

Université Djilali Bounaama-Khemis Miliana
Faculté des Sciences de la Matière et de l'Informatique
Département de Mathématiques



Polycopié :
Équations différentielles ordinaires
Cours et exercices corrigés

Destiné aux étudiants du master
Analyse Mathématique et Applications



Présenté par :
Abdelkarim Kelleche

Année universitaire 2024-2025

Table des matières

Introduction générale	iii
1 Généralités sur les équations différentielles	1
1.1 Notion de solution, type de solutions	1
1.2 Théorème de Cauchy - Lipschitz	3
1.3 Explosion en temps fini	4
1.4 Etude qualitative des EDO's n dimension finie	6
1.5 Explications et indications de preuve	9
1.6 Etude qualitative des systèmes différentiels non linéaires autonomes .	11
1.7 Affinement du protocole	17
1.8 Exercices	18
1.9 Exercices supplémentaires	25
2 EDO's sous contrainte	34
2.1 Cônes Tangents	34
2.2 Exercices et solutions	52
2.3 Théorème de Nagumo	55
2.4 Exercices et solutions	64
3 Notion de stabilité	67
3.1 Introduction	67
3.2 Systèmes autonomes linéaires	68
3.3 Systèmes autonomes non linéaires	70
3.4 Preuves des théorèmes de stabilité	73
3.5 Preuve partielle du théorème de stabilité, cas non linéaire	79



3.6 Exemples	83
3.7 Stabilité au sens de Lyapunov	84
3.8 Ensembles ω -limites	88
3.9 Principe d'invariance de LaSalle	89
3.10 Exercices et solutions corrigées	90

Bibliographie	107
----------------------	------------

Introduction générale

CE polycopié est conçu comme un support pédagogique destiné aux étudiants du Master « Analyse Mathématique et Applications ». Il propose une étude rigoureuse et progressive des équations différentielles ordinaires (EDO), en mettant l'accent sur leur rôle fondamental dans l'analyse mathématique, la modélisation dynamique, l'optimisation et l'étude des systèmes complexes.

L'objectif principal est de fournir une base théorique solide, accompagnée d'outils pratiques permettant l'étude qualitative et quantitative des solutions, ainsi que leur application dans des contextes variés.

Ce document est structuré en trois grandes parties :

Chapitre 1 : Généralités sur les équations différentielles

Ce chapitre présente les notions fondamentales liées aux équations différentielles : notion de solution, types de solutions (locales, maximales, globales et saturées), théorème de Cauchy-Lipschitz, explosion en temps fini, étude qualitative des systèmes, analyse des systèmes non linéaires autonomes, protocoles d'étude, ainsi que de nombreux exercices corrigés et supplémentaires.

Chapitre 2 : EDO's sous contrainte

Cette partie développe l'étude des systèmes différentiels sous contraintes à travers les cônes tangents, les propriétés géométriques fondamentales, le théorème de Nagumo, ainsi que plusieurs exercices d'application corrigés.

Chapitre 3 : Notion de stabilité

Le dernier chapitre traite de la stabilité des systèmes dynamiques : stabilité linéaire et non linéaire, méthodes de Lyapunov, ensembles ω -limites, principe d'invariance de LaSalle, ainsi que des exemples détaillés et exercices corrigés.

Ce polycopié vise ainsi à fournir à l'étudiant une maîtrise rigoureuse des méthodes analytiques, qualitatives et géométriques nécessaires à l'étude moderne des équations différentielles ordinaires, tout en développant son autonomie scientifique dans les domaines de la modélisation et de l'analyse dynamique.

Chapitre 1

Généralités sur les équations différentielles

Ce chapitre est consacré aux rappels de quelques définitions et théorèmes qui seront utilisés dans la suite

1.1 Notion de solution, type de solutions

1.1.1 Définitions et généralités

Définition 1.1.1:

Soit I un intervalle ouvert de \mathbb{R} et Ω un ouvert de \mathbb{R}^n ($n \geq 1$), et $f : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$. On appelle équation différentielle (EDO) du premier ordre associée à f l'équation suivante :

$$X' = f(t, X) \tag{1.1}$$

Définition 1.1.2:

Une solution d'EDO (1.1) est un couple (J, X) où $J \subset I$ est un intervalle (d'intérieur non vide) et $X : J \rightarrow \Omega \in \mathbb{R}^n$ une fonction dérivable telle que, pour tout $t \in J$ on a

$$X'(t) = f(t, X(t))$$

On donne maintenant la notion de prolongement

Définition 1.1.3:

Soient (J_1, X_1) et (J_2, X_2) deux solutions. On dit que (J_2, X_2) est un prolongement de (J_1, X_1) si

$$J_1 \subset J_2 \text{ et } X_1 = X_2 \text{ sur } J_1.$$

- On dit que (J, X) est une solution maximale si elle n'est pas (strictement) prolongeable.
- On dit que (J, X) est une solution globale si $J = I$.

Pour $t_0 \in I$ et $X_0 \in \Omega$, on s'intéresse au problème de Cauchy

$$\begin{cases} X' = f(t, X) \\ X(t_0) = X_0. \end{cases} \quad (1.2)$$

Définition 1.1.4:

Une solution du problème de Cauchy (1.2) est un couple (J, X) où $J \subset I$ est un intervalle (d'intérieur non vide) contenant t_0 et $X : J \rightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^n$ une fonction dérivable telle que, pour tout $t \in J$ on ait $X'(t) = f(t, X(t))$ et $X(t_0) = X_0$.

Définition 1.1.5: S

it $f : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$, avec I un intervalle ouvert de \mathbb{R} , Ω un ouvert de \mathbb{R}^n ($n \geq 1$), et $p \geq 1$.

Définition 1.1.6:

On dit que f est lipschitzienne par rapport à la variable d'état X sur $I \times \Omega$ si on peut trouver un réel $k \geq 0$ tel que

$$\|f(t, X_1) - f(t, X_2)\| \leq k \|X_1 - X_2\|, \quad \forall t \in I, \forall (X_1, X_2) \in \Omega^2.$$

Définition 1.1.7:

On dit que f est localement lipschitzienne par rapport à la variable X sur $I \times \Omega$ si pour tout point (t_0, X_0) dans $I \times \Omega$ on peut trouver un voisinage de ce point tel que f soit lipschitzienne par rapport à la variable X sur ce voisinage : pour tout $(t_0, X_0) \in I \times \Omega$, il existe $\varepsilon = \varepsilon_{(t_0, X_0)} > 0$ et $k = k_{(t_0, X_0)} \geq 0$ tels que

$$\|f(t, X_1) - f(t, X_2)\| \leq k \|X_1 - X_2\|, \quad \forall t \in]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[, \forall (X_1, X_2) \in B(X_0, \varepsilon).$$

Dans la suite, nous présentons un théorème qui représente le clé pour démontrer l'existence et l'unicité du problème de Cauchy.

1.2 Théorème de Cauchy - Lipschitz

Dans la suite, on donne un théorème tres important

Théorème 1.2.1:

Soient I un intervalle ouvert de \mathbb{R} , $t_0 \in I$, Ω un ouvert de \mathbb{R}^n , $X_0 \in \Omega$. Soit $f : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue et localement lipschitzienne par rapport à X sur $I \times \Omega$. Alors le problème de Cauchy

$$\begin{cases} X' = f(t, X) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases} \quad (1.3)$$

admet une unique solution maximale (J, X) , et J est un intervalle ouvert. De plus, cette solution est de classe C^1 sur J .

Exemple 1.2.1. Soit le problème de Cauchy :

$$(E) : \begin{cases} X'(t) = t^2 + X^2 \\ X(0) = 0 \end{cases}$$

Montrer que (E) une unique solution maximale X définie sur un intervalle J .

Solution

On a : $f(t, X) = t^2 + X^2$ et

$$X'(t) = f(t, X(t)) = t^2 + X(t)^2$$

telle que

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t, X) &\longrightarrow f(t, x) = t^2 + X^2 \end{aligned}$$

f est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et localement lipschitzienne en X , en effet :

- $\frac{\partial f}{\partial X} = 2X$ continue.
- $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$.

d'après la théorème de Cauchy Lipschitz, le problème (E) admet une unique solution maximale, X définie sur $J \subset \mathbb{R}$ et $0 \in J$

Voici quelques conséquences de ce théorème :

Lemme 1.2.2:

(**Existence locale**) Il existe $\varepsilon > 0$ et $X : \underbrace{[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]}_{=: J} \rightarrow \Omega$ tel que (J, X) est solution du problème de Cauchy.

Lemme 1.2.3:

Si (\tilde{J}, \tilde{X}) est une autre solution du problème de Cauchy, alors il existe $0 < \tilde{\varepsilon} < \varepsilon$ tel que $\tilde{X} \equiv X$ sur $]t_0 - \tilde{\varepsilon}, t_0 + \tilde{\varepsilon}[$.

Lemme 1.2.4:

Si (J_1, X_1) et (J_2, X_2) sont deux solutions du problème de Cauchy avec J_1 et J_2 ouverts, alors $X_1 \equiv X_2$ sur $J_1 \cap J_2$.

1.3 Explosion en temps fini

Le Théorème de Cauchy Lipschitz fournit une solution maximale définie sur $J \subset I$ et est donc un résultat local : rien n'indique que la solution maximale est globale.

Exemple 1.3.1. *La solution maximale du problème de Cauchy*

$$\begin{cases} x' = x^2 \\ x(0) = 1, \end{cases}$$

se calcule, $x(t) = \frac{1}{1-t}$, et n'est définie que sur $] -\infty, 1[$. On a explosion en temps fini : $x(t) \rightarrow +\infty$ quand $t \rightarrow 1^-$, voir Figure 1.1.

Théorème 1.3.1:

Soit $f : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ continue et localement lipschitzienne par rapport à la variable d'état X . Soit $(J =]\alpha, \beta[, X)$ une solution maximale de $X' = f(t, X)$.

Alors

1. Si $\beta < \sup I$ alors $\lim_{t \rightarrow \beta^-} \|X(t)\| = +\infty$.
2. Si $\inf I < \alpha$ alors $\lim_{t \rightarrow \alpha^+} \|X(t)\| = +\infty$.

Théorème 1.3.2:

Si $f : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continue et (globalement) lipschitzienne par rapport à X , alors les solutions maximales de $X' = f(t, X)$ sont globales.

Signalons enfin que, lorsque $\Omega \neq \mathbb{R}^n$ la notion d'explosion en temps fini est remplacée par la notion de "sortie de tout compact en temps fini".

Théorème 1.3.3:

Soit $f : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ continue et localement lipschitzienne par rapport à la variable d'état X . Soit $(J =]\alpha, \beta[, X)$ une solution maximale de $X' = f(t, X)$.

Alors

1. Si $\beta < \sup I$ alors X sort de tout compact de Ω au voisinage de β : pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$X(t) \notin K, \forall t \in]\beta - \varepsilon, \beta[.$$

2. Si $\inf I < \alpha$ alors conclusion "similaire".

1.4 Etude qualitative des EDO's n dimension finie

Ici on considère le système différentiel linéaire à coefficient constant suivant :

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t). \quad (1.4)$$

Ici $x : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^2$ et A est une matrice inversible à coefficients constants et réels.

L'allure des trajectoires (ou orbites) du système dépendent de la nature des valeurs propres de la matrice A . On trouvera ci-dessous, dans chacun des cas, l'allure des trajectoires ainsi que le nom attribué à l'unique point stationnaire qui est zéro.

Cas 1. A admet deux valeurs propres réelles distinctes λ_1, λ_2 :

— Si $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$, alors l'origine est un nœud stable.

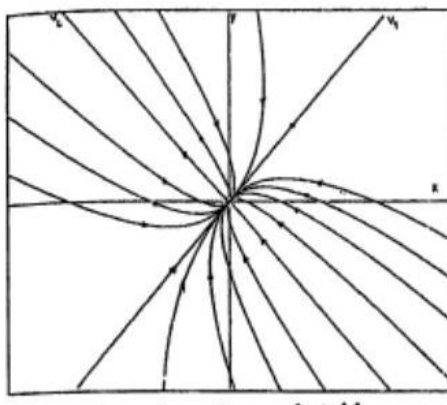


FIGURE 1.1 – Nœud stable

— Si $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$, alors l'origine est un nœud instable.

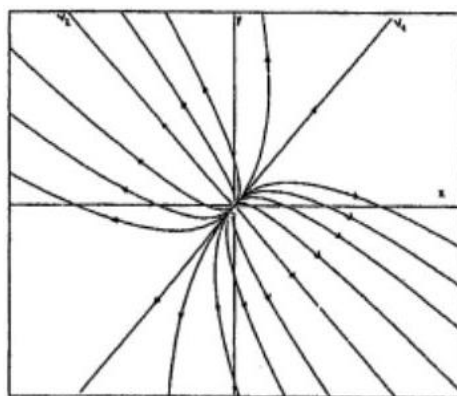


FIGURE 1.2 – Nœud instable

— Si $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$, alors l'origine est un point selle (ou col).

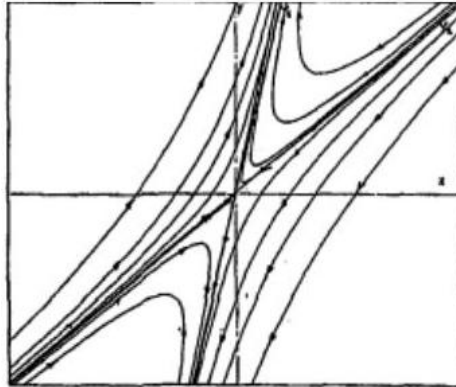


FIGURE 1.3 – Point selle

Cas 2. A admet deux valeurs propres non réelles conjuguées $\lambda = \alpha \pm i\beta$:

— Si $\text{Re } \lambda < 0$, alors l'origine est un foyer stable.

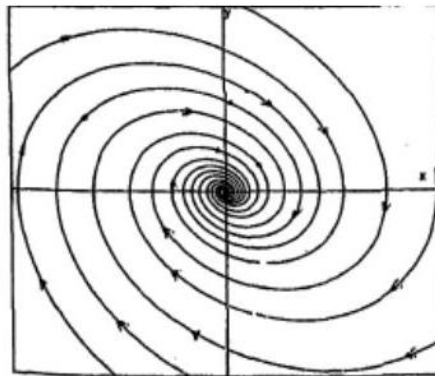


FIGURE 1.4 – Foyer stable

— Si $\text{Re } \lambda > 0$, alors l'origine est un foyer instable.

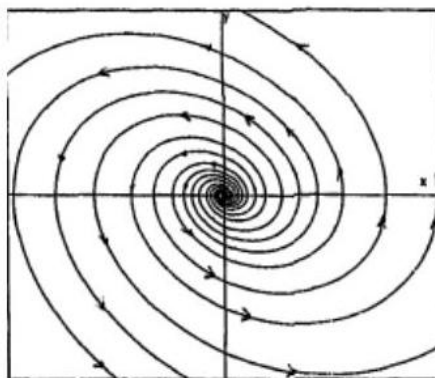


FIGURE 1.5 – Foyer instable

— Si $\operatorname{Re} \lambda = 0$, alors l'origine est un point centre.

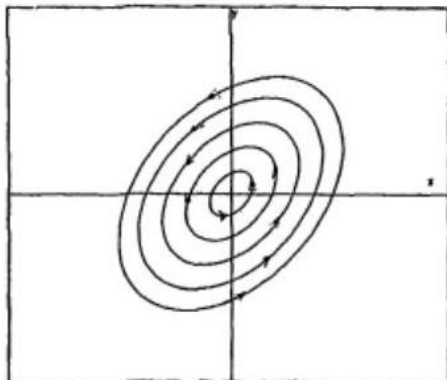


FIGURE 1.6 – Point centre

Cas 3. A admet une valeur propre réelle double λ :

— Si $\lambda < 0$ et $\dim E_\lambda = 2$, alors l'origine est un puits.

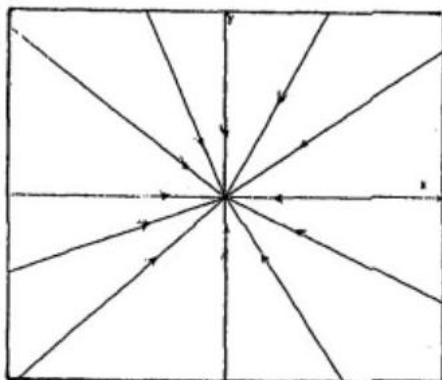


FIGURE 1.7 – Puits

— Si $\lambda > 0$ et $\dim E_\lambda = 2$, alors l'origine est une source.

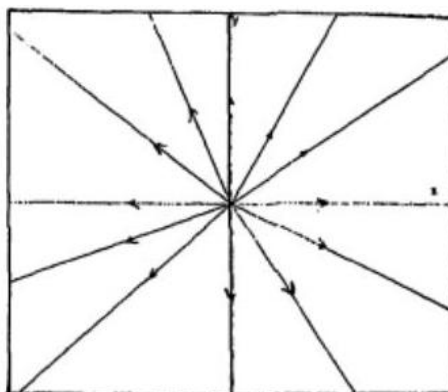


FIGURE 1.8 – Source

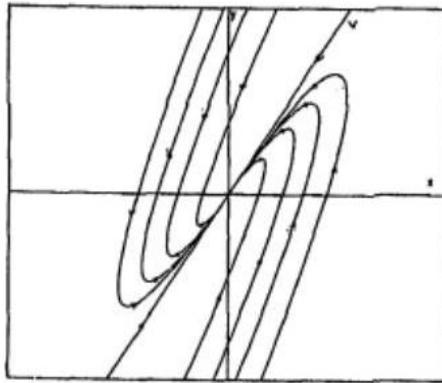


FIGURE 1.9 – Nœud dégénéré stable

- Si $\lambda < 0$ et $\dim E_\lambda = 1$, alors l'origine est un nœud dégénéré stable.
- Si $\lambda > 0$ et $\dim E_\lambda = 1$, alors l'origine est un nœud dégénéré instable.

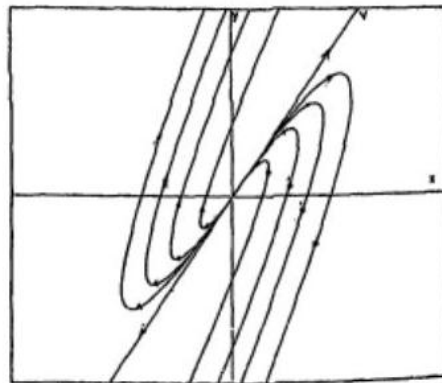


FIGURE 1.10 – Nœud dégénéré instable

1.5 Explications et indications de preuve

Dans tous ces dessins, le sens des flèches désigne le sens des t croissants (de $-\infty$ à $+\infty$), c'est-à-dire le sens dans lequel le point $x(t)$ se déplace lorsque t croît de $-\infty$ à $+\infty$.

Donnons une indication de preuve du premier cas, c'est-à-dire A admet deux valeurs propres distinctes λ_1 et λ_2 réelles : Soient v_1 et v_2 deux vecteurs propres de A correspondant aux valeurs propres λ_1 et λ_2 . Ils forment une base de \mathbb{R}^2 ; soit P la matrice de passage de la base canonique à la base (v_1, v_2) . Si on note $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$

les coordonnées d'un point dans ces deux bases, on a :

$$x = Py.$$

D'autre part, on sait que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

alors le système d'EDO

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t)$$

s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &= \frac{d}{dt}(Py(t)) \\ &= P \frac{d}{dt}y(t) \\ &= Ax(t) \\ &= APy(t), \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\frac{d}{dt}y(t) = P^{-1}AP y(t) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} y(t),$$

où $y(t) = (y_1(t), y_2(t))$. Cela est équivalent aux deux EDO :

$$\begin{cases} y_1'(t) = \lambda_1 y_1(t), \\ y_2'(t) = \lambda_2 y_2(t). \end{cases}$$

D'où les solutions sont :

$$\begin{cases} y_1(t) = y_1(0)e^{\lambda_1 t}, \\ y_2(t) = y_2(0)e^{\lambda_2 t}, \end{cases}$$

pour toutes les valeurs de $(y_1(0), y_2(0)) \neq (0, 0)$.

Les trajectoires décrites dans les figures précédentes sont les courbes données en co-

ordonnées paramétriques par

$$y_1 = y_1(0)e^{\lambda_1 t}, \quad y_2 = y_2(0)e^{\lambda_2 t}.$$

Ces courbes $(y_1(t), y_2(t))$ sont tangentes au vecteur propre correspondant à la valeur propre de plus petit module et elles ont une direction parabolique dans la direction du vecteur propre correspondant à la valeur propre de plus grand module (pour cela, il faut examiner $\frac{y_1}{y_2}$).

1.6 Etude qualitative des systèmes différentiels non linéaires autonomes

Supposons que l'origine est un point d'équilibre pour le système différentiel non linéaire autonome :

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(x(t)) \tag{1.5}$$

Comme $f(0) = 0$ on peut écrire pour $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + df_x(0) \cdot x + g(x) \\ &= df_x(0) \cdot x + f(x) \end{aligned}$$

ici $df_x(0)$ est la différentielle (ou la jacobienne) de f à l'origine et g est une fonction de classe C^1 qui vérifie

$$g(x) = o(\|x\|); \|x\| \longrightarrow 0$$

Alors, on peut écrire le système différentiel comme suit

$$\frac{d}{dt}x(t) = df_x(0) \cdot x(t) + g(x(t)) \tag{1.6}$$

où $g \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $g(x) = o(\|x\|)$, $\|x\| \longrightarrow 0$

1.6.1 Théorème de linéarisation

Théorème 1.6.1:

Soient (λ_k) les valeurs propres de $df_x(0)$ et supposons que $\operatorname{Re}(\lambda_k) < 0, \forall k$. Alors pour tout μ tel que : $0 < \mu < \min(\operatorname{Re}(-\lambda_k))$ et tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que si $x(\cdot)$ est une solution de (4.4.3) qui à un instant t_0 vérifie $\|x(t_0)\| \leq \delta$, alors :

(a) $x(\cdot)$ existe pour tout $t \geq t_0$.

(b) $\|x(t)\| \leq \varepsilon e^{-\mu t}; \forall t \geq t_0$ En particulier, l'origine est asymptotiquement stable.

Théorème 1.6.2:

Soient (λ_k) les valeurs propres de $df_x(0)$. Supposons que : $\operatorname{Re}(\lambda_k) \neq 0, \forall k$. Alors, il existe un voisinage U de l'origine et un homéomorphisme θ de U dans un voisinage V de zéro qui envoie une trajectoire du système sur une trajectoire du système linéaire $x'(t) = df_x(0) \cdot x(t)$ en conservant le sens du temps.

Remarque 1.6.3: P

r exemple en dimension $n = 2$, les trajectoires du système non linéaire ressembleront à celles décrites au paragraphe précédant (cas linéaire $x'(t) = Ax(t)$) dans tous les cas à l'exception du cas du point centre où $\operatorname{Re} \lambda = 0$ et pour lequel le théorème de linéarisation est faux.

Exemple 1.6.1. *Voici un exemple qui illustre cette remarque Soit le système différentiel non linéaire en dimension $n = 2$*

$$X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y - x(x^2 + y^2) \\ x - y(x^2 + y^2) \end{pmatrix}$$

Ici $f(x, y) = (-y - x(x^2 + y^2))$. On voit que $f(0, 0) = (0, 0)$, d'où l'origine est un point d'équilibre.

