

Université Djilali Bounaama, Khemis
Miliana
Faculté des Sciences et de la Technologie
Conseil Scientifique de la Faculté



جامعة جيلالي بونعامة خميس مليانة

كلية العلوم والتكنولوجيا
المجلس العلمي للكلية

Ref : 04/.07/CSF/2022

**EXTRAIT DU PV
DU CONSEIL SCIENTIFIQUE DE LA REUNION EXTRAORDINAIRE**

Du 08/06/2022

Objet : Polycopié pédagogique

L'an deux mille vingt et Deux (2022) et le Huit(08) du mois de Juin, une réunion extraordinaire du Conseil Scientifique de la Faculté des Sciences et de la Technologie s'est tenue à 10h à salle de réunion de la faculté.

Le CSF a validé l'avis favorable du CSD-M et a validé la conformité du polycopié ci-dessous suite aux rapports favorables reçus des experts de l'**auteur du polycopié** :

Dr. ELBAA Mohamed (MCB)

- **Intitulé du polycopié** : Cours de Physique 1 : Mécanique du point matériel
- **Destiné aux étudiants de** : 1^{ère} année Licence, Sciences et Technologies.
- **Experts du polycopié** :

▪ BOUKABCHA Hocine	MCA	UDB-Khemis Miliana
▪ BOUCHENAFI Mohamed	MCA	UAT-Laghouat

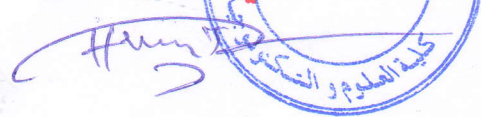
L'ordre du jour achevé, la réunion fut levée à 12h.

Le président CSF

Pr. Mohamed HEMIS

رئيس المجلس العلمي للكلية

المجلس العلمي
محمد بن محمد



République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Djilali BOUNAAMA – Khemis Miliana



Faculté des Sciences et de la Technologie
Département des Sciences de la Matière

Polycopié
Cours de Physique 1 :
Mécanique du point matériel

Pour étudiants de la Première Année Licence ST & SM

Par

Dr. Mohamed EL BAA

Maitre de conférences classe B

Année universitaire : 2021/2022

Table des matières

Avant-propos.....	6
Chapitre I : Rappel mathématique.....	7
I.1. Généralité sur les grandeurs physique	8
I.1.1. Système international d'unités	8
I.1.2. Equation aux dimensions	9
I.1.3. Exercice d'application	10
I.1.4. Exercices	10
I.2. Calcul vectoriel	12
I.2.1. Introduction	12
I.2.2. Définition d'un vecteur.....	12
I.2.3. Projection d'un vecteur sur un axe	12
I.2.4. Représentation d'un vecteur dans le plan	13
I.3. Opérations sur les vecteurs	15
I.3.1. L'addition (Soustraction)	15
I.3.2. Multiplication d'un vecteur par un scalaire	16
I.3.3. Produit des vecteurs.....	16
a- Produit Scalaire.....	16
b- Produit vectoriel.....	17
c- Produit mixte.....	19
I.3.4. Moment d'un vecteur par rapport à un point de l'espace	20
I.4. Fonctions différentielles	21
I.4.1. Dérivées des vecteurs	21
I.4.2. Gradient d'une fonction scalaire	22
I.4.3. Divergence d'un vecteur	22
I.4.4. Rotationnel d'un vecteur	22
I.4.5. Laplacien d'une fonction scalaire	23
I.4.6. Intégrale d'un vecteur	23
I.5. Exercices	24



Chapitre II : Cinématique d'un point matériel.....	26
II.1. Introduction	27
II.2. Définitions.....	27
II.2.1. Point matériel	27
II.2.2. Trajectoire, coordonnées curviligne, équations horaire	27
II.2.3. Vecteur position	28
a- En coordonnées cartésiennes.....	28
b- En coordonnées cylindrique.....	29
c- En coordonnées sphérique.....	30
II.3. Mouvement curviligne.....	31
II.3.1. Vitesse	31
a- Vitesse moyenne.....	31
b- Vitesse instantanée.....	31
II.3.2. Accélération.....	34
a- Accélération moyenne.....	34
b- Accélération instantanée.....	34
II.3.3. Passage de la vitesse à l'espace parcourue	38
II.3.4. Passage de l'accélération à la vitesse	39
II.4. Quelques mouvements particuliers	41
II.4.1. Mouvement rectiligne	41
a- Mouvement rectiligne uniforme.....	41
b- Mouvement rectiligne uniformément varie	42
II.4.2. Mouvement rectiligne Sinusoïdal.....	44
II.4.3. Mouvement circulaire.....	45
a- Mouvement circulaire uniforme.....	46
b- Mouvement circulaire uniformément varie.....	47
II.5. Mouvement relatif.....	48
II.5.1. Changement de repère.....	48
II.5.2. Relation entre les positions.....	49
II.5.3. Relation entre les vitesses.....	49
II.5.4. Relation entre les accélérations.....	50
II.6. Exercices	52
Chapitre III : Dynamique d'un point matériel	54



III.1.	Principe d'inertie	55
III.2.	Référentiels d'inertie ou galiléens	55
III.3.	Centre d'inertie ou Barycentre	56
III.4.	Quantité de mouvement.....	58
III.4.1.	Définition.....	58
III.4.2.	Principe de conservation de la quantité de mouvement	58
III.5.	Définition Newtonienne de la force	59
III.5.1.	Force moyenne	59
III.5.2.	Force instantanée	59
III.5.3.	Principe Fondamental de la Dynamique (PFD)	60
	a- Théorème de moment cinétique.....	60
III.5.4.	Quelques lois de forces	61
	a- Loi de gravitation universelle.....	61
	b- Forces de contact – Réaction de surface.....	63
	c- Forces de frottement.....	64
	1. Frottement Visqueux.....	64
	2. Frottement solide.....	65
	1.1. Frottement statique	65
	1.2. Frottement dynamique.....	66
	d- Force de rappel ou force élastique.....	67
III.6.	Principe fondamental de la dynamique dans un repère non galiléen.....	68
III.7.	Exercices.....	68
Chapitre IV: Travail et énergie.....		71
Introduction.....		72
IV.1.	Travail d'une force	72
IV.1.1.	Force constante sur un déplacement rectiligne.....	72
IV.1.2.	Force variable sur un déplacement quelconque	73
IV.1.3.	Puissance d'une force	73
IV.2.	Energie	74
IV.2.1.	Energie cinétique	74
IV.2.2.	Energie potentielle	75
	a- Forces conservatives et non conservatives.....	75
	b- Définition.....	75



c- Energie potentielle de la force de pesanteur.....	76
d- Energie Potentielle d'une force élastique.....	78
e- Energie Potentielle d'une force gravitationnelle.....	78
IV.2.3. Energie mécanique	79
IV.3. Exercices.....	80
Bibliographie.....	81



Avant-propos



Ce cours polycopié correspond au programme officiel de la matière Physique 1 : mécanique du point matériel destiné aux étudiants des premières années LMD Socle commun du domaine Sciences et technologie et Sciences de la matière. Il est structuré en quatre chapitres :

Le premier chapitre est consacré à un rappel mathématique sur l'analyse dimensionnelle et le calcul vectoriel. Les deux traitent des grandeurs physiques de base qui sont utilisées pour l'expression des lois physiques. L'objectif de cette partie est d'introduire des définitions claires et des notations appropriées.

Le deuxième chapitre est dédié à la cinématique d'un point matériel. Son but est de décrire les mouvements d'objets sans s'intéresser aux causes qui les produisent. Il traite uniquement des mouvements de points matériels en déterminant les vecteurs : position, déplacement, vitesse et accélération. Ensuite, nous étudions les différents types de mouvement et les différents systèmes de coordonnées (cartésiennes, polaires, cylindriques et sphériques). Nous terminons une étude de mouvement relatif. Il s'agit d'étudier le mouvement d'un point par rapport à un repère en mouvement (repère mobile).

Le troisième chapitre est consacré à la dynamique du point matériel. Son but est de décrire les causes de mouvement d'un objet. Ce chapitre est proposé pour étudier le principe d'inertie et les référentiels galiléens, puis le principe de conservation de la quantité de mouvement. Ensuite, nous présentons la définition newtonienne de la force en définissons les trois lois de Newton et quelques lois de forces. Nous terminons cette partie par étude du Principe fondamental de la dynamique dans un repère non galiléen.

Le quatrième chapitre concerne la notion du travail et de l'énergie. Nous étudions le travail d'une force constante sur une trajectoire rectiligne et le travail d'une force variable sur une trajectoire quelconque. Nous traitons ensuite les notions d'énergies cinétique et potentielle ainsi que l'énergie totale.

Chapitre I : Rappel mathématique



I.1. Généralité sur les grandeurs physique

On appelle grandeur physique toute propriété de la nature qui peut être quantifiée par la mesure ou le calcul, elle est caractérisée par une valeur numérique accompagnée d'une unité de mesure. Autrement dit, Une grandeur physique est une quantité qui peut se mesurer et qui rapporte une propriété physique.

Une grandeur physique est dite mesurable s'il on peut lui affecté une valeur numérique. En outre, la somme et/ou le produit de grandeurs mesurables a une signification.

Exemple : la longueur, la température absolue, la résistance,...

Il existe deux types de grandeurs physiques mesurables :

- Grandeurs physique scalaire : la longueur, la masse, le temps,...
- Grandeurs vectorielles : La vitesse, l'accélération, la force,....



Remarque : mesurer une grandeur physique ; c'est la comparer à une quantité de référence de même nature prise comme référence.

I.1.1. Système international d'unités :

Le système international d'unité (SI) est composé de sept unités de base adopté par la 14^{ème} conférence générale de poids et de mesure (CGPM) en 1971 [1, 2] :

Grandeur de base	Symbol de la grandeur	Nom et symbole de l'unité	Dimension
Longueur	l, x, r	Mètre (m)	[L]
Masse	m	Kilogramme (Kg)	[M]
Temps	t	Second (S)	[T]
Intensité de courant	I	Ampère (A)	[I]
Température	T	Kelvin (K)	[θ]
Quantité de matière	n	Mole (Mol)	[N]
Intensité lumineuse	I_v	Candela (Cd)	[J]

Tableau 1.1 : Unités du système international [1].

Toutes les autres grandeurs sont des grandeurs dérivées, qui peuvent être exprimées en fonction des grandeurs de base à l'aide des équations de la physique, certaines de ces grandeurs dérivées se sont vues attribuer un nom qui rappelle une personnalité scientifique : Newton, Pascal, Joule, Volt, Tesla, Henry...etc.

Grandeur	Unité SI	Grandeur	Unité SI
Aire	m^2	Puissance	<i>Watt</i> (W)
Volume	m^3	Pression	<i>Pascal</i> (Pa)
Masse molaire	$Kg.Mole^{-1}$	Tension	<i>Volt</i> (V)
Masse Volumique	$Kg.m^{-1}$	Charge électrique	<i>Coulomb</i> (Cb)
Fréquence	<i>Hertz</i> (Hz)	Résistance électrique	<i>Ohm</i> (Ω)
Vitesse linéaire	$m.s^{-1}$	Champ électrique	$V.m^{-1}$
Vitesse angulaire	$rad.s^{-1}$	Capacité électrique	<i>Farad</i> (F)
Accélération	$m.s^{-2}$	Inductance	<i>Henry</i> (H)
Force	<i>Newton</i> (N)	Champ magnétique	<i>Tesla</i> (T)
Energie	<i>Joule</i> (J)	Conductance	<i>Siemens</i> (S, Ω^{-1})

Tableau 1.2 : Grandeurs dérivées en système international

I.1.2. Equation aux dimensions :

Les dimensions des grandeurs dérivées sont écrites sous la forme de produits de puissances des dimensions des grandeurs de base au moyen des équations qui relient les grandeurs dérivées aux grandeurs de base.

En général, la dimension d'une grandeur A est donnée par :

$$[A] = L^\alpha M^\beta T^\delta I^\delta \theta^\varepsilon N^\zeta J^\eta \dots \dots \dots (1.1)$$

Où les exposants $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$ et η qui sont des entiers positifs, négatifs ou nuls, sont appelés exposants dimensionnels [2].

Exemple :

La vitesse : $[v] = \frac{L}{T} = LT^{-1}$

La force : $[F] = MLT^{-2} = \text{Newton}$

Puissance : $[P] = ML^2T^{-3} = \text{Watt}$

Remarque :

Les équations aux dimensions servent à vérifier l'homogénéité des formules physiques.

I.1.3. Exercice d'application :

La période d'oscillation d'un pendule simple dépend de sa longueur l , du champ de pesanteur g .

On propose deux formules ; préciser celles qui ne sont pas homogènes :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \dots \dots \dots (1.2)$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{g}{l}} \dots \dots \dots (1.3)$$

Réponse :

- T est la période, sa dimension est donnée par : $[T] = T$
- La dimension de la pesanteur g est donnée par : $[g] = LT^{-2}$
- La dimension de la longueur est : $[L] = L$

Pour la première équation, on a :

$$T = 2\pi l^{1/2} g^{-1/2} \Rightarrow [T] = [L]^{1/2} [g]^{-1/2} = L^{1/2} (LT^{-2})^{-1/2} = T : \text{Équation homogène.}$$

Pour la deuxième équation, on a :

$$T = 2\pi g^{1/2} l^{-1/2} \Rightarrow [T] = [g]^{1/2} [l]^{-1/2} = (LT^{-2})^{1/2} L^{-1/2} = T^{-1} : \text{La deuxième équation est inhomogène.}$$

I.1.4 Exercices :

1.1. Dimension et unité des constantes physiques fondamentales

La force d'attraction qui s'exerce entre deux masses, M et m , séparés par une distance r est donné en module par la loi de Newton : $F = GMm/r^2$

1- Donner les dimensions de la constante de gravitation G .

1.2. Analyse dimensionnelle

Déterminer la dimension et l'unité des coefficients α et β apparaissant dans l'expression de la force F subie par un objet de masse m , de surface S et de vitesse v d'expression :

$$F = \alpha m v + \beta S v$$

1.3. Homogénéité de formules

Un système mécanique est constitué d'une masse m suspendue à un ressort de raideur (en $N \cdot m^{-1}$). On veut chercher la fréquence f d'oscillation de la masse. En considérant la dimension des résultats proposés, choisir la formule homogène :

$$* f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad * f = \frac{km}{2\pi} \quad * f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{m}{k}} \quad * f = 2\pi\sqrt{mk}$$

1.4. Vibration d'une étoile : modèle de Lord Raleigh (1915)

La fréquence de vibration d'une étoile dépend de plusieurs paramètres. La cohésion d'une étoile étant assurée par les forces de gravitation, on s'attend à devoir faire intervenir :

- R , le rayon de l'étoile ;
- ρ , la masse volumique de l'étoile ;
- G , la constante de gravitation universelle (de l'exercice 1.1).

Donner l'expression de la fréquence de vibration f en fonction de R , ρ et G avec :

$$f = k_2 R^a \rho^b G^c \quad (k_2 \text{ est une constante sans dimension}).$$

I.2. Calcul vectoriel :

1.2.1. Introduction :

Beaucoup de quantités physique sont de nature vectorielles, tel que la vitesse, l'accélération, la force, le champ électrique et magnétique,...etc. Dans cette partie nous allons rapporter quelques notions de bases liées au calcul vectoriel. La maitrise de ces techniques est nécessaire pour l'assimilation de la mécanique.

1.2.2. Définition d'un vecteur :

Un vecteur est une entité mathématique définie par une origine, un support, une direction, un sens et une intensité, tel que :

- **Origine** : le point d'application.
- **Support** : L'axe sur lequel se trouve le vecteur.
- **Direction** : définie par l'angle θ mesuré entre un axe de référence et le support.
- **Sens** : représente l'orientation origine-extrémité du vecteur.
- **Intensité ou module** : représente la valeur de la grandeur mesurée par le vecteur.

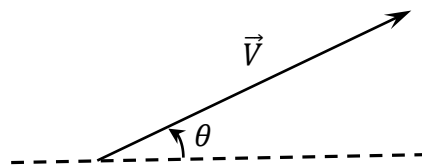


Figure I.1 : représentation d'un vecteur

1.2.3. Projection d'un vecteur sur un axe :

La projection orthogonale d'un vecteur \overrightarrow{AB} sur un axe (Δ) est un vecteur $\overrightarrow{A'B'}$ appartenant à (Δ) avec :

$$\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB} \cos\theta \dots \dots \dots (1.4)$$

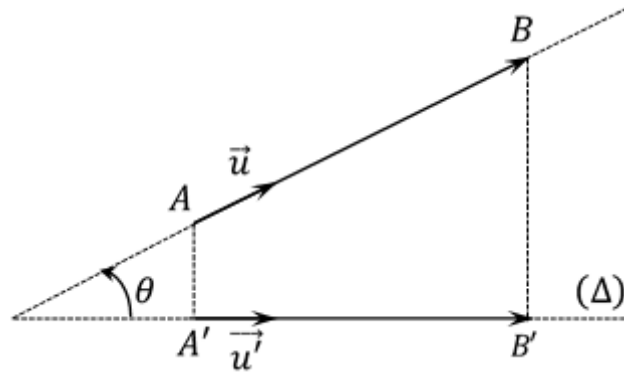


Figure 1.2 : projection d'un vecteur sur un axe.

Les vecteurs \vec{u} et \vec{u}' de la figure 1.2 représentent des vecteurs unitaires portés sur les vecteurs \overrightarrow{AB} et $\overrightarrow{A'B'}$ successivement avec $\|\vec{u}\| = \|\vec{u}'\| = 1$.

On note ici que le vecteur unitaire \vec{u} porté par \overrightarrow{AB} peut se mettre sous forme :

$$\vec{u} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|} \dots \dots \dots (1.5)$$

Avec $\|\overrightarrow{AB}\|$ représente le module de \overrightarrow{AB} .

1.2.4. Représentation d'un vecteur dans le plan :

Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , on considère un vecteur \vec{v} ayant son point initial à l'origine O et son point terminal en point $A(x_A, y_A)$ (figure 1.3), alors on considère le vecteur \vec{v} comme combinaison des vecteurs unitaires \vec{i} et \vec{j} par :

$$\vec{v} = \overrightarrow{OA} = x_A \vec{i} + y_A \vec{j} \dots \dots \dots (1.6)$$

Les scalaires x_A et y_A sont les projections du vecteur \vec{v} sur les axes (Ox) et (Oy) , ils sont appelés les composants du vecteur \vec{v} dans le plan (O, \vec{i}, \vec{j}) .

