELU)} = 200 \text{ kNm} ; M_{s(ELS)} = 150 \text{ kNm}$$



2. Calcul à l'ELS

L'excentricité e_s :

$$\text{A l'ELS : } e_s = \frac{M_{ser}}{N} = \frac{150}{450} = 0.33 \text{ m}$$

$$e_{AS} = a_2 = y_g - (e_0 + e) = 47.9 - (0.33 + 0.05) = 22.9 \text{ cm}$$

$$A_{1ser} = \frac{N_{ser} a_2}{(a_1 + a_2) \bar{\sigma}_s}$$

$$\bar{\sigma}_s = \min \left[\frac{2}{3} f_{es}, 110 (\eta f_{tj})^{1/2} \right]$$

$$\bar{\sigma}_s = \min \left[\frac{2}{3} * 400, 110 (1.6 * 2.1)^{1/2} \right] = 201.63 \text{ MPa}$$

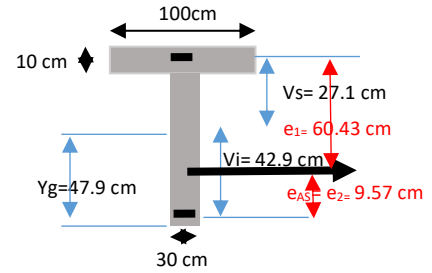
$$A_{1ser} = \frac{0.45 * 9.57}{(60.43 + 9.57) * 201.63} = 3.05 * 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$A_{1ser} = 3.05 \text{ cm}^2$$

$$A_{2ser} = \frac{N_{ser} a_1}{(a_1 + a_2) \bar{\sigma}_s}$$

$$A_{2ser} = \frac{0.45 * 60.43}{(60.43 + 9.57) * 201.63} = 19.27 * 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$A_{2ser} = 19.27 \text{ cm}^2$$



3. Calcul A_{smin} (Condition de non fragilité)

$$A_{smin} = A_b \frac{f_{t28}}{f_e} = (10 * 100 + 30 * 70) \frac{2.1}{400} = 16.27 \text{ cm}^2$$

$$A_{smin} = 16.27 \text{ cm}^2$$

4. Choix de A_{s1} et A_{s2}

$$A_{s1} = \max(A_{u1}; A_{1ser}; A_{smin}) = \max(9.4 \text{ cm}^2; 3.05 \text{ cm}^2; 16.27 \text{ cm}^2) = 16.27 \text{ cm}^2$$

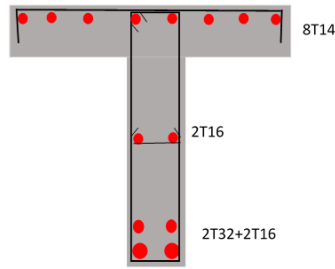
$$A_{s2} = \max(A_{u2}; A_{2ser}; A_{smin}) = \max(19.35 \text{ cm}^2; 19.27 \text{ cm}^2; 16.27 \text{ cm}^2) = 19.35 \text{ cm}^2$$

$$A_{s1} = \max(A_{u1}; A_{1ser}) = \max(9.4 \text{ cm}^2; 3.05 \text{ cm}^2) = 9.4 \text{ cm}^2$$

$$A_{s2} = \max(A_{u2}; A_{2ser}) = \max(19.35 \text{ cm}^2; 19.27 \text{ cm}^2) = 19.35 \text{ cm}^2$$

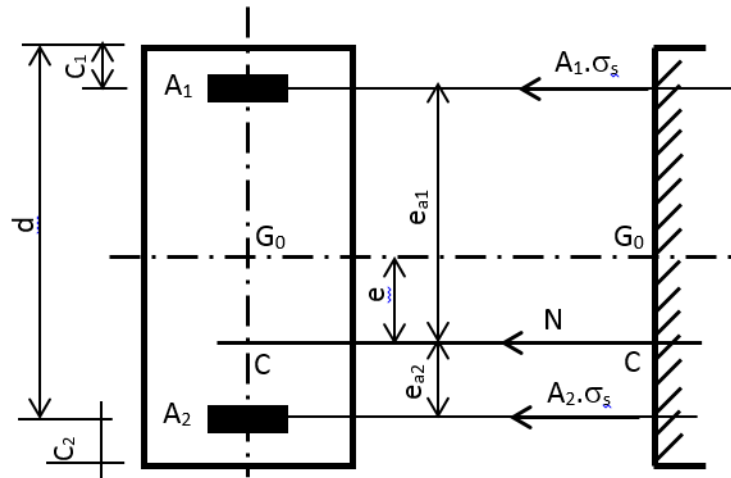
$$A_{s1} + A_{s2} = 9.4 + 19.35 = 28.75 \text{ cm}^2 > A_{smin} = 16.27 \text{ cm}^2$$

Condition de non fragilité vérifiée



Solution de l'exercice 2

Le schéma de calcul de la section



1. Sollicitations

Calcul le moment :

$$S_u = 1,35 g + 1,5 q = 1,35 * (0,4 * 0,8 * 25) + 1,5 * 12 = 28,8 \text{ kN/m},$$

$$S_{ser} = g + q = 0,4 * 0,8 * 25 + 12 = 20 \text{ kN/m}, \quad g = 0,4 * 0,8 * 25 = 8 \text{ kN/m}$$

$$M_u = \frac{s_u l^2}{2} = \frac{28,8 * 4^2}{2} = 230,4 \text{ kNm}$$

$$M_{ser} = \frac{s_{ser} l^2}{2} = \frac{20 * 4^2}{2} = 160 \text{ kNm}$$

Calcul l'effort normal :

$$N_u = 1,35 N = 1,35 * (2656,25 * 0,4 * 0,8) = 1147,5 \text{ kN}$$

$$N_{ser} = (2656,25 * 0,4 * 0,8) = 850 \text{ kN}$$

Excentricités De Calcul

AL'ELU :

$$e_u = \frac{M_u}{N_u} = \frac{230.4}{1147.5} = 20.8 * 10^{-2} m$$

$$e_u = 20.8 \text{ cm}$$

$$e_u = 20.8 \text{ cm} < \frac{h}{2} - c_1 \Rightarrow \text{la section est entierement tendue}$$

$$e_{a1} = 0.5h + e_u - c_2 = 0.5 * 80 + 20.8 - 5 = 55.08 \text{ cm}$$

$$e_{a2} = 0.5h - e_u - c_2 = 0.5 * 80 - 20.8 - 5 = 14.92 \text{ cm}$$

A l'ELS :

$$e_s = \frac{M_{ser}}{N_{ser}} = \frac{160}{850} = 18.82 * 10^{-2} m$$

$$e_s = 18.82 \text{ cm}$$

$$e_{a1} = 0.5h + e_{ser} - c_2 = 0.5 * 80 + 18.82 - 5 = 53.82 \text{ cm}$$

$$e_{a2} = 0.5h - e_{ser} - c_2 = 0.5 * 80 - 18.82 - 5 = 16.18 \text{ cm}$$

2. Ferraillage

A l'ELU :

$$A_{su1} = \frac{N_u a_2}{(a_1 + a_2) \sigma_{s1}}$$

$$A_{su1} = \frac{1.35 * 0.85 * 14.92}{(55.08 + 14.92) * 347.82} = 7.03 * 10^{-4} m^2$$

$$A_{su1} = 7.03 \text{ cm}^2$$

$$A_{su2} = \frac{N_u a_1}{(a_1 + a_2) \sigma_{s1}}$$

$$A_{su2} = \frac{1.35 * 0.85 * 55.08}{(55.08 + 14.92) * 347.82} = 25.96 * 10^{-4} m^2$$

$$A_{su2} = 25.96 \text{ cm}^2$$

A l'ELS :

$$\text{Solution économique : } \overline{\sigma_s} = \min\left(\frac{2}{3} f_e, \max(0.5 f_e, 110 \sqrt{\eta \cdot f_t})\right) = 201.63 \text{ MPa}$$

$$A_{ser1} = \frac{N_u a_2}{(a_1 + a_2)\sigma_{s1}}$$

$$A_{ser1} = \frac{0.85 * 16.18}{(55.08 + 14.92) * 201.63} = 9.74 * 10^{-4} m^2$$

$$A_{su1} = 9.74 cm^2$$

$$A_{ser2} = \frac{N_u a_1}{(a_1 + a_2)\sigma_{s1}}$$

$$A_{ser2} = \frac{0.85 * 53.82}{(55.08 + 14.92) * 201.63} = 32.41 * 10^{-4} m^2$$

$$A_{su2} = 32.41 cm^2$$

Calcul A_{smin} (Condition de non fragilité)

$$A_{smin} = A_b \frac{f_{t28}}{f_e} = (40 * 80) \frac{2.1}{400} = 16.8 cm^2$$

$$A_{smin} = 16.8 cm^2$$

Choix de A_{s1} et A_{s2}

$$A_{s1} = \max(A_{u1}; A_{1ser}; A_{smin}) = \max(7.03 cm^2; 9.74 cm^2) = 9.74 cm^2$$

$$A_{s2} = \max(A_{u2}; A_{2ser}; A_{smin}) = \max(25.96 cm^2; 32.41 cm^2;) = 32.41 cm^2$$

$$A_{s1} + A_{s2} = 9.74 + 32.41 = 42.35 cm^2 > A_{s1} = 16.8 cm^2$$

Condition de non fragilité vérifiée

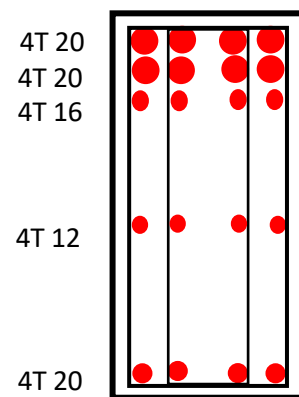
3. Schéma de Ferrailage

Ferrailage adopté (Présentation du ferrailage) :

$$\text{Soit : } A_{s1} = 2 \times 4T20 + 4T16 = 33.15 cm^2$$

$$A_{s2} = 4 T 20 = 12.56 cm^2$$

(Puisque le moment est négatif, on renverse les sections)

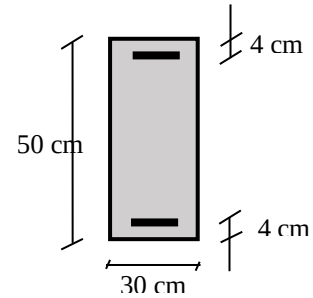


III.5.2 Section Partiellement comprimée

Exercice 3

Soit une section de poutre 30 x 50 cm² (Fig.3), supportant une combinaison de sollicitation durable : $M_u = 240$ kN.m, $N_u = 600$ kN.