On écrit le système linéarisé en utilisant la formule de Taylor au voisinage de l'origine

$$X'(t) = df_X(0)X(t) + g(X)$$

où $X = (x, y)$. Alors le système linéaire est $X'(t) = df_x(0) \cdot X(t)$ où

$$df_X = df_{(x,y)} = \begin{pmatrix} -3x^2 & -1 \\ 1 & -3y^2 \end{pmatrix}$$

d'où $df_X(0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Un calcul simple donne les valeurs propres $\lambda = \pm i$, d'où ici $\text{Re } \lambda = 0$.

Du paragraphe précédent, l'origine $(0, 0)$ est un centre pour le système linéaire $X'(t) = dF_X(0) \cdot X(t)$ et les orbites sont des cercles centrés en zéro. Que se passe pour le système non linéaire ?

Faisons un passage aux coordonnées polaires :

$$\begin{cases} x(t) = \rho(t) \cos \theta(t) \\ y(t) = \rho(t) \sin \theta(t) \end{cases}$$

alors, la dérivation par rapport à t donne

$$\begin{aligned} x'(t) &= \rho'(t) \cos \theta(t) - \rho(t) \theta'(t) \sin \theta(t) \\ y'(t) &= \rho'(t) \sin \theta(t) + \rho(t) \theta'(t) \cot \theta(t) \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{cases} x(t)x'(t) + y(t)y'(t) = \rho(t)\rho'(t) \\ x(t)y'(t) - x'(t)y(t) = \rho^2(t)\theta'(t) \end{cases}$$

Il vient que

$$\begin{aligned} \rho(t)\rho'(t) &= -xy - x^2(x^2 + y^2) + xy - y^2(x^2 + y^2) = -\rho^4(t) \\ \rho^2(t)\theta'(t) &= x^2 - xy(x^2 + y^2) + y^2 + xy(x^2 + y^2) = \rho^2(t) \end{aligned}$$

Ce qui donne pour $\rho \neq 0$ (c'est à dire pour une trajectoire issue d'un point non nul) :

$$\begin{cases} \rho'(t) = -\rho^3(t) \\ \theta'(t) = 1 \end{cases}$$

Il vient que

$$\begin{aligned} \int \frac{\rho'(t)}{\rho^3(t)} dt &= - \int 1 dt \\ \frac{-1}{2} \int \left(\frac{1}{\rho^2(t)} \right) dt &= - \int 1 dt \\ \frac{-1}{2} \left(\frac{1}{\rho^2(t)} - \frac{1}{\rho^2(0)} \right) &= -t \\ \frac{1}{\rho^2(t)} &= 2t + \frac{1}{\rho^2(0)} \\ &= \frac{2t\rho^2(0) + 1}{\rho^2(0)} \end{aligned}$$

Alors, on obtient pour tout $t \geq 0$:

$$\begin{cases} \rho(t) = \left(\frac{\rho^2(0)}{1+2t\rho^2(0)} \right)^{\frac{1}{2}} \\ \theta(t) = \theta(0) + t \end{cases}$$

Ce qui montre que lorsque $t \rightarrow +\infty$ alors

$$\theta(t) \rightarrow +\infty, \quad \rho(t) \rightarrow 0$$

D'où une trajectoire de la solution du système non linéaire, au voisinage de l'origine $(0, 0)$, est une spirale qui converge vers l'origine (c'est un ensemble non compact), tandis que la trajectoire du système linéarisé $X'(t) = df_X(0) \cdot X(t) + g(X)$ est un cercle (qui est un ensemble compact). Par conséquent, ces trajectoires ne peuvent être images l'une de l'autre par un homéomorphisme. Ce qui justifie le théorème précédent.

1.6.2 Méthode d'étude des systèmes différentiels autonomes en dimension $n = 2$

Dans ce paragraphe, nous allons donner quelques éléments qui forment un protocole de l'étude géométrique des systèmes différentiels autonomes de dimension $n = 2$. Considérons alors un tel système sous la forme

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t), y(t)) \\ y'(t) = g(x(t), y(t)) \end{cases} \quad (4.4.8)$$

où f et g sont des fonctions de classe C^1 de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} .

1. On étudie la nature des points critiques (nœud, col, foyer, ...). Les résultats du paragraphe précédent ainsi que le théorème de linéarisation nous donnent (sauf le cas du centre) une idée de l'allure des trajectoires au voisinage de ces points. Pratiquement, si $f(x_0, y_0) = g(x_0, y_0) = 0$, il est commode de poser

$$X = x - x_0, \quad Y = y - y_0.$$

Par ailleurs,

$$f(x, y) = aX + bY + o(X^2 + Y^2), \quad g(x, y) = cX + dY + o(X^2 + Y^2).$$

Le linéarisé du système en (x_0, y_0) a pour matrice

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

2. Une isocline est une courbe du plan le long de laquelle la pente des trajectoires est constante. Si $m \in \overline{\mathbb{R}}$, on pose

$$I_m = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{f(x, y)}{g(x, y)} = m\}.$$

Le long de I_m , on a $\frac{x'(t)}{y'(t)} = m$. Si $m = 0$, I_0 est l'isocline où la pente de la trajectoire est horizontale. Si $m = \infty$, I_∞ est l'isocline où la pente de la trajectoire est verticale. On a

$$I_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 0\}, \quad I_\infty = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = 0\}.$$

3. On détermine les régions où $f(x, y) > 0$, $f(x, y) < 0$, de même pour g :

$$f > 0, g > 0, \quad f > 0, g < 0, \quad f < 0, g > 0, \quad f < 0, g < 0.$$

4. Les orbites peuvent être symétriques par rapport à Ox , Oy ou l'origine. Soient

Γ_1 et Γ_2 deux trajectoires symétriques. On dit qu'elles sont parcourues dans le même sens si, en tous points symétriques, les vecteurs orientés sont symétriques.

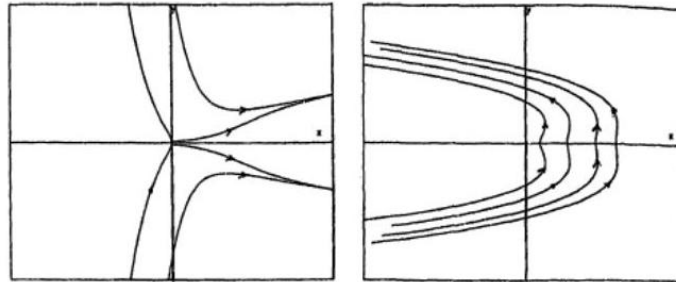


FIGURE 1.11 – Symétrie par rapport à l'axe des abscisses Ox

Symétrie par rapport à Ox Elle est vérifiée dans l'un des deux cas suivants :

$$\text{Cas 1 : } \begin{cases} f(x, -y) = f(x, y) \\ g(x, -y) = -g(x, y) \end{cases}, \quad \text{Cas 2 : } \begin{cases} f(x, -y) = -f(x, y) \\ g(x, -y) = g(x, y) \end{cases}$$

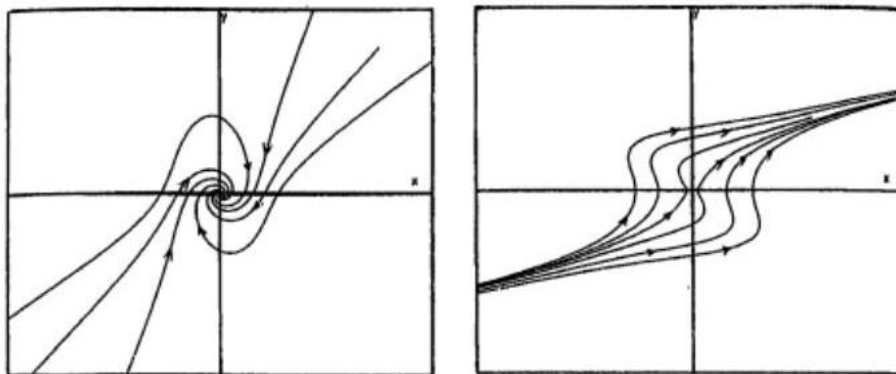


FIGURE 1.12 – Symétrie par rapport à l'axe des ordonnées Oy

Symétrie par rapport à Oy Elle est vérifiée dans l'un des deux cas suivants :

$$\text{Cas 1 : } \begin{cases} f(-x, y) = -f(x, y) \\ g(-x, y) = g(x, y) \end{cases}, \quad \text{Cas 2 : } \begin{cases} f(-x, y) = f(x, y) \\ g(-x, y) = -g(x, y) \end{cases}$$

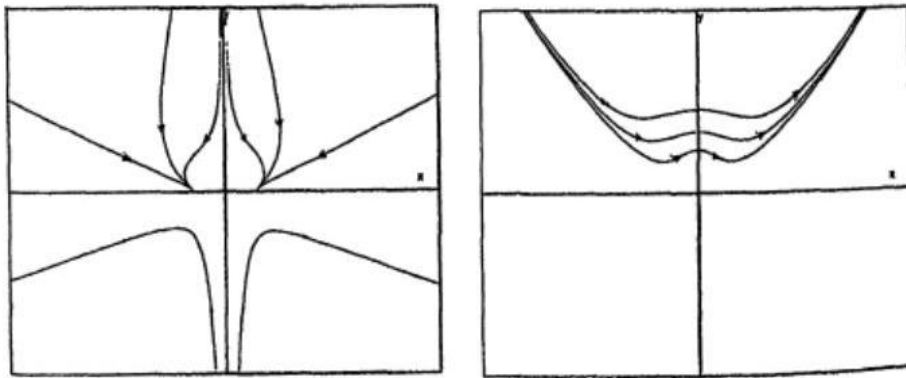


FIGURE 1.13 – Symétrie par rapport à l'origine

Symétrie par rapport à l'origine On a deux cas :

$$\text{Cas 1 : } \begin{cases} f(-x, -y) = -f(x, y) \\ g(-x, -y) = -g(x, y) \end{cases}, \quad \text{Cas 2 : } \begin{cases} f(-x, -y) = f(x, y) \\ g(-x, -y) = g(x, y) \end{cases}$$

- On détermine les zones pièges. Une zone piège est une partie du plan telle que toute trajectoire qui y entre ne peut pas en ressortir. C'est le cas, par exemple, si le champ est rentrant sur tous les côtés de la zone.

1.7 Affinement du protocole

- Le théorème de Cauchy-Lipschitz nous dit que par tout point du plan passe une et une seule solution du système (4.4.8). En particulier, deux trajectoires du système ne se coupent jamais.
- Au voisinage des points (x_0, y_0) où $f(x_0, y_0) \neq 0$, les trajectoires du système (4.4.8) se coïncident avec le graphe des solutions de l'équation différentielle

$$y'(x) = \frac{g(x, y(x))}{f(x, y(x))}.$$

En particulier, les trajectoires sont des courbes $y = \phi(x)$. Ceci peut aussi servir à déterminer la concavité des trajectoires. Pour cela, on peut calculer $y''(x)$ à partir de l'équation ci-dessus et étudier son signe.

De même, si $g(x_0, y_0) \neq 0$, les trajectoires se coïncident avec le graphe des

solutions de l'équation différentielle

$$x'(y) = \frac{f(x(y), y)}{g(x(y), y)}.$$

Ici, les trajectoires sont des fonctions $x = \psi(y)$.

3. À propos des isoclines : Si une isocline I_m est une droite de pente m , alors c'est une solution particulière de notre système.
4. Trajectoires monotones : On dit qu'une trajectoire est monotone si, dans le plan, elle est le graphe d'une fonction $y = \phi(x)$ croissante ou décroissante. Si une trajectoire est monotone, alors elle sort de tout compact qui ne contient pas de points d'équilibre. Cela montre que si

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (x(t), y(t)) = (x_0, y_0),$$

alors (x_0, y_0) est un point d'équilibre.

1.8 Exercices

Exercice 1. On cherche à analyser le phénomène de la vague solitaire, ou le problème de soliton. Le problème est modélisé comme un long canal considéré unidimensionnel. La quantité intéressante est le profil $u(\cdot, \cdot)$ de la surface de l'eau, qui est une fonction du temps t et de la position x le long du canal. Ce profil est mesuré par rapport à la hauteur h de l'eau au repos. Il satisfait l'équation aux dérivées partielles dite de Korteweg-de Vries :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\sqrt{\frac{g}{h}} \frac{\partial}{\partial x} \left(hu + \frac{3}{4}u^2 + \frac{\sigma}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)$$

où g est la constante de gravitation et $\sigma > 0$ est une constante (qui dépend de h , de g et de la tension superficielle). On appelle soliton, une solution $u(t, x)$ de l'équation aux dérivées partielles (4.5.1) telle que :

$$u(t, x) = z(s), \quad \text{où} \quad s = x - vt$$

où v étant une constante (c'est la vitesse de la vague).

On suppose que $z(s)$ et toutes ses dérivées tendent vers 0 quand s tend vers l'infini.

Le but de l'exercice est de démontrer l'existence de solution et de préciser la vitesse et l'amplitude de la vague.

(1) Montrer qu'un soliton $z(s)$ vérifie l'équation différentielle ordinaire suivante

$$\sigma z''(s) = bz(s) - \frac{3}{2}z^2(s)$$

où b est une constante.

(2) Ecrire (4-5.2) sous forme d'un système différentiel d'ordre un $x'(s) = f(x(s))$.

Déterminer les points d'équilibres de f et discuter leur stabilité en utilisant la méthode de linéarisation. Que peut-on dire sur l'existence des solitons ?

(3) Trouver une constante du mouvement, c'est-à-dire une intégrale première.

(4) Montrer que, si $b < 0$, il n'y a pas de soliton.

(5) Supposons $b > 0$. Montrer qu'il existe un unique soliton $u(t, x)$, tracer son orbite et déterminer son amplitude.

Solution (1) Considérons la fonction

$$y(t, x) = z(s),$$

où le changement de variable s est donné par $s = x - vt$. Alors les dérivées partielles s'écrivent

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -vz'(s),$$

et

$$\frac{\partial y}{\partial x} = z'(s).$$

D'où l'équation différentielle partielle (4.5.1) de Korteweg-de Vries s'écrit comme suit

$$-vz'(s) = -\sqrt{\frac{g}{h}} \frac{d}{ds} \left(hz(s) + \frac{3}{4}z^2(s) + \frac{\sigma}{2}z''(s) \right),$$

ou encore

$$\frac{d}{ds} \left(2 \left(h - v\sqrt{\frac{h}{g}} \right) z(s) + \frac{2}{3}z^2(s) + \sigma z''(s) \right) = 0.$$

On voit que la quantité $2 \left(h - v\sqrt{\frac{h}{g}} \right) z(s) + \frac{2}{3}z^2(s) + \sigma z''(s)$ est indépendante de s . Par ailleurs, les conditions aux limites impliquent qu'elle est nulle, ce qui donne l'équation demandé avec

$$b = 2 \left(v\sqrt{\frac{h}{g}} - h \right).$$

(2) On pose $x(s) = (x_1(s), x_2(s))$, où $x_1(s) = z(s)$ et $x_2(s) = z'(s)$. Alors l'équation différentielle d'ordre deux (4.5.2) peut s'écrire sous forme d'un système différentiel d'ordre un $x'(s) = f(x(s))$, où le champ de vecteurs sur \mathbb{R}^2 associé à l'équation est

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ bx_1 - \frac{3}{2}x_1^2 \end{pmatrix}$$

Ce champ admet deux points d'équilibres : $(0, 0)$ et $(\frac{2b}{3}, 0)$. Calculons le linéarisé autour de chacun des équilibres. On a la différentielle de f est

$$Df(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b - 3x_1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Df(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Df(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & 0 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres du linéarisé à l'origine sont donc

$$\pm i\sqrt{|b|} \text{ si } b \leq 0, \pm\sqrt{|b|} \text{ si } b \geq 0.$$

et celles du linéarisé en \bar{x} sont

$$\pm\sqrt{|b|} \text{ si } b \leq 0, \pm i\sqrt{|b|} \text{ si } b \geq 0$$

Ainsi, pour $b > 0$ l'origine est un équilibre non stable, et on ne peut pas conclure pour \bar{x} , qui n'est pas hyperbolique. Inversement pour $b < 0$, \bar{x} n'est pas stable et l'origine n'est pas hyperbolique.

Que peut-on conclure pour l'existence de solutions ? On sait que pour un soliton $z(s)$, la solution $(z(s), z'(s))$ de $x' = f(x)$ tend vers 0 quand $s \rightarrow \pm\infty$. Pour qu'un soliton existe, il faut donc qu'il existe une solution de $x' = f(x)$ qui tend vers 0 en $\pm\infty$

Quand $b < 0$, la linéarisation ne nous apprend rien. Quand $b > 0$ en revanche, l'origine est un équilibre hyperbolique. D'après le théorème d'Hartman-Grobmann, on

sait alors qu'au voisinage de l'origine, le portrait de phase de $x' = f(x)$ est topologiquement équivalent à celui de l'équation linéarisée car celle-ci admet une valeur propre positive et une négative, il y a que 2 solutions qui tend vers l'origine en $\pm\infty$. Il est donc impossible qu'il existe des solutions mais pas plus de deux. Remarquons que si les valeurs propres du linéarisé avaient été toutes deux de même signe, on aurait pu conclure qu'il n'y avait pas de solutions.

(3) Il faut trouver une fonction de classe C^1 au voisinage de l'équilibre notée E telle que $\nabla E(x) \cdot f(x) \equiv 0$, c'est-à-dire

$$x_2 \frac{\partial E}{\partial x_1}(x) + \left(bx_1 - \frac{3}{2}x_1^2 \right) \frac{\partial E}{\partial x_2}(x) = 0$$

On peut prendre par exemple

$$E(x) = \frac{x_1^2}{2} (x_1 - b) + \frac{x_2^2}{2}$$

(4) Soit $x(s) = (z(s), z'(s))$ une solution de $x'(s) = f(x(s))$ associée à un soliton $z(s)$. On sait que une intégrale première E est une constante le long des champs de vecteurs solutions de $x'(s) = f(x(s))$ et vu les conditions aux limites des solitons, cette fonction constante vérifie $E(0) = 0$. Ainsi l'orbite de $x(s)$ est contenue dans la courbe de niveau

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : E(x) = 0\}$$

Donc, lorsque $b < 0$ alors l'origine est un point isolé de cette courbe de niveau (c'est un minimum locale). La seule solution qui tend vers 0 en $\pm\infty$ est donc la solution triviale $x(s) \equiv 0$. Il n'y a donc pas de solution pour $b < 0$.

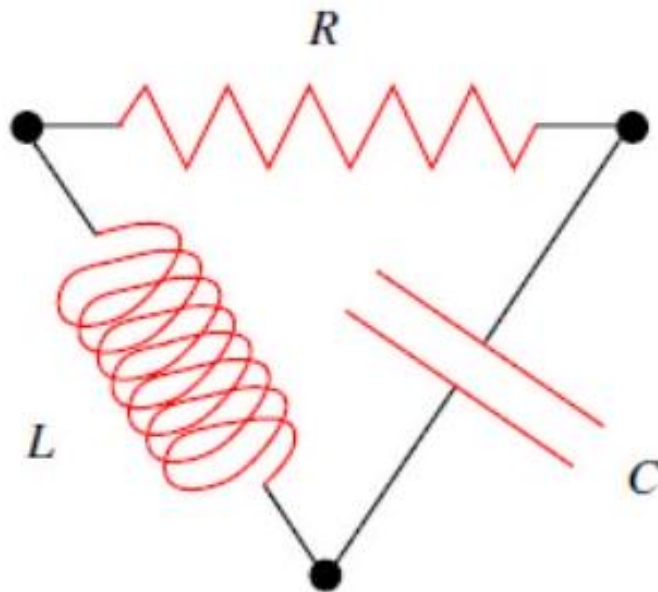
(5) Si $b > 0$, on peut voir d'après la courbe de niveau $\{x \in \mathbb{R}^2 : E(x) = 0\}$ que les branches du demi-plan gauche sont infinies, par suite, on conclut qu'une solution $x(s)$ associée à un soliton doit être contenue dans la boucle du demi-plan de droite. Il reste à montrer qu'il existe une solution parcourant l'ensemble de la boucle (privée de l'origine). Soit $x^*(b, 0)$ le point d'intersection de la boucle avec l'axe horizontal et $x(s)$ la solution maximale issue de x^* en $s = 0$. Elle est définie sur \mathbb{R} Puisque $f(x^*) = (0, -\frac{b}{2})$, la demi-orbite $x(s) \in]0, \infty)$ est dans la partie de la boucle où $x_2 < 0$: la fonction $x_1(t)$

est décroissante et positive, d'où elle admet une limite. De plus, $x_1'(s)$ étant non nulle, sur cette partie de la boucle $x_2(s)$ est fonction de $x_1(s)$ et admet également une limite. Donc $x(s)$ a une limite quand $t \rightarrow \infty$. Cette limite étant forcément un équilibre ce ne peut être que l'origine. Le même raisonnement s'applique quand $t \rightarrow -\infty$. Ainsi, $x(\cdot)$ est une solution qui tend vers l'origine quand $s \rightarrow \pm\infty$ (toutes les autres s'obtiennent à partir de celle-ci par une translation du temps). Sa coordonnée $x_1(s) = z(s)$ est alors un soliton. On sait de plus que son amplitude maximale, obtenue pour $x_2 = 0$, est égale à b .

En résumé, on a démontré que pour toute vitesse de propagation v telle que $b > 0$, c'est-à-dire $v > \sqrt{gh}$, il existe un soliton dont l'amplitude maximale est $b = 2 \left(v \sqrt{\frac{h}{g}} - h \right)$.

Exercice 2. L'évolution d'un circuit électrique d'intensité $i(t)$ et de potentiel $v(t)$ est décrite par le système d'équations différentielles sur \mathbb{R}^2 du type

$$\begin{cases} L \frac{di}{dt} = v - h(i(t)) \\ C \frac{dv}{dt} = -i(t) \end{cases}$$



Où $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^1 et les constantes positives L et C sont la résistance et la capacité du circuit. L'énergie du système est

$$E(i, v) = \frac{1}{2} (Li^2 + Cv^2).$$

(1) Déterminer les points d'équilibre de l'équation (4.5.3) et discuter sa stabilité en fonction de $h'(0)$.

(2) Supposons que h vérifie $xh(x) > 0$ pour $x \neq 0$. Montrer que l'équilibre est asymptotiquement stable et déterminer son bassin d'attraction.

Solution

1. L'équilibre est le point $i = 0, v = h(0)$. Le linéarisé de l'équation différentielle en ce point $(0, h(0))$ est $x'(t) = Ax(t)$, où

$$A$$

est la différentielle de f le champ associé au système différentiel au point $(0, h(0))$:

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{h'(0)}{L} & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & 0 \end{pmatrix}$$

Remarquons que $\det A = \frac{1}{LC} > 0$. Les valeurs propres de A ont donc des parties réelles de même signe, qui est aussi le signe de $\text{tr } A = -\frac{h'(0)}{L}$, on en conclut alors que

- — Si $h'(0) > 0$, alors l'équilibre est asymptotiquement stable.
- Si $h'(0) < 0$, alors l'équilibre n'est pas stable.
- Si $h'(0) = 0$, alors l'équilibre n'est pas hyperbolique, on ne peut rien dire en utilisons le linéarisé.

