

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DJILALI BOUNAAMA KHEMIS MILIANA
FACULTE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE
DEPARTEMENT DE TECHNOLOGIE



POLYCOPIÉ DE :

COURS DE RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX

Destiné aux étudiants de 2^{ème} Licence Génie CIVIL

Réalisé par

Docteur

Omar KOUIDER DJELLOUL



Année universitaire : 2020 /2021

PREFACE

La Résistance des Matériaux est l'une des disciplines fondamentales de l'ingénieur. Elle joue un rôle de premier plan dans la formation des ingénieurs et techniciens de presque toutes les spécialités et a une importance particulièrement grande pour les ingénieurs en mécanique, en construction de machines et en génie civil.

Dans la présent polycopié intitulé "Résistance des Matériaux", qui s'adresse aux étudiants de deuxième année *LMD* en Génie Civil. Il est rédigé de manière simplifiée et quelques exemples sont introduits après avoir donné des notions afin que l'étudiant puisse assimiler le contenu du cours et son application dans la vie courante.

Dans ce manuel, on montre en détail le dimensionnement des éléments d'une structure soumis aux sollicitations simples de sorte à permettre à l'étudiant de dimensionner tous types d'éléments de structures isostatiques simples réalisés en bois, en acier ou en béton. Des exercices sont accompagnés à la fin de chaque chapitre sans solutions pour que l'étudiant s'y entraîne.

Ce polycopié est divisé en six chapitres selon le programme de la deuxième année *LMD*. Le contenu du premier chapitre concerne une introduction générale à la résistance des matériaux. Le chapitre suivant est basé sur le calcul des caractéristiques géométriques des sections droites. Au chapitre 3^{ème} on s'intéresse à l'étude la sollicitation de traction ou compression simple. En 4^{ème} chapitre, on dimensionne des poutres droites isostatiques sollicitées en flexion simples. Le chapitre 5, est consacré à l'étude de cisaillement. Enfin, en 6^{ème} chapitre, on traite le dimensionnement des barres soumises à la torsion pure.



TABLE DES MATIERES

| | |
|---|----|
| Préface | 2 |
| Table des matières | 3 |
| Liste des figures | 7 |
| Liste des tableaux..... | 1 |
| Chapitre 1 : Introduction et généralités | |
| 1.1 Définition et buts | 12 |
| 1.2 Hypothèses de la résistance des matériaux | 14 |
| 1.2.1 Hypothèses sur le matériau..... | 14 |
| 1.2.2 L'élasticité et la linéarité du matériau..... | 14 |
| 1.2.3 Hypothèses sur les déformations | 14 |
| 1.2.4 Hypothèses des sections planes (hypothèse de Navier Navier-Bernoulli) | 15 |
| 1.2.5 Hypothèse de Barré de Saint-Venant..... | 15 |
| 1.3 Différents types de chargements | 16 |
| 1.3.1 Forces de volume | 16 |
| 1.3.2 Forces de surface..... | 16 |
| 1.3.3 Forces réparties..... | 16 |
| 1.3.4 Forces concentrées | 16 |
| 1.4 Réaction d'appui (Efforts de liaison)..... | 16 |
| 1.4.1 Appui simple..... | 16 |
| 1.4.2 Appui double..... | 17 |
| 1.4.3 Encastrement..... | 17 |
| 1.5 Sollicitation dans une section (efforts internes)..... | 18 |
| 1.5.1 Effort normal | 18 |
| 1.5.2 Effort tranchants | 19 |
| 1.5.3 Moment de torsion | 19 |



| | |
|---|----|
| 1.5.4 Moments fléchissant | 20 |
| 1.6 Méthode des sections | 20 |
| 1.7 Convention de signe des axes | 21 |
| 1.8 Unités | 21 |
| Chapitre 2 : Caractéristiques géométriques des sections droites | |
| 2.1 Définition | 23 |
| 2.2 Centre de gravité..... | 23 |
| 2.3 Moments statiques | 24 |
| 2.4 Moments quadratiques (moments d'inertie des sections) | 25 |
| 2.5 Moment d'inertie polaire | 26 |
| 2.6 Produit d'inertie (moment d'inertie centrifuge) | 27 |
| 2.7 Formule de Transformation des moments d'inertie..... | 28 |
| 2.7.1 Translation d'axes..... | 28 |
| 2.7.2 Rotation d'axes | 30 |
| 2.8 Moments d'inertie principaux..... | 31 |
| 2.9 Représentation géométrique des moments d'inertie (cercle de Mohr) | 31 |
| 2.9.1 Problème direct..... | 31 |
| 2.9.2 Problème indirect..... | 32 |
| Exercices | 33 |
| Chapitre 3 : Traction et compression simples | |
| 3.1 Introduction..... | 37 |
| 3.2 Définition | 37 |
| 3.3 Contrainte normale | 37 |
| 3.4 Diagramme contrainte-déformation (Loi de Hooke) | 39 |
| 3.5 Déformation élastique..... | 40 |
| 3.6 Sollicitations dues à la variation de température | 41 |
| 3.7 Systèmes de barres isostatiques | 43 |



| | |
|--|----|
| 3.8 Systèmes de barres hyperstatiques..... | 44 |
| 3.9 Condition de résistance | 47 |
| Exercices | 48 |

Chapitre 4 : Flexion simple

| | |
|---|----|
| 4.1 Définitions et hypothèses..... | 53 |
| 4.2 Efforts tranchants, moments fléchissants..... | 54 |
| 4.3 Diagrammes des Efforts tranchants et des moments fléchissants..... | 55 |
| 4.3.1 Les zones efforts internes dans une poutre | 55 |
| 4.3.2 Construction des diagrammes des efforts internes d'une poutre | 56 |
| 4.4 Relations différentielles entre les charges et les efforts..... | 59 |
| 4.5 Contraintes normales en flexion plane..... | 60 |
| 4.6 Calcul de résistance en flexion | 63 |
| 4.7 Contraintes tangentielles en flexion | 65 |
| 4.8 Calcul de résistance en flexion simple | 69 |
| 4.9 Déformée d'une poutre soumise à la flexion simple (notion de la flèche) | 69 |
| 4.9.1 Equation différentielle de la ligne élastique | 69 |
| 4.9.2 Méthode d'intégration directe..... | 71 |
| Exercices | 72 |

Chapitre 5 : Cisaillement

| | |
|--|----|
| 5.1 Définition | 76 |
| 5.2 Contrainte de cisaillement | 76 |
| 5.3 Déformation élastique en cisaillement | 78 |
| 5.4 Etat de cisaillement pur..... | 80 |
| 5.5 Condition de résistance au cisaillement..... | 81 |
| Exercices | 82 |

Chapitre 6 : Torsion

| | |
|---------------------|----|
| 6.1 Définition..... | 87 |
|---------------------|----|



| | |
|---|----|
| 6.2 Convention de signe et Diagramme du moment de torsion..... | 88 |
| 6.3 Contraintes et déformation | 88 |
| 6.4 Torsion d'une barre à section transversale non circulaire | 93 |
| 6.5 Calcul de résistance à la torsion | 94 |
| Exercices | 95 |
| Références bibliographiques | 98 |



LISTE DES FIGURES

| | | |
|---------------|--|----|
| Figure 1.1 : | Principe de la résistance des matériaux | 13 |
| Figure 1.2 : | Poutre droite déformée | 14 |
| Figure 1.3 : | Schématisation de l'hypothèse de Navier - Bernoulli | 15 |
| Figure 1.4 : | Schématisation de l'hypothèse de Barré de Saint-Venant | 15 |
| Figure 1.5 : | Appui simple | 16 |
| Figure 1.6 : | Appui double | 17 |
| Figure 1.7 : | Encastrement | 17 |
| Figure 1.8 : | Notion de coupure | 18 |
| Figure 1.9 : | Traction/compression | 18 |
| Figure 1.10 : | Cisaillement pur | 19 |
| Figure 1.11 : | Torsion d'une barre circulaire | 19 |
| Figure 1.12 : | Flexion pure | 20 |
| Figure 1.13 : | Convention de signe | 20 |
| Figure 1.14 : | Convention de signe des axes | 21 |
| Figure 2.1 : | Coordonnées du centre de gravité | 23 |
| Figure 2.2 : | Discretisation d'une section | 24 |
| Figure 2.3 : | Degré de résistance d'une section | 26 |
| Figure 2.4 : | Moment d'inertie polaire | 26 |
| Figure 2.5 : | Moment polaire d'un cercle | 27 |
| Figure 2.6 : | Moment d'inertie d'une section et translation des axes | 28 |
| Figure 2.7 : | Moment d'inertie d'une section et rotation des axes | |
| Figure 2.8 : | Cercle de Mohr | |



| | | |
|---------------|---|----|
| Figure 3.1 : | Barre en traction | 37 |
| Figure 3.2 : | Barre encastrée sollicitée en traction | 38 |
| Figure 3.3 : | Courbe contrainte - déformation de traction | 39 |
| Figure 3.4 : | Déformation linéaire | 40 |
| Figure 3.5 : | Barre composée de plusieurs tronçons | 41 |
| Figure 3.6 : | Déformation due à la température | 42 |
| Figure 3.7 : | Système de barre isostatique | 43 |
| Figure 3.8 : | Système de barre hyperstatique | 44 |
| Figure 4.1 : | Exemple d'une poutre soumise à la flexion | 53 |
| Figure 4.2 : | Exemple illustratif d'une poutre sollicitée en flexion simple | 54 |
| Figure 4.3 : | Conventions de signe | 54 |
| Figure 4.4 : | Zones efforts internes dans une poutre | 55 |
| Figure 4.5 : | Diagrammes des Efforts tranchants et des moments fléchissants | 58 |
| Figure 4.6 : | Elément de poutre isolé chargé par une force uniformément répartie | 59 |
| Figure 4.7 : | Contrainte dans une fibre déformée | 60 |
| Figure 4.8 : | Distribution des contraintes dans une section ayant un axe de symétrie horizontal | 62 |
| Figure 4.9 : | Distribution des contraintes dans une section n'ayant pas un axe de symétrie horizontal | 62 |
| Figure 4.10 : | Poutre simplement appui avec une section droite symétrie | 63 |
| Figure 4.11 : | Poutre simplement appui avec une section droite non symétrique | 64 |
| Figure 4.12 : | Distribution des contraintes | 65 |
| Figure 4.13 : | Distribution des contraintes tangentielles | 65 |
| Figure 4.14 : | Calcul des contraintes tangentielles | 66 |



| | | |
|---------------|---|----|
| Figure 4.15 : | Contraintes tangentielles pour section rectangulaire | 68 |
| Figure 4.16 : | Exemples de distribution des contraintes tangentielles dans une section de poutre en flexion simple | 68 |
| Figure 4.17 : | Poutre déformée | 70 |
| Figure 5.1 : | Découpage d'une tôle | 76 |
| Figure 5.2 : | Système soumis à un effort tranchant | 77 |
| Figure 5.3 : | Force de cisaillement en un point d'une section | 77 |
| Figure 5.4 : | Avant sollicitation | 79 |
| Figure 5.5 : | Pendant la sollicitation en cisaillement | 79 |
| Figure 5.6 : | Etat de contrainte de cisaillement pur | 80 |
| Figure 6.1 : | Exemple d'une barre soumise à la torsion | 87 |
| Figure 6.2 : | Les Efforts internes | 87 |
| Figure 6.3 : | Convention de signe | 88 |
| Figure 6.4 : | Déformation de la barre | 88 |
| Figure 6.5 : | Elément d'une barre soumise à la torsion | 89 |
| Figure 6.6 : | Force de cisaillement en un point d'une section | 90 |
| Figure 6.7 : | Distribution des contraintes de cisaillement dans une section soumise à la torsion | 91 |
| Figure 6.8 : | Contrainte de cisaillement dans une section non circulaire | 98 |



LISTE DES TABLEAUX

Tableau 1.1: Les unités

21

Tableau 6.1: Valeurs des coefficients α , β et η en fonction du rapport h/b



CHAPITRE 1 :

INTRODUCTION ET GÉNÉRALITÉS

CHAPITRE 1 : INTRODUCTION ET GÉNÉRALITÉS

1.1 Définition et buts

La résistance des matériaux ou mécanique des matériaux est une branche de la mécanique appliquée servant à étudier le comportement des corps solides sous l'action des différents types de charges. Elle permet de définir les formes, les dimensions et les matériaux des pièces mécaniques de façon à maîtriser leurs résistances, leurs déformations tout en optimisant leurs coûts.

Pour réaliser un calcul de résistance des matériaux, nous avons besoin de connaître les actions extérieures est caractérisée par les différents types de forces connues agissant sur une structure ou un élément de structure défini par ses caractéristiques géométriques et mécaniques. Pour une structure isostatique, les efforts internes sont déterminés directement en utilisant les équations de la statique. Par contre pour une structure hyperstatique, il est nécessaire de faire intervenir les déformations de la structure pour déterminer les réactions. L'effort interne qui agit au niveau d'une section d'un élément de structure peut être décomposé en effort normal de traction ou de compression, effort tranchant, moment de torsion, moment fléchissant ou une combinaison de ces sollicitations. A partir de ces efforts internes, nous pouvons obtenir des informations sur la répartition des contraintes et des déformations dans la section droite. Les valeurs extrêmes de ces contraintes et des déformations sont les mesures de base des critères de résistance, de rigidité ou de stabilité pour vérifier ou dimensionner les éléments des structures (Figure 1.1).

Les limites de la résistance des matériaux sont celles imposées par ses hypothèses mêmes. Les disciplines connexes telles que la théorie d'élasticité, de la plasticité ou la méthode des éléments finis se libèrent de certaines de ces contraintes.

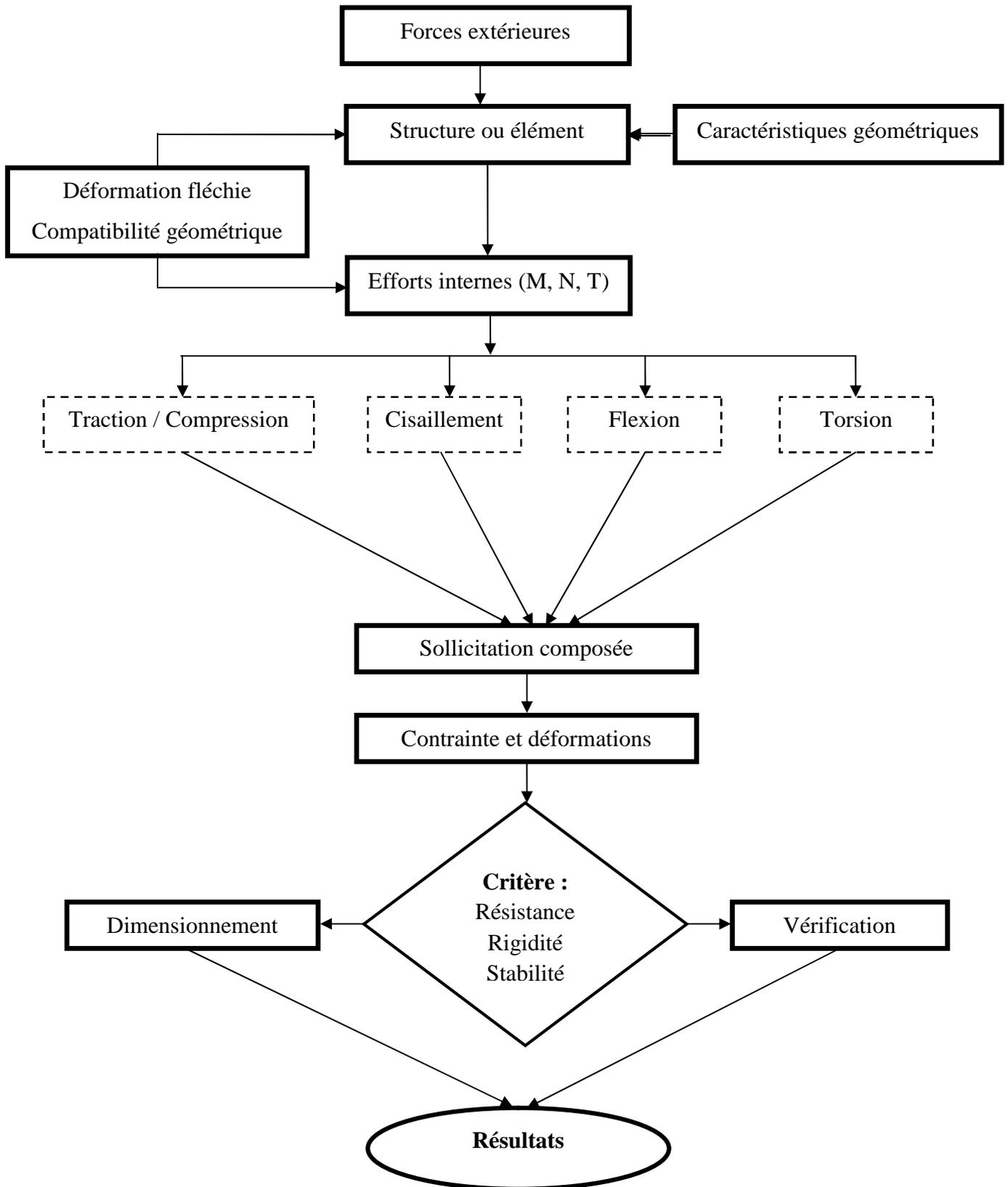


Figure 1.1 : Principe de la résistance des matériaux.

1.2 Hypothèses de la résistance des matériaux

Pour faire une étude de résistance des matériaux, nous avons besoin de faire des hypothèses simplificatrices. Une fois que ces hypothèses sont définies, nous pouvons nous lancer dans l'étude. Les principales hypothèses de la résistance des matériaux sont les suivantes :

1.2.1 Hypothèses sur le matériau

- **Continuité** : La matière est supposée continue, c.-à-d. que les distances entre les molécules sont toujours très petites; à l'échelle de la RDM, alors la matière apparaît continue.
- **Homogénéité** : On admettra que tous les éléments du matériau, aussi petits soient-ils, ont une structure identique. Ses propriétés sont identiques en chaque point.
- **Isotropie** : On admettra, qu'en tous les points et dans toutes les directions autour de ces points, les matériaux possèdent les mêmes propriétés élastiques.

1.2.2 L'élasticité et la linéarité du matériau

On suppose admet qu'en chaque point contraintes et déformations sont proportionnelles et qu'après déformation, l'élément revient à son état initiale.

1.2.3 Hypothèses sur les déformations

On fera l'hypothèse que les déformations sont petites par rapport à toutes les dimensions de l'élément (poutre, par exemple). Ainsi, on assimilera la géométrie en configuration déformée à la géométrie en configuration non déformée (Figure 1.2). Les efforts sont donc considérés invariants en dépit de la déformation des poutres.

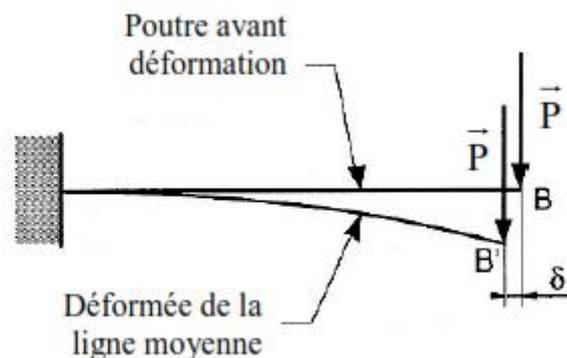


Figure 1.2 : Poutre droite déformée.

1.2.4 Hypothèses des sections planes (hypothèse de Navier Navier-Bernoulli)

Les sections planes, normales aux fibres avant déformation restent planes et normales aux fibres après déformation (Figure 1.3).

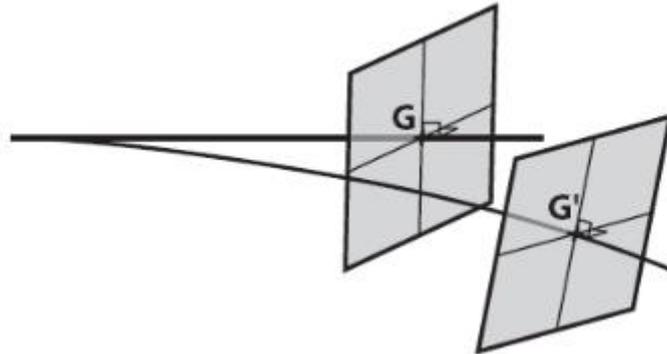


Figure 1.3 : Schématisation de l'hypothèse de Navier - Bernoulli.

1.2.5 Hypothèse de Barré de Saint-Venant

On fera l'hypothèse que les résultats de calculs seront valables loin des points d'application des charges.

L'état des sollicitations dans une région suffisamment éloignée des points d'application des charges extérieures appliquées à la poutre ne dépend donc que du torseur associé à ces charges (Figure 1.4).

Ces hypothèses simplificatrices conduisent à des solutions approchées qui permettent en générale une bonne approximation du comportement des structures soumises à différents types de charges.

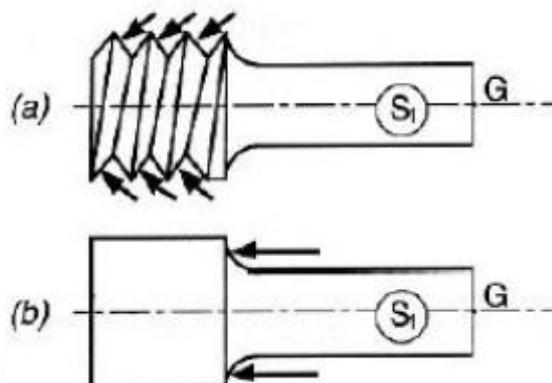


Figure 1.4 : Schématisation de l'hypothèse de Barré de Saint-Venant.

1.3 Différents types de chargements

L'action des corps voisins sur un corps considéré est remplacée par des forces extérieures ou sollicitations qui sont des forces actives (sollicitations) et des forces réactives (réactions des appuis). L'action totale de toutes les forces (actives et réactives) doit assurer l'équilibre du corps. On classe les forces extérieures comme suit :

1.3.1 Forces de volume

Sont réparties dans le volume du corps et appliquées à chacune de ses particules, par exemple, la force de la pesanteur, les forces d'attraction magnétique etc.....

1.3.2 Forces de surface

Appliquées aux éléments de surface et caractérisent l'interaction directe de contact de l'objet considéré avec le corps environnant.

1.3.3 Forces réparties

Sont réparties avec une densité donnée (poids propre d'une structure).

1.3.4 Forces concentrées

Sont des charges concentrées en certain nombre de points.

1.4 Réaction d'appui (Efforts de liaison)

Une structure est reliée au monde extérieur par un certain nombre de liaisons. Une liaison impose des conditions cinématiques en un point. Pour maintenir ces liaisons, il faut exercer des efforts de liaison qui sont des inconnues du problème.

Les liaisons dans le plan sont de trois (03) sortes :

1.4.1 Appui simple

Ce type d'appui matérialisé par la Figure 1.5, laisse à la structure toute liberté de pivoter autour de O (extrémité de la poutre) et de se déplacer perpendiculairement à la droite joignant les points de contact. Si on néglige les frottements, la réaction d'appui est dans la direction de la droite précitée, et introduit une seule inconnue dans l'étude de la poutre.

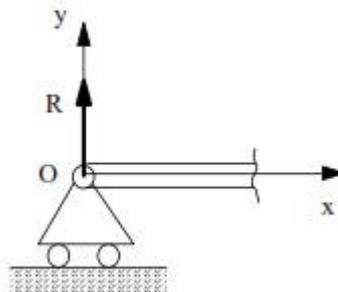


Figure 1.5 : Appui simple.

1.4.2 Appui double

Matérialisé par une rotule (Figure 1.6), cet appui autorise les rotations d'une extrémité de la poutre ou d'un des éléments constituant la structure. La direction de la réaction R est inconnue, mais la ligne d'action passe par le centre de l'articulation.

L'articulation introduit deux (02) inconnues, par exemple les projections sur deux directions du plan moyen.

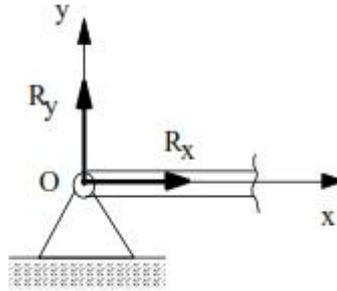


Figure 1.6 : Appui double.

1.4.3 Encastrement

L'encastrement schématisé sur la Figure 1.7 interdit tout déplacement de la section droite de l'appui. Sa réaction est une force de densité variable répartie sur toute l'étendue de la section. En vertu du principe de Saint Venant, ces forces peuvent être remplacées par leur résultante générale R , et leur moment M rapportés au centre de gravité G . Ce type d'appui introduit donc trois (03) inconnues, les deux projections de R sur deux axes du plan moyen et l'intensité du moment M qui est perpendiculaire au plan moyen.

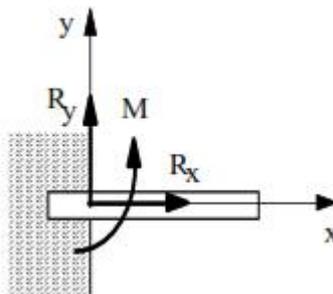


Figure 1.7 : Encastrement.

1.5 Sollicitation dans une section (efforts internes)

Sous l'effet des forces extérieures connues sur une structure donnée, les forces entre les particules d'un corps (élément) en équilibre varient. En résistance des matériaux, on appelle souvent cette variation des forces *efforts internes*.

Afin de faciliter l'étude des efforts exercés sur chaque particule matérielle on considère une section transversale d'un élément soumise à une sollicitation (Figure 1.8). Tout comme n'importe quel système de forces, les efforts intérieurs répartis sur toute la section peuvent être rapportés à un point (par exemple le centre de gravité de la section), et de ce fait on distingue le vecteur force F (N , T_Y , T_Z) et le vecteur moment M (M_X , M_Y , M_Z) résultant des forces intérieures dans la section. Il convient d'adopter les dénominations suivantes pour les forces et moments agissant dans une section.