1. Quel est le type de section s'agit-il après déformation (SEC, SPC ou SET) ? Justifier votre réponse.
2. Calculer la section d'armature et faire le schéma de ferrailage à l'ELU



Données : $f_{c28} = 25$ MPa ; $F_e E500$; Situation durable

SEC : section entièrement comprimée,

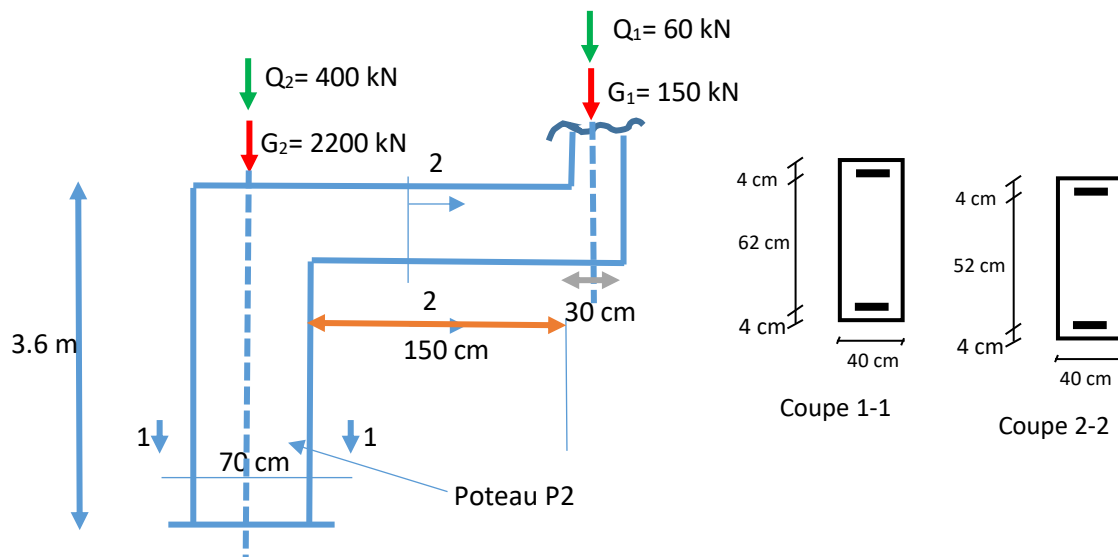
SPC section partiellement comprimée,

SET section entièrement tendue

Exercice 01 :

Exercice 4

Soit un poteau d'habitation soumis des différentes sollicitations comme illustré dans la figure ci-dessous (figure1):



Calculer à l'ELU le ferrailage nécessaire du poteau 2.

Données : $f_{c28} = 30$ MPa ; $F_e E400$, Situation durable. Fissuration Préjudiciable

Solution de l'exercice 3

$$N = 0.81 b h f_{bu}$$

$$N = 0.81 * 0.3 * 0.5 * 14.2 * 10^3 = 1725.3 \text{ kN}$$

$N_u = 600 \text{ kN} < N = 1725.3 \text{ kN}$ La Première condition pour avoir une section entièrement comprimée n'est pas vérifiée, donc la section est partiellement comprimée

Calcul : ψ

$$\psi = \frac{0.357 + \frac{N_u(d - d') - M_u}{b h^2 f_{bu}}}{0.857 - \frac{d'}{h}}$$

$$e_{AS} = e_0 + 0.5h - d' = \frac{240}{600} + 0.5 * 0.5 - 0.04 = 0.61m$$

$$M_u = 0.61 * 600 = 366 \text{ kNm}$$

$$\psi = \frac{0.357 + \frac{N_u(d - d') - M_u}{b h^2 f_{bu}}}{0.857 - \frac{d'}{h}}$$

$$\psi = \frac{0.357 + \frac{0.6(0.46 - 0.04) - 0.366}{0.3 * 0.5^2 * 14.167}}{0.857 - \frac{0.05}{0.5}} = 0.32$$

$\psi = 0.32 < 0.81 \Rightarrow$ La deuxième condition pour avoir une section entièrement comprimée n'est vérifiée donc la section est partiellement comprimée.

$$M_{ut} = M_R = N_{ut} \cdot e_{AS}$$

$$M_{ut} = M_R = 600 * 0.61 = 366 \text{ kNm}$$

$$\mu = \frac{Mu}{bd^2 f_{bu}} = \frac{0.366}{0.3 * 0.46^2 * 14.167} = 0.41$$

$$\alpha_l = \frac{3.5}{3.5 + \varepsilon_{el}} \text{ et } \varepsilon_{el} = \frac{500}{1.15 * 2 * 10^5} = 2.17\text{‰} \Rightarrow \alpha_l = \frac{3.5}{3.5 + 2.17} = 0.617$$

$$\mu_l = 0.8\alpha_l(1 - 0.4\alpha_l) \Rightarrow \mu_l = 0.8 * 0.617 * (1 - 0.4 * 0.617) = 0.372$$

$$\mu = 0.41 > \mu_l = 0.372 \Rightarrow A_{sc} \neq 0$$

$$\begin{aligned} M_{bl} &= 0.8 b \alpha_l d^2 f_{bu} (1 - 0.4 \alpha_l) \\ &= 0.8 * 0.3 * 0.617 * 0.46^2 * 14.167 (1 - 0.4 * 0.617) \\ &= 334.29 \text{ kN.m} \end{aligned}$$

$$M_{bl} = 334.29 \text{ kN.m} > 0.6 M_{ut} = 219.6 \text{ CV}$$

$$A_{sc} = \frac{M_u - M_{bl}}{Fe/\gamma_s(d - d')}$$

$$A_{sc} = \frac{0.366 - 0.2196}{434.78(0.46 - 0.05)} = 8.21 * 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$A_{sc} = 8.21 \text{ cm}^2$$

$$A_s = \frac{F_{bl} + A_{sc} \cdot Fe/\gamma_s}{Fe/\gamma_s}$$

$$\begin{aligned} A_{s1} &= \frac{0.8 * 0.617 * 0.3 * 0.46 * 14.167 + 8.01 * 10^{-4} * 434.78}{434.78} \\ &= 30.20 * 10^{-4} \text{ m}^2 \end{aligned}$$

$$A_{s1} = 30.42 \text{ cm}^2$$

$$A_s = A_{s1} - \frac{N_u}{F_e/\gamma_s}$$

$$A_s = 30.42 * 10^{-4} - \frac{0.6}{434.78} = 16.4 * 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$A_s = 16.62 \text{ cm}^2$$

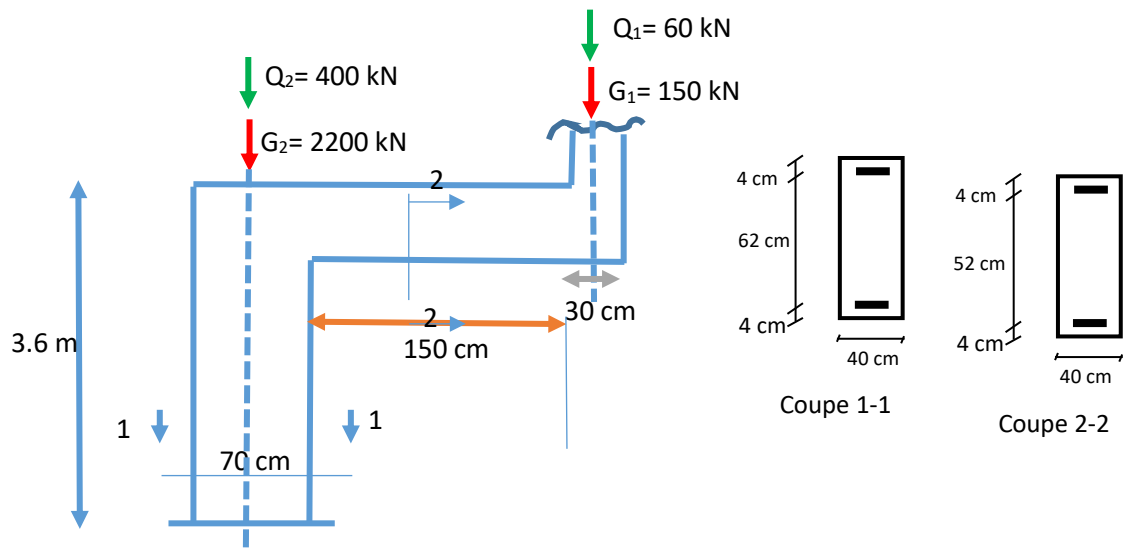
Section minimale :

$$A_{\min} = 0.23 \frac{f_{t28}}{f_e} = 12.07 * 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$A_{\min} = 12.07 \text{ cm}^2 \text{ cv}$$

Solution de l'exercice 4

Soit un poteau d'habitation soumis des différentes sollicitations comme illustré dans la figure ci-dessous (figure1):



Calculer à l'ELU le ferrailage nécessaire à la base du poteau 2.

Données : $f_{c28} = 30 \text{ MPa}$; FeE400, Situation durable.

Solution :

Calcul les charges sur le poteau

Poteau 2 :

G= 250 kN

Poids propre : $G = 0.7 * 0.40 * 25 * 3.6 = 25.2 \text{ kN}$

Poutre : Poids propre $G = 0.4 * 0.6 * 25 * 1.5 = 9 \text{ kN}$

$\sum G = 1232,81 \text{ kN}$

Effort normal	Perm . (kN)	Expl . (kN)	Bras de levier (m)	M perm (T.m)	Mexpl (T.m)
Poteau 1	150	60	2	300	120
Poutre	9	-	1.1	9.9	-
Poids Pr poteaux 2	25.2		-	-	-
Poteau 2	2200	400	-	-	-
$\sum$	2384,2	460		309.9	120

$$N_u = 1.5 N_g + 1.5 N_q$$

$$= 1.35 * 2384,2 + 1.5 * 460 = 3908,67 \text{ kN}$$

$$M_u = 1.35 M_g + 1.5 M_q$$

$$= 1.35 * 309.9 + 1.5 * 120 = 598.36 \text{ kNm}$$

$$N = 0.81 * b * h * f_{bu} = 0.81 * 40 * 70 * 17 / 10 = 3855,6 \text{ kN}$$

$N_u = 3908,67 \text{ kN} > N = 0.81 b h f_{bu} = 3855,6 \text{ kN}$ 1iere condition pour avoir une section entièrement comprimée est vérifiée.