(2) Notons tout d'abord que l'hypothèse sur h implique que $h(0) = 0$. L'équilibre est donc l'origine. Essayons de montrer que l'énergie $E(i, v) = \frac{1}{2}(Li^2 + Cv^2)$ est une fonction de Lyapunov stricte à l'origine. On a

- — l'origine est un minimum strict de E .
- $\frac{dE}{dt} = -ih(i) < 0$ si $i \neq 0$.

On a donc démontré que, le long d'une trajectoire $x(t) = (i(t), v(t))$, la fonction $E(x(t))$ est strictement décroissante tant que $i(t) \neq 0$. Or, si $x(t)$ n'est pas identiquement nulle, les instants t_0 où $i(t_0) = 0$ sont isolés puisqu'alors $i'(t_0) = v(t_0) \neq 0$. Ainsi $\frac{dE}{dt} < 0$ presque partout le long d'une trajectoire. D'où on peut conclure que $E(x(t))$ est strictement décroissante.

Par conséquent, la fonction $E : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de Lyapunov stricte à l'origine, ce qui implique que l'origine est un équilibre asymptotiquement stable.

De plus, $E(x) \rightarrow \infty$ quand $\|x\| \rightarrow \infty$, ce qui implique que le bassin d'attraction de l'origine est l'espace \mathbb{R}^2 tout entier.

Exercice 3. Soit le système différentiel

$$\begin{cases} x'(t) = -x(t), & t \geq 0 \\ y'(t) = (x(t) - y^2(t))y(t), & t \geq 0 \end{cases} \quad (4.5.4)$$

(1) Déterminer une solution générale.

(Indication : Voir que $\frac{dy}{dx} = -y + \frac{y^3}{x}$ puis utiliser le changement $u = \frac{1}{y^2}$).

(2) Montrer, en utilisant la définition, que le point d'équilibre $(0, 0)$ est asymptotiquement stable.

Solution (1) Déterminons une solution générale pour (4.5.4). On a $x'(t) = -x(t)$ implique que si $x(t) \neq 0, \forall t \geq 0$ alors $\frac{x'(t)}{x(t)} = -1$ et par intégration en t on trouve $\ln x(t) - \ln(x(0)) = -t$ d'où

$$\ln \frac{x(t)}{x(0)} = -t \Rightarrow x(t) = x(0)e^{-t}; \forall t \geq 0$$

Pour la deuxième équation on effectue un changement de variable convenable en posant $u = \frac{1}{y^2}$. On aura donc

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(x - y^2)}{-x} = -y + \frac{1}{x}y^3$$

Or que $u = \frac{1}{y^2}$ alors $du = \frac{-2}{y^3}dy$ (on suppose aussi que $y(t) \neq 0, \forall t \geq 0$), c'est-à-dire

$$dy = -\frac{1}{2}y^3 du$$

Donc $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}y^3 \frac{du}{dx} = -y + \frac{1}{x}y^3$. On obtient alors $\frac{du}{dx} = \frac{2y}{y^3} - \frac{2}{y^3} \cdot \frac{1}{x}y^3$, ou bien $\frac{du}{dx} = \frac{2}{y^2} - \frac{2}{x}$.

On aura alors

$$\frac{du}{dx} = 2u - \frac{2}{x}$$

C'est une EDO d'ordre un, linéaire et non homogène. On peut écrire

$$u'(x) = 2u(x) - \frac{2}{x}$$

,d'où une solution générale de cette EDO est donnée en utilisant la formule de Duhamel

$$u(x) = Ce^{2x} - 2 \int_{x(0)}^x \frac{1}{s} e^{-2s} ds \quad ()$$

avec $C > 0$ car $u = \frac{1}{y^2} > 0$.

D'où on trouve $y(t)$ en faisant le changement inverse, c'est-à-dire

$$u = \frac{1}{y^2} \Rightarrow y^2(t) = \frac{1}{u(t)}$$

avec $u(t) = u(x(t))$.

D'où $y(t) = \pm \frac{1}{\sqrt{u(x(t))}}$ avec $u(\cdot)$ est donnée en fonction de $x(t)$. Ainsi $(x(t), y(t))$ est une solution générale de (4.5.4).

2) Montrons que l'origine $(0,0)$ est asymptotiquement stable. Par définition de la stabilité asymptotique, tout d'abord on a

$$x(t) = x(0)e^{-t},$$

d'où on remarque que

- si $x(0) < 0$, alors $x(0) \leq x(t) < 0$.
- — si $x(0) > 0$, alors $0 < x(t) \leq x(0)$ (cela signifie que $x(t)$ est proche de $x(0)$ pour tout $t > 0$).

Montrons aussi que $y(t)$ est proche (c'est-à-dire au voisinage de $y(0)$) pour tout temps t , et pour cela on utilise $u(t)$

$$u(x(t)) = Ce^{2x(t)} - 2 \int_{x(0)}^{x(t)} \frac{e^{-2s}}{s} ds$$

D'après que $x(0) \leq x(t) < 0$ si $x(0) < 0$ et $0 < x(t) \leq x(0)$ si $x(0) > 0$, on conclut que

$$-2 \int_{x(0)}^{x(t)} \frac{e^{-2s}}{s} ds > 0, \forall t$$

1.9 Exercices supplémentaires

Exercice 1 : Dire si l'origine est stable, asymptotiquement stable ou instable pour les systèmes suivants :

1.

$$\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = 3x + 4y \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} x' = x + 4y \\ y' = -3x - 2y \end{cases}$$

3.

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = 0 \end{cases}$$

4.

$$\begin{cases} x' = 3x + 3z \\ y' = x + 2y - z \\ z' = -x + y - 2z \end{cases}$$

Calculer dans chacun des cas la dérivée de la norme euclidienne le long des trajectoires.

Plus précisément, pour les systèmes de dimension 2, cela revient à calculer

$$\frac{d}{dt}H(t) \quad \text{avec} \quad H(t) = x(t)^2 + y(t)^2.$$

Pour quels systèmes la norme euclidienne est-elle une fonction de Lyapounov ?

Exercice 2 : Le comportement d'un circuit RLC, avec une résistance de fonction caractéristique f , vérifie l'équation suivante, où x est l'intensité et y est l'opposée de la tension aux bornes du condensateur :

$$\begin{cases} \dot{x} = y - f(x) \\ \dot{y} = -x \end{cases}$$

1. La fonction f est supposée de classe \mathcal{C}^1 et vérifie toujours $f(0) = 0$. Trouver tous les équilibres du système. Calculer le système linéarisé au voisinage de ces points d'équilibre. À quelles conditions ces points d'équilibre sont-ils

asymptotiquement stables? Instables?

2. On suppose dans cette question que $f(x) = x$. Calculer explicitement les solutions du système. Interpréter.
3. On suppose dans cette question que f vérifie

$$f(x)x > 0 \quad \text{pour } x \neq 0.$$

La résistance est alors dite passive. Montrer que $x^2 + y^2$ est une fonction de Lyapounov du système. En déduire le comportement asymptotique des solutions du système pour toutes conditions initiales. Pourquoi ce résultat est-il compatible avec celui de la question 1)?

4. On suppose dans cette question que $f(x) = x^3$.
 - (a) Peut-on dire à première vue si les solutions sont globales ou explosives?
 - (b) Laquelle de ces deux techniques, linéarisation au voisinage du point d'équilibre ou utilisation de la norme comme fonction de Lyapounov, permet de conclure à propos de la stabilité du point $(0, 0)$?
5. On suppose dans cette question que la résistance est une diode à effet tunnel, de fonction caractéristique

$$f(x) = x^3 - x.$$

- (a) Le point $(0, 0)$ est-il stable?
- (b) Dessiner dans l'espace des phases les régions du plan où $x' < 0$, $x' = 0$, $x' > 0$, et celles où $y' < 0$, $y' = 0$, $y' > 0$. Sur votre dessin, indiquer par une flèche la direction du champ dans chacune des régions.
- (c) Décrire grâce à ce dessin le comportement d'une solution ayant pour condition initiale $(0, y_0)$ avec $y_0 > 0$.
- (d) Montrer que $x(t)^2 + y(t)^2$ est croissant le long des trajectoires si $x(t) < 1$ et décroissant si $x(t) > 1$.
- (e) Que va-t-il se passer?

Exercice 3 : Résoudre les équations différentielles linéaires suivantes (la variable étant x) :

1. $(x - x^3)y' + (2x^2 - 1)y = ax^3$.

2. $y' + \frac{n}{x}y = \frac{a}{x^n}$.

3. $y' + \frac{1 - 2x}{x^2}y = 1$.

4. $y' + y = e^{-x}$.

Exercice 4 : Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $\forall t, (x(t) - \alpha) + t^2x'(t) = 0$.

2. $\forall t, (1 + t^2)x'(t) = 1 + x(t)^2$.

3. $\forall t, x'(t) + x \cos t = \frac{\sin t}{2}$.

4. $\forall t, x'(t) + \frac{n}{t}x(t) = \frac{\alpha}{t^n}$.

5. $\forall x, y'(x) = e^x y^2$.

6. $\forall x, y'(x) = 2xy(x) + x^3$.

Exercice 5 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 .

(a) On suppose que f vérifie

$$\forall t, \forall x \neq 0, \quad xf(t, x) < 0.$$

Montrer que les solutions de l'équation différentielle $x' = f(t, x)$ sont définies jusqu'à $+\infty$ et admettent une asymptote horizontale. Préciser laquelle.

(b) On suppose maintenant que l'équation est à variables séparables,

$$f(t, x) = g(x)h(t),$$

où g est de classe \mathcal{C}^1 et h de classe \mathcal{C}^0 . On choisit deux zéros consécutifs $x_1 < x_2$ de la fonction g et une condition initiale (t_0, x_0) avec $x_0 \in (x_1, x_2)$. Montrer que la solution maximale vérifiant $\varphi(t_0) = x_0$ est définie sur \mathbb{R} tout entier.

(c) Application :

i. Résoudre explicitement l'équation

$$x' = x(x - 1) \cos t.$$

- ii. Montrer qu'aucune solution autre que les solutions constantes ne possède d'asymptote horizontale. Peut-on raisonner sans utiliser la forme explicite des solutions ?
- iii. Dessiner l'allure générale des solutions suivant la position de $\varphi(0)$ par rapport à 0 et 1.

Exercice 6 :

(a) Donner les solutions de

$$x' = x^\beta, \quad x(0) = x_0 > 0,$$

pour $\beta \in \mathbb{R}$. Pour quelles valeurs de β les solutions explosent-elles ? Pour quelles valeurs sont-elles globales ?

(b) Donner les solutions de

$$x' = x(\ln x)^\beta, \quad x(0) = x_0 > 0,$$

pour $\beta \in \mathbb{R}$. (On pensera à utiliser le changement de variable $y = \ln x$.)
Même question.

Exercice 7 : On considère un seau de rayon A , percé en son fond d'un trou de rayon a . Il est rempli d'eau jusqu'à la hauteur h , et cette eau coule du trou à la vitesse v .

- (a) Écrire l'équation de conservation de l'eau et l'équation de conservation de l'énergie. En déduire l'équation différentielle satisfaite par la hauteur d'eau dans le seau. Cette équation est la loi de Torricelli établie vers 1640.
- (b) Résoudre cette équation (uniquement pour les temps $t > 0$). Peut-on appliquer ici le théorème de Cauchy–Lipschitz ? Les solutions (pour $t > 0$) sont-elles uniques ?

- (c) Une fois le seau vide, on cherche à savoir quand il était plein. Pour cela, on inverse le sens du temps dans l'équation (changement de variable $t = -t'$). Montrer que l'équation devient

$$\frac{dx}{dt'} = \sqrt{|x|}.$$

Y a-t-il des solutions vérifiant $x(0) = 0$? Comparer avec les résultats connus sur l'unicité des solutions d'une EDO et expliquer mathématiquement pourquoi, quand le seau est vide, on ne peut plus savoir quand il a commencé à se vider.

Exercice 8 : Soit $I = (a, b)$ et $f : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 .

On suppose qu'il existe $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que

$$\int_0^1 \frac{ds}{h(s)} = +\infty \quad \text{et} \quad \forall t, x, y, |f(t, x) - f(t, y)| \leq h(|x - y|).$$

On pose

$$G(y) = \int_y^1 \frac{ds}{h(s)}, \quad y \geq 0.$$

Soient $x_1, x_2 : U \rightarrow \mathbb{R}$ deux solutions maximales de

$$x' = f(t, x) \quad \text{telles que} \quad x_1(0) = x_2(0) = \tilde{x}.$$

- (a) On pose $\rho(t) = |x_1(t) - x_2(t)|$. Montrer que ρ vérifie l'inéquation différentielle

$$\rho'(t) \leq h(\rho(t)).$$

- (b) En déduire que $x_1(t) = x_2(t)$ pour tout temps t .
(c) Application : combien l'EDO

$$x' = x\sqrt{\ln x}$$

possède-t-elle de solutions vérifiant $x(0) = 0$? Pourrait-on appliquer le théorème de Cauchy–Lipschitz?

Exercice 9 :

On considère le théorème suivant.

Théorème. Soient b_1 et b_2 deux champs de vecteurs définis sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, tels que

$$\forall (t, x) \in \mathbb{R}^2, \quad b_1(t, x) < b_2(t, x).$$

Soient (I_1, φ_1) la solution maximale de

$$x' = b_1(t, x)$$

passant par (t_0, x_0) , et (I_2, φ_2) la solution maximale de

$$x' = b_2(t, x)$$

passant par (t_0, x_0) . On pose $I = I_1 \cap I_2$.

- (a) Compléter correctement les inégalités suivantes et démontrer le théorème obtenu :

$$\forall t \in I, \quad t > t_0, \quad \varphi_1(t) \cdots \varphi_2(t),$$

$$\forall t \in I, \quad t < t_0, \quad \varphi_1(t) \cdots \varphi_2(t).$$

- (b) Adapter le théorème au cas où b_1 et b_2 vérifient

$$\forall t, x, \quad b_1(t, x) \leq b_2(t, x).$$

- (c) On suppose que b_2 est un champ linéaire à coefficients constants,

$$b_2(t, x) = \alpha(t)x + \beta(t).$$

Réécrire le théorème en utilisant la forme explicite des solutions de l'EDO linéaire. À quoi ce résultat vous fait-il penser ?

- (d) Êtes-vous d'accord avec la phrase : « *le lemme de Gronwall n'est en fait qu'une banale inégalité différentielle* » ?

Exercice 11 :

(a) On suppose que

$$f(-t, x) = -f(t, x).$$

- i. Montrer que l'ensemble des solutions est symétrique par rapport à l'axe des x .
- ii. Vérifier ce résultat en calculant les solutions de

$$x' = tx.$$

(b) On suppose maintenant que

$$f(-t, x) = f(t, x).$$

- i. Trouver la forme explicite des solutions de

$$x' = t^2 - x.$$

- ii. En déduire que cette symétrie de f n'entraîne aucune propriété de symétrie des solutions.

(c) Dire, dans chacun des cas suivants, si les solutions possèdent une symétrie et laquelle :

- $f(t, -x) = f(t, x)$
- $f(t, -x) = -f(t, x)$
- $f(-t, -x) = f(t, x)$
- $f(-t, -x) = -f(t, x)$

(d) Récapituler les résultats obtenus en associant à chaque symétrie des solutions (centrale ou par rapport aux axes) la propriété correspondante de f .

(e) Étudier les propriétés de symétrie des solutions de :

$$x' = tx, \quad x' = tx^2, \quad x' = \frac{x}{t}.$$

Exercice 12 : Pour chacune des équations différentielles suivantes :

(a) $x' = \sin(tx)$

(b) $y' = \sinh(y)$

(c) $z' = z^3$

(d) $u' = -u^3$

(e) $v' = \frac{1}{1+v}$

(f) $w' = |w|^{3/4}$

répondre aux trois questions suivantes :

- Les hypothèses du théorème de Cauchy–Lipschitz sont-elles vérifiées ? Si non, où sont les problèmes ?
- Les solutions maximales sont-elles définies jusqu'à $+\infty$ ou explosent-elles en temps fini (pour les temps croissants) ?
- Même question pour les temps négatifs.

Exercice 13 : En médecine, l'infusion désigne l'injection dans le sang d'une substance à débit constant. On propose ici un modèle pour une infusion de glucose à débit constant. Pendant celle-ci, le glucose libre du sang disparaît par combinaison avec du phosphore. La concentration $G(t)$ de glucose dans le sang augmente donc grâce à l'infusion et diminue avec un débit proportionnel à $G(t)$.

- (a) Écrire l'EDO vérifiée par $G(t)$ (on notera a le débit d'infusion, λ le taux de recombinaison et B le volume de sang). Résoudre cette équation et donner le comportement asymptotique des solutions.
- (b) On suppose maintenant que l'infusion de glucose augmente le volume de sang de façon non négligeable. Proposer un nouveau modèle et reprendre la question précédente.

Chapitre 2

EDO's sous contrainte

2.1 Cônes Tangents

Dans ce chapitre, nous considérons certaines approximations d'ensembles qui sont très utiles pour la formulation de conditions d'optimalité. Nous étudions les soi-disant cônes tangents qui approchent un ensemble donné dans un sens local. Nous discutons d'abord de plusieurs propriétés de base des cônes tangents, puis nous présentons des conditions d'optimalité à l'aide de ces cônes. Enfin, nous formulons un théorème de Lyusternik.

2.1.1 Définition et propriétés

Dans cette section, nous portons notre attention sur le cône tangent de Bouligand séquentiel, également appelé cône contingent. Pour ce cône tangent, nous démontrons plusieurs propriétés de base. Nous introduisons d'abord le concept de cône.

Définition 2.1.1:

Soit C une partie non vide d'un espace linéaire réel X .

(a) L'ensemble C est appelé un cône si

$$x \in C, \lambda \geq 0 \implies \lambda x \in C.$$

(b) Un cône C est dit pointé si

$$x \in C, -x \in C \implies x = 0_X.$$

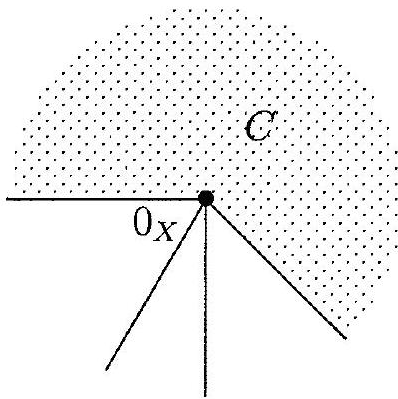


Figure 4.1: Cone.

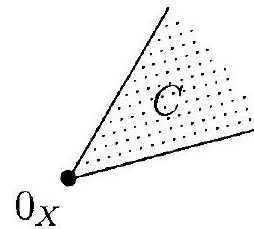


Figure 4.2: Pointed cone.

FIGURE 2.1 – Cone and cone point.

Exemple 2.1.1. (a) L'ensemble

$$\mathbb{R}_+^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0 \text{ pour tout } i \in \{1, \dots, n\}\}$$

est un cône pointé.

(b) L'ensemble

$$C := \{x \in C[0, 1] \mid x(t) \geq 0 \text{ pour tout } t \in [0, 1]\}$$

est un cône pointé.

En théorie de l'ordre et en théorie de l'optimisation, les cônes convexes

présentent un intérêt particulier. Ces cônes peuvent être caractérisés comme suit :

Théorème 2.1.1:

Un cône C dans un espace linéaire réel est convexe si et seulement si pour tous $x, y \in C$,

$$x + y \in C. \tag{4.1}$$

Démonstration.

(a) Soit C un cône convexe. Alors, pour tous $x, y \in C$, on a

$$\frac{1}{2}(x + y) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y \in C$$

ce qui implique que $x + y \in C$.

(b) Pour tout $x, y \in C$ et $\lambda \in [0, 1]$, on a $\lambda x \in C$ et $(1 - \lambda)y \in C$. Alors, d'après la condition (4.1), on obtient :

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in C.$$

Par conséquent, le cône C est convexe.

Par la suite, nous définissons également les cônes engendrés par des ensembles.

Définition 2.1.2:

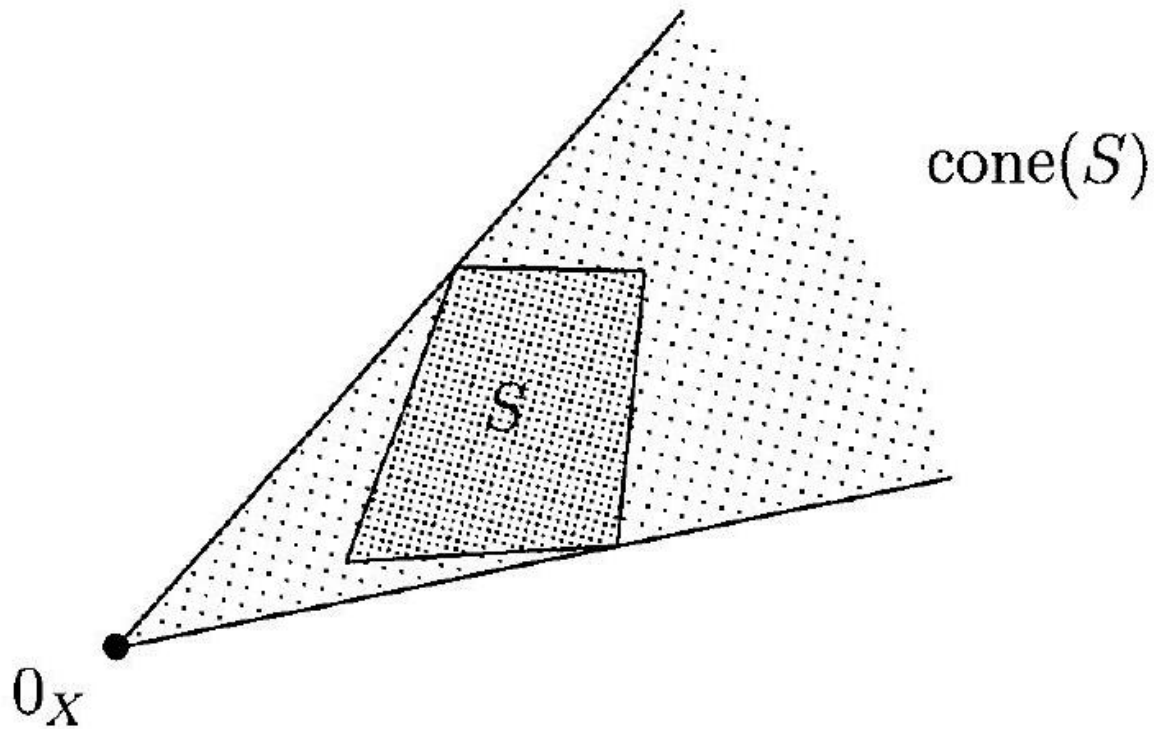
Soit S une partie non vide d'un espace linéaire réel. L'ensemble

$$\text{cone}(S) := \{\lambda s \mid \lambda \geq 0 \text{ et } s \in S\}$$

est appelé le cône engendré par S .

Figure 4.3 : Cone genere par S .

Exemple 2.1.2. (a) Soit $B(0_X, 1)$ la boule unité fermée dans un espace normé réel $(X, \|\cdot\|)$. Alors, le cône engendré par $B(0_X, 1)$ est égal à l'espace vectoriel X .