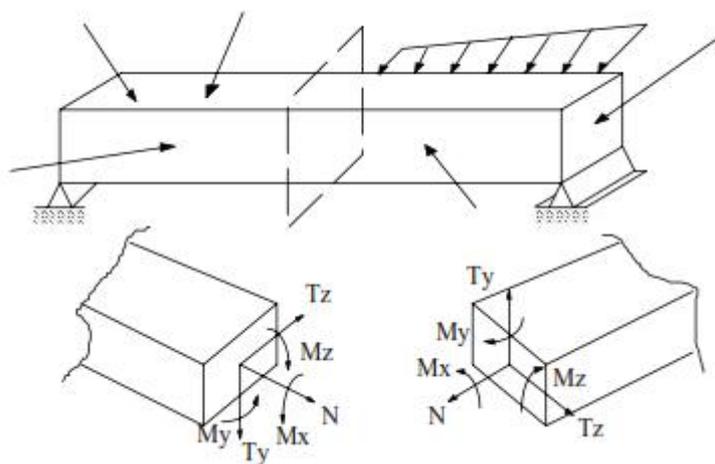
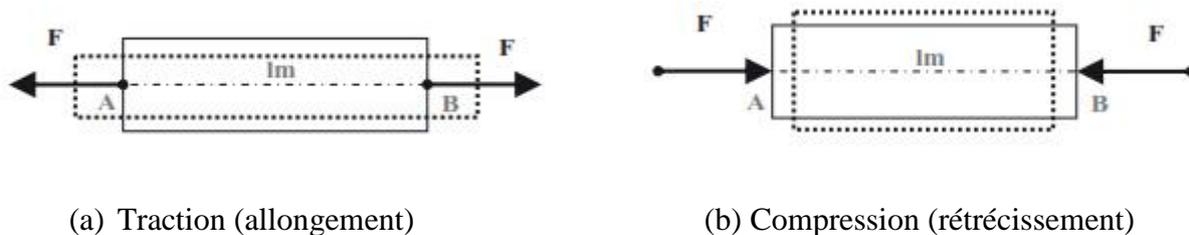


Figure 1.8 : Notion de coupure.

1.5.1 Effort normal

La composante N de la résultante F représente la somme des projections de toutes les forces intérieures agissant suivant la normale de la section (ou suivant l'axe longitudinal de l'élément). L'effort normal provoque une déformation longitudinale de l'élément. N est considéré positif s'il s'agit d'une traction et négatif dans le cas contraire (Figure 1.9).



(a) Traction (allongement)

(b) Compression (rétrécissement)

Figure 1.9 : Traction/compression.

1.5.2 Effort tranchants

Les forces transversales T_Y et T_Z sont les sommes des projections de toutes les forces intérieures dans la section sur les axes centraux principaux de cette dernière. Cette efforts tranchants provoquent le cisaillement des bords de la section respectivement dans la direction des axes Z et Y (Figure 1.10). Le sens de T sur le plan est positif par convention quand il tend à faire tourner un élément entre deux sections dans le sens des aiguilles d'une montre.

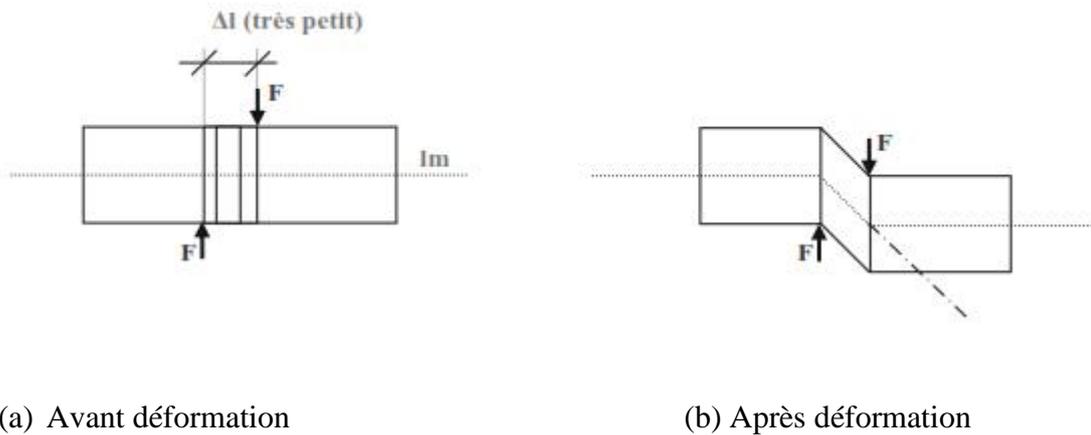


Figure 1.10 : Cisaillement pur.

1.5.3 Moment de torsion

Le moment de torsion M_X (ou M_t) est la somme des moments de toutes les forces intérieures dans la section par rapport à l'axe de la barre X (Figure 1.11). Le moment de torsion est positif lorsqu'il tend à tourner la section dans le sens inverse des aiguilles d'une montre (sens trigonométrique) en regardant la section du côté de la normale extérieure.



Figure 1.11 : Torsion d'une barre circulaire.

1.5.4 Moments fléchissant

Les composantes M_Y et M_Z du vecteur moment résultant représentent les sommes des moments de toutes les forces intérieures dans la section, par rapport aux axes d'inertie principaux de cette dernière Y et Z respectivement (Figure 1.12). Le sens positif des moments dans le plan qui par convention tend les fibres intérieures et comprime les fibres supérieures de la section.

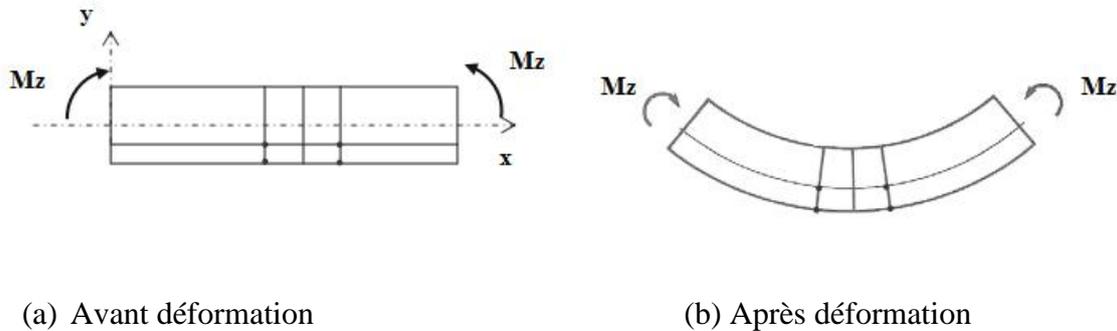


Figure 1.12 : Flexion pure.

1.6 Méthode des sections

Pour déterminer les forces intérieures qui apparaissent dans un élément soumis à une sollicitation, on se sert, en résistance des matériaux, de la méthode *des sections*.

Cette méthode est basée sur le fait que si un élément est en équilibre, sous l'action des forces extérieures, alors n'importe quelle partie de cet élément sous l'action des forces qui lui sont appliquées, est équilibre par un système de forces intérieures agissant dans la section.

On considère l'élément AB plan, soumis à l'action d'un système de forces extérieures (Figure 1.13). Pour calculer les efforts et moments dans n'importe quelle section, on coupe à l'endroit voulu l'élément AB en deux parties. Les valeurs numériques des efforts N, T, et M sont égaux aux sommes algébriques des projections et des moments des forces extérieures agissant sur une des parties (gauches ou droite) de l'élément sélectionné, généralement sur celle où les projections et moments se calculent plus facilement.

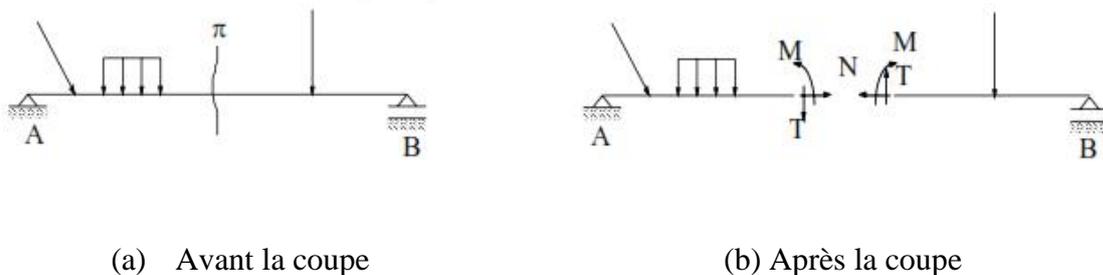


Figure 1.13 : Convention de signe.

1.7 Convention de signe des axes

Généralement on utilise le système Cartésien ou rectangulaire pour toutes les structures. Cependant, pour les structures en arc, le système polaire s'avère plus pratique. Le premier ayant les axes OX, OY, OZ mutuellement perpendiculaire. Les sens positifs des ses axes obéissent à la règle de la main droite. Comme indiqué ci-dessous (Figure 1.14), on choisit les sens positifs de deux axes X et Y par exemple, le sens positif de l'axes Z est suivant la direction d'un vis tournant de l'axe X vers l'axe Y.

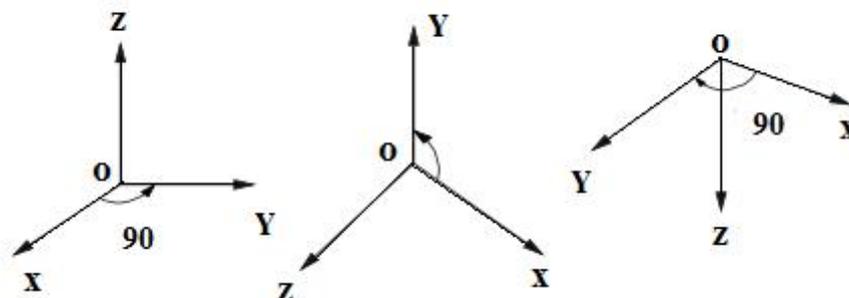


Figure 1.14 : Convention de signe des axes.

1.8 Unités

Les unités de mesure utilisées sont principalement celles du système d'unités international (SI) ; pour des raisons de commodité le système d'unités technique (MKS) est parfois utilisé.

Tableau 1.1 : Les unités

| Unité | SI | MKS |
|-----------------------|-------------------|---|
| Longueur (le mètre) | m | m |
| Masse (le kilogramme) | kg | kgf = 10 N |
| Temps (la seconde) | s | s |
| Force (le Newton) | N , kN | t = 10 ³ kgf = 10 ⁴ N |
| Contrainte | N/mm ² | 1 bar = kgf/cm ² = 0,1 N/mm ² |
| Travail (Joule) | J = N.m | Kgf.m = 10 J |

CHAPITRE 2 :
CARACTÉRISTIQUES GÉOMÉTRIQUES
DES SECTIONS DROITES

CHAPITRE 2 :

CARACTÉRISTIQUES GÉOMÉTRIQUES DES SECTIONS DROITES

2.1 Définition

La variété des formes des sections transversales des éléments utilisés dans les constructions n'est pas un fait du hasard. Dans la plupart des cas ces formes ont été développées pour répondre à des critères de résistance, de rigidité ou de stabilité. Nous allons nous intéresser dans le présent chapitre étudier les principales caractéristiques des sections planes, leurs méthodes de calcul et leur propriétés vis à vis les différents cas de sollicitation.

2.2 Centre de gravité

On appelle centre de gravité d'une section le point à travers lequel si on applique une force, elle résulte en une pression uniforme sur toute la section. Les coordonnées du centre de gravité G (Y_G , Z_G) d'une section homogène (S) (Figure 2.1) sont données par les relations :

$$Y_G = \frac{1}{S} \iint_S y ds \quad (2.1)$$

$$Z_G = \frac{1}{S} \iint_S z ds \quad (2.2)$$

y et z étant les coordonnées de l'aire élémentaire ds.

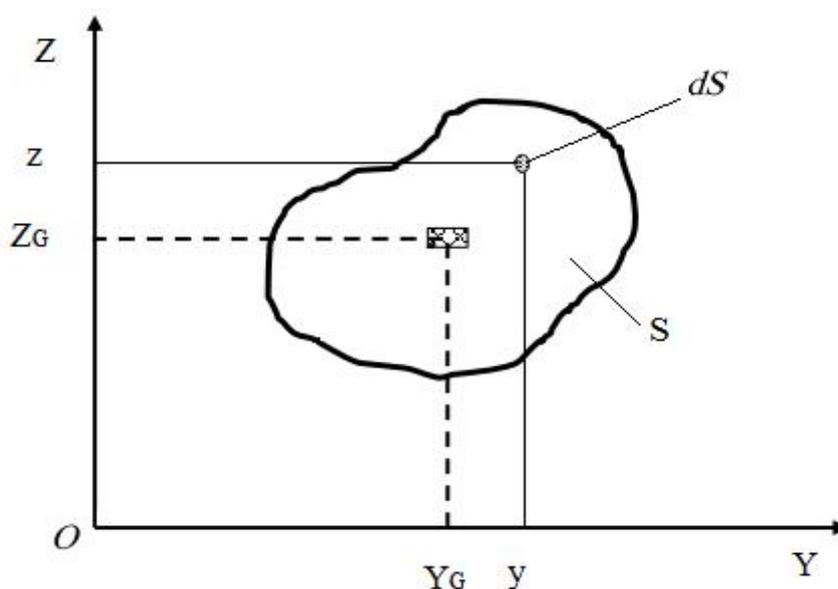


Figure 2.1 : Coordonnées du centre de gravité.

Ces intégrales peuvent être évaluées analytiquement si le contour de la section est exprimé par des expressions mathématiques simples. Si par contre le contour est une courbe irrégulière, on procède dans ce cas par les méthodes numériques. La méthode la plus simple consiste à discrétiser la section en éléments de surface S_i et faire la sommation comme suit :

$$Y_G = \frac{\sum y_i s_i}{\sum s_i} \quad (2.3)$$

$$Z_G = \frac{\sum z_i s_i}{\sum s_i} \quad (2.4)$$

Les termes S_i sont les aires des parties composant la section, et les termes y_i, z_i sont les distances respectives de leurs centre de gravité.

Les expressions (2.3) et (2.4) tendent vers les solutions exactes quand les s_i couvrent complètement l'aire de la section.

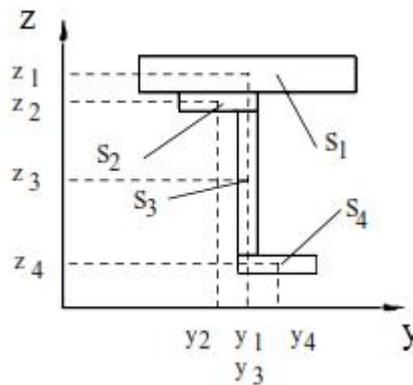


Figure 2.2 : Discrétisation d'une section.

2.3 Moments statiques

On considère l'aire d'une section (S) dans le plan défini par le système d'axe YOZ (Figure 2.1). On appelle les moments statiques de l'aire (S) par rapport aux axes OY et OZ les quantités :

$$S_y = \int_S z ds \quad (2.5)$$

$$S_z = \int_S y ds \quad (2.6)$$

Par analogie avec le moment d'une force par rapport à un axe quelconque, le moment statique de l'aire d'une section par rapport à un axe situé dans son plan est égal au produit de la surface de la section par la distance de son centre de gravité à l'axe considéré.

En utilisant les équations (2.1), (2.2), (2.5) et (2.6) deviennent :

$$S_Y = S \cdot Z_G \quad (2.7)$$

$$S_Z = S \cdot Y_G \quad (2.8)$$

Pour les surfaces complexes discrétisées en n aires simples, les moments statiques par rapport aux axes Oy et Oz seront respectivement égaux à :

$$S_Y = \sum_{i=1}^n S_i z_i \quad (2.9)$$

$$S_Z = \sum_{i=1}^n S_i y_i \quad (2.10)$$

Remarque : Le moment statique d'une surface par rapport à un axe passant par son centre de gravité est nul.

2.4 Moments quadratiques (moments d'inertie des sections)

On appelle moment quadratique l'intégrale des produits des aires élémentaires par le carré de leurs distances à partir de l'axe considéré, ainsi, les moments d'inertie d'une surface (S) quelconque par rapport à OY et OZ sont les suivants :

$$I_Y = \int_S z^2 ds \quad (2.11)$$

$$I_Z = \int_S y^2 ds \quad (2.12)$$

Le moment d'inertie de la section représente la capacité de la section à s'opposer à la déformation latérale, comme le montre l'exemple (Figure 2.3) d'une feuille reposant sur deux appuis dont la déformation sous son poids propre est nettement plus importante que quand elle est pliée en forme de U, car le moment d'inertie I_z de la forme en U est plus grand que celui de la section rectangulaire.

Remarques :

- ✓ Les moments d'inertie par rapport aux axes passant par le centre de gravité de la section sont des moments centraux.
- ✓ Les moments quadratiques I_Y et I_Z sont toujours positifs.

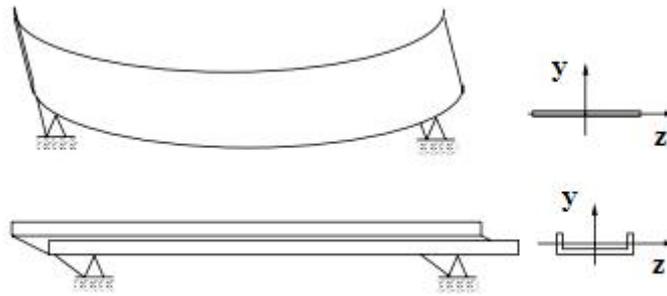


Figure 2.3 : Degré de résistance d'une section.

2.5 Moment d'inertie polaire

On appelle moment d'inertie polaire d'une surface (S) par rapport à un point donné (pôle O) l'intégrale des produits des aires élémentaires par le carré de leurs distances r à partir du pôle (Figure 2.4). Il représente la capacité de la section à s'opposer aux déformations angulaires sous l'effet de la torsion.

$$I_p = \int_S r^2 ds = \int_S (z^2 + y^2) ds = I_Z + I_Y \quad (2.13)$$

De l'équation (2.13), il en résulte que le moment d'inertie polaire par rapport à un point est la somme d'inertie par rapport à deux axes orthogonaux passant par ce point.

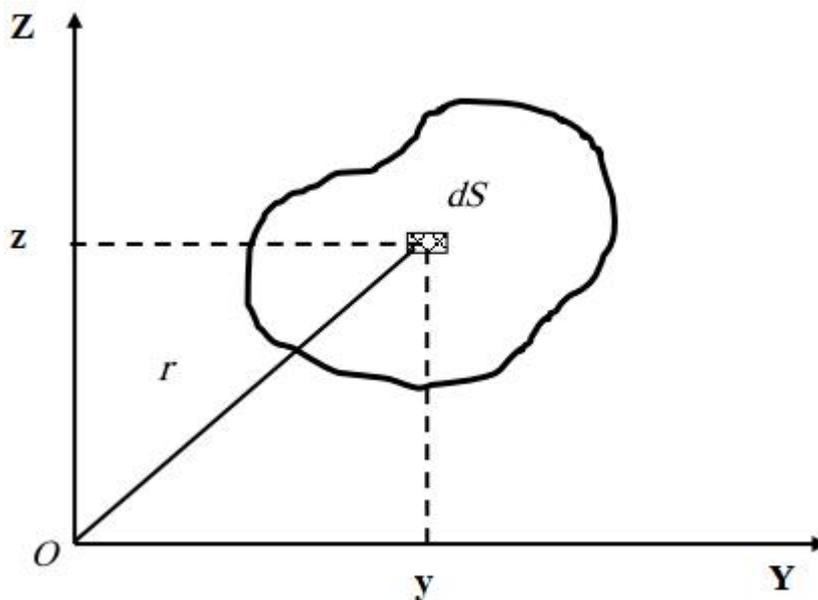


Figure 2.4 : Moment d'inertie polaire.

Exemple : Calcul le moment polaire d'un cercle :

$$I_o = \iint_s r^2 ds \quad (2.14)$$

$$I_o = \int_0^{d/2} 2\pi r^3 dr = \frac{\pi d^4}{32} \quad (2.15)$$

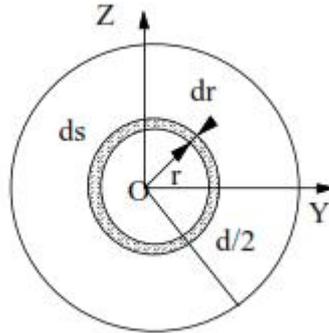


Figure 2.5 : Moment polaire d'un cercle.

Remarque :

Le moment polaire est toujours positif et n'est jamais nul.

2.6 Produit d'inertie (moment d'inertie centrifuge)

On appelle le produit d'inertie, l'intégrale des produits des propriétés des aires élémentaires par leurs distances comptées à partie des axes de coordonnées z,y :

$$I_{YZ} = \int_s yz ds \quad (2.16)$$

Remarques :

- ✓ Selon la disposition des axes, I_{ZY} peut être positif, négatif ou nul.
- ✓ En chaque point d'une aire plane, il existe deux axes orthogonaux par rapport auxquels le produit d'inertie est nul ($I_{zy} = 0$). Les deux axes ainsi définis sont appelés *axes principaux d'inertie*.
- ✓ Les axes sont principaux quand l'un des axes au moins constitue un axe de symétrie de la section. En effet, en raison de symétrie le produit d'inertie est nul par rapport à cet axe qui est donc une direction principale, la seconde étant nécessairement orthogonale.

2.7 Formule de Transformation des moments d'inertie

Les moments d'inertie d'une section varient selon la disposition des axes par rapport auxquels ces moments sont calculés. Deux types de transformations seront étudiés : translation et rotation d'axes. La variation des moments d'inertie par rapport à un système d'axes quelconques, est déterminée à l'aide d'une combinaison de deux transformations partant d'un système d'axe central.

2.7.1 Translation d'axes

Les formules définies ci-dessous permettent la détermination des moments d'inertie par rapport à des axes Y_1, Z_1 parallèle à des axes centraux Y, Z dont les moments sont supposés connus (Figure 2.6).

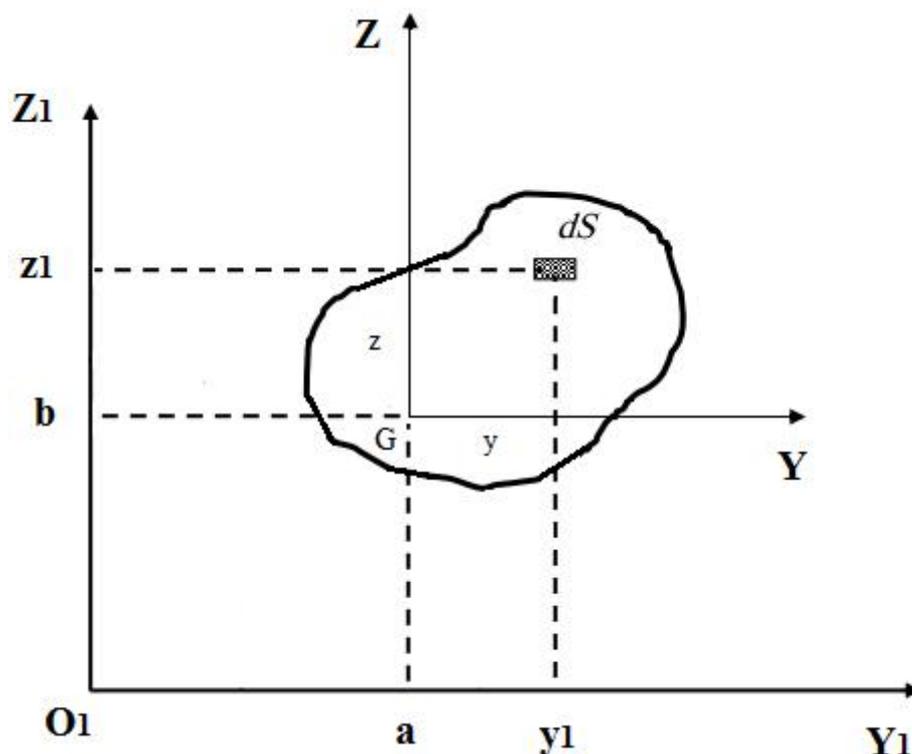


Figure 2.6 : Moment d'inertie d'une section et translation des axes.

$$I_z = \int_s y^2 ds ; \quad I_y = \int_s z^2 ds ; \quad I_{yz} = \int_s yz ds \quad (2.17)$$

Les moments par rapport à Y_1, Z_1 :

$$I_{z_1} = \int_s y_1^2 ds ; \quad I_{y_1} = \int_s z_1^2 ds ; \quad I_{y_1 z_1} = \int_s y_1 z_1 ds \quad (2.18)$$

La translation des axes est exprimée par :

$$y_1 = y + a \quad z_1 = z + b \quad (2.19)$$

En substituant y_1 et z_1 par leurs valeurs dans l'équation (2.18) on obtient :

$$I_{z_1} = \int_S (y+a)^2 ds \quad (2.20)$$

$$= \int_S (y^2 + 2ay + a^2) ds \quad (2.21)$$

$$= \int_S y^2 ds + 2a \int_S y ds + a^2 \int_S ds \quad (2.22)$$

Comme les moments statiques de l'aire par rapport aux axes centraux sont nuls, le terme :

$$2a \int_S y ds = 0 \quad (2.23)$$

Et

$$\int_S y^2 ds = I_Z \quad (2.24)$$

$$a^2 \int_S ds = a^2 S \quad (2.25)$$

Par conséquent:

$$I_{z_1} = I_Z + a^2 S \quad (2.26)$$

$$I_{y_1} = I_y + b^2 S \quad (2.27)$$

$$I_{y_1 z_1} = I_{yz} + abS \quad (2.28)$$

D'où le théorème d'Huygens:

1. "Le moment d'inertie d'une surface par rapport à un axe quelconque est égale au moment d'inertie de cette surface par rapport à l'axe parallèle passant par le centre de gravité, augmenté du produit de l'aire par le carré de la distance mutuelle des deux axes".
2. "Le moment d'inertie centrifuge par rapport à un système d'axes orthogonal est égale au moment d'inertie centrifuge par rapport au système d'axes centraux parallèles aux axes donnés plus le produit de l'aire de la section par les coordonnées de son centre de gravité dans le nouveau système d'axes".

2.7.2 Rotation d'axes

Les moments et produits d'inertie sont supposés connus dans le système d'axes OYZ (Figure 2.7). Les moments et produits d'inertie par rapport au système d'axes OY₁Z₁ obtenu par une rotation des axes initiaux sont donnés par :

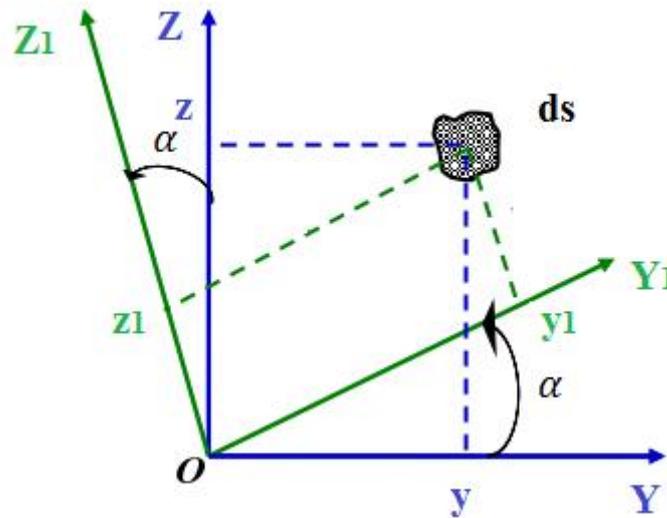


Figure 2.7 : Moment d'inertie d'une section et rotation des axes.

$$I_{y_1} = \frac{I_y + I_z}{2} + \frac{I_y - I_z}{2} \cos 2\alpha - I_{yz} \sin 2\alpha \quad (2.29)$$

$$I_{z_1} = \frac{I_y + I_z}{2} - \frac{I_y - I_z}{2} \cos 2\alpha + I_{yz} \sin 2\alpha \quad (2.30)$$

$$I_{y_1 z_1} = \frac{I_y - I_z}{2} \sin 2\alpha + I_{yz} \cos 2\alpha \quad (2.31)$$

En ajoutant les équations (2.29) et (2.30) terme à terme, on obtient :

$$I_y + I_z = I_{y_1} + I_{z_1} \quad (2.32)$$

$$\Rightarrow I_p = I_{p_1} \quad (2.33)$$

2.8 Moments d'inertie principaux

Les équations de transformations expriment les variations des moments d'inertie en fonction de l'angle de rotation α . Les valeurs maximales et minimales sont particulièrement recherchées. Ils correspondent à un moment d'inertie centrifuge $I_{YZ} = 0$.