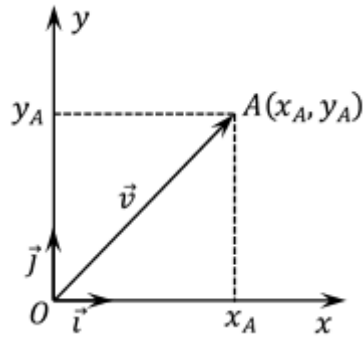


Figure 1.3 : Représentation d'un vecteur dans le plan

En fonction de ses composants, le module du vecteur \vec{v} est donné par :

$$\|\vec{v}\| = \|\vec{OA}\| = \sqrt{x_A^2 + y_A^2}$$

Dans l'espace à 3 dimensions (3D), le vecteur \vec{v} à *trois* composants : x_A, y_A, z_A (Figure 1.3). Le vecteur \vec{v} s'écrit donc comme suit :

$$\vec{v} = x_A \vec{i} + y_A \vec{j} + z_A \vec{k} \dots \dots \dots (1.7)$$

Son module s'écrit donc par :

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{x_A^2 + y_A^2 + z_A^2}$$

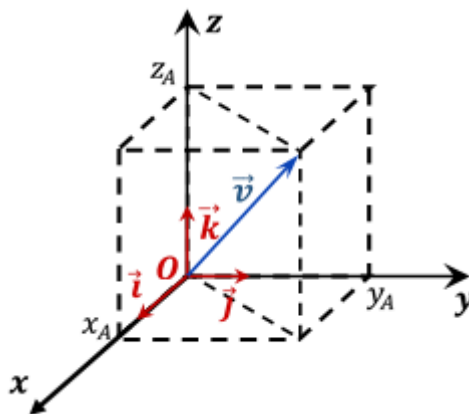


Figure 1.3 : Représentation d'un vecteur en 3 dimensions

Le vecteur \vec{v} peut représenter aussi par : $\vec{v} \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}$

En n dimensions, le vecteur \vec{v} à n composants

Remarque :

Supposons qu'un vecteur \vec{v} a pour point initial $P_1(x_1, y_1)$ et comme point terminal $P_2(x_2, y_2)$. On a alors :

$$\vec{v} = \overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} \dots \dots \dots (1.8)$$

1.3. Operations sur les vecteurs :

1.3.1. L'addition (Soustraction) :

Soient $\vec{A} \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}$ et $\vec{B} \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{pmatrix}$ deux vecteurs de l'espace, on a :

$$\vec{A} \pm \vec{B} = (x_A \pm x_B)\vec{i} + (y_A \pm y_B)\vec{j} + (z_A \pm z_B)\vec{k} \dots \dots \dots (1.9)$$

Pour n vecteurs :

$$\sum_{i=1}^n \vec{A}_i = \sum_{i=1}^n x_{A_i} \vec{i} + \sum_{i=1}^n y_{A_i} \vec{j} + \sum_{i=1}^n z_{A_i} \vec{k} \dots \dots \dots (1.10)$$

Géométriquement, la somme des vecteur $\vec{A} + \vec{B}$ est un vecteur dont l'origine est celle de \vec{A} et dont l'extrémité est celle de \vec{B} lorsque ce dernier a son origine à l'extrémité de \vec{A} . Alternativement, on attache \vec{A} et \vec{B} au même point par translation et on représente la somme par la diagonale, émanant du même point, du parallélogramme qu'ils engendrent.

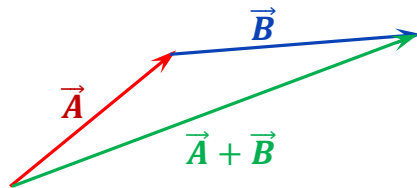


Figure 1.4 : résultante de deux vecteurs.

Propriétés :

- $(\vec{A} + \vec{B}) = (\vec{B} + \vec{A})$: L'addition de vecteurs est **commutative**.
- $(\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C})$: L'addition de vecteurs est aussi **associative**.
- L'addition a un **élément neutre** ; le vecteur nul : $\vec{A} + \vec{0} = \vec{A}$
- $\|\vec{A} + \vec{B}\| \neq \|\vec{A}\| + \|\vec{B}\|$

- Tout vecteur \vec{A} possède un vecteur opposé $-\vec{A}$ ayant la même direction et la même intensité mais de sens opposé : $\vec{A} + (-\vec{A}) = \vec{0}$

1.3.2. Multiplication d'un vecteur par un scalaire :

Soit \vec{A} est un vecteur de l'espace et λ un scalaire, alors le produit $\lambda\vec{A}$ est un vecteur qu'a une intensité $\|\lambda\vec{A}\|$ et de :

- 1- Même sens que \vec{A} pour $\lambda > 0$.
- 2- Sens opposé au \vec{A} pour $\lambda < 0$.

Analytiquement :

Si $\vec{A} = x_A\vec{i} + y_A\vec{j} + z_A\vec{k}$, on a :

- ✓ $\lambda\vec{A} = \lambda x_A\vec{i} + \lambda y_A\vec{j} + \lambda z_A\vec{k}$
- ✓ $\|\lambda\vec{A}\| = |\lambda|\sqrt{x_A^2 + y_A^2 + z_A^2}$

Propriétés :

- $\lambda(\vec{A} + \vec{B}) = \lambda\vec{A} + \lambda\vec{B}$.
- $\lambda(\mu\vec{A}) = (\lambda\mu)\vec{A}$
- $(\lambda + \mu)\vec{A} = \lambda\vec{A} + \mu\vec{A}$
- $0\vec{A} = \vec{0}$

1.3.3. Produit des vecteurs :

a. **Produit scalaire** : On définit le produit scalaire des deux vecteurs \vec{A} et \vec{B} , représenté par le symbole $\vec{A} \cdot \vec{B}$, comme la grandeur scalaire obtenue en faisant le produit de leurs arguments (modules) et du cosinus de l'angle des deux vecteurs.

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \|\vec{A}\| \|\vec{B}\| \cos \theta \dots \dots \dots (1.11)$$

En écrivant les vecteurs \vec{A} et \vec{B} en fonction de leurs composants et en utilisant la loi de distributivité, nous avons :

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (x_A\vec{i} + y_A\vec{j} + z_A\vec{k}) \cdot (x_B\vec{i} + y_B\vec{j} + z_B\vec{k})$$

On obtient ainsi :

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = x_A x_B (\vec{i} \cdot \vec{i}) + x_A y_B (\vec{i} \cdot \vec{j}) + x_A z_B (\vec{i} \cdot \vec{k}) + y_A x_B (\vec{j} \cdot \vec{i}) + y_A y_B (\vec{j} \cdot \vec{j}) + y_A z_B (\vec{j} \cdot \vec{k}) \\ + z_A x_B (\vec{k} \cdot \vec{i}) + z_A y_B (\vec{k} \cdot \vec{j}) + z_A z_B (\vec{k} \cdot \vec{k})$$

Les produits scalaires entre les vecteurs unitaires $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ont pour valeur :

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1, \quad \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0.$$

On trouve :

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = x_A x_B + x_A y_B + x_A z_B \dots \dots \dots (1.12)$$

L'angle θ entre les vecteurs \vec{A} et \vec{B} est donnée donc par :

$$\cos \theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{\|\vec{A}\| \cdot \|\vec{B}\|} = \frac{x_A x_B + x_A y_B + x_A z_B}{\sqrt{x_A^2 + y_A^2 + z_A^2} \cdot \sqrt{x_B^2 + y_B^2 + z_B^2}} \dots \dots \dots (1.13)$$

Propriétés :

- $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$: le produit scalaire est **commutatif**.
- $\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$: le produit scalaire est distributif vis-à-vis l'addition.
- $\vec{A} \cdot \vec{A} = \|\vec{A}\|^2 = A^2$.
- $(\lambda \vec{A}) \cdot \vec{B} = \vec{A} \cdot (\lambda \vec{B}) = \lambda (\vec{A} \cdot \vec{B})$
- $\vec{A} \perp \vec{B} \Rightarrow \vec{A} \cdot \vec{B} = 0$: \vec{A} et \vec{B} sont dites orthogonaux.

b. Produit vectoriel :

Par définition, le produit vectoriel de \vec{A} et \vec{B} est un vecteur, noté $\vec{A} \wedge \vec{B}$, tel que :

- La direction de $\vec{A} \wedge \vec{B}$ est orthogonal à chacun des deux vecteurs \vec{A} et \vec{B} .
- Le sens de \vec{A} et \vec{B} est défini par la règle de la main droite illustrée sur la figure ci-dessous de tel sorte que le triplet $(\vec{A}, \vec{B}, \vec{A} \wedge \vec{B})$ forment un trièdre.

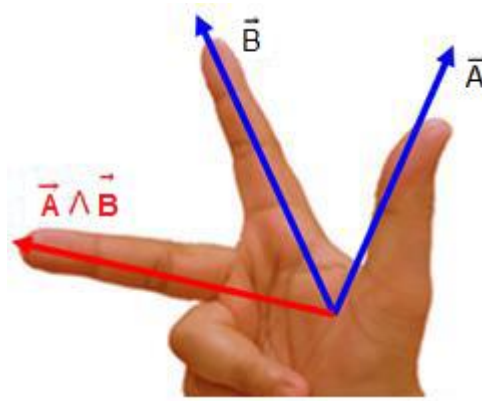


Figure 1.5 : Règle de la main droite

Exemple : Les vecteurs unitaire $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ forme un trièdre ; c-à-d :

$$\vec{i} \wedge \vec{j} = -\vec{j} \wedge \vec{i} = \vec{k}, \quad \vec{j} \wedge \vec{k} = -\vec{k} \wedge \vec{j} = \vec{i}, \quad \vec{k} \wedge \vec{i} = -\vec{i} \wedge \vec{k} = \vec{j} \dots \dots \dots (1.14)$$

➤ Le module de $\vec{A} \wedge \vec{B}$ est égale à l'aire de parallélogramme construit sur \vec{A} et \vec{B} :

$$\|\vec{A} \wedge \vec{B}\| = \|\vec{A}\| \|\vec{B}\| |\sin\theta| \dots \dots \dots (1.15)$$

➤ Les composantes du vecteur $\vec{A} \wedge \vec{B}$ sont données en écrivant \vec{A} et \vec{B} en fonction de leurs composantes cartésiennes et en appliquant la loi de la distributivité :

$$\begin{aligned} \vec{A} \wedge \vec{B} &= (x_A \vec{i} + y_A \vec{j} + z_A \vec{k}) \wedge (x_B \vec{i} + y_B \vec{j} + z_B \vec{k}) \\ &= x_A x_B (\vec{i} \wedge \vec{i}) + x_A y_B (\vec{i} \wedge \vec{j}) + x_A z_B (\vec{i} \wedge \vec{k}) + y_A x_B (\vec{j} \wedge \vec{i}) + y_A y_B (\vec{j} \wedge \vec{j}) \\ &\quad + y_A z_B (\vec{j} \wedge \vec{k}) + z_A x_B (\vec{k} \wedge \vec{i}) + z_A y_B (\vec{k} \wedge \vec{j}) + z_A z_B (\vec{k} \wedge \vec{k}) \end{aligned}$$

Comme on a : $\vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{j} \wedge \vec{j} = \vec{k} \wedge \vec{k} = \vec{0}$ et compte tenue le système d'équation (1.14) on trouve :

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = (y_A z_B - z_A y_B) \vec{i} + (z_A x_B - x_A z_B) \vec{j} + (x_A y_B - y_A x_B) \vec{k} \dots \dots \dots (1.16)$$

L'équation (1.16) peut s'écrire sous une forme de déterminant :

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_A & y_A & z_A \\ x_B & y_B & z_B \end{vmatrix} \dots \dots \dots (1.17)$$

Propriétés :

- $\vec{A} \wedge \vec{B} = -\vec{B} \wedge \vec{A}$: le produit vectoriel est **anticommutatif**.
- $\vec{A} \wedge (\vec{B} + \vec{C}) + \vec{A} \wedge \vec{B} + \vec{A} \wedge \vec{C}$: le produit vectoriel est **distributif vis-à-vis l'addition**
- $(\lambda\vec{A}) \wedge \vec{B} = \vec{A} \wedge (\lambda\vec{B}) = \lambda\vec{A} \wedge \vec{B}$
- $\vec{A} // \vec{B} \Rightarrow \vec{A} \wedge \vec{B} = 0$: \vec{A} et \vec{B} sont dites colinéaires.

c. Produit mixte :

On appelle **produit mixte** de trois vecteurs \vec{A} , \vec{B} et \vec{C} le nombre scalaire noté $[\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}]$ défini par :

$$[\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}] = \vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \begin{vmatrix} x_A & y_A & z_A \\ x_B & y_B & z_B \\ x_C & y_C & z_C \end{vmatrix} \dots \dots \dots (1.18)$$

Géométriquement, le produit mixte présente le volume du parallélépipède construit sur les vecteurs \vec{A} , \vec{B} et \vec{C} .

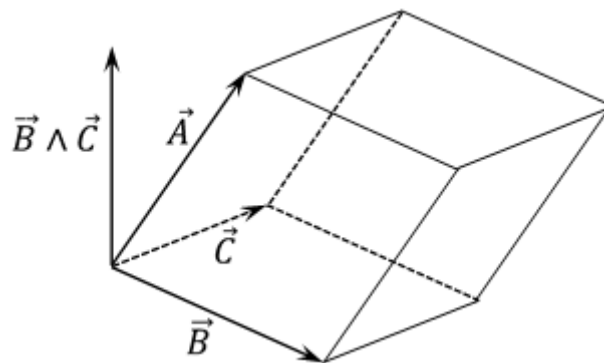


Figure 1.6 : Représentation géométrique d'un produit mixte

Propriétés :

- $[\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}] = 0$: Les vecteurs \vec{A} , \vec{B} et \vec{C} sont coplanaires.
- $\vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \wedge \vec{A})$: Le produit mixte est invariant dans une permutation circulaire.
- $\vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C}) = -\vec{A} \cdot (\vec{C} \wedge \vec{B}) = -\vec{B} \cdot (\vec{A} \wedge \vec{C})$: Le produit mixte change de signe quand on permute deux vecteurs.

I.3.4. Moment d'un vecteur par rapport à un point de l'espace :

Soit \vec{AB} un vecteur et « O » un point quelconque de l'espace.

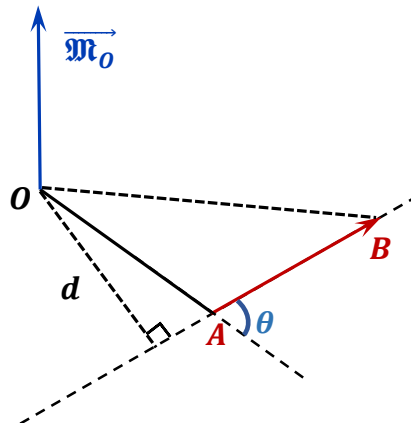


Figure 1.6 : Moment cinétique

On appelle moment de vecteur \vec{AB} par rapport à "o" le vecteur $\vec{\mathfrak{M}}_o(\vec{AB})$ défini par :

$$\vec{\mathfrak{M}}_o(\vec{AB}) = \vec{OA} \wedge \vec{AB} \dots \dots \dots (1.19)$$

Le module du moment cinétique est donné par :

$$\|\vec{\mathfrak{M}}_o(\vec{AB})\| = \|\vec{OA}\| \|\vec{AB}\| \sin \theta = \|\vec{AB}\| \cdot d \dots \dots \dots (1.20)$$

I.4. Fonctions différentielles :

1.4.1. Dérivées des vecteurs :

Soit $\vec{A}(u) = A_x(u)\vec{i} + A_y(u)\vec{j} + A_z(u)\vec{k}$ une fonction vectorielle de u . la dérivée de $\vec{A}(u)$ par rapport à u est définie par :

$$\frac{d\vec{A}(u)}{du} = \frac{dA_x}{du}\vec{i} + \frac{dA_y}{du}\vec{j} + \frac{dA_z}{du}\vec{k} \dots \dots \dots (1.21)$$

Remarques :

1. Soit $\vec{A}(u)$ une fonction vectorielle de u :

$$\text{Si } \|\vec{A}(u)\| = Cte \Rightarrow \vec{A}(u) \perp \frac{d\vec{A}(u)}{du}$$

Démonstration :

$$\begin{aligned} \|\vec{A}(u)\| = Cte &\Rightarrow \|\vec{A}(u)\|^2 = Cte \Rightarrow (\vec{A}(u))^2 = Cte \Rightarrow \frac{d(\vec{A}(u))^2}{du} = Cte \\ &\Rightarrow 2\vec{A}(u) \cdot \frac{d\vec{A}(u)}{du} = 0 \Rightarrow \vec{A}(u) \perp \frac{d\vec{A}(u)}{du} \end{aligned}$$

2. Si $\varphi(u)$ est une fonction scalaire et $\vec{A}(u)$ et $\vec{B}(u)$ sont des fonctions vectorielles de u . On a :

$$* \frac{d}{du}(\varphi\vec{A}) = \varphi \frac{d\vec{A}}{du} + \vec{A} \frac{d\varphi}{du}$$

$$* \frac{d}{du}(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \frac{d\vec{A}}{du} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \frac{d\vec{B}}{du}$$

$$* \frac{d}{du}(\vec{A} \wedge \vec{B}) = \frac{d\vec{A}}{du} \wedge \vec{B} + \vec{A} \wedge \frac{d\vec{B}}{du}$$

1.4.2. Gradient d'une fonction scalaire :

En introduisant l'opérateur vectoriel différentiel appelé nabla ($\vec{\nabla}$) défini, en coordonnées cartésiennes, par :

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \dots \dots \dots (1.22)$$

On définit le gradient de la fonction $f(x, y, z)$ des variables x, y et z par le vecteur suivant :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k} \dots \dots \dots (1.23)$$

Propriétés :

Soient f et g deux fonctions scalaires et α est une constante réelle, on peut démontrer :