FIGURE 2.2 – Cone engendré par S

(b) Soit S le graphe de la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Alors, le cône engendré par S est donné par

$$\text{cone}(S) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y| \leq |x|\}.$$

Passons maintenant aux cônes tangents.

Définition 2.1.3:

Soit S un sous-ensemble non vide d'un espace normé réel $(X, \|\cdot\|)$.

(a) Soit $\bar{x} \in \text{cl}(S)$ un élément donné. Un vecteur $h \in X$ est appelé vecteur tangent à S en \bar{x} s'il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de S et une suite $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels positifs telles que

$$\bar{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

et

$$h = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n(x_n - \bar{x}).$$

(b) L'ensemble $T(S, \bar{x})$ de tous les vecteurs tangents à S en \bar{x} est appelé cône tangent séquentiel de Bouligand à S en \bar{x} ou cône contingent de S en \bar{x} .

¹. Remarquons que \bar{x} n'a besoin que d'appartenir à l'adhérence de l'ensemble S dans la définition de $T(S, \bar{x})$. Cependant, nous supposons plus tard que $\bar{x} \in S$.

D'après la définition des vecteurs tangents, il suit immédiatement que le cône contingent est en fait un cône. Avant d'étudier le cône contingent, nous présentons brièvement la définition du cône tangent de Clarke, qui ne sera pas utilisé davantage dans ce chapitre.

1. M.G. Bouligand, « Sur les surfaces dépourvues de points hyperlimites (ou : un théorème d'existence du plan tangent) », Ann. Soc. Polon. Math. 9 (1930) 32–41. F. Severi a noté avoir introduit cette notion de manière indépendante (F. Severi, « Su alcune questioni di topologia infinitesimale », Ann. Soc. Polon. Math. 9 (1930) 97–108)

Remarque 2.1.2:

Soit \bar{x} un élément de l'adhérence d'un sous-ensemble non vide S d'un espace normé réel $(X, \|\cdot\|)$. (a) L'ensemble

$$T_{Cl}(S, \bar{x}) := \{h \in X \mid \text{pour toute suite } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ d'éléments de } S \text{ avec } \bar{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n, \\ \text{et pour toute suite } (\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ de réels positifs tendant vers } 0, \text{ il existe } \dots\}$$

Exemple 2.1.3. (a) Soit $B(0_X, 1)$ la boule unité fermée dans un espace normé réel $(X, \|\cdot\|)$. Alors, le cône engendré par $B(0_X, 1)$ est égal à l'espace vectoriel X .

(b) Soit S le graphe de la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Alors, le cône engendré par S est donné par

$$\text{cone}(S) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y| \leq |x|\}.$$

Passons maintenant aux cônes tangents.

Définition 2.1.4:

Soit S un sous-ensemble non vide d'un espace normé réel $(X, \|\cdot\|)$.

(a) Soit $\bar{x} \in \text{cl}(S)$ un élément donné. Un vecteur $h \in X$ est appelé vecteur tangent à S en \bar{x} s'il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de S et une suite $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels positifs telles que

$$\bar{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

et

$$h = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n(x_n - \bar{x}).$$

(b) L'ensemble $T(S, \bar{x})$ de tous les vecteurs tangents à S en \bar{x} est appelé cône tangent séquentiel de Bouligand à S en \bar{x} ou cône contingent de S en \bar{x} .

M.G. Bouligand, « Sur les surfaces dépourvues de points hyperlimites (ou : un théorème d'existence du plan tangent) », Ann. Soc. Polon. Math. 9 (1930) 32–41. F. Severi a noté avoir introduit cette notion de manière indépendante (F. Severi, « Su alcune questioni di topologia infinitesimale », Ann. Soc. Polon. Math. 9 (1930) 97–108).

Remarquons que \bar{x} n'a besoin que d'appartenir à l'adhérence de l'ensemble S dans la définition de $T(S, \bar{x})$. Cependant, nous supposerons plus tard que $\bar{x} \in S$.

D'après la définition des vecteurs tangents, il suit immédiatement que le cône contingent est en fait un cône.

Avant d'étudier le cône contingent, nous présentons brièvement la définition du cône tangent de Clarke, qui ne sera pas utilisé davantage dans ce chapitre.

Remarque 2.1.3:

Soit \bar{x} un élément de l'adhérence d'un sous-ensemble non vide S d'un espace normé réel $(X, \|\cdot\|)$.

(a) L'ensemble

$$T_{Cl}(S, \bar{x}) := \left\{ h \in X \mid \text{pour toute suite } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ d'éléments de } S \text{ avec } \bar{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n, \right. \\ \left. \text{et pour toute suite } (\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ de réels positifs tendant vers } 0, \right. \\ \left. \text{il existe une suite } (h_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ telle que } h = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n, \right. \\ \left. \text{et } x_n + \lambda_n h_n \in S \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \right\}$$

est appelée *cône tangent (séquentiel) de Clarke* à S en \bar{x} .

Remarque 2.1.4:

1. Il est évident que le cône tangent de Clarke $T_{Cl}(S, \bar{x})$ est toujours un cône.
2. Si $\bar{x} \in S$, alors le cône tangent de Clarke $T_{Cl}(S, \bar{x})$ est contenu dans le cône contingent $T(S, \bar{x})$.

Preuve : Pour la preuve de cette assertion, soit $h \in T_{Cl}(S, \bar{x})$ donné arbitrairement. Nous choisissons alors la suite spéciale $(\bar{x})_{n \in \mathbb{N}}$ et une suite arbitraire $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels positifs convergeant vers 0. Par conséquent, il existe une suite $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $h = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n$ et

$$\bar{x} + \lambda_n h_n \in S \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

On pose alors

$$y_n := \bar{x} + \lambda_n h_n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

et

$$t_n := \frac{1}{\lambda_n} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Il en résulte que

$$y_n \in S \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\bar{x} + \lambda_n h_n) = \bar{x},$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_n(y_n - \bar{x}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} (\bar{x} + \lambda_n h_n - \bar{x}) = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n = h.$$

Par conséquent, h est un vecteur tangent.

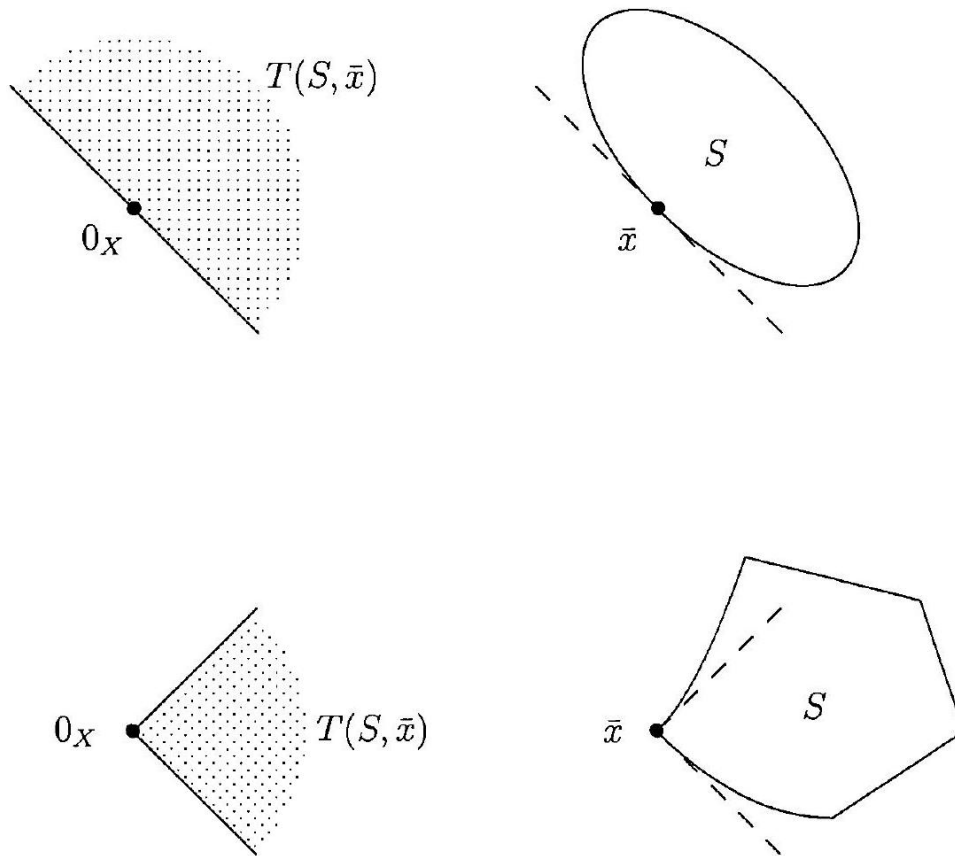


FIGURE 2.3 – Deux exemples de cônes contingents.

Remarque 2.1.5:

Le cône tangent de Clarke $T_{Cl}(S, \bar{x})$ est toujours un cône convexe fermé. Nous mentionnons ce résultat sans preuve. Notons que cette assertion est vraie sans aucune hypothèse sur l'ensemble S .

Revenons maintenant au cône contingent et étudions la relation entre le cône contingent $T(S, \bar{x})$ et le cône engendré par $S - \{\bar{x}\}$.

Théorème 2.1.6:

Soit S un sous-ensemble non vide d'un espace normé réel. Si S est étoilé (starshaped) par rapport à un certain $\bar{x} \in S$, alors il vient

$$\text{cone}(S - \{\bar{x}\}) \subset T(S, \bar{x}).$$

Preuve. Soit S étoilé par rapport à $\bar{x} \in S$ et soit $x \in S$ arbitraire. On définit la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par

$$x_n := \bar{x} + \frac{1}{n}(x - \bar{x}) = \frac{1}{n}x + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\bar{x} \in S \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

On a alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x}$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(x_n - \bar{x}) = x - \bar{x}.$$

Par conséquent, $x - \bar{x}$ est un vecteur tangent, d'où

$$S - \{\bar{x}\} \subset T(S, \bar{x}).$$

Comme $T(S, \bar{x})$ est un cône, on en déduit

$$\text{cone}(S - \{\bar{x}\}) \subset \text{cone}(T(S, \bar{x})) = T(S, \bar{x}).$$

Théorème 2.1.7:

Soit S un sous-ensemble non vide d'un espace normé réel. Pour tout $\bar{x} \in S$, on a

$$T(S, \bar{x}) \subset \text{cl}(\text{cone}(S - \{\bar{x}\})).$$

Preuve. Soit $\bar{x} \in S$ fixé arbitrairement et soit $h \in T(S, \bar{x})$ donné. Par définition, il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de S et une suite $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de

réels positifs telles que

$$\bar{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \quad \text{et} \quad h = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n (x_n - \bar{x}).$$

La dernière égalité implique

$$h \in \text{cl}(\text{cone}(S - \{\bar{x}\})),$$

ce qu'il fallait démontrer.

Par les deux théorèmes précédents, on obtient la chaîne d'inclusions suivante pour un ensemble S étoilé par rapport à un certain $\bar{x} \in S$:

$$\text{cone}(S - \{\bar{x}\}) \subset T(S, \bar{x}) \subset \text{cl}(\text{cone}(S - \{\bar{x}\})). \quad (4.2)$$

Théorème 2.1.8:

Soit S un sous-ensemble non vide d'un espace normé réel $(X, \|\cdot\|)$. Pour tout $\bar{x} \in S$, le cône contingent $T(S, \bar{x})$ est fermé.

Preuve. Soit $\bar{x} \in S$ arbitrairement choisi, et soit $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite quelconque de vecteurs tangents à S en \bar{x} telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = h \in X.$$

Pour chaque h_n , il existe une suite $(x_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$ d'éléments de S et une suite $(\lambda_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$ de réels positifs telles que

$$\bar{x} = \lim_{i \rightarrow \infty} x_{n_i} \quad \text{et} \quad h_n = \lim_{i \rightarrow \infty} \lambda_{n_i} (x_{n_i} - \bar{x}).$$

Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un entier $i(n) \in \mathbb{N}$ tel que

$$\|x_{n_i} - \bar{x}\| \leq \frac{1}{n} \quad \text{pour tout } i \geq i(n)$$

et

$$\|\lambda_{n_i}(x_{n_i} - \bar{x}) - h_n\| \leq \frac{1}{n} \quad \text{pour tout } i \geq i(n).$$

Si l'on définit les suites $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par

$$y_n := x_{n_{i(n)}} \in S \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

et

$$t_n := \lambda_{n_{i(n)}} > 0 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N},$$

alors on obtient $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \bar{x}$ et

$$\begin{aligned} \|t_n(y_n - \bar{x}) - h\| &= \left\| \lambda_{n_{i(n)}}(x_{n_{i(n)}} - \bar{x}) - h_n + h_n - h \right\| \\ &\leq \frac{1}{n} + \|h_n - h\| \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$h = \lim_{n \rightarrow \infty} t_n(y_n - \bar{x})$$

et h est un vecteur tangent à S en \bar{x} .

Puisque la chaîne d'inclusions (4.2) est également valable pour les fermés correspondants, il suit immédiatement, à l'aide du Théorème 4.10 :

Remarque 2.1.9:

Soit S un sous-ensemble non vide d'un espace normé réel. Si l'ensemble S est étoilé (starshaped) par rapport à un certain $\bar{x} \in S$, alors on a

$$T(S, \bar{x}) = \text{cl}(\text{cone}(S - \{\bar{x}\})).$$

Si l'ensemble S est étoilé par rapport à un certain $\bar{x} \in S$, alors le Corollaire 4.11 affirme essentiellement que pour déterminer le cône contingent de S en \bar{x} , il suffit de considérer uniquement les demi-droites partant de \bar{x} et passant par S .

Enfin, nous montrons que le cône contingent d'un ensemble convexe non vide est lui aussi convexe.

Théorème 2.1.10:

Si S est un sous-ensemble convexe non vide d'un espace normé réel $(X, \|\cdot\|)$, alors le cône contingent $T(S, \bar{x})$ est convexe pour tout $\bar{x} \in S$.

Preuve. Soit $\bar{x} \in S$ arbitrairement choisi, et fixons deux vecteurs tangents arbitraires $h_1, h_2 \in T(S, \bar{x})$ avec $h_1, h_2 \neq 0_X$. Il existe alors des suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de S et des suites $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels positifs telles que

$$\bar{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n, \quad h_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n(x_n - \bar{x}).$$

et

$$\bar{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n, \quad h_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(y_n - \bar{x}).$$

Ensuite, nous définissons des suites supplémentaires $(\nu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par

$$\nu_n := \lambda_n + \mu_n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

et

$$z_n := \frac{1}{\nu_n} (\lambda_n x_n + \mu_n y_n) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

En raison de la convexité de S , on a

$$z_n = \frac{\lambda_n}{\lambda_n + \mu_n} x_n + \frac{\mu_n}{\lambda_n + \mu_n} y_n \in S \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

et on en déduit

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} z_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\nu_n} (\lambda_n x_n + \mu_n y_n) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\nu_n} (\lambda_n x_n - \lambda_n \bar{x} + \mu_n y_n - \mu_n \bar{x} + \lambda_n \bar{x} + \mu_n \bar{x}) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\lambda_n}{\nu_n} (x_n - \bar{x}) + \frac{\mu_n}{\nu_n} (y_n - \bar{x}) + \bar{x} \right) \\
 &= \bar{x}
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \nu_n (z_n - \bar{x}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda_n x_n + \mu_n y_n - \nu_n \bar{x}) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda_n (x_n - \bar{x}) + \mu_n (y_n - \bar{x})) \\
 &= h_1 + h_2.
 \end{aligned}$$

Il en résulte que $h_1 + h_2 \in T(S, \bar{x})$. Puisque $T(S, \bar{x})$ est un cône, le Théorème 4.3 conduit à l'assertion.

Remarquons que le cône tangent de Clarke à un ensemble arbitraire non vide S est déjà un cône convexe, tandis que nous avons démontré la convexité du cône contingent seulement sous l'hypothèse que S est convexe.

2.1.2 Conditions d'optimalité

Dans cette section, nous présentons plusieurs conditions d'optimalité qui résultent de la théorie des cônes contingents.

Par exemple, nous montrons que, pour des problèmes d'optimisation convexe avec un fonctionnel objectif continu, tout point minimal \bar{x} de f sur S peut être caractérisé comme un point minimal de f sur $\{\bar{x}\} + T(S, \bar{x})$.

Théorème 2.1.11:

Soit S un sous-ensemble non vide d'un espace normé réel $(X, \|\cdot\|)$, et soit $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ un fonctionnel donné.

(a) Si le fonctionnel f est continu et convexe, alors pour tout point minimal $\bar{x} \in S$ de f sur S , il suit :

$$f(\bar{x}) \leq f(\bar{x} + h) \quad \text{pour tout } h \in T(S, \bar{x}).$$

(b) Si l'ensemble S est étoilé (starshaped) par rapport à un certain $\bar{x} \in S$ et si l'inégalité est satisfaite, alors \bar{x} est un point minimal de f sur S .

Preuve. (a) Soit $\bar{x} \in S$ arbitrairement fixé, et supposons que l'inégalité principale ne soit pas vérifiée. Alors il existe un vecteur $h \in T(S, \bar{x}) \setminus \{0_X\}$ et un réel $\alpha > 0$ tels que

$$f(\bar{x}) - f(\bar{x} + h) > \alpha > 0 \tag{4.4}$$

Par définition de h , il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de S et une suite $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels strictement positifs telles que

$$\bar{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

et

$$h = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n$$

où

$$h_n := \lambda_n(x_n - \bar{x}) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Comme $h \neq 0_X$, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} = 0$. Puisque f est convexe et continue, on obtient avec l'inégalité (4.4) pour n suffisamment grand :

$$\begin{aligned}
 f(x_n) &= f\left(\frac{1}{\lambda_n}\bar{x} + x_n - \bar{x} + \bar{x} - \frac{1}{\lambda_n}\bar{x}\right) \\
 &= f\left(\frac{1}{\lambda_n}(\bar{x} + h_n) + \left(1 - \frac{1}{\lambda_n}\right)\bar{x}\right) \\
 &\leq \frac{1}{\lambda_n}f(\bar{x} + h_n) + \left(1 - \frac{1}{\lambda_n}\right)f(\bar{x}) \\
 &\leq \frac{1}{\lambda_n}(f(\bar{x} + h) + \alpha) + \left(1 - \frac{1}{\lambda_n}\right)f(\bar{x}) \\
 &< \frac{1}{\lambda_n}f(\bar{x}) + \left(1 - \frac{1}{\lambda_n}\right)f(\bar{x}) \\
 &= f(\bar{x}).
 \end{aligned}$$

Par conséquent, \bar{x} n'est pas un point minimal de f sur S .

(b) Si l'ensemble S est étoilé (starshaped) par rapport à un certain $\bar{x} \in S$, alors il résulte du Théorème 4.8

$$S - \{\bar{x}\} \subset T(S, \bar{x})$$

D'où, en utilisant l'inégalité (4.3),

$$f(\bar{x}) \leq f(\bar{x} + h) \quad \text{pour tout } h \in S - \{\bar{x}\},$$

c'est-à-dire que \bar{x} est un point minimal de f sur S .

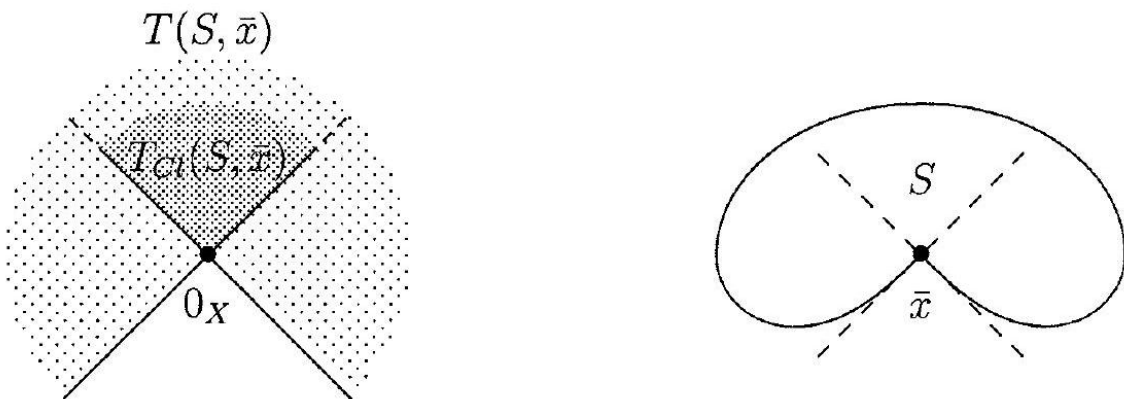


FIGURE 2.4 – Illustration du vecteur tangent h .

En utilisant les dérivées de Fréchet, la condition nécessaire d'optimalité suivante peut être formulée.

Théorème 2.1.12:

Soit S un sous-ensemble non vide d'un espace normé réel $(X, \|\cdot\|)$, et soit f un fonctionnel défini sur un ouvert contenant S . Si $\bar{x} \in S$ est un point minimal de f sur S et si f est différentiable au sens de Fréchet en \bar{x} , alors il en résulte que

$$f'(\bar{x})(h) \geq 0 \quad \text{pour tout } h \in T(S, \bar{x}).$$

Preuve. Soit $\bar{x} \in S$ un point minimal de f sur S , et soit un vecteur arbitraire $h \in T(S, \bar{x}) \setminus \{0_X\}$ donné (pour $h = 0_X$, l'assertion est triviale). Alors, il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de S et une suite $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels strictement positifs telles que

$$\bar{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

et

$$h = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n,$$

où

$$h_n := \lambda_n(x_n - \bar{x}) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Par définition de la dérivée de Fréchet et en raison du caractère minimal de f en \bar{x} , il s'ensuit :

$$\begin{aligned}
 f'(\bar{x})(h) &= f'(\bar{x}) \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n (x_n - \bar{x}) \right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n f'(\bar{x})(x_n - \bar{x}) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n [f(x_n) - f(\bar{x}) - (f(x_n) - f(\bar{x}) - f'(\bar{x})(x_n - \bar{x}))] \\
 &\geq - \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n (f(x_n) - f(\bar{x}) - f'(\bar{x})(x_n - \bar{x})) \\
 &= - \lim_{n \rightarrow \infty} \|h_n\| \frac{f(x_n) - f(\bar{x}) - f'(\bar{x})(x_n - \bar{x})}{\|x_n - \bar{x}\|} \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Ainsi, l'assertion est démontrée.

Étudions à présent sous quelles hypothèses la condition du Théorème 4.14 est une condition suffisante d'optimalité. Pour cela, nous définissons les fonctionnels pseudoconvexes.

Définition 2.1.5:

Soit S un sous-ensemble non vide d'un espace vectoriel réel, et soit $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ un fonctionnel admettant une dérivée directionnelle en un point $\bar{x} \in S$ dans toute direction $x - \bar{x}$ avec $x \in S$ quelconque. On dit que f est *pseudoconvexe* en \bar{x} si, pour tout $x \in S$,

$$f'(\bar{x})(x - \bar{x}) \geq 0 \implies f(x) - f(\bar{x}) \geq 0.$$

Exemple 2.1.4. Les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définies par

$$f(x) = xe^x \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R},$$

et

$$g(x) = -\frac{1}{1+x^2} \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R},$$

sont pseudoconvexes en tout $\bar{x} \in \mathbb{R}$. Cependant, ces deux fonctions ne sont

pas convexes.