On obtient ainsi l'orientation des axes principaux :

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2I_{yz}}{I_y - I_z} \quad (2.34)$$

Les valeurs des moments d'inertie principaux peuvent être obtenues à partir des formules générales si l'on y pose $\alpha = \alpha_0$.

$$I_1 = \frac{I_y + I_z}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + I_{yz}^2} \quad (2.35)$$

$$I_2 = \frac{I_y + I_z}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + I_{yz}^2} \quad (2.36)$$

2.9 Représentation géométrique des moments d'inertie (cercle de Mohr)

2.9.1 Problème direct

I_y, I_z, I_{yz} connus ; $I_1 ; I_2$; inconnus

- On choisit un système de coordonnées orthogonal $O I_{y,z}, I_{yz}$ et une échelle adéquate
- On construit A (I_y, I_{yz}) et B ($I_z, -I_{yz}$)
- On relie AB (diamètre qui coupe l'axe $O I_{y,z}$ en C)
- Le rayon du cercle est : $AB = BC = \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + I_{yz}^2}$
- On trace le cercle qui coupe les abscisses en A' et B'
- On mesure les distances OA' et OB' et on obtient I_1 et I_2
- On mesure l'angle $ACA' = 2\alpha_0$

2.9.2 Problème indirect

I_y, I_z, I_{yz} connus ; $I_1 ; I_2$; inconnus

- On choisi un système de coordonnées orthogonal $O I_y, I_z$
- On porte sur l'axe des abscisses, en échelle requise, OA' et OB'
- On localise le centre du cercle $C : B'C = A'C = \frac{1}{2} (I_1 - I_2)$
- On trace le cercle de rayon $A'C$
- On détermine le point A d'un angle $A'CA = 2\alpha$ et le point B diamétralement opposé
- On obtient les valeurs de I_y, I_z, I_{yz} en projetant a et b sur les axes.

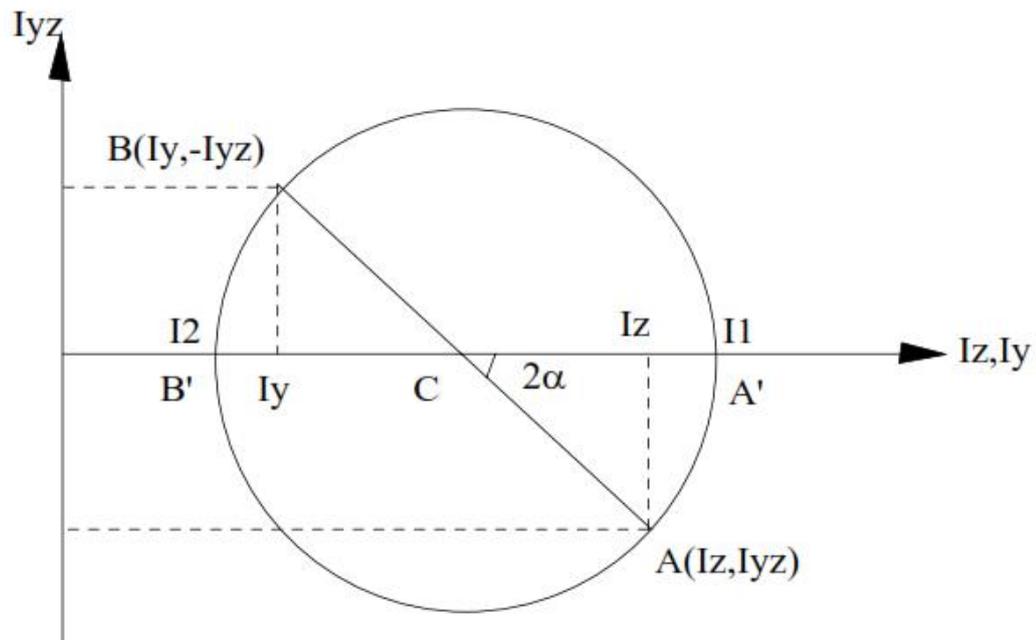


Figure 2.8 : Cercle de Mohr.

Exercices de Caractéristiques géométriques des sections droites

Exercice 01

1. Déterminer les moments statiques S_Y et S_Z de la section représentée sur la figure ci-contre (Figure 1).
2. En déduire les coordonnées Y_G et Z_G du centre de gravité de section.

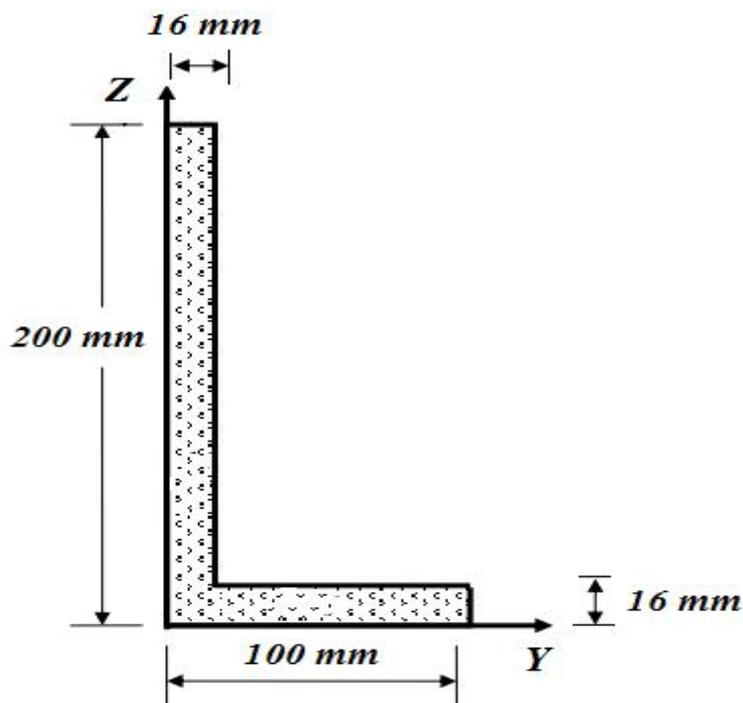
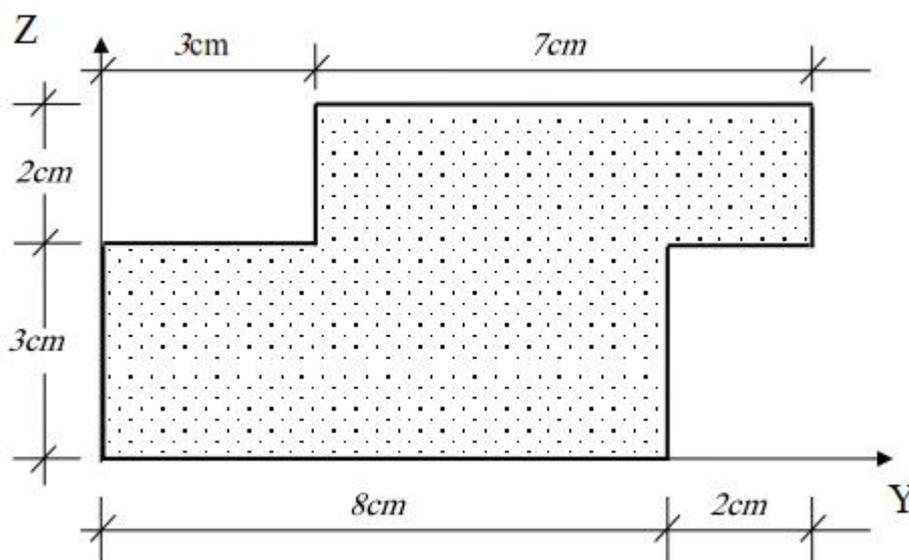


Figure 1

Exercice 02

Déterminer les moments d'inertie principaux et centraux des sections de la Figure 2.



(a)

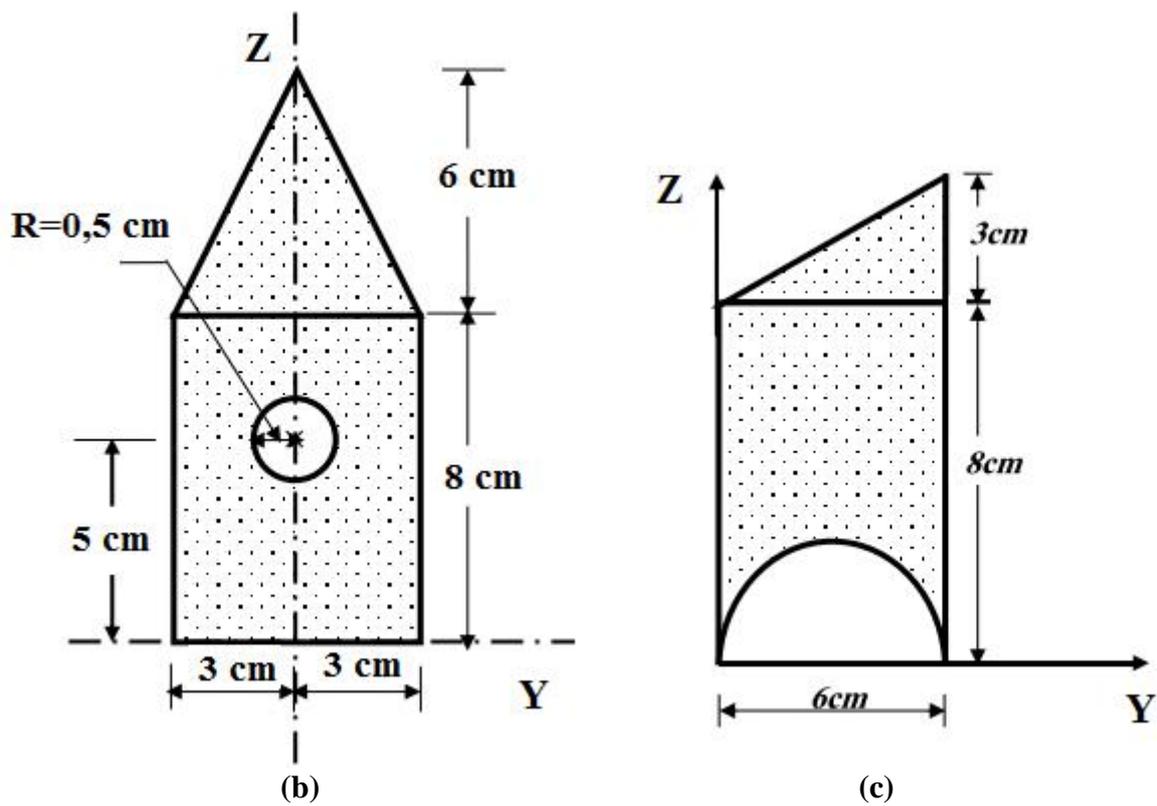


Figure 2

Exercice 03

1. Calculer les moments d'inertie de la section par rapport aux axes passant par le centre de gravité G de la section de la **Figure 3**.
2. Tracer le cercle de Mohr et déduire les moments d'inertie centraux principaux pour cette section.

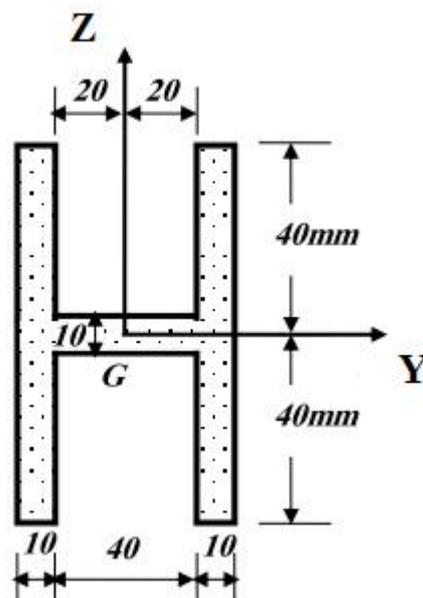


Figure 3

Exercice 04

La Figure 4 représente la section droite d'un massif en béton. Déterminer le centre de gravité de cette section, l'orientation et les valeurs des moments principaux passant par l'origine O et tracer le cercle de Mohr correspondant.

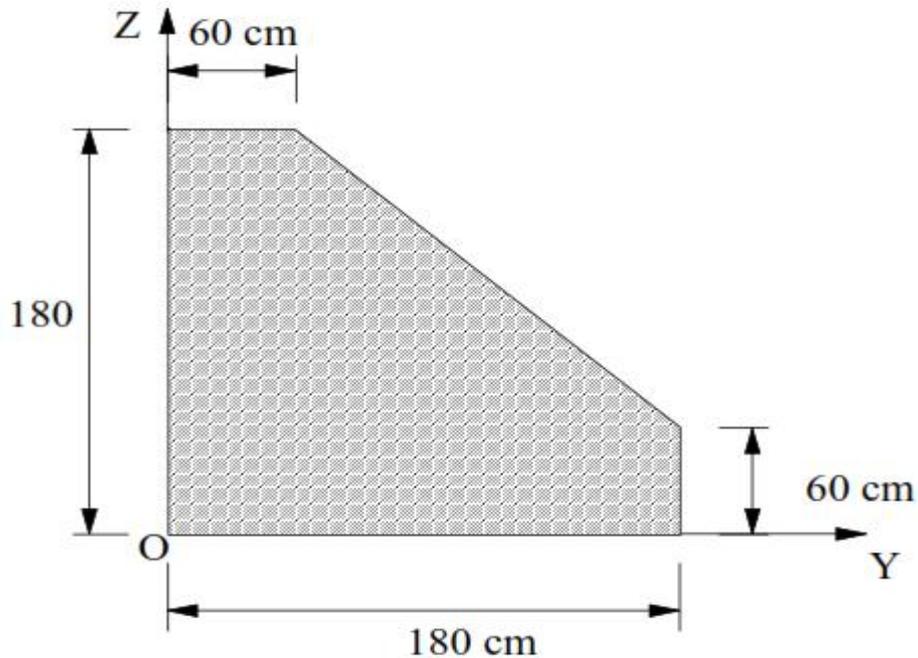


Figure 4

Exercice 05

Déterminer l'aire et le moment d'inertie de la section droite I_z d'une bande de plaque métallique ondulée de largeur L utilisée comme coffrage perdu dans les planchers collaborants. L'épaisseur de la plaque e est constante suivant yy (Figure 5) et la ligne moyenne des ondulations est exprimée par : $y = A \cos w z$.

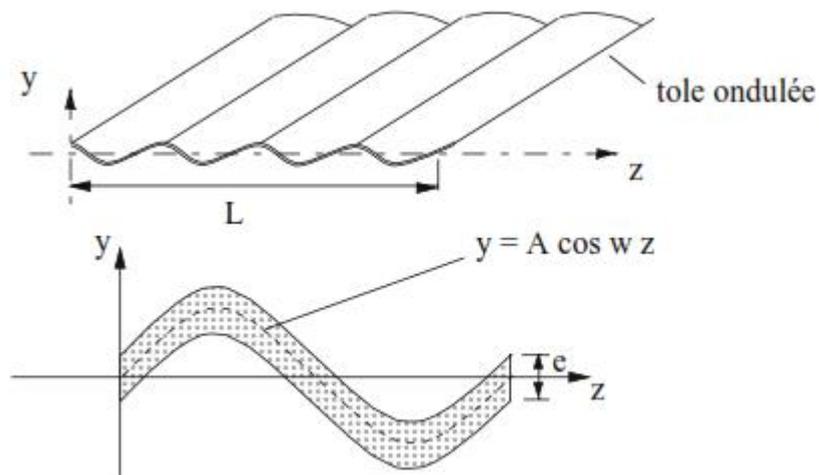


Figure 5

CHAPITRE 3 :
TRACTION ET COMPRESSION
SIMPLES

CHAPITRE 3 : TRACTION ET COMPRESSION SIMPLES

3.1 Introduction

Ce chapitre étudie le comportement des éléments de structure sollicité axialement. Ce type d'éléments (généralement des barres) peut être rencontré dans différentes structures tel que les systèmes réticulés (ferme, poutre à treillis,...etc), les diagonales de contreventement, les boulons, et les poteaux des bâtiments...etc. Les aires des sections de ces éléments peuvent avoir plusieurs formes : section pleine, creuse, ou à paroi épaisse.

3.2 Définition

La traction ou compression correspond à tous les éléments ayant des lignes moyennes droite et soumis à des efforts axiaux.

Soit une barre rectiligne sollicitée par deux forces égales et directement opposées agissant suivant sa fibre moyenne est soumise à un effort normal (Figure 3.1). Cet effort est dit:

- ✓ Un effort de traction simple si les forces tendent à allonger la barre,
- ✓ Un effort de compression simple si les forces tendent à raccourcir la barre.

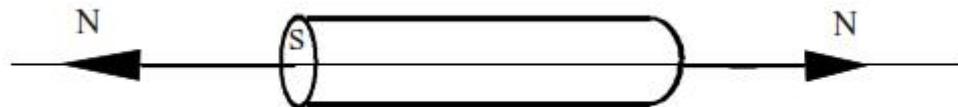


Figure 3.1 : Barre en traction.

3.3 Contrainte normale

Le calcul des contraintes maximales développées et les déformations longitudinales constituent une étape essentielle dans l'analyse et la conception des structures formées d'éléments sollicités par des efforts axiaux.

On considère une barre rectiligne, de section S liée à un massif fixe à son extrémité supérieure (Figure 3.2.a). A l'autre extrémité, elle est soumise à l'action d'une force F suivant son axe.

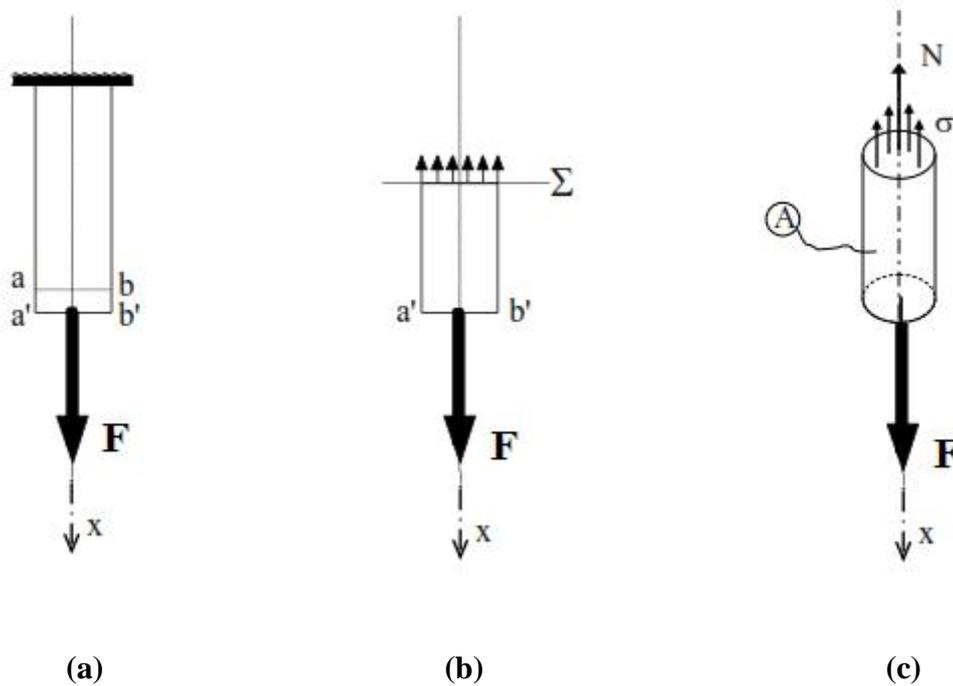


Figure 3.2 : Barre encastree sollicitée en traction.

D'après le principe de l'action et de la réaction, le massif exerce une force de réaction égale et opposée à F . La barre est alors soumise à un effort normal. Sa base -ab- se déplace alors parallèlement à elle-même pour venir en -a'b'-. Toutes les fibres ont subi, si l'effort est un effort de traction, le même allongement (hypothèse de Navier-Bernoulli: les sections droites restent planes et perpendiculaires à l'axe) et supportent donc la même tension.

Imaginons qu'on coupe la barre par un plan perpendiculaire à l'axe de la pièce. Pour maintenir le tronçon inférieur en équilibre, il faut placer dans une force intérieure égale et opposée à F .

L'hypothèse de *Navier-Bernoulli* permet d'écrire :

$$\sigma = \frac{N}{S} \quad (3.1)$$

Avec

$N = F$ effort de traction,

S : aire de la section.

est appelé **contrainte normale**. Elle représente l'intensité de l'effort normal par unité de surface. se mesure en (N/m^2) ou Pascal (Pa).

3.4 Diagramme contrainte-déformation (Loi de Hooke)

La courbe contrainte déformation est une courbe caractérisant le matériau. Elle est obtenue empiriquement d'une expérience de traction effectuée sur une barre de section constante. Lors de cette expérience l'effort normal est augmenté progressivement provoquant l'allongement de la barre. A chaque incrément d'effort, la contrainte normale et la déformation de la barre sont portées sur une courbe. Cette opération est effectuée régulièrement jusqu'à la rupture de la barre.

La courbe ainsi obtenue est la courbe *contrainte - déformation* du matériau. Elle a généralement (de manière simplifiée) l'allure montrée sur la Figure 3.3.

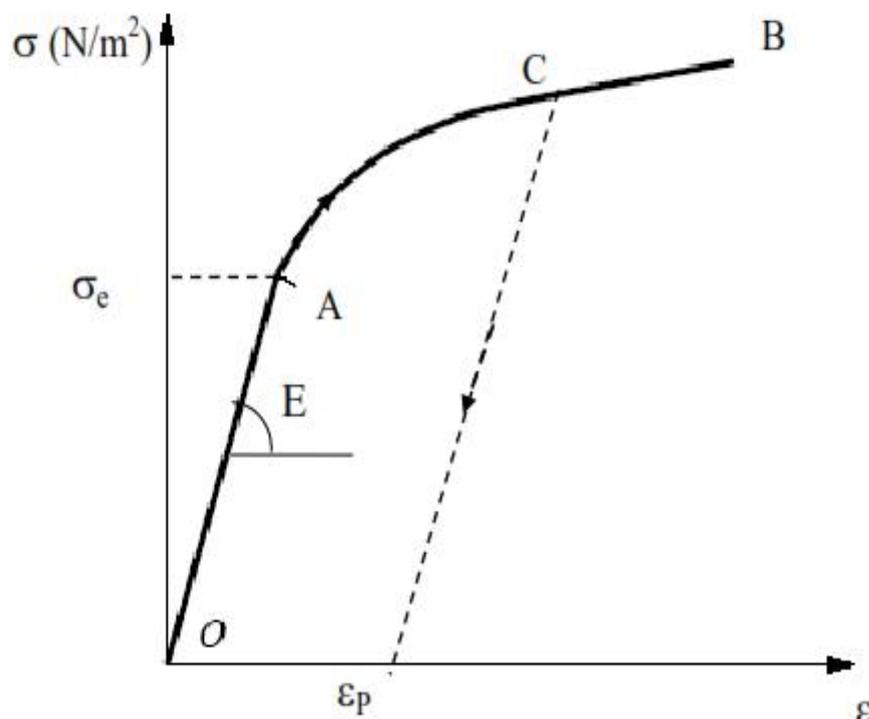


Figure 3.3 : Courbe contrainte - déformation de traction.

La partie (OA) est la partie élastique. La limite élastique n'est pas atteinte. La barre reprend sa forme initiale si l'expérience est interrompue dans cette zone. Dans ce cas l'élasticité est linéaire ((OA) est une droite). La pente E de la droite (OA) est appelée module d'élasticité linéaire ou module de Young. Il représente le rapport entre la contrainte et la déformation ϵ dans la zone élastique. La relation entre la contrainte et la déformation dans la zone élastique est donnée par la loi de Hooke :

$$\sigma = E\epsilon \quad (3.2)$$

La partie (AB) est la partie plastique. La limite élastique est dépassée. Si l'expérience est interrompue (point C), la barre ne reprend pas sa forme initiale. Le chemin de décharge est, de manière simplifiée parallèle à la droite (OA). Lorsque l'effort appliqué s'annule, il persiste une déformation résiduelle ϵ_p qui ne disparaît plus.

3.5 Déformation élastique

Soit une barre prismatique de longueur L soumise à un effort de traction P (Figure 3.4).

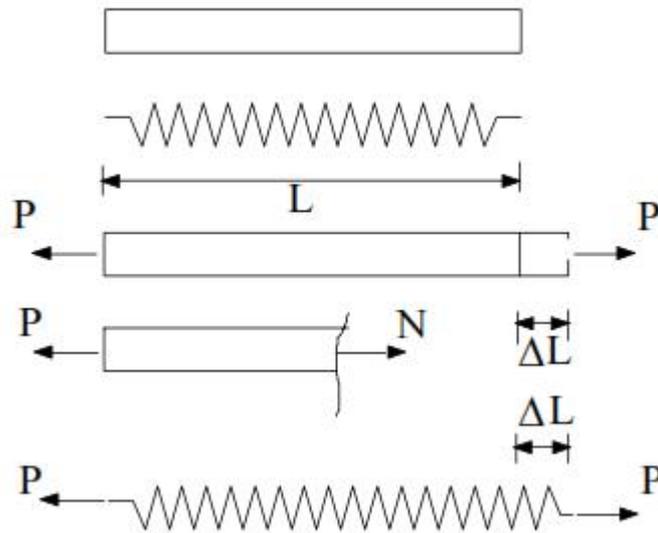


Figure 3.4 : Déformation linéaire.

