République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de La Recherche Scientifique

Université Djilali Bounaama-Khemis Miliana

Faculté des Sciences et de la technologie

Département de Mathématiques et informatique

Mémoire de fin d'étude

En vue de l'obtention d'un diplôme de Master en Mathématiques

Spécialité Analyse Mathématique et Applications

Thème :

Application du calcule quantique fractionnaire aux équations différentielles

Présenté par :

Bensettoù Imene

Devant le jury composé par :

Président:	M. Boukdroun	Université de Khemis Miliana
Examinateur1:	A. krelifa	Université de Khemis Miliana
Examinateur 2 :	M. Bezziou	Université de Khemis Miliana
Encadrant :	M. Houas	Université de Khemis Miliana

Année universitaire : 2021-2022

Table des matières

Remerciements

Remerciements Tout d'abord, je tiens à remercier ALLAH le Tout Puissant et Miséricordieux, de m'avoir inspiré le savoir et surtout de m'avoir muni la santé et la force à élaborer ce modeste mémoire.

J'exprime toutes mes gratitudes à mon encadrant « Mr Houas Mohamed » pour les précieux conseils, l'orientation permanente et la patience qu'il m'a sacré durant toute la durée du travail.

Toutes mes reconnaissances doivent à tous mes enseignants du cycle primaire à l'université qui ont constitué un apport considérable pour que j'atteigne ce jour et ce lieu.

Mes vifs remerciements vont également à mon support affectif : mes parents,ma sœur et mes frères , qui ne m'ont pas privé leurs prières et de leurs encouragements.

Sans oublier bien sur mes amies qui m'ont soutenu moralement et physiquement tout au long le travail.

Je profite l'occasion ainsi à adresser mes remerciements à mes collègues de Master 2 et aussi de Master 1 .

Résumé

Dans ce mémoire, on abordera la question d'existence et d'unicité de la solution du problème de valeurs aux limites d'intégrales q-fractionnaires des équations de q-déférences fractionnaires non linéaire dans un espace de Banach.

Les résultats obtenus dans ce travail sont basés sur les théorèmes du point fixe de Banach, krasnoselskii, et le théorème de Scheafer. Des exemples illustrant les résultats obtenus sont également présentés.

Mots clés : Équations de q-différences fractionnaires ,intégrale q-fractionnaire, dérivée q-fractionnaire de Caputo, principe de contraction de Banach, théorème de Krasnoselskii, théorème de Schaefer.

INDEX DES NOTATIONS

$\mathbb{N}$: ensemble des nombres entiers naturels.

$\mathbb{R}$: ensemble des nombres réels.

$C([0,1],\mathbb{R})$: espace des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeur dans $\mathbb{R}$.

$\| \, . \, \|_\infty$: norme infinie .

$\| \, . \, \|_X$: norme de l'espace X.

$\Gamma_q(.)$: La fonction Gamma-q .

$\beta_q(,)$: La fonction Bêta-q.

I_q^v : intégrale q-fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $v > 0$.

${}^cD_q^v$: dérivée q-fractionnaire au sens de caputo d'ordre $v > 0$.

${}^{R-l}D_q^v$: dérivée q-fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre $v > 0$.

D_q^n : dérivée q-fractionnaire d'ordre n.

Introduction

Les problèmes aux limites d'ordre fractionnaire ont récemment été étudiés par de nombreux chercheurs. Fractionnaire les dérivés apparaissent naturellement dans la modélisation mathématique des systèmes dynamiques impliquant des fractales et le chaos.

En fait, le concept de calcul fractionnaire a joué un rôle important dans l'amélioration du travail basé sur le calcul d'ordre entier (classique) dans plusieurs disciplines diverses de la science et de l'ingénierie.

Ce est probablement dû à la raison pour laquelle les opérateurs différentiels d'ordre fractionnaire aident à comprendre la phénomènes héréditaires dans de nombreux matériaux et processus d'une meilleure manière que l'ordre entier correspondant opérateurs différentiels. Les exemples incluent la physique, la chimie, la biologie, la biophysique, les phénomènes de flux sanguin, propagation des ondes, traitement du signal et des images, percolation, identification, ajustement de données expérimentales, économiques, etc. $[1] - [2]$. Pour certains travaux récents sur la différentielle fractionnaire équations, nous nous référons à $[3] - [4]$ et aux références qu'ils contiennent.

Les équations de différence q-fractionnaires , considérées comme des analogues fractionnaires des équations de différence q , ont récemment été étudié par plusieurs chercheurs. Pour certains travaux antérieurs sur le sujet, nous nous référons à $[5] - [6]$, alors que certains des travaux récents sur la théorie de l'existence des équations aux q-différences fractionnaires peuvent être trouvés dans $[7] - [8]$.

Présentation de mémoire

Le sujet principale de ce mémoire est l'étude de l'existence et l'unicité des solutions du problème de valeurs aux limites d'intégrales q-fractionnaires des équations de q-déférences fractionnaires non linéaires.

Et pour cela en utilisant des déférentes théorèmes du point fixe.

Notre mémoire est organisé en trois chapitres :

chapitre 1 C'est un rappel de quelques définitions ,notions de base,résultats sur la dérivation q-fractionnaire et quelque théorèmes du point fixe utilisés dans ce travail.

chapitre 2 Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'étude de l'existence des solutions du problème q-fractionnaire suivant :

$$\begin{cases} {}^cD_q^v x(t) = f(t, x(t)), \quad 1 < v \leq 2 \\ x(0) = x_0 + g(x), \quad x(\xi) = b \int_\eta^1 x(s) d_q s, \quad , t \in [0,1] \end{cases} \tag{1}$$

L'idée est de transforme ce problème en un problème du point fixe déterminé est considéré soit comme une solution unique pour le problème ,soit l'une de ses solutions. Le première résultat d'unicité obtenu par l'utilisation du théorème de point fixe de Banach,le deuxième résultat d'existence basé respectivement sur le théorème de krasnoselkii et Schaefer ,on terminera chaque résultante par un exemple illustra tif.

chapitre 3 L'objet du ce chapitre est l'étude de l'existence et l'unicité de solution pour un problème q- fractionnaire suivant :

$$\begin{cases} D_q^\beta({}^cD_q^\gamma + \lambda)x(t) = f(t, x(t)), t \in [0,1], 0 < q < 1, 0 < \beta, \gamma \leq 1, \lambda \in \mathbb{R} \\ x(0) = aI_q^{\alpha-1}x(\eta) = a \int_0^\eta \frac{(\eta - qs)^{\alpha-2}}{\Gamma_q(\alpha-1)} x(s) d_q s \\ x(1) = bI_q^{\alpha-1}x(\sigma) = b \int_0^\sigma \frac{(\sigma - qs)^{\alpha-2}}{\Gamma_q(\alpha)} x(s) d_q s \quad , \alpha > 2, 0 < \eta, \sigma < 1 \end{cases} \tag{2}$$

On donne deux résultats ,on va premièrement étudier l'existence et l'unicité par le principe de contraction de Banach,puis comme un deuxième résultat,on va voir si le problème admet une solution au moins par utilisation du théorème de point fixe Schaefer ,il est illustrée chaque théorème par exemple.

Chapitre 1

préliminaires

Dans ce chapitre on rappelle quelques définitions, notions, propriétés et résultats sur le calcule $q-$ fractionnaire.

Dans ce qui suit,on s'intéresse particulièrement à définir des notions fondamentales et à rappeler quelques théorèmes importants dans la théorie du points fixe, notamment le principe de contraction de Banach, le théorème de Schaefer, le théorème de krasnosselski, le théorème de Arzela-Ascoli.