Un lien entre fonctionnels convexes et pseudoconvexes est donné par le théorème suivant.

Théorème 2.1.13:

Soit S un sous-ensemble convexe non vide d'un espace vectoriel réel, et soit $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ un fonctionnel convexe admettant une dérivée directionnelle en un point $\bar{x} \in S$ dans toute direction $x - \bar{x}$ avec $x \in S$ quelconque. Alors f est pseudoconvexe en \bar{x} .

Preuve. Soit $x \in S$ fixé arbitrairement. Par convexité de f , on a pour tout $\lambda \in (0, 1]$,

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)\bar{x}) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(\bar{x}),$$

2.2 Exercices et solutions

- (a) Soit C un cône convexe dans un espace normé réel avec intérieur non vide $\text{int}(C)$. Montrer :

$$\text{int}(C) = \text{int}(C) + C.$$

Solution :

- Inclusion directe : soit $x \in \text{int}(C)$ et $c \in C$, alors $x + c \in \text{int}(C) + C$.
Donc $\text{int}(C) \subset \text{int}(C) + C$.
- Réciproque : soit $x \in \text{int}(C) + C$, donc $x = y + z$ avec $y \in \text{int}(C)$ et $z \in C$. Comme C est un cône convexe et que l'intérieur d'un convexe est stable par translation dans la direction de C , on a $x \in \text{int}(C)$. Donc $\text{int}(C) + C \subset \text{int}(C)$.

- (b) Soit X un espace linéaire réel. Prouver qu'un fonctionnel $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ est sous-linéaire si et seulement si son épigraphe est un cône convexe.

Solution :

— f sous-linéaire \Rightarrow épigraphe $E(f)$ est un cône convexe :

$$E(f) = \{(x, r) \in X \times \mathbb{R} \mid f(x) \leq r\}.$$

Si f est positif homogène et sous-additif, alors pour tous $x_1, x_2 \in X$, $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$,

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2),$$

ce qui montre la convexité de $E(f)$. De plus, $E(f)$ est un cône puisque $f(\alpha x) = \alpha f(x)$.

— Réciproque : si $E(f)$ est un cône convexe, alors

$$f(\lambda x) = \lambda f(x) \quad \text{pour tout } \lambda > 0, \quad f(0) = 0, \quad f(x+y) \leq f(x) + f(y),$$

donc f est sous-linéaire.

(c) Soit S un sous-ensemble convexe non vide d'un espace linéaire réel. Montrer que le cône engendré par S est convexe.

Solution : Soient $x_1 = \lambda_1 s_1$, $x_2 = \lambda_2 s_2$ dans $\text{cone}(S)$, avec $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ et $s_1, s_2 \in S$. Alors :

$$x_1 + x_2 = (\lambda_1 + \lambda_2) \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} s_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} s_2 \right),$$

or la combinaison convexe $\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} s_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} s_2 \in S$ car S est convexe. Donc $x_1 + x_2 \in \text{cone}(S)$, donc le cône est convexe.

(d) Dans \mathbb{R}^2 , soit l'ensemble

$$S := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -x + y < 1, \quad 2x + y < 4, \quad 0 < x < 3, \quad y > 0\}.$$

Déterminer le cône engendré par S .

Solution : Les contraintes sont linéaires et définissent une région ouverte dans le premier quadrant. Toute direction positive est atteignable via combinaison positive d'éléments de S , donc le cône engendré est \mathbb{R}^2 .

- (e) Soit l'ensemble S défini comme dans l'exercice 4.4). Déterminer le cône contingent à S au point $(1, 2)$.

Solution : À partir des contraintes linéaires actives au point $(1, 2)$, on calcule les directions tangentes admissibles. On obtient :

$$T(S, (1, 2)) = \{\lambda(a, -1) \mid \lambda > 0, a \in [-1, 1]\}.$$

- (f) Soit S' un sous-ensemble non vide d'un espace normé réel $(X, \|\cdot\|)$ avec intérieur non vide. Pour tout $x \in \text{int}(S')$, montrer que $T(S', x) = X$.

Solution : Comme $x \in \text{int}(S')$, il existe une boule $B(x, \varepsilon) \subset S'$. Ainsi, pour toute direction $h \in X$, la demi-droite $x + th$ est incluse dans S' pour t petit. Donc toute direction h appartient au cône tangent, soit $T(S', x) = X$.

- (g) Soient S_1, S_2 deux sous-ensembles non vides d'un espace normé réel.
- i. $x \in S_1 \subset S_2 \Rightarrow T(S_1, x) \subset T(S_2, x)$ par monotonie du cône tangent.
 - ii. $x \in S_1 \cap S_2 \Rightarrow T(S_1 \cap S_2, x) \subset T(S_1, x) \cap T(S_2, x)$ par définition de l'intersection.

- (h) Soit $x \in S \subset X$. Montrer que le cône tangent s'écrit :

$$T(S, x) = \left\{ h \in X \mid \exists a > 0, \exists r : (0, a] \rightarrow X, \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{r(t)}{t} = 0, \text{ et } \exists (t_n) \rightarrow 0^+, x + t_n h + r(t_n) \in S \right\}$$

Solution : Ceci est une reformulation équivalente de la définition du cône tangent utilisant une perturbation infinitésimale $r(t)$ pour permettre une approximation plus fine des directions tangentes à S au point x .

- (i) Montrer que le cône tangent de Clarke $T_c(S, x)$ est fermé et convexe.

Solution : Le cône tangent de Clarke est défini comme la fermeture des directions tangentes généralisées. Le Théorème 2.4.5 et la Proposition 2.2.1 montrent que $T_c(S, x)$ est à la fois fermé et convexe, car il est défini par des limites supérieures de directions tangentes classiques.

(j) La fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, est-elle pseudoconvexe ?

Solution : À $x = 0$, le gradient $\nabla f(0) = 0$, mais il existe des directions d telles que $f(x + td) > f(0)$ pour $t > 0$. Ainsi, f n'est pas pseudoconvexe à $x = 0$.

2.3 Théorème de Nagumo

Soit donnée une équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

Nous supposons que, dans le domaine $|x - x_0| \leq l, |y - y_0| \leq k$, que nous noterons par B , la fonction $f(x, y)$ est continue et qu'il existe un nombre positif suffisamment petit ε pour lequel, dans B , l'inégalité suivante

$$\frac{x - x_0}{y_2 - y_1} \{f(x, y_2) - f(x, y_1)\} < 1$$

est toujours satisfaite lorsque $0 < |x - x_0| \leq \varepsilon$, $y_1 \neq y_2$, $|y_i - y_0| \leq M\varepsilon$, ($i = 1, 2$), où M désigne le maximum de $|f(x, y)|$ dans B .

Nous montrons alors que cette hypothèse implique l'unicité de la solution de (1) avec les conditions initiales $x = x_0$, $y = y_0$, au moins sur l'intervalle $|x - x_0| \leq \varepsilon$.

Nous ne donnons la preuve que pour le cas où $x - x_0 \geq 0$, car dans l'autre cas, la démonstration est tout à fait analogue.

Supposons, en effet, qu'il existe deux solutions différentes $y_1(x)$ et $y_2(x)$ passant par $(x = x_0, y = y_0)$ pour $|x - x_0| \leq \varepsilon$. Alors, il existe au moins une valeur $x = x_1$, avec $x_0 < x_1 \leq x_0 + \varepsilon$, telle que $y_1(x_1) \neq y_2(x_1)$. Nous pouvons supposer que $y_2(x_1) > y_1(x_1)$. Pour $x_0 \leq x \leq x_0 + \varepsilon$, on a aussi $|y_i - y_0| \leq M\varepsilon$ pour $i = 1, 2$.

D'après (2), on obtient :

$$f(x_1, y_2) - f(x_1, y_1) < \frac{y_2(x_1) - y_1(x_1)}{x_1 - x_0}$$

et d'après (1),

$$\left(\frac{dy_2}{dx} - \frac{dy_1}{dx} \right)_{x=x_1} < \frac{y_2(x_1) - y_1(x_1)}{x_1 - x_0}$$

Posons :

$$F(x) = y_2(x) - y_1(x), \quad \xi(x) = \frac{y_2(x_1) - y_1(x_1)}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

Pour ces fonctions, les relations suivantes sont valables :

$$F(x_0) = 0$$

$$F'(x) = \frac{dy_2}{dx} - \frac{dy_1}{dx} = f(x, y_2) - f(x, y_1)$$

$$F'(x_0) = 0$$

$$\xi(x_0) = 0$$

$$\xi'(x) = \frac{y_2(x_1) - y_1(x_1)}{x_1 - x_0} > 0$$

$$F'(x_1) = \xi(x_1)$$

Il suit de $\xi'(x_0) > F'(x_0)$ qu'il existe une valeur h_0 suffisamment proche de x_0 telle que :

$$x = x', \quad x_0 < x' < x_1 \tag{2.1}$$

$$\xi(x') > F'(x') \tag{2.2}$$

$$\xi(x') - F'(x') > 0 \tag{2.3}$$

Mais nous montre que $\xi'(x_1) > F'(x_1)$, et puisque $\xi(x_1) = F(x_1)$, il existe une valeur $x = x''$, avec $x' < x'' < x_1$ suffisamment proche de x_1 pour laquelle l'inégalité suivante est satisfaite :

$$\xi(x'') - F(x'') < 0$$

Comme $F(x)$ et $\xi(x)$ sont continues, on en déduit d'après (3) et (4) qu'il

existe au moins une valeur \bar{x} entre x' et x'' telle que

$$F(\bar{x}) = \xi(\bar{x})$$

Soit \bar{x} la plus grande de ces valeurs, alors on doit avoir

$$F'(\bar{x}) = \xi'(\bar{x})$$

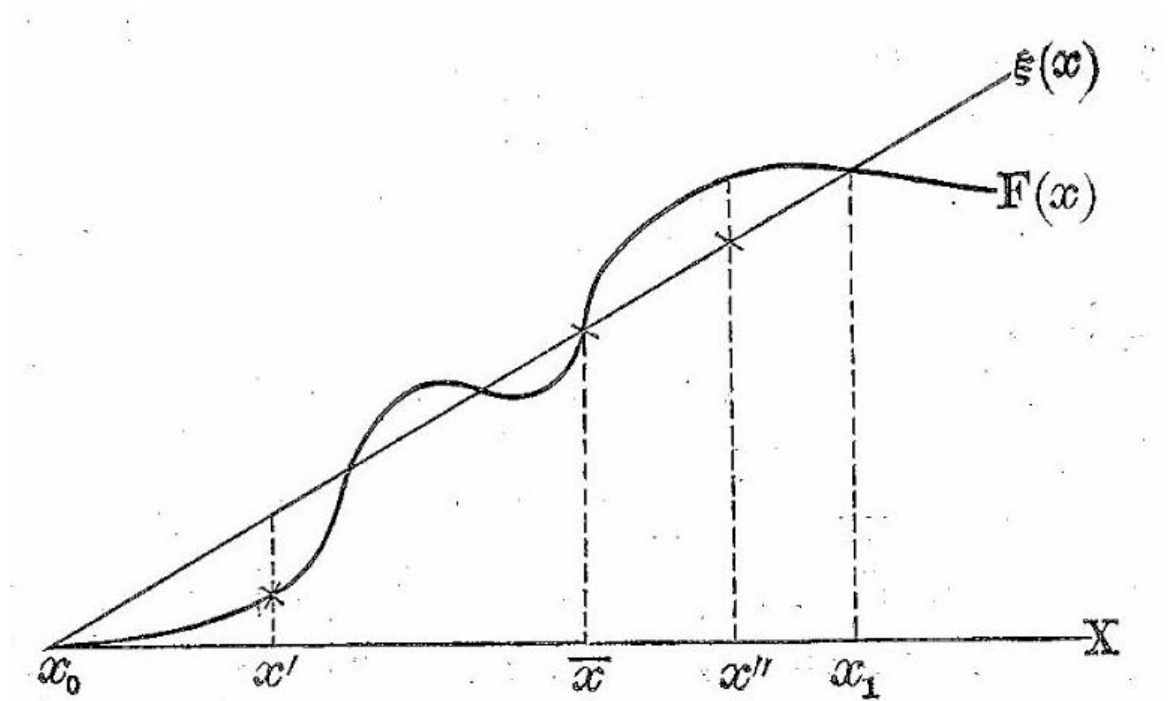


Fig. 1 $F'(\bar{x}) = \xi'(\bar{x})$ et

$$F'(\bar{x}) \geq \xi'(\bar{x}) \quad (2.4)$$

Or,

$$\begin{aligned} \xi'(\bar{x}) &= \frac{y_2(x_1) - y_1(x_1)}{x_1 - x_0} = \frac{y_2(x_1) - y_1(x_1)}{x_1 - x_0} \cdot \frac{\bar{x} - x_0}{\bar{x} - x_0} = \frac{\xi(\bar{x})}{\bar{x} - x_0} = \frac{F(\bar{x})}{\bar{x} - x_0}, \\ &= \frac{y_2(\bar{x}) - y_1(\bar{x})}{\bar{x} - x_0}, \end{aligned}$$

$$F'(\bar{x}) = f(\bar{x}, y_2(\bar{x})) - f(\bar{x}, y_1(\bar{x})).$$

Et d'autre part, il suit de (5) que

$$\begin{cases} f(\bar{x}, y_2(\bar{x})) - f(\bar{x}, y_1(\bar{x})) \geq \frac{y_2(\bar{x}) - y_1(\bar{x})}{\bar{x} - x_0} (> 0), \\ \text{c'est-à-dire} \quad \left(\frac{\bar{x} - x_0}{y_2 - y_1} \right)_{x=\bar{x}} \{f(\bar{x}, y_2) - f(\bar{x}, y_1)\}_{x=\bar{x}} \geq 1, \end{cases}$$

ce qui est en contradiction avec (2). Ce qu'il fallait démontrer.

Remarques

- (a) La formule (2) contient la condition de Lipschitz comme cas particulier, car la valeur absolue de

$$\frac{x - x_0}{y_2 - y_1} \{f(x, y_2) - f(x, y_1)\}$$

devient arbitrairement petite quand $|x - x_0|$ devient très petit.

- 2) Comme $f(x, y)$ est continue dans B , il existe pour tout petit nombre positif η un nombre positif ε tel que

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \eta$$

soit vrai dans le domaine

$$|x - x_0| \leq \varepsilon, \quad |y - y_0| \leq M\varepsilon$$

Alors, pour toute solution de (1) passant par le point (x_0, y_0) ,

$$y = y_0 + \{f(x_0, y_0) + \delta\}(x - x_0)$$

dans $|x - x_0| \leq \varepsilon$, où $|\delta| < \eta$.

Ainsi, au lieu de (2), pour $|x - x_0| \leq \varepsilon$ et $|\delta_i| < \eta$, on peut toujours poser

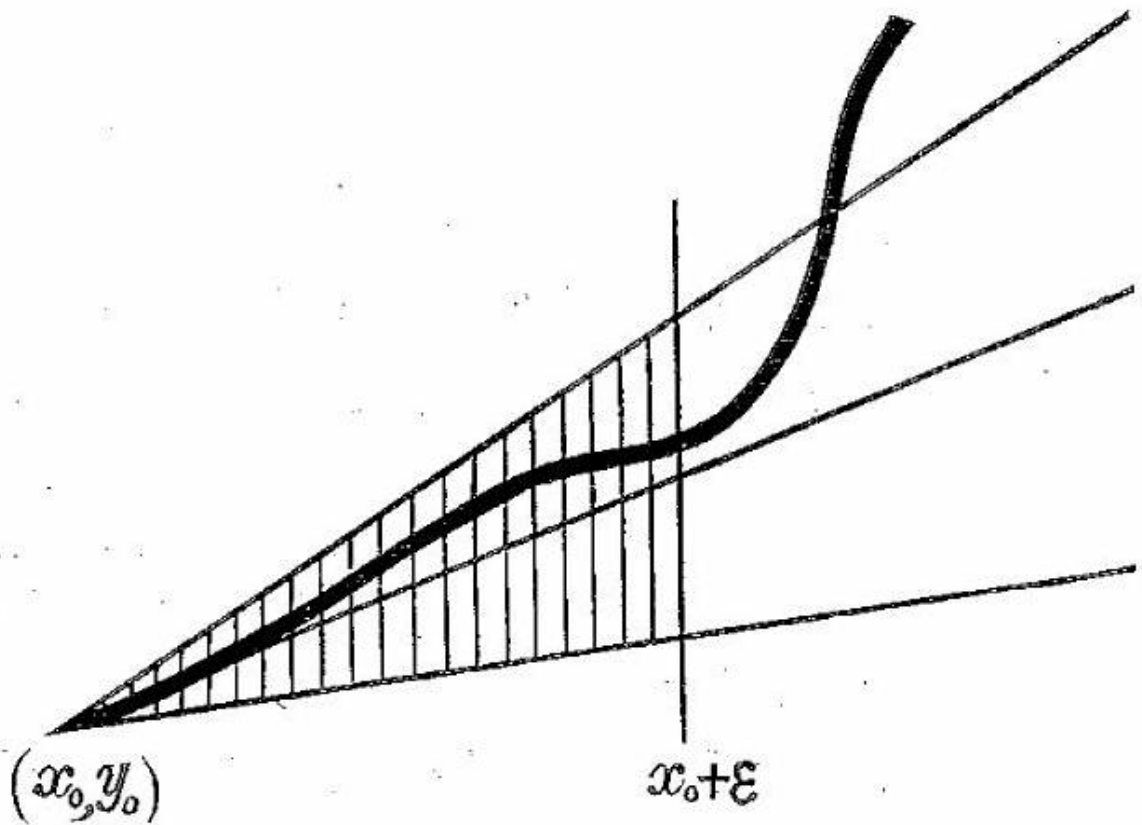


Fig. 2 ($i = 1, 2$)

$$\frac{f(x, y_0 + (f(x_0, y_0) + \delta_2)(x - x_0)) - f(x, y_0 + (f(x_0, y_0) + \delta_1)(x - x_0))}{\delta_2 - \delta_1} < 1$$

- (a) S'il existe une solution $\tilde{y}(x)$ de (1) passant par $(x = x_0, y = y_0)$, alors on peut remplacer dans (2) y_1 par la solution $\bar{y}(x)$.

Exemples

I.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{mx^3y}{x^4 + y^2} \quad (m \text{ constante } \neq 0)$$

On a

$$\left| \frac{mx^3y}{x^4 + y^2} \right| \leq \left| \frac{mx}{2} \right| \quad \text{car} \quad |2x^2y| \leq x^4 + y^2$$

Ainsi, $\frac{dy}{dx}$ est continue en tout point (x, y) , et satisfait la condition de Lipschitz partout sauf dans un petit voisinage de $(0, 0)$.

En effet :

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| = \left| \frac{mx^3}{(x^4 + y_2^2)(x^4 + y_1^2)} (x^4(y_2 - y_1) + y_1 y_2 (y_1 - y_2)) \right|$$

Posons $y_1 = 0$, on obtient

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| = \left| \frac{mx^3}{x^4 + y_2^2} \right| \cdot |y_2 - y_1|$$

où $\left| \frac{mx^3}{x^4 + y_2^2} \right|$ peut devenir arbitrairement grand dans tout petit voisinage de $(0, 0)$.

Le membre de gauche de (2) s'écrit alors, pour ce cas où $x_0 = 0, y_0 = 0$:

$$\frac{x}{y_2 - y_1} \left(\frac{mx^3 y_2}{x^4 + y_2^2} - \frac{mx^3 y_1}{x^4 + y_1^2} \right) = \frac{mx^4(x^4 - y_1 y_2)}{(x^4 + y_2^2)(x^4 + y_1^2)}.$$

2.3.1 Exemple de Lavrentieff sur l'unicité des solutions d'une équation différentielle

Pour ces fonctions, les relations suivantes sont valables :

$$F(x_0) = 0 \tag{2.5}$$

$$F'(x) = \frac{dy_2}{dx} - \frac{dy_1}{dx} = f(x, y_2) - f(x, y_1) \tag{2.6}$$

$$F'(x_0) = 0 \tag{2.7}$$

$$\xi(x_0) = 0 \tag{2.8}$$

$$\xi'(x) = \frac{y_2(x_1) - y_1(x_1)}{x_1 - x_0} > 0 \tag{2.9}$$

$$F'(x_1) = \xi(x_1) \tag{2.10}$$

Il s'ensuit que $\xi'(x_0) > F'(x_0)$, donc pour une valeur x' proche de x_0 , on a :

$$x = x', \quad x_0 < x' < x_1 \quad (2.11)$$

$$\xi(x') > F'(x') \quad (2.12)$$

$$\xi(x') - F'(x') > 0 \quad (2.13)$$

Mais montre que $\xi'(x_1) > F'(x_1)$, et puisque $\xi(x_1) = F(x_1)$, il existe une valeur x'' proche de x_1 , avec $x' < x'' < x_1$, telle que :

$$\xi(x'') - F(x'') < 0$$

Comme $F(x)$ et $\xi(x)$ sont continues, il existe, d'après (3) et (4), au moins une valeur x entre x' et x'' telle que :

$$F(x) = \xi(x)$$

Soit \bar{x} la plus grande de ces valeurs. On a alors :

$$F'(\bar{x}) = \xi(\bar{x})$$

$$F'(\bar{x}) \geq \xi'(\bar{x}) \quad (2.14)$$

Mais :

$$\xi'(\bar{x}) = \frac{y_2(x_1) - y_1(x_1)}{x_1 - x_0} = \frac{y_2(x_1) - y_1(x_1)}{x_1 - x_0} \cdot \frac{\bar{x} - x_0}{\bar{x} - x_0} = \frac{\xi(\bar{x})}{\bar{x} - x_0} \quad (2.15)$$

$$= \frac{F'(\bar{x})}{\bar{x} - x_0} = \frac{y_2(\bar{x}) - y_1(\bar{x})}{\bar{x} - x_0} \quad (2.16)$$

$$F'(\bar{x}) = f(\bar{x}, y_2(\bar{x})) - f(\bar{x}, y_1(\bar{x})) \quad (2.17)$$

Donc, à partir de (5), on a :

$$f(\bar{x}, y_2(\bar{x})) - f(\bar{x}, y_1(\bar{x})) \geq \frac{y_2(\bar{x}) - y_1(\bar{x})}{\bar{x} - x_0} (> 0),$$

c'est-à-dire :

$$\left(\frac{\bar{x} - x_0}{y_2 - y_1} \right)_{x=\bar{x}} \{f(\bar{x}, y_2) - f(\bar{x}, y_1)\} \geq 1,$$

ce qui contredit (2). C.Q.F.D.

2.3.2 Remarques et discussions

- (a) La formule (2) contient la condition de Lipschitz comme un cas particulier, car la valeur absolue de :

$$\frac{x - x_0}{y_2 - y_1} \{f(x, y_2) - f(x, y_1)\}$$

devient arbitrairement petite lorsque $|x - x_0|$ tend vers zéro.