La déformation relative : $\epsilon = \frac{\Delta L}{L}$ (3.3)

En substituant (3.1) et (3.3) dans (3.2) on obtient :

$$E = \frac{\Delta L}{L} = \frac{N}{S} \Rightarrow N = \frac{ES}{L} \Delta L$$
 (3.4)

Par analogie avec un ressort de raideur K sollicité par un effort N qui se déforme de ΔL , tel que :

$$N = K \Delta L$$
 (3.5)

La rigidité longitudinale d'une barre est obtenue par identification de l'équation (3.4) et (3.5)

$$K = \frac{ES}{L}$$
 (3.6)

La rigidité longitudinale ou l'aptitude d'un élément à se déformer longitudinalement dépend donc des caractéristiques mécaniques et géométriques de l'élément.

Pour une barre composée de plusieurs tronçons, la déformation totale est donnée par :

$$\Delta L = \sum \frac{N_i L_i}{E_i S_i} \quad (3.7)$$

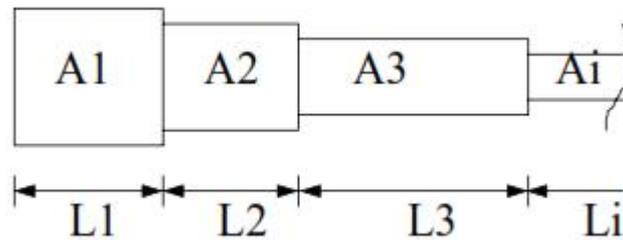


Figure 3.5 : Barre composée de plusieurs tronçons.

Et pour le cas le plus général où l'aire de la section droite et l'effort normal N varient le long de la ligne moyenne de l'élément, l'équation (3.7) devient alors :

$$\Delta L = \int_0^L \frac{N(x)}{ES(x)} dx \quad (3.8)$$

3.6 Sollicitations dues à la variation de température

Comme les structures sont généralement sujettes à des variations de température climatique ou industrielle, l'effet de ces dernières se manifeste sous forme de déformations (dilatation et rétrécissement) des éléments. Ces déformations induisent des contraintes supplémentaires. Dans cette section on étudiera l'effet de la variation de température sur les éléments structuraux. Toute variation de température entraîne un changement de dimensions. La déformation est uniforme selon les trois directions et elle est donnée par :

$$\varepsilon = \alpha T \quad (3.9)$$

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \varepsilon \quad (3.10)$$

Avec ;

α : Coefficient de dilatation thermique [$1/^\circ\text{C}$]

T : Variation de la température

On donne quelques valeurs du coefficient α pour certains matériaux :

Cuivre : $19.1 \times 10^{-6} / \text{c}^\circ$; Acier : $12 \times 10^{-6} / \text{c}^\circ$; Acier : $11 \times 10^{-6} / \text{c}^\circ$

La contrainte qui se développe dans une barre bi-encastée, par exemple, soumise à un changement de température ΔT est équivalente à la contrainte nécessaire de provoquer une déformation égale à celle provoquée par la variation de température mais de signe contraire (Figure 3.6).

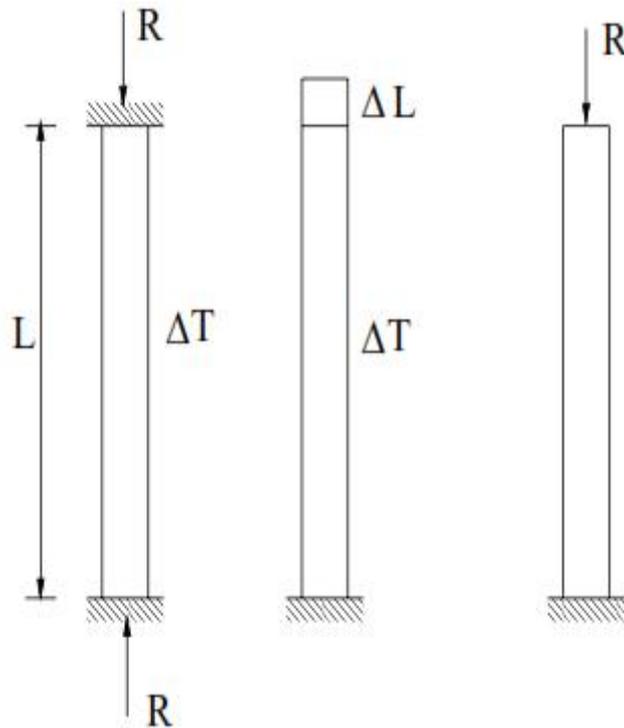


Figure 3.6 : Déformation due à la température.

La déformation due à la variation de la température : $\epsilon = \alpha \Delta T$

La déformation due à la réaction de l'encastrement : $\epsilon = \frac{R}{E}$

D'où :

$$R = E \cdot \alpha \cdot \Delta T \quad (3.11)$$

3.7 Systèmes de barres isostatiques

Un système est isostatique quand on peut déterminer les efforts internes par les seules équations d'équilibre.

Exemple

Soit la barre schématisée par la figure ci-dessous (Figure 3.7). Calculer les efforts, les contraintes et les déformations au niveau des sections 1-1, 2-2 et 3-3. Sachant que : $E = 2,1 \times 10^5$ MPa.

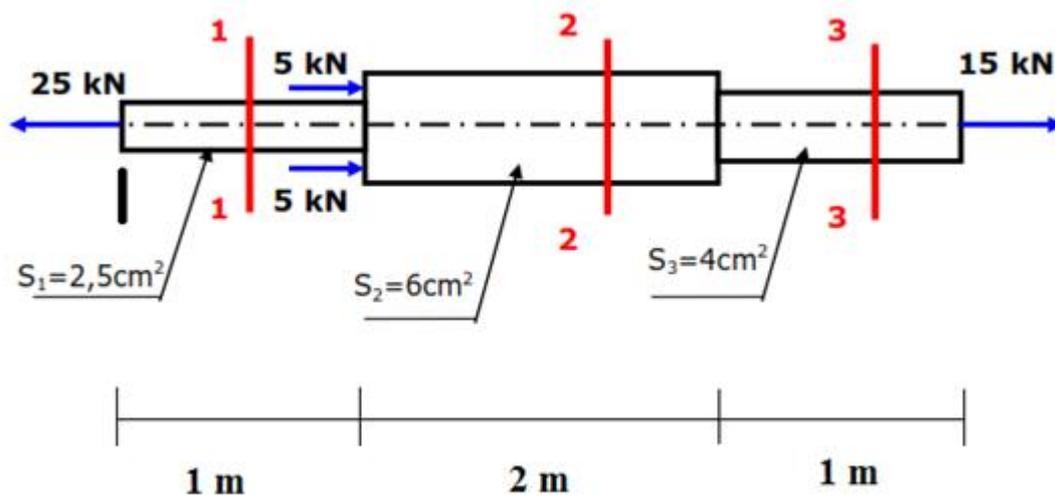
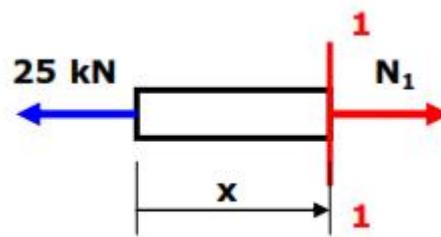


Figure 3.7 : Système de barre isostatique.

Solution

Section 1-1

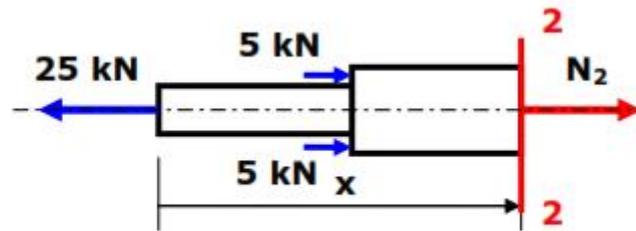


$$F_X = 0 \Rightarrow N_1 = 25 \text{ kN}$$

$$\sigma_{1-1} = \frac{N_1}{S_1} = \frac{25}{2,5} = 10 \text{ kN/cm}^2 = 100 \text{ MPa}$$

$$L_1 = \frac{\sigma L}{E} = \frac{100 \times 1000}{2,1 \times 10^5} = 0,47 \text{ mm}$$

Section 2-2

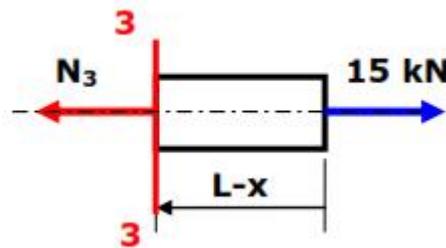


$$F_x = 0 \Rightarrow N_2 = 15 \text{ kN}$$

$$\sigma_{2-2} = \frac{N_2}{S_2} = \frac{15}{6} = 2,5 \text{ kN/cm}^2 = 25 \text{ MPa}$$

$$L_2 = \frac{\sigma L}{E} = \frac{25 \times 2000}{2,1 \times 10^5} = 0,24 \text{ mm}$$

Section 3-3



$$F_x = 0 \Rightarrow N_3 = 15 \text{ kN}$$

$$\sigma_{3-3} = \frac{N_3}{S_3} = \frac{15}{4} = 3,75 \text{ kN/cm}^2 = 37,5 \text{ MPa}$$

$$L_3 = \frac{\sigma L}{E} = \frac{3,75 \times 1000}{2,1 \times 10^5} = 0,018 \text{ mm} \approx 0,02 \text{ mm}$$

3.8 Systèmes de barres hyperstatiques

On appelle structure hyperstatiques les structures pour lesquelles les efforts qui sollicitent leurs éléments ne peuvent pas être déterminés à l'aide des équations statiques. La résolution de ces systèmes s'effectue en considérant les aspects décrits ci-dessous :

1. Aspect statique : écrire les équations d'équilibre des barres sectionnées.
2. Aspect géométrique : établir le rapport entre les déformations à partir de la compatibilité géométrique.
3. Aspect physique du problème : établir les relations effort-déformation en utilisant la loi de Hook : $\Delta L = \frac{NL}{ES}$ pour transformer les expressions de déformation en équations ayant des efforts normaux comme inconnus.
4. Résolution du système d'équations.

Exemple

Soit le système de barres défini sur la Figure 3.8 ci après.

Etant données : $L_1, S_1, L_2, S_2, L_3, S_3, P$ et

Avec $L_2 = L_3$

Déterminer les efforts dans les barres.

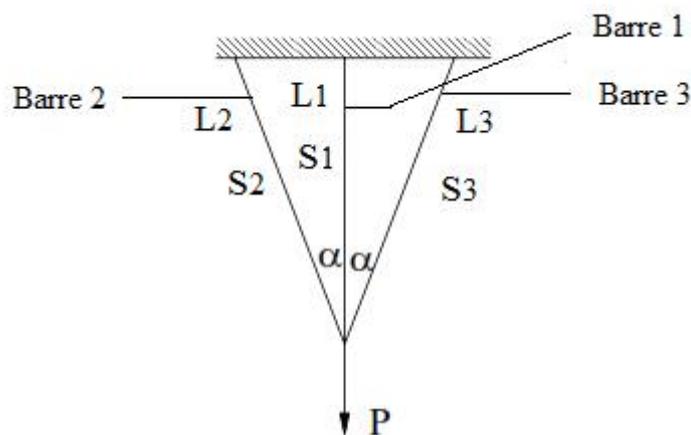


Figure 3.8 : Système de barre hyperstatique.

Solution :

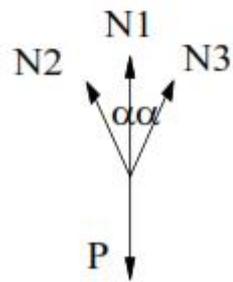
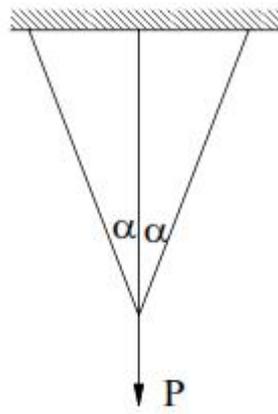
1. Aspect statique

$$F_X = 0$$

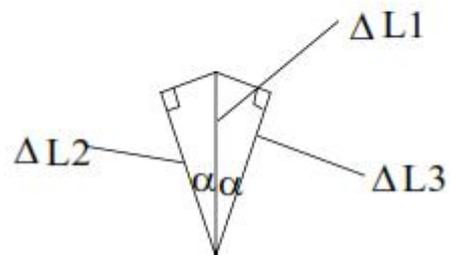
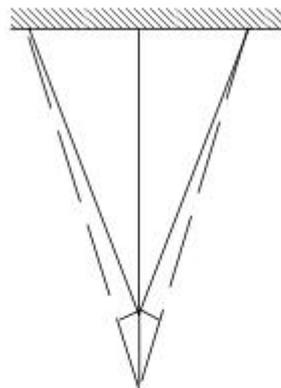
$$N_2 \sin \alpha - N_3 \sin \alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad N_2 = N_3 \quad (1)$$

$$F_Y = 0$$

$$N_1 + N_2 \cos \alpha + N_3 \cos \alpha - P = 0 \quad \Rightarrow \quad N_1 + 2N_2 \cos \alpha = P \quad (2)$$



2. Aspect géométrique



$$L_2 = L_3 = L_1 \cos \alpha \quad (3)$$

3. Aspect physique

$$\Delta L_1 = \frac{N_1 L_1}{ES} \quad \text{et} \quad \Delta L_2 = \frac{N_2 L_2}{ES}$$

En substituant dans (3), on obtient

$$\frac{N_2 L_2}{ES} = \frac{N_1 L_1}{ES} \cos \alpha \Rightarrow N_2 L_2 = N_1 L_1 \cos \alpha \quad (4)$$

4. Résolution du système d'équations

D'après la synthèse et résolution des équations on obtient :

$$N_1 = \frac{P}{1 + 2 \cos^3 \alpha} \quad \text{et} \quad N_2 = N_3 = \frac{P \cos^2 \alpha}{1 + 2 \cos^3 \alpha}$$

3.9 Condition de résistance

Pour vérifier la condition de résistance d'une pièce sollicitée en traction ou en compression, on doit s'assurer que :

$$\sigma \leq [\sigma] \quad (3.9)$$

Où $[\sigma]$ est la contrainte admissible pour le matériau étudié.

Exercices de traction et compression simple

Exercice 01

Déterminer les efforts, les contraintes et les déformations dans les différents tronçons de la colonne représentée sur la Figure 1, sachant que $d_{1-1} = 50 \text{ mm}$, $d_{2-2} = 100 \text{ mm}$, $d_{3-3} = 200 \text{ mm}$ et $E = 2,1 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$.

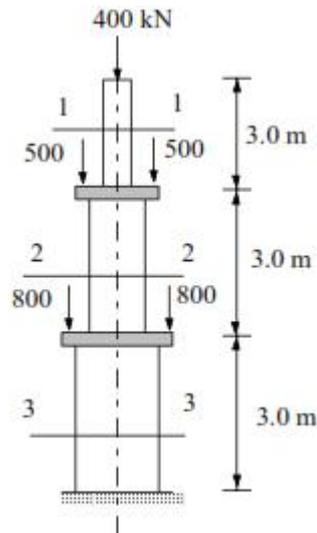


Figure 1

Exercice 02

Deux barres prismatiques sont co-axialement soudées et supportent une charge verticale de 16 kN (Figure 2). L'aire de la section de la barre en acier AB est de 10 cm^2 et de densité $7,83 \text{ gr/cm}^3$; les valeurs correspondantes de la barre en cuivre BC sont 5 cm^2 et $8,30 \text{ gr/cm}^3$. Déterminer les contraintes maximales et minimales dans chaque barre.

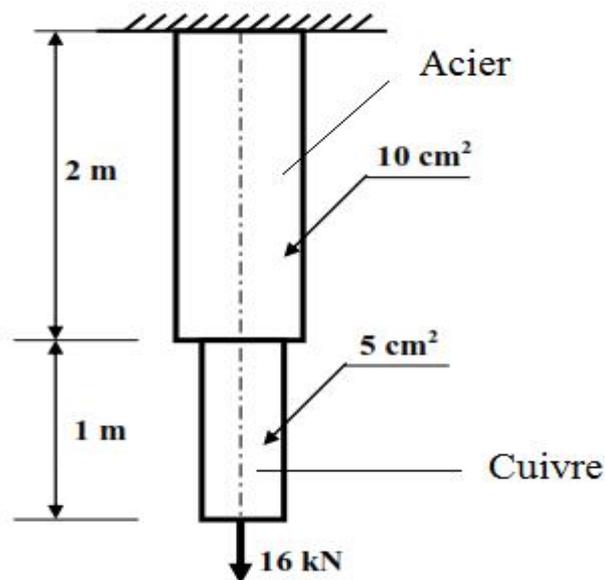


Figure 2

Exercice 03

Déterminer les contraintes normales provoquées dans les barres élastiques de la colonne de système représenté dans la Figure 3 par l'action des forces appliquées. Le module d'élasticité est le même pour toutes les barres de la colonne.

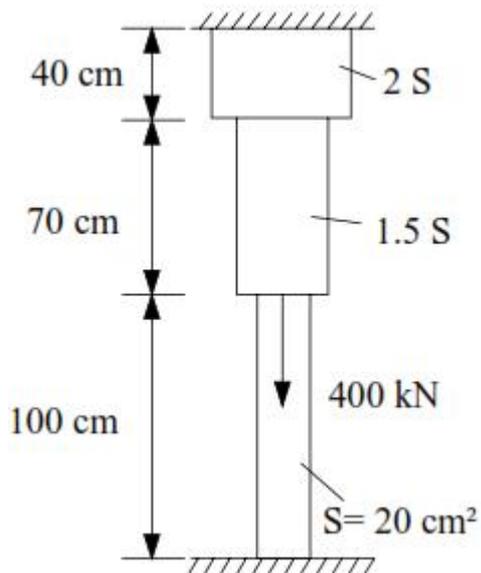


Figure 3

Exercice 04

Calculer les contraintes et les allongements subis par chacune des barres supportant le corps rigide de section constante et de masse de 3 000 kg de la Figure 04.

Les caractéristiques des barres sont :

- Barre (1) : $E_1 = 70\,000\text{ MPa}$; $A_1 = 240\text{ mm}^2$
- Barre (2) : $E_2 = 210\,000\text{ MPa}$; $A_2 = 180\text{ mm}^2$

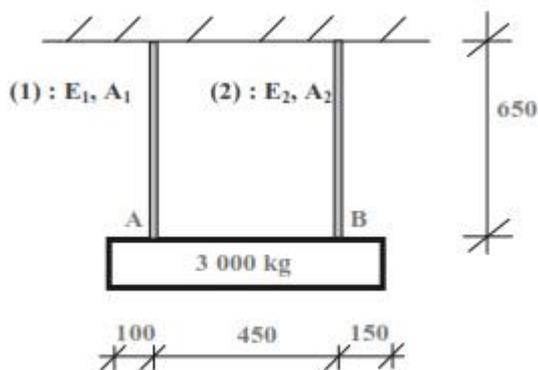


Figure 4

Exercice 05

Un élément de structure de 600 mm de long est constitué d'une barre d'acier de 0,2 m de long et de 30 mm de diamètre, coaxialement soudée à une autre barre en cuivre de 400 mm de long.

1. Déterminer le diamètre de la barre en cuivre permettant d'obtenir des allongements égaux dans les deux barres, sous l'action d'une force axiale de tension de 20 kN.
2. Déterminer dans ce cas les contraintes normales dans chaque matériau.

On donne : $E_{\text{acier}} = 2 \times 10^5 \text{ MPa}$, $E_{\text{cuivre}} = 1,1 \times 10^5 \text{ MPa}$.

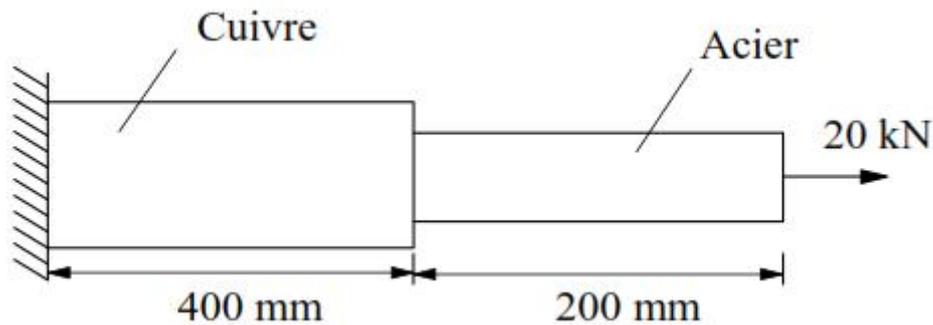


Figure 5

Exercice 06

Déterminer l'expression de l'effort normal dans la barre bi-encastée de la Figure 6 sous l'effet d'une variation de température T . Le coefficient de dilatation thermique et le module d'Young E sont supposés connus.

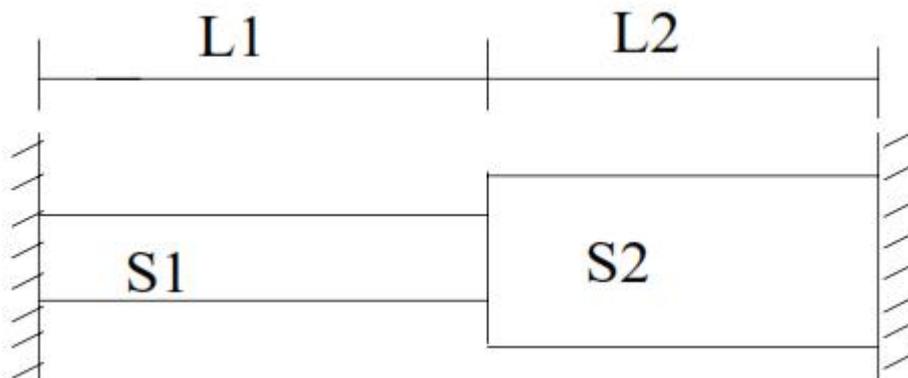


Figure 6

Exercice 7

Déterminer les efforts dans les barres extensibles des systèmes de la Figure 7. (Les barres hachurées sont infiniment rigides)

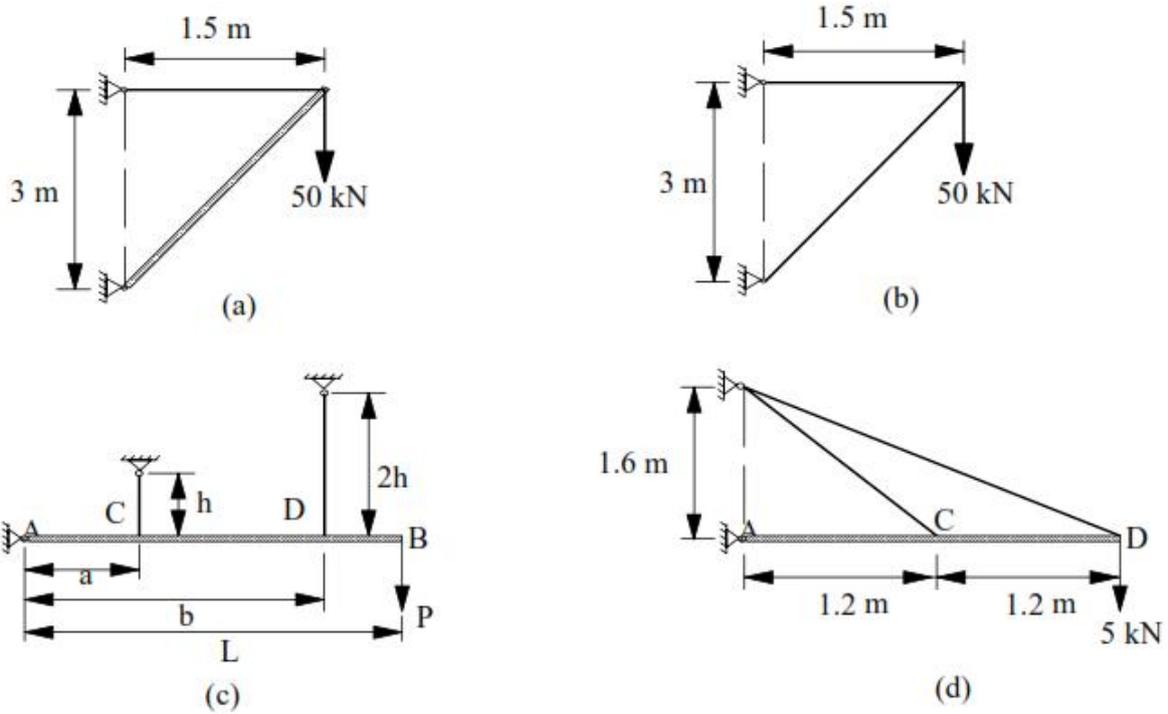


Figure 7

CHAPITRE 4 :

FLEXION SIMPLE

CHAPITRE 4 : FLEXION SIMPLE

4.1 Définitions et hypothèses

L'action des forces latérales sur une poutre se traduit en une déformation de l'axe longitudinale initialement droit en une courbe curviligne (Figure 4.1). L'état d'une section de poutre où toutes les composantes des efforts de déformation internes, seule un moment fléchissant M_y ou M_z n'est pas nul, est dit état de flexion plane pure.

La déformation résultante de ce genre de sollicitation est connue sous le nom de la flèche. Lorsque l'effort tranchant n'est pas nul, en ce cas la sollicitation est dite flexion simple.

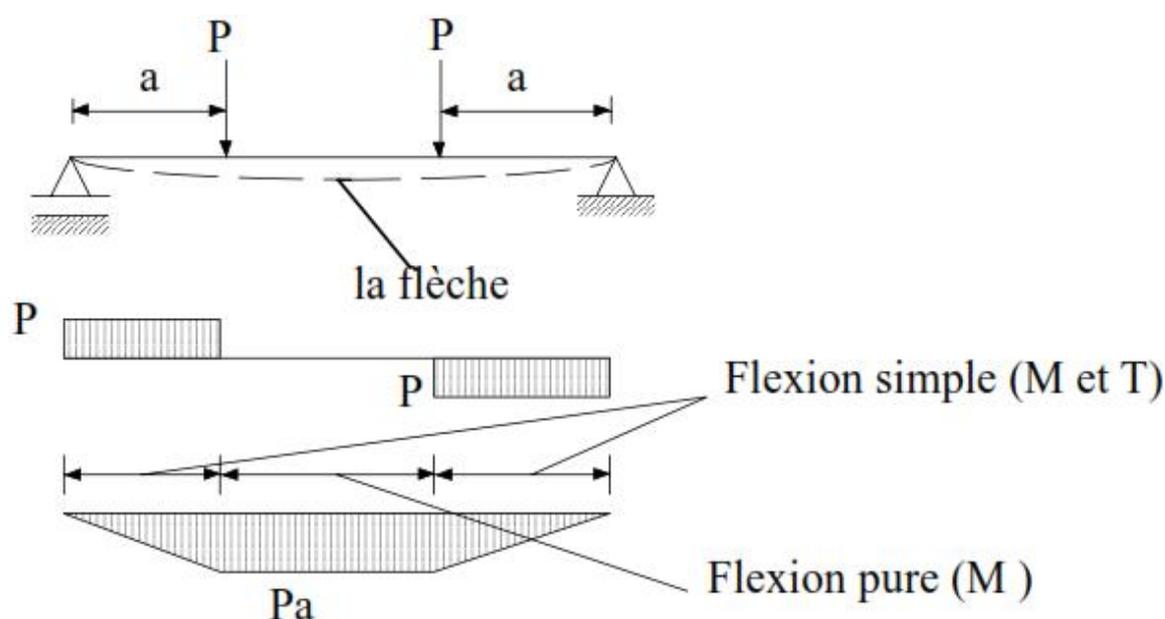


Figure 4.1 : Exemple d'une poutre soumise à la flexion.