1.1 calcul q- fractionnaire

1.1.1 Quelques propriétés

1. Soit $0 < q < 1$, on définit le q-analogue de a comme étant :

$$[a]_q = \frac{1-q^a}{1-q} = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{a-1} \quad , a \in \mathbb{R} \tag{1.1}$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le q-shift factoriel est défini par :
$(a;q)_n = \prod_{k=0}^{n-1}(1-aq^k); n = 1, 2, \cdots, \infty. \quad (a;q)_0 = 1$
3. On peut définir le q-analogue de la factoriel connue sous le nom de q-factorielle,par :
$[n]_q! = \prod_{k=0}^{n-1}[k]_q) = \frac{(q;q)_n}{(1-q)^n}; n \in \mathbb{N}, o\grave{u}(q;q)_n = \prod_{k=0}^{n-1}(1-q^k).$

4. Le q-analogue de la fonction puissance $(1-b)^k$ avec $k \in \mathbb{N}_0 := 0, 1, 2, \ldots$ est :

$$(1-b)^{(0)} = 1; \qquad (1-b)^{(k)} = \prod_{i=0}^{k-1}(1-bq^i), \quad k \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{R}.$$

5. Plus généralement si $\gamma \in \mathbb{R}$,Alors

$$(1-b)^{(\gamma)} = \prod_{i=0}^{\infty} \frac{1-bq^i}{1-bq^{\gamma+i}} \tag{1.2}$$

6. On utilise la notation $0^{(\gamma)} = 0$ pour $\gamma > 0$.
7. La dérivée q de la fonction f est défini par :

$$(D_q f)(x) = \frac{f(xq) - f(x)}{(q-1)x}, x \neq 0 \tag{1.3}$$

8. La dérivé q d'ordre supérieur de la fonction f est défini par :

$$D_q^n f(x) = D_q D_q^{n-1} f(x), n \in \mathbb{N} \tag{1.4}$$

9. La q-intégrale de la fonction $f(x)$ est défini sur l'intervalle $[0, b]$ par :

$$(I_q f)(x) = \int_0^x f(t) d_q t = x(1-q) \sum_{n=0}^{\infty} f(xq^n) q^n, 0 \leq\mid q \mid< 1, x \in [0, b]. \tag{1.5}$$

10. Si $a \in [0, b]$ et si f est définie sur $[0, b]$ son intégrale de a à b est définie par :

$$\int_a^b f(t) d_q t = \int_0^b f(t) d_q t - \int_0^a f(t) d_q t. \tag{1.6}$$

1.1.2 fonction de base

1.1.3 la fonction Gamma-q

la fonction Gamma-q est définie par :

$$\Gamma_q(x) = \frac{(1-q)^{x-1}}{(1-q)^{x-1}} \tag{1.7}$$

avec $x \in \mathbb{R} / \{0, -1, -2, \ldots\}$ Elle admet une représentation intégrale

$$\Gamma_q(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e_q^{-qt} d_q t \tag{1.8}$$

propriétés

1. $\Gamma_q(x+1) = [x]_q \Gamma_q(x), x > 0$
2. $\forall n \in \mathbb{N}, \Gamma_q(n+1) = [n]_q!$

En particulier, $\Gamma_q(1) = 1$

Quelque valeurs particulière de la fonction Gamma-q

On pose $q = \frac{1}{2}$

$\Gamma_{0,5}(\frac{1}{5}) = 3,63570$

$\Gamma_{0,5}(\frac{1}{4}) = 2,93248$

$\Gamma_{0,5}(\frac{1}{2}) = 1,57203$

$\Gamma_{0,5}(\frac{3}{2}) = 0.92087$

$\Gamma_{0,5}(2) = 1$

$\Gamma_{0,5}(\frac{7}{3}) = 1.11481$

$\Gamma_{0,5}(\frac{5}{2}) = 1.19059$
$\Gamma_{0,5}(3) = 1.5$

$\Gamma_{0,5}(\frac{10}{3}) = 1.78720$

$\Gamma_{0,5}(\frac{7}{2}) = 1.96024$

$\Gamma_{0,5}(4) = 2.6250$

1.1.4 la fonction Bêta-q

Soient $m, n > 0$ la fonction Bêta -q est défini par :

$$\beta_q(m,n) = \int_0^1 x^{(m-1)}(1-qx)^{(n-1)} d_q x. \tag{1.9}$$

1.1.5 La relation entre Gamma-q et Bêta-q

La fonction Bêta-q est liée à la fonction Gamma-q par la relation suivant :

$$\beta_q(m,n) = \frac{\Gamma_q(m)\Gamma_q(n)}{\Gamma_q(m+n)} \tag{1.10}$$

1.2 La q-intégrale fractionnaire

1.2.1 La q-intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville

soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

On défini la q-intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville de f d'ordre $\alpha > 0$ par :

$$\begin{aligned}(I_q^\alpha f)(x) &= \frac{1}{\Gamma_q(\alpha)} \int_0^x (x-qt)^{(\alpha-1)} f(t) d_q t \\ &= x^\alpha (1-q)^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} q^k \frac{(q^\alpha; q)_K}{(q;q)_k} f(xq^k).\end{aligned} \tag{1.11}$$

Si $\alpha = 1$ Alors on a :

$$I_q f(x) = \int_0^x f(s) d_q s = x(1-q) \sum_{k=0}^{\infty} q^k f(xq^k) \tag{1.12}$$

Exemple 1. *Soit f une fonction telle que $f(x) = (x-a)^\beta$*

On applique l'intégrale q-fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha > 0$ sur f on obtient :

$$\begin{aligned}I_q^\alpha(f)(x) &= I_q^\alpha (x-a)^\beta = \frac{1}{\Gamma_q(\alpha)} \int_a^x (x-qs)^{(\alpha-1)}(s-a)^\beta d_q s \\ &= \frac{1}{\Gamma_q(\alpha)} \left[\int_0^x (x-qs)^{(\alpha-1)}(s-a)^\beta d_q s - \int_0^a (x-qs)^{\alpha-1)}(s-a)^\beta d_q s \right]\end{aligned} \tag{1.13}$$

En utilisant la définition (1,5) on obtient :

$$
\begin{aligned}
\int_0^a (x-qs)^{(\alpha-1)}(s-a)^{\beta} d_q s &= a(1-q)\sum_{k=0}^{\infty}(x-q^{k+1})^{\alpha-1}(aq^k-a)^{\beta}q^k \\
&= a^{\beta+1}(1-q)\sum_{k=0}^{\infty}(x-aq^{k+1})^{(\alpha-1)}(q^k-1)^{\beta}q^k = 0
\end{aligned}
$$

Car : $(q^{k+1}-q^k)^{\beta}=0$

Par la définition (1,5) on a :

$$
\begin{aligned}
\int_0^x (x-qs)^{(\alpha-1)}(s-a)^{\beta} d_q s &= x(1-q)\sum_{k=0}^{\infty}(x-xq^{k+1})^{(\alpha-1)}(xq^k-a)^{\beta}q^k \\
&= x^{\alpha+\beta}(1-q)\sum_{k=0}^{\infty}(1-q^{k+1})^{(\alpha-1)}(q^k-\frac{a}{x})^{\beta}q^k \\
&= x^{\alpha+\beta}(1-q)\sum_{k=0}^{\infty}(1-q^{k+1})^{(\alpha-1)}(1-\frac{a}{xq}q^{1-k})^{\beta}q^{k(1+\beta)} \\
&= x^{\alpha+\beta}(1-q)\frac{(1-\frac{a}{x})^{(\alpha+\beta)}(1-q)^{(\alpha-1)}(1-q)^{(\beta)}}{(1-q)^{(\alpha+\beta)}} \\
&= (1-q)\frac{(1-q)^{(\alpha-1)}(1-q)^{\beta}}{(1-q)^{(\alpha+\beta)}}(x-a)^{(\alpha+\beta)}
\end{aligned}
$$

1.3 La q-dérivée fractionnaire

1.3.1 La q-dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Soit $\alpha \in]m-1,m[$,$(m \in \mathbb{N}^*)$, et suppose que $f \in C^m([a,b],\mathbb{R})$,on appelle q-dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha > 0$ de f la fonction défini par :

$$
({}^{R-L}D_q^{\alpha} f)(x) = (D_q^m I_q^{m-\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma_q(m-\alpha)}\left(\frac{d}{d_q t}\right)^m \int_0^x (x-qs)^{(m-\alpha-1)} f(s) d_q s. \quad (1.14)
$$

1.3.2 La q-dérivée fractionnaire au sens de caputo

Soit $\alpha \in]m-1,m[$, $(m \in \mathbb{N}^*)$ et suppose que $f \in C^m([a,b],\mathbb{R})$ on appelle q-dérivée fractionnaire au sens de caputo d'ordre $\alpha > 0$ de f la fonction défini par :

$$
({}^{c}D_q^{\alpha} f)(x) = (I_q^{m-\alpha} D_q^m f)(x) = \frac{1}{\Gamma_q(m-\alpha)}\int_0^x (x-qs)^{(m-\alpha-1)}(D_q^m f(s)) d_q s. \quad (1.15)
$$

1.3.3 Quelque propriétés

Soient $\alpha, \beta \geq 0$ et f une fonction défini sur $[0,1]$.Alors les formules suivantes tiennent :