1. $\overrightarrow{\text{grad}}(f + g) = \overrightarrow{\text{grad}} f + \overrightarrow{\text{grad}} g$
2. $\overrightarrow{\text{grad}}(\alpha f) = \alpha \overrightarrow{\text{grad}} f$
3. $\overrightarrow{\text{grad}}(fg) = f \overrightarrow{\text{grad}} g + g \overrightarrow{\text{grad}} f$

1.4.3. Divergence d'un vecteur :

La divergence du vecteur $\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}$ est défini par la quantité scalaire suivante :

$$\text{div} \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \dots \dots \dots (1.24)$$

Propriétés :

Soient $\vec{V}, \vec{V}_1, \vec{V}_2$ sont des fonctions vectorielles et α est une constante, on a :

1. $\overrightarrow{\text{div}}(\vec{V}_1 + \vec{V}_2) = \overrightarrow{\text{div}}(\vec{V}_1) + \overrightarrow{\text{div}}(\vec{V}_2)$
2. $\overrightarrow{\text{div}}(\alpha \vec{V}) = \alpha \overrightarrow{\text{div}}(\vec{V})$
3. $\overrightarrow{\text{div}}(f \vec{V}) = f \overrightarrow{\text{div}}(\vec{V}) + \overrightarrow{\text{grad}} f \cdot \vec{V}$

1.4.4. Rotationnel d'un vecteur :

On définit le rotationnel du vecteur \vec{A} par le vecteur suivant :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{A} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) \wedge (A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}) \dots \dots \dots (1.24)$$

En forme matricielle

$$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{k} \dots \dots (1.25)$$

Propriétés :

1. $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{V}_1 + \vec{V}_2) = \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{V}_1) + \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{V}_2)$
2. $\overrightarrow{\text{rot}}(\alpha \vec{V}) = \alpha \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{V})$
3. $\overrightarrow{\text{rot}}(f \vec{V}) = f \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{V}) + \overrightarrow{\text{grad}}f \times \vec{V}$
4. $\overrightarrow{\text{div}}(\vec{V}_1 \times \vec{V}_2) = \vec{V}_2 \cdot \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{V}_1) - \vec{V}_1 \cdot \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{V}_2)$

1.4.5. Laplacien d'une fonction scalaire :

Le Laplacien d'une fonction scalaire est égal à la divergence de son gradient :

$$\text{div} \overrightarrow{\text{grad}}(f) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} f) = \vec{\nabla}^2 f = \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \dots \dots \dots (1.26)$$

Propriétés :

- 1- $\Delta(f + g) = \Delta f + \Delta g.$
- 2- $\Delta(\alpha f) = \alpha \Delta f.$
- 3- $\text{div}(f \overrightarrow{\text{grad}}g - g \overrightarrow{\text{grad}}f) = f \Delta g - g \Delta f.$
- 4- $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{grad}}f) = \vec{0}.$
- 5- $\text{div}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{A}) = 0.$

1.4.6. Intégrale d'un vecteur :

Soit $\vec{A}(u) = A_x(u)\vec{i} + A_y(u)\vec{j} + A_z(u)\vec{k}$ une fonction vectorielle de u . On a :

$$\int \vec{A}(u) du = \vec{i} \int A_x(u) du + \vec{j} \int A_y(u) du + \vec{k} \int A_z(u) du \dots \dots (1.27)$$

I.5. Exercices :

1.1. Soient A, B, C, D et E cinq points quelconques du plan. Simplifiez au maximum les expressions suivantes, en utilisant les relations de Chasles :

$$\vec{a} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{EB}$$

$$\vec{b} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{AB}$$

$$\vec{c} = \overrightarrow{EC} - \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{DB}$$

$$\vec{d} = 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{DB}$$

$$\vec{e} = 87\overrightarrow{AC} + 82\overrightarrow{CD} + 3\overrightarrow{AD}$$

1.2. Soient trois points A, B et C non alignés. Soit le point G défini par la relation :

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}.$$

Démontrez que pour tout point M du plan, on a la relation : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$

1.3. Soient les vecteurs : $\vec{A} = 3\vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k}$, $\vec{B} = -\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$

Trouver :

- La grandeur et la direction de leur résultante.
- Leur différence $\vec{A} - \vec{B}$.
- Le produit scalaire $\vec{A} \cdot \vec{B}$ et vectoriel $\vec{A} \times \vec{B}$
- L'angle que fait \vec{A} avec \vec{B}

1.4. Soient les trois vecteurs :

$$\vec{V}_1 = -\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}, \quad \vec{V}_2 = 3\vec{i} - 2\vec{j} - 8\vec{k}, \quad \vec{V}_3 = 4\vec{i} + 4\vec{j} + 4\vec{k},$$

a- Par une manipulation directe, s'il y a une différence entre les produits vectoriels :

$$\vec{V}_1 \times (\vec{V}_2 \times \vec{V}_3) \text{ et } (\vec{V}_1 \times \vec{V}_2) \times \vec{V}_3$$

b- Trouver : $\vec{V}_1 \cdot (\vec{V}_2 \times \vec{V}_3)$ et $(\vec{V}_1 \times \vec{V}_2) \cdot \vec{V}_3$ et déterminer s'il y a une différence.

c- Calculer : $(\vec{V}_3 \times \vec{V}_1) \cdot \vec{V}_2$ et comparer ce résultat avec les deux premiers.

1.5. Calculez le volume du parallélépipède construit sur les vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ et \overrightarrow{AD} dont les coordonnées des quatre sommets sont : $A(2, -1, 1), B(5, 5, 4), C(3, 2, -1), D(4, 1, 3)$

Déduire le volume du tétraèdre $ABCD$.

1.6.

1. Déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{\text{grad}}f$ où f est la fonction scalaire suivante :

a. $f(x, y, z) = xy^2 - yz^2$

b. $f(x, y, z) = xyz \sin(xy)$

2. Déterminer $\overrightarrow{\text{div}}(\vec{V})$ où \vec{V} est la fonction vectorielle suivante :

a. $\vec{V}(x, y, z) = 2x^2y\vec{i} + 2xy^2\vec{j} + xy\vec{k}$ b. $\vec{V} = \sin(xy)\vec{i} + \cos(xz)\vec{k}$

c. $\vec{V} = (x(2y + z))\vec{i} - y(x + z)\vec{j} + z(x - 2y)\vec{k}$

Chapitre II. Cinématique d'un point matériel

II.1. Introduction

Le but d'étudier de la cinématique est de décrire le mouvement des corps en fonction du temps d'un point de vue purement mathématique, indépendamment des causes qui les produisent. En d'autre terme, la cinématique cherche à décrire les mouvements et non à les expliquer.

Les questions auxquelles nous allons essayer de répondre, dans cette partie, sont :

- 1- Où se trouve un objet ?
- 2- Bouge-t-il ? comment ? rapidement ou lentement ? va-t-il se déplacer de plus en plus vite ou au contraire ? freine-t-il ?
- 3- Où se trouvera-t-il dans quelques minutes ?

Cela reviendra à étudier systématiquement la position, la vitesse et l'accélération d'un objet en mouvement et à définir les relations qui lient ces trois grandeurs.

II.2. Définitions :

II.2.1. Point matériel :

Un point matériel est un objet qui a des dimensions négligeables sur l'échelle macroscopique que l'on assimile à un point géométrique, son mouvement sera désigné par une translation concernant les vitesses et les accélérations.

En réalité, l'étude de mouvement d'un objet peut être décrire par :

- L'étude de mouvement de l'objet autour de son centre de masse.
- L'étude de mouvement de son centre de masse lui-même.

II.2.2. Trajectoire, coordonnées curviligne, équations horaire :

Soit un point matériel en déplacement dans l'espace :

- La trajectoire du point matériel est le lieu géométrique des positions successives occupées par le point au cours du temps.
- La valeur algébrique $\widehat{M_0M}(t) = S(t)$ est appelée coordonnée curviligne ou abscisse curviligne
- L'équation horaire du mouvement est la relation qui lie le chemin parcourue au temps nécessaire à le parcourir : $M_0M(t) = S(t)$.

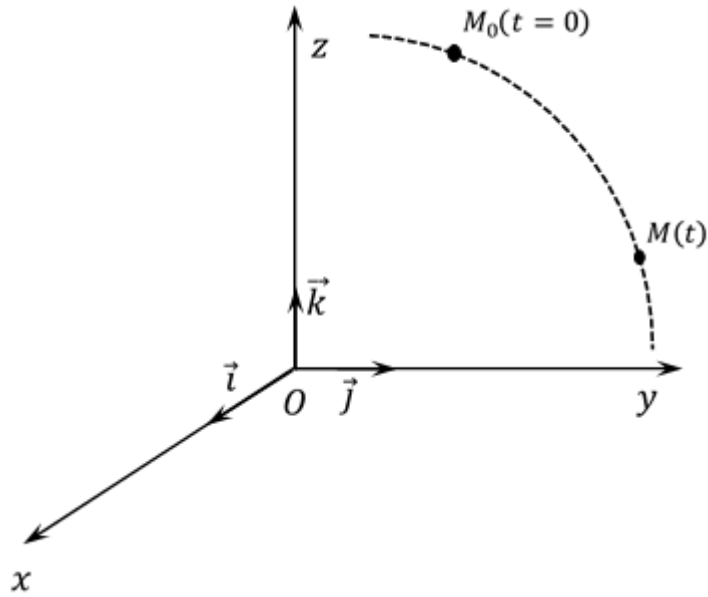


Figure 2.1 : trajectoire du point m

II.2.3. Vecteur position :

Le vecteur position $\overrightarrow{OM}(t)$ décrit la position du point matériel par rapport à l'origine de repère O.

a- En coordonnées cartésiennes :

Dans un repère orthonormé de l'espace $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, le vecteur position \overrightarrow{OM} est donné par (Figure 2.2) :

$$\vec{r}(t) = \overrightarrow{OM}(t) = \overrightarrow{OM'}(t) + \overrightarrow{M'M}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} \dots \dots \dots (2.1)$$

Telles que x représente l'abscisse, y l'ordonnée et z la côte du point matériel.

Le vecteur de déplacement du point matériel de la position M_1 à la position M_2 est définie par :

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1} = \overrightarrow{\Delta OM} = \Delta x\vec{i} + \Delta y\vec{j} + \Delta z\vec{k} \dots \dots \dots (2.2)$$

Pour un déplacement élémentaire :

$$d\overrightarrow{OM} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k} \dots \dots \dots (2.3)$$

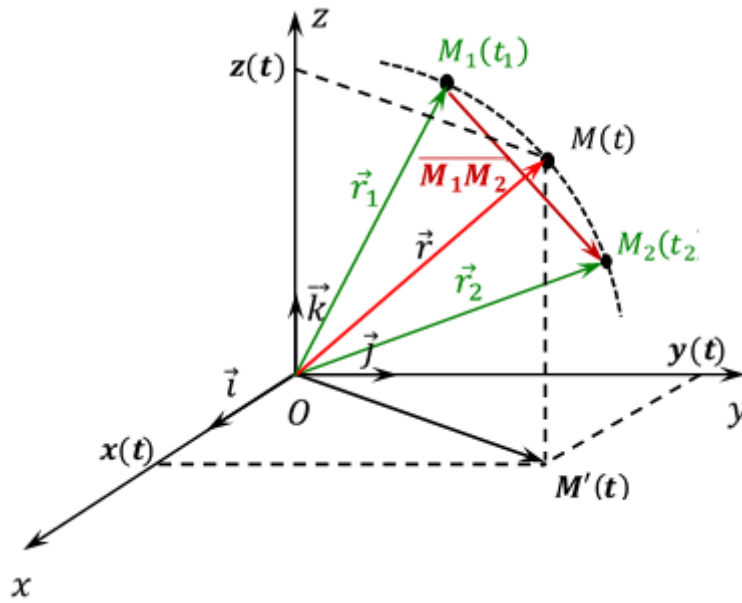


Figure 2.2. Vecteurs position et de déplacement d'un point matériel en coordonnées cartésiennes

b- En coordonnées cylindrique :

Le point M est repéré par (Figure 2.3) :

- ρ (rayon polaire) : la distance M et l'axe (Oz) ou entre M' et O , avec $0 < \rho < +\infty$.
- θ (angle polaire) : l'angle (\widehat{xOm}) , avec $0 < \theta < 2\pi$.
- z (côte): la distance $[OZ]$, soit encore la distance $[mM]$, avec $-\infty < z < +\infty$

La base orthonormée associée au système de coordonnées cylindrique est $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{k})$ avec :

$$\begin{cases} \vec{u}_\rho = \cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j} \\ \vec{u}_\theta = -\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j} \\ \vec{k} = \vec{k} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \frac{d\vec{u}_\rho}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta \\ \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\rho \\ \frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{0} \end{cases}$$

Dans la base à système de coordonnées cylindrique, le vecteur position est donné par :

$$\vec{OM} = \vec{om} + \vec{mM} = \rho\vec{u}_\rho + z\vec{k} \dots \dots \dots (2.4)$$

Le vecteur de déplacement élémentaire dans ce cas est donné par :

$$d\vec{OM} = d\rho\vec{u}_\rho + \rho d\theta\vec{u}_\theta + dz\vec{k} \dots \dots \dots (2.5)$$

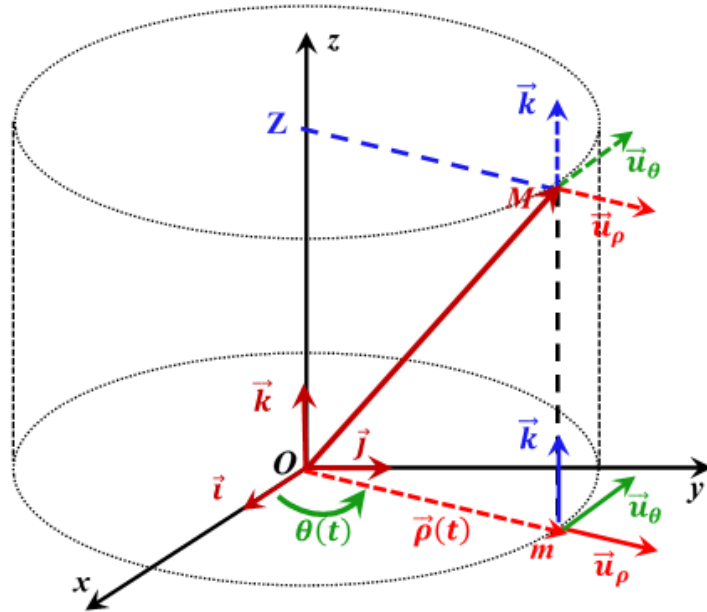


Figure 2.3. Vecteur position d'un point matériel en coordonnées cylindrique.

c- En coordonnées sphérique :

Le point matériel est repéré par les coordonnées :

- r (rayon) : la distance entre M et O , avec $0 < r < +\infty$
- θ (latitude) : l'angle (zOM) , avec $0 < \theta < \pi$
- φ (longitude) : l'angle (xOm) , avec $0 < \varphi < 2\pi$

La base orthonormée locale introduit dans ce système est définie par les vecteurs unitaires $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$ avec :

$$\begin{cases} \vec{u}_r = \sin\theta\cos\varphi\vec{i} + \sin\theta\sin\varphi\vec{j} + \cos\theta\vec{k} \\ \vec{u}_\theta = \cos\theta\cos\varphi\vec{i} + \cos\theta\sin\varphi\vec{j} - \sin\theta\vec{k} \\ \vec{u}_\varphi = -\sin\varphi\vec{i} + \cos\varphi\vec{j} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} d\vec{u}_r = d\theta\vec{u}_\theta + \sin\theta d\varphi\vec{u}_\varphi \\ d\vec{u}_\theta = -d\theta\vec{u}_r + \cos\theta d\varphi\vec{u}_\varphi \\ d\vec{u}_\varphi = -\sin\theta d\varphi\vec{u}_r - \cos\theta d\varphi\vec{u}_\theta \end{cases}$$

Le vecteur position dans ce cas s'écrit :

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r \dots \dots \dots (2.6)$$

Le vecteur déplacement élémentaire $d\overrightarrow{OM}$ est :

$$d\overrightarrow{OM} = dr\vec{u}_r + rd\theta\vec{u}_\theta + r\sin\theta d\varphi\vec{u}_\varphi \dots \dots \dots (2.7)$$

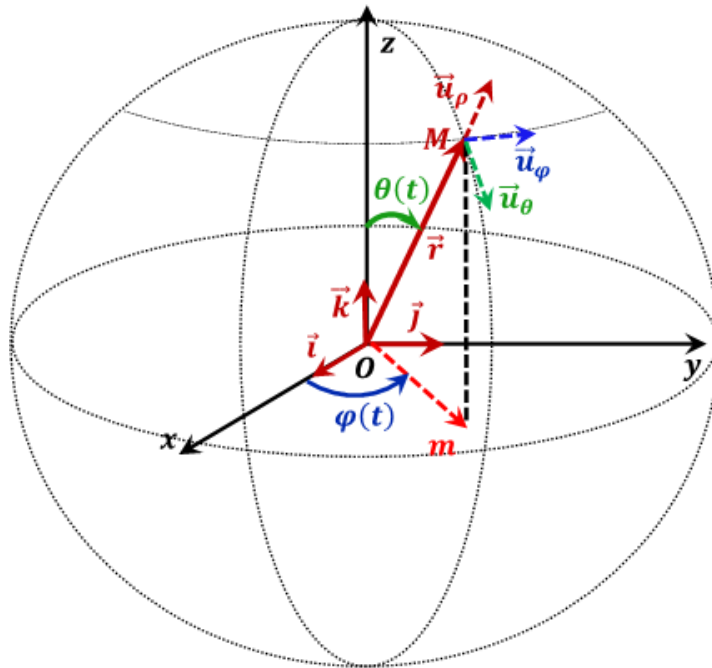


Figure 2.4. Vecteur position d'un point matériel dans un repère en coordonnées sphérique.

II.3. Mouvement curviligne :

Le mouvement d'un point matériel M est défini par son vecteur position \overrightarrow{OM} à chaque instant t .