▪ Hypothèses

- Les déformations sont élastiques et suffisamment petites pour ne pas modifier l'intensité des forces ni leurs distances respectives.
- Toute fibre contenue dans un plan de symétrie demeure dans ce plan pendant la déformation.
- Hypothèse de Navier-Bernoulli: les sections droites de la poutre demeurent planes et perpendiculaires à l'axe de celle-ci après déformation.

4.2 Efforts tranchants, moments fléchissants

Soit la poutre ci-dessous soumise à la flexion simple. Imaginons une coupure en un point C qui divise la poutre en deux parties notées gauche et droite. Chacune de ces deux parties est en équilibre sous l'action des efforts extérieurs qu'elle reçoit et sous l'action des effets de l'autre partie (efforts intérieurs).

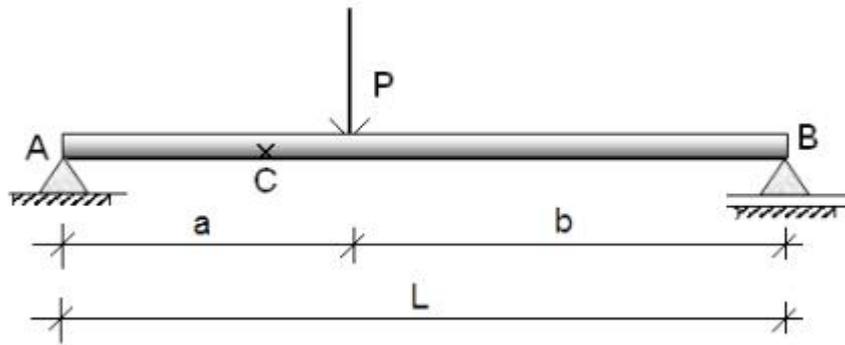


Figure 4.2 : Exemple illustratif d'une poutre sollicitée en flexion simple.

Chacune des deux parties agit sur l'autre de sorte que:

- ✓ Tous les mouvements horizontaux, verticaux et de rotation d'une partie par rapport à l'autre sont nuls.
- ✓ Chaque partie est en équilibre

Pour qu'il y ait concordance en signe entre les deux parties, on utilise la convention de signe montrée sur la Figure 4.3.

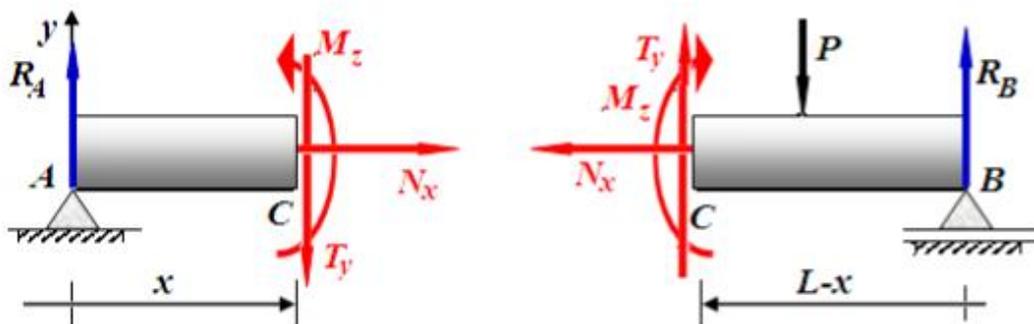


Figure 4.3 : Conventions de signe.

L'effort tranchant $T(x)$ dans une section d'abscisse x , séparant la poutre orientée en une partie gauche et une partie droite, est la résultante des forces extérieures s'exerçant sur la partie gauche.

Le moment fléchissant $M(x)$ dans une section d'abscisse x , séparant la poutre orientée en une partie gauche et une partie droite, est la somme des moments extérieurs (dus aux couples concentrés et aux efforts d'action et de réaction) s'exerçant sur la partie gauche.

4.3 Diagrammes des Efforts tranchants et des moments fléchissants

En général, les efforts et moments agissant dans différentes sections varient le long de la poutre. Entre autres les valeurs maximales et minimales de ces efforts et moments sont d'une grande importance pour la sécurité de la poutre, on s'intéresse donc à tracer des courbes qui montrent comment changent les efforts et les moments d'une section à une autre, on appelle ces courbes les diagrammes des efforts et des moments.

On se limite dans cette section à l'étude des diagrammes des efforts et des moments dans les poutres à deux dimensions (plan XOY), ce qui réduit le nombre des efforts et des moments à trois, à savoir un effort normal N , un effort tranchant T_y , et un moment fléchissant M_z .

4.3.1 Les zones efforts internes dans une poutre

La variation d'un effort ou moment dans une zone (ou traçons) d'une poutre est caractérisé par une même loi mathématique. En pratique l'extrémité d'une zone est imposée par l'extrémité de la poutre (extrémité libre appuis de rive ou intermédiaire), changement brutal de la charge, ou le changement brutal de la direction de l'axe de la poutre (Figure 4.4).

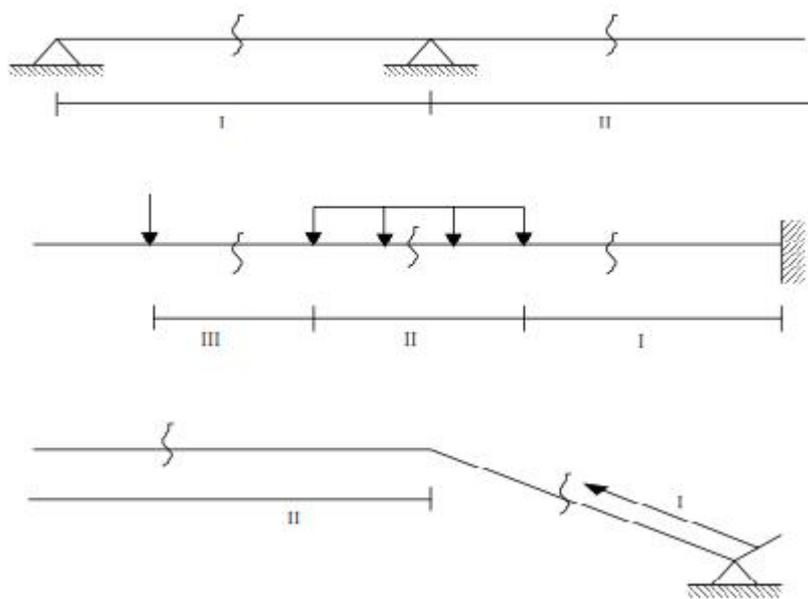


Figure 4.4 : Zones efforts internes dans une poutre.

4.3.2 Construction des diagrammes des efforts internes d'une poutre

Pour pouvoir tracer les diagrammes, il est indispensable de connaître toutes les forces extérieures y compris les réactions qui doivent être préalablement déterminées.

Pour déterminer les réactions d'une poutre isostatique (efforts de liaison), il faut écrire les conditions d'équilibre (la loi fondamentale de la statique).

Pour une poutre articulée isostatique, aux trois équations fondamentales de la statique s'ajoute une équation supplémentaire : en effet par rapport au centre de l'articulation, la somme des moments créés par toutes les forces situées d'un côté de cette dernière est nulle.

Le tracé des diagrammes des efforts et des moments peut être fait à l'aide des équations analytiques ou par la méthode directe.

La méthode analytique consiste à trouver les expressions des efforts et moment pour chaque zone en fonction de l'abscisse x de la ligne moyenne de la poutre. Ces expressions peuvent être établies par les équations d'équilibre de toutes les forces (y compris les réactions des appuis) appliquées à gauche ou à droite de la section considérée. Une fois que ces expressions sont déterminées, on peut alors tracer leurs diagrammes.

La méthode directe est très rapide généralement utilisée dans les cas de chargements simples. Elle consiste à déterminer les valeurs numériques des efforts intérieurs aux extrémités de chaque tronçon. Ces points sont joints par des lignes ou courbes dont les caractéristiques sont déterminées sur la base des relations différentielles entre les efforts intérieurs et les forces extérieures citées ci-dessous.

- a. Sur les tronçons où il n'y a pas de charge répartie, le diagramme des T est délimité par des droites parallèles à la base tandis que le diagramme des M l'est, dans le cas le plus générale, par des droites obliques.
- b. Sur les tronçons où la poutre supporte une charge répartie, le diagramme des T est délimité par des droites obliques tandis que celui des M l'est par des paraboles carrées. Quand on trace le diagramme des M du côté des fibres tendues, l'incurvation de la parabole est dirigée dans le sens contraire de la charge q_y .
- c. Les maximums et minimums des M coïncident avec les sections où $T = 0$.
- d. Dans les sections où les charges concentrées sont appliquées à la poutre, le diagramme des T est caractérisé par des passages brusques aux niveaux de ces charges, celui des M , il y aura des brisures dont la pointe sera dirigée dans le sens de la ligne d'action de la force.

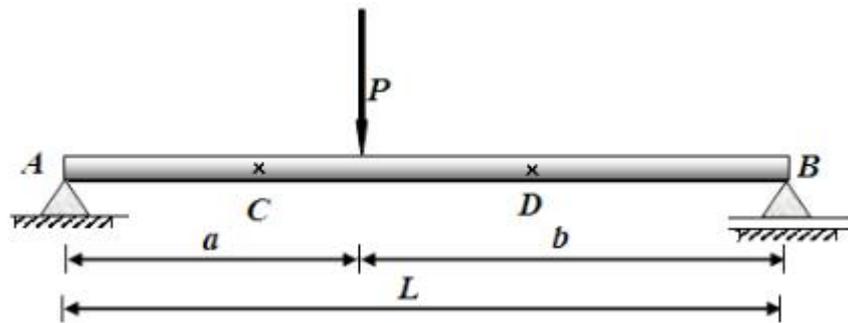
- e. Dans les sections où les charges moments sont appliquées à la poutre, le diagramme des moments sera marqué par des passages brusques d'une valeur proportionnelle à ces moments tandis que sur le diagramme des T, il n'y aura aucune modification.

Exemple 01

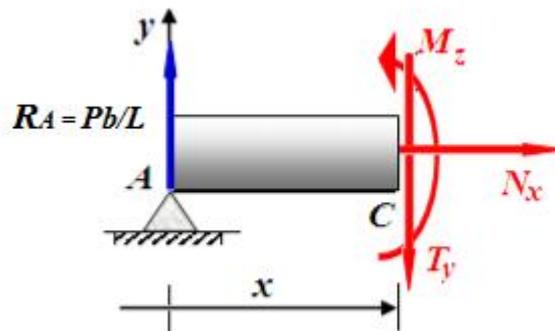
Exprimer et tracer la variation de l'effort tranchant et le moment fléchissant le long de la poutre schématisée par la Figure 4.2.

Solution 01

Supposons que la poutre soit coupée au point C (1 partie) puis au pont (D) (2 partie).

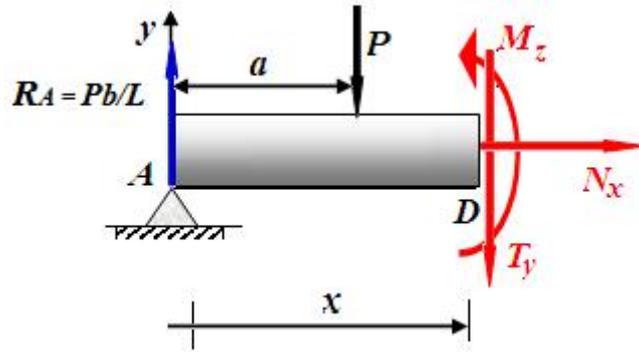


1^{ère} partie : $0 \leq x \leq a$



- $F_x = 0 \quad N = 0$
- $F_y = 0 \quad T_y = Pb/L$
- $M/C = 0 \quad M_z = (Pb/L) \cdot x$
 $M_z(x=0) = 0$
 $M_z(x=a) = Pab/L$

2ème partie : $a < x < L$



- $F_x = 0 \quad N = 0$
- $F_y = 0 \quad T_y = -Pb/L$
- $M/C = 0 \quad M_z = (Pb/L)(L-x)$
 $M_z(x=a) = Pab/L$
 $M_z(x=L) = 0$

Ayant obtenu les expressions des efforts tranchants et moments fléchissants pour chacune des deux parties, traçons leurs variations le long de la poutre comme montrées par la figure ci-dessous.

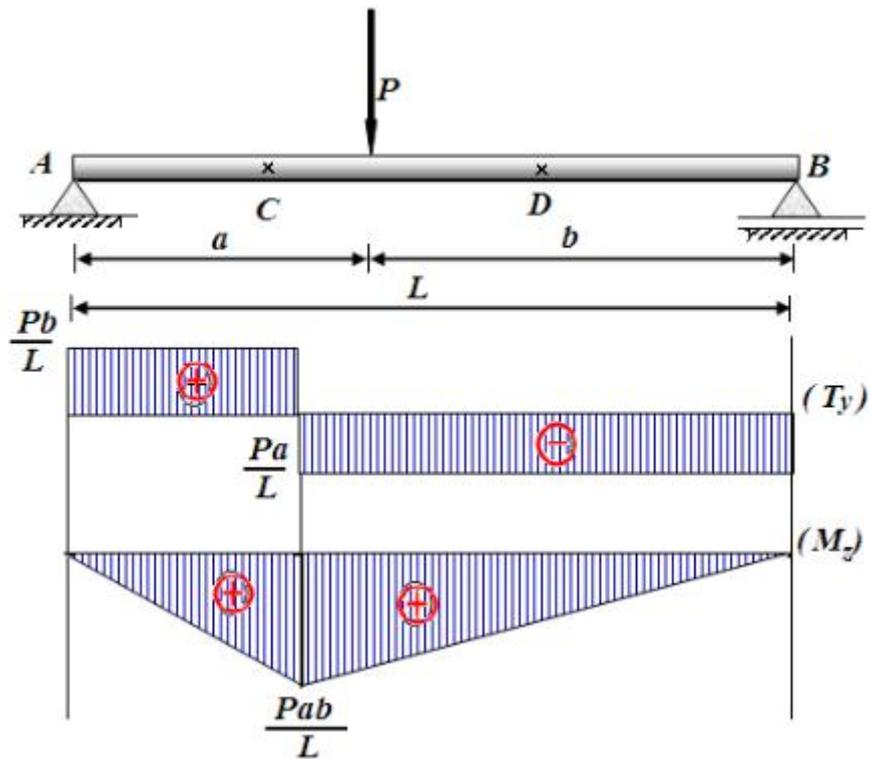


Figure 4.5 : Diagrammes des Efforts tranchants et des moments fléchissants.

4.4 Relations différentielles entre les charges et les efforts

Ils existent des relations différentielles entre les forces extérieures et intérieures et qui constituent la base de la méthode directe pour la détermination des efforts internes.

Pour déterminer ces relations on considère un cas de charge arbitraire d'un système de sollicitations donné dans un plan (Figure 4.6) avec :

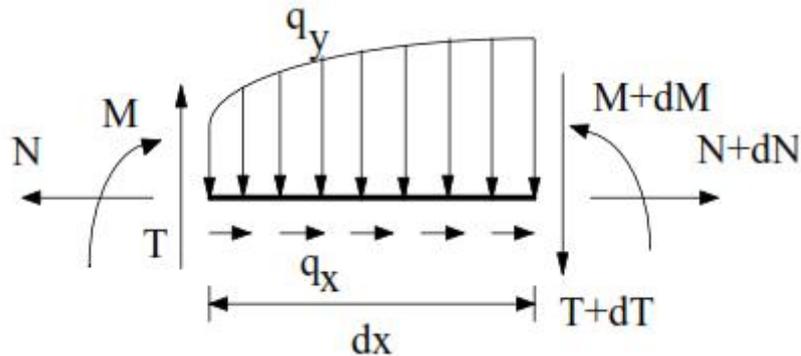


Figure 4.6 : Élément de poutre isolé chargé par une force uniformément répartie.

q_x : intensité de la charge extérieure selon l'axes X

q_y : intensité de la charge extérieure selon l'axes Y

La relation entre l'intensité de la charge q_x est l'effort normal est obtenue par l'équation d'équilibre d'un élément dx et peut être exprimée par :

$$N - q_x(x)dx - N - dN = 0$$

$$\Rightarrow dN/dx = - q_x(x)$$

Entre l'intensité q_y , l'effort tranchant T et le moment fléchissant M qui agissent dans une certaine section, existent les relations différentielles suivantes :

$$T - q_y(x)dx - T - dT = 0$$

$$\Rightarrow dT/dx = - q_y(x)$$

$$M + Tdx - q_y(x) dx^2/2 - M - dM = 0$$

En négligeant le terme quadratique en dx^2 on obtient :

$$dM/dx = T$$

où

$$d^2M/dx^2 = - q_y$$

4.5 Contraintes normales en flexion plane

Dans cette partie, nous proposons d'étudier le passage de l'effort interne aux contraintes agissant sur les sections de la poutre et particulièrement la distribution des contraintes normales et tangentielles résultant d'une flexion et d'un effort tranchant.

Des contraintes normales se développent dans les sections transversales d'une poutre soumise à un moment fléchissant. La figure 4.7 montre les fibres tendues et comprimées externes d'un tronçon de poutre fléchi. Dans la zone comprimée les fibres se raccourcissent tandis que dans la zone de traction elles s'allongent. Ces deux zones sont séparées par un plan neutre ayant un rayon de courbure R et dont la longueur ne varie pas lors de la flexion. L'allongement relatif d'une fibre se trouvant à une distance y de l'axe neutre peut être écrit :

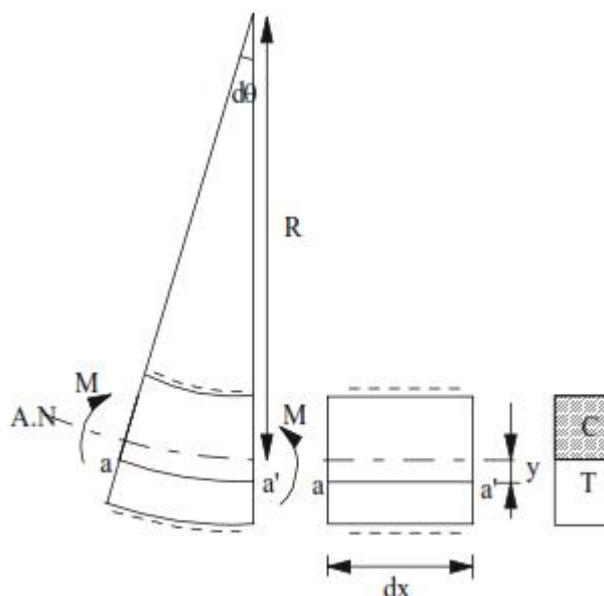


Figure 4.7 : Contrainte dans une fibre déformée.

$$\varepsilon = \frac{a'b}{ab} = \frac{(R+y)d\theta - dx}{dx} \quad (4.1)$$

Avec :

$$dx = R d\theta \quad (4.2)$$

$$\Rightarrow \varepsilon = \frac{y}{R} \quad (4.3)$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \quad (4.4)$$

D'où :

$$\sigma = \frac{E}{R} y \quad (4.5)$$

La condition d'équilibre lie les contraintes et les efforts internes dans la section transversales d'une poutre est :

$$\int_s y ds = M \quad (4.6)$$

En introduisant la valeur de σ de l'équation (4.5) dans l'expression (7.6) on obtient :

$$M = \int_s \frac{E}{R} y^2 ds \quad (4.7)$$

$$M = \frac{E}{R} \iint_s y^2 ds \quad (4.8)$$

$$M = \frac{E I_z}{R} \quad (4.9)$$

En introduisant l'équation (4.5) dans (4.9), la contrainte normale en tout point de la section de la poutre distante de y de l'axe x a pour valeur :

$$\sigma = \frac{M y}{I_z} \quad (4.10)$$

L'équation (4.10) est appelée formule de Navier dont on note que :

- ✓ Les contraintes sont proportionnelles au moment fléchissant et inversement proportionnelles au moment d'inertie I .
- ✓ Les contraintes varient linéairement avec la distance y de l'axe neutre.
- ✓ La fibre la plus sollicitée (la contrainte de traction ou de compression maximales) est située au point le plus éloigné de l'axe neutre.

L'application de cette formule est générale, mais on se considérera que les cas particulier suivants :

1. Cas d'une section ayant un axe de symétrie horizontal :

$$y_{max}^- = y_{max}^+ \quad (4.11)$$

$$|\sigma_{max}^-| = |\sigma_{max}^+| = \sigma_{max} = \frac{M y_{max}}{I_x} \quad (4.12)$$

σ_{max} : La contrainte normale maximale.

$W_y = \frac{I_x}{y_{max}} = \frac{I_x}{h/2}$: Module résistant de la section.

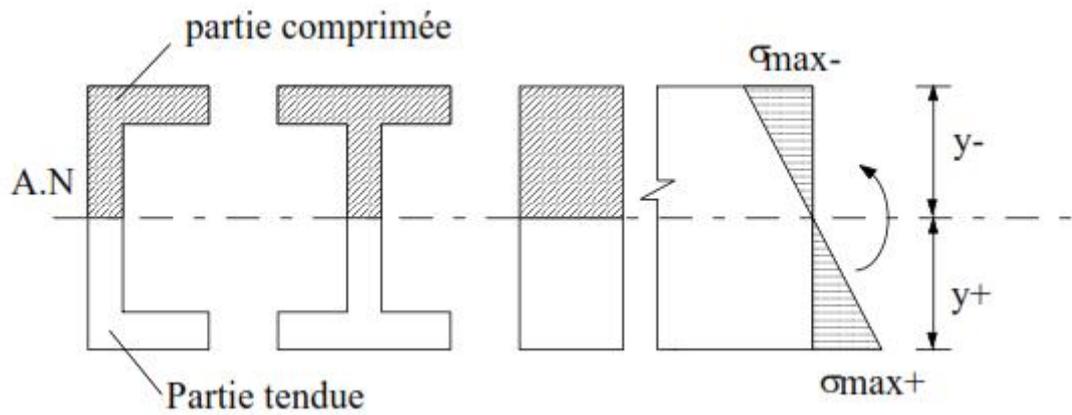


Figure 4.8 : Distribution des contraintes dans une section ayant un axe de symétrie horizontal.

2. Cas d'une section n'ayant pas un axe de symétrie horizontal :

Dans ce cas les contraintes de traction et de compression maximales sont différentes.

$$|\sigma_{max}^-| = \left| \frac{My_{max}^-}{I_x} \right| \quad (4.13)$$

$$\sigma_{max}^+ = \frac{My_{max}^+}{I_x} \quad (4.14)$$

σ_{max}^- : Contrainte de compression max.

σ_{max}^+ : Contrainte de traction max.

y_{max}^- et y_{max}^+ : Des des fibres comprimées et tendues les plus éloignées.

M : Moment fléchissant.

D' où on distingue 2 modules résistants de la section : $\frac{Y_{max}^+}{I_x}$ $\frac{Y_{max}^-}{I_x}$

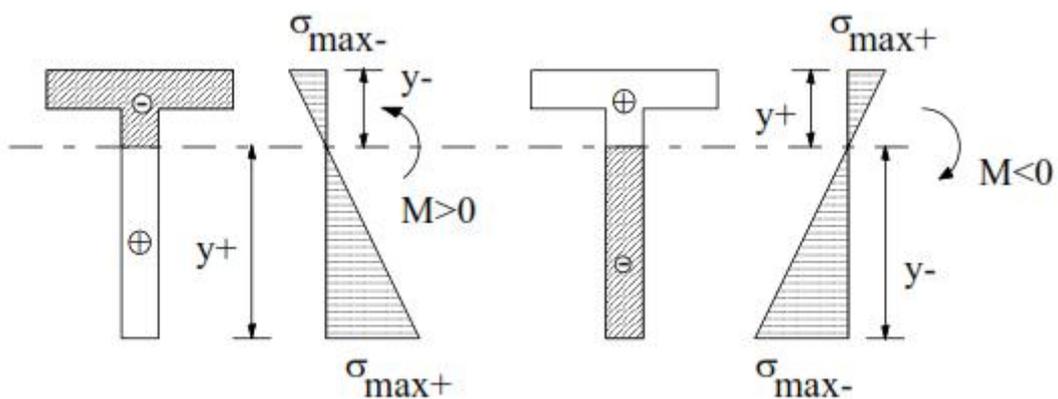


Figure 4.9 : Distribution des contraintes dans une section n'ayant pas un axe de symétrie horizontal.

4.6 Calcul de résistance en flexion

La vérification d'une poutre en flexion se fait à partir de la condition de résistance par rapport aux contraintes normales maximales dans la section.

a) Pour une section symétrique :

$$|\sigma_{max}| = \left| \frac{My_{max}}{I_z} \right| \leq \min([\sigma_-], [\sigma_+]) \quad (4.15)$$

b) Pour une section non symétrique :

$$\text{Si } [\sigma_-] = [\sigma_+] = [\sigma] \Rightarrow \max(|\sigma_{max}^-|, |\sigma_{max}^+|) \leq [\sigma] \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned} \text{Si } [\sigma_-] \neq [\sigma_+] \\ |\sigma_{max}^-| \leq [\sigma_-] \\ |\sigma_{max}^+| \leq [\sigma_+] \end{aligned} \quad (4.17)$$

Exemple 02 :

Vérifier la résistance de la poutre ci-dessous (Figure 4.10) si la contrainte admissible $[\sigma] = 160 \text{ N/mm}^2$.

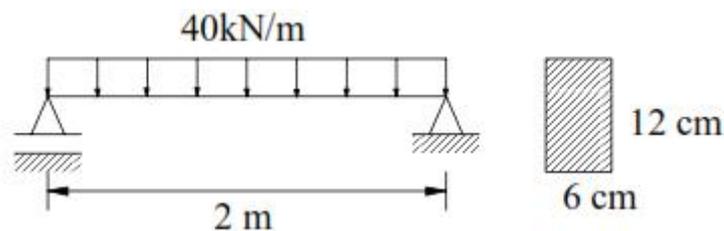


Figure 4.10 : Poutre simplement appui avec une section droite symétrie.