- (b) Étant donné que $f(x, y)$ est continue dans B , il existe pour un $\eta > 0$ une valeur $\varepsilon > 0$ telle que :

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \eta$$

lorsque :

$$|x - x_0| \leq \varepsilon, \quad |y - y_0| \leq M\varepsilon.$$

Alors pour toute solution de (1) passant par le point (x_0, y_0) , on a :

$$y = y_0 + \{f(x_0, y_0) + \delta\}(x - x_0), \quad \text{où } |\delta| < \eta.$$

Ainsi, au lieu de (2), pour $|x - x_0| \leq \varepsilon$ et $|\delta_i| < \eta$, on peut écrire :

$$\frac{f\{x_0, y_0 + (f(x_0, y_0) + \delta_2)(x - x_0)\} - f\{x_0, y_0 + (f(x_0, y_0) + \delta_1)(x - x_0)\}}{\delta_2 - \delta_1} < 1$$

(pour $i = 1, 2$)

- (c) Si une solution $\tilde{y}(x)$ de (1) passant par (x_0, y_0) existe, on peut utiliser cette solution comme y_1 dans (2).

2.3.3 Exemples et clarification

I. Considérons :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{mx^3y}{x^4 + y^2} \quad (m \text{ constant})$$

On a :

$$\left| \frac{mx^3y}{x^4 + y^2} \right| \leq \left| \frac{mx}{2} \right|, \quad \text{car } |2x^2y| \leq x^4 + y^2$$

Ainsi $\frac{dy}{dx}$ est continue en tout point (x, y) et satisfait la condition de Lipschitz partout sauf dans un voisinage de $x = 0, y = 0$.

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| = \left| \frac{mx^3}{(x^4 + y_2^2)(x^4 + y_1^2)} (x^4(y_2 - y_1) + y_1y_2(y_1 - y_2)) \right|$$

En posant $y_1 = 0$, on obtient :

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| = \left| \frac{mx^3}{x^4 + y_2^2} \right| \cdot |y_2 - y_1|$$

Cette expression peut devenir arbitrairement grande dans un voisinage de $x = 0, y = 0$.

II. Lavrentieff a proposé l'équation différentielle :

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

avec $f(x, y)$ continue sur $B = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$, et dont les solutions ont des points de branchement partout denses dans B .

Une légère modification de l'exemple de Lavrentieff donne une équation :

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y)$$

avec $F(x, y)$ continue dans $B_0 = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$, les points de

branchement y sont aussi denses, mais $y = 0$ est la seule solution passant par (x_0, y_0) .

En divisant B_0 en bandes B_n délimitées par $y = \frac{1}{2^n}$, on définit :

$$F(x, y) = \frac{f(x, y^* - 1)}{2^n} \quad \text{dans } B_n$$

Ainsi, $F(x, y)$ est continue, $F(x, 0) = 0$, et :

$$|F(x, y)| \leq \frac{M}{2^n} \leq M_y$$

Et pour un x_0 quelconque, l'inégalité :

$$\left| \frac{(x - x_0)F(x, y_2)}{y_2} \right| \leq |x - x_0|M$$

est satisfaite pour $|x - x_0|$ suffisamment petit, ce qui prouve que $y = 0$ est l'unique solution. Pourtant, les points de branchement sont denses dans B_0 .
C.Q.F.D.

2.4 Exercices et solutions

Exercice 1 Considérons l'équation différentielle :

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) = \sqrt{|y|}, \quad y(0) = 0.$$

- (a) Montrer que f n'est pas lipschitzienne en y au voisinage de $y = 0$.
- (b) Vérifier si le théorème classique de Cauchy-Lipschitz peut être appliqué.
- (c) Étudier si le théorème de Nagumo permet de garantir l'unicité de la solution.

Solution

- (1) $f(x, y) = \sqrt{|y|}$ n'est pas lipschitzienne :

$$|\sqrt{y_2} - \sqrt{y_1}| = \frac{|y_2 - y_1|}{\sqrt{y_2} + \sqrt{y_1}},$$

qui devient non borné lorsque $y_1, y_2 \rightarrow 0$. Donc f n'est pas lipschitzienne au voisinage de $y = 0$.

(2) Le théorème de Cauchy-Lipschitz ne peut donc pas être appliqué.

(3) Pour Nagumo :

$$\left| \frac{f(\tilde{y}) - f(0)}{\tilde{y}} \right| = \frac{1}{\sqrt{\tilde{y}}}.$$

On doit avoir :

$$\frac{1}{\sqrt{\tilde{y}}} \leq \frac{1}{|x|} \Rightarrow \tilde{y} \geq x^2.$$

Mais ce n'est pas vrai en général, donc Nagumo ne garantit pas l'unicité. En effet, l'équation admet une infinité de solutions passant par $(0, 0)$:

$$y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq a, \\ \frac{1}{4}(x - a)^2 & \text{si } x \geq a, \end{cases} \quad a \geq 0.$$

Exercice 2

Considérons l'équation :

$$\frac{dy}{dx} = y \cdot \ln(1 + |y|), \quad y(0) = 0.$$

- (a) Montrer que $f(y) = y \ln(1 + |y|)$ n'est pas lipschitzienne près de $y = 0$.
- (b) Vérifier si elle satisfait une condition de Nagumo.
- (c) Conclure sur l'unicité de la solution.

Solution (1) Dérivée de f :

$$f'(y) = \ln(1 + |y|) + \frac{y}{1 + |y|},$$

non bornée globalement. Donc f n'est pas lipschitzienne.

(2) Pour petits y , $\ln(1 + |y|) \approx |y|$, donc $f(y) \approx y^2$. Alors :

$$\left| \frac{f(y_2) - f(y_1)}{y_2 - y_1} \right| \leq C_\varepsilon \leq \frac{1}{|x|} \text{ pour } |x| \text{ petit.}$$

Donc la condition de Nagumo est satisfaite localement.

(3) Conclusion : l'unicité est garantie par le théorème de Nagumo au voisinage de $(0, 0)$.

Chapitre 3

Notion de stabilité

3.1 Introduction

Dans cette section on considère que f ne dépend pas de t et est toujours localement lipschitzienne de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^n . On considère alors le système suivant

$$X'(t) = f(X(t)), \quad (3.1)$$

et le problème de Cauchy associé, pour $X^{(0)} \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} X'(t) &= f(X(t)), \quad 0 < t < +\infty, \\ X(0) &= X_0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Soit $a \in \mathbb{R}^n$. Le point a est point d'équilibre du système $X'(t) = f(X(t))$ si la fonction constante et égale à a est solution de ce système. Elle est donc solution de (3.2) avec $X_0 = a$. (On dit aussi que la fonction constante et égale à a est une solution stationnaire du système.)

Bien sûr, une condition nécessaire et suffisante pour que le point a soit point d'équilibre est que $f(a) = 0$.

Soit $a \in \mathbb{R}^n$ un point d'équilibre du système (3.1).

(a) On dit que a est un point d'équilibre (uniformément) stable de (3.1) si

pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que

$$\|X_0 - a\| \leq \delta \Rightarrow \begin{cases} \text{Le problème (3.2) a une solution globale notée } X \\ \text{et } \sup_{t \in [0, +\infty[} \|X(t) - a\| \leq \varepsilon. \end{cases}$$

(b) On dit que X_0 est instable si X_0 n'est pas stable.

(c) On dit que X_0 est asymptotiquement stable si X_0 est stable et si il existe $\delta > 0$ tel que

$$\|X_0 - a\| \leq \delta \rightarrow \begin{cases} \text{Le problème (3.2) a une solution globale notée } X \\ \text{et } \lim_{t \rightarrow +\infty} \|X(t) - a\| = 0. \end{cases}$$

Dire que le point d'équilibre est uniformément stable revient à dire que si l'on part suffisamment proche de ce point d'équilibre, on reste proche de ce point d'équilibre (c'est l'exemple du pendule). Dire que le point d'équilibre est asymptotiquement stable revient à dire que si l'on part suffisamment proche de ce point d'équilibre, on tend vers ce point d'équilibre quand $t \rightarrow +\infty$ (c'est l'exemple du pendule amorti).

Dans la suite, on étudie la stabilité des systèmes autonomes linéaires

3.2 Systèmes autonomes linéaires

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on considère le système suivant :

$$X'(t) = AX(t), t > 0 \tag{3.3}$$

La fonction identiquement nulle est solution de (3.3). Autrement dit 0 est un point (de \mathbb{R}^n) d'équilibre pour le système (3.3) (on dit aussi que 0 est un point stationnaire). Cette solution est-elle stable ou instable? La réponse est apportée par le théorème suivant, dont la preuve sera donnée à la fin du chapitre.

(Stabilité d'un système différentiel linéaire)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $\text{Sp}(A)$ l'ensemble des valeurs propres de A . Si λ est une valeur propre de A , on note $\Re(\lambda)$ sa partie réelle. On distingue plusieurs cas :

- (a) Si $\forall \lambda \in \text{Sp}(A), \Re(\lambda) < 0$, alors 0 est stable et même asymptotiquement stable.
- (b) Si $\exists \lambda \in \text{Sp}(A)$ tel que $\Re(\lambda) > 0$, alors 0 est instable.
- (c) Si $\forall \lambda \in \text{Sp}(A), \Re(\lambda) \leq 0$ et il existe $\lambda \in \text{Sp}(A)$ avec $\Re(\lambda) = 0$, alors on distingue deux sous-cas (on rappelle que $m_a(\lambda)$ (resp. $m_g(\lambda)$) désigne la multiplicité algébrique (resp. géométrique) d'une valeur propre λ) :
 - a) Si $\forall \lambda \in \text{Sp}(A)$ tel que $\Re(\lambda) = 0$ on a $m_a(\lambda) = m_g(\lambda)$, alors 0 est stable, mais non asymptotiquement stable.
 - b) Si $\exists \lambda \in \text{Sp}(A)$ tel que $\Re(\lambda) = 0$ et $m_a(\lambda) > m_g(\lambda)$, alors 0 est instable.

(Un cas 2×2). Soit le système

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_2(t), t > 0 \\ x_2'(t) = -x_1(t), t > 0, \end{cases}$$

qui s'écrit

$$X' = AX$$

avec

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique associé à A est $P_A(\lambda) = \lambda^2 + 1$. Les valeurs propres sont donc $\lambda = \pm i$. On est dans le cas 3a du théorème 3.2. le point d'équilibre 0 est stable mais n'est pas asymptotiquement stable.

La prochaine section est consacré à l'étude des systèmes autonomes non linéaires

3.3 Systèmes autonomes non linéaires

Nous allons étudier la stabilité d'un point d'équilibre du système non-linéaire suivant

$$X'(t) = f(X(t)), \quad t > 0. \quad (3.4)$$

On suppose que $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$ et $f(a) = 0$ pour un point $a \in \mathbb{R}^n$. (A vrai dire, on a simplement besoin dans la suite que f soit de classe C^1 dans un voisinage de a).

Le point d'équilibre a est-il stable ou instable ?

D'après la définition de la dérivée d'une fonction, si $n = 1$,

$$f(x) = f(a) + (x - a)f'(a) + |x - a|\varepsilon(x),$$

avec $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$. Si $n > 1$ on a, de manière similaire,

$$f(X) = f(a) + A(X - a) + \|X - a\|\varepsilon(X),$$

où $\lim_{X \rightarrow a} \varepsilon(X) = 0$ et A est la matrice jacobienne de f au point a .

(On rappelle que l'application $y \mapsto Ay$ est la dérivée de f au point a .)

Prenons par exemple $n = 2$. On note f_1 et f_2 les deux composantes de f et x_1 et x_2 les deux composantes de X , de sorte que

$$f(X) = \begin{bmatrix} f_1(X) \\ f_2(X) \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) \end{bmatrix}.$$

On note $A = J_f(a)$ la matrice jacobienne en a de f . Si a est un point d'équilibre de (3.4), on a $f(a) = 0$ et

$$f(X) = \underbrace{f(a)}_{=0} + A(X - a) + \|X - a\|\varepsilon(X)$$

On pose $X - a = Y$, on a alors :

$$f(Y + a) = AY + Y\varepsilon(Y), \quad \lim_{Y \rightarrow 0} \varepsilon(Y) = 0$$

Le système (3.4) devient, avec $g(Y) = Y\varepsilon(Y)$,

$$Y'(t) = AY(t) + g(Y(t)) \tag{3.5}$$

Ceci permet de ramener l'étude de la stabilité du point a pour le système (3.4) à l'étude de la stabilité de 0 pour le système (3.5).

(Stabilité du système non linéaire par l'étude du système linéarisé)

Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ et $a \in \mathbb{R}^n$ tel que $f(a) = 0$. On considère le système différentiel non linéaire autonome (3.4). On note $A = J_f(a)$ la matrice jacobienne de f en a .

- (a) Si $\forall \lambda \in Sp(A), \Re(\lambda) < 0$, alors a est asymptotiquement stable.
- (b) Si $\exists \lambda \in Sp(A)$ tel que $\Re(\lambda) > 0$, alors a est instable.
- (c) Si $\forall \lambda \in Sp(A), \Re(\lambda) \leq 0$ et il existe $\lambda \in Sp(A)$ avec $\Re(\lambda) = 0$, on ne peut pas conclure par l'étude de $J_f(a)$.

Démonstration. Nous donnons ici seulement la démonstration pour $n = 1$. Elle est beaucoup plus simple que celle du cas $n > 1$. Supposons donc $n = 1$, la matrice jacobienne de f au point a est alors le nombre réel $f'(a)$ (identifié à un élément de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$).

- (a) Premier cas : $f'(a) < 0$. Le premier cas du théorème 3.2 correspond à $f'(a) < 0$. Dans ce cas, il existe $\delta_0 > 0$ tel que $f'(z) < 0$ pour tout z tel que $|a - z| \leq \delta_0$. Par le théorème des accroissements finis, il existe θ entre a et z tel que $f(z) - f(a) = f'(\theta)(z - a)$. Comme $f(a) = 0$, on en déduit

$$f(z) = f(z) - f(a) > 0 \text{ si } a - \delta_0 \leq z < a, \tag{3.6}$$

$$f(z) = f(z) - f(a) < 0 \text{ si } a < z < a + \delta_0. \tag{3.7}$$

Soit x la solution maximale de (3.4) correspondant à la condition initiale

$x(0)$. Si $a - \delta_0 \leq x(0) < a$, la fonction x commencera par être strictement croissante, grâce à (3.6) (et $x'(t) = f(x(t))$), et restera strictement croissante tant que $x(t) < a$. Mais comme la fonction constante égale à a est solution de (3.4), il est impossible qu'il existe t tel que $x(t) = a$. On en déduit que la solution x est globale et que $a - \delta_0 \leq x(0) < x(t) < a$ pour tout $t \in]0, +\infty[$. Si $a < x(0) \leq a + \delta_0$, un raisonnement analogue, utilisant ((3.7)), donne que x est strictement décroissante et $a < x(t) < x(0) \leq a + \delta_0$ pour tout $t \in]0, +\infty[$.

Ceci montre la stabilité de a . En effet pour tout $\varepsilon > 0$, il suffit de prendre $\delta = \min \{\varepsilon, \delta_0\}$ et on obtient

$$|x(0) - a| \leq \delta \Rightarrow |x(t) - a| \leq \varepsilon \text{ pour tout } t \geq 0.$$

Pour montrer la stabilité asymptotique de a , on remarque que si $|x(0) - a| \leq \delta_0$, la fonction $x(t)$ est monotone bornée. Elle a donc une limite en $+\infty$ notée c . Cette limite appartient à l'intervalle $]a - \delta_0, a + \delta_0[$. En remarquant que pour tout $t > 0$, il existe $\theta_t \in [t, t + 1]$ tel que $x(t + 1) - x(t) = x'(\theta_t) = f(x(\theta_t))$, on en déduit que $f(c) = 0$, ce qui prouve que $c = a$ (en effet, grâce à (3.6), (3.7) a est le seul point de l'intervalle $]a - \delta_0, a + \delta_0[$ où f s'annule). Ceci montre bien la stabilité asymptotique de a .

- (b) Second cas : $f'(a) > 0$. Un raisonnement analogue au précédent nous donne l'existence de $\delta_0 > 0$ tel que

$$f(z) = f(z) - f(a) < 0 \text{ si } a - \delta_0 \leq z < a, \quad (3.8)$$

$$f(z) = f(z) - f(a) > 0 \text{ si } a < z < a + \delta_0. \quad (3.9)$$

Soit x la solution maximale de (3.4) correspondant à la condition initiale $x(0)$. Cette solution est définie sur l'intervalle $[0, T_m[$. On va montrer que si $x(0) \neq a$,

$$\sup_{t \in [0, T_m[} |x(t) - a| \geq \delta_0.$$

(Ceci montre bien l'instabilité de a .)

Il suffit, bien sûr, de considérer le cas où $|x(0) - a| < \delta_0$. (Car $|x(0) - a| \leq \sup_{t \in [0, T_m[} |x(t) - a|$.)

Si $a - \delta_0 < x(0) < a$, la fonction x commencera par être strictement décroissante grâce à (3.8) (et $x'(t) = f(x(t))$) et restera strictement décroissante tant que $a - \delta_0 \leq x(t)$. Il est impossible que $a - \delta_0 \leq x(t)$ pour tout $t \in [0, T_m[$ car on aurait alors $T_m = +\infty$ (car il n'y aurait pas explosion en T_m) et (comme dans le premier cas) on aurait $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = c$ avec $a - \delta_0 \leq c < a$ et $f(c) = 0$ en contradiction avec (3.8). Ceci montre qu'il existe $t_1 > 0$ tel que $x(t_1) < a - \delta_0$ et donc $\sup_{t \in [0, T_m]} |x(t) - a| \geq |x(t_1) - a| > \delta_0$.

On peut d'ailleurs aussi remarquer que $x(t) < a - \delta_0$ pour tout $t > t_1$ (ceci peut se montrer par l'absurde, si t_2 est le premier point après t_1 pour lequel $x(t_2) = a - \delta_0$, on a alors $x'(t_2) \geq 0$, mais $x'(t_2) = f(x(t_2)) = f(a - \delta_0) < 0$ grâce à (3.8). C'est donc impossible).

Un raisonnement analogue peut être fait si $a < x(0) < a + \delta_0$.

Il donne aussi $\sup_{t \in [0, +\infty[} |x(t) - a| > \delta_0$. On a bien montré l'instabilité de a .

Ceci termine la démonstration du théorème 3.2 dans le cas $n = 1$

□

3.4 Preuves des théorèmes de stabilité

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $a = 0$. Le système considéré est alors le système (3.3). On étudie la stabilité de la solution d'équilibre $X \equiv 0$. On rappelle que par définition,

(a) 0 est stable si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } \|X^{(0)}\| \leq \delta \Rightarrow \sup_{t \in [0, +\infty[} \|X(t)\| \leq \varepsilon$$

(b) 0 est asymptotiquement stable si 0 est stable et $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|X(t)\| = 0$

3.4.1 Preuve du théorème de stabilité linéaire

On étudie ici le problème (3.3). L'objet de cette section est de donner la démonstration du théorème 112 dans le cas $n = 1$ et $n = 2$. Nous utiliserons les notations suivantes :

$$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

$$\|X\| = \max \{|x_i|, i \in \{1, \dots, n\}\}, \quad \|A\| = \max \{|A_{i,j}|, i, j \in \{1, \dots, n\}\}.$$

Nous allons d'abord traiter le cas $n = 1$ (qui est simple) puis le cas $n = 2$ (qui contient l'essentiel des difficultés du cas $n > 1$).

Cas linéaire, une seule équation ($n = 1$)

Supposons dans un premier temps que $n = 1$. Le problème s'écrit (pour a et $x^{(0)}$ donnés) :

$$\begin{cases} x'(t) = ax, t > 0 \\ x(0) = x^{(0)} \end{cases} \quad (3.10)$$

La solution de (3.10) est $x(t) = x_0 e^{at}$.

- (a) Si $a \leq 0$, alors $|x(t)| \leq |x_0|$ et 0 est donc solution stable (uniformément).
- (b) Si $a < 0$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$ et 0 est donc solution asymptotiquement stable.
- (c) Si $a > 0$, $x_0 \neq 0$ alors $\sup_{t \in [0, +\infty[} |x(t)| = +\infty$, l'équilibre 0 est donc instable.

Cas linéaire, système : $n = 2$

On considère le problème de Cauchy associé au problème (3.3), qui s'écrit :

$$\begin{cases} X'(t) = AX, & t > 0 \\ X(0) = X_0 \end{cases} \quad (3.11)$$

À partir de maintenant, on suppose $n = 2$ et on note λ_1, λ_2 les deux racines du polynôme caractéristique de A (avec éventuellement $\lambda_1 = \lambda_2$). On étudie successivement les trois cas du théorème 3.2.

Cas 1, $\Re(\lambda_1) < 0, \Re(\lambda_2) < 0$.

Nous allons démontrer ici, en distinguant trois sous-cas, que 0 est asymptotiquement stable.

1. Cas où A diagonalisable dans \mathbb{R} . Il existe donc $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_1 \leq \lambda_2 < 0$ et $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ base de \mathbb{R}^n tels que

$$A\varphi_1 = \lambda_1\varphi_1, \quad A\varphi_2 = \lambda_2\varphi_2.$$

La solution générale du système (3.11) est

$$X(t) = c_1X^{(1)}(t) + c_2X^{(2)}(t) \text{ avec } X^{(1)}(t) = e^{\lambda_1 t}\varphi_1, \quad X^{(2)}(t) = e^{\lambda_2 t}\varphi_2$$

On a donc

La solution de (3.11) est $X(t) = M(t)M(0)^{-1}X(0)$. (Noter que la matrice $M(0)$ est bien inversible car φ_1, φ_2 sont linéairement indépendantes).

(Bornes sur la solution). Avec les notations précédentes, on a

- (a) $\|M(t)\| \leq ce^{\lambda_2 t}$, et $c > 0$ ne dépend que de φ_1 et φ_2
- (b) $\|X(t)\| \leq b\|X(0)\|e^{\lambda_2 t}$ et $b > 0$ ne dépend que φ_1 et φ_2

En posant $\delta = \varepsilon/b$ on obtient la stabilité (comme $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|X(t)\| = 0$, on obtient même la stabilité asymptotique).

2. Cas où A est diagonalisable dans \mathbb{C} et non dans \mathbb{R} . Dans ce cas $\lambda_1 = \alpha + i\beta, \lambda_2 = \alpha - i\beta$ avec $\beta \neq 0$. Soit $\varphi = \psi + i\chi$ tel que $A\varphi = \lambda_1\varphi$. On a déjà vu que $\{\psi, \chi\}$ est une base de \mathbb{R}^2 . La solution générale du système

(3.11) est

$$X(t) = c_1 X^{(1)}(t) + c_2 X^{(2)}(t)$$

avec

$$X^{(1)}(t) = e^{\alpha t}(\cos(\beta t)\psi - \sin(\beta t)\chi), \quad X^{(2)}(t) = e^{\alpha t}(\sin(\beta t)\psi + \cos(\beta t)\chi)$$

On a donc $X(t) = M(t)C$ avec

$$C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \quad M(t) = \begin{bmatrix} X^{(1)}(t) & X^{(2)}(t) \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

La solution de (3.11) est $X(t) = M(t)M(0)^{-1}X(0)$. (Ici encore, on peut noter que la matrice $M(0)$ est bien inversible car ψ, χ sont linéairement indépendantes).

Un lemme analogue au lemme 3.4.1 est peut être démontré de manière similaire.