Calcul le coefficient de remplissage $\psi = ?$

$$\psi = \frac{0.357 + \frac{N_u(d - d') - M_{UA}}{b h^2 f_{bu}}}{0.857 - \frac{d'}{h}}$$

Calcul M_{UA}

$$M_{UA} = N_u * e_{AS}$$

Calcul e_{AS}

$$e_{AS} = 0.5 h + e - d'$$

$$e = e_1 + e_2 + e_a$$

$$e = \frac{M_U}{N_u} = \frac{598.36}{3908.67} * 100 = 15.31 \text{ cm}$$

$$e_a = \max(2\text{cm}; \frac{l_0}{250})$$

$$e_a = \max\left(2\text{cm}; \frac{360}{250}\right) = 2\text{cm}$$

$$e_2 = \frac{3l_f^2}{10^4 h} (2 + \alpha\varphi); \quad \varphi = 2$$

$$\alpha = \frac{M_G}{M_G + M_Q} (ELS) = \frac{309.9}{309.9 + 120} = 0.72 \text{ cm}$$

$$l_f = 0.7l_0 = 0.7 * 3.6 = 2.52 \text{ m}$$

$$e_2 = \frac{3l_f^2}{10^4 h} (2 + \alpha\varphi) = \frac{3 * 2.52^2}{10^4 * 0.7} (2 + 0.72 * 2) = 0.94 \text{ cm}$$

$$e = e_1 + e_2 + e_a = 15.31 + 2 + 0.94 = 18.24 \text{ cm}$$

$$e_{AS} = 0.5 h + e - d' = 0.5 * 70 + 18.24 - 4 = 49.25 \text{ cm}$$

$$M_{UA} = N_u * e_{AS} = 3908.67 * \frac{49.74}{100} = 1924.84 \text{ kNm}$$

$$\psi = \frac{0.357 + \frac{3908.67 * 10^{-3} (0.66 - 0.04) - 1924.84 * 10^{-3}}{0.4 * 0.7^2 * 17}}{0.857 - \frac{0.04}{0.7}} = 0.63$$

$\psi = 0.63 < 0.81$ 2 ème condition pour avoir une SEC n'est pas vérifiée, donc la section est partiellement comprimée

Calcul les armatures du poteau

$$\mu = \frac{Mu}{bd^2 f_{bu}}$$

$$\mu = \frac{1924.84 * 10^{-3}}{0.4 * 0.66^2 * 17} = 0.65$$

$$\mu_l = 0.8\alpha_l(1 - 0.4\alpha_l)$$

$$\alpha_l = \frac{3.5}{3.5 + 1.74} = 0.668$$

$$\mu_l = 0.392$$

$$\mu = 0.66 > \mu_l = 0.392 \Rightarrow A_{sc} \neq 0$$

$$M_{bl} = 0.8 b \alpha_l d^2 f_{bu} (1 - 0.4\alpha_l)$$

$$M_{bl} = 0.8 * 0.4 * 0.668 * 0.66^2 * 17 * (1 - 0.4 * 0.668) = 1.16 \text{ MNm}$$

$$M_{bl} = 1160.03 \text{ kNm} > 0.6M_{uA} = 1154.9 \text{ kNm CV}$$

$$A_{sc} = \frac{M_u - M_{bl}}{Fe/\gamma_s(d - d')}$$

$$A_{sc} = \frac{(1924.84 - 1160.03)10^{-3}}{347.82(0.66 - 0.04)} = 35.47 * 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$A_{sc} = 35.47 \text{ cm}^2$$

$$A_{s1} = \frac{F_{bl} + A_{sc}.Fe/\gamma_s}{Fe/\gamma_s}$$

$$A_{s1} = \frac{+0.8 * 0.668 * 0.4 * 0.66 * 17 + 35.47 * 10^{-4} * 347.82}{347.82} = 104.42 * 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$A_{s1} = 104.42 \text{ cm}^2$$

$$A_s = A_{s1} - \frac{N_{ut}}{\sigma_s}$$

$$A_s = 104.42 * 10^{-4} \text{ m}^2 - \frac{3908.67}{347.82} = 0 \text{ cm}^2$$

III.5.3 Section Entièrement comprimée

Exercice 5

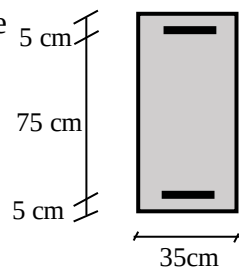
Soit une section de poutre en béton armé 35x85 cm² (Fig.1), supportant une combinaison de sollicitation durable :

Mu = 325 kN.m, Nu=4258 kN (compression).

1. Quel le type de la section après déformation (SEC, SPC ou SET) ? Justifier votre réponse.

2. Calculer la section d'armature et faire le schéma de ferrailage à l'ELU.

Données : $\gamma_{BA} = 25 \text{ kN/m}^3$; $f_{c28} = 20 \text{ MPa}$; FeE400 Situation durable



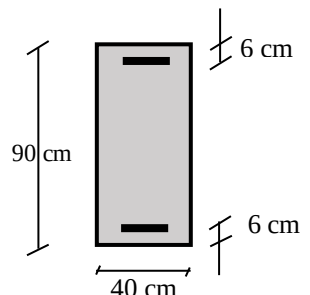
Exercice 6

Soit une section de poutre en béton armé 40x90 cm² (Fig.2), supportant la combinaison de sollicitation durable suivante :

Un moment de flexion : Mu =380 kN.m,

Un effort de compression : Nu=5400 kN.

1. Quel type de section après déformation (SEC, SPC ou SET) ? Justifier votre réponse.



2. Calculer la section d'armature et faire le schéma de ferrailage à l'ELU

Données : $\gamma_{BA} = 25 \text{ kN/m}^3$; $f_{c28} = 25 \text{ MPa}$; $FeE400$

Solution de l'exercice 5

1. Type de la section

$$e_{AS} = e + 0.5h - d' = \frac{M_{UG0}}{N_u} + 0.5h - d' = \frac{325}{4258} + 0.5 * 0.85 - 0.05 = 0.451 \text{ m}$$

$$M_{ua} = N_u * e_{AS} = 4258 * 0.541 = 1.92 \text{ kN.m}$$

$$\Psi = \frac{0.357 + \frac{N_U(d-d')-M_{UA}}{b h^2 f_{bu}}}{0.857-d'/h} = \frac{0.357 + \frac{4258(0.8-0.05)-1.92}{0.35 \cdot 0.85^2 \cdot 11.33}}{0.857-d'/h} = 1 \quad \Psi \geq 0.81 \dots \dots \text{CV}$$

$$N_u = 4258 \text{ kN} > 0.81 b h f_{bu} = 0.81 * 0.35 * 0.85 * 11.333 = 2731 \text{ kN} \dots \dots \text{CV}$$

Les deux conditions sont vérifiées, alors la section est entièrement comprimée

2. Calcul de la section d'armature

$$A_{sc} = \frac{M_{UA} - (d - 0.5h) b h f_{bu}}{(d - d') \sigma_{sc}} = 25.20 \text{ cm}^2$$

$$A_{s1} = \frac{N_U - b h f_{bu} - A_{sc} \sigma_{sc}}{\sigma_s} = 0.28 \text{ cm}^2$$

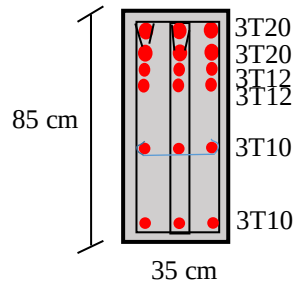


Schéma de ferrailage

$$A_{adopté} = 2 \times 3T20 + 2 \times 3T12 = 25.62 \text{ cm}^2 > A_{sc}$$

Solution de l'exercice 6

$$N = 0.81 b h f_{bu} = 0.81 * 0.4 * 0.9 * 14.167 * 10^{-3} = 4131 \text{ kN} < N_u \dots \dots \text{CV SEC}$$

La première condition est vérifiée pour avoir une section entièrement comprimée

$$\psi = \frac{0.357 + \frac{N_u(d - d') - M_u}{b h^2 f_{bu}}}{0.857 - \frac{d'}{h}}$$

$$e_{AS} = e_{AS} + 0.5h - d' = \frac{380}{5400} + 0.5 * 0.9 - 0.06 = 0.46 \text{ m}$$

$$M_{ua} = 0.46 * 5400 = 2486 \text{ kNm}$$

$$\psi = \frac{0.357 + \frac{5.4 * (0.85 - 0.05) - 2.486}{0.4 * 0.9^2 * 14.167}}{0.857 - \frac{0.06}{0.9}} = 0.93$$

$\psi = 1 > 0.81 \Rightarrow$ La deuxième condition pour avoir une section entièrement comprimée est vérifiée donc la section est entièrement comprimée.

$$\varepsilon_{sc} = 2\text{‰} \left[1 + \left(1.719 + \frac{4.09d'}{h} \right) \sqrt{1 - \Psi} \right]$$

$$\varepsilon_{sc} = 2\text{‰} \left[1 + \left(1.719 + \frac{4.09 * 0.06}{0.9} \right) \sqrt{1 - 0.93} \right] = 3.07\text{‰} > \varepsilon_{sel} = 1.74\text{‰}$$

$$\Rightarrow \sigma_{sc} = f_{su}$$

$$A_{sc} = \frac{N_U - \Psi b h f_{bu}}{\sigma_{sc}}$$

$$A_{sc} = \frac{4.6 - 0.93 * 0.4 * 0.9 * 14.167}{347.82} = 19.26 * 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$A_{sc} = 19.26 \text{ cm}^2$$

$$A_s = 0 \text{ cm}^2$$

$$\text{Schéma de ferrailage : } A_{sc} = 4T20 + 4T16 = 20.6 \text{ cm}^2$$

Chapitre VI : Torsion

Chapitre VI : Torsion

VI.1. Rappels sur la Théorie élémentaire

VI.1.1. Définition

Considérons la section suivante, il s'agit d'une barre circulaire encastrée à une extrémité et libre à l'autre. Cette poutre est soumise à un moment de torsion noté M_x , agissant autour de l'axe Gx . Sous l'action de ce moment, la section de départ subit une rotation d'un angle $d\theta$. (figure 1).