II.3.1. Vitesse

a. Vitesse moyenne :

Soient $M_1(x_1, y_1, z_1)$ et $M_2(x_2, y_2, z_2)$ les positions du point M aux instants $t_1 = t$ et $t_2 = t + \Delta t$ successive. La vitesse moyenne du point M entre les instants t_1 et t_2 est donnée par :

$$\vec{v}_{moy} = \frac{\overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \overrightarrow{OM}}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \vec{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t} \vec{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t} \vec{k} \dots \dots \dots (2.8)$$

b. Vitesse instantanée :

Elle s'obtient en calculant la vitesse moyenne pour un intervalle du temps plus en plus court :

$$\vec{v}_{inst} = \vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{v}_{moy} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \overrightarrow{OM}}{\Delta t} \dots \dots \dots (2.9)$$

D'où on obtient :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \dots \dots \dots (2.10)$$

• **En coordonnées cartésiennes :**

En introduisant l'expression de vecteur position en coordonnées cartésiennes (équation (2.3)) dans l'équation (2.10) on obtient :

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} \dots \dots \dots (2.10)$$

Les composantes cartésiennes de la vitesse sont donc :

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt} \quad \text{et} \quad v_z = \frac{dz}{dt}$$

Et le module de \vec{v} est donnée par :

$$\|\vec{v}\| = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \dots \dots \dots (2.11)$$

• **En coordonnée cylindrique :**

$$\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{d\rho}{dt}\vec{u}_\rho + \rho \frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta + \frac{dz}{dt}\vec{k} \dots \dots \dots (2.12)$$

Les composants cylindriques de \vec{V} sont :

$$v_\rho = \frac{d\rho}{dt}, \quad v_\theta = \rho \frac{d\theta}{dt} \quad \text{et} \quad v_z = \frac{dz}{dt}$$

Le module de \vec{v} dans ce cas est donné par:

$$v = \sqrt{v_\rho^2 + v_\theta^2 + v_z^2} \dots \dots \dots (2.13)$$

• **En coordonnées sphérique :**

$$\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r \frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta + r \sin\theta \frac{d\varphi}{dt}\vec{u}_\varphi \dots \dots \dots (2.14)$$

Avec :

$$v_r = \frac{dr}{dt}, \quad v_\theta = r \frac{d\theta}{dt} \quad \text{et} \quad v_\varphi = r \sin\theta \frac{d\varphi}{dt}$$

Le module de \vec{V} s'écrit donc par :

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2 + v_\phi^2} \dots \dots \dots (2.15)$$

• **Coordonnée intrinsèque de la vitesse :**

Par définition, on a :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{\overrightarrow{M_1 M_2}}{t_2 - t_1} = \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{\overrightarrow{M_1 M_2}}{\widehat{M_1 M_2}} \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{\widehat{M_1 M_2}}{t_2 - t_1} \dots \dots \dots (2.16)$$

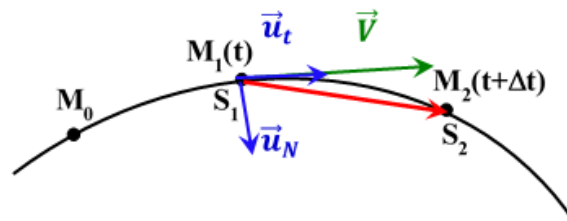


Figure 2.5 : vecteur vitesse en coordonnées intrinsèque

Quand $t_2 \rightarrow t_1$: La longueur de la trajectoire $\widehat{M_1 M_2} \rightarrow \|\overrightarrow{M_1 M_2}\|$

Donc le rapport : $\frac{\overrightarrow{M_1 M_2}}{\|\overrightarrow{M_1 M_2}\|} = \vec{u}_t$

Avec \vec{u}_t représente le vecteur unitaire tangentiel. D'où :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{\widehat{M_1 M_2}}{t_2 - t_1} \vec{u}_t = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} \vec{u}_t = \frac{dS}{dt} \vec{u}_t$$

D'où l'expression de vecteur vitesse en coordonnées intrinsèques s'écrit alors :

$$\vec{v} = \frac{dS}{dt} \vec{u}_t \dots \dots \dots (2.17)$$

$\frac{dS}{dt}$ est appelé *composante tangentielle de vecteur vitesse*.

II.3.2. Accélération :

L'accélération et la variation de la vitesse au cours du temps.

a. Accélération moyenne :

Soient \vec{V}_1 et \vec{V}_2 les vitesses instantanées du point m aux positions M_1 et M_2 successives avec :

$$\vec{v}_1 = v_{x_1}\vec{i} + v_{y_1}\vec{j} + v_{z_1}\vec{k} \quad \text{et} \quad v_2 = v_{x_2}\vec{i} + v_{y_2}\vec{j} + v_{z_2}\vec{k}$$

Par définition, l'accélération moyenne du point m est donnée par :

$$\vec{a}_{moy} = \frac{\overline{\Delta v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} \dots \dots \dots (2.18)$$

On trouve :

$$\vec{a}_{moy} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t}\vec{i} + \frac{\Delta v_y}{\Delta t}\vec{j} + \frac{\Delta v_z}{\Delta t}\vec{k} \dots \dots \dots (2.19)$$

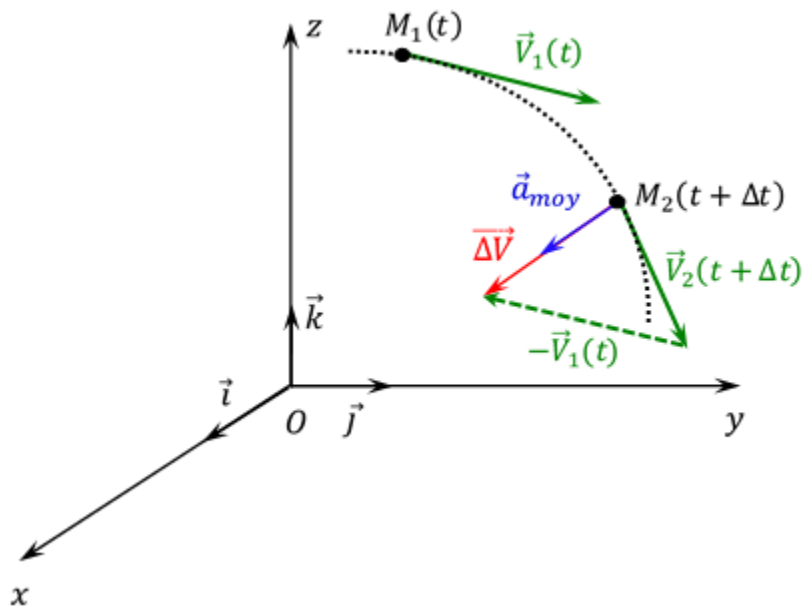


Figure 2.6 : représentation de vecteur accélération moyenne dans un repère cartésien.

b. Accélération instantanée :

L'accélération instantanée est la valeur limite de l'accélération moyenne quand l'intervalle de temps Δt devient très petit. C'est-à-dire :

$$\vec{a}_{inst} = \vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{a}_{moy} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{\Delta v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} \dots \dots \dots (2.20)$$

• **En coordonnées cartésiennes :**

$$\vec{a} = \frac{dv_x}{dt} \vec{i} + \frac{dv_y}{dt} \vec{j} + \frac{dv_z}{dt} \vec{k} = \frac{d^2x}{dt^2} \vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2} \vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2} \vec{k} \dots \dots \dots (2.21)$$

Le module de \vec{a} est donnée donc par :

$$\|\vec{a}\| = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \dots \dots \dots (2.22)$$

• **En coordonnées cylindrique :**

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \left(\frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right) \vec{u}_\rho + \left(\rho \frac{d^2\theta}{dt^2} + 2 \frac{d\rho}{dt} \frac{d\theta}{dt} \right) \vec{u}_\theta + \frac{d^2z}{dt^2} \vec{k} \dots \dots \dots (2.23)$$

Donc les coordonnées cylindrique de l'accélération sont données par :

$$\begin{cases} a_\rho = \frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \\ a_\theta = \rho \frac{d^2\theta}{dt^2} + 2 \frac{d\rho}{dt} \frac{d\theta}{dt} \\ a_z = \frac{d^2z}{dt^2} \end{cases}$$

Et le module de \vec{a} est donc :

$$a = \sqrt{a_\rho^2 + a_\theta^2 + a_z^2} = \sqrt{\left(\frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right)^2 + \left(\rho \frac{d^2\theta}{dt^2} + 2 \frac{d\rho}{dt} \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2} \right)^2} \dots \dots (2.24)$$

Remarque :

Le passage de système de coordonnées cylindrique au système de coordonnées polaire se fait en mettant $z = 0$.

- **En coordonnées Sphérique :**

En remplaçant l'équation (2.14) dans (2.20) on trouve :

$$\vec{a} = \left(\frac{d^2r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 - r \sin^2\theta \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right) \vec{u}_r + \left(r \frac{d^2\theta}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} - r \sin\theta \cos\theta \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right) \vec{u}_\theta + \left(2 \frac{dr}{dt} \sin\theta \frac{d\varphi}{dt} + 2r \cos\theta \frac{d\theta}{dt} \frac{d\varphi}{dt} + r \sin\theta \frac{d^2\varphi}{dt^2} \right) \vec{u}_\varphi \dots \dots \dots (2.25)$$

D'où les composantes de vecteur d'accélération en coordonnées sphérique sont données par :

$$\begin{cases} a_r = \frac{d^2r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 - r \sin^2\theta \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \\ a_\theta = r \frac{d^2\theta}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} - r \sin\theta \cos\theta \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \\ a_\varphi = 2 \frac{dr}{dt} \sin\theta \frac{d\varphi}{dt} + 2r \cos\theta \frac{d\theta}{dt} \frac{d\varphi}{dt} + r \sin\theta \frac{d^2\varphi}{dt^2} \end{cases}$$

Et le module de \vec{a} dans ce cas est donnée par :

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2 + a_\varphi^2} \dots \dots \dots (2.26)$$

- **Composantes intrinsèques de vecteur accélération :**

Tenant en compte l'expression de vecteur vitesse en coordonnées intrinsèque de l'équation (2.17), le vecteur accélération est donné en coordonnées intrinsèque par :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2S}{dt^2} \vec{u}_t + \frac{dS}{dt} \frac{d\vec{u}_t}{dt} \dots \dots \dots (2.27)$$

Comme la trajectoire est une courbe, la direction de \vec{u}_t varie le long de la courbe, ce qui donne la valeur non nulle de $d\vec{u}_t/dt$.

Calcul de $d\vec{u}_t/dt$:

Introduisant le vecteur unitaire \vec{u}_N , normal à la courbe est dirigé vers la concavité.

Sachant que :

$$\|\vec{u}_t\| = 1 = Cte \Rightarrow \frac{d\vec{u}_t}{dt} \perp \vec{u}_t \text{ (Voir chapitre I)}$$

Donc on peut écrire :

$$\frac{d\vec{u}_t}{dt} = \left\| \frac{d\vec{u}_t}{dt} \right\| \vec{u}_N \dots \dots \dots (2.28)$$

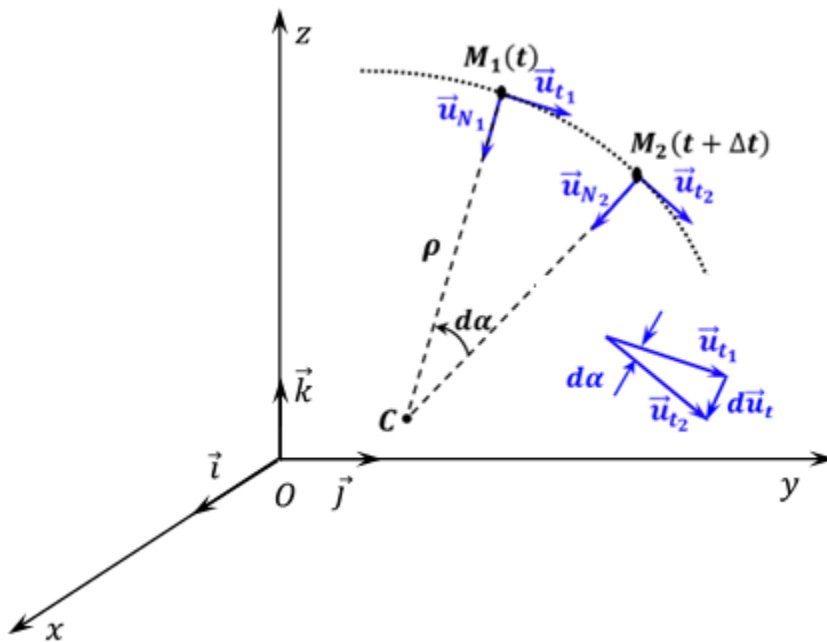


Figure 2.7 : vecteur accélération en coordonnées intrinsèque.

D'autre part, quand le mobile se trouve en M_2 (Figure 2.7), le vecteur unitaire \vec{u}_{t_2} est fait un angle $d\alpha$ avec \vec{u}_{t_1} , on voit sur la figure... que:

$$\begin{cases} d\vec{u}_t = \vec{u}_{t_2} - \vec{u}_{t_1} \\ \|\overrightarrow{du}_t\| = \|\vec{u}_{t_1}\| d\alpha \dots \dots \dots (2.29) \end{cases}$$

avec $\|\vec{u}_{t_1}\| = 1$.

En remplaçant $\|\overrightarrow{du}_t\|$ par $d\alpha$ dans l'équation (2.28) on trouve :

$$\frac{\overrightarrow{du}_t}{dt} = \frac{d\alpha}{dt} \vec{u}_N \dots \dots \dots (2.30)$$

D'autre part

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\alpha}{dS} \frac{dS}{dt} = v \frac{d\alpha}{dS}$$

Où $dS = M_1 M_2(t)$ est le petit arc que parcourt le mobile dans l'intervalle de temps dt .

Le point « C » dans la figure...est appelé centre de courbure et « ρ » est le rayon de courbure.

On a : $dS = \rho d\alpha \Rightarrow d\alpha/dS = 1/\rho$.

Donc : $d\alpha/dt = v/\rho$

On trouve :

$$\frac{d\vec{u}_t}{dt} = \frac{v}{\rho} \vec{u}_N$$

Introduisant ce résultat dans l'expression de \vec{a} , on obtient :

$$\vec{a} = \frac{d^2S}{dt^2} \vec{u}_t + \frac{v^2}{\rho} \vec{u}_N \dots \dots \dots (2.31)$$

Avec :

$$\begin{cases} a_t = \frac{d^2S}{dt^2} = \frac{dv}{dt} : \text{Accélération tangentielle liée au changement du module de } \vec{v} \\ a_N = \frac{v^2}{\rho} : \text{Accélération normale liée au changement de direction de } \vec{v} \end{cases}$$

Le module de l'accélération dans ce cas s'écrit :

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_N^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2} \dots \dots \dots (2.32)$$

II.3.3. Passage de la vitesse à l'espace parcourue :

Considérons un mobile qui se déplace à une vitesse constante. Nous pouvons dire que la vitesse moyenne dans ce cas se confond avec la vitesse instantanée :

$$v_{moy} = v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \dots \dots \dots (2.33)$$

Connaissant la vitesse V et la position x_1 à l'instant t_1 , il est possible de calculer la position x_2 à n'importe quel instant t_2

$$x_2 = x_1 + v(t_2 - t_1) \dots \dots \dots (2.34)$$

Le graphe $V(t)$ étant une droite parallèle à l'axe de temps.

La distance parcourue Δx entre t_1 et t_2 est mesurée par l'aire hachuré de la figure (2.8) ou l'aire sous la courbe $v(t)$.

Lorsque la vitesse n'est pas constante Δx est toujours l'aire sous la courbe $v(t)$ des vitesses.

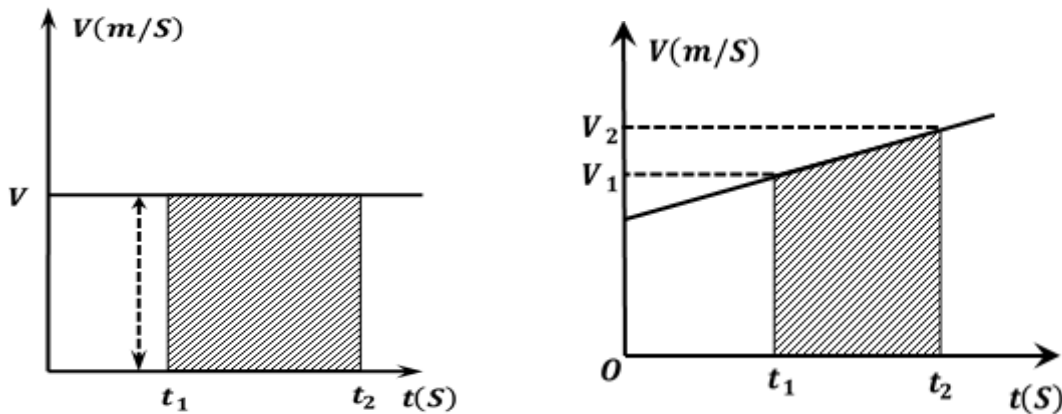


Figure 2.8 : diagramme de vitesse en fonction du temps

II.3.4. Passage de l'accélération à la vitesse :

Si le mouvement d'un mobile est défini par la donnée de son accélération au cours du temps, la vitesse sera l'intégrale de l'accélération.

$$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow dv = a dt \dots \dots \dots (2.34)$$

Si la vitesse varie de v_1 à v_2 :

$$\int_{V_1}^{V_2} dv = \int_{t_1}^{t_2} a dt \dots \dots \dots (2.35)$$

Connaissant la vitesse V_1 à l'instant t_1 , il est possible de connaître V_2 à n'importe quel instant t_2 :

$$v_2 = v_1 + \int_{t_1}^{t_2} a dt \dots \dots \dots (2.36)$$

Graphiquement, l'accroissement de la vitesse est calculé par la mesure de l'aire sous la courbe de l'accélération en fonction du temps (Figure...).