Solution 02 :

Le moment maximal est à mi-travé :

$$M_{max} = \frac{ql^2}{8} = \frac{40 \times 4}{8} = 20 \text{ kN.m}$$

$$I_z = \frac{60 \times 120^3}{12} = 860 \times 10^4 \text{ mm}^2$$

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max} y_{max}}{I_z} = \frac{2 \times 10^6 \times 60}{864 \times 10^4} = 138,8 \text{ N/mm}^2 < 160 \text{ N/mm}^2$$

Exemple 03 :

Vérifier la résistance de la poutre ci-dessous (Figure 4.11).

On donne : $I_z = 2 \times 10^7 \text{ mm}^4$; $h = 160 \text{ mm}$; $y_G = 60 \text{ mm}$; $[\sigma_-] = 80 \text{ N/mm}^2$; $[\sigma_+] = 120 \text{ N/mm}^2$.

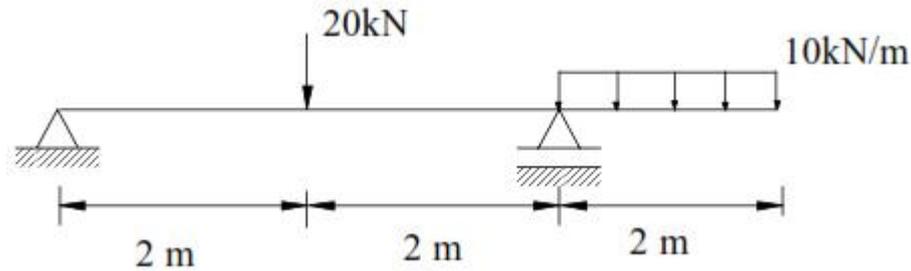


Figure 4.11 : Poutre simplement appui avec une section droite non symétrique.

Solution 03 :

✓ On trace le diagramme des moments :

$$\Rightarrow M_{max}^+ = 10 \text{ kN.m}$$

$$M_{max}^- = 20 \text{ kN.m}$$

✓ Calcul des contraintes :

Pour $M_{max}^+ = 10 \text{ kN.m}$

$$\sigma_{max}^+ = \frac{10 \times 10^6 \times 60}{2 \times 10^7} = 30 \text{ N/mm}^2 \leq 120 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{max}^- = \frac{10 \times 10^6 \times 100}{2 \times 10^7} = 50 \text{ N/mm}^2 \leq 80 \text{ N/mm}^2$$

Et pour $M_{max}^- = 20 \text{ kN.m}$

$$\sigma_{max}^+ = \frac{20 \times 10^6 \times 100}{2 \times 10^7} = 100 \text{ N/mm}^2 \leq 120 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{max}^- = \frac{20 \times 10^6 \times 60}{2 \times 10^7} = 60 \text{ N/mm}^2 \leq 80 \text{ N/mm}^2$$

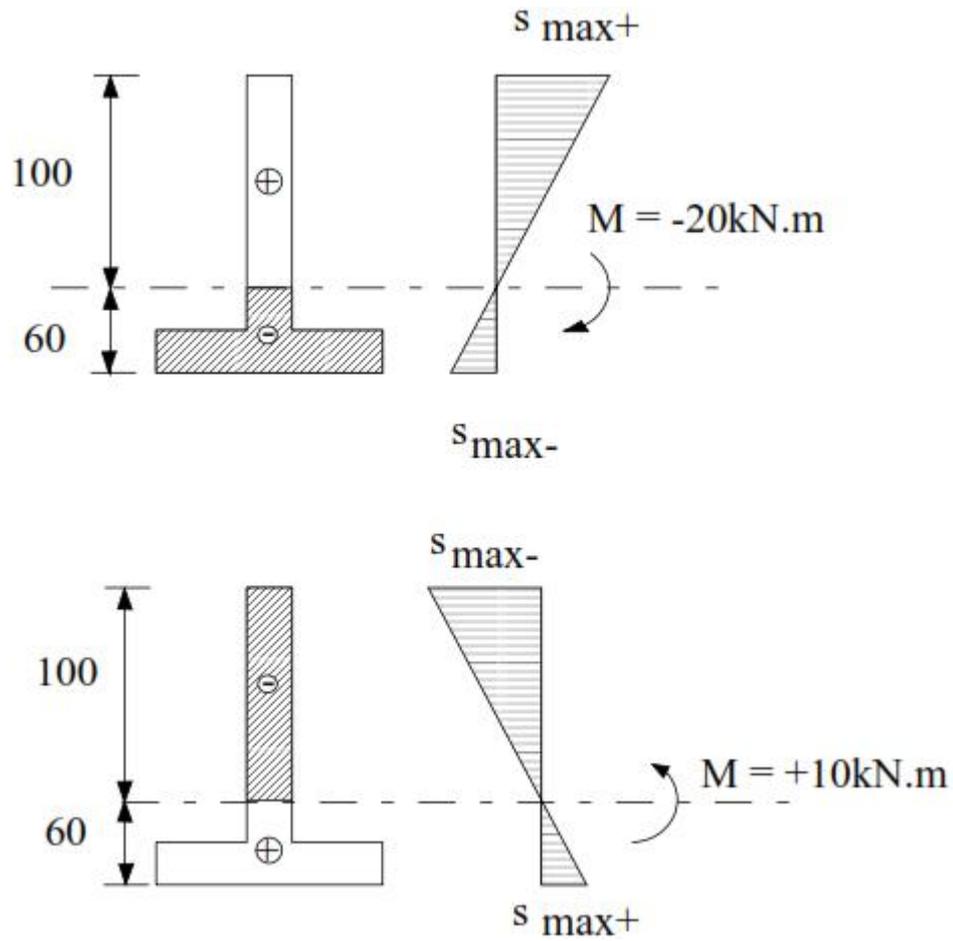


Figure 4.12 : Distribution des contraintes.

4.7 Contraintes tangentielles en flexion

Quand une poutre est soumise à l'action simultanée d'un moment fléchissant et d'un effort tranchant, en plus des contraintes normales, des contraintes tangentielles apparaissent aussi au niveau des sections droites comme le montre dans la Figure 4.13

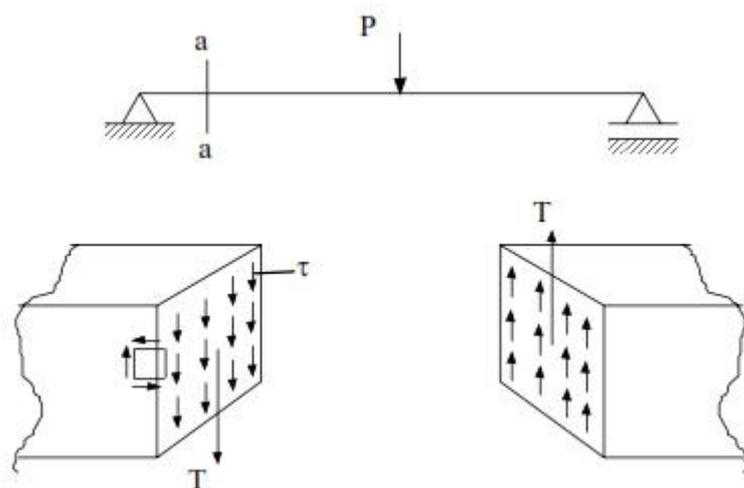


Figure 4.13 : Distribution des contraintes tangentielles.

Considérons un tronçon de poutre de longueur dx soumis à un effort tranchant constant T et un moment fléchissant variant de M à $M+dM$ (Figure 4.14).

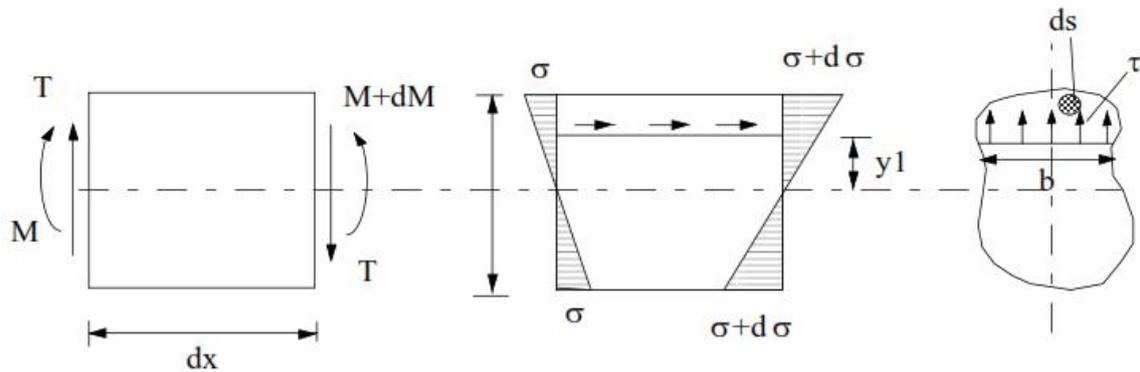


Figure 4.14 : Calcul des contraintes tangentielles.

La partie supérieure de l'élément dx à une distance y_1 de l'axe neutre est en équilibre sous l'action des contraintes à gauche de l'élément dx , $+d$ à droite de l'élément et de la contrainte tangentielle horizontale .

Ecrivons l'équation d'équilibre :

$$\int_{S1} \sigma ds - \int_{S1} (\sigma + d\sigma) ds + \tau b dx = 0 \quad (4.18)$$

En supposant que les contraintes tangentiels sont constantes dans la section $b dx$:

$$b dx = \int \int_{S1} d\sigma ds = \int \int_{S1} \frac{dM}{I} y ds \quad (4.19)$$

$$= \frac{dM}{I} \int \int_{S1} y ds \quad (4.20)$$

$$= \frac{dM}{I} S_1^* \quad (4.21)$$

$$\Rightarrow \tau = \frac{dM}{dx} \frac{S_1^*}{I b} = \frac{T S_1^*}{I b} \quad (4.22)$$

En un point arbitraire d'une section droite d'une poutre soumise à l'action simultanée d'un effort tranchant et d'un moment fléchissant, la valeur de la contrainte tangentielle est déterminée par :

$$\tau = \frac{T S_z^*}{I_z b} \quad (4.23)$$

Avec :

: Contrainte tangentielle.

b : Largeur de la section dans la couche considérée.

I_z : Moment d'inertie.

S_z^* : Moment statique de l'aire située soit au-dessous soit au-dessus de la couche considérée.

T : L'effort tranchant.

La contrainte tangentielle varie avec l'ordonnée y comme le rapport S_z^*/b . est nul aux points des plus éloignés du centre de gravité est passe par un maximum pour l'ordonnée correspondant au maximum de S_z^*/b .

Exemple 04 :

Déterminer la distribution de la contrainte tangentielle de la poutre à section rectangulaire.

Solution 04 :

Dans le cas d'une section rectangulaire, la largeur b est contante. A une distance y de l'axe z-z on détermine le moment statique S^* et le moment quadratique I_z . La formule (4.23) devient :

$$S_1 = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) \quad (4.24)$$

$$I_z = \frac{bh^3}{12}$$

On obtient :

$$\tau = \frac{6T}{bh^3} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) \quad (4.25)$$

$$y = 0 \quad \tau_{max} = \frac{3}{2} \frac{T}{bh}$$

$$y = h/2 \quad \tau_{min} = 0$$

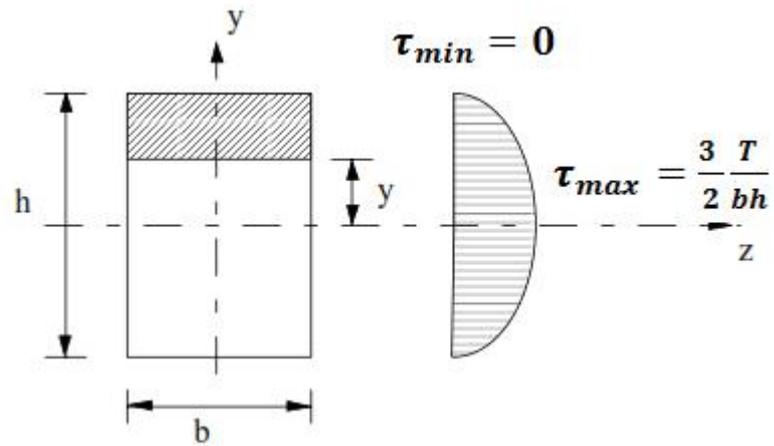
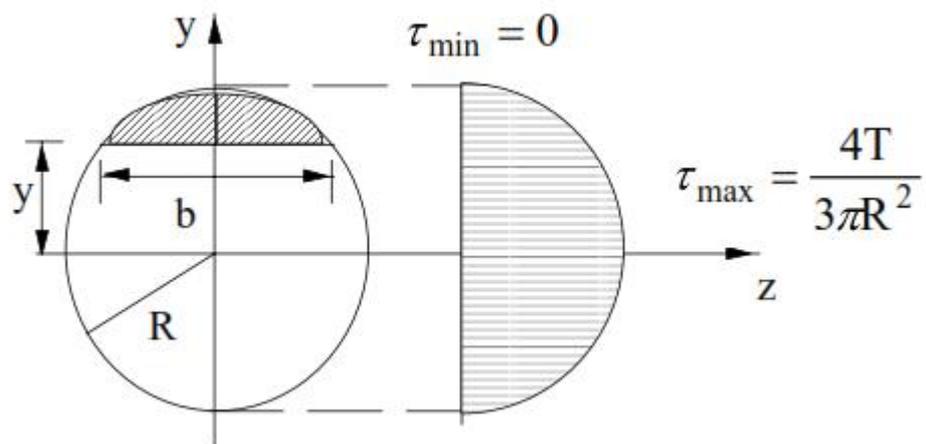


Figure 4.15 : Contraintes tangentielles pour section rectangulaire.

✓ **Poutre à section circulaire**



✓ **Poutre à section triangulaire**

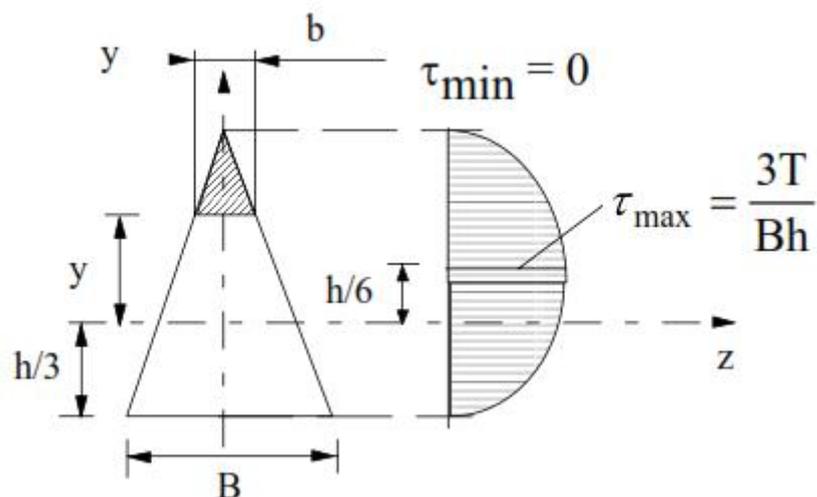


Figure 4.16 : Exemples de distribution des contraintes tangentielles dans une section de poutre en flexion simple.

4.8 Calcul de résistance en flexion simple

Dans le cas général d'une poutre en flexion simple, les valeurs maximales des contraintes normales et celle des contraintes tangentielles se trouvent en des points différents. Dans les points où σ est maximale $\tau = 0$, par contre là où τ est maximale $\sigma = 0$.

D'habitude on vérifie les contraintes normales et tangentielles séparément.

Comme le cas d'une flexion pure, la condition de résistance s'écrit :

$$|\sigma_{max}| = \frac{M_{max} y}{I} \leq [\sigma] \quad (4.26)$$

On devra aussi vérifier :

$$\tau_{max} = \frac{T_{max} S_{max}^*}{bI} \leq [\tau] \quad (4.27)$$

Cependant dans le cas où dans des sections de poutre il existe des points supportant l'action simultanée d'importantes contraintes normales et tangentielles, il convient de vérifier la résistance de la poutre par rapport aux contraintes principales, en utilisant les diverses théories de résistance.

4.9 Déformée d'une poutre soumise à la flexion simple (notion de la flèche)

Quand on charge une poutre, la ligne moyenne qui, initialement est droite, se déforme sous l'effet d'un moment fléchissant. L'allure de l'axe longitudinale de la poutre après flexion (déformé) est appelée ligne élastique.

On s'intéresse au calcul des déformations élastiques à la flexion pour pratiquement deux raisons :

- ✓ Calcul à la rigidité : en plus du calcul à la résistance, on doit parfois vérifier que la flèche de la poutre ne dépasse pas la valeur de la flèche maximale permise.
- ✓ Le calcul des déformations est essentiel pour l'analyse des systèmes hyperstatiques.

4.9.1 Equation différentielle de la ligne élastique

L'expression de l'équation de la déformation peut être facilement obtenue à partir de la relation entre la courbure et le moment fléchissant :

$$\frac{1}{R} = \frac{M_z}{EI_z} \quad (4.28)$$

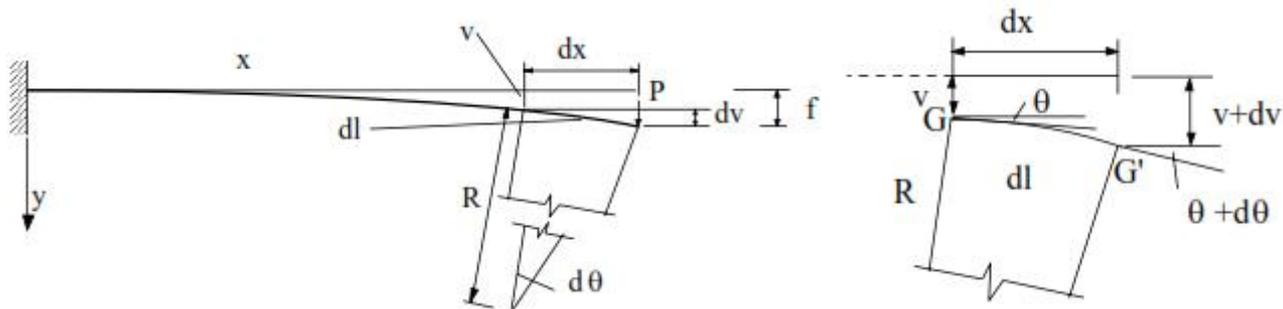


Figure 4.17 : Poutre déformée.

L'arc GG' ayant pour longueur dl :

$$dl = R d\theta \quad (4.29)$$

$$\text{ou } \frac{1}{R} = \frac{d\theta}{dl} \quad (4.30)$$

La tangente de la courbure v au point x est définie par :

$$\frac{dv}{dx} = \text{tg}\theta \quad (4.31)$$

Pour des angles de rotations très petits on assimile :

$$\text{tg} = \quad (4.32)$$

$$\text{et } dx - dl \quad (4.33)$$

En remplaçant (4.32) et (4.33) par leurs valeurs dans (4.30) et (4.31) on obtient :

$$\text{ou } \frac{1}{R} = \frac{d\theta}{dx} \quad (4.34)$$

$$\text{et } \theta = \frac{dv}{dx} \quad (4.35)$$

En dérivant (4.35) par rapport à x :

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2v}{dx^2} \quad (4.36)$$

Des équations (4.34) et (4.36), il en résulte :

$$\frac{1}{R} = \frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2v}{dx^2} \quad (4.37)$$

L'équation (4.28) s'écrira donc :

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = - \frac{M_z}{EI_z} \quad (4.38)$$

C'est l'équation différentielle de la ligne élastique que l'on intègre dans chaque cas particulier afin de déterminer les flèches des poutre.

Le signe dans l'équation (4.38) correspond à :

1. x et v sont positif dans la droite et vers le bas respectivement.
2. L'angle est positif dans le sens des aiguilles d'une montre à partir de l'axe x .
3. M positif quand il tend les fibres inférieures.
4. La courbure est positive si la courbe est concave vers le bas ($M > 0$ et $1/R > 0$).

4.9.2 Méthode d'intégration directe

L'équation de la déformée peut être obtenue par intégration successive de l'équation différentielle (4.38)

$$\theta(x) = \frac{dv}{dx} = \int - \frac{M(x)}{EI} dx + C_1 \quad (4.39)$$

En intégrant une seconde fois il vient :

$$v(x) = \int \left[\int - \frac{M(x)}{EI} dx + C_1 \right] dx + C_2 \quad (4.40)$$

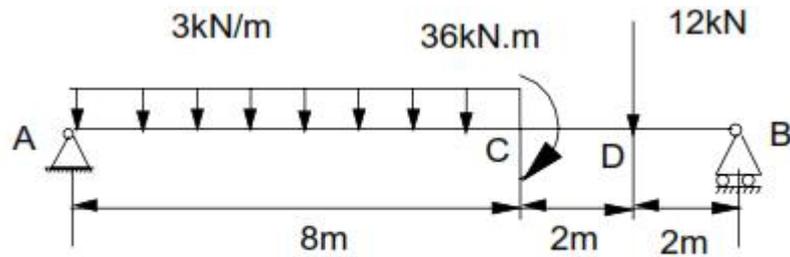
Où C_1 et C_2 sont les constantes d'intégration à déterminer à partir des conditions aux limites.

Il faut noter que dans le cas des poutres ayant plusieurs tronçons dont chacun possède sa propre équation du moment, il faut substituer l'expression de M dans chacune des équations différentielles et procéder à l'intégration. Les constantes d'intégration dans ce cas sont déterminées en utilisant les conditions aux appuis des extrémités de la poutre et aux conditions de continuité aux limites des tronçons.

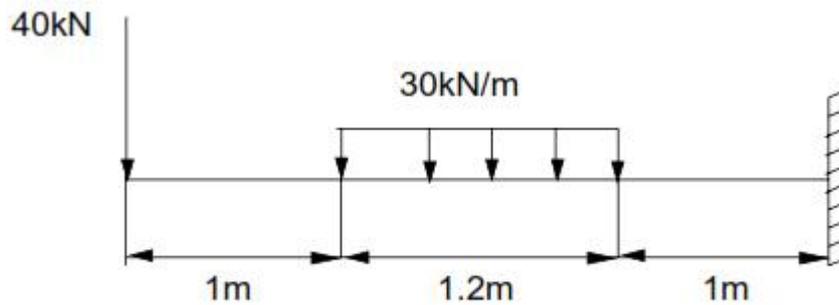
Exercices de flexion simple

Exercice 01

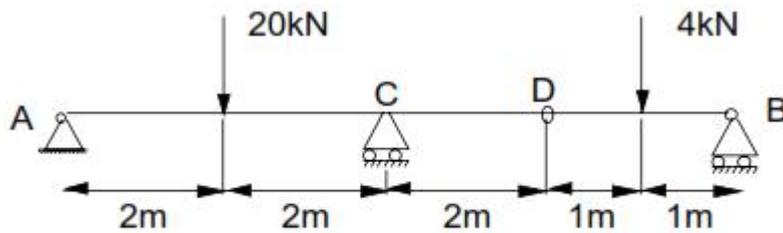
Construire les diagrammes des efforts tranchants et moments fléchissants pour les poutres de la Figure 1, et déduire les valeurs extrêmes.



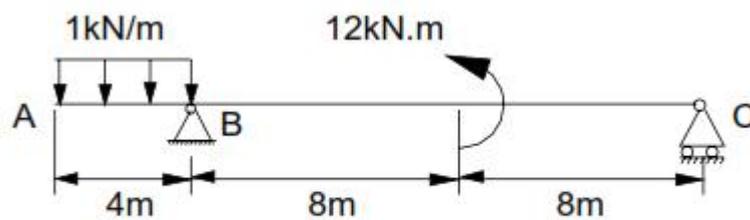
(a)



(b)



(c)



(d)

Figure 1

Exercice 02

Soit une poutre de section transversale triangulaire. Déterminer la dimension b de la section transversale. On donne $[\sigma] = 1600 \text{ kg/cm}^2$, $[\tau] = 1100 \text{ kg/cm}^2$, $h = 12 \text{ cm}$.

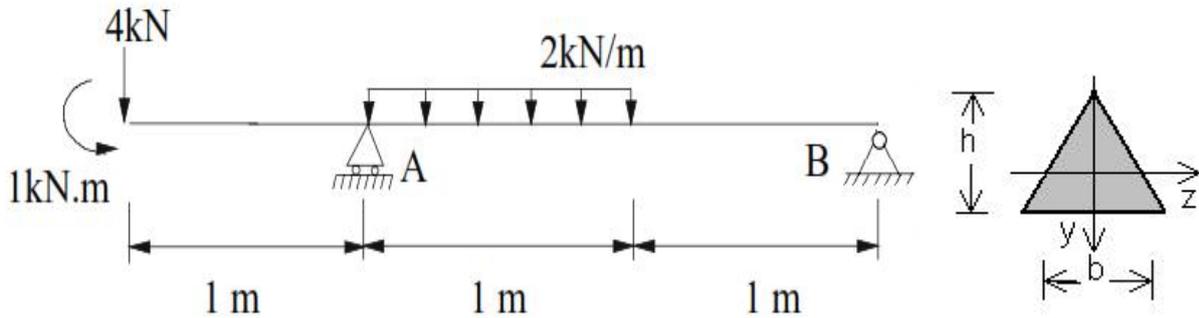


Figure 2

Exercice 03

Soit une poutre en acier de section transversale rectangulaire creuse, comme le montre la figure ci dessous.

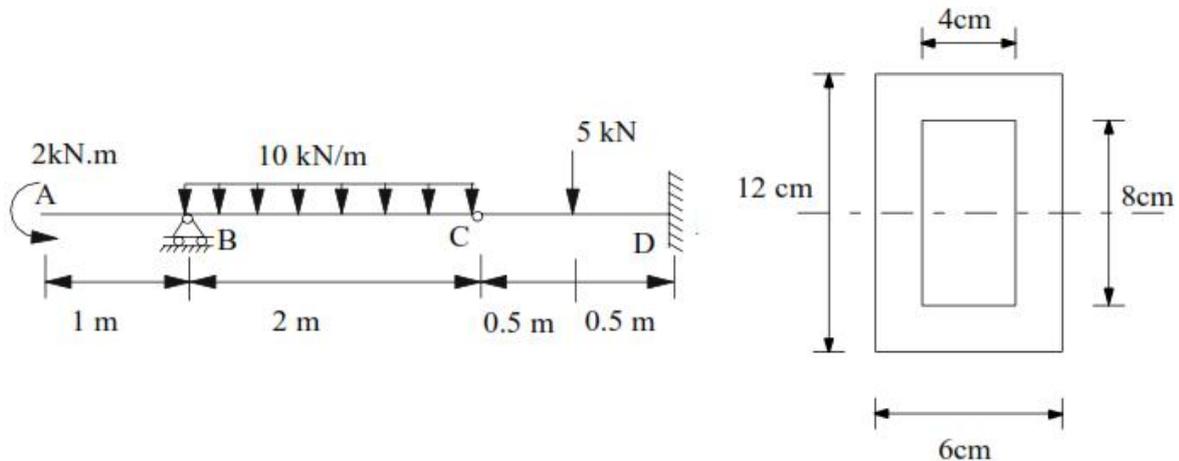


Figure 3

1. Tracer les diagrammes des efforts tranchants et des moments fléchissants tout au long de la poutre.
2. Déterminer la section (ou les sections) dangereuse.
3. Tracer la distribution des contraintes normale et tangentielle tout au long de la section transversale de la poutre, pour la section (ou les sections) dangereuse.
4. Vérifier la résistance de la poutre sachant que la contrainte admissible de traction est $[\sigma] = 300 \text{ N/mm}^2$, de compression $[\sigma] = 200 \text{ N/mm}^2$ et $[\tau] = 50 \text{ N/mm}^2$.