1. ${}^cD_q^\alpha C = I_q^{m-\alpha}(0) = 0$
2. $I_q^{\alpha c}D_q^\alpha f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{[\alpha]-1} \frac{t^k}{\Gamma_q(k+1)}(D_q^k f)(0^+)$
3. ${}^cD_q^\alpha I_q^\alpha f(t) = f(t)$
4. $(I_q^\alpha I_q^\beta f)(x) = (I^{\alpha+\beta} f)(x)$
5. $(D_q^\alpha I_q^\alpha f)(x) = f(x)$
6. $(I_q^\alpha D_q^n f)(x) = D_q^n I_q^n f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{\alpha-n+k}}{\Gamma_q(\alpha+k-n+1)(D_q^k f)(0)}.$

1.3.4 Lemmes fondamentaux

Lemme 1.1. *Soit $T > 0, \alpha > 0$,pour tout $t_1, t_2 \in [0,T]$,on a :*

1. *Si $\alpha > 1$,alors*
$$| t_1^\alpha - t_2^\alpha | \leq \alpha T^{\alpha-1} | t_1 - t_2 |$$
2. *Si $0 < \alpha \leq 1$, alors*
$$| t_1^\alpha - t_2^\alpha | \leq | t_1 - t_2 |^\alpha$$

Lemme 1.2. *Soit $y \in C^m([0,T],\mathbb{R}), m \in \mathbb{N}^*$,pour $\alpha \in]m-1, m[$,la solution générale de l'équation différentielle ,${}^cD_q^\alpha y(t) = 0$ est donnée par*

$$y(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \cdots + c_{m-1} t^{m-1}$$

ou

$$c_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, \cdots, m-1 \quad et \quad m = [\alpha] + 1$$

Démonstration 1.1. *Soit $y \in C^m([0,T],\mathbb{R}), m \in \mathbb{N}^*$,pour $\alpha \in]m-1, m[$ on a par la définition de la dérivée q-fractionnaire de caputo*

$${}^cD_q^\alpha y(t) = 0 \Rightarrow I_q^{m-\alpha} D_q^m y(t) = 0$$

En appliquant $D_q^{m-\alpha}$ on trouve :

$$D_q^m y(t) = 0$$

Donc ,y est un polynôme de degré inférieur ou égale à $m-1$:

$$y(t)=\sum_{i=0}^{m-1}c_it^i=c_0+c_1t+c_2t^2+\cdots+c_{m-1}t^{m-1}$$

Lemme 1.3. *Soit $y\in C^m([0,T],\mathbb{R}),m\in\mathbb{N}^*$,pour $m\in]m-1,m[$,on a :*

$$\begin{aligned} I_q^\alpha(D_q^\alpha y(t)) &= y(t)+c_0+c_1t+c_2t^2+\cdots+c_{m-1}t^{m-1} \\ &= y(t)-\sum_{i=0}^{m-1}\frac{t^i}{\Gamma_q(i+1)}{}^cD_q^if(0^+) \quad \forall c_i\in\mathbb{R}, i=\overline{0,m-1}, m=[\alpha]+1 \end{aligned} \tag{1.16}$$

Démonstration 1.2. *Soit $y\in C^m([0,T],\mathbb{R}),m\in\mathbb{N}^*$,pour $\alpha\in[m-1,m[$*

$$\begin{aligned} I_q^\alpha({}^cD_q^\alpha) &= I_q^\alpha(I_q^{m-\alpha}D_q^my)(t) \\ &= I_q^{\alpha+m-\alpha}D_q^my(t) \\ &= y(t)-\sum_{j=0}^{m-1}\frac{t^jf^j(0)}{\Gamma_q(j+1)} \\ &= y(t)+\sum_{i=0}^{m-1}c_it^i \\ &= y(t)=c_0+c_1t+c_2t^2+\cdots+c_{m-1}t^{m-1} \end{aligned} \tag{1.17}$$

1.4 Quelques théorèmes du point fixe

Les équations différentielles fractionnaires sont considérées comme des équations différentielles non-linéaires, alors plusieurs théorèmes ont été utilisés pour résoudre ce type d'équation. L'un des méthodes les plus utilisées : les théorèmes du point fixe. En effet, ces théorèmes accordent des conditions suffisantes pour assurer l'existence d'un point fixe pour une fonctions donnée.

Dans le cas des EDFs, on transforme un problème donné en un problème du point fixe. Les points fixes du problème transformé sont ainsi les solutions du problème donné. Dans cette section, on étudie quelques théorèmes du point fixe de Banach, Schaefer, Leray-Schauder et krasnoselskii.

Définition 1.1. *Soit E un espace vectoriel sur le corps des nombres réels $\mathbb{R}$ ou sur le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$.*

On appelle norme sur E une application de E dans $\mathbb{R}^+$ notée $x \longrightarrow \| x \|$ satisfaisant les conditions suivantes :

1. $\forall x \in E : \| x \| = 0 \Leftrightarrow x = 0_E, \forall x \in E$.
2. $\forall \lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C}) : \| \lambda x \| = | \lambda | \| x \|$.
3. $\forall x, y \in E : \| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$.

Définition 1.2. *Soient $(E, \| \ . \ \|_E)$ et $(F, \| \ . \ \|_F)$ deux espaces vectoriels normés sur le même corps $\mathbb{k}$, alors l'espace produit $E \times F = \{(x, y)/x \in E \quad et y \in F\}$ est un espace vectoriel normé sur $\mathbb{k}$ par l'une des normes suivantes :*

1. $\| (x, y) \|_1 = \| x \|_E + \| y \|_F$,
2. $\| (x, y) \|_p = (\| x \|_E^p + \| y \|_F^p)^{\frac{1}{p}}, 1 \leq p \leq \infty$
3. $\| (x, y) \|_\infty = \max\{\| x \|_E, \| y \|_F\}$

Définition 1.3. *On dit qu'un espace vectoriel normé $(E, \| \ . \ \|_E)$ est complet (ou que c'est un espace de Banach) si toute suite de Cauchy dans E est convergente.*

Définition 1.4. *On dit que M est une partie compact de $(E, \| \ . \ \|_E)$ si de toute suite de points de M on peut extraire une sous-suite qui converge vers un élément de M .*

Définition 1.5. *Une partie M de $(E, \| \ . \ \|_E)$ est dite relativement compact si son adhérence est compact.*

Définition 1.6. *Soient E et F deux espace de Banach, et $A : E \longmapsto F$ une application linéaire. On dit que A est borné si elle envoie les parties bornées de E sur des parties bornées de F.*

Définition 1.7. *Soit M un sous ensemble de $C([0, T], \mathbb{R})$, M est uniformément borné.i,e ; il existe une constante $k > 0$ tel que : $\| f(x) \| \leq k$, pour tout $x \in [0, T]$ et tout $f \in M$.*

Définition 1.8. *Soient E et F deux espaces de Banach et f une application définie de E à valeurs dans F.*

On dit que f est complètement continue si elle est continue et transforme tout borné de E en une ensemble relativement compact dans F. f est dite compact si $f(E)$ est relativement compact dans F.

Définition 1.9. *Soit M un sous ensemble de $C([0,T],\mathbb{R})$, L'ensemble M est équicontinue. i.e ; pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout $t_1, t_2 \in [0,T]$ et tout $f \in M$, il existe $\delta > 0$ tel que :*

$$\| t_1 - t_2 \| < \delta \Rightarrow \| f(t_1) - f(t_2) \| \leq \varepsilon$$

Définition 1.10. *Soit $(X, \| . \|)$ un espace vectorielle normé, une application $A : X \longmapsto X$ est dite contractante, s'il existe un nombre positif $k \in]0.1[$ tel que $\forall x, y \in X$, on a :*

$$\| Ax - Ay \| \leq k \| x - y \| . \tag{1.18}$$

Définition 1.11. *Soit $(X, \| . \|)$ un espace vectorielle normé et $A : X \longmapsto X$ une application. On appelle point fixe de A tout point $x \in X$ tel que : $Ax = x$.*

1.5 Théorème d'Ascoli-Arzela

Soit F un sous ensemble de $C([0,T],\mathbb{R})$, F est relativement compact dans $C([0,T],\mathbb{R})$ si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :

1. L'ensemble F est uniformément borné.
2. L'ensemble F est équicontinue.
3. Pour tout $x \in [0,T]$ l'ensemble $\{f(x), f \in F\} \subset E$ est relativement compact.

Théorème 1.1. *Soit X un espace de Banach, et $A : X \longmapsto X$ un opérateur contractant. Alors A admet un point fixe unique.i.e ; $\exists! x \in X$ tel que $Ax = x$.*

Théorème 1.2. ***de point fixe de schauder***
Soit X un espace de Banach et M un convexe fermé borné de X et $A : M \longmapsto M$ un opérateur continue et compact alors A admet au moins un point fixe.