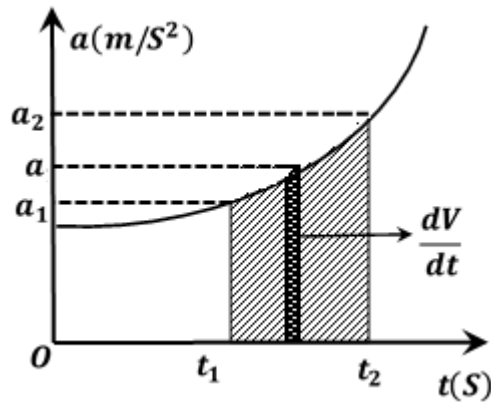


Figure 2.9 : diagramme de l'accélération en fonction du temps

II.4. Quelques mouvements particuliers :

II.4.1. Mouvement rectiligne :

Dans ce type de mouvement, la trajectoire est une droite et la position du mobile est décrite par une seule composante $x(t)$ équivalente au chemin parcourue $S(t)$.

Le vecteur position s'écrit :

$$\overrightarrow{OM} = x(t)\vec{i} \dots \dots \dots (2.37)$$

a. Mouvement rectiligne uniforme :

Le mouvement rectiligne uniforme est caractérisé par une vitesse constante et par conséquent une accélération est nulle.

Le vecteur vitesse est donnée par :

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dx(t)}{dt} \vec{i} \dots \dots \dots (2.38)$$

On obtient :

$$dx = v dt \Rightarrow \int_{x_0}^x dx = \int_{t_0}^t v dt \dots \dots \dots (2.39)$$

x_0 est l'abscisse initial : la position du Mobile à l'instant initial t_0 .

L'équation horaire du mouvement rectiligne est donnée donc par :

$$x(t) = v(t - t_0) + x_0 \dots \dots \dots (2.40)$$

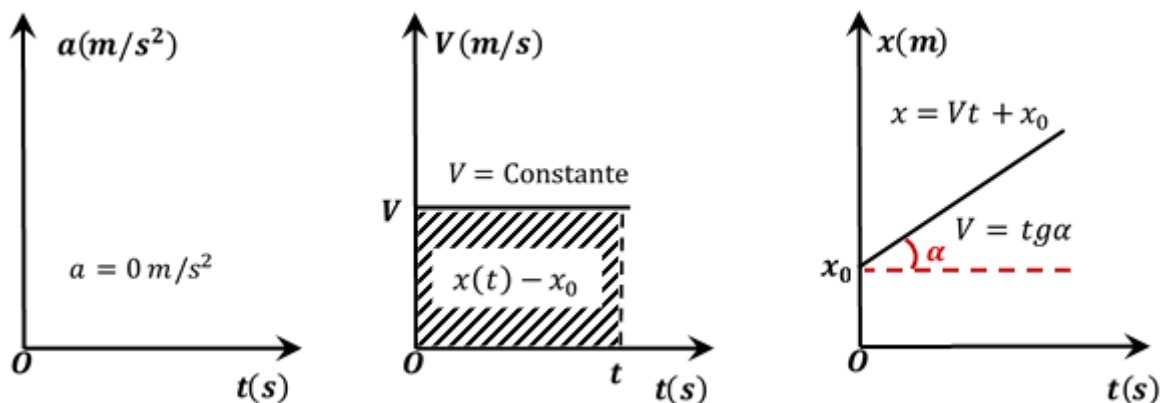


Figure 2.10 : Diagramme du mouvement rectiligne uniforme

b. Mouvement rectiligne uniformément varié :

Ce type de mouvement est caractérisé par une accélération constante ($a(t) = Cte = a$):

$$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow dv = a dt$$

$$\int_{v_0}^v dv = \int_{t_0}^t a dt$$

Avec v_0 ets la vitesse initiale à l'instant t_0 .

On obtient donc :

$$v(t) = a(t - t_0) + v_0 \dots \dots \dots (2.41)$$

D'autre part, on a :

$$dx = v(t)dt$$

$$\int_{x_0}^x dx = \int_{t_0}^t v(t)dt = \int_{t_0}^t (a(t - t_0) + v_0)dt$$

D'où :

$$x(t) = \frac{a}{2}(t^2 - t_0^2) + (v_0 - at_0)(t - t_0) + x_0 \dots \dots \dots (2.42)$$

Si $t_0 = 0$, l'équation horaire du mouvement dans c cas est donnée par :

$$x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 \dots \dots \dots (2.43)$$

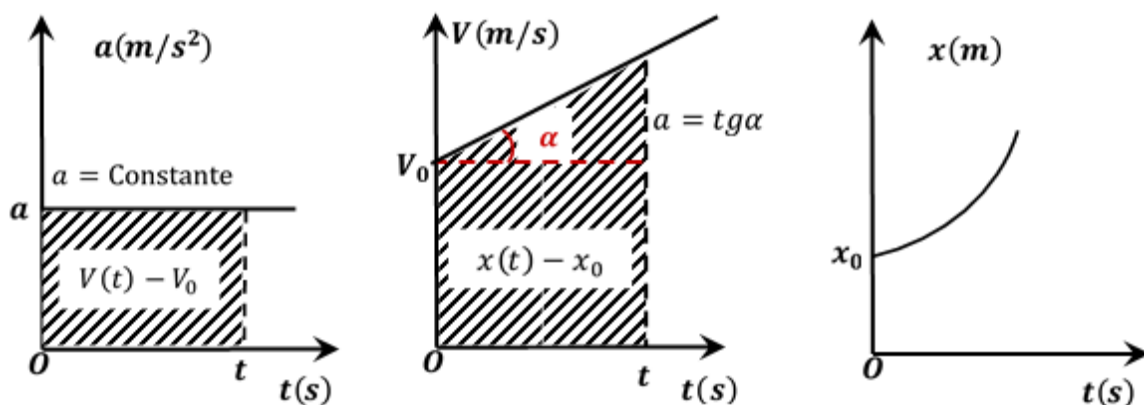


Figure 2.11 : Diagramme du mouvement rectiligne uniformément varié

L'accélération et la décélération d'un mouvement rectiligne uniformément varié est dérivée par la signe du produit scalaire $\vec{a} \cdot \vec{v}$:

1- $\vec{a} \cdot \vec{v} > 0$: deux cas sont possibles :

- $\vec{a} > \vec{0}$ et $\vec{v} > \vec{0}$: Mouvement rectiligne uniformément accéléré dans le sens positif du mouvement.
- $\vec{a} < \vec{0}$ et $\vec{v} < \vec{0}$: Mouvement rectiligne uniformément accéléré dans le sens négatif du mouvement.

2- $\vec{a} \cdot \vec{v} < 0$: deux cas sont possibles :

- $\vec{a} < \vec{0}$ et $\vec{v} > \vec{0}$: Mouvement rectiligne uniformément décéléré dans le sens positif du mouvement.
- $\vec{a} > \vec{0}$ et $\vec{v} < \vec{0}$: Mouvement rectiligne uniformément décéléré dans le sens négatif du mouvement.

Remarque :

L'accélération dans un mouvement rectiligne uniformément varie peut être calculé comme suit :

$$a = \frac{dv}{dt} \dots \dots \dots (2.44)$$

En multipliant l'équation (2.44) par dx :

$$a \, dx = \frac{dv}{dt} \, dx$$

$$\int_{x_0}^x a \, dx = \int_v^v v \, dv$$

D'où :

$$a = \frac{(v^2 - v_2^2)}{2(x - x_0)} \dots \dots \dots (2.45)$$

II.4.2. Mouvement rectiligne Sinusoïdal :

Le mouvement d'un point M est dit rectiligne sinusoïdal si sa trajectoire est une droite et si la position, la vitesse et l'accélération associées sont des fonctions sinusoïdale de temps

L'équation horaire s'écrit sous la forme sinusoïdale en fonction du cosinus ou sinus tel que :

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \varphi) \text{ (ou } x(t) = x_m \sin(\omega t + \varphi) \text{) } \dots \dots \dots (2.46)$$

Avec :

x_m est l'amplitude maximale.

x est l'amplitude du mouvement, elle varie entre $x = -x_m$ et $x = x_m$.

$\omega t + \varphi$ est la phase de mouvement.

ω est la pulsation du mouvement avec $\omega = 2\pi/T$ (T est la période de mouvement).

φ est la phase initiale du mouvement, elle est déterminée par les conditions initiales.

L'expression de la vitesse est :

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -\omega x_m \sin(\omega t + \varphi) \dots \dots \dots (2.47)$$

Ainsi, l'accélération du mouvement sinusoïdal est donnée par :

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = -\omega^2 x_m \cos(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x(t) \dots \dots \dots (2.48)$$

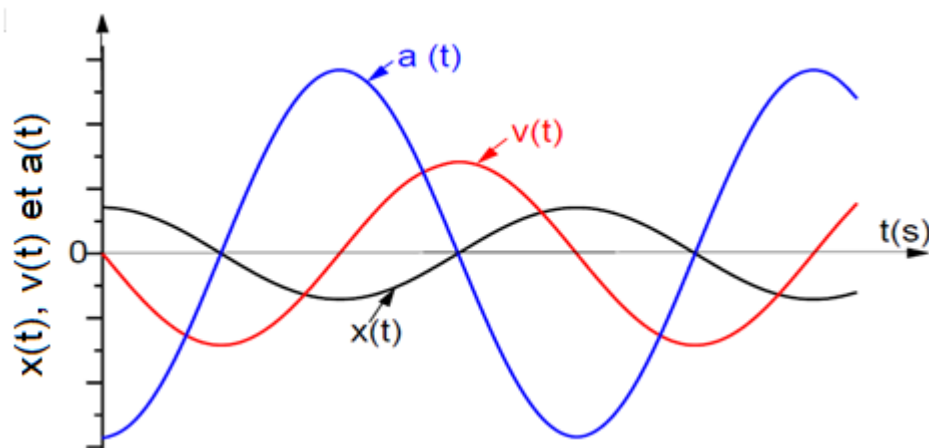


Figure 2.12 : Diagramme du mouvement rectiligne Sinusoïdal

II.4.3. Mouvement circulaire :

Ce type de mouvement est caractérisé par une trajectoire circulaire d'un rayon constant :

$$r(t) = Cte = R$$

L'équation de la trajectoire est comme suit :

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 \dots \dots \dots (2.49)$$

Avec (x_0, y_0) sont les coordonnées du centre de cercle.

La position du mobile peut être repérée par les équations paramétriques polaires :

$$r(t) = R, \quad \theta = \theta(t)$$

Le vecteur position s'écrit suivant les coordonnées polaire sous forme : $\vec{r}(t) = R\vec{u}_r$

Le vecteur vitesse est donné par :

$$\vec{v}(t) = R \frac{d\theta(t)}{dt} \vec{u}_\theta \dots \dots \dots (2.50)$$

En coordonnées intrinsèques :

$$\vec{v} = \frac{dS(t)}{dt} \vec{u}_t = R \frac{d\theta(t)}{dt} \vec{u}_t \dots \dots \dots (2.51)$$

$\omega(t) = \frac{d\theta}{dt}$ est appelée la vitesse angulaire du mobile avec $[\omega] = rad/s$

La vitesse curviligne $\vec{v}(t)$ est reliée à la vitesse angulaire par :

$$\vec{v}(t) = R\omega(t)\vec{u}_\theta \dots \dots \dots (2.52)$$

Ou

$$\vec{v}(t) = R\omega(t)\vec{u}_t \dots \dots \dots (2.53)$$

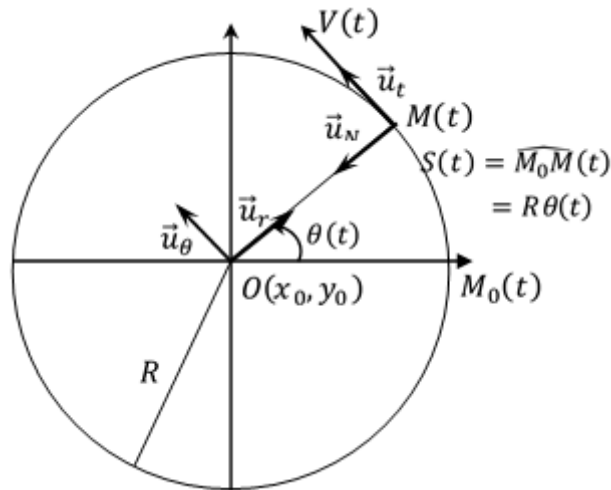


Figure 2.13 : composants de vecteur vitesse pour un mouvement circulaire.

Le vecteur accélération s'écrit suivant les coordonnées polaire comme suit :

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_\theta = -R \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \vec{u}_r + R \frac{d^2\theta}{dt^2} \vec{u}_\theta \dots \dots \dots (2.54)$$

En d'autre :

$$\vec{a} = -R\omega^2 \vec{u}_r + R \frac{d\omega}{dt} \vec{u}_\theta \dots \dots \dots (2.55)$$

Ainsi, en coordonnées intrinsèques, \vec{a} est donnée par :

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_N = R \frac{d^2\theta}{dt^2} \vec{u}_t + R \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \vec{u}_N = R \frac{d\omega}{dt} \vec{u}_t + R\omega^2 \vec{u}_N \dots \dots \dots (2.56)$$

Avec :

$$\frac{d\omega}{dt} = \alpha \text{ est appelé accélération angulaire}$$

a. Mouvement circulaire uniforme :

Si le module de la vitesse $\vec{v}(t)$ ou la vitesse angulaire $\vec{\omega}(t)$ est constante, on dit que le mouvement est circulaire uniforme.

On a :

$$\omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt} \Rightarrow \int_{\theta_0}^{\theta(t)} d\theta(t) = \int_{t_0}^t \omega t$$

D'où l'équation horaire du mouvement circulaire uniforme s'écrit comme suit :

$$\theta(t) = \omega(t - t_0) + \theta_0 \dots \dots \dots (2.57)$$

L'accélération dans ce cas est donnée par :

$$\vec{a} = -R\omega^2\vec{u}_r = R\omega^2\vec{u}_N \dots \dots \dots (2.58)$$

b. Mouvement circulaire uniformément varié :

Ce type de mouvement est caractérisé par une accélération angulaire constante.

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

On écrit donc

$$\int_{\omega_0}^{\omega(t)} d\omega = \alpha \int_{t_0}^t dt$$

On trouve :

$$\omega(t) = \alpha(t - t_0) + \omega_0 \dots \dots \dots (2.59)$$

D'où l'équation horaire du mouvement s'écrit, en utilisant l'équation (2.57), comme suit :

$$\theta(t) = \frac{1}{2}\alpha(t - t_0)^2 + \omega_0(t - t_0) + \theta_0 \dots \dots \dots (2.60)$$

II.5. Mouvement relatif :

Dans la physique relative, le repos et le mouvement sont des notions relatives, ils dépendent de la situation du mobile par rapport au repère qui sert de référence. En effet, on a souvent besoin de connaître le mouvement d'un mobile dans un certain référentiel lorsqu'on connaît déjà ce mouvement dans un autre référentiel qui est lui-même en mouvement par rapport au premier.

II.5.1. Changement de repère :

Soit un point M en mouvement dans l'espace et deux systèmes d'axes de coordonnées ($Oxyz$) et ($O'x'y'z'$) qui servent de références avec :

- $Oxyz$ (repère R considéré fixe), défini par les vecteurs unitaires \vec{i}, \vec{j} et \vec{k} , est appelé repère absolu.
- $O'x'y'z'$ (repère considéré mobile), défini par les vecteurs unitaires \vec{i}', \vec{j}' et \vec{k}' , est appelé repère relatif.

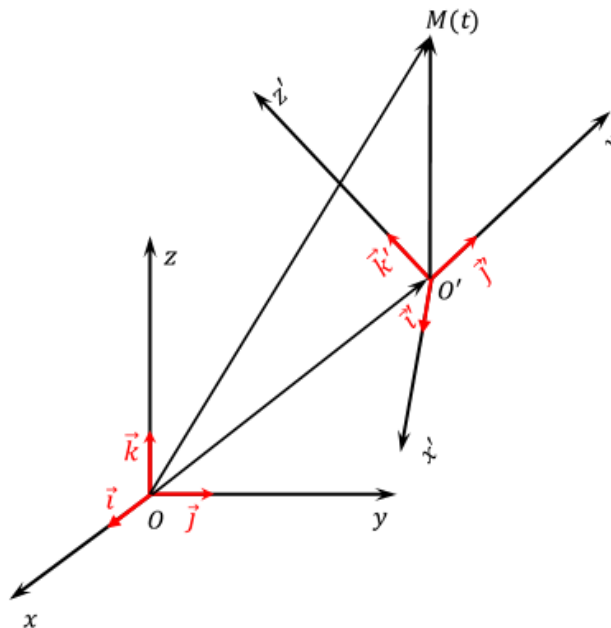


Figure 2.14 : Référentiels en mouvement relatif.

Le mouvement du point M par rapport au repère $R(Oxyz)$ est défini par le vecteur position :

$$\vec{OM}(t) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \dots \dots \dots (2.61)$$

Ainsi, le vecteur position de M par rapport au repère $R'(O'x'y'z')$ est donné par :

$$\overrightarrow{O'M}(t) = x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}' \dots \dots \dots (2.62)$$

Pour un observateur lié au repère $R(Oxyz)$, le mouvement de repère $R'(O'x'y'z')$ est connu par l'intermédiaire du mouvement de O' par rapport à O avec :

$$\overrightarrow{OO'}(t) = x_{O'}\vec{j} + y_{O'}\vec{j} + z_{O'}\vec{k} \dots \dots \dots (2.63)$$

Et de façon dont les axes $(O'x')$, $(O'y')$ et $(O'z')$ tournent autour de O'.

II.5.2. Relation entre les positions :

A un instant t on aura :

$$\overrightarrow{OM}(t) = \overrightarrow{OO'}(t) + \overrightarrow{O'M}(t) \dots \dots \dots (2.64)$$

Soit

$$x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = x_{O'}\vec{j} + y_{O'}\vec{j} + z_{O'}\vec{k} + x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}' \dots \dots \dots (2.65)$$

II.5.3. Relation entre les vitesses :

En dérivant, par rapport au temps, la relation (...), on obtient :

$$\frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OO'}(t)}{dt} + \frac{d\overrightarrow{O'M}(t)}{dt} \dots \dots \dots (2.66)$$

Soit

$$\frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} = \frac{d\overrightarrow{OO'}(t)}{dt} + x'\frac{d\vec{i}'}{dt} + y'\frac{d\vec{j}'}{dt} + z'\frac{d\vec{k}'}{dt} + \frac{dx'}{dt}\vec{i}' + \frac{dy'}{dt}\vec{j}' + \frac{dz'}{dt}\vec{k}' \dots (2.67)$$

Avec

$\frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$ est appelé vitesse absolu, noté par \vec{V}_a .