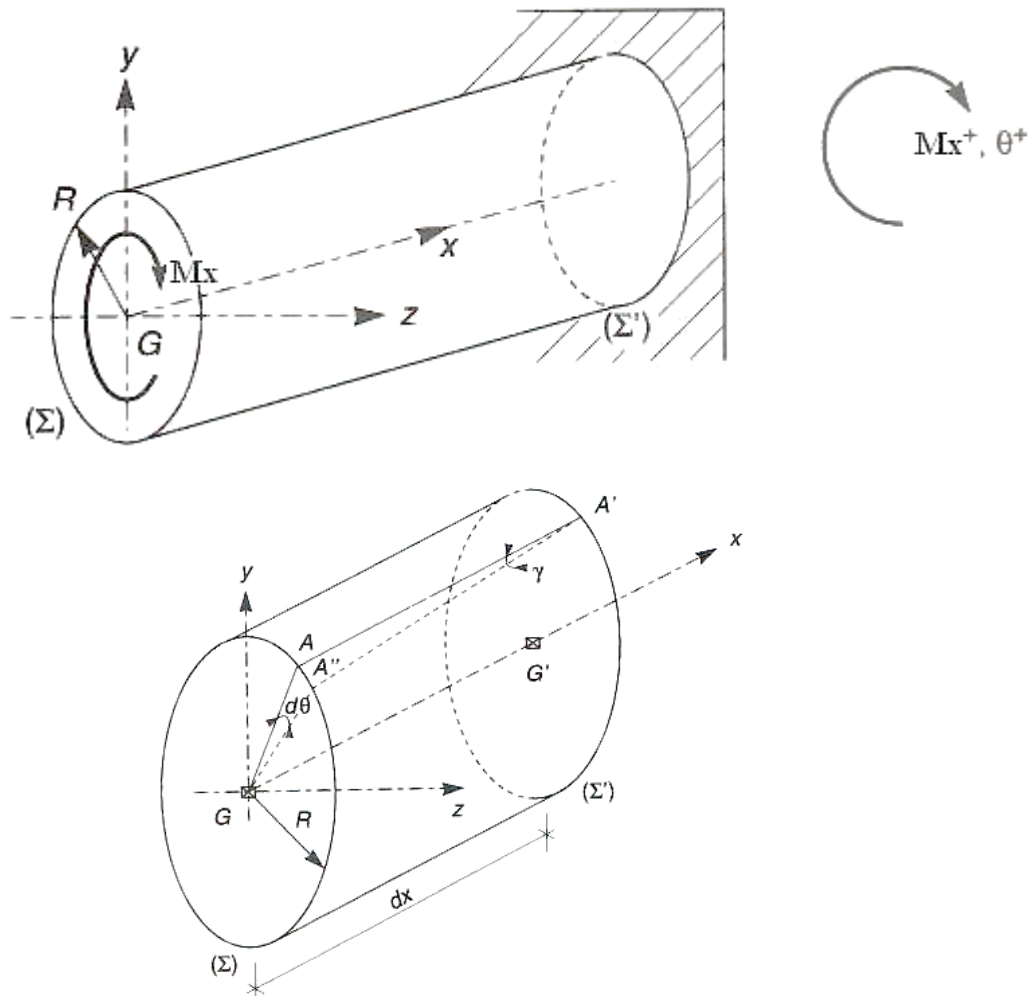


Figure IV.1. Barre circulaire encastrée soumise à un moment de torsion.

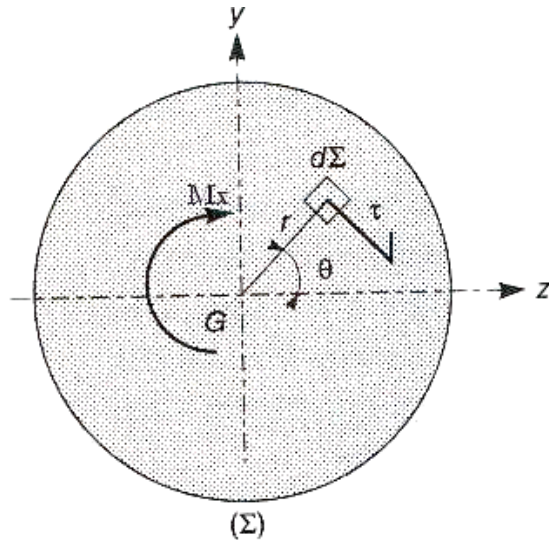
La rotation relative γ , entre les sections Σ et Σ' s'écrit de la façon suivante:

$$\gamma = R \frac{d\theta}{dx}$$

Suite à cette distorsion, il apparaît une contrainte de cisaillement définie par la relation:

$$G = -\frac{\tau}{\gamma} \Rightarrow \tau = -G \cdot \gamma$$

L'équilibre de la section soumise à cette contrainte de cisaillement se traduit par le schéma et les formules suivantes:



$$M_x = \iint_{\Sigma} \tau \cdot r \cdot d\Sigma$$

$$M_x = -G \frac{d\theta}{dx} \iint_{\Sigma} r^2 d\Sigma$$

Figure IV.2. Contrainte de cisaillement

A partir de ces équations d'équilibre, on peut écrire:

$$\frac{d\theta}{dx} = -\frac{M_x}{G \cdot J}$$

$$J = - \iint_{\Sigma} r^2 d\Sigma$$

$$\tau = \frac{M_x \cdot r}{J}$$

La grandeur J est appelée "moment d'inertie polaire" de la section Σ. et définit par la relation pour une section symétrique.

$$J = - \sqrt{I_y^2 + I_z^2}$$

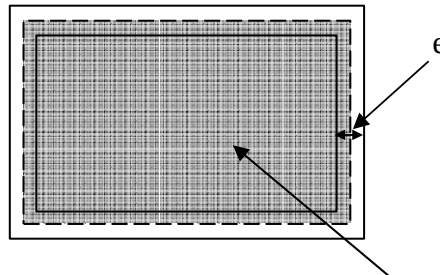
La quantité $G \cdot J$ est appelée rigidité à la torsion de la section.

En béton armé, on appellera T le moment de torsion de la poutre (et non pas Mx).

VI.1.2. Application à une section creuse.

Dans le cas d'une section creuse, d'épaisseur e , la contrainte de cisaillement due au moment de torsion s'écrit :

$$\tau_{uT} = \frac{T_u}{2 \cdot e \cdot \Omega}$$



- e : épaisseur de la section creuse.
- Ω : Aire délimitée par la fibre moyenne des parois.

VI.1.3. Exemples de sollicitations en torsion

En général, dans le cas des bâtiments, le moment de torsion dans une poutre est lié à une charge excentrée reprise par la poutre.

Charge verticale P excentrée par rapport à l'axe géométrique de la poutre :

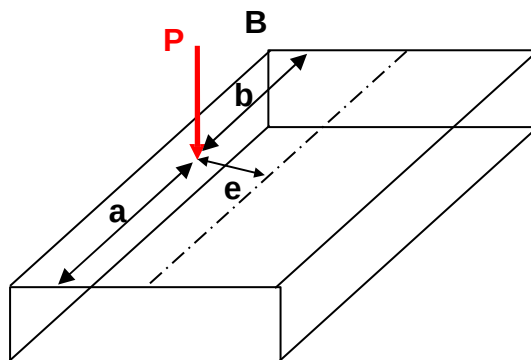


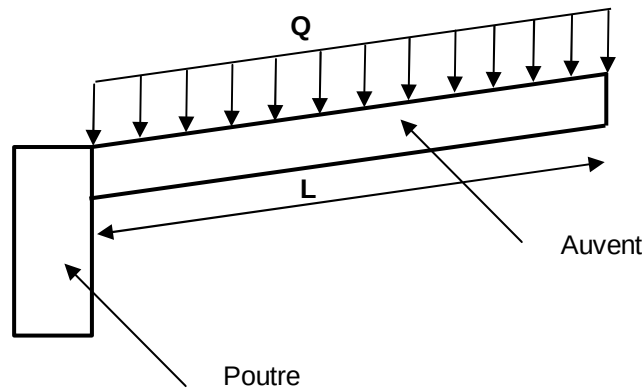
Figure IV.3. Exemples de sollicitations en torsion

Le moment de torsion dans la poutre vaut :

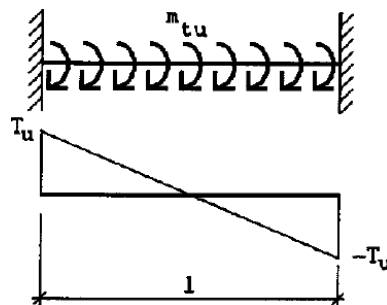
$$T_A = P \cdot e \frac{b}{a + b}$$

$$T_R = -P \cdot e \frac{a}{a + b}$$

Reprise d'un auvent : dans ce cas, le moment de torsion dans la poutre correspond au moment d'encastrement de l'auvent (calculé comme une console).



Dans ce cas, la poutre sera soumise à un couple externe de torsion égal à :
 $M_{tu} = \frac{Ql^2}{2} \cos \theta$ (θ Etant l'angle d'inclinaison de l'auvent par rapport à l'horizontale), constant sur toute sa longueur.



Le moment de torsion maximum dans la poutre vaut :

$$T_u = M_{tu} \cdot \frac{l}{2}$$

Où l représente la portée de la poutre (à ne pas confondre avec la longueur de l'auvent).

VI.2. Vérification du béton

Comme nous venons de le voir, un moment de torsion engendre des contraintes de cisaillement dans la section. Par conséquent, tout comme la vérification à l'effort tranchant, le dimensionnement et les vérifications se font à l'ELU.

Attention, les effets de la torsion doivent se cumuler avec les effets dus aux autres sollicitations de la poutre (effort tranchant et moment fléchissant).

VI.2.1. Sections creuses

Les notations du BAEL diffèrent des notations RDM. La contrainte de cisaillement est calculée à partir de la formule :

$$\tau_{uT} = \frac{T_u}{2 \cdot b_0 \cdot \Omega}$$

Avec :

- T_u : moment de torsion à l'état limite ultime.
- Ω : Aire délimitée par la fibre moyenne des parois.