Théorème 1.3. ***de L'alternative non linéaire de Leray-Schauder***
Soit E un espace de Banach, C un sous-ensemble convexe fermé de E, U un sous-ensemble ouvert de C et $0 \in U$. l'opérateur $\phi : \overline{U} \longrightarrow C$ est continue et compact (c'est-à-dire que $\phi(\overline{U})$ est un sous-ensemble relativement compact de C). Alors, ou bien

1. *l'application ϕ admet un point fixe dans $\overline{U}$, sinon*

2. *Il existe $x \in \partial U$ et $\sigma \in [0,1]$ avec ,$x = \sigma\phi x$.*

Théorème 1.4. ***de point fixe de krasnosselskii***

Soit X un espace de Banach et M un sous ensemble fermé borné et convexe de X.On suppose que A_1, A_2 sont deux opérateur de X dans X satisfaisants :

1. *$A_1x + A_2y \in M, \forall x, y \in M$,*

2. *A_1 est compacte et continue,*

3. *A_2 est contractante.*

Alors il existe au moins un élément $z \in M$ tel que : $A_1z + A_2z = z$.

Théorème 1.5. ***de point fixe de Schaefer***

Soit X un espace de Banach et $A : X \longrightarrow X$ un opérateur complètement continue. Si

$$\Omega = \{x \in X : x = \lambda Ax, \forall \lambda \in]\,0, 1\,[\}$$

est borné, alors A possède au moins une point fixe.

Chapitre 2

problème q-fractionnaire avec une dérivée q-fractionnaire au sens de caputo

Dans ce chapitre, on s'intéresse à étude de l'existence et l'unicité des solutions pour un problème q-fractionnaires.

Dans la suit nous introduisons une condition aux limites de type sous-bande

$$x(\xi) = b\int_{\eta}^{1} x(s)d_q s, \quad 0 < \xi < \eta < 1$$

Qui relie la contribution due à une sous-bonde de longueur arbitraire à la valeur de fonction inconnue à un point arbitraire (non locale) Précisément nous considérons le problème des equation de q-déférence fractionnaire non linéaire avec condition aux limites de type non locale et sous-bonde suivant :

$$\begin{cases} {}^cD_q^v x(t) = f(t, x(t)), \quad 1 < v \leq 2 \\ x(0) = x_0 + g(x), \quad x(\xi) = b\int_{\eta}^{1} x(s)d_q s, \quad , t \in [0,1] \end{cases} \tag{2.1}$$

Ou ${}^cD_q^v$ est une dérivée q-fractionnaire au sens de caputo d'ordre v

$$f : [0,1] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

et $g : C([0,1],\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions continues avec

$$g(x) = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j x(t_j)$$

On va étudier l'existence et l'unicité de la solution à laide de Principe de Contraction de Banach.

Puis, en montrant deux résultats d'existence de solutions pour le problème (2.1). Le premier résultat, est montré par utilisation du théorème de point fixe de Krasnoselskii, et le second résultat de ce chapitre est obtenu par utilisation du théorème de point fixe de Schafer.

L'existence et l'unicité d'une solution est établit par la transformation de ce problème à une équation intégrale équivalente, dont la solution est identifiée à un point fixe d'un opérateur (sous certaines hypothèses suffisantes sur la fonction f) dans un espace fonctionnel convenablement choisi.

2.1 Problème Intégrale

Soit $y \in C([0,1],\mathbb{R})$

On considérer le problème suivant :

$$\begin{cases} {}^cD_q^v x(t) = y(t), 1 < v \leq 2 \\ x(0) = y_0, x(\xi) = b\displaystyle\int_\eta^1 x(s)d_qs, y_0 \in \mathbb{R}, \quad t \in [0,1] \end{cases} \tag{2.2}$$

Alors la solution de cette problème est donnée par l'équation intégrale suivante :

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t \frac{(t-qs)^{(v-1)}}{\Gamma_q(v)} y(s)d_qs \\ &+ \frac{t}{B}\Big\{b\int_\eta^1 \left(\int_0^s \frac{(s-qu)^{(v-1)}}{\Gamma_q(v)} y(u)d_qu\right) d_qs \\ &- \int_0^\xi \frac{(\xi-qs)^{(v-1)}}{\Gamma_q(v)} y(s)d_qs\Big\} + y_0\left[1 + \frac{t}{B}(b(1-\eta)-1)\right] \end{aligned} \tag{2.3}$$

Où

$$B = \xi - \frac{b(1-\eta^2)}{1+q} \neq 0$$

Démonstration 2.1. *Soit l'équation :*

$$ {}^cD_q^v = y(t) \tag{2.4}$$

En prenant l'intégrale de R-L q-fractionnaire d'ordre v pour(2.4) on obtient :

$$I_q^v D_q^v x(t) = I_q^v y(t)$$

par lemme (1.3) on trouve :

$$x(t) + c_0 + c_1 t = I_q^v y(t)$$

Alors :

$$x(t) = I_q^v y(t) - c_0 - c_1 t \tag{2.5}$$

Où c_0 et c_1 sont des constants arbitraire.

Maintenant on cherche les constantes c_0 et c_1.

D'après la condition $x(0) = y_0$ on trouve :

$$c_0 = -y_0 \tag{2.6}$$

Alors doivent :

$$x(t) = I_q^v y(t) + y_0 - c_1 t \tag{2.7}$$

On utilise la condition $x(\xi) = b \int_\eta^1 x(s) d_q s$,on trouve :

$$x(\xi) = b \int_\eta^1 x(s) d_q s = b \int_\eta^1 \left(I_q^v y(s) + y_0 - c_1 s \right) d_q s = I_q^v y(\xi) + y_0 - c_1 \xi$$

Par suit :

$$b \int_\eta^1 \left(I_q^v y(s) \right) d_q s + y_0(b(1-\eta)) - I_q^v y(\xi) - y_0 = -c_1 (\xi - \frac{b(1-\eta^2)}{1+q}) \tag{2.8}$$

Alors :

$$c_1 = \frac{-1}{(\xi - \frac{b(1-\eta^2)}{1+q}} \left\{ b \int_\eta^1 \left(I_q^v y(s) \right) d_q s - I_q^v y(\xi) \right\} - \frac{y_0}{B} \left(b(1-\eta) - 1 \right) \tag{2.9}$$

Substituant c_0 et c_1 en (2.5) on obtient la solution (2,3).

2.2 Problème de point fixe

Avant tout,on introduit l'espace de Banach suivant :

$$X = \left\{x, x(t) \in C^1([0,1], \mathbb{R})\right\}$$

muni de la norme

$$\| x \|_X = \| x \|_\infty$$

Où

$$\| x \|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} | x(t) |$$

En vue du (2.3) on définie un opérateur A par :

$$A : X \longrightarrow X$$

$$x(t) \longrightarrow Ax(t)$$

tel que $\forall t \in [0,1]$ on a :

$$Ax(t) = I_q^v f(t, x(t)) + \frac{t}{B}\left\{b\int_\eta^1 \left(I_q^v f(s, x(s))\right) - I_q^v f(\xi, x(\xi))\right\} + x_0\left[1 + \frac{t}{B}(b(1-\eta) - 1)\right] \tag{2.10}$$

C'est a dire :

$$\begin{aligned} Ax(t) &= \int_0^t \frac{(t-qs)^{(v-1)}}{\Gamma_q(v)} f(s, x(s)) d_q s \\ &+ \frac{t}{B}\left\{b\int_\eta^1 \left(\int_0^s \frac{(s-qu)^{(v-1)}}{\Gamma_q(v)} f(u, x(u)) d_q u\right) d_q s - \int_0^\xi \frac{(\xi-qs)^{(v-1)}}{\Gamma_q(v)} f(s, x(s)) d_q s\right\} \\ &+ \left[1 + \frac{t}{B}\left(b(1-\eta) - 1\right)\right] \left(x_0 + g(x)\right), \quad t \in [0,1] \end{aligned}$$

Il convient de noter que le problème (2,2)a des solutions si et seulement si l'opérateur A a des points fixes.

2.3 Existence et l'unicité

On va donne un première résultat concernant l'unicité de la solution du problème q-fractionnaire (2,2),en utilisant le théorème de contraction de Banach.