$\frac{d\overrightarrow{OO'}(t)}{dt} + x'\frac{d\vec{i}'}{dt} + y'\frac{d\vec{j}'}{dt} + z'\frac{d\vec{k}'}{dt}$ est appelé vitesse d'entraînement, noté par \vec{V}_e .

$\frac{dx'}{dt}\vec{i}' + \frac{dy'}{dt}\vec{j}' + \frac{dz'}{dt}\vec{k}'$ est appelé vitesse relative, noté par \vec{V}_r .

On aura donc :

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e \dots \dots \dots (2.68)$$

Remarque :

Si le repère relatif $R'(O'x'y'z')$ est en translation seulement par rapport au repère absolu $R(Oxyz)$:

$$\frac{d\vec{i}'}{dt} = \frac{d\vec{j}'}{dt} = \frac{d\vec{k}'}{dt} = \vec{0}$$

On obtient :

$$\vec{v}_e = \frac{d\overrightarrow{OO'}(t)}{dt}$$

II.5.4. Relation entre les accélérations :

En dérivant, par rapport au temps, la relation (2.67), on trouve :

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k} \\ = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}(t)}{dt^2} + x'\frac{d^2\vec{i}'}{dt^2} + y'\frac{d^2\vec{j}'}{dt^2} + z'\frac{d^2\vec{k}'}{dt^2} + 2\left(\frac{dx'}{dt}\frac{d\vec{i}'}{dt} + \frac{dy'}{dt}\frac{d\vec{j}'}{dt} + \frac{dz'}{dt}\frac{d\vec{k}'}{dt}\right) \\ + \frac{d^2x'}{dt^2}\vec{i}' + \frac{d^2y'}{dt^2}\vec{j}' + \frac{d^2z'}{dt^2}\vec{k}' \dots \dots \dots (2.69) \end{aligned}$$

On appelle :

$$\frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k} : \text{accélération absolu, noté } \vec{a}_a$$

$$\frac{d^2\overrightarrow{OO'}(t)}{dt^2} + x'\frac{d^2\vec{i}'}{dt^2} + y'\frac{d^2\vec{j}'}{dt^2} + z'\frac{d^2\vec{k}'}{dt^2} : \text{accélération d'entraînement, noté } \vec{a}_e$$

$$2\left(\frac{dx'}{dt}\frac{d\vec{i}'}{dt} + \frac{dy'}{dt}\frac{d\vec{j}'}{dt} + \frac{dz'}{dt}\frac{d\vec{k}'}{dt}\right) : \text{accélération de Coriolis, noté } \vec{a}_c$$

$$\frac{d^2x'}{dt^2}\vec{i}' + \frac{d^2y'}{dt^2}\vec{j}' + \frac{d^2z'}{dt^2}\vec{k}' : \text{accélération relative, noté } \vec{a}_r$$

On aura donc :

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c \dots \dots \dots (2.70)$$

Lorsque le repère relatif est en mouvement de translation uniforme par rapport au repère absolu, les accélérations \vec{a}_e et \vec{a}_c s'annulent. On a donc :

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r$$

On sait que :

$$\frac{d\vec{l}'}{dt} \perp \vec{l}'$$

On accepte donc que :

$$\begin{cases} \frac{d\vec{l}'}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{l}' \\ \frac{d\vec{j}'}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{j}' \dots \dots \dots (2.71) \\ \frac{d\vec{k}'}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{k}' \end{cases}$$

Avec ω est la vitesse angulaire.

On a alors :

1-

$$\vec{v}_e = \frac{d\overrightarrow{OO'}(t)}{dt} + x'\vec{\omega} \wedge \vec{l}' + y'\vec{\omega} \wedge \vec{j}' + z'\vec{\omega} \wedge \vec{k}'$$

Soit :

$$\vec{v}_e = \frac{d\overrightarrow{OO'}(t)}{dt} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M} \dots \dots \dots (2.72)$$

2-

$$\vec{a}_c = 2 \left(\frac{dx'}{dt} \vec{\omega} \wedge \vec{l}' + \frac{dy'}{dt} \vec{\omega} \wedge \vec{j}' + \frac{dz'}{dt} \vec{\omega} \wedge \vec{k}' \right)$$

Soit :

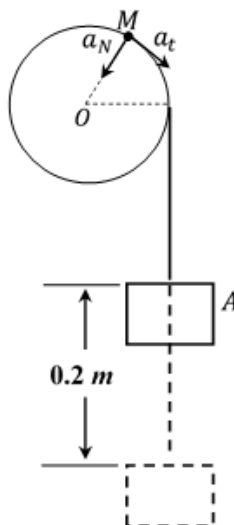
$$\vec{a}_c = 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_r \dots \dots \dots (2.73)$$

3-

$$\vec{a}_e = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}) \dots \dots \dots (2.74)$$

II.6. Exercices :

- 2.1.** Une particule se déplace le long de l'axe (Ox) de telle sorte que sa position à chaque instant est donnée par : $x = 5t^2 + 1$ où x est donnée en mètres et t en secondes.
- Calculer sa vitesse moyenne dans l'intervalle de temps compris entre (a) 2s et 3s, (b) 2s et 2.1s, (c) 2s et 2.001s, (d) 2s et 2.00001s.
 - Calculer la vitesse instantanée à 2s.
- 2.2.** Une automobile part de l'arrêt et se déplace avec une accélération de 1m/s^2 pendant 1s. on arrête alors le moteur et on laisse l'automobile ralentir, en raison du frottement, pendant 10s avec une décélération de 5cm/m^2 . Puis on freine et l'automobile s'arrête au bout de 5 secondes supplémentaires. Calculer la distance totale parcourue par l'automobile. Représenter graphiquement x , v et a en fonction de t .
- 2.3.** Dans un référentiel terrestre, un disque horizontal tourne à 500 tours/minute autour d'un axe vertical. Calculer la valeur de la vitesse (supposée constante) d'un point M situé à une distance $R = 0.5\text{cm}$ de l'axe de disque. La valeur de la vitesse étant constante, le point M a-t-il une accélération ?
- 2.4.** Un disque D de rayon 0.1 m (Figure ci-dessous) tourne librement autour d'un axe horizontal. Une corde est enroulée autour du bord extérieur du disque, et un corps A , attaché à la corde, tombe verticalement sous l'action de son pesanteur. Le mouvement de A est uniformément accéléré mais son accélération est plus petite que celle due à la pesanteur. A l'instant $t=0$, la vitesse du corps A est 0.04 m/s , et à 2s plus tard A tombe de 0.2m . Trouver l'accélération normale et tangentielle, à chaque instant, pour un point quelconque M du bord de disque.



2.5. Un fleuve coule vers le nord à la vitesse de 3 km/h . un bateau va vers l'est avec une vitesse de 4 km/h par rapport à l'eau. (a) Calculer la vitesse du bateau par rapport à la rive. (b) Si le fleuve a 1 km de large, calculer le temps nécessaire pour le traverser. (c) quelle est la déviation vers le nord subie par le bateau quand il atteint l'autre rive ?

2.6. Dans un repère fixe $(Oxyz)$, un axe (Ox') tourne autour de l'axe (Oz) à la vitesse angulaire $\omega = d\theta/dt = \text{Cte}$. Un mobile M (avec $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$) circule sur l'axe (Ox') selon la loi : $r = r_0(\cos \omega t + \sin \omega t)$, $r_0 = \text{cte}$. Trouver dans le repère mobile à l'instant t et en fonction de r_0 et ω :

- La vitesse absolue du mobile M et leur module.
- L'accélération absolue et leur module.

Chapitre III : Dynamique d'un point matériel

Dans ce chapitre, on s'intéresse à la dynamique du point matériel qui est une partie de la mécanique qui étudie les causes du mouvement. Elle détermine les relations entre les forces et les mouvements qui les relient.

III.1. Principe d'inertie :

Énoncé :

Tout objet conserve son état de repos ou de mouvement rectiligne uniforme en l'absence de toute force agissant sur lui.

En d'autres termes :

Si aucune force n'agit sur un objet ou si la somme des forces appliquées est nulle :

- Un objet au repos reste au repos
- Un objet en mouvement continue à se mouvoir à vitesse constante.

Ce principe est appelé aussi « *première loi de Newton* »

III.2. Référentiels d'inertie ou galiléens :

On appelle référentiel d'inertie ou galiléen, un système de référence (ou repère) dans lequel une particule libre se déplace à vitesse constante. Autrement dit, un référentiel d'inertie est un repère où le principe d'inertie est applicable.

D'après cette définition, un référentiel d'inertie n'existe pas ; on dispose que des référentiels approximatifs.

Exemples :

- **Référentiel de Copernic** : Le référentiel de Copernic a pour centre le centre du système solaire et ses axes sont donnés par les directions de trois étoiles très éloignées (supposées fixes par rapport au soleil).
- **Référentiel géocentrique** : Le référentiel géocentrique a pour centre le centre de la terre et ses axes ont des directions fixes qui sont celles du référentiel de Copernic.
- **Référentiel terrestre** : un référentiel terrestre est un référentiel lié à la terre. Son origine est donc un point de la planète et ses axes sont fixes par rapport à elle.

Remarques:

- Si le principe d'inertie est valable dans un repère, il sera valable aussi dans tout repère R' en translation uniforme par rapport à ce repère.
- Tout système de coordonnées qui se déplace à vitesse constante par rapport à un référentiel d'inertie, peut être lui-même considéré comme un référentiel d'inertie.
- Les vitesses et les accélérations mesurées dans un référentiel galiléen sont dites absolues.

III.3. Centre d'inertie ou Barycentre :

Soit le système de la figure 3.1.

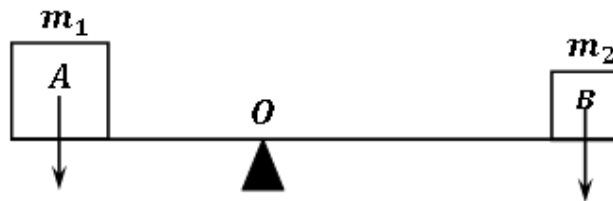


Figure 3.1 : Système de deux masses en équilibre

En équilibre, la somme des moments des forces par rapport à « O » est nulle :

$$\sum \vec{M}_{\vec{F}_i}^O = \vec{0} \Rightarrow \vec{M}_{\vec{F}_1}^O + \vec{M}_{\vec{F}_2}^O = \vec{0} \dots \dots \dots (3.1)$$

Introduisant l'expression de moment d'une force, on trouve

$$\vec{OA} \wedge \vec{F}_1 + \vec{OB} \wedge \vec{F}_2 = \vec{0} \Rightarrow \vec{OA} \wedge m_1 \vec{g} + \vec{OB} \wedge m_2 \vec{g} = \vec{0} \dots \dots \dots (3.2)$$

D'où

$$(m_1 \vec{OA} + m_2 \vec{OB}) \wedge \vec{g} = \vec{0} \dots \dots \dots (3.3)$$

Donc le centre d'inertie de ce système est calculé à partir de la relation suivante :

$$m_1 \vec{OA} + m_2 \vec{OB} = \vec{0} \dots \dots \dots (3.4)$$

Pour un système de m_n masses situées aux points M_n successifs (figure (3.2)), le centre d'inertie G de système est définie par :

$$m_1 \vec{GM}_1 + m_2 \vec{GM}_2 + \dots + m_n \vec{GM}_n = \vec{0} \dots \dots \dots (3.5)$$

D'où

$$\sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{GM}_i = \vec{0} \dots \dots \dots (3.6)$$

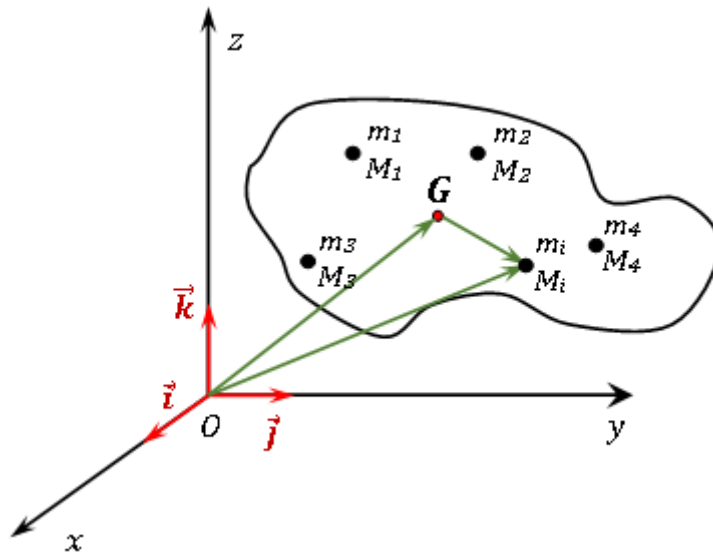


Figure 3.2 : Barycentre d'un système de n masses

D'autre part, à partir de la figure (3.2), on a :

$$\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GM}_i = \overrightarrow{OM}_i \Rightarrow \overrightarrow{GM}_i = \overrightarrow{OM}_i - \overrightarrow{OG}$$

Donc

$$\sum_{i=1}^n m_i (\overrightarrow{OM}_i - \overrightarrow{OG}) = \vec{0}$$

Soit

$$\sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{OG} = \sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{OM}_i$$

On trouve

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{OM}_i \dots \dots \dots (3.7)$$

Avec :

$M = \sum_{i=1}^m m_i$ présente la masse totale de système en équilibre

Pour un milieu continu :

$$\vec{OG} = \frac{1}{M} \iiint m_i \vec{OM}_i \dots \dots \dots (3.8)$$

L'intégral est triple car la masse est répartie en volume.

III.4. Quantité de mouvement

III.4.1. Définition

La quantité de mouvement d'une particule de masse m en mouvement avec une vitesse \vec{v} est définie par :

$$\vec{P} = m\vec{v} \dots \dots \dots (3.9)$$

Dans le système international MKSA, la quantité de mouvement s'exprime en $kg \cdot m \cdot s^{-1}$

Le principe d'inertie peut donc s'énoncé comme suit :

« Une particule libre se déplace toujours avec une quantité de mouvement constante »

III.4.2. Principe de conservation de la quantité de mouvement

Soient deux particules libres isolées, en interaction, de masse m_1 et m_2 . La quantité de mouvement totale du système, à un instant t , est donnée par :

$$\vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 \dots \dots \dots (3.10)$$

A un instant t' , la quantité de mouvement s'écrit :

$$\vec{P}' = \vec{P}'_1 + \vec{P}'_2 = m_1\vec{v}'_1 + m_2\vec{v}'_2 \dots \dots \dots (3.11)$$

A tout instant, la quantité de mouvement totale du système est conservée :

$$\vec{P} = \vec{P}' \Rightarrow \vec{P}_1 + \vec{P}_2 = \vec{P}'_1 + \vec{P}'_2$$

Soit :

$$\vec{P}'_1 - \vec{P}_1 = \vec{P}_2 - \vec{P}'_2 \dots \dots \dots (3.12)$$

En peut écrire aussi :

$$\Delta\vec{P}_1 = -\Delta\vec{P}_2 \dots \dots \dots (3.13)$$

Ce résultat indique que, pour deux particules en interaction, la variation de la quantité de mouvement d'une particule dans un certain intervalle de temps est égale et opposée à la variation de la quantité de mouvement de l'autre pendant le même intervalle de temps.

Autrement dit, la quantité de mouvement « perdue » par une des particules en interaction est égale à celle « gagnée » par l'autre particule.

Pour un système isolé à n particules en interaction, la quantité de mouvement totale de ce système reste constante à tout instant t :

$$\vec{P}_T = \sum_{i=1}^n \vec{P}_i = cte \dots \dots \dots (3.14)$$

III.5. Définition Newtonienne de la force :

Toute cause capable de modifier le vecteur quantité de mouvement d'un point matériel est appelée « Force ».

Autrement, la force est une quantité mathématique qui, par définition, égale à la dérivée de la quantité de mouvement par rapport au temps.

Physiquement, la variation de la quantité de mouvement est due à l'interaction d'une particule avec un autre ou avec les autres systèmes.

III.5.1. Force moyenne :

On peut définir la force moyenne comme étant la variation de la quantité de mouvement sur un intervalle de temps Δt :

$$\vec{F}_{moy} = \frac{\overline{\Delta P}}{\Delta t} \dots \dots \dots (3.15)$$

III.5.2. Force instantanée :

Elle s'obtient en calculant la force moyenne pour un intervalle du temps plus court.

$$\vec{F}_{inst} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{F}_{moy} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{\Delta P}}{\Delta t} \dots \dots \dots (3.16)$$

III.5.3. Principe Fondamental de la Dynamique (PFD) (2^{ème} loi de Newton)

Dans un référentiel galiléen, la somme des forces extérieures appliquées à un système quelconque est égale à la dérivée du vecteur quantité de mouvement du centre d'inertie de ce système.

$$\sum \vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) \dots \dots \dots (3.17)$$

Si la masse du système est constante :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} \dots \dots \dots (3.18)$$

a- Théorème de moment cinétique :

Le moment cinétique d'un point M , d'une masse m se déplaçant à une vitesse \vec{v} , par rapport au point O , considéré comme origine, est définie par :

$$\vec{L}_O(M) = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v} \dots \dots \dots (3.19)$$

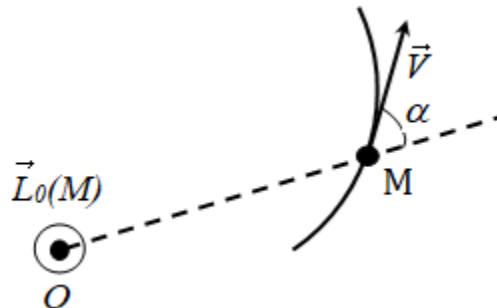


Figure 3.3 : Moment cinétique d'un point M par rapport au point O .