Exercice 04

Déterminer l'expression de la déformée d'une console soumise à une charge uniformément répartie sur toute sa longueur.

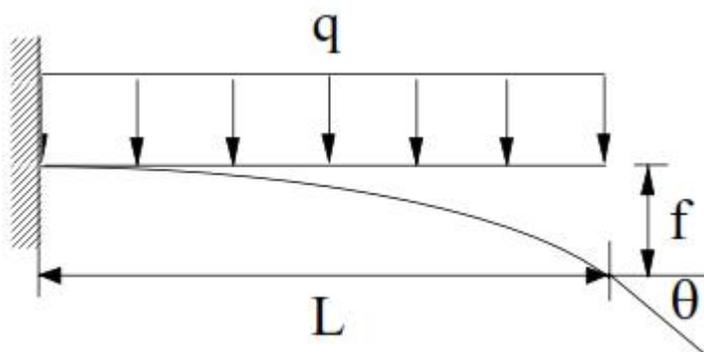


Figure 4

Exercice 05

Déterminer les équations de la déformée et déduire la flèche maximale pour une poutre reposant librement sur deux appuis et soumise à une charge concentrée à une distance a de l'appui A (Figure 5).

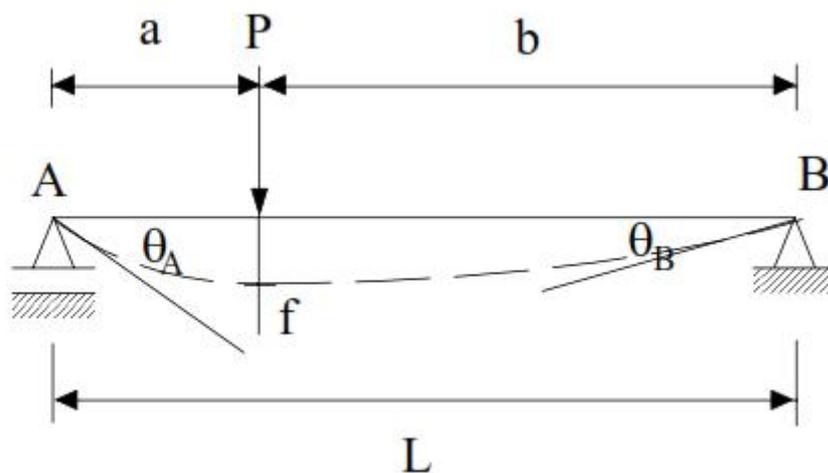


Figure 5

CHAPITRE 5 :

CISAILLEMENT

CHAPITRE 5 : CISAILLEMENT

5.1 Définition

Dans le chapitre précédent nous avons étudié les contraintes tangentielles engendrées par un effort tranchant en présence d'un moment fléchissant. Nous allons maintenant considérer les contraintes tangentielles dues à l'effort tranchant seul.

Un corps est sollicité au cisaillement lorsqu'il est soumis à deux forces opposées qui tendent à le séparer en deux tronçons glissant l'un par rapport à l'autre suivant le plan d'une section.

Si en pratique il est difficile de séparer les sollicitations les une des autres, il est encore plus difficile de réaliser des déformations de cisaillement dans sa forme pure, elles sont généralement accompagnées de déformations de flexion. Cependant les exemples considérés comme étant en cisaillement pur sont nombreux : les composants des assemblages métalliques constituent la majorité.

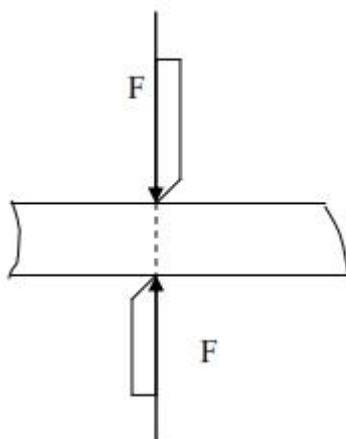


Figure 5.1 : Découpage d'une tôle.

5.2 Contrainte de cisaillement

On considère une tôle de section A encastrée dans un massif rigide fixe (Figure 5.2). Le long de ce massif, on applique verticalement la lame d'une cisaille avec une force V perpendiculaire à l'axe longitudinal xx' . Le principe de l'action et de la réaction fait que le massif exerce une force de réaction égale et opposée à T (appelée **effort tranchant**). La tôle est alors soumise au cisaillement. Si la cisaille est suffisamment tranchante, elle fait glisser les sections immédiatement voisines l'une sur l'autre au niveau de l'encastrement. En supposant que toutes les fibres de la tôle supportent la même contrainte.

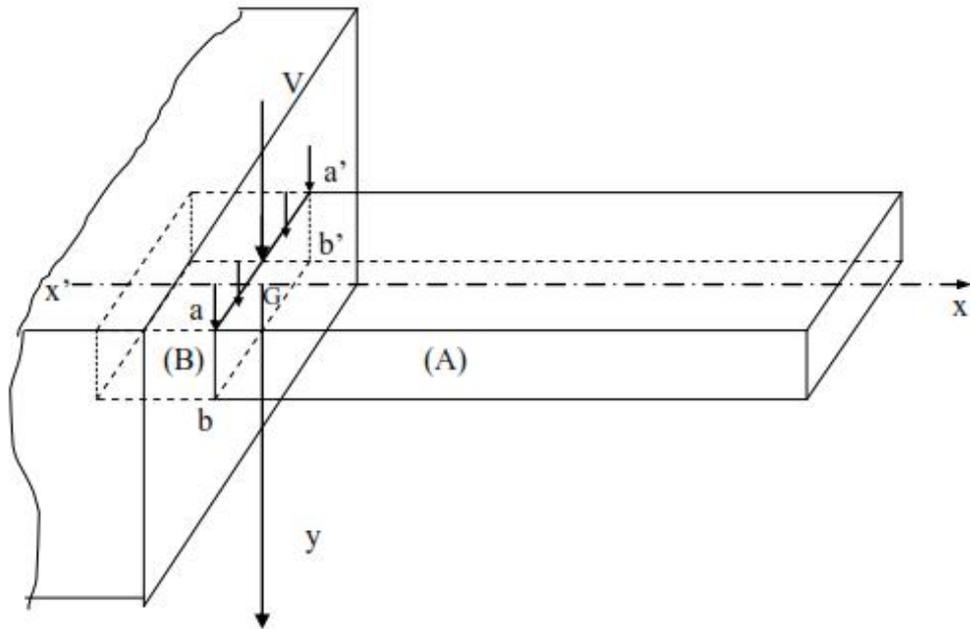


Figure 5.2 : Système soumis à un effort tranchant.

L'effort V agit dans le plan de la section droite d'encastrement $aa'bb'$ et il est supposé uniformément réparti le long de l'arête aa' . En réalité, la section $aa'bb'$ est très voisine de V mais à gauche de son plan d'application, du fait qu'il est impossible que V s'exerce rigoureusement dans le plan d'encastrement (Figure 5.3). (x très petit.)

Remarque : on admet que la répartition des forces intérieures est uniforme, ce qui entraîne la répartition uniforme des contraintes.

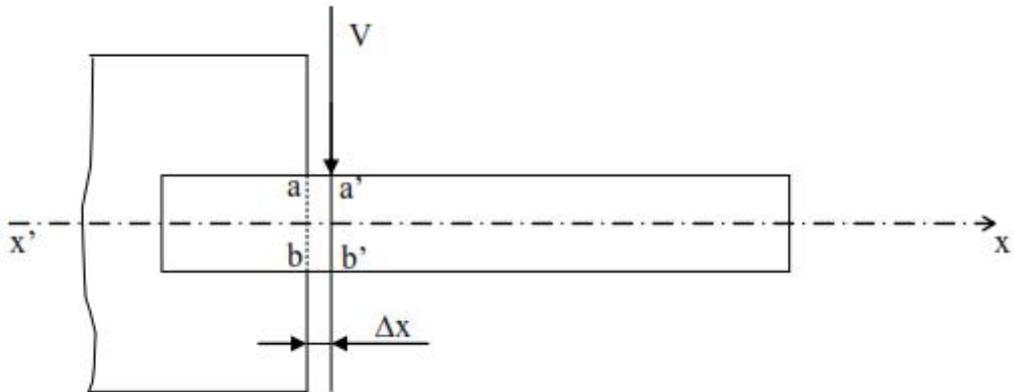


Figure 5.3 : Force de cisaillement en un point d'une section.

Mise en équilibre du tronçon (A) : la section droite S (aa'bb') sépare le prisme en deux tronçons A et B. Pour la mise en équilibre, négligeons ρ (cas idéal du cisaillement). Le tronçon A est soumis :

- ✓ à son poids, négligé devant V,
- ✓ à V, l'effort tranchant,
- ✓ à l'action du tronçon B (forces intérieures) qui se traduit par :

$$V' = \int (\tau \cdot dS) = \tau \cdot S \quad (5.1)$$

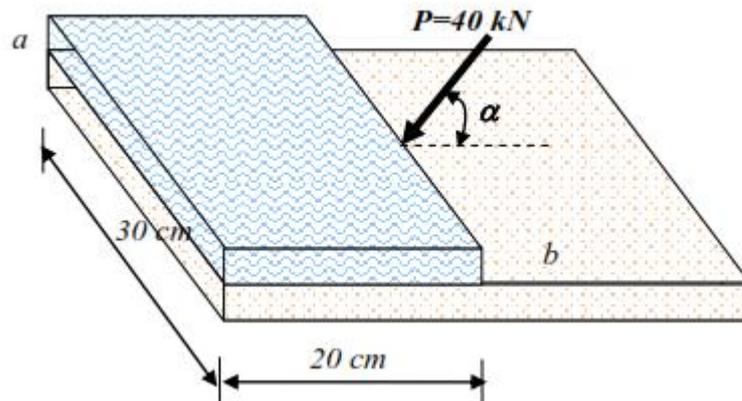
Par projection sur Gy, on obtient : $V' - \tau \cdot dS = 0$

La valeur moyenne de la contrainte tangentielle de cisaillement est :

$$\tau = \frac{V}{S} \quad (5.2)$$

➤ Exemple 5.1

Calculer la contrainte moyenne sur le plan ab sur la figure ci-dessous.



Solution de l'exemple 5.1

La contrainte moyenne sur le plan ab est:

$$\tau = \frac{V}{S} = \frac{P \cos \alpha}{S}$$

D'où pour α , par exemple, égale à 45° on a :

$$= \frac{40 \sqrt{2}}{2 (20 \times 30)} = 0,047 \text{ kK/cm}^2$$

5.3 Déformation élastique en cisaillement

L'essai de cisaillement peut être effectué comme l'indique le montage de la Figure 5.4, l'effort V s'exerçant lentement.

Rappelons que les sections ab et a_1b_1 sont très voisines et distantes de ρ .

Après déformation, la section a_1b_1 vient en a_2b_2 et la dénivellation a_1a_2 mesure alors le glissement transversal (Figure 5.5).

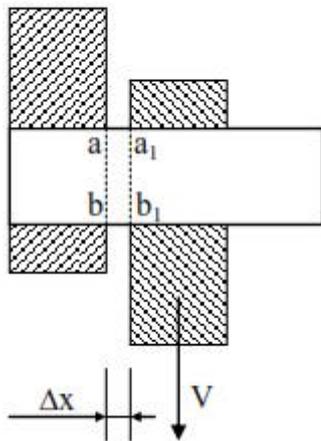


Figure 5.4 : Avant sollicitation.

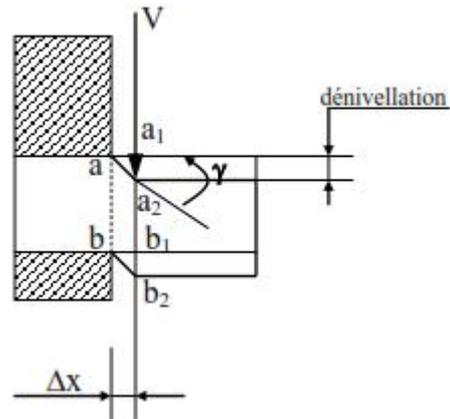


Figure 5.5 : Pendant la sollicitation en cisaillement.

Si on admet que a_2 reste rectiligne, on définit la déformation par le rapport :

$$tg\gamma = \frac{a_1 a_2}{\Delta x} \quad (5.3)$$

Avec γ , angle de glissement ;

Pour beaucoup de matériaux, la déformation de cisaillement est linéairement proportionnelle à la contrainte de cisaillement dans certaines limites (glissement faible). Cette dépendance linéaire est semblable au cas de la traction et de la compression directe. Dans les limites de la proportionnalité, on a

$$\tau = G \gamma \quad (5.4)$$

Par ailleurs, puisque nous avons restons dans le domaine élastique, nous avons :

$$\frac{V}{a_1 a_2} = Cte \text{ (par analogie avec l'essai de traction } = E \cdot \epsilon) \text{ et } tg\gamma \approx \gamma$$

$$\text{Soit : } G = \frac{V}{\frac{a_1 a_2}{\Delta x}} \quad (5.5)$$

$$\text{D'où } \gamma = \frac{V}{G.S} \quad (5.6)$$

Avec :

- ✓ : s'appelle "distorsion" ou "déformation de cisaillement".
- ✓ **G** : module d'élasticité transversale ou de cisaillement (**module de coulomb**)

Le coefficient de proportionnalité **G** est semblable au module de Young **E**, pour la traction et la compression. Pour la plupart des matériaux **E** est environ 2.5 fois plus grand que **G**. Pour les métaux $G \approx 0.4 E$, par exemple :

Aciers : $E = 200\,000 \text{ N/mm}^2$ et $G = 80\,000 \text{ N/mm}^2$;
Fontes : $E = 100\,000 \text{ N/mm}^2$ et $G = 40\,000 \text{ N/mm}^2$.

➤ **Exemple 5.2**

La contrainte de cisaillement dans un corps métallique est égale à 1050 kg/cm^2 . Si le module de cisaillement vaut 8400 kN/cm^2 , déterminer la déformation de cisaillement.

Solution de l'exemple 5.2

La déformation de cisaillement est:

$$\gamma = \frac{\tau}{G} = \frac{1050}{840000} = 0,00125 \text{ rad} = 0,225^\circ$$

D'où pour α , par exemple, égale à 45° on a :

$$\gamma = 0,225^\circ$$

5.4 Etat de cisaillement pur

Dans l'état de contrainte de cisaillement pur, les contraintes principales suivant les plans inclinés à 45° sont :

$$\sigma_1 = -\sigma_2 = \tau \tag{5.7}$$

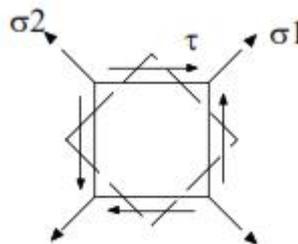


Figure 5.6 : Etat de contrainte de cisaillement pur.

5.5 Condition de résistance au cisaillement

Le calcul de cisaillement pur consiste à déterminer la contrainte tangentielle τ_{max} dans l'élément le plus sollicité et comparer cette valeur avec la contrainte admissible. La contrainte de résistance au cisaillement s'écrit sous la forme :

$$\tau_{max} \leq [\tau] \quad (5.8)$$

La contrainte de cisaillement admissible est déterminée en fonction de la contrainte normale admissible qui est une caractéristique du matériau.

D'après la première théorie de résistance :

$$\sigma_1 = \tau \leq [\tau] \Rightarrow [\tau] = [\sigma] \quad (5.9)$$

D'après la deuxième théorie :

$$\sigma_1 - \nu \sigma_2 \leq [\sigma]$$

$$\tau + \nu \tau \leq [\sigma]$$

$$\tau \leq \frac{[\sigma]}{1+\nu} \Rightarrow [\tau] \leq \frac{[\sigma]}{1+\nu} \quad (5.10)$$

Pour les métaux : $\nu = 0,25$ à $0,42 \Rightarrow [\tau] = (0,7$ à $0,8)[\sigma]$

D'après la troisième théorie :

$$\sigma_1 - \sigma_2 \leq [\sigma]$$

$$\tau + \tau \leq [\tau]$$

$$\tau \leq \frac{[\sigma]}{2} \Rightarrow [\tau] \leq \frac{[\sigma]}{2} \quad (5.11)$$

D'après la quatrième théorie

$$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2} : []$$

$$\tau \leq \frac{[\sigma]}{\sqrt{3}} \Rightarrow [\tau] = \frac{[\sigma]}{\sqrt{3}} \approx 0,6 [\sigma] \quad (5.12)$$

Remarque : notons que lors du calcul des éléments en matériaux ductiles (boulons, rivets,etc.) Cette dernière formule est la plus utilisée.

Exercices de cisaillement

Exercice 01

On veut assembler, à l'aide de rivets dont le diamètre de chacun vaut 20 mm et d'un couvre joint, deux tôles métalliques de 140 mm de largeur et 10 mm d'épaisseur. L'ensemble est soumis à un effort de traction $F = 10\,000$ daN, comme montré par la Figure 1.

1. Déterminer le nombre de rivets nécessaires à cet assemblage si la contrainte admissible de cisaillement [], pour chaque rivet, est égale à la 90 MPa.
2. Vérifier la résistance du système si la contrainte admissible pour chacune des deux tôles est 12 daN/mm².

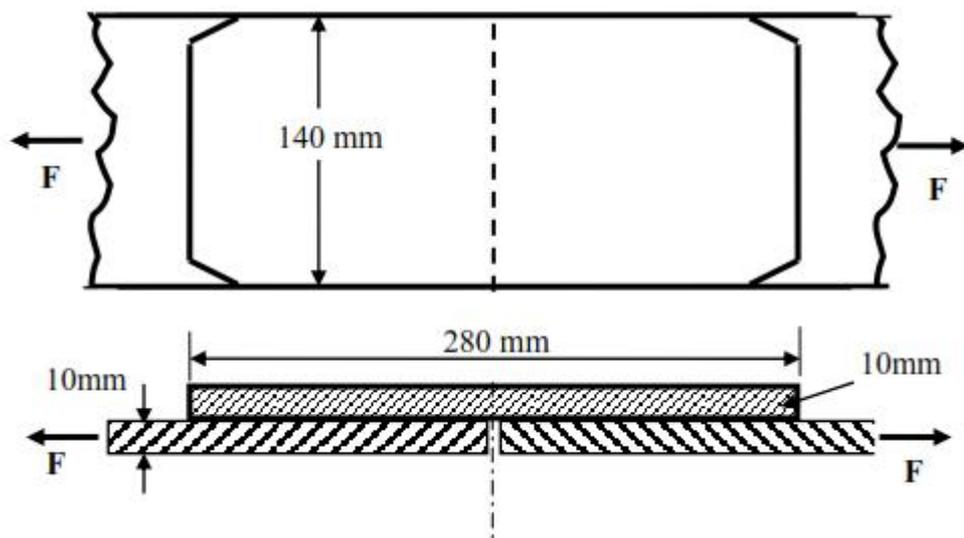


Figure 1

Exercice 02

Trois tôles en acier sont assemblées entre elles par deux rivets de diamètre chacun égale à 17 mm (Figure 2).

1. Vérifier la résistance des rivets si la contrainte admissible de cisaillement [] est égale à la 900 kg/cm².
2. Déterminer l'épaisseur minimale de chacune des deux tôles si [] = 1200 kg/cm².

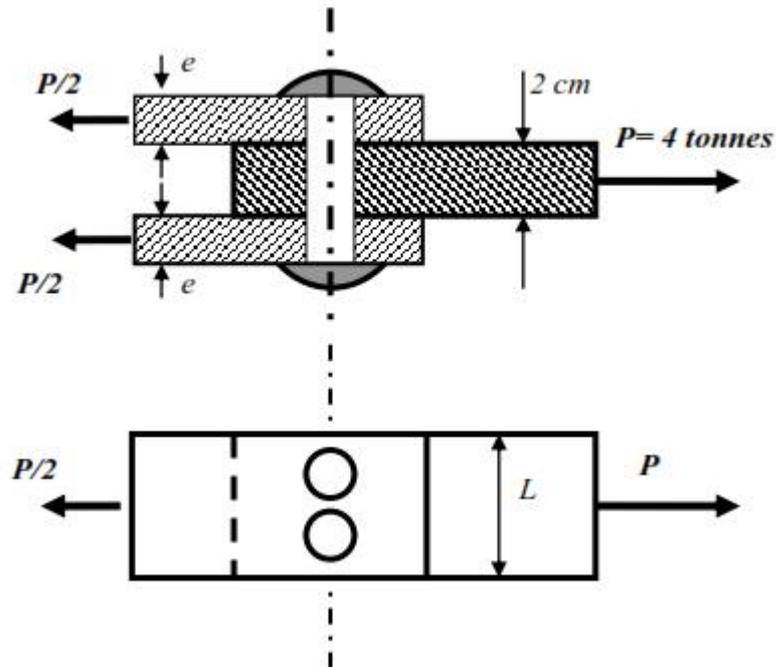


Figure 2

Exercice 03

Deux pièces plates sont collées comme indiqué sur la Figure 3. La contrainte provoquée par l'effort tranchant est égale à la 235 daN/cm^2 et sa contrainte admissible de cisaillement [] est de 175 daN/cm^2 . La colle étant uniformément répartie sur la surface rectangulaire $(30 \times 70) \text{ mm}^2$.

Déterminer l'effort de traction maximal admissible par l'assemblage.

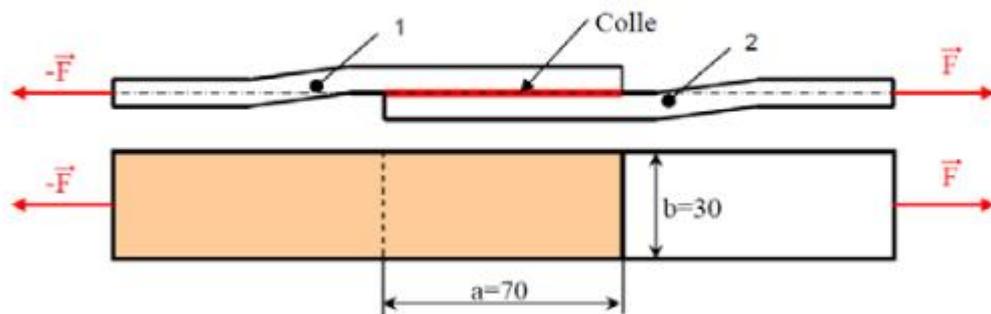


Figure 3

Exercice 04

Pour percer des trous dans une tôle en aluminium de 4 mm d'épaisseur, on utilise une poinçonneuse ayant une aiguille de 20 mm de diamètre. Quelle force faut-il appliquer au niveau de l'aiguille (Figure 4) pour percer la tôle si la contrainte admissible de cisaillement [] de l'aluminium est de 275 N/mm^2 .

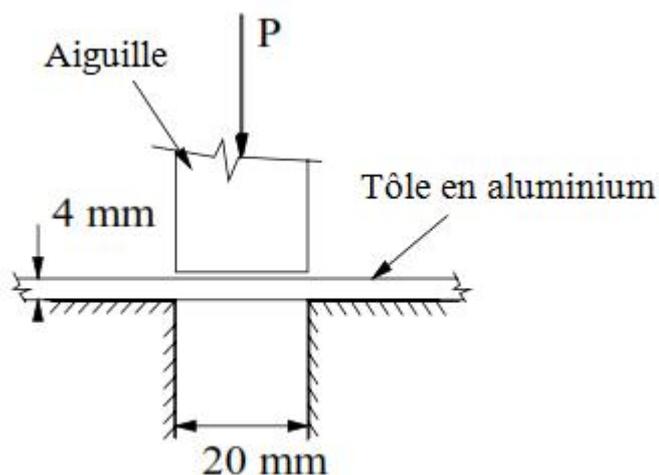


Figure 4

Exercice 05

Deux cylindres sont collés comme indiqué ci-contre (Figure 5). La contrainte admissible de cisaillement [] est de 180 daN/cm^2 . La colle est uniformément répartie sur l'enveloppe cylindrique de $\text{Ø}30 \text{ mm}$ et de longueur L inconnue. L'effort F supporté par l'assemblage à une intensité de 2600 daN . Déterminer la longueur de joint collé.

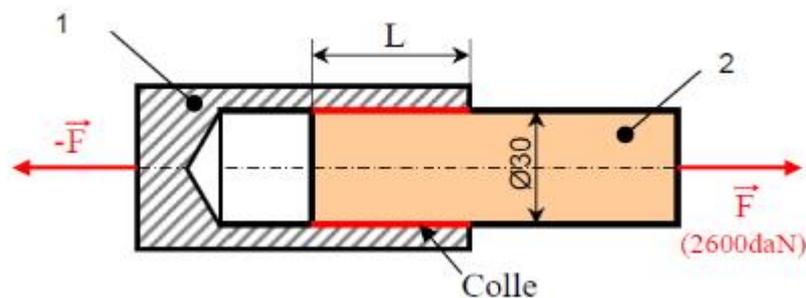


Figure 5

Exercice 06

L'adhérence d'une barre d'acier au béton est déterminée par test d'arrachement (Figure 6). Pour arracher une barre de diamètre $d = 12$ mm et de longueur enrobée $L = 300$ mm, on doit exercer une force de traction $P = 17,8$ kN, quelle est la contrainte d'adhérence acier-béton.