Théorème 2.1. *Soit* $f : [0,1] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *est une fonction continue,on suppose que :*

(H_1) *Il existe un constant* $L > 0$ *telle que :*

$$\mid f(t, x(t)) - f(t, y(t)) \mid \leq L \mid x - y \mid$$

, Pour tout $t \in [0,1], x, y \in \mathbb{R}$.

(H_2) $g : [0,1] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *est une fonction continue qui satisfait cette condition :*

$$\mid g(u) - g(v) \mid \leq M \parallel u - v \parallel \quad \forall u, v \in C([0,1], \mathbb{R}), M > 0$$

. (H_3) $\delta = L\mu_0 + K_0 M < 1$*,où* μ_0 *et* k_0 *sont des constants définies par :*

$$\mu_0 := \frac{1}{\Gamma_q(v+1)} + \frac{1}{\mid B \mid} \left\{ \frac{\mid b \mid (1 - \eta^{v+1})}{\Gamma_q(v+2)} + \frac{\xi^v}{\Gamma_q(v+1)} \right\} \tag{2.11}$$

$$K_0 := 1 + \frac{1}{\mid B \mid} \mid b(1-\eta) - 1 \mid . \tag{2.12}$$

Avec $B = \xi - \dfrac{b(1-\eta^2)}{1+q} \neq 0$

Alors,il existe une solution unique pour le problem (2,2).

Démonstration 2.2. *Le théorème de contraction de Banach appui sur le fait que si* A *est un opérateur contractant,alors il existe un unique point fixe pour* A*.*
De la vient l'ide de chercher l'existence d'une constant $L > 0$ *tel que :*
$\forall x, y \in X$ *;et* $t \in [0,1]$*,on a :*

$$\parallel A(x) - A(y) \parallel_X \leq L \parallel x - y \parallel_X$$

. On montre qu'il existe L *et* M *tel que :*

$$\parallel A(x) - A(y) \parallel_\infty < (L\mu_0 + Mk_0) \parallel x - y \parallel_X$$

$$
\begin{aligned}
\mid Ax(t)-Ay(t)\mid \; &= \mid \int_0^t \frac{(t-qs)^{(v-1)}}{\Gamma_q(v)} f(s,x(s))d_qs \\
&+ \frac{t}{B}\left\{ b\int_\eta^1 \left(\int_0^s \frac{(s-qu)^{(v-1)}}{\Gamma_q(v)} f(u,x(u))d_qu \right) d_qs - \int_0^\xi \frac{(\xi-qs)^{(v-1)}}{\Gamma_q(v)} f(s,x(s))d_qs \right\} \\
&+ \left[1+\frac{t}{B}\left(b(1-\eta)-1\right)\right](x_0+g(x)) - \int_0^t \frac{(t-qs)^{(v-1)}}{\Gamma_q(v)} f(s,y(s))d_qs \\
&- \frac{t}{B}\left\{ b\int_\eta^1 \left(\int_0^s \frac{(s-qu)^{(v-1)}}{\Gamma_q(v)} f(u,y(u))d_qu \right) d_qs - \int_0^\xi \frac{(\xi-qs)^{(v-1)}}{\Gamma_q(v)} f(s,y(s))d_qs \right\} \\
&- \left[1+\frac{t}{B}\left(b(1-\eta)-1\right)\right](x_0+g(y)) \mid
\end{aligned}
$$

D'où,

$$
\begin{aligned}
\mid Ax(t)-Ay(t)\mid \; &\leqslant \int_0^t \frac{(t-qs)^{v-1}}{\Gamma_q(v)} \mid f(s,x(s))-f(s,y(s))\mid d_qs \\
&+ \frac{1}{\mid B\mid}\Big\{ \mid b\mid \int_\eta^1 \left(\int_0^s \frac{(s-qs)^{v-1}}{\Gamma_q(v)} \mid f(u,x(u))-f(u,y(u))\mid d_qu \right) d_qs \\
&+ \int_0^\xi \frac{(\xi-qs)^{v-1}}{\Gamma_q(v)} \mid f(s,x(s))-f(s,y(s))\mid d_qs \Big\} \\
&+ \left[1+\frac{1}{\mid B\mid} \mid b(1-\eta)-1)\mid \right] \mid g(x)-g(y)\mid
\end{aligned}
$$

En utilisant les hypothèses H_1 et H_2,on obtient :

$$
\begin{aligned}
\mid Ax(t)-Ay(t)\mid \; &\leq L \parallel x-y \parallel \Big[\int_0^t \frac{(t-qs)^{v-1}}{\Gamma_q(v)} d_qs \\
&+ \frac{1}{\mid B\mid}\left\{ \mid b\mid \int_\eta^1 \left(\int_0^s \frac{(s-qu)^{v-1}}{\Gamma_q(v)} d_qu \right) d_qs + \int_0^\xi \frac{(\xi-qs)^{v-1}}{\Gamma_q(v)} d_qs \right\} \Big] \\
&+ \left[1+\tfrac{1}{|B|} + \mid b(1-\eta)-1\mid \right] M \parallel x-y \parallel
\end{aligned}
$$

Donc :

$$\begin{aligned}\mid Ax(t)-Ay(t)\mid \quad &\leq L \parallel x-y \parallel \left[\frac{1}{\Gamma_q(v+1)}+\frac{1}{\mid B\mid}\left\{\frac{\mid b\mid (1-\eta^{v+1})}{\Gamma_q(v+2)}+\frac{\xi^v}{\Gamma_q(v+1)}\right\}\right]\\ &+\left[1+\frac{1}{\mid B\mid}\mid b(1-\eta)-1\mid\right] M \parallel x-y \parallel\end{aligned}$$

Alors

$$\mid Ax(t)-Ay(t)\mid \leq (L\mu_0+K_0 l) \parallel x-y \parallel .$$

tel que :

$$\mu_0 := \frac{1}{\Gamma_q(v+1)}+\frac{1}{\mid B\mid}\left\{\frac{\mid b\mid (1-\eta^{v+1})}{\Gamma_q(v+2)}+\frac{\xi^v}{\Gamma_q(v+1)}\right\} \tag{2.13}$$

Et

$$K_0 := 1+\frac{1}{\mid B\mid}\mid b(1-\eta)-1\mid \tag{2.14}$$

Donc

$$\parallel Ax(t)-Ay(t) \parallel \leqslant \delta \parallel x-y \parallel,$$

avec $\delta = L\mu_0 + K_0 M$

Alors,d'après H_3 l'opérateur A est contractante,par conséquent le problème (2,2)admet une seule solution.

Exemple 2. *On condenser le problème q-fractionnaire suivant :*

$$\begin{cases} {}^cD_q^{\frac{4}{3}}x(t) = \dfrac{x(t)\sin t}{8e^t+7}+\cos^2(t) \\ x(0) = \dfrac{1}{14}\sin(x(\theta)), x(\dfrac{1}{4}) = \dfrac{1}{9}\displaystyle\int_{\frac{7}{9}}^{1} x(s)d_q s \end{cases} \tag{2.15}$$

Ou $v=\dfrac{4}{3}$,$q=\dfrac{1}{2}$,$b=\dfrac{1}{9}$,$\xi=\dfrac{1}{4}$,$\eta=\dfrac{7}{9}$,$M=\dfrac{1}{14}$,$0<\theta<1$,*avec* $f(t,x(t)) = \dfrac{x(t)\sin t}{8e^t+7}+\cos^2(t)$

Soient $x,y\in\mathbb{R}, t\in[0,1]$ *alors :*

$$\mid f(t,x(t))-f(t,y(t))\mid = \mid \frac{x(t)\sin t}{8e^t+7}+\cos^2(t)-\frac{y(t)\sin t}{8e^t+7}+\cos^2(t)\mid \ \leq \frac{1}{15}\mid x(t)-y(t)\mid$$

Donc H_1 est satisfait avec $L=\frac{1}{15}$

aussi on a :

$$\mid g(x(\theta))-g(y(\theta))\mid = \mid \frac{1}{14}\sin(x(\theta))-\frac{1}{14}\sin(y(\theta))\mid \ \leq \frac{1}{14}\mid x(\theta)-y(\theta)\mid \qquad 0<\theta<1$$

donc H_2 est satisfait avec $M = \dfrac{1}{14}$
Par suit :
$B = -5.08333$,$\mu_0 = 0.930230$, *et* $k_0 = 1.191864$,*donc* $L\mu_0 + Mk_0 = \delta = 0.14714 < 1$
Ainsi toutes les hypothèses du théorème (2.1)soit satisfait,par conséquent le problème (2.13)possède une unique solution.