(Bornes sur la solution). Avec les notations précédentes, on a

- (a) $\|M(t)\| \leq ce^{\alpha t}$, et $c > 0$ ne dépend que de φ_1 et φ_2
- (b) $\|X(t)\| \leq b\|X(0)\|e^{\alpha t}$ et $b > 0$ ne dépend que de φ_1 et φ_2

Comme $\alpha \leq 0$, on obtient la stabilité en posant $\delta = \varepsilon/b$. Puis, Grâce à $\alpha < 0$, on obtient même la stabilité asymptotique.

3. Cas où A est non diagonalisable. Si A est non diagonalisable, cela signifie que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R}$ et que $m_a(\lambda) = 2, m_g(\lambda) = 1$. La solution générale du système (3.11) est alors

$$X(t) = c_1 X^{(1)}(t) + c_2 X^{(2)}(t) \text{ avec } X^{(1)}(t) = e^{\lambda t}\varphi, \quad X^{(2)}(t) = e^{\lambda t}(\psi + t\varphi),$$

où $A\varphi$ est un vecteur propre associé à λ , i.e. $A\varphi = \lambda\varphi$, et ψ est un vecteur tel que φ, ψ forment une base de $\text{Ker}(A - \lambda I)^2$ (et donc ici une base de \mathbb{R}^2

). On a ici encore $X(t) = M(t)C$ avec

$$C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \quad M(t) = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} \varphi & e^{\lambda t}(\psi + t\varphi) \end{bmatrix} = e^{\frac{\lambda t}{2}} \begin{bmatrix} e^{\frac{\lambda t}{2}} \varphi & e^{\frac{\lambda t}{2}}(\psi + t\varphi) \end{bmatrix}$$

La solution de (3.11) est toujours $X(t) = M(t)M(0)^{-1}X(0)$. Comme $\lambda < 0$, les fonctions $t \mapsto e^{\frac{\lambda t}{2}}$ et $t \mapsto te^{\frac{\lambda t}{2}}$ sont bornées sur \mathbb{R}_+ . On en déduit que $\|M(t)\| \leq ae^{\frac{\lambda t}{2}}$ avec a ne dépendant que de φ, ψ et λ . On a également $\|X(t)\| \leq be^{\frac{\lambda t}{2}}\|X(0)\|$ avec b ne dépendant que de φ, ψ et λ . Ceci donne la stabilité asymptotique de 0.

Cas 2 : il existe $\lambda \in Sp(A)$ tel que $\Re(\lambda) > 0$. On distingue les cas $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$.

- (a) Cas $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $\varphi \in \mathbb{R}^2, \varphi \neq 0$ tel que $A\varphi = \lambda\varphi$, de sorte que la fonction définie par $X^{(1)}(t) = e^{\lambda t}\varphi$ est une solution de (3.11).

Pour tout $\varepsilon > 0$, la fonction $X(t) = \varepsilon e^{\lambda t}\varphi$ est la solution de (3.11) avec la donnée initiale $X(0) = \varepsilon\varphi$.

Comme $\sup_{t>0} \|\varepsilon X(t)\| = +\infty$ et que $\|X(0)\|$ est arbitrairement petit, ceci montre que 0 est un équilibre instable.

- (b) Cas $\lambda \in \mathbb{C}$ (et non dans \mathbb{R}). Supposons maintenant que λ soit complexe : $\lambda = \alpha + i\beta, \alpha > 0, \beta \neq 0$. Soit φ tel que $A\varphi = \lambda\varphi, \varphi = \psi + i\chi$. La fonction

$$X^{(1)}(t) = e^{\alpha t}(\cos(\beta t)\psi - \sin(\beta t)\chi)$$

est solution de (3.11). On utilise maintenant le fait que $\psi \neq 0$. Pour tout $\varepsilon > 0$, la fonction $X(t) = \varepsilon e^{\alpha t}(\cos(\beta t)\psi - \sin(\beta t)\chi)$ est la solution de (3.11) avec la donnée initiale $X(0) = \varepsilon\psi$. On a alors :

$$\sup_{t>0} \|\varepsilon X(t)\| = +\infty, \quad \|\varepsilon X(0)\| \leq \varepsilon\|\psi\|$$

Ceci prouve que 0 est un équilibre instable.

Cas 3 : $\Re(\lambda_1) \leq 0, \Re(\lambda_2) \leq 0$ et $\Re(\lambda_1)\Re(\lambda_2) = 0$.

On peut supposer sans perte de généralité que $\Re(\lambda_1) = 0$. (Noter qu'il est

possible que $\lambda_1 = \lambda_2$.)

(a) Cas 3(a) : $\forall \lambda \in Sp(A)$ tel que $\Re(\lambda) = 0$ on a $m_a(\lambda) = m_g(\lambda)$. Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$ on a donc aussi $m_a(\lambda_2) = m_g(\lambda_2)$ (plus précisément $m_a(\lambda_2) = m_g(\lambda_2) = 1$). Si $\lambda_1 = \lambda_2$ (c'est-à-dire $m_a(\lambda_1) = 2$), on a alors $m_a(\lambda_1) = m_g(\lambda_1) = 2$. La matrice est donc toujours diagonalisable (dans \mathbb{R} ou \mathbb{C}). On a profité ici du fait que $n = 2$ (pour $n > 2$, la situation serait un peu plus complexe). On distingue maintenant les cas A diagonalisable dans \mathbb{R} et A diagonalisable dans \mathbb{C} .

(a) Cas A est diagonalisable dans \mathbb{R} . Comme $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, la solution générale de (3.11) est donnée par les fonctions $X^{(1)}$ et $X^{(2)}$ (avec $A\varphi_i = \lambda_i\varphi_i, \varphi_i \neq 0, i = 1, 2$)

$$X^{(1)}(t) = e^{\lambda_1 t} \varphi_1 \quad X^{(2)}(t) = e^{\lambda_2 t} \varphi_2$$

On a donc $M(t) = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \varphi_1 & e^{\lambda_2 t} \varphi_2 \end{bmatrix}$ et, comme $\lambda_i \leq 0$ pour $i = 1, 2$, il existe a et b ne dépendant que de φ_1 et φ_2 tels que $\|M(t)\| \leq a$, et $\|X(t)\| \leq b\|X(0)\|$ pour tout $t > 0$. Le point 0 est donc un équilibre stable. Mais 0 n'est pas asymptotiquement stable car $\lambda_1 = 0$ et donc, pour tout $\varepsilon > 0$, la fonction constante égale à $\varepsilon\varphi_1$ est solution de (3.11).

(b) Cas A est diagonalisable dans \mathbb{C} (et non dans \mathbb{R}) Supposons maintenant que $\lambda_1 = \alpha + i\beta = i\beta$ et $\lambda_2 = \alpha - i\beta = -i\beta$ (avec $\beta \neq 0$). Avec les notations habituelles, la solution générale de (3.11) est donnée par les fonctions

$$X^{(1)}(t) = \cos(\beta t)\psi - \sin(\beta t)\chi \quad X^{(2)}(t) = \sin(\beta t)\psi + \cos(\beta t)\chi$$

On a donc : $\|M(t)\| \leq a$, avec a ne dépendant que de ψ, χ et $\|X(t)\| \leq b\|X(0)\|$ avec b ne dépendant que de ψ, χ . Il y a équilibre stable en 0. Par contre, comme dans le cas A diagonalisable dans \mathbb{R} , 0 n'est pas asymptotiquement stable.

(b) Cas (3B) : $\exists \lambda \in Sp(A)$ tel que $\Re(\lambda) = 0$ et $m_a(\lambda) > m_g(\lambda)$. Dans le cas $n = 2$ considéré ici, ce cas correspond à $0 \in Sp(A)$ et $m_a(0) = 2, m_g(0) = 1$.

La solution générale de (3.11) est donnée par les fonctions

$$X^{(1)}(t) = \varphi \quad X^{(2)}(t) = \psi + t\varphi,$$

avec $\varphi, \psi \in \mathbb{R}^2$, non nuls. La fonction $X^{(1)}$ est bornée mais $\sup_{t \in \mathbb{R}_+} \|X^{(2)}(t)\| = +\infty$.

Il y a donc équilibre instable en 0, car $\|\varepsilon X^{(2)}(0)\| = |\varepsilon| \|\psi\|$ est aussi petit que l'on veut (et non nul) alors que $\sup_{t \in \mathbb{R}_+} \|\varepsilon X^{(2)}(t)\| = +\infty$ pour $\varepsilon \neq 0$.

(Pendule pesant linéarisé).

Considérons à nouveau l'exemple du pendule pesant linéarisé. On rappelle que l'équation est

$$x''(t) + x(t) = 0, t > 0. \quad (3.12)$$

On pose $x_1(t) = x(t), x_2(t) = x'(t), X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$ et $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

L'équation (du second ordre) (3.12) se ramène donc au système $X'(t) = AX$.

Les valeurs propres de la matrice A sont $\pm i$. On peut retrouver ce résultat directement, les solutions du système sont

$$x_1(t) = \alpha \cos t + \beta \sin t \quad x_2(t) = -\alpha \sin t + \beta \cos t, \quad \alpha = x_1(0), \beta = x_2(0)$$

On a alors : $\|X(t)\| \leq |\alpha| + |\beta| \leq 2\|X(0)\|$ pour tout t . Ce qui prouve la stabilité de 0.

On passe maintenant à la théorie de stabilité dans le cas non linéaire.

3.5 Preuve partielle du théorème de stabilité, cas non linéaire

On se place maintenant sous les hypothèses du théorème 3.2 et on considère le système différentiel non linéaire (3.4), et $a \in \mathbb{R}^n$ tel que $f(a) = 0$. Le cas $n = 1$ a été démontré dans le cas précédent. On va s'intéresser ici au cas $n = 2$ (qui contient l'essentiel des difficultés du cas $n > 1$) et on ne démontre

que l'item 1 du théorème, c.à.d. que si $\Re(\lambda) < 0$ pour tout $\lambda \in Sp(A)$, alors a est asymptotiquement stable. En posant $Y = X - a$ l'équation sur Y est $Y'(t) = f(Y(t) + a) = h(Y(t))$ avec h définie par $h(z) = f(z + a)$. (Noter que $h \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ car $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.) On rappelle que l'on note $J_f(a)$ la matrice jacobienne en a de f et $J_h(0)$ la matrice jacobienne en 0 de h . Comme $J_h(0) = J_f(a)$, il suffit de démontrer le théorème 13 pour une fonction f telle que $f(0) = 0$, avec $a = 0$. Comme on suppose que $n = 2$, on note x_1, x_2 les composantes de X , et le système (3.4) s'écrit

$$\begin{cases} x_1'(t) = f_1(x_1(t), x_2(t)) & t > 0, \\ x_2'(t) = f_2(x_1(t), x_2(t)) & t > 0. \end{cases}$$

La dérivabilité de f au point 0 donne, pour tout $Z \in \mathbb{R}^2$,

$$f(Z) = \underbrace{f(0)}_{=0} + \underbrace{J_f(0)}_A Z + \underbrace{\|Z\|\varepsilon(Z)}_{g(Z)} = AZ + g(Z),$$

$$\text{avec } A = J_f(0) = \begin{bmatrix} \partial_1 f_1 & \partial_2 f_1 \\ \partial_1 f_2 & \partial_2 f_2 \end{bmatrix}, g(Z) = \|Z\|\varepsilon(Z) \text{ et } \lim_{Z \rightarrow 0} \varepsilon(Z) = 0.$$

Le système (3.4) s'écrit donc $X'(t) = AX(t) + g(X(t))$. Noter aussi que $g \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Par hypothèse, on a $\Re(\lambda_1) < 0$ et $\Re(\lambda_2) < 0$ pour $\lambda_1, \lambda_2 \in Sp(A)$, et on veut montrer que 0 est asymptotiquement stable. On commence par un calcul semblable à celui que l'on fait avec la technique "variation de la constante". Soit X la solution maximale de 9.13 avec donnée initiale $X(0)$ (cette solution est donc définie sur $[0, T_m]$). On pose $C(t) = e^{-At}X(t)$ et on a donc $X(t) = e^{At}C(t)$. On en déduit que

$$\begin{aligned} X'(t) &= Ae^{At}C(t) + e^{At}C'(t) \\ &= AX(t) + g(X(t)) = Ae^{At}C(t) + g(X(t)) \end{aligned}$$

Ceci donne que $C'(t) = e^{-At}g(X(t))$. Comme

$$C(t) = \int_0^t C'(s)ds + C(0) \text{ et } C(0) = X(0)$$

on obtient

$$C(t) = X(0) + \int_0^t e^{-As} g(X(s)) ds.$$

On en déduit la formule suivante, dite formule de Duhamel :

$$X(t) = e^{At} X(0) + \int_0^t e^{A(t-s)} g(X(s)) ds, \text{ pour tout } t \in [0, T_m[.$$

Pour la suite, on suppose sans perte de généralité, que $\Re(\lambda_1) \leq \Re(\lambda_2) = 2\alpha < 0$. en utilisant le fait que $e^{At} = M(t)M(0)^{-1}$, il existe \bar{b} , ne dépendant que de φ_1, φ_2 (vecteurs propres associés à λ_1 et λ_2) tel que $\|e^{At}\| \leq \bar{b}e^{\alpha t}$ pour

tout $t \geq 0$ (on peut par ailleurs remarquer que $\bar{b} \geq 1$). Compte tenu de la définition de la norme (dans \mathbb{R}^2 et dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$), ceci donne, avec $b = 2\bar{b}$, $\|e^{At}Z\| \leq be^{\alpha t}\|Z\|$ pour tout $Z \in \mathbb{R}^2$. On a donc

$$\|X(t)\| \leq be^{\alpha t}\|X(0)\| + \int_0^t be^{\alpha(t-s)}\|g(X(s))\| ds \text{ pour tout } t \in [0, T_m[.$$

On utilise maintenant le fait que $g(Z) = \|Z\|\varepsilon(Z)$. Comme $\varepsilon(Z) \rightarrow 0$ lorsque $Z \rightarrow 0$, on a

$$\forall \tilde{\varepsilon} > 0, \exists \delta > 0 : \|X\| \leq \delta \Rightarrow \|\varepsilon(X)\| \leq \tilde{\varepsilon}.$$

Soit donc $\tilde{\varepsilon} > 0$ et $0 < T < T_m$. Si

$$\forall s \in [0, T], \quad \|X(s)\| \leq \delta, \tag{3.13}$$

on a alors, pour tout $s \in [0, T]$, $\|g(X)\| \leq \|X\|\tilde{\varepsilon}$ et donc, pour tout $0 \leq t \leq T$,

$$e^{-\alpha t}\|X(t)\| \leq b\|X(0)\| + \int_0^t be^{-\alpha s}\|X(s)\|\tilde{\varepsilon} ds$$

On applique une technique de Gronwall ; en posant

$$\varphi(t) = b\|X(0)\| + \int_0^t be^{-\alpha s}\|X(s)\|\tilde{\varepsilon} ds,$$

l'inégalité précédente donne

$$\varphi'(t) = b\tilde{\varepsilon}\|X(t)\|e^{-\alpha t} \leq b\tilde{\varepsilon}\varphi(t).$$

On a donc $\varphi'(t) - b\tilde{\varepsilon}\varphi(t) \leq 0$ pour tout $0 \leq t \leq T$. En posant $\psi(t) = \varphi(t)e^{-b\tilde{\varepsilon}t}$, on obtient

$$\psi'(t) = (\varphi'(t) - \tilde{\varepsilon}b\varphi(t))e^{-b\tilde{\varepsilon}t} \leq 0.$$

La fonction ψ est décroissante et donc $\psi(t) \leq \psi(0)$ pour tout $0 \leq t \leq T$. On en déduit

$$\varphi(t)e^{-b\tilde{\varepsilon}t} \leq \varphi(0) \text{ et donc } \varphi(t) \leq b\|X(0)\|e^{b\tilde{\varepsilon}t}.$$

Comme $\|X(t)\| \leq e^{\alpha t}\varphi(t)$, on a $\|X(t)\| \leq b\|X(0)\|e^{b\tilde{\varepsilon}t}e^{\alpha t}$ pour tout $0 \leq t \leq T$. En choisissant $\tilde{\varepsilon} = -\frac{\alpha}{2b}$ (ce qui est possible car $\alpha < 0$), on obtient, à condition que (3.13) soit vérifiée,

$$\|X(t)\| \leq b\|X(0)\|e^{\frac{\alpha}{2}t} \text{ pour tout } 0 \leq t \leq T \quad (3.14)$$

On va montrer maintenant que si $\|X(0)\| \leq \frac{\delta}{b}$, alors la condition (3.13) est vérifiée pour tout $T < T_m$, que $T_m = +\infty$ et (3.14) est vraie pour tout $t > 0$ (ce qui donne la stabilité asymptotique de 0). On suppose donc que $\|X(0)\| \leq \frac{\delta}{b}$. Ceci donne, en particulier, $\|X(0)\| < \delta$ (car on a déjà vu que $b > 1$). On montre par l'absurde que $\|X(t)\| < \delta$ pour tout $t < T_m$. En effet, sinon on pose

$$T = \inf \{t \in [0, T_m[, \|X(t)\| = \delta\}.$$

On a $T > 0$ car $\|X(0)\| < \delta$ et (3.13) est vérifié. On a donc (3.14), ce qui donne pour $t = T$, $\|X(T)\| \leq b\|X(0)\|e^{\frac{\alpha}{2}T} < \delta$, en contradiction avec la définition de T . On a donc montré que $\|X(t)\| < \delta$ pour tout $t < T_m$. Ceci donne d'une part

que $T_m = +\infty$ (il n'y a pas "explosion" en T_m) et d'autre part que

$$\|X(t)\| \leq b\|X(0)\|e^{\frac{g}{2}t} \text{ pour tout } 0 \leq t < +\infty.$$

On en déduit que 0 est asymptotiquement stable.

3.6 Exemples

3.6.1 Pendule non linéarisé

Revenons maintenant à l'exemple du pendule et considérons le modèle du pendule non linéarisé.

$$x''(t) + \frac{g}{\ell} \sin(x(t)) = 0 \tag{3.15}$$

Dans l'équation (3.15) g correspond à l'intensité de la pesanteur et ℓ la longueur du fil, On suppose que $\frac{g}{\ell} = 1$. On pose $x_1 = x$ et $x_2 = x'$. Alors :

$$X'(t) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\sin(x_1) \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

On sait que $(0, 0)$ ainsi que $(\pi, 0)$ sont deux points d'équilibre. La matrice jacobienne s'écrit :

$$J_f(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\cos(x_1) & 0 \end{bmatrix}.$$

Si $x_1 = x_2 = 0$ alors $J_f(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ dont les valeurs propres sont $\pm i$. On ne peut donc pas conclure avec le théorème 3.2. Si $x_1 = \pi$ et $x_2 = 0$, $J_f(\pi, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, dont les valeurs propres sont ± 1 . L'équilibre est donc instable.

3.6.2 Modèle de Lotka-Volterra

Le système de Lotka-Volterra peut s'écrire :

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) (a - bx_2(t)), \\ x_2'(t) = x_2(t) (-c + dx_1(t)). \end{cases}$$

On rappelle que $a > 0, b > 0, c > 0, d > 0$. Les points d'équilibre sont $(0, 0)$ et $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$. La matrice jacobienne est :

$$J_f(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} a - bx_2 & -bx_1 \\ dx_2 & -c + dx_1 \end{bmatrix},$$

Si $x_1 = x_2 = 0$ alors $J_f(0, 0) = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{bmatrix}$, et le point $(0, 0)$ est instable.

Si $x_1 = \frac{c}{d}$ $x_2 = \frac{a}{b}$ alors

$$J_f\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{bc}{d} \\ \frac{ad}{b} & 0 \end{bmatrix}$$

Le polynôme caractéristique de cette matrice est $\lambda^2 + \frac{adbc}{bc} = \lambda^2 + ac$. Les valeurs propres sont $\pm i\sqrt{ac}$. On est dans le cas 3) du théorème 3.2 et on ne peut pas conclure.

3.7 Stabilité au sens de Lyapunov

Les solutions stationnaires constituent des états d'équilibres dont la stabilité (ou l'instabilité) est importante du point de vue des applications. En réalité, un système physique est toujours soumis à des perturbations, aussi infimes soient-elles, et lorsqu'on cherche des simulations numériques, on fait nécessairement des erreurs de mesure ou des erreurs d'arrondis.

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'étude du comportement asymptotique des solutions stationnaires (c'est-à-dire les points d'équilibres) pour des don-

nées initiales proches d'une solution stationnaire, en faisant intervenir la théorie de Lyapunov. Celle-ci fait appel à des fonctions particulières au voisinage de l'équilibre, permettant de contrôler le comportement asymptotique des solutions stationnaires.

3.7.1 Exemple d'application

On commence par l'exemple suivant qui illustre l'idée générale de la théorie de Lyapunov.

Exemple 1 (Champs de gradient). Soit le système différentiel

$$x'(t) = f(x(t)) \tag{5.2.1}$$

où f est un champ de vecteurs de gradient, c'est-à-dire :

$$f(x) = -\nabla V(x),$$

où $V : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe \mathcal{C}^2 sur Ω (de façon que f soit de classe \mathcal{C}^1 sur Ω).

Par définition, le gradient de V vérifie que :

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{|V(x+h) - V(x) - D_x V \cdot h|}{\|h\|} = 0,$$

d'où :

$$D_x V \cdot h = \langle \nabla V(x), h \rangle, \quad \forall h \in \mathbb{R}^n.$$

Comme la dimension est finie, on a :

$$\nabla V(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial x_1}(x) \\ \frac{\partial V}{\partial x_2}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial V}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

Soit x_0 un point d'équilibre pour $x'(t) = f(x(t))$, c'est-à-dire $f(x_0) = 0$, donc $\nabla V(x_0) = 0$, ce qui implique :

$$\forall j = 1, \dots, n, \quad \frac{\partial V}{\partial x_j}(x_0) = 0.$$

C'est-à-dire que x_0 est un point critique de la fonction V .

Comme $x'(t) = f(x(t)) = -\nabla V(x(t))$, la dérivée totale de V par rapport au temps est :

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) = \nabla V(x(t)) \cdot x'(t) = \langle \nabla V(x(t)), -\nabla V(x(t)) \rangle = -\|\nabla V(x(t))\|^2 \leq 0, \quad \forall t.$$

3.7.2 Fonction de Lyapunov

Définition 5.3.1 (Fonction de Lyapunov). Soit x_0 un point d'équilibre de l'équation différentielle autonome

$$x'(t) = f(x(t)), \tag{5.3.1}$$

et soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n contenant x_0 .

Une fonction $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 est appelée une *fonction de Lyapunov* pour f en x_0 si :

- (a) $V(x_0) = 0$ et $V(x) > 0$ pour tout $x \in \Omega \setminus \{x_0\}$,
- (b) la dérivée de V le long des solutions de (5.3.1) satisfait

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) = \nabla V(x(t)) \cdot f(x(t)) \leq 0, \quad \forall x \in \Omega.$$

Théorème 5.3.2. Si une fonction de Lyapunov V existe pour x_0 dans un voisinage Ω et si sa dérivée le long des trajectoires est strictement négative, c'est-à-dire :

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) < 0 \quad \forall x \in \Omega \setminus \{x_0\},$$

alors x_0 est un point d'équilibre *asymptotiquement stable*.

Remarque. La condition $\frac{d}{dt}V(x(t)) \leq 0$ implique la stabilité (au sens de Lyapunov), mais pas nécessairement la convergence des solutions vers x_0 . Il faut la stricte décroissance pour garantir la convergence.