- b_0 : épaisseur fictive de la paroi définie : $b_0 = \left\{ \begin{array}{l} \text{épaisseur réelle} \\ \frac{a}{6} \end{array} \right\}$

La dimension « a » correspond au diamètre maximal du plus grand cercle inscrit dans la section étudiée :

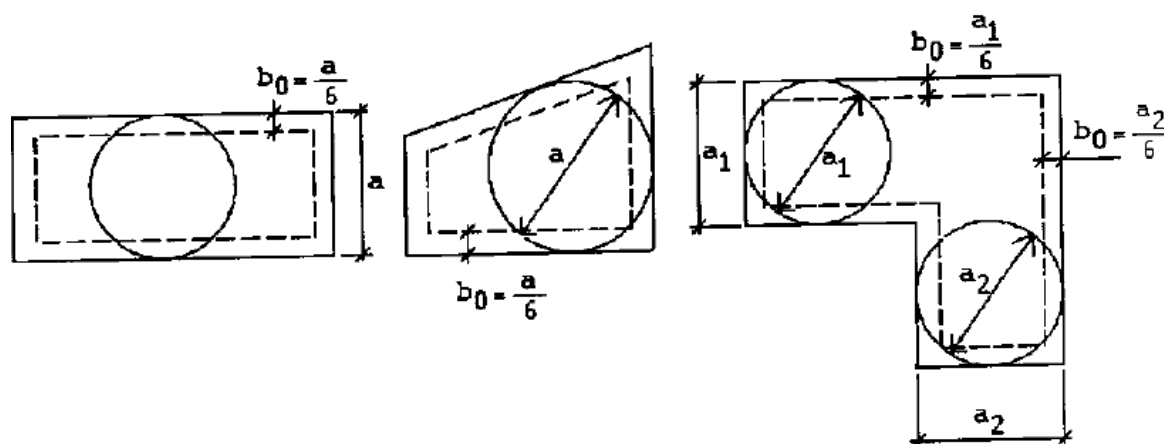


Figure IV.4. Moment de torsion sur des sections creuses

VI.2.2. Sections pleines

Pour les sections pleines (majorité des cas en béton armé), on se ramène à une section creuse équivalente, de même contour extérieur et d'épaisseur $b_0 = \frac{a}{6}$.

On retrouve ensuite la même formule de calcul que celle des sections creuses $\tau_{uT} = \frac{T_u}{2.b_0.\Omega}$.

VI.2.3. Calcul et vérification de la contrainte de béton

Il faut cumuler la contrainte de cisaillement précédemment calculée (due au moment de torsion) à la contrainte de cisaillement due à l'effort tranchant.

On vérifiera donc :

- Pour les sections creuses : $\tau_{uT} + \tau_{uV} = \overline{\tau_u}$
- Pour les sections pleines : $\tau_{uT}^2 + \tau_{uV}^2 = \overline{\tau_u}^2$

La contrainte limite de cisaillement est la même que celle définie pour l'effort tranchant, à savoir :

$$\text{Fissuration peu préjudiciable : } \overline{\tau_u} = \min \left\{ \begin{array}{l} 0.2 \frac{f_{cj}}{\gamma_b} \\ 5 \text{ MPa} \end{array} \right\}$$

$$\text{Fissuration préjudiciable ou très préjudiciable : } \overline{\tau_u} = \min \left\{ \begin{array}{l} 0.15 \frac{f_{cj}}{\gamma_b} \\ 4 \text{ MPa} \end{array} \right\}$$

Dans le cas où les armatures sont inclinées à 45° par rapport à la fibre moyenne de la poutre,

$$\text{la contrainte limite est égale aux valeurs suivantes : } \overline{\tau_u} = \min \left\{ \begin{array}{l} 0.27 \frac{f_{cj}}{\gamma_b} \\ 7 \text{ MPa} \end{array} \right\}$$

Remarque Importante

La contrainte de cisaillement τ_{uV} , due à l'effort tranchant, est calculée à partir de la

formule $\tau_u = \frac{V_u}{b_0 d}$.

Il ne faut pas confondre cette valeur de b_0 qui correspond à la largeur de la poutre, avec le paramètre « b_0 » utilisé pour le calcul de la contrainte de cisaillement liée au moment de torsion.

—

VI.3. Dimensionnement des armatures.

Comme nous l'avons vu précédemment, les armatures de torsion vont venir se cumuler aux armatures de flexion et d'effort tranchant.

Les armatures résistantes de torsion sont composées d'un double système :

- Une partie en armatures longitudinales.
- Une partie en armatures transversales.

VI.3.1. Dimensionnement des armatures longitudinales de torsion

La somme des armatures longitudinales, pour reprendre la torsion, est donnée par la formule :

$$\Sigma A_l = \frac{T_u \cdot u \cdot \gamma_s}{2 \cdot \Omega \cdot b_0}$$

Avec :

- T_u : moment de torsion à l'ELU.
- u : périmètre de l'aire Ω .

La section A_l ainsi obtenue est à répartir sur le contour de la section en plaçant au minimum une armature à chaque coin de la section.

Pourcentage minimal

La somme des armatures longitudinales de torsion doit vérifier :

$$\frac{\Sigma A_l}{b_0 u} \cdot f_e \geq 0.4 \text{ MPa}$$

VI.3.2. Dimensionnement des armatures transversales de torsion

Les armatures transversales de torsion sont dimensionnées à partir de la formule suivante :

$$\frac{A_t \cdot f_e}{S_t \cdot \gamma_s} = \frac{T_u}{2 \cdot \Omega}$$

Dans la formule précédente, A_t représente la somme des brins d'armatures transversales contenues dans l'épaisseur b_0 (soit $a/6$ pour une section pleine) :

- Cette section est donc à placer sur chaque paroi (des deux côtés) de la section et non pas pour la totalité de la section comme c'est le cas des armatures transversales d'effort tranchant.
- Il ne faut donc pas confondre la section A_t calculée pour la reprise de l'effort tranchant et la section A_t calculée ci-dessus pour la reprise du moment de torsion.
- Cela veut donc dire que l'on ne prend pas en compte d'aciers intérieurs (étriers ou épingles) dans la résistance au moment de torsion.

L'espacement et le diamètre de ces armatures transversales suivent les mêmes règles que pour

les armatures d'effort tranchant, à savoir :

$$\phi_t \leq \min \left\{ \begin{array}{l} \phi_l \\ \frac{h}{35} \\ \frac{b}{10} \end{array} \right\} \text{ et } S_t \leq \min \left\{ \begin{array}{l} 0.9d \\ 40 \text{ cm} \\ 15\phi_{lmin} \end{array} \right\}$$

Pourcentage minimal : Le pourcentage minimal doit être vérifié à la fois pour les armatures d'effort tranchant seules et également pour l'ensemble des armatures transversales, à savoir armatures de torsion + armatures d'effort tranchant.

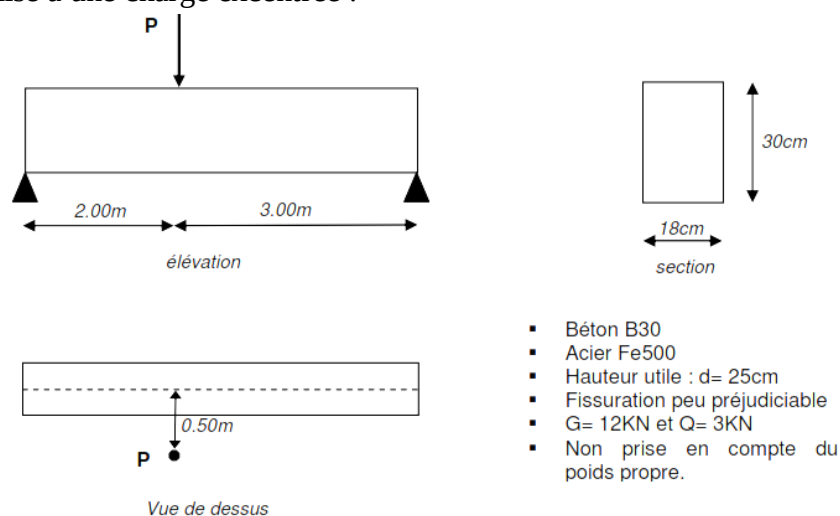
$$\frac{A_t}{b \cdot S_t} \cdot f_e \geq 0.4 \text{ MPa}$$

- b = largeur de la section pour une section pleine.
- $b = 2 \cdot b_0$ pour une section creuse d'épaisseur de parois b_0 .

VI.4. Applications

Exercice 1 :

On se propose de dimensionner les armatures longitudinales et transversales de la poutre suivante, soumise à une charge excentrée :



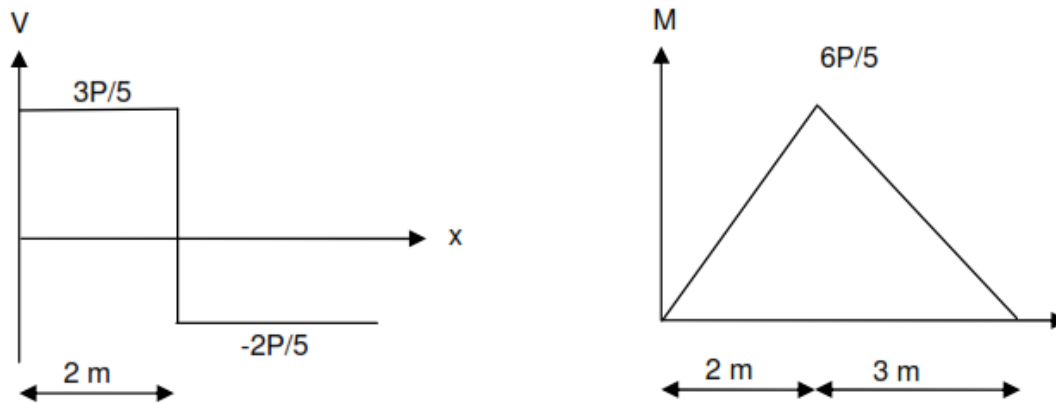
Par calcul RDM, on peut écrire que les réactions d'appuis valent :

$$R_A = \frac{3}{5} \cdot P \text{ et } R_B = \frac{2}{5} \cdot P$$

L'effort tranchant et le moment fléchissant sont définis par les formules suivantes :