2.4 Existence

2.4.1 Résultat d'existence via la théorème du point fixe de Krasnoselskii

Théorème 2.2. *Soit $f : [0,1] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue,on suppose que H_2 et les hypothèses suivant sont satisfaites :*

(H_4) $g(0) = 0,$

(H_5) *Il existe une fonction non négative $p \in C([0,1], \mathbb{R})$ et une fonction non décroissante $\chi : [0, \infty) \longrightarrow (0, \infty)$ tel que :*

$$\mid f(t,u) \mid \leq p(t)\chi(\mid u \mid);$$

$H_6)$ $\forall (t,u) \in [0,1] \times \mathbb{R}$

$$\sup \frac{r}{k_0 \mid x_0 \mid + \mu_0 \chi(r) \parallel p \parallel} > \frac{1}{1 - k_0 M}$$

Où μ_0 et k_0 est définie en (2,11)(2,12) respectivement.
Alors le problème à valeur limite (,) admet au moins une solution sur $[0,1]$.

Démonstration 2.3. *Pour montrer l'existence de la solution (2.2) il suffit de vérifier les conditions du théorème du point fixe de Krasnoselskii(1.4).*

On condenser l'ensemble suivant :

$$\overline{\Omega}_{r_0} = \{x \in C([0,1], \mathbb{R}) : \parallel x \parallel \leq r_0\},$$

Soit A_1 *et* A_2 *deux opérateurs dans* $\overline{\Omega}_{r_0}$

et Par l'hypothèse (H_6)*, il existe un nombre* $r_0 > 0$ *tel que :*

$$\frac{r_0}{k_0 \mid x_0 \mid + \mu_0 \chi(r_0) \parallel p \parallel} > \frac{1}{1 - k_0 M}$$

On définit deux opérateur A_1 *et* A_2 *sur* $\overline{\Omega}_{r_0}$ *comme suite :*

$$\begin{aligned}
(A_1x)(t) &= \int_0^t \frac{(t-qs)^{(v-1)}}{\Gamma_q(v)} f(s,x(s))d_qs \\
&+ \frac{t}{B}\left\{ b\int_\eta^1 \left(\int_0^s \frac{(s-qu)^{(v-1)}}{\Gamma_q(v)} f(u,x(u))d_qu \right) d_qs - \int_0^\xi \frac{(\xi-qs)^{(v-1)}}{\Gamma_q(v)} f(s,x(s))d_qs \right\}
\end{aligned}$$

$$(A_2x)(t) = \left[1 + \tfrac{t}{B}(b(1-\eta)-1)\right](x_0 + g(x)).$$

Étape 1

On montrer que si $x, y \in \overline{\Omega}_{r_0} \Rightarrow A_1x(t) + A_2y(t) \in \overline{\Omega}_{r_0}$*, c'est a dire :*

$$\parallel A_1x(t) + A_2y(t) \parallel \leq r_0$$

Pour montrer cette implication il suffit de montre que le condition de théorème (2.2) (H_6) *n'est pas vérifie par contradiction.*

C'est a dire on suppose que le condition H_6 *est vrais et on obtient a la faine une contradiction .*

$\forall x, y \in \overline{\Omega}_{r_0}$*, on prendre* $\parallel x \parallel = r_0$

$$\begin{aligned}
\mid A_1x(t) + A_2y(t) \mid &= \Big| \int_0^v \frac{(t-qs)}{\Gamma_q(v)} f(s,x(s))d_qs \\
&+ \frac{t}{B}\left\{ b\int_\eta^1 \left(\int_0^s \frac{(s-qu)^{(v-1)}}{\Gamma_q(v)} f(u,x(u))d_qu \right) d_qs - \int_0^\xi \frac{(\xi-qs)^{(v-1)}}{\Gamma_q(v)} f(s,x(s))d_qs \right\} \\
&+ \left[1 + \tfrac{t}{B}(b(1-\eta)-1)\right](x_0 + g(y)) \Big|
\end{aligned}$$

Alors

$$
\begin{aligned}
\mid A_1x(t)+A_2y(t)\mid \ &\leq \int_0^t \frac{(t-qs)^{(v-1)}}{\Gamma_q(v)} \mid f(s,x(s)) \mid d_qs \\
&+\frac{t}{\mid B\mid}\Big\{ \mid b \mid \int_\eta^1 \left(\int_0^s \frac{(s-qu)^{(v-1)}}{\Gamma_q(v)} \mid f(u,x(u)) \mid d_qu\right) d_qs \\
&+\int_0^\xi \frac{(\xi-qs)^{v-1}}{\Gamma_q(v)} \mid f(s,x(s)) \mid d_qs\Big\} \\
&+\left[1+\tfrac{t}{|B|} \mid b(1-\eta)-1 \mid\right] (\mid x_0 \mid + \mid g(y) \mid)
\end{aligned}
$$

D'après l'hypothèse H_5 on obtient :

$$
\begin{aligned}
\mid A_1x(t)+A_2y(t)\mid \ &\leq \parallel p \parallel \chi(\parallel x \parallel)\Big[\int_0^1 \frac{(t-qs)^{(v-1)}}{\Gamma_q(v)} d_qs \\
&+\frac{1}{\mid B\mid}\left\{\mid b \mid \textstyle\int_\eta^1 \displaystyle\left(\int_0^s \frac{(s-qu)^{(v-1)}}{\Gamma_q(v)} d_qu\right) d_qs + \int_0^\xi \frac{(\xi-qs)^{(v-1)}}{\Gamma_q(v)} d_qs\right\}\Big] \\
&+\left[1+\frac{1}{\mid B\mid}(b(1-\eta)-1)\right](x_0+M \parallel y \parallel).
\end{aligned}
$$

En prenant le suprême sur $t\in[0,1]$, et en utilisant la définition de $\overline{\Omega}_{r_0}$,on obtient :

$$
\begin{aligned}
r_0 \ &\leq \parallel p \parallel \chi(r_0)\Big[\int_0^1 \frac{(t-qs)^{(v-1)}}{\Gamma_q(v)} d_qs \\
&+\frac{1}{\mid B\mid}\Big\{ \mid b \mid \int_\eta^1 \left(\int_0^s \frac{(s-qu)^{(v-1)}}{\Gamma_q(v)} d_qu\right) d_qs \\
&+\int_0^\xi \frac{(\xi-qs)^{(v-1)}}{\Gamma_q(v)} d_qs\Big\}\Big] + \left[1+\frac{1}{\mid B\mid}(b(1-\eta)-1)\right](x_0+M \parallel r_0 \parallel)
\end{aligned}
$$

Donc

$$
\begin{aligned}
r_0 \ &\leq \left[\frac{1}{\Gamma_q(v+1)}+\frac{1}{\mid B\mid}\left\{\frac{\mid b \mid (1-\eta^{v+1})}{\Gamma_q(v+2)}+\frac{\xi^v}{\Gamma_q(v+1)}\right\}\right] \\
&+\left[1+\tfrac{1}{|B|} \mid b(1-\eta)-1 \mid\right](\mid x_0 + M \parallel x \parallel
\end{aligned}
$$

Alors

$$r_0 \leq \mu_0\chi(x_0) \parallel p \parallel +k_0(\mid x_0 \mid +Mr_0)$$

Ce qui implique :

$$\frac{r_0}{\mu_0\chi(r_0)+k_0 \mid x_0 \mid} \leq \frac{1}{1-Mk_0} \qquad \textit{(contradiction)}$$

Alors, $A_1x(t)+A_2y(t) \in \overline{\Omega}_{r_0}$

Étape 2

1. *On montre que* A_1 *est continue.*

   Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \overline{\Omega}_{r_0}$ *une suit telle que :* $x_n \longrightarrow x$ *dans* $\overline{\Omega}_{r_0}$*.Alors pour tout* $t \in [0,1]$*,on a :*

$$\begin{aligned}
\mid A_1x_n(t)-A_1x(t) \mid &= \Big| \frac{1}{\Gamma_q(v)} \int_0^t (t-qs)^{(v-1)} f(s,x_n(s))d_qs \\
&+ \frac{t}{B}\Big\{ b\int_\eta^1 \left(\int_0^s \frac{(s-qu)^{(v-1)}}{\Gamma_q(v)} f(u,x_n(u))d_qu \right) d_qs \\
&- \int_0^\xi \frac{(\xi-qs)^{(v-1)}}{\Gamma_q(v)} f(s,x_n(s))d_qs \Big\} \\
&- \frac{1}{\Gamma_q(v)} \int_0^t (t-qs)^{(v-1)} f(s,x(s))d_qs \\
&- \frac{t}{B}\Big\{ b\int_\eta^1 \left(\int_0^s \frac{(s-qu)^{(v-1)}}{\Gamma_q(v)} f(u,x_(u))d_qu \right) d_qs \\
&- \int_0^\xi \frac{(\xi-qs)^{(v-1)}}{\Gamma_q(v)} f(s,x(s))d_qs \Big\} \Big|
\end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned}
\mid A_1x_n(t) - A_1x(t) \mid \ &\leq \frac{1}{\Gamma_q(v)} \int_0^t (t-qs)^{(v-1)} \mid f(s,x_n(s)) - f(s,x(s)) \mid d_qs \\
&+ \frac{1}{\mid B \mid}\Big\{ \mid b \mid \int_\eta^1 \left(\int_0^s \frac{(s-qu)^{(v-1)}}{\Gamma_q(v)} \mid f(s,x_n(u)) - f(s,x(u)) \mid d_qu \right) d_qs \\
&+ \int_0^\xi \frac{(\xi-qs)^{(v-1)}}{\Gamma_q(v)} \mid f(s,x_n(s)) - f(s,x(s)) \mid \Big\}
\end{aligned}$$