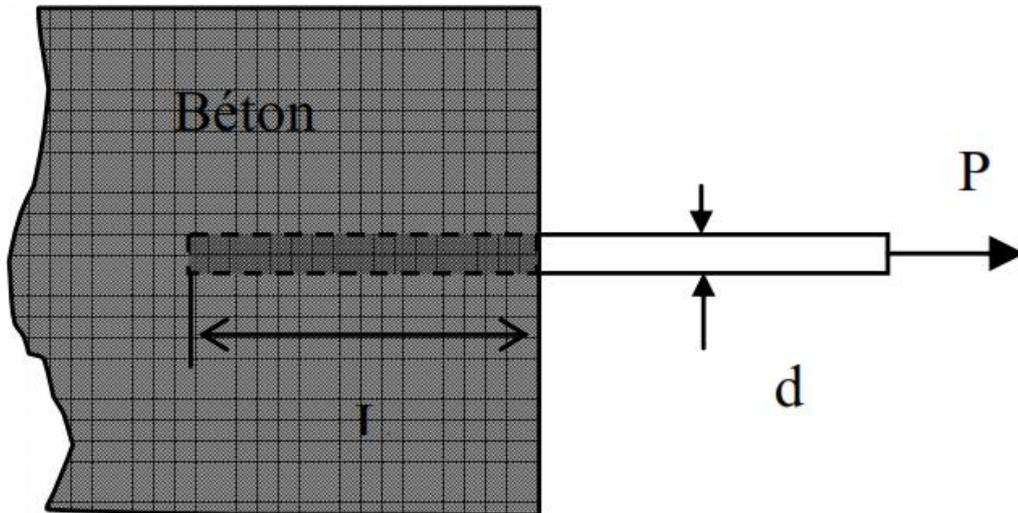


Figure 6

CHAPITRE 6 :

TORSION

CHAPITRE 6 : TORSION

6.1 Définition

La torsion est une charge telle que dans les sections droite de la barre seul apparait un moment de torsion. Les autres facteurs, moments fléchissants, force normale et effort tranchant, sont nuls.

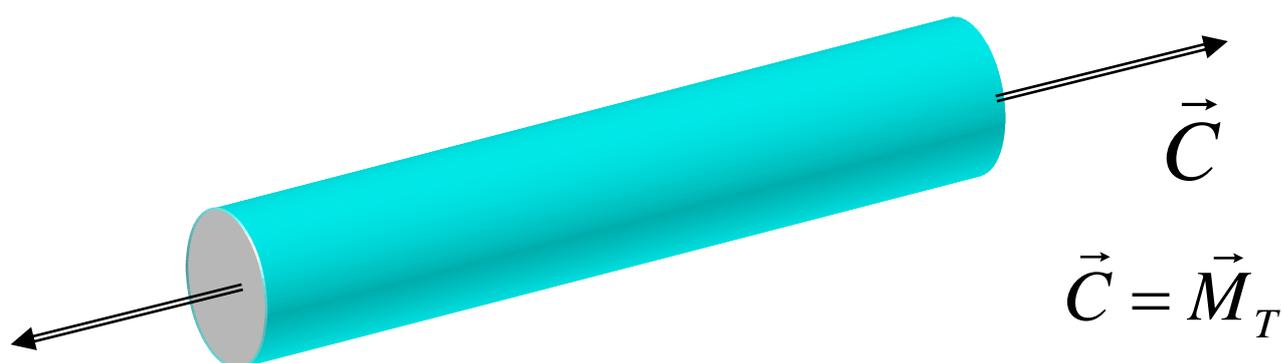


Figure 6.1 : Exemple d'une barre soumise à la torsion.

Supposons que la barre est chargée seulement par un couple situé dans le plan perpendiculaire à l'axe de la barre.

Coupons la barre et considérons l'équation de la partie droite. On peut voir que :

$$N = T_z = T_y = M_z = M_y = 0$$

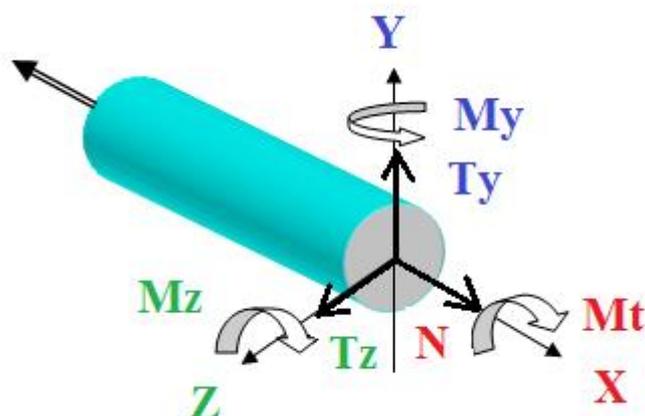


Figure 6.2 : Les Efforts internes.

La seule force intérieure avec laquelle la partie gauche agit sur la partie droite est le moment intérieur M_t . Ce moment s'appelle le moment de torsion, il se trouve dans le plan de la section.

La barre circulaire qui travaille à la torsion s'appelle arbre.

6.2 Convention de signe et Diagramme du moment de torsion

Par convention, le moment de torsion (effort interne) est:

- Positif ($M_t > 0$) s'il agit dans le sens antihoraire pour un observateur qui regarde la section ;
- négatif ($M_t < 0$) s'il agit dans le sens horaire pour un observateur qui regarde la section.

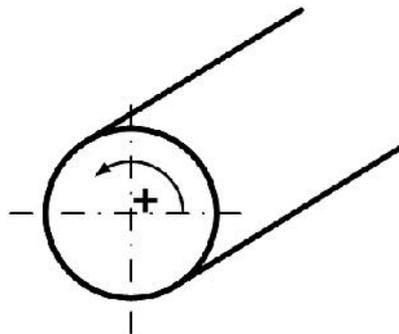


Figure 6.3 : Convention de signe.

Le moment de torsion agissant en un point d'une barre est égal à la somme algébrique des moments des couples extérieurs appliqués d'un côté ou de l'autre de la partie considérée.

6.3 Contraintes et déformation

Comme pour les sollicitations en traction / compression, une sollicitation en torsion entraîne une déformation. Cette propriété est d'ailleurs utilisée pour réaliser des suspensions à barre de torsion.

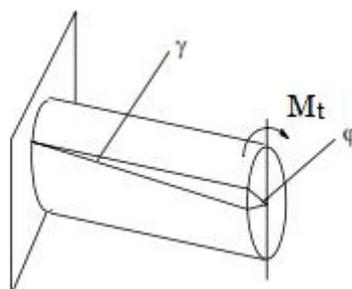


Figure 6.4 : Déformation de la barre.

Considérons une barre de section circulaire soumise à un moment de torsion constant. Coupons un élément de longueur (dx).

M_t

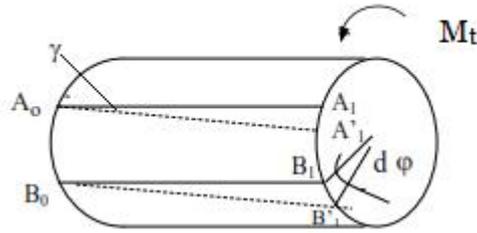
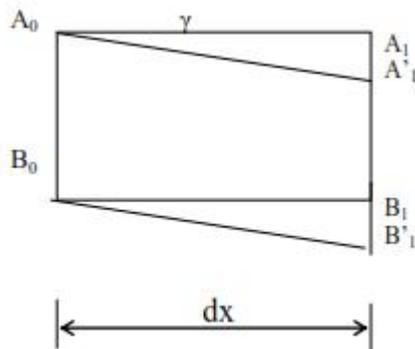


Figure 6.5 : Elément d'une barre soumise à la torsion.

Si on développe en plan le rectangle $A_0A_1B_1B_0$, on constate qu'il se déforme en parallélogramme :



L'angle de déformation est appelé : distorsion exprimé par :

$$tg\gamma = \frac{A_1 A_1'}{A_0 A_1} \quad (6.1)$$

$$A_1 A_1' = r d \quad \text{et} \quad A_0 A_1 = dx$$

En tenant compte du fait que l'angle γ est petit on assimilera $tg\gamma$ à γ et on obtient alors :

$$= r \frac{d\varphi}{dx} \quad (6.2)$$

$\frac{d\varphi}{dx}$ est l'angle de torsion par unité de longueur qui est constante et on la note par θ de sorte :

$$= r \theta \quad (6.3)$$

On peut écrire une deuxième expression de la loi de Hooke sous la forme :

$$\ddagger_M = G. \chi \quad (6.4)$$

Où G est le module d'élasticité transversal (ou module de Coulomb).

En remplaçant la déformation de cisaillement par son expression, on obtient :

$$\tau_M = r \cdot G \cdot \theta \quad (6.5)$$

Pour calculer les contraintes de cisaillement dans la barre on utilise, au lieu du rayon r , la coordonnée polaire au point considéré :

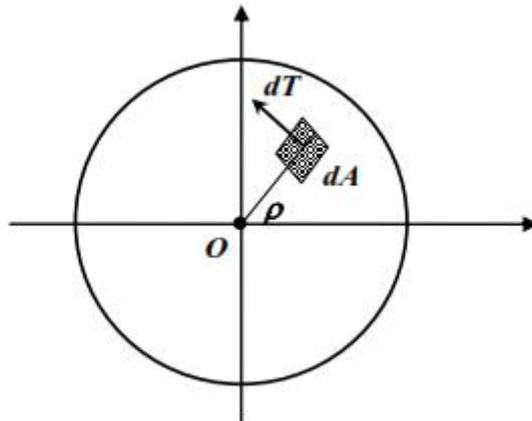


Figure 6.6 : Force de cisaillement en un point d'une section.

La force élémentaire agissant sur la surface dA est :

$$dT = \tau \cdot dA$$

Cette force fait naître un moment de torsion élémentaire dM_t :

$$dM_t = \rho \cdot dT$$

Ainsi, le moment de torsion est :

$$M_t = \int_A \rho \cdot \tau \cdot dA \quad (6.6)$$

En substituant τ par son expression (6.5)

$$M_t = \int_A G \cdot \theta \cdot \rho^2 \cdot dA \quad (6.7)$$

Finalement, la relation entre le moment de torsion et l'angle :

$$M_t = G \cdot \theta \int_A \rho^2 \cdot dA \quad (6.8)$$

On reconnaît dans cette expression le moment quadratique polaire :

$$I_P = \int_A \rho^2 dA \quad (6.9)$$

D'où l'expression de la déformation angulaire relative :

$$M_t = G \cdot \theta \cdot I_P \quad (6.10)$$

La quantité $G I_P$ est la rigidité à la torsion.

Des relation (6.3), (6.4) et (6.10), on tire

$$\tau = \frac{M_t}{I_P} \rho \quad (6.11)$$

Cette formule montre que les contraintes sont proportionnelles à la distance du point considéré au centre de gravité de la section. On peut alors tracer le graphe de répartition de la contrainte dans une section. La contrainte tangentielle est maximale sur les fibres extérieures :

$$\text{Pour } \rho = R \quad \tau_{max} = \frac{M_t}{I_P} R \quad (6.12)$$

La quantité $W_P = \frac{I_P}{R}$ est appelée module de torsion.

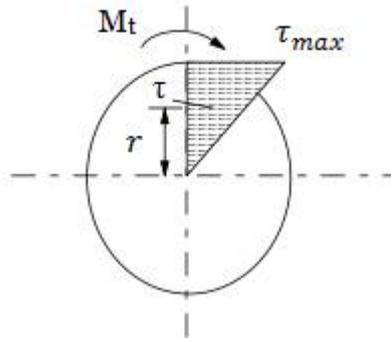


Figure 6.7 : Distribution des contraintes de cisaillement dans une section soumise à la torsion.

L'angle de rotation d'une poutre de longueur L peut être obtenu de l'expression (6.13) :

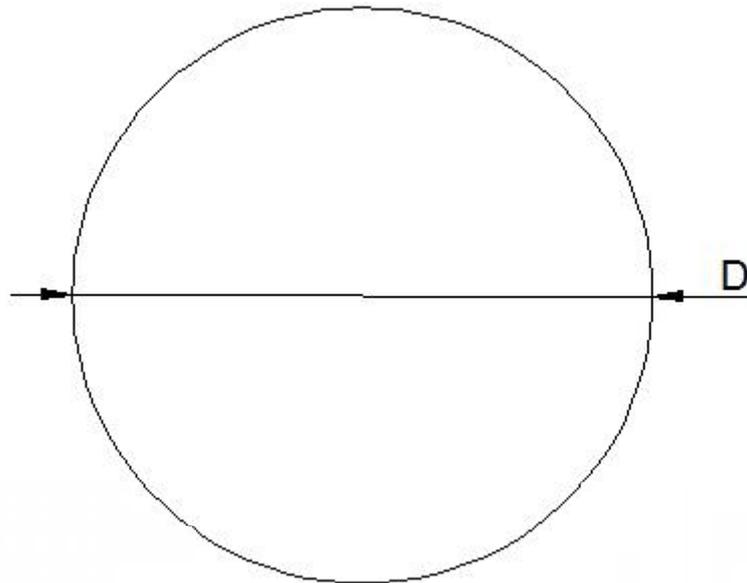
$$\varphi = \int_0^L \frac{M_X}{G I_P} dx \quad (6.13)$$

Si la forme de la section et le moment sont constants alors :

$$\varphi = \frac{M_t L}{G I_P} \quad (6.14)$$

➤ *Exemples de Calcul des modules de résistance polaires*

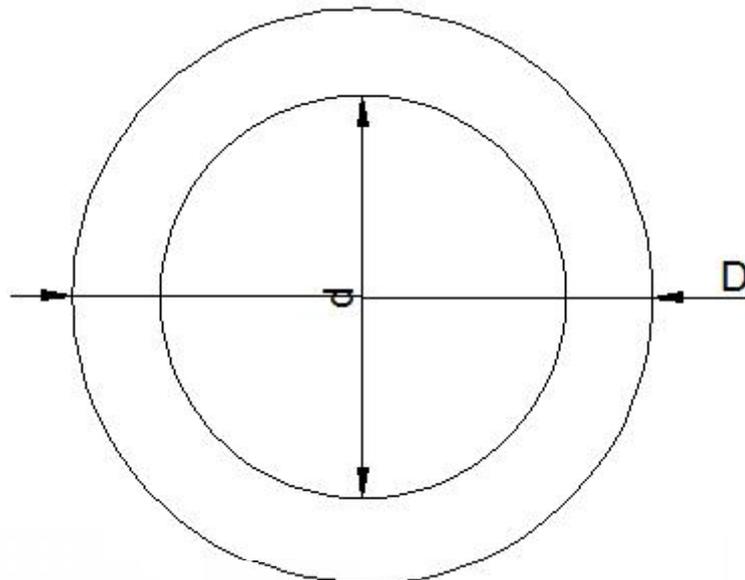
a. Section circulaire pleine



$$I_P = \frac{\pi D^4}{32}$$

$$W_P = \frac{\pi D^3}{16}$$

b. Section circulaire tubulaire



$$I_P = \frac{\pi (D^4 - d^4)}{32}$$

$$W_P = \frac{\pi (D^4 - d^4)}{16 D}$$

6.4 Torsion d'une barre à section transversale non circulaire

L'hypothèse des sections planes ne peut être admise lors de la torsion des sections non-circulaires et donc les méthodes de la résistance des matériaux ne peuvent pas être appliquées.

Dans ce paragraphe, on utilisera les formules obtenues par les méthodes de la théorie d'élasticité pour le cas des sections non circulaires.

La distribution des contraintes d'une section non circulaire est représentée dans la figure ci-dessous (Figure 6.8) et la contrainte maximale est donnée par la formule :

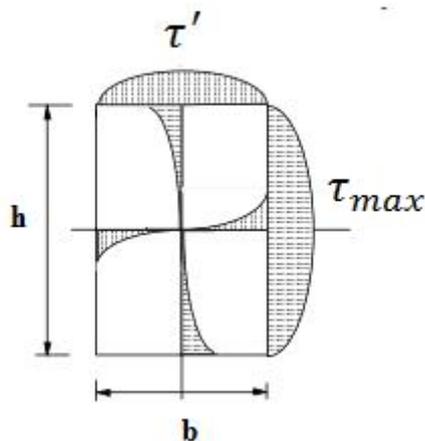


Figure 6.8 : Contrainte de cisaillement dans une section non circulaire.

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{W_t} \quad (6.15)$$

W_t est appelé module de résistance à la torsion et il est différent du module de résistance polaire W_p sauf pour les sections circulaires et s'exprime par la relation:

$$w_t = \alpha h b^2 \quad (6.16)$$

Tels que h et b sont les dimensions de la section avec $h > b$.

$$\tau' = \beta \tau_{max} \quad (6.17)$$

Et l'angle de rotation se calcule dans ce cas par l'expression :

$$\varphi = \frac{M_t L}{G I_t} \quad (6.18)$$

Où I_t est donnée par

$$I_t = h b^2 \quad (6.19)$$

Les coefficients α , β et γ sont donnés en fonction du rapport h/b dans le tableau suivant :

Tableau 6.1 : Valeurs des coefficients α , β et γ en fonction du rapport h/b

| h/b | 1,0 | 1,5 | 1,75 | 2,0 | 2,5 | 3,0 | 4,0 | 6,0 | 10 | |
|------------|------------|------------|-------------|------------|------------|------------|------------|------------|-----------|-------|
| | 0,208 | 0,231 | 0,239 | 0,246 | 0,258 | 0,267 | 0,282 | 0,299 | 0,313 | 0,333 |
| | 1,0 | 0,859 | 0,820 | 0,795 | 0,766 | 0,766 | 0,753 | 0,745 | 0,742 | 0,742 |
| | 0,141 | 0,196 | 0,214 | 0,229 | 0,249 | 0,263 | 0,281 | 0,299 | 0,313 | 0,333 |

6.5 Calcul de résistance à la torsion

En plus de la condition de résistance, lors du calcul des barres à la torsion ; on vérifie aussi la condition de rigidité. Les deux conditions s'écrivent donc :

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{W_t} \leq [\tau] \quad (6.20)$$

$$\varphi_{max} = \frac{M_t L}{G I_t} \leq [\varphi] \quad (6.21)$$

On admet généralement $[\varphi] = 0,3^\circ / 1 \text{ m de longueur}$.

Exercices de torsion

Exercice 01

Vérifier la résistance et la rigidité de la barre ci-dessous (Figure 1), sachant que diamètre $d = 100 \text{ mm}$, $G = 8 \times 10^4 \text{ N/mm}^2$, $[\tau] = 70 \text{ N/mm}^2$, $[\sigma] = 40 \text{ N/mm}^2$, et $[\theta] = 0.3^\circ/\text{ml}$.

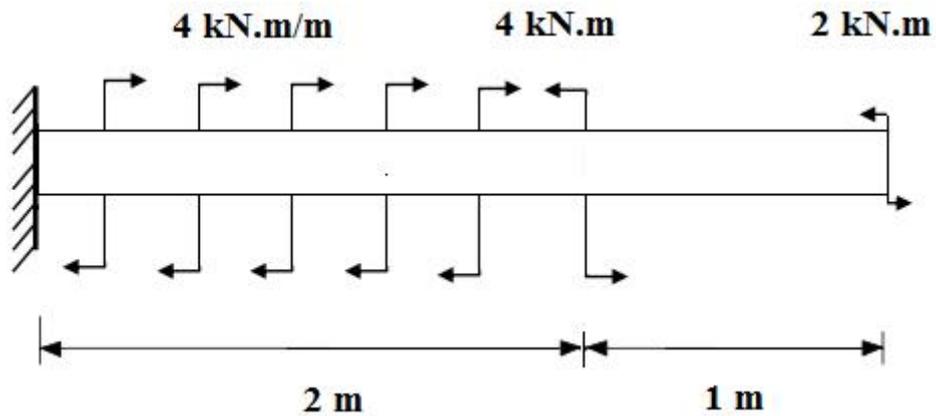
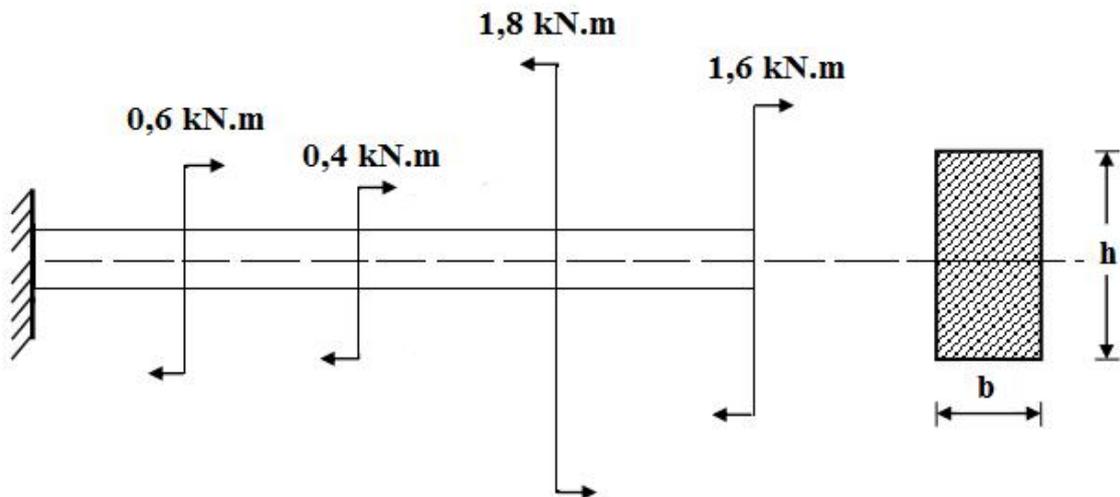


Figure 1

Exercice 02

Déterminer d , a , b et h de la Figure 2, sachant que $[\tau] = 60 \text{ N/mm}^2$ et $h/b = 2$.



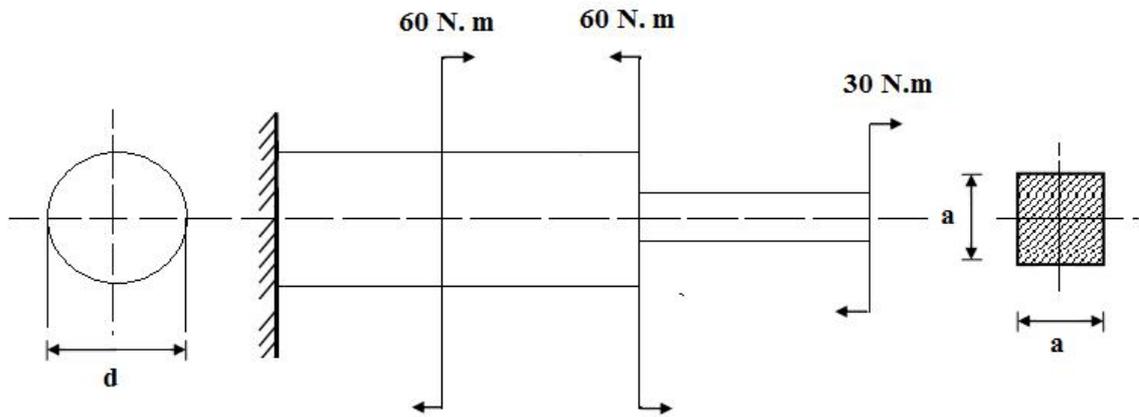


Figure 2

Exercice 03

Une barre en acier ABC est encastrée aux extrémités Figure 3. Les deux tronçons AB et BC ont une section circulaire de diamètre respective 20 mm et 10 mm et de longueur 750 mm et 250 mm. Au point B on applique un moment de torsion qui provoque une contrainte tangentielle maximale dans le matériau de 40 N/mm^2 .

Calculer l'intensité du moment de torsion au point d'application du moment.

On donne $G = 75 \text{ kN/mm}^2$.

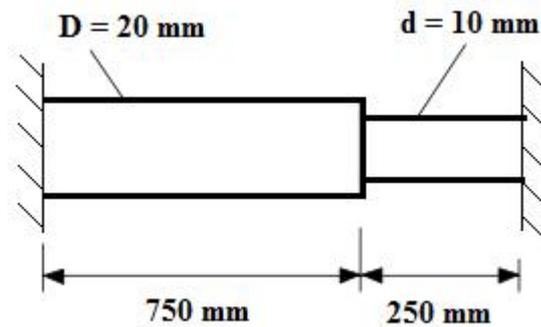


Figure 3

Exercice 04

Vérifier la résistance et la rigidité du tube de la Figure 4, sachant que $[\sigma] = 70 \text{ N/mm}^2$, $[\theta] = 0.3^\circ/\text{ml}$ et $G = 0.8 \times 10^5 \text{ kN/mm}^2$.

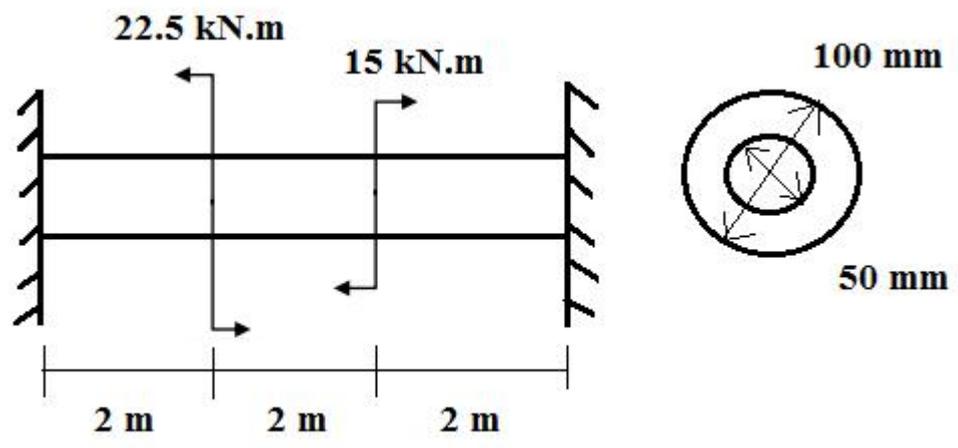


Figure 4

Références Bibliographiques

- [1] **Alexandru D.C.** *‘Quelques chapitres de la résistance des matériaux’*. Ed. OPU, Alger, 267p.
- [2] **Harichane Z.**, *‘RESISTANCE DES MATERIAUX’*, Polycopié, 122p.2015.
- [3] **Bourahla N.**, *‘RESISTANCE DES MATERIAUX DE BASE’*, Le Groupement Economique de CONtrôle TEchnique de la Construction (GECOTEC). Page 290.
- [4] **Anissimov A., Djillali-Berkane Z. et Ztrakhov V.** *‘FLAMBAGE-SYSTEMES ISOSTATIQUES DE BARRES’*. Ed. OPU, 1987.
- [5] **Pluinage G., Sapunov T.**, *‘Résistance des matériaux, Exercices & solutions’*. Éditions CÉPADUÈS. Page 187.2005.
- [6] **Rania S.**, *‘SUPPORT DE COURS ENRESISTANCE DES MATERIAUX’*.Page 95. 2013.
- [7] **Montagner R.**, *‘COURS DE RESISTANCE DES MATERIAUX’*. 12^{ème} édition, iditions Eyrolles. 1988.
- [8] **Timoshenko S.**, *‘Résistance des matériaux – Tome 2: Théorie développée et problèmes’*, 3^{ème} Ed. Dunod, Paris, Page 464. 1968.
- [9] **Zedira H., et Lahbari N.** *‘RESISTANCE DES MATERIAUX’*. Ed. OPU, Collection le cours de génie civil.10.1996.
- [10] **Tedold B.**, *‘Cours 1ère année ENTPE Résistance des matériaux – Partie I’*.Page119.