Pour $0 \leq x \leq 2 \text{ m}$, On a $V(x) = \frac{3}{5} \cdot P$ et $M(x) = \frac{3}{5} \cdot P \cdot x$

Pour $2 \text{ m} \leq x \leq 5 \text{ m}$, On a $V(x) = -\frac{2}{5} \cdot P$ et $M(x) = -\frac{3}{5} \cdot P \cdot x + 2P$



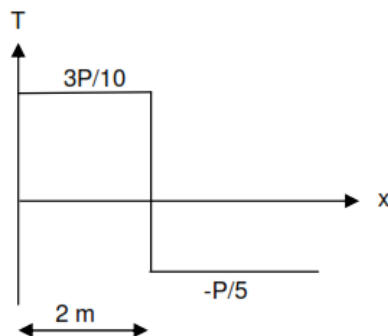
On a donc les diagrammes suivants :

Moment de torsion

Le moment de torsion est défini par les formules suivantes :

$$\begin{aligned}
 - \quad T_A &= P \cdot e \frac{b}{a+b} = 0.5 \cdot P \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{5}P \\
 - \quad T_B &= -P \cdot e \frac{a}{a+b} = -0.5 \cdot P \cdot \frac{2}{5} = -\frac{1}{5}P
 \end{aligned}$$

Pour $2\text{ m} \leq x \leq 5\text{ m}$, On a $V(x) = -\frac{2}{5} \cdot P$ et $M(x) = -\frac{3}{5} \cdot P \cdot x + 2P$



Note : le diagramme du moment de flexion est le même que celui de l'effort tranchant multiplié par l'excentricité.

Armatures de flexion.

On calcule le moment de flexion à l'ELU :

$$P_u = 1,35 \times 12 + 1,5 \times 3 = 20,7 \text{ KN}$$

$$M_u = \frac{6P_u}{5} = \frac{6 \times 20,7}{5} = 24,84 \text{ KN.m} = 0,0248 \text{ MN.m}$$

On fait ensuite un dimensionnement en flexion simple :

- $\mu = \frac{0,0248}{0,18 \times 0,25^2 \times 17} = 0,130$
- $\alpha = 1,25 \left(1 - \sqrt{1 - 2 \times 0,130} \right) = 0,175$
- $z = 0,25 (1 - 0,4 \times 0,175) = 0,2325m$
- $A_u = \frac{0,0248}{0,2325 \times 434,78} = 2,45 \cdot 10^{-4} m^2 = 2,45 cm^2$

Armatures Effort tranchant.

On calcul l'effort tranchant max à l'ELU :

$$V_u = \frac{3P_u}{5} = \frac{3 \times 20,7}{5} = 12,42 KN = 0,0124 MN$$

On calcul la contrainte de cisaillement :

$$\tau_u = \frac{0,0124}{0,18 \times 0,25} = 0,276 MPa$$

On vérifie la contrainte limite de cisaillement :

$$\overline{\tau_u} = \text{MIN} \left\{ \begin{array}{l} 0,2 \frac{f_{cj}}{\gamma_b} = 4 MPa \\ 5 MPa \end{array} \right\} = 4 MPa > 0,276 MPa$$

On calcul ensuite la section d'aciers théorique :

$$\frac{A_t}{s_t} = \frac{b \cdot \gamma_s \cdot \tau_u}{0,9 \cdot f_e} = \frac{0,18 \times 1,15 \times 0,276}{0,9 \times 500} = 1,27 cm^2 / ml$$

On détermine le pourcentage minimum :

$$\frac{A_t}{s_t} \geq 1,44 cm^2 / ml$$

On retient donc $\frac{A_t}{s_t} \geq 1,44 cm^2 / ml$

Justification en torsion.

On calcule le moment de torsion à ELU :

$$T_u = \frac{3}{10} \cdot P_u = \frac{3}{10} \times 20,7 = 6,21 KN.m = 0,0062 MN.m$$

On calcul ensuite la contrainte de cisaillement due au moment de torsion :

- $\tau_{uT} = \frac{T_u}{2.b_0.\Omega}$
- $a = 0.18m$ et $b_0 = \frac{a}{6} = 0.03m$
- $\Omega = (0.18 - 0.03) \times (0.30 - 0.03) = 0.0405m^2$
- $u = 2[(0.18 - 0.03) + (0.30 - 0.03)] = 0.84m$
- $\tau_{uT} = \frac{0.0062}{2 \times 0.03 \times 0.0405} = 2.55MPa$

On vérifie ensuite la contrainte limite sur le béton :

$$\tau_{uT}^2 + \tau_{uV}^2 \leq \overline{\tau_u}^2 \Rightarrow 2.55^2 + 0.276^2 = 6.58MPa \leq 4^2 = 16MPa$$

On peut ensuite calculer les armatures de torsion :

- Armatures longitudinales de torsion.
- Armatures transversales de torsion.

Armatures longitudinales de torsion

$$\Sigma A_l = \frac{T_u \cdot u \cdot \gamma_s}{2 \cdot \Omega \cdot f_e} = \frac{0.0062 \times 0.84 \times 1.15}{2 \times 0.0405 \times 500} = 1.48cm^2$$

Le pourcentage minimum nous donne :

$$\Sigma A_l \geq \frac{0.4 \times b_0 \times u}{f_e} = \frac{0.4 \times 0.03 \times 0.84}{500} = 0.201cm^2$$

On retiendra donc 1.44 cm².

Armatures transversales de torsion

On détermine le pourcentage minimum :

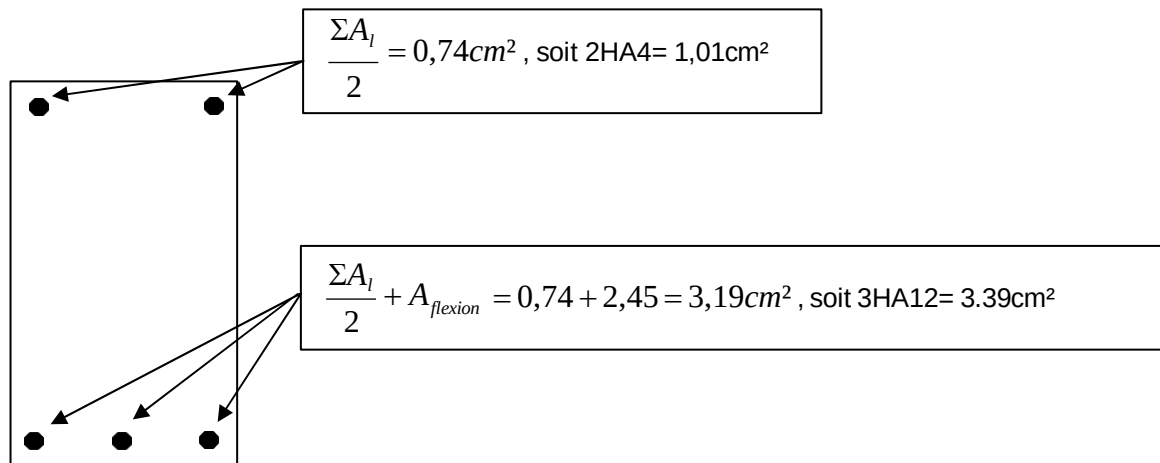
$$\frac{A_t}{s_t} = \frac{T_u \cdot \gamma_s}{2 \cdot \Omega \cdot f_{ed}} = \frac{0.0062 \times 1.15}{2 \times 0.0405 \times 500} = 1.76cm^2$$

On retient donc:

$$\frac{A_t}{s_t} \geq 1.76cm^2/ml \text{ par face .}$$

Armatures longitudinales totales.

Les armatures longitudinales totales seront disposées de la façon suivante :



Armatures transversales totales.

Prenons l'hypothèse que l'on ferraille la poutre avec des cadres en HA6.

Pour les aciers transversaux d'effort tranchant ($A_t = 2 \text{ HA6} = 0,57 \text{ cm}^2$), on a

$$\frac{A_t}{s_t} = 1,44 \Rightarrow s_t = \frac{0,57}{1,44} = 0,396 \text{ m} = 40 \text{ cm}$$

Pour les aciers transversaux de torsion ($A_t = 1 \text{ HA6} = 0,245 \text{ cm}^2$), on a

$$\frac{A_t}{s_t} = 1,76 \Rightarrow s_t = \frac{0,285}{1,76} = 0,16 \text{ m} = 16 \text{ cm}$$

Dans $s_t \leq \text{MIN} \begin{cases} 0,9d = 0,9 \times 0,25 = 0,225 \text{ m} \\ 40 \text{ cm} \end{cases}$ les deux cas, les espacements doivent satisfaire

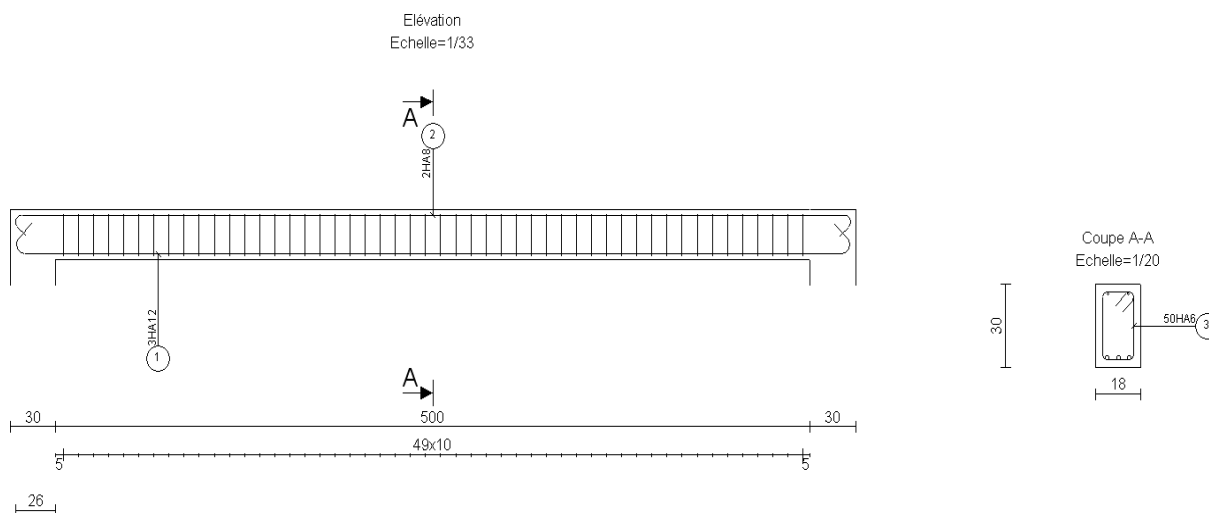
On retient donc les espacements max suivants :

- 22,5 cm pour les armatures transversales d'effort tranchant.
- 16 cm pour les armatures transversales de torsion.