Comme f est une fonction continue,alors :

$$\| A_1x_n(t) - A_1x(t) \|_\infty \longrightarrow 0 quand \quad n \longrightarrow \infty$$

D'où, A_1 est continue sur $\overline{\Omega}_{r_0}$

2. *On montre que A_1 est compact.*
   Pour établir la compacité de l'opérateur A_1, il suffit de prouver que $A_1(\overline{\Omega}_{r_0})$ est relativement compact en utilisant la théorème de d'Ascoli-Arzelà.

a) $A_1(\overline{\Omega}_{r_0})$ est borné.

Il suffit de montrer que pour tout $r_0 > 0$ il existe une constant positive k tel que pour tout $t \in [0,1]$ et $x \in \overline{\Omega}_{r_0}$, avec $\overline{\Omega}_{r_0} = \{x \in C([0,1],\mathbb{R}) : \| x \| \leq r_0\}$,

$$\begin{aligned}
\mid A_1x(t) \mid \ &= \Big| \frac{1}{\Gamma_q(v)} \int_0^t (t-qs)^{(v-1)} f(s,x(s)) d_qs \\
&+ \frac{t}{B}\Big\{ b \int_\eta^1 \left(\int_0^s \frac{(s-qu)^{(v-1)}}{\Gamma_q(v)} f(u,x(u)) d_qu \right) d_qs \\
&- \int_0^\xi \frac{(\xi-qs)^{(v-1)}}{\Gamma_q(v)} f(s,x(s)) \Big\} \Big|
\end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$
\begin{aligned}
\mid A_1x(t) \mid \quad &\leq \Big| \frac{1}{\Gamma_q(v)} \int_0^t (t-qs)^{(v-1)} \mid f(s,x(s)) \mid d_qs \\
&+ \frac{1}{\mid B \mid} \Big\{ \mid b \mid \int_\eta^1 \left(\int_0^s \frac{(s-qu)^{(v-1)}}{\Gamma_q(v)} \mid f(u,x(u)) \mid d_qu \right) d_qs \\
&- \int_0^\xi \frac{(\xi-qs)^{(v-1)}}{\Gamma_q(v)} \mid f(s,x(s)) \mid \Big\} \Big|
\end{aligned}
$$

En appliquant l'hypothèse H_5,on obtient :

$$
\mid A_1x(t) \mid \leq \parallel p \parallel \chi(r_0) \left[\frac{1}{\Gamma_q(v+1)} + \frac{1}{\mid B \mid} \left\{ \frac{\mid b \mid (1-\eta^{v+1})}{\Gamma_q(v+2)} + \frac{\xi^v}{\Gamma_q(v+1)} \right\} \right]
$$

Alors :

$$
\parallel A_1x(t) \parallel \leq \parallel p \parallel \chi(r_0)\mu_0
$$

Par suit :

$$
\mid A_1x(t) \mid \leq k \qquad avec \qquad k = \parallel p \parallel \chi(r_0)\mu_0
$$

D'où, $A_1(\overline{\Omega}_{r_0})$ est uniformément borné.

b) $A_1(\overline{\Omega}_{r_0})$ est équi continue.

Soit $x \in \overline{\Omega}_{r_0}$, *pour tout* $t_1, t_2 \in [0,1], t_1 < t_2$:

$$\begin{aligned}
\mid A_1x(t_2) - A_1x(t_1) \mid \quad &= \Big| \frac{1}{\Gamma_q(v)} \int_0^{t_2} (t_2 - qs)^{(v-1)} f(s, x(s)) d_qs \\
&+ \frac{t_2}{B} \Big\{ b \int_\eta^1 \left(\int_0^s \frac{(s-qu)^{(v-1)}}{\Gamma_q(v)} f(u, x(u)) d_qu \right) d_qs \\
&- \int_0^\xi \frac{(\xi - qs)^{(v-1)}}{\Gamma_q(v)} f(s, x(s)) d_qs \Big\} \\
&- \frac{1}{\Gamma_q(v)} \int_0^{t_1} (t_1 - qs)^{(v-1)} f(s, x(s)) d_qs \\
&- \frac{t_1}{B} \Big\{ b \int_\eta^1 \left(\int_0^s \frac{(s-qu)^{(v-1)}}{\Gamma_q(v)} f(u, x(u)) d_qu \right) d_qs \\
&- \int_0^\xi \frac{(\xi - qs)^{(v-1)}}{\Gamma_q(v)} f(s, x(s)) d_qs \Big\} \Big|
\end{aligned}$$

Par suit :

$$\begin{aligned}
\mid A_1x(t_2) - A_1x(t_1) \mid \quad &= \Big| \frac{1}{\Gamma_q(v)} \left[\int_0^{t_2} (t_2 - qs)^{(v-1)} f(s, x(s)) d_qs + \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - qs)^{(v-1)} d_qs \right] \\
&+ \frac{t_2 - t_1}{B} \Big\{ b \int_\eta^1 \left(\int_0^s \frac{(s-qu)^{(v-1)}}{\Gamma_q(v)} f(u, x(u)) d_qu \right) d_qs \\
&- \int_0^\xi \frac{(\xi - qs)^{(v-1)}}{\Gamma_q(v)} f(s, x(s)) d_qs \Big\} \\
&- \frac{1}{\Gamma_q(v)} \int_0^{t_1} (t_1 - qs)^{(v-1)} f(s, x(s)) d_qs \Big|
\end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned}
\mid A_1x(t_2)-A_1x(t_1)\mid \ &= \Big|\frac{1}{\Gamma_q(v)}\int_0^{t_1}\big[t_2-qs)^{(v-1}-(t_1-qs)^{(v-1)}\big]\,f(s,x(s))d_qs \\
&+\frac{1}{\Gamma_q(v)}\int_{t_1}^{t_2}(t_2-qs)^{(v-1)}f(s,x(s))d_qs \\
&+\frac{(t_2-t_1)}{B}\Big\{b\textstyle\int_\eta^1\displaystyle\left(\int_0^s\frac{(s-qu)^{(v-1)}}{\Gamma_q(v)}f(u,x(u))d_qu\right)d_qs \\
&-\int_0^\xi\frac{(\xi-qs)^{(v-1)}}{\Gamma_q(v)}f(s,x(s))d_qs\Big\}\Big|
\end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned}
\mid A_1x(t_2)-A_1x(t_1)\mid \ &\leq \frac{1}{\Gamma_q(v)}\int_0^{t_1}\big[(t_2-qs)^{(v-1)}-(t_1-qs)^{(v-1)}\big]\mid f(s,x(s))\mid d_qs \\
&+\frac{1}{\Gamma_q(v)}\int_{t_1}^{t_2}(t_2-qs)^{(v-1)}\mid f(s,x(s))\mid d_qs \\
&+\frac{\mid t_2-t_1\mid}{\mid B\mid}\Big\{\mid b\mid\int_\eta^1\left(\int_0^s\frac{(s-qu)^{(v-1)}}{\Gamma_q(v)}f(u,x(u))d_qu\right)d_qs \\
&-\int_0^\xi\frac{(\xi-qs)^{(v-1)}}{\Gamma_q(v)}\mid f(s,x(s))\mid d_qs\Big\}
\end{aligned}$$