3.7.3 Bassin d'attraction

Définition 5.3.3. Le *bassin d'attraction* d'un point d'équilibre stable x_0 est l'ensemble des points $x \in \mathbb{R}^n$ tels que la solution $x(t)$ du système (5.3.1) vérifiant $x(0) = x$ vérifie :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = x_0.$$

Cet ensemble est en général ouvert et peut être strictement inclus dans le domaine de définition de f .

3.7.4 Exemples d'application

Exemple 1. Considérons le système non linéaire :

$$\begin{cases} x_1'(t) = -x_1(t) + x_2^2(t), \\ x_2'(t) = -x_2(t), \end{cases} \quad (5.3.4)$$

On observe que $x_0 = (0, 0)$ est un point d'équilibre.

On définit la fonction $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$$

Alors V est de classe \mathcal{C}^1 et :

$$V(0, 0) = 0, \quad V(x_1, x_2) > 0 \quad \forall (x_1, x_2) \neq (0, 0)$$

Calculons la dérivée de V le long des solutions :

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) = x_1x_1' + x_2x_2' = x_1(-x_1 + x_2^2) + x_2(-x_2) = -x_1^2 + x_1x_2^2 - x_2^2$$

Ce n'est pas forcément ≤ 0 partout, donc V n'est pas une fonction de Lyapunov stricte. Cependant, on peut encore montrer la stabilité de l'origine dans certaines régions.

Exemple 2. Soit le système linéaire :

$$x'(t) = Ax(t), \quad \text{où } A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Prenons $V(x) = \frac{1}{2}x^T x = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$. Alors :

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) = x^T A^T x = x^T (A + A^T)x = -4x_1^2 - 6x_2^2 < 0 \quad \forall x \neq 0$$

Donc $x = 0$ est un point d'équilibre asymptotiquement stable.

3.8 Ensembles ω -limites

Définition 5.4.1. Soit $x(t)$ une solution du système :

$$x'(t) = f(x(t)),$$

définie sur $[0, +\infty[$. L'ensemble $\omega(x_0)$ appelé *ensemble ω -limite* de x_0 est défini par :

$$\omega(x_0) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \exists t_n \rightarrow +\infty \text{ tel que } x(t_n) \rightarrow y\}.$$

Autrement dit, $\omega(x_0)$ est l'ensemble des points d'accumulation de la trajectoire $x(t)$ quand $t \rightarrow +\infty$.

Propriétés :

- (a) $\omega(x_0)$ est un ensemble fermé et invariant par le flot du système.
- (b) Si la trajectoire $x(t)$ reste bornée sur $[0, +\infty[$, alors $\omega(x_0)$ est non vide.
- (c) Si x_0 appartient au bassin d'attraction d'un équilibre x_e , alors $\omega(x_0) = \{x_e\}$.

3.8.1 Cas de la dimension $n = 2$

En dimension 2, les trajectoires d'un système différentiel peuvent présenter différents types de comportements asymptotiques :

- convergence vers un point d'équilibre,
- convergence vers un cycle limite (solution périodique stable),
- comportement plus complexe (mais exclu dans certains cas par des résultats de Poincaré-Bendixson).

Théorème de Poincaré-Bendixson. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe \mathcal{C}^1 , et $x(t)$ une trajectoire bornée du système $x'(t) = f(x(t))$.

Alors si $\omega(x_0)$ ne contient pas de point d'équilibre, c'est une orbite périodique (un cycle limite).

Ce théorème est spécifique à la dimension 2, et ne s'applique pas en dimension supérieure.

3.9 Principe d'invariance de LaSalle

Ce principe permet d'affaiblir l'exigence de décroissance stricte dans les fonctions de Lyapunov pour conclure à la stabilité asymptotique.

Théorème 5.5.1 (Principe d'invariance de LaSalle).

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue, et $x'(t) = f(x(t))$ un système autonome. Soit $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 telle que :

- $V(x) \geq 0$ pour tout x dans un ensemble compact invariant D ,
- $\dot{V}(x) = \nabla V(x) \cdot f(x) \leq 0$ sur D .

Alors toute trajectoire $x(t)$ contenue dans D converge vers l'ensemble maximal invariant contenu dans :

$$E = \{x \in D \mid \dot{V}(x) = 0\}$$

Conséquence. Si l'unique invariant dans E est un point d'équilibre x_0 , alors x_0 est asymptotiquement stable.

3.10 Exercices et solutions corrigées

Exercice 1. Considérons le système :

$$x'(t) = -x^3(t)$$

Solution. Le point d'équilibre est $x = 0$.

Prenons $V(x) = \frac{1}{2}x^2$. C'est une fonction de classe \mathcal{C}^1 , strictement positive sauf en $x = 0$, et :

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) = x(t) \cdot x'(t) = -x^4(t) \leq 0$$

Donc $x = 0$ est un équilibre asymptotiquement stable. La solution générale est :

$$x(t) = \frac{x_0}{\sqrt{1 + 2x_0^2 t}} \rightarrow 0 \quad \text{quand } t \rightarrow +\infty$$

—

Exercice 2. Système :

$$\begin{cases} x_1' = -x_1 + x_2^2 \\ x_2' = -x_2 \end{cases}$$

Solution. $x = (0, 0)$ est un point d'équilibre.

On choisit $V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$.

Alors :

$$\dot{V}(x) = x_1(-x_1 + x_2^2) + x_2(-x_2) = -x_1^2 + x_1x_2^2 - x_2^2$$

Cette expression peut être positive pour certains x , donc V n'est pas une fonction de Lyapunov stricte. On en déduit que l'origine est stable mais pas nécessairement asymptotiquement stable.

—

Exercice 3. $x'(t) = Ax(t)$ avec A une matrice dont les valeurs propres ont des parties réelles strictement négatives.

Solution. Soit $V(x) = x^T Px$ où P est une matrice symétrique définie positive.

Choisissons $P = I$. On a :

$$\dot{V}(x) = x^T(A^T + A)x$$

Si $A^T + A$ est définie négative, alors $\dot{V}(x) < 0$ pour tout $x \neq 0$, ce qui montre la stabilité asymptotique de l'origine.

Exercice 4 : Système de Van der Pol

Considérez le système :

$$\begin{cases} x'(t) = x^3 - x + y \\ y'(t) = -x \end{cases}$$

Solution. Le seul point d'équilibre est $(0, 0)$. La jacobienne au point $(0, 0)$ est :

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres sont complexes conjuguées à partie réelle négative \Rightarrow stabilité asymptotique.

Choisissons $V(x, y) = x^2 + y^2$:

$$\frac{dV}{dt} = 2x(x^3 - x + y) + 2y(-x) = 2x^4 - 2x^2$$

Dans le disque $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$, on a $x^2 < 1$, donc $x^4 < x^2$
 $\dot{V} < 0$ sauf à $x = 0$.

Donc V est une fonction de Lyapunov stricte dans D , ce qui implique que
 $(0, 0)$ est asymptotiquement stable pour les trajectoires contenues dans D .

—

Exercice 5 : Pendule simple avec amortissement

$$\begin{cases} x'(t) = v(t) \\ v'(t) = -kv(t) - \sin x(t), \quad k > 0 \end{cases}$$

Solution. Prenons $V(x, v) = \frac{1}{2}v^2 + (1 - \cos x)$. On a :

$$\frac{dV}{dt} = v(-kv - \sin x) + v \sin x = -kv^2 \leq 0$$

Donc V est une fonction de Lyapunov stricte sur l'ouvert $\Omega = (-\pi, \pi) \times \mathbb{R}$.
L'origine $(0, 0)$ est donc asymptotiquement stable.

—

Exercice 6 : Système non linéaire dissipatif

$$\begin{cases} x'(t) = y \\ y'(t) = -x + (x^2 - 1)y \end{cases}$$

Solution. Prenons $V(x, y) = x^2 + y^2$. Alors :

$$\frac{dV}{dt} = 2xy + 2y(-x + (x^2 - 1)y) = 2y^2(x^2 - 1)$$

Dans $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$, on a $x^2 < 1 \Rightarrow \dot{V} < 0$ si $y \neq 0$.

Donc $(0, 0)$ est asymptotiquement stable et D est un domaine invariant.

—

Exercice 7 : Système général dissipatif

Soit le système :

$$\begin{cases} x'(t) = -x - 2y^2 \\ y'(t) = xy - y^3 \end{cases}$$

Solution. Considérons $V(x, y) = x^2 + \alpha y^2$ avec $\alpha > 0$. Alors :

$$\frac{dV}{dt} = 2x(-x - 2y^2) + 2\alpha y(xy - y^3) = -2x^2 - 4xy^2 + 2\alpha xy^2 - 2\alpha y^4$$

Choisissons $\alpha = 2$ pour obtenir :

$$\frac{dV}{dt} = -2(x^2 + 2y^4) < 0$$

Donc V est une fonction de Lyapunov stricte sur \mathbb{R}^2 , et l'origine est globalement asymptotiquement stable.

Examens corrigés

Examen 01

exercice 01 On considère le système différentiel linéaire

$$u' = Au = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

(a) Les fonctions

$$e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

forment-elles une base des solutions de ce système ?

(b) Même question pour les fonctions

$$e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad e^{-t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Déterminer une base des solutions du système.

(d) Déterminer une base des solutions de l'équation différentielle

$$x'' + 2x' + x = 0.$$

Exercice 02 On considère l'équation différentielle

$$x' = \frac{x}{a + x^2},$$

où a est un paramètre réel strictement positif.

[label=0)]Montrer qu'une solution maximale de cette équation, non

identiquement nulle, ne peut s'annuler. En déduire que les solutions sont soit constantes soit strictement monotones. Résoudre l'équation différentielle. On déterminera une relation $t = f(x)$ satisfaite par les solutions et on en déduira l'intervalle de définition des solutions maximales. Déduire de la question précédente une étude qualitative des solutions maximales de l'équation

$$x' = \frac{x}{2 + \sin(tx) + x^2}.$$

(On précisera leur domaine de définition et leur comportement aux bornes.)

(b) Corrigé

Exercice 1 : On considère le système

$$u' = Au, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

(a) On calcule

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

donc $e^{-t}(1, -1)$ est bien une solution. En revanche,

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

donc $e^t(1, 1)$ n'est pas solution. La réponse est donc **non**.

(b) On a

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \neq -1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

donc $e^{-t}(0, 1)$ n'est pas solution. La réponse est donc **non**.

(c) Le polynôme caractéristique est

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2.$$

Il existe une valeur propre double $\lambda = -1$. Un vecteur propre est $(1, -1)$.

On cherche un vecteur généralisé v tel que

$$(A + I)v = (1, -1).$$

On trouve par exemple $v = (0, 1)$. Une base des solutions est donc

$$e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad e^{-t} \left(t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

(d) L'équation $x'' + 2x' + x = 0$ a pour équation caractéristique

$$r^2 + 2r + 1 = (r + 1)^2.$$

Une base de solutions est

$$e^{-t}, \quad te^{-t}.$$

Exercice 2 On considère

$$x' = \frac{x}{a + x^2}, \quad a > 0.$$

- (a) Si $x(t_0) = 0$, alors $x'(t_0) = 0$ et la solution est identiquement nulle. Une solution non identiquement nulle ne peut donc s'annuler. Le signe de x' est constant, les solutions sont donc strictement monotones.
- (b) On sépare les variables :

$$(a + x^2) \frac{dx}{x} = dt \quad \Longrightarrow \quad a \ln |x| + \frac{x^2}{2} = t + C.$$

On obtient une relation implicite $t = f(x)$. Les solutions sont définies pour tout $t \in \mathbb{R}$.

(c) Pour l'équation

$$x' = \frac{x}{2 + \sin(tx) + x^2},$$

le dénominateur est toujours strictement positif. Les solutions sont donc définies globalement. Elles sont monotones et leur comportement asymptotique est analogue à celui de l'équation précédente.

**Test 01 : Université Djilali Bounaama 1ère année Master 2023–
2024**

On considère le problème de Cauchy :

$$(S) \quad \begin{cases} u_1'(t) = (1 - u_2(t)) u_1(t) \\ u_2'(t) = (u_1(t) - 1) u_2(t) \\ u_1(0) = u_{1,0}, \quad u_2(0) = u_{2,0} \end{cases}$$

- (a) Montrer que le système (S) admet une solution unique maximale.
- (b) Montrer que $u_1(t)$ et $u_2(t)$ gardent un signe constant.
- (c) Poser $w(t) = u_1(t) + u_2(t)$ et montrer une majoration de $w(t)$.
- (d) En déduire que la solution est globale.
- (e) Étudier la stabilité des points d'équilibre du système.

Corrigé 1. Existence et unicité

On écrit le système sous la forme :

$$U'(t) = F(U(t))$$

avec

$$F(u_1, u_2) = ((1 - u_2)u_1, (u_1 - 1)u_2)$$

La fonction F est de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 , donc localement lipschitzienne. Par le théorème de Cauchy-Lipschitz, il existe une unique solution maximale.

2. Signe des solutions On pose $a(t) = 1 - u_2(t)$.

Alors :

$$u_1'(t) = a(t)u_1(t)$$

Donc :

$$u_1(t) = u_{1,0} \exp\left(\int_0^t a(s) ds\right)$$

Ainsi $u_1(t)$ garde le même signe que $u_{1,0}$. De même pour $u_2(t)$.

3. Majorations

Posons :

$$w(t) = u_1(t) + u_2(t)$$

Alors :

$$w'(t) = u_1'(t) + u_2'(t) = u_1(t) - u_2(t) \leq u_1(t) + u_2(t) = w(t)$$

Donc :

$$\frac{w'(t)}{w(t)} \leq 1$$

En intégrant :

$$\ln w(t) - \ln w(0) \leq t$$

Donc :

$$w(t) \leq w(0)e^t$$

Ainsi :

$$u_1(t), u_2(t) \leq (u_{1,0} + u_{2,0})e^t$$

4. Globalité

Les solutions sont bornées sur tout intervalle fini, donc elles n'explosent pas en temps fini.

Ainsi :

$$T_+ = +\infty \quad \text{et} \quad T_- = -\infty$$

Les solutions sont globales.

5. Étude des points d'équilibre

Les points d'équilibre sont :

$$P_1 = (0, 0), \quad P_2 = (1, 0), \quad P_3 = (0, 1), \quad P_4 = (1, 1)$$

La matrice jacobienne est :

$$J(u_1, u_2) = \begin{pmatrix} 1 - u_2 & -u_1 \\ u_2 & u_1 - 1 \end{pmatrix}$$

Au point $P_1 = (0, 0)$:

$$J(P_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Valeurs propres :

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -1$$

Donc P_1 est un point selle (instable).

Au point $P_2 = (1, 0)$:

$$J(P_2) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valeurs propres :

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 0$$

Donc P_2 est instable.

Au point $P_3 = (0, 1)$:

$$J(P_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Valeurs propres :

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 0$$

Stabilité indéterminée pour le système non linéaire.

Au point $P_4 = (1, 1)$:

$$J(P_4) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Valeurs propres :

$$\lambda_1 = i, \quad \lambda_2 = -i$$

Centre : stabilité linéaire, conclusion indéterminée pour le système non linéaire.

**Examen 02 : Université Djilali Bounaama 1ère année Master
2023–2024 Exercice 01 :** On considère le problème de Cauchy :

$$(P) \quad \begin{cases} u'(t) - \frac{1}{t}u(t) + \frac{t}{u(t)^2} = 0, \\ u(t_0) = u_0, \end{cases}$$

où la fonction u est définie pour $t \in I \subset \mathbb{R}_+^*$.

(a) Montrer que le problème (P) admet une unique solution maximale u définie sur un intervalle ouvert J_{\max} contenant t_0 .

(b) Que se passe-t-il si $u_0 = 0$?

(c) Dans la suite on suppose que $u_0 \neq 0$.

i. En utilisant le changement de fonction $w(t) = \frac{1}{u(t)}$ (tel que $u(t) \neq 0 \forall t \in I$), montrer que la solution du problème (P) s'écrit sous la forme :

$$u(t) = \frac{t}{e^t + k},$$

où k est à déterminer en fonction de t_0 et u_0 .

ii. Soit $k \geq 0$. Les solutions du problème (P) sont-elles maximales ou globales sur \mathbb{R}_+^* ? Si elles sont maximales, trouver l'intervalle J_{\max} .

iii. Soit $-1 < k < 0$. Même question.

iv. Si $k = -1$, même question.

v. Si $k < -1$, même question. Discuter suivant le signe de u_0 .

(d) Tracer les graphes des solutions de (P) et son portrait de phase dans le cas $k \geq 0$.

Exercice 02 : On considère pour $t \in \mathbb{R}$ le système différentiel suivant :

$$(S) \quad \begin{cases} u_1'(t) = u_1(t)(1 - u_1(t) - \beta u_2(t)), \\ u_2'(t) = u_2(t)(1 - u_2(t) - \alpha u_1(t)), \\ u_1(0) = u_{1,0}, \quad u_2(0) = u_{2,0}, \end{cases}$$

avec $\alpha, \beta > 0$.

- (a) Montrer que (S) admet une unique solution maximale (u_1, u_2) définie sur J_{\max} .
- (b) On se donne des données initiales $u_{1,0}, u_{2,0}$ positives. Montrer que u_1 et u_2 restent positives sur J_{\max} .
- (c) Dans la suite on suppose que $u_{1,0} \geq 0$ et $u_{2,0} \geq 0$.
- i. Montrer que pour tout $t \geq 0$:

$$u_1(t) \leq ke^t, \quad u_2(t) \leq ke^t,$$

où k est une constante à déterminer en fonction de $u_{1,0}$ et $u_{2,0}$.

(Indication : considérer $u(t) = u_1(t) + u_2(t)$.)

- ii. En déduire que la solution (u_1, u_2) est globale.
- (d) Discuter selon les paramètres α et β la stabilité des points d'équilibre :

$$P_1 = (0, 0), \quad P_2 = (1, 0), \quad P_3 = (0, 1).$$

- (e) On suppose que $\alpha > 1$ et $\beta > 1$ ou bien $\alpha < 1$ et $\beta < 1$.
- i. Montrer qu'il existe un autre point d'équilibre $P_4 = (u_1^*, u_2^*)$ dans le quadrant $]0, +\infty[^2$, et le déterminer.
- ii. Étudier sa stabilité dans les deux cas.

Corrigé de l'examen

Exercice 01

(a) On considère la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(t, u) = \frac{1}{t}u - \frac{e^t}{t}u^2.$$

La fonction f est bien définie et de classe \mathcal{C}^1 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, donc elle est localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable. Ainsi, le théorème de Cauchy-Lipschitz assure que le problème (P) admet une unique solution maximale sur un intervalle ouvert J_{\max} contenant t_0 , de classe \mathcal{C}^1 .

(b) Si $u_0 = 0$, il est clair que la fonction $u(t) = 0$ est solution du problème. Elle est définie sur \mathbb{R}_+^* et est donc maximale.

(c) Dans la suite, on suppose que $u_0 \neq 0$.

i. En posant $w(t) = \frac{1}{u(t)}$, on obtient :

$$w'(t) = -\frac{u'(t)}{u(t)^2}.$$

En remplaçant $u'(t)$ à partir de l'équation, on obtient l'équation différentielle linéaire :

$$w'(t) + \frac{1}{t}w(t) - \frac{e^t}{t} = 0.$$

La solution de l'équation homogène associée est :

$$w_h(t) = \frac{k}{t}.$$

Par variation de la constante, on cherche une solution sous la forme :

$$w(t) = \frac{C(t)}{t}.$$

En substituant, on obtient après calcul :

$$C'(t) = e^t \quad \Rightarrow \quad C(t) = e^t + k.$$

Ainsi :

$$w(t) = \frac{e^t + k}{t} \quad \Rightarrow \quad u(t) = \frac{t}{e^t + k}.$$

En utilisant la condition initiale $u(t_0) = u_0$, on obtient :

$$k = \frac{t_0}{u_0} - e^{t_0}.$$

- ii. Si $k \geq 0$, alors $e^t + k > 0$ pour tout $t > 0$. Donc la solution est définie sur tout \mathbb{R}_+^* , elle est globale.
- iii. Si $-1 < k < 0$, alors $e^t + k$ peut s'annuler pour un certain $t > 0$. La solution explose en ce point, donc elle est maximale mais non globale.
- iv. Si $k = -1$, alors $e^t - 1 = 0$ pour $t = 0$. La solution n'est pas définie en ce point, donc elle est maximale sur un intervalle strict inclus dans \mathbb{R}_+^* .
- v. Si $k < -1$, alors il existe un $t > 0$ tel que $e^t + k = 0$. La solution explose en ce point. L'intervalle maximal dépend alors du signe de u_0 .

Exercice 02

- (a) Le système peut s'écrire sous la forme $U' = F(U)$ avec F de classe \mathcal{C}^1 .
Donc, d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, il existe une unique solution maximale (u_1, u_2) définie sur un intervalle J_{\max} .
- (b) Si les conditions initiales sont positives, alors les équations montrent que les axes sont invariants, donc $u_1(t)$ et $u_2(t)$ restent positives.
- (c) i. Posons $u(t) = u_1(t) + u_2(t)$. On obtient :

$$u'(t) \leq u(t),$$

d'où :

$$u(t) \leq u(0)e^t.$$

Donc :

$$u_1(t) \leq ke^t, \quad u_2(t) \leq ke^t,$$

avec $k = u_{1,0} + u_{2,0}$.

ii. Cela montre que les solutions restent bornées sur tout intervalle fini, donc la solution est globale.

(d) Les points d'équilibre sont :

$$P_1 = (0, 0), \quad P_2 = (1, 0), \quad P_3 = (0, 1).$$

Leur stabilité dépend des paramètres α et β (analyse via la matrice jacobienne).

(e) i. On résout :

$$\begin{cases} 1 - u_1 - \beta u_2 = 0, \\ 1 - u_2 - \alpha u_1 = 0, \end{cases}$$

ce qui donne :

$$u_1^* = \frac{1 - \beta}{1 - \alpha\beta}, \quad u_2^* = \frac{1 - \alpha}{1 - \alpha\beta}.$$

ii. La stabilité dépend du signe de α et β (analyse du jacobien au point d'équilibre).

Bibliographie

- [1] K. Addi, D. Goeleven, and R. Oujja. Principes mathématiques pour biologistes, chimistes et bioingénieurs. Editions Ellipses, 2013.
- [2] V. Arnold : Equations différentielles ordinaires, Éditions Mir, Moscow, 1974.
- [3] C. Chicone. Ordinary differential equations with applications, Texts in Applied Mathematics, vol. 34, Springer-Verlag, New York, 1999.
- [4] E. A. Coddington, N. Levinson : Theory of ordinary differential equations, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York-Toronto-London, 1955.
- [5] S. B. Gavage : Calcul différentiel et équations différentielles
- [6] M. Al. Gwai : Sturm Liouville theory and its applications, Springer Undergraduate Mathematics Series, 2008.
- [7] P. Hartman : Ordinary differential equations, Classics in Applied Mathematics, vol. 38, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 2002.
- [8] S. W. Hirsch S. Smale : Differential equations, dynamical systems and linear algebra, University of California, Berkely, Academic press, 1970.
- [9] A.C. King, J. Billingham, S. R. Otto : Differential equations : Linear, nonlinear, ordinary, partial, Cambridge niversity press, 2003.