On calcule le nombre « théorique » de cadres sur 1mètre linéaire de poutre :

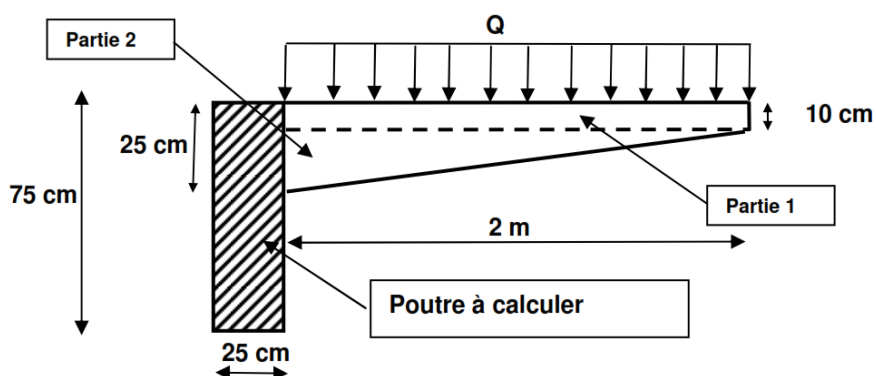
- $1/0,225 = 4,44$ cadres pour les aciers transversaux d'efforts tranchants.
- $1/0,16 = 6,25$ cadres pour les aciers transversaux de torsion.
- On a donc au total un nombre « théorique » de cadres de 10,7.

On peut donc placer 11 cadres par mètre linéaire de poutre, soit un espacement de 10 cm. On a donc le ferrailage suivant :



Exercice 2 : Calcul d'une poutre supportant un auvent.

On cherche à déterminer le ferrailage d'une poutre reprenant un auvent. Les dimensions géométriques de cet auvent sont les suivantes :



Les hypothèses de calcul sont les suivantes :

- Qualité de béton B25.
- Nuance d'acier Fe500.
- Hauteur utile : $d=70$ cm
- Fissuration peu préjudiciable.
- Surcharge uniformément répartie (charge d'entretien) : 1 kN/m^2
- On doit prendre en compte le poids propre de la poutre.
- Densité du béton : 25 kN/m^3 .
- La poutre à dimensionner est considérée **bi-encastree**.
- La portée de la poutre à dimensionner est de 4.00 m

Calcul des charges sur la poutre.

Dans un 1^{er} temps, il faut déterminer les charges à reprendre sur la poutre :

- Charges verticales appliquées sur la poutre (en KN/ml), issues de la descente de charges de l'auvent.
- Couple de torsion appliqué sur la poutre, également issu de la descente de charges de l'auvent
- Le poids propre de l'auvent sera déterminé en le divisant en deux éléments (voir schéma ci-dessus) :
- Partie 1 correspondant à une épaisseur constante.
- Partie 2 correspondant à la partie variable.

Pour chaque action (poids propre et charge répartie), on détermine la résultante verticale par sommation des charges le long de l'auvent et le moment de torsion en multipliant ces résultantes par le bras de levier correspondant.

Les différents bras de levier doivent être considérés par rapport au centre de la poutre (en ajoutant donc la demi-largeur).

On présente les résultats sous forme de tableau :

Action	Charge verticale (KN/m)	Bras de levier (m)	Couple de torsion (KN.m/m)
P.P auvent – partie 1	$25 \times 0.10 \times 2.00 = 5$	$2/2 + 0.25/2 = 1.125$	$5 \times 1.125 = 5.63$
P.P auvent – partie 2	$2 \times (0.25 - 0.10) \times 0.5 \times 25 = 3.75$	$2/3 + 0.25/2 = 0.79$	$3.75 \times 0.79 = 2.96$
P.P de la poutre	$0.25 \times 0.75 \times 25 = 4.69$	0	0
TOTAL charges permanente	13.44		4.59
Surcharge d'exploitation	$2 \times 1 = 2$	$2/2 + 0.25/2 = 1.125$	$2 \times 1.125 = 2.25$

P.P : Poids Propre

Calcul des sollicitations

A partir des charges précédemment calculées, on peut déterminer les sollicitations suivantes :

- Effort tranchant V_u
- Moment fléchissant M_u
- Moment de torsion T_u

Effort tranchant et moment fléchissant

On peut déterminer la charge à l'ELU reprise par la poutre :

- $P_u = 1.35 \times 13.44 + 1.5 \times 2 = 21.14 \text{ KN/m}$

Pour une poutre bi-encastree de portée l , on a les valeurs suivantes :

Effort tranchant max (ELU) : $V_u = \frac{P_u \cdot l}{2} = \frac{21.14 \times 4}{2} = 42.3 \text{ KN} = 0.042 \text{ MN}$

- Moment de flexion aux appuis :

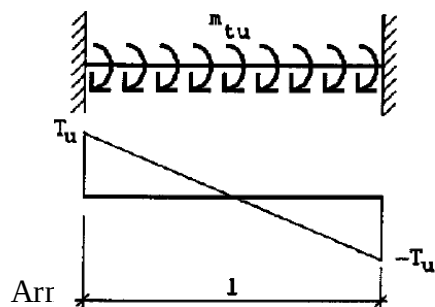
$$M_u = \frac{P_u \cdot l^2}{12} = \frac{21,14 \times 4^2}{12} = 28,2 \text{ KN.m} = 0,028 \text{ MN.m}$$

- Moment max à mi-travée :

$$M_u = \frac{P_u \cdot l^2}{24} = \frac{21,14 \times 4^2}{24} = 14,1 \text{ KN.m} = 0,014 \text{ MN.m}$$

- **Moment de torsion**

Comme nous l'avons vu dans le cours, pour une poutre soumise à un couple de torsion constant, on a :



$$m_{tu} = 1,35 \times 8,59 + 1,5 \times 2,25 = 14,97 \text{ KN.m / m} = 0,015 \text{ MN.m / m}$$

$$T_u = m_{tu} \cdot \frac{l}{2} = 0,015 \times \frac{4}{2} = 0,03 \text{ MN.m}$$

Armatures en travée (fibre inférieure)

- $\mu = \frac{0,014}{0,25 \times 0,70^2 \times 14,17} = 0,008$
- $\alpha = 1,25 \left(1 - \sqrt{1 - 2 \times 0,008} \right) = 0,01$
- $z = 0,70 (1 - 0,4 \times 0,01) = 0,697 \text{ m}$
- $A_u = \frac{0,014}{0,697 \times 434,78} = 4,62 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 = 0,46 \text{ cm}^2$

On vérifie le pourcentage minimum :

$$A_{\min} = 0,23 \frac{F_{t28}}{F_e} b_0 d = 0,23 \times \frac{2,1}{500} \times 0,25 \times 0,70 = 1,69 \text{ cm}^2$$

On retient donc 1,69 cm².

Armatures sur appui (fibre supérieure)

- $\mu = \frac{0,028}{0,25 \times 0,70^2 \times 14,17} = 0,016$
- $\alpha = 1,25 \left(1 - \sqrt{1 - 2 \times 0,016} \right) = 0,02$
- $z = 0,70 (1 - 0,4 \times 0,02) = 0,694 \text{ m}$
- $A_u = \frac{0,028}{0,694 \times 434,78} = 9,28 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 = 0,93 \text{ cm}^2$

On retient également 1,69 cm² (pourcentage minimum).

Armatures Effort tranchant.

On a calculé $V_u = 0,042 \text{ MN}$ (on ne considère pas de transmission directe aux appuis).

On calcule la contrainte de cisaillement :

$$\tau_u = \frac{0,042}{0,25 \times 0,70} = 0,24 \text{ MPa}$$

On vérifie la contrainte limite de cisaillement :

$$\overline{\tau_u} = \text{MIN} \left\{ 0,2 \frac{f_{cj}}{\gamma_b} = 4 \text{ MPa}, 5 \text{ MPa} \right\} = 4 \text{ MPa} > 0,24 \text{ MPa}$$

On calcule ensuite la section d'aciers théorique :

$$\frac{A_t}{s_t} = \frac{b \cdot \gamma_s \cdot \tau_u}{0,9 \cdot f_e} = \frac{0,25 \times 1,15 \times 0,24}{0,9 \times 500} = 1,53 \text{ cm}^2 / \text{ml}$$

On détermine le pourcentage minimum :

$$\frac{A_t}{s_t} \geq \frac{0,4 \times b}{f_e} = \frac{0,4 \times 0,25}{500} = 2 \text{ cm}^2 / \text{ml}$$

On retient donc : $\frac{A_t}{s_t} \geq 2 \text{ cm}^2 / \text{ml}$

Justification en torsion.

On a calculé le moment de torsion à l'ELU : $T_u = 0,03 \text{ MN.m}$

On calcule ensuite la contrainte de cisaillement due au moment de torsion :

- $\tau_{uT} = \frac{T_u}{2 \cdot b_0 \cdot \Omega}$
- $a = 0,25 \text{ m}$ et $b_0 = \frac{0,25}{6} = 0,042 \text{ m}$
- $\Omega = (0,25 - 0,042) \times (0,75 - 0,042) = 0,147 \text{ m}^2$
- $u = 2[(0,25 - 0,042) + (0,75 - 0,042)] = 1,83 \text{ m}$
- $\tau_{uT} = \frac{0,03}{2 \times 0,042 \times 0,147} = 2,43 \text{ MPa}$

On vérifie ensuite la contrainte limite sur le béton :

$$\tau_{uT}^2 + \tau_{uV}^2 \leq \overline{\tau_u}^2 \Rightarrow 2,43^2 + 0,24^2 = 5,96 \text{ MPa} \leq 4^2 = 16 \text{ MPa}$$

On peut ensuite calculer les armatures de torsion :

- Armatures longitudinales de torsion.
- Armatures transversales de torsion.