En coordonnées polaire :

Le vecteur position du point M en coordonnées polaire est : $\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r$

Ainsi, sa vitesse est donnée par : $\vec{V} = V_r\vec{u}_r + V_\theta\vec{u}_\theta$

Le moment cinétique s'écrit donc par :

$$\vec{L}_O(M) = r\vec{u}_r \wedge m(V_r\vec{u}_r + V_\theta\vec{u}_\theta) = mrV_\theta\vec{k} \dots \dots \dots (3.20)$$

Sachant que $V_\theta = r\omega$, on trouve :

$$\vec{L}_O(M) = mr^2\omega\vec{k} \dots \dots \dots (3.21)$$

Remarque :

La dérivé de moment cinétique $\vec{L}_O(M)$ par rapport au temps est donnée par :

$$\frac{d\vec{L}_O(M)}{dt} = \frac{d\vec{OM}}{dt} \wedge m\vec{V} + \vec{OM} \wedge m \frac{d\vec{V}}{dt} \dots \dots \dots (3.22)$$

Sachant que :

$$\begin{cases} \frac{d\vec{OM}}{dt} = \vec{V} \\ m \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F} \end{cases} \dots \dots \dots (3.23)$$

On trouve

$$\frac{d\vec{L}_O(M)}{dt} = \vec{OM} \wedge \vec{F} = \vec{M}_O(\vec{F}) \dots \dots \dots (3.24)$$

Avec $\vec{M}_O(\vec{F})$ est le moment de la force \vec{F} par rapport au point O .

Théorème : La dérivée, par rapport au temps, du moment cinétique d'une particule est égale au moment de la force qui lui est appliquée quand les deux soient mesurés par rapport au même point O .

III.5.2. Quelques lois de forces :

a. Loi de gravitation universelle :

Fut énoncée par Newton en 1650 dans le but d'expliquer les mouvements des planètes autour du soleil.

Soient deux corps A et B, assimilables à des points, de masses M_A et M_B successivement séparées par une distance r . Il existe une force d'attraction mutuelle entre ces deux corps, cette force est :

- ✓ Proportionnelle aux M_A et M_B des deux corps.
- ✓ Inversement proportionnelle au carré de la distance r entre les deux corps.

Dont le module est donné par :

$$F = G \frac{M_A M_B}{r^2} \dots \dots \dots (3.25)$$

Où G est la constante d'attraction universelle avec $G = 6.67259 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$

Les forces qui présentent cette interaction mutuelle a les caractéristiques suivantes :

- Le point d'application est tel que la force exercée par A sur B s'applique en B ($\vec{F}_{A/B}$) et la force exercée par B sur A s'applique en A ($\vec{F}_{B/A}$).
- La direction est celle de la droite AB.
- Le sens est tel que la force exercée par A sur B est dirigée vers A et celle exercée par B sur A est dirigée vers B.

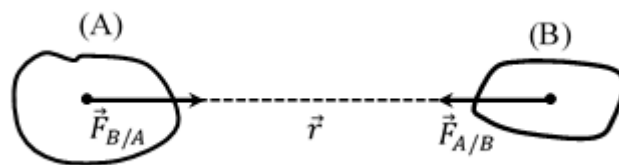


Figure 3.5 : Force d'attraction entre deux corps

Selon le principe de l'action et de la réaction, on a :

$$\vec{F}_{A/B} = -\vec{F}_{B/A}$$

Application :

On considère le système terre-lune. On donne : $M_T = 5.97 \cdot 10^{24} kg$, $M_L = 7.35 \cdot 10^{22} kg$, $r = 3.80 \cdot 10^5 km$. Calculer la force d'attraction qui s'exerce entre la terre et la lune.

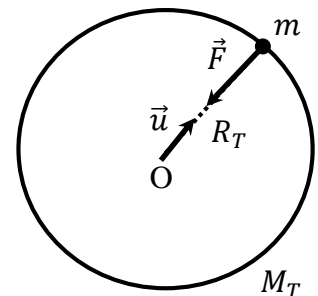
On trouve : $F_{T/L} = F_{L/T} = G \frac{M_T M_L}{r^2} = 2.03 \cdot 10^{20} N$

Cas particulier : Le poids d'un corps placé sur la surface de la terre.

Soit un corps de masse m placé sur la surface de la terre. M_T et R_T représentent successivement la masse et le rayon de la terre.

La force d'attraction appliquée par la terre sur le corps est donnée par :

$$\vec{F} = -G \frac{M_T m}{R_T^2} \vec{u} \dots \dots \dots (3.26)$$



On pose :

$$\vec{g}_0 = -G \frac{M_T}{R_T^2} \vec{u} \dots \dots \dots (3.27)$$

\vec{g}_0 est appelé le champ de pesanteur sur la surface de la terre, avec $[g_0] = ms^{-2}$

On obtient alors :

$$\vec{F} = m\vec{g}_0 = \vec{P} \dots \dots \dots (3.28)$$

A une altitude h :

$$\vec{F} = -G \frac{M_T m}{(R_T + h)^2} \vec{u} = -G \frac{M_T}{R_T^2} \left(\frac{R_T}{R_T + h} \right)^2 m \vec{u}$$

Soit

$$\vec{F} = -g_0 \left(\frac{R_T}{R_T + h} \right)^2 m \vec{u} \dots \dots \dots (3.29)$$

En négligeant la vitesse de rotation de la terre sur elle-même, le champ de pesanteur à une altitude h de la surface de la terre est donnée donc par :

$$g = g_0 \left(\frac{R_T}{R_T + h} \right)^2 \dots \dots \dots (3.30)$$

b. Forces de contact -Réaction de surface :

La force que subit un objet, posé sur un support horizontal, notée \vec{R}_N en provenance de support, s'appelle « réaction de surface », sa direction est orthogonale à la surface du support au niveau de du contact « support-objet »

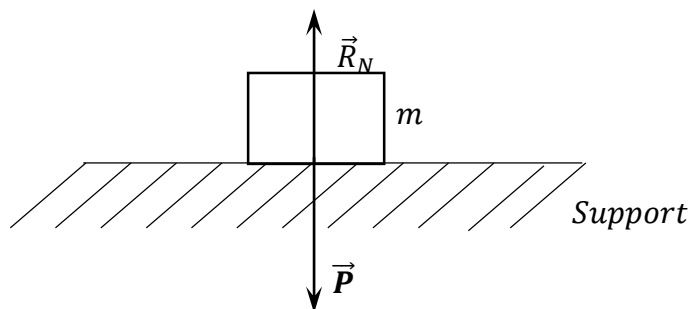


Figure 3.8 : Présentation de la réaction de surface

La réaction de support sur l'objet est répartie sur toute la surface de contact « support-objet ».

\vec{R}_N représente la résultante de toutes les actions exercées sur la surface de contact.

En équilibre, on a :

$$\vec{R}_N + \vec{P} = \vec{0} \Rightarrow \vec{R}_N = -\vec{P} \dots \dots \dots (3.31)$$

c. Forces de frottement :

Les forces de frottement sont des forces qui apparaissent :

- Soit lors de du mouvement d'un objet.
- Soit cet objet est soumis à une force qui tend à vouloir de le déplacer.

On distingue deux types de frottement :

- 1- Frottement visqueux (Contact : Solide-Liquide)
- 2- Frottement solide (contact : Solide-Solide)

c.1. Frottement Visqueux :

Dans ce type de frottement, la force est proportionnelle et opposé à la vitesse de mouvement de l'objet.

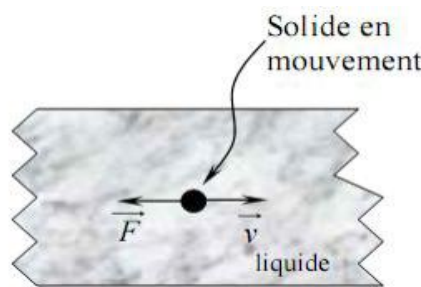


Figure 3.9 : mouvement d'un corps solide dans un liquide

A des vitesses très faibles, la force de frottement visqueux est donnée par :

$$\vec{F} = -k\eta\vec{V} \dots \dots \dots (3.32)$$

Avec :

k est Coefficient caractéristique de la géométrie du solide, pour une boule de rayon R :

$$k = 6\pi R \text{ (Loi de stokes)}$$

η représente le coefficient de viscosité du fluide (dépende de la température)

A des vitesses plus grandes, des expériences ont montré que la force de frottement visqueux est donnée par :

$$\vec{F} = -k\eta V^n \vec{u} \dots \dots \dots (3.33)$$

Avec $n \geq 2$

c.1. Frottement solide :

Les forces de frottement, dans ce cas, sont des forces qui apparaissent soit lors du mouvement d'un objet soit cet objet est soumis à une force qui tend à vouloir le déplacer. Le frottement s'oppose au déplacement des objets en mouvement.

a- Frottement statique :

Soit un bloc au repos sur un plan incliné faisant un angle α avec l'horizontale (figure 3.10).

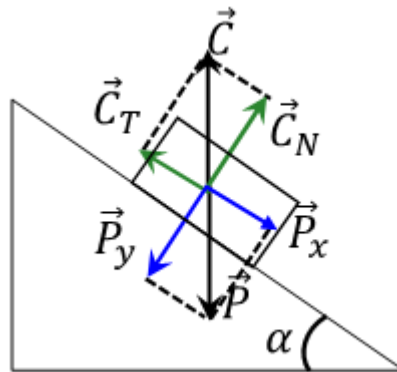


Figure 3.10 : un bloc sur un plan incliné

Pour des valeurs de α inférieur à une valeur limite α_0 (Au-delà de cette valeur limitée de l'angle d'inclinaison α_0 le bloc se met en glissement), le bloc reste immobile. Le PFD s'écrit donc :

$$\vec{P} + \vec{C}_0 = \vec{0} \dots \dots \dots (3.34)$$

Avec :

\vec{C}_0 présente la force de contact à l'état d'équilibre limite ($\alpha = \alpha_0$).

$$\vec{C}_0 = \vec{C}_{N0} + \vec{C}_{T0}$$

\vec{C}_{N0} est la réaction normal de la surface

\vec{C}_{T0} est la force de frottement

Par projection sur les deux axes on aura :

$$P_x - C_{T0} = 0$$

$$C_{N0} - P_y = 0$$

On trouve :

$$C_{T_0} = mg \sin \alpha_0 \dots \dots \dots (3.35)$$

$$C_{N_0} = mg \cos \alpha_0 \dots \dots \dots (3.36)$$

En divisant les deux dernières équations (3.35 et 3.36) l'une sur l'autre on aura :

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{C_{T_0}}{C_{N_0}}$$

Lorsque α augmente la composante tangentielle du poids P_x augmente. La nature des surfaces en contact permet à la force de frottement \vec{C}_T de s'adapter de façon à maintenir l'équilibre. Cette force de frottement \vec{C}_T atteint sa valeur limite C_{T_0} pour α_0 .

On définit alors le coefficient de frottement statique :

$$\mu_s = \operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{C_{T_0}}{C_{N_0}} \dots \dots \dots (3.36)$$

Ce coefficient de frottement est indépendant des forces et ne dépend que de la nature des surfaces en contact (matériaux, forme, structure moléculaire...).

b- Frottement dynamique :

En faisant croître α au-delà de la valeur limite α_0 , le bloc se met à glisser. Son mouvement est uniformément accéléré.

On aura donc :

$$\vec{P} + \vec{C} = m\vec{a} \dots \dots \dots (3.37)$$

Par projection sur les deux axes, on obtient :

$$C_T = m(g \sin \alpha - a)$$

$$C_N = mg \cos \alpha$$

On définit dans ce cas le coefficient de frottement dynamique :

$$\mu_d = \frac{C_T}{C_N} = \frac{g \sin \alpha - a}{g \cos \alpha} \dots \dots \dots (3.38)$$

Le coefficient de frottement dynamique est dans la plupart des cas inférieur au coefficient de frottement statique.

Remarque :

- 1- Le coefficient de frottement μ_s (μ_d) dépend de la nature de surface de frottement.
- 2- On note que μ_d est :
 - Inferieur à μ_s
 - Sensiblement indépendant de la vitesse de déplacement et des superficies des surfaces en contact et ne dépend que de leur nature.

d. Force de rappel ou force élastique :

Lorsque l'on déforme un ressort ou un élastique, ces derniers réagissent en exerçant une force afin de reprendre leur forme initiale (Figure 3.11).

On appelle **force de rappel (force élastique)** la force qu'exerce le ressort ou l'élastique pour reprendre sa forme initiale.

Cette force est donnée la loi de Hook par :

$$\vec{F}_{rap} = -k\Delta x\vec{u} \dots \dots \dots (3.39)$$

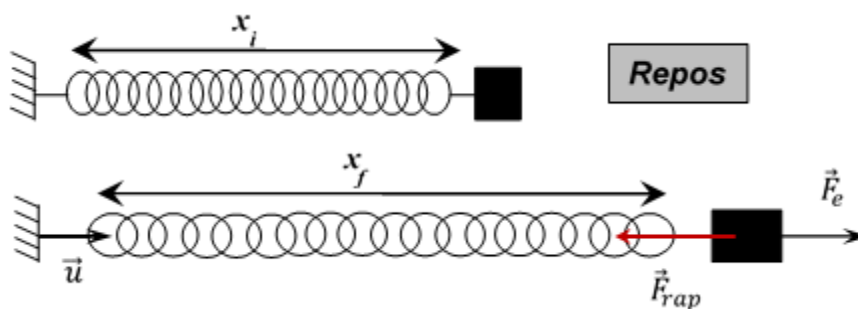


Figure 3.10 : Force de rappel d'un ressort.

\vec{F}_{rap} représente la force de rappel ou force élastique (N).

k représente la constante de rappel de ressort (N/m).

Δx Représente la déformation ou la compression du ressort (ou de l'élastique) (m). Elle se calcule en effectuant la différence entre la position finale x_f et la position initiale x_i :

$$\Delta x = x_f - x_i$$

Principe fondamental de la dynamique dans un repère non galiléen

Soit (R') un référentiel non galiléen en mouvement par rapport à un référentiel galiléen (R). Le référentiel (R') est référentiel relatif et (R) référentiel absolu.

On désigne par \vec{a}_a l'accélération absolue d'un mobile de masse m dans le repère (R) et par \vec{a}_r l'accélération relative de même mobile dans le repère (R').

La loi de décomposition des accélérations donne :

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c$$

Le principe fondamental de la dynamique dans le référentiel (R) est donné par :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}_a = m\vec{a}_r + m\vec{a}_e + m\vec{a}_c$$

Dans le référentiel (R'), le PFD s'écrit :

$$m\vec{a}_r = m\vec{a}_a - m\vec{a}_e - m\vec{a}_c = \sum \vec{F}_{ext} + \vec{F}_e + \vec{F}_c$$

Avec :

$\vec{F}_e = -m\vec{a}_e$ est la force d'inertie d'entraînement et $\vec{F}_c = -m\vec{a}_c$ est la force d'inertie de Coriolis. Ces deux forces sont des forces non réelles, elles dépendent du mouvement de (R') par rapport à (R).

Le principe fondamental de la dynamique dans un référentiel non galiléen s'écrit des mêmes façons que dans un référentiel galiléen à condition de prendre en considération les forces d'inerties d'entraînement \vec{F}_e et de Coriolis \vec{F}_c .

III.7. Exercices :

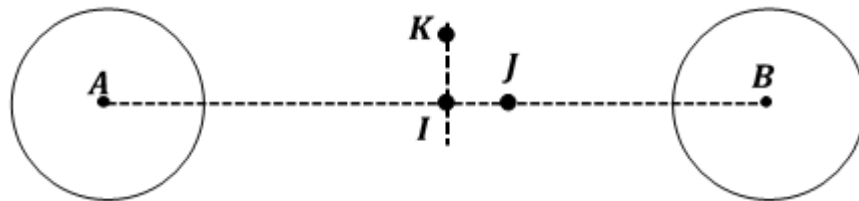
- 3.1. Une arme à feu (pistolet) a une masse de 600 g. Les projectiles qu'elle tire ont une masse de 4 g et une vitesse de 300 m/s à la sortie du canon. Calculer la vitesse de recul de l'arme immédiatement après le tir [7].
- 3.2. Un wagon de masse 500 kg se déplace à la vitesse de 5 m/s sur une voie. Il percute un deuxième wagon de masse 1500 kg, immobile. Les deux wagons restent accrochés après le choc. (1) Calculer la quantité de mouvement du système. (2) Calculer la vitesse de l'ensemble après le choc [7].

3.3. Estimer le moment cinétique de la terre autour du soleil et celui d'un électron autour de noyau dans un atome d'hydrogène. On suppose dans les deux cas, pour simplifier, que l'orbite est circulaire. on donne :

- 1- La masse de la terre est $5.98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ et sa distance moyenne du soleil $1.49 \cdot 10^{11} \text{ m}$, la période de rotation de la terre autour du soleil est $3.16 \cdot 10^7 \text{ s}$.
- 2- La masse de l'électron est $9.11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$, sa distance moyenne du noyau est de $5.29 \cdot 10^{-11} \text{ m}$ et sa vitesse angulaire est de $4.13 \cdot 10^{16} \text{ rad/s}$.

3.4. Deux étoiles identiques, sphériques, de centres respectifs A et B sont immobiles dans un référentiel galiléen. Un corps M considéré ponctuel est placé, sans vitesse initiale, au point I milieu de $[AB]$ (figure ci-dessous).

- a- Montrer que la somme des forces gravitationnelles subies par M est nulle.
- b- On déplace légèrement M à partir de la position I jusqu'à la position J en le rapprochant de B et on le lâche sans vitesse initiale. Est-ce que M va se rapprocher à nouveau de I ou il va s'en éloigner ?
- c- Même question si on déplace légèrement M à partir de la position I jusqu'au point K sachant que $[IK]$ est perpendiculaire à $[IJ]$.



3.5. Un glaçon de masse $m = 10 \text{ g}$ glisse sur un plan incliné d'un angle $\alpha = 20^\circ$ par rapport à l'horizontale. Les frottements qui s'exercent sur le glaçon, ainsi que la poussée d'Archimède, sont négligeables par rapport aux autres forces.

- a- Déterminer les caractéristiques du vecteur accélération du centre d'inertie \mathbf{G} du glaçon le long du plan incliné (direction, sens et valeur).
- b- Déterminer les valeurs des forces s'exerçant sur le glaçon.