Armatures longitudinales de torsion

$$\Sigma A_l = \frac{T_u \cdot u \cdot \gamma_s}{2 \cdot \Omega \cdot f_e} = \frac{0,03 \times 1,83 \times 1,15}{2 \times 0,147 \times 500} = 4,29 \text{ cm}^2$$

Le pourcentage minimum nous donne :

$$\Sigma A_l \geq \frac{0,4 \times b_0 \times u}{f_e} = \frac{0,4 \times 0,042 \times 1,83}{500} = 0,61 \text{ cm}^2$$

On retiendra donc 4,29 cm².

Armatures transversales de torsion

$$\frac{A_t}{s_t} = \frac{T_u \cdot \gamma_s}{2 \cdot \Omega \cdot f_{ed}} = \frac{0,03 \times 1,15}{2 \times 0,147 \times 500} = 2,35 \text{ cm}^2$$

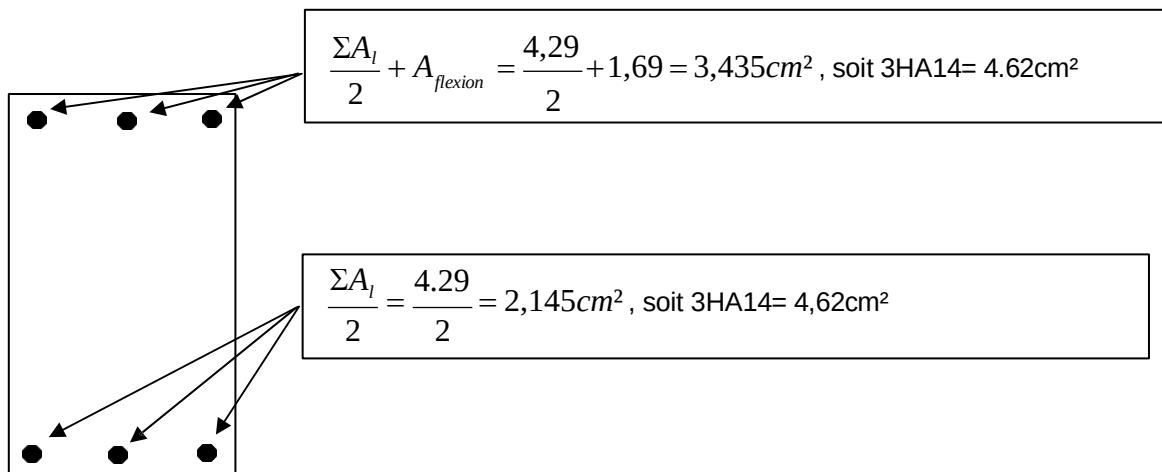
On détermine le pourcentage minimum :

$$\frac{A_t}{s_t} \geq \frac{0,4 \times b_0}{f_e} = \frac{0,4 \times 0,042}{500} = 0,34 \text{ cm}^2 / \text{ml}$$

On retient donc $\frac{A_t}{s_t} \geq 2,35 \text{ cm}^2 / \text{ml}$ par face.

Armatures longitudinales totales sur appuis

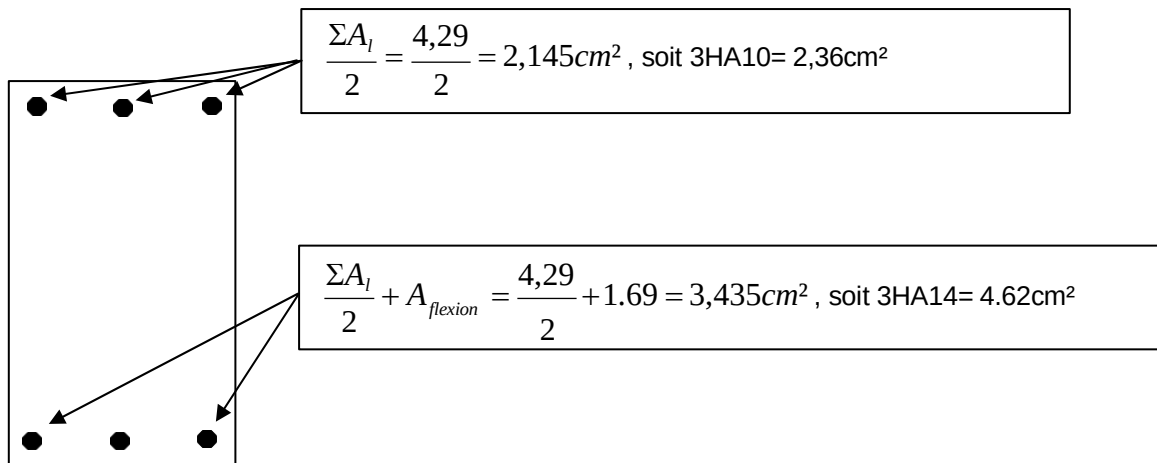
Les armatures longitudinales totales seront disposées de la façon suivante :



En fait, en partie inférieure, on met en place 3HA14 (donc beaucoup plus que la section théorique) car on prolonge les aciers inférieurs de travée (voir ci-dessous) jusqu'à l'appui.

Armatures longitudinales totales en travée

Les armatures longitudinales totales seront disposées de la façon suivante :



Armatures transversales totales.

Prenons l'hypothèse que l'on ferraille la poutre avec des cadres en HA4.

- Pour les aciers transversaux d'effort tranchant ($A_t = 2 \text{ HA}4 = 1,01 \text{ cm}^2$), on a

Pour les aciers transversaux de torsion ($A_t = 1 \text{ HA}4 = 0,50 \text{ cm}^2$), on a dans les deux cas, les espacements doivent satisfaire

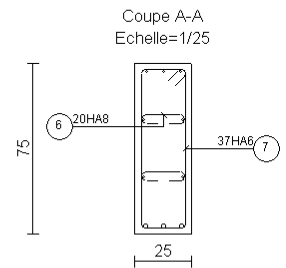
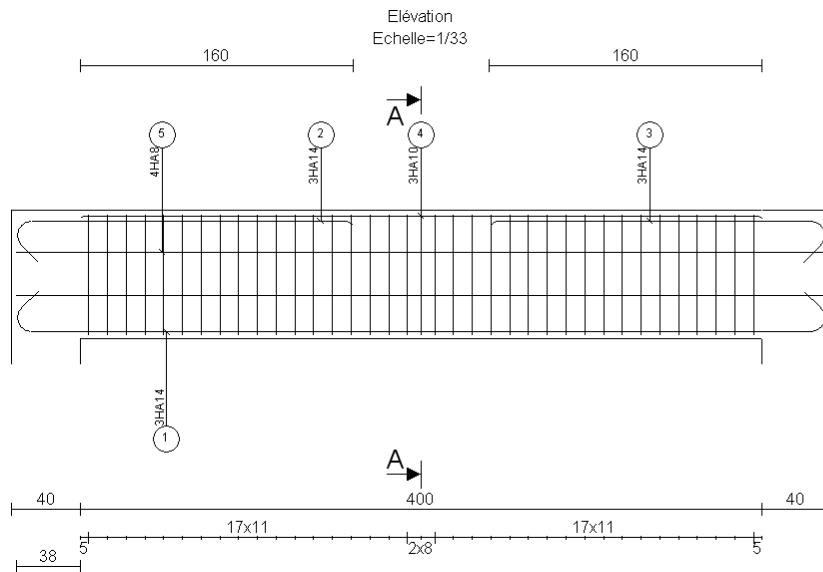
On retient donc les espacements max suivants :

- 40 cm pour les armatures transversales d'effort tranchant.
- 21 cm pour les armatures transversales de torsion.

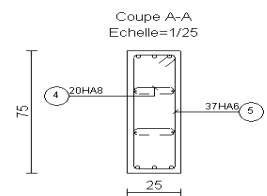
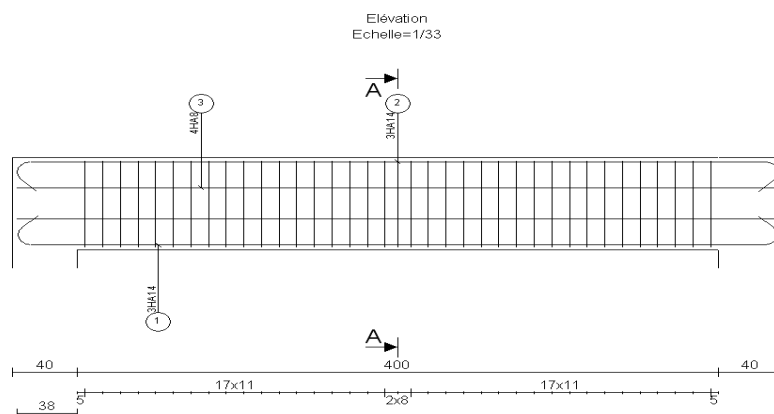
On calcul le nombre « théorique » de cadres sur 1mètre linéaire de poutre :

- $1/0,40 = 2,5$ cadres pour les aciers transversaux d'efforts tranchants.
- $1/0,21 = 4,76$ cadres pour les aciers transversaux de torsion.
- On a donc au total un nombre « théorique » de cadres de 7,26.

On peut donc placer 4 cadres par mètre linéaire de poutre, soit un espacement de 11 cm. On a donc le ferrailage suivant :



Du fait que les aciers de chapeaux sont très proche, un ferrailage plus simple à mettre en œuvre serait de supprimer les 3HA10 (fibre supérieure) en travée et prolonger les 3HA14 des appuis sur toute la travée. On aurait alors le ferrailage suivant :



Références bibliographiques:

1. D.T. R-B.C.2-41, "Règles de conception et de calcul des structures en béton armé".
2. Jean- Pierre Mouguin, "Cours de béton armé B.A.E.L. 91", BERTI Edition.
3. Jean Perchat et Jean Roux, "Maitrise du B.A.E.L. 91 et des D.T.U associés", EYROLLES.
4. Jean Perchat et Jean Roux, "Pratique du B.A.E.L. 91 (Cours avec exercices corrigés)", EYROLLES
5. Pierre Charon, "Exercice de béton armé selon les règles B.A.E.L. 83", EYROLLES 2ème édition