3.6. Une personne en fauteuil roulant voyage vers le haut d'un trottoir incliné. La masse totale de la personne et du fauteuil roulant est 65 kg . Le coefficient de frottement du trottoir a une valeur de $0,11$. Le degré d'inclinaison de la pente est 7° . La personne peut-elle s'arrêter et se reposer sans que le fauteuil commence à rouler vers le bas du trottoir ? Si non, calcule son accélération.

3.7. Un skieur d'une masse de 75 kg descend une pente qui a un angle d'inclinaison de 30° . Le coefficient de frottement entre les skis et la neige est $0,15$. Calcule la force de frottement nette, l'accélération du skieur, la vitesse du skieur après 8 secondes et la distance parcourue après 8 secondes.

Chapitre IV : Travail et énergie

Introduction :

Si on connaît les positions et la vitesse des particules d'un système et toutes les forces agissant sur ces particules, on peut prévoir, à l'aide des lois de Newton, l'évolution de ce système au cours du temps. Mais dans la pratique, on ne peut pas connaître toujours toutes les forces qui entrent en jeu et même si c'est le cas, les équations à résoudre sont trop nombreuses ou trop compliquées. Pour cette raison, en faisant appel à des nouvelles notions telles que « le travail et l'énergie ».

IV.1- Travail d'une force

IV.1.1- Force constante sur un déplacement rectiligne

Une force est dite constante lorsque la valeur, le sens et la direction de cette force ne changent pas au cours du temps.

Considérons un point mobile qui se déplace sur une trajectoire rectiligne en deux points A et B sous l'effet d'une force \vec{F} constante (Figure...). Le travail de la force \vec{F} sur le déplacement \overline{AB} est donné par :

$$W_{\vec{F}} = \vec{F} \cdot \overline{AB} = \|\vec{F}\| \cdot \|\overline{AB}\| \cdot \cos\alpha \dots \dots \dots (4.1)$$

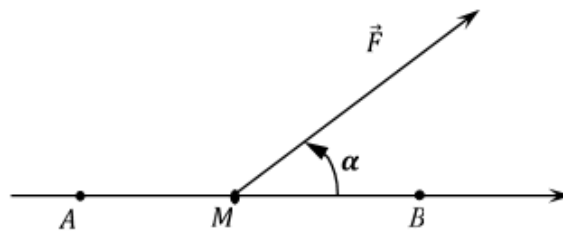


Figure 4.1 : Travail d'une force constante sur un déplacement rectiligne.

α est l'angle que fait la force \vec{F} avec \overline{AB} .

- Si $\alpha < \pi/2$: $W_{\vec{F}} > 0$ et le travail est dit moteur.
- Si $\alpha > \pi/2$: $W_{\vec{F}} < 0$ et le travail est dit résistant.
- Si $\alpha = 0$: $W_{\vec{F}} = 0$ la force \vec{F} ne travaille pas.

L'unité du travail dans le système MKSA est le Joule.

Remarque :

Dans le cas où le déplacement du M entre les points A et B se fait sous l'effet d'un ensemble de forces $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$:

$$W = \vec{F}_1 \cdot \vec{AB} + \vec{F}_2 \cdot \vec{AB} + \dots + \vec{F}_n \cdot \vec{AB} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \vec{AB} \dots \dots \dots (4.2)$$

IV.1.2- Force variable sur un déplacement quelconque :

Soit le point M se déplace sur une trajectoire quelconque sous l'effet d'une force \vec{F} qui varie au cours du temps. Pendant un intervalle de temps très court dt , le point M va de la position A à la position A', le déplacement étant $\vec{AA'} = \vec{dl}$. Le travail élémentaire effectué par la force \vec{F} pendant ce déplacement est donné par :

$$dW_{\vec{F}} = \vec{F} \cdot \vec{dl} \dots \dots \dots (3.3)$$

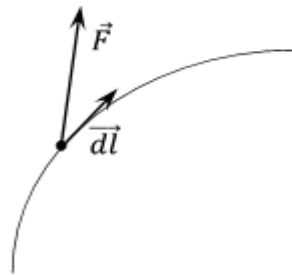


Figure 4.2 : Travail élémentaire d'une force

Le travail total sur le déplacement total \vec{AB} est donné donc par :

$$W_{\vec{F}} = \int_A^B \vec{F} \cdot \vec{dl} \dots \dots \dots (4.4)$$

IV.1.3- Puissance d'une force :

La puissance moyenne d'une force \vec{F} dans un intervalle de temps Δt est définie par :

$$P_{moy} = \frac{\Delta W}{\Delta t} \dots \dots \dots (4.5)$$

Ainsi, la puissance instantanée est obtenue en calculant la puissance moyenne pour un intervalle de temps plus courts.

$$P_{inst} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} P_{moy} = \frac{dW}{dt} \dots \dots \dots (4.6)$$

L'unité de la puissance en système MKSA est le *Watt* (W).

En remplaçant dW par son expression (relation 3.3), on trouve :

$$P_{inst} = \vec{F} \cdot \frac{\vec{dl}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{V} \dots \dots \dots (4.7)$$

\vec{V} représente la vitesse de déplacement.

IV.2- Energie :

IV.2.1- Energie cinétique :

Le principe fondamental de la dynamique, pour un point M de masse m , soumis à une force \vec{F} s'écrit :

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{V}}{dt} \Rightarrow F \cdot V dt = m \cdot V dV = d\left(\frac{1}{2}mV^2\right) \dots \dots \dots (4.8)$$

On appelle, par définition, énergie cinétique du point M la quantité :

$$E_C = \frac{1}{2}mV^2 \dots \dots \dots (3.9)$$

Autrement, le travail total de la force \vec{F} en déplaçant le point M de la position A à la position B :

$$W_{\vec{F}} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_A^B m \frac{d\vec{V}}{dt} \cdot d\vec{l} = \int_A^B m \vec{V} d\vec{V} = \frac{1}{2}mV_B^2 - \frac{1}{2}mV_A^2 \dots \dots \dots (4.10)$$

Où V_A et V_B représentent les vitesses du point M en positions A et B successivement.

L'expression (4.10) indique que quelle que soit la force \vec{F} et la trajectoire suivie par le mobile, la valeur du travail W effectué par la force \vec{F} est toujours égale à la différence de l'énergie cinétique à la fin et au début de la trajectoire.

Théorème :

Dans un référentiel galiléen, la variation d'énergie cinétique d'un point matériel soumis à un ensemble de forces extérieures entre une position A et une autre position B est égale à la somme des travaux de ces forces entre ces deux points :

$$\Delta E_C = E_C(B) - E_C(A) = \sum W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_{ext}) \dots \dots \dots (4.11)$$

IV.2.2- Energie potentielle :

a- Forces conservatives et non conservatives :

Une force est dite conservative (ou dérive d'un potentiel U) lorsque leur travail ne dépend pas du chemin suivi mais que du point de départ et du point d'arrivée.

Exemples

- Force de pesanteur.
- Force du poids.
- Force de rappel des ressorts.

Les forces sont dites non conservatives lorsque leur travail dépend du chemin suivi.

Exemple :

- Force de frottement.

b- Définition :

L'énergie potentielle d'un corps ou d'un système physique est l'énergie qui y est présente et qui a le potentiel de se transformer en énergie cinétique.

On définit, donc, l'énergie potentielle E_P comme étant la quantité d'énergie qu'il faut ajouter à l'énergie cinétique E_C pour que leur somme soit constante :

$$E_C + E_P = Cte \dots \dots \dots (4.12)$$

Il s'agit d'une énergie qui se stocke, elle provient de la déformation d'un système et peut se transformer en énergie cinétique. Elle n'a le sens que pour les forces conservatives dont le travail ne dépend pas du chemin suivi.

Pour un déplacement produisant une variation d'énergie cinétique ΔE_C , la variation correspondante d'énergie potentielle ΔE_P peut donner par :

$$\Delta E_P = E_P(B) - E_P(A) = -\Delta E_C = -W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_C) \dots \dots \dots (4.13)$$

Avec \vec{F}_C est une force conservative. D'où :

$$\Delta E_P = - \int_A^B \vec{F}_C \cdot \vec{dl} \dots \dots \dots (4.14)$$

A partir de l'équation (4.14) on peut écrire

$$dE_P = -\vec{F}_C \cdot \vec{dl} = -F_x dx - F_y dy - F_z dz \dots \dots \dots (4.15)$$

Tel que :

$$\vec{F}_C = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k} \text{ et } \vec{dl} = dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k}$$

D'autre part, en utilisant la notion de différentielle totale d'une fonction, on écrit :

$$dE_P = \frac{\partial E_P}{\partial x} dx + \frac{\partial E_P}{\partial y} dy + \frac{\partial E_P}{\partial z} dz \dots \dots \dots (4.16)$$

En remplaçant l'équation (4.16) dans (4.15) on obtient :

$$\frac{\partial E_P}{\partial x} dx + \frac{\partial E_P}{\partial y} dy + \frac{\partial E_P}{\partial z} dz = -F_x dx - F_y dy - F_z dz \dots \dots \dots (4.17)$$

D'où

$$\begin{cases} F_x = -\frac{\partial E_P}{\partial x} \\ F_y = -\frac{\partial E_P}{\partial y} \dots \dots \dots (4.18) \\ F_z = -\frac{\partial E_P}{\partial z} \end{cases}$$

Utilisant la notion du *gradient d'une fonction*, on trouve :

$$\vec{F}_C = -\overrightarrow{\text{grad}E_P} \dots \dots \dots (4.19)$$

c- Energie potentielle de la force de pesanteur :

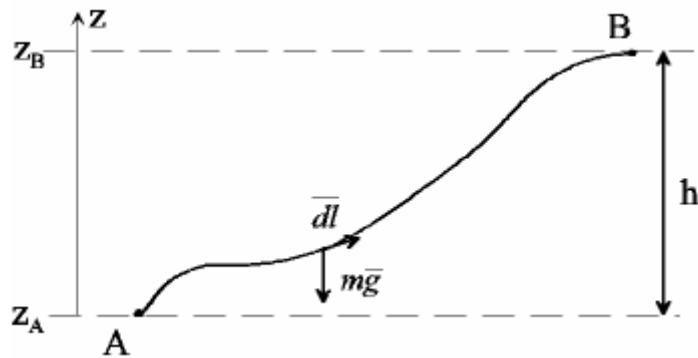


Figure 4.3 : représentation de la force de pesanteur

En utilisant l'équation (4.14), la différence d'énergie potentielle entre les points A et B , situés au voisinage de la terre (voir figure 3.3), est donnée par :

$$E_p(B) - E_p(A) = - \int_A^B m\vec{g} \cdot d\vec{l} = - \int_{Z_A}^{Z_B} (-mg) \cdot dz \dots \dots \dots (4.20)$$

On effectue, les coordonnées du vecteur $d\vec{l}$ sont :

$$d\vec{l} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$$

Et les coordonnées de vecteur \vec{g} sont :

$$\vec{g} = -g\vec{k}$$

On obtient

$$E_p(B) - E_p(A) = - \int_{Z_A}^{Z_B} (-mg) \cdot dz = mg(Z_B - Z_A) = mgh \dots \dots \dots (4.21)$$

Par conséquent, la différence d'énergie potentielle due à la force pesanteur est donnée par :

$$\Delta E_p = mgh \dots \dots \dots (4.22)$$

où h est la différence de hauteur entre les deux points considérés.

Donc, dans le cas de la force pesanteur, on choisit le plus souvent le niveau du sol comme niveau de référence, c.a.d : $E_p(sol) = 0$

Dès lors, à une hauteur h au-dessus du sol :

$$E_p(h) = mgh \dots \dots \dots (4.23)$$

d- Energie Potentielle d'une force élastique :

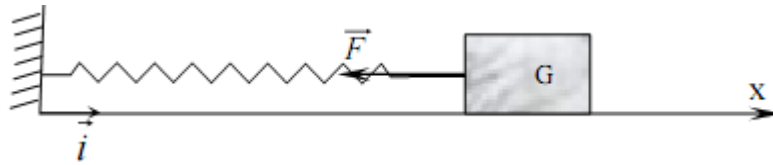


Figure 4.4 : force élastique

La force élastique est définie par :

$$\vec{F} = -kx\vec{i} \dots \dots \dots (4.24)$$

Avec k est constante d'élasticité de ressort.

De l'équation (4.19) on écrit :

$$-kx\vec{i} = -\frac{\partial E_p}{\partial x}\vec{i} \dots \dots \dots (3.25)$$

D'où

$$dE_p = kxdx \dots \dots \dots (3.26)$$

Donc

$$E_p = \int kxdx = \frac{1}{2}kx^2 + Cte \dots \dots \dots (4.27)$$

e- Energie Potentielle d'une force gravitationnelle :



Figure 3.5 : force gravitationnelle.

La force gravitationnelle est donnée, en coordonnées polaires, par :

$$\vec{F}_g(r) = -\frac{GMm}{r^2}\vec{u}_r \dots \dots \dots (4.28)$$

D'autre part, on a :

$$\vec{F}_g(r) = -\overrightarrow{\text{grad}}E_P \Rightarrow -\frac{GMm}{r^2}\vec{u}_r = -\frac{dE_P}{dr}\vec{u}_r \dots \dots \dots (4.29)$$

D'où

$$dE_P = \frac{GMm}{r^2} dr \dots \dots \dots (4.30)$$

En intégrant par rapport à r , on trouve :

$$E_P(r) = -\frac{GMm}{r} + Cte \dots \dots \dots (4.31)$$

IV.2.3- Energie mécanique :

Soit un système se déplaçant, entre les points A et B sous l'effet de forces conservatives et non conservatives. D'après le théorème de l'énergie cinétique, on a :

$$E_C(B) - E_C(A) = \sum W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_C) + \sum W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_{NC}) \dots \dots \dots (4.32)$$

\vec{F}_C représente l'ensemble des forces conservatives et \vec{F}_{NC} l'ensemble des forces non conservatives.

On sait que :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_C) = -(E_P(B) - E_P(A)) \dots \dots \dots (4.33)$$

On obtient alors :

$$(E_C(B) + E_P(B)) - (E_C(A) + E_P(A)) = \sum W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_{NC}) \dots \dots \dots (4.34)$$

La quantité $E_C + E_P$ est appelée *énergie mécanique* du système, qu'on désigne par E ; autrement dit, l'énergie totale d'une particule ou d'un système est égale à la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle.

Théorème :

La variation de l'énergie mécanique d'un système, en mouvement entre deux points A et B, est égale à la somme des travaux des forces extérieures non conservatives appliquées à ce système.

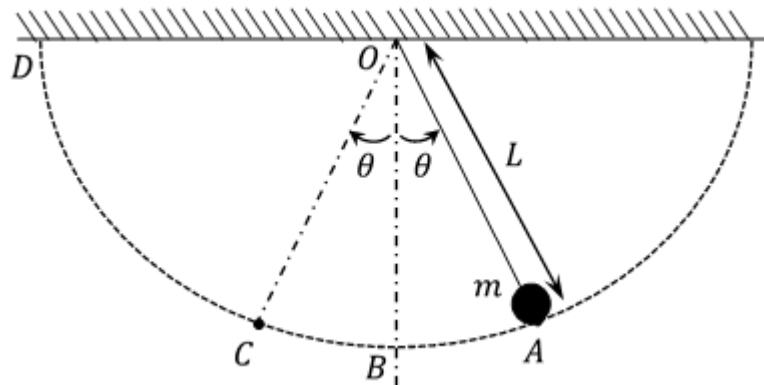
$$E(B) - E(A) = \sum W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_{NC}) \dots \dots \dots (4.35)$$

Cependant, si les forces extérieures appliquées sont conservatives, l'énergie totale dans ce cas-là est constante. Autrement dit, l'énergie totale est conservée.

$$\Delta E = 0 \dots \dots \dots (4.36)$$

IV.3. Exercices :

- 4.1.** Une force $F = 6t$ (N) agit sur une particule de masse $2kg$. La particule étant immobile au départ. Trouver le travail effectué par la force pendant les deux premières secondes [7].
- 4.2.** Une masse de $2kg$ attachée à un fil d'un mètre de long est écartée de la verticale d'un angle de 30° , puis lâchée. Trouver sa vitesse quand le fil fait un angle de 10° avec la verticale, de même côté et du côté opposé.
- 4.3.** Un petit objet de masse m , modélisé par un point, est pendu au bout d'un fil inextensible de longueur L dont l'autre extrémité est fixée à un support (la figure ci-dessous). L'étude est faite dans le référentiel terrestre. L'angle initial correspond à la position A de la figure est $\theta = 20^\circ$, la longueur $L = 50\text{ cm}$.
 - a.** Tracer le bilan des forces qui s'exercent sur l'objet.
 - b.** On lâche l'objet du point A. En utilisant le théorème de l'énergie cinétique, exprimé sa vitesse V_B au point B en fonction de g, L et θ , puis la calculer.
 - c.** Quelle est sa vitesse au point C symétrie au point A par rapport à OB ?
 - d.** On lance maintenant l'objet du point A avec une vitesse \vec{V}_A tangente au cercle, vers la gauche. Exprimer la valeur minimale de la norme V_A pour que l'objet aille jusqu'au point en fonction de g, L et θ , puis la calculer.



Bibliographie

- [1]. *J. N. Baléo et al* Méthodes et outils pour les expérimentations scientifiques. Editions Tec et Doc / Lavoisier, 2003.
- [2]. *Bureau international des poids et mesures*, « Le Système international d'unités » 8^e édition 2006, ISBN 92-822-2213-6.
- [3]. *A. Gibaud, M. Henry*, « Cours de Physique - Mécanique du point, 2^e édition » Dunod, Paris, 2019.
- [4]. *M. Bertin, J.P. Faroux, J. Renault*, « Mécanique 1 – mécanique classique des systèmes de points et notions de relativité » 3^eédition, Dunod, Paris, 1985.
- [5]. *N. Boukli-Hacene*, « Polycopié : Cinématique et dynamique du point matériel (Cours et exercices corrigés) » École Normale Supérieure d'Oran (ENSO), 2019
- [6]. *J.L. Coubarrere, H. Djelouah, F.Z. Khelladi*, « Introduction à la mécanique : cours, exercices et travaux pratique ». Office des publications universitaires, 2001.
- [7]. *M. Alonso, E.J. Finn*, « Physique générale1 : Mécanique et Thermodynamique, 2^e édition », InterEdition, paris, 1984