En appliquant l'hypothèse H_5, on obtient :

$$\begin{aligned}
\mid A_1x(t_2)-A_1x(t_1)\mid \ &\leq \frac{\parallel p\parallel\chi(r_0)}{\Gamma_q(v)}\int_0^{t_1}\big[(t_2-qs)^{(v-1)}-(t_1-qs)^{(v-1)}\big]d_qs \\
&+\frac{\parallel p\parallel\chi(r_0)}{\Gamma_q(v)}\int_{t_1}^{t_2}(t_2-qs)^{(v-1)}d_qs \\
&+\frac{\mid t_2-t_1\parallel p\parallel\chi(r_0)}{\mid B\mid}\Big\{\mid b\mid\int_\eta^1\left(\int_0^s\frac{(s-qu)^{(v-1)}}{\Gamma_q(v)}d_qu\right)d_qs \\
&-\int_0^\xi\frac{(\xi-qs)^{(v-1)}}{\Gamma_q(v)}d_qs\Big\}
\end{aligned}$$

On a :

$$\int_0^{t_1}(t_2-qs)^{(v-1)}d_qs \quad = \frac{t_2^v-(t_2-t_1)^v}{v}$$

$$\int_0^{t_1}(t_1-qs)^{(v-1)}d_qs \quad = \frac{t_1^v}{v}$$

$$\int_{t_1}^{t_2}(t_2-qs)^{(v-1)}d_qs \quad = \frac{(t_2-t_1)^v}{v}$$

Alors,l'inégalité devient :

$$\begin{aligned} \mid A_1x(t_2)-A_1x(t_1)\mid \quad &\leq \frac{\parallel p\parallel \chi(r_0)}{\Gamma_q(v+1)}[(t_2^v-t_1^v)-(t_2-t_1)^v]+\frac{\parallel p\parallel \chi(r_0)}{\Gamma_q(v+1)}(t_2-t_1)^v \\ &+\frac{\mid t_2-t_1\mid\parallel p\parallel \chi(r_0)}{\mid B\mid}\left\{\frac{\mid b\mid(1-\eta^{v+1})}{\Gamma_q(v+2)}+\frac{\xi^v}{\Gamma_q(v+1)}\right\} \end{aligned}$$

Alors pour tout $t_1\longrightarrow t_2$ on va avoir :

$$\parallel A_1(x)(t_2)-A_1(x)(t_1)\parallel_\infty\longrightarrow 0$$

Donc $A_1(\overline{\Omega}_{r_0})$ est équicontinue,donc d'après a) et b) et le théorème d'Ascoli-Arzelà,A_1 est relativement compact sur $\overline{\Omega}_{r_0}$.

Étape 3

On montre que A_2 est contractant.

Soient $x,y\in\overline{\Omega}_{r_0},t\in[0,1]$,on a :

$$\begin{aligned} \mid A_2x(t)-A_2y(t)\mid \quad &= \Big|\left[1+\frac{t}{B}(b(1-\eta)-1)\right](x_0+g(x)) \\ &-\left[1+\frac{t}{B}(b(1-\eta)-1)\right](x_0+g(y))\Big| \end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$\mid A_2x(t)-A_2y(t)\mid\leq\left[1+\frac{1}{\mid B\mid}\mid b(1-\eta)-1\mid\right]\mid g(x)-g(y)\mid$$

En utilisant l'hypothèse H_2,on obtient :

$$| A_2x(t) - A_2y(t) |\leq k_0M \parallel x-y \parallel$$

tel que :

$$K_0 := 1 + \frac{1}{| B |} | b(1-\eta) - 1 |$$

D'où :

$$| A_2x(t) - A_2y(t) |\leq S \parallel x-y \parallel$$

avec

$$S = k_0M$$

Alors d'après l'hypothèse H_2 l'opérateur A_2 est contractante.

Exemple 3. *On condenser le problème q-fractionnaire suivant :*

$$\begin{cases} {}^cD_q^{\frac{3}{2}}x(t) = \dfrac{\tan x(t)}{e^t+10} \\ \\ x(0) = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{19}\tan(x(\omega)), x(\dfrac{1}{4}) = \dfrac{1}{9}\displaystyle\int_{\frac{7}{9}}^{1} x(s)d_qs \end{cases} \tag{2.16}$$

Ou

$$v = \frac{3}{2}, q = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{9}, \xi = \frac{1}{4}, \eta = \frac{7}{9}, M = \frac{1}{19}, 0 < \omega < 1, \quad avec \quad f(t, x(t)) = \frac{\tan x(t)}{e^t+10}$$

Soient $x, y \in \mathbb{R}, t \in [0,1]$ alors :

$$| f(t, x(t))) |= \left|\frac{\tan x(t)}{e^t+10}\right| \leq \frac{1}{11}$$

Donc H_4 est satisfait avec $\chi(r_0) \parallel p \parallel= \dfrac{1}{11}$

Par suit :

$$B = -5.083333, \mu_0 = 0.86537, \quad et \quad k_0 = 1.191864, \quad donc \quad r_0 > 0.50780$$

Ainsi toutes les hypothèses du théorème (2.2)soit satisfait,par conséquent le problème (2.14)possède au moins une solution sur $[0,1]$.

2.4.2 Résultat d'existence via le théorème du point fixe de Schaefer

Notre prochaine résultat d'existence des solutions de problème (2.2)est basé sur théorème de point fixe de Schaefer(1.5).

Démonstration 2.4. *La preuve sera donne en quatre étape.*

Étape 1

A est continue.
Soit x_n suite de $X = C([0,1],\mathbb{R})$ tel que $x_n \longrightarrow x$ quand $n \longrightarrow \infty$
il faut montrer que $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \| Ax_n - Ax \| = 0$.
En effet pour tout $x_n, x \in \overline{\Omega}_{r_0}, t \in [0,1]$
on a :

$$
\begin{aligned}
\mid Ax_n(t) - Ax(t) \mid \quad &= \Big| \int_0^t \frac{(t-qs)^{(v-1)}}{\Gamma_q(v)} f(s, x_n(s)) d_q s \\
&+ \frac{t}{B}\Big\{ b \int_\eta^1 \left(\int_0^s \frac{(s-qu)^{(v-1)}}{\Gamma_q(v)} f(u, x_n(u)) d_q u \right) d_q s \\
&- \int_0^\xi \frac{(\xi-qs)^{(v-1)}}{\Gamma_q(v)} f(s, x_n(s)) d_q s \Big\} \\
&+ \left[1 + \frac{t}{B}(b(1-\eta)-1) \right] (x_0 + g(x_n)) - \int_0^t \frac{(t-qs)^{(v-1)}}{\Gamma_q(v)} f(s, x(s)) d_q s \\
&- \frac{t}{B}\Big\{ b \int_\eta^1 \left(\int_0^s \frac{(s-qu)^{(v-1)}}{\Gamma_q(v)} f(u, x(u)) d_q u \right) d_q s \\
&- \int_0^\xi \frac{(\xi-qs)^{(v-1)}}{\Gamma_q(v)} f(s, x(s)) d_q s \Big\} \\
&- \left[1 + \frac{t}{B}(b(1-\eta)-1) \right] (x_0 + g(x)) \Big|
\end{aligned}
$$

Par suit :

$$\begin{aligned}
\mid Ax_n(t) - Ax(t) \mid \quad &\leq \frac{1}{\Gamma_q(v)} \int_0^t (t-qs)^{(v-1)} \mid f(s,x_n(s)) - f(s,x(s)) \mid d_q s \\
&+ \frac{1}{B}\Big\{ \mid b \mid \int_\eta^1 \left(\int_0^s \frac{(s-qu)^{(v-1)}}{\Gamma_q(v)} \mid f(u,x_n(u)) - f(u,x(u)) \mid d_q u \right) d_q s \\
&- \int_0^\xi \frac{(\xi-qs)^{(v-1)}}{\Gamma_q(v)} \mid f(s,x_n(s)) - f(s,x(s)) \mid d_q s \Big\} \\
&+ \left[1 + \frac{1}{\mid B \mid} \mid b(1-\eta) - 1 \mid \right] \mid g(x_n) - g(x) \mid
\end{aligned}$$

Comme f et g deux fonctions continues,alors :

$$\parallel Ax_n(t) - Ax(t) \parallel_\infty \longrightarrow 0 \quad quand \quad n \longrightarrow \infty$$

Ce qui preuve la continuité de l'opérateur A.

Étape 2

A est borné.Soit :

$$\overline{\Omega}_{r_0} = \{ x \in C([0,1], \mathbb{R}) : \parallel x \parallel \leq r_0 \},$$

$A(\Omega_{r_0})$ est borné.

On a :

$$\begin{aligned}
\mid Ax(t) \mid \quad &= \mid \int_0^t \frac{(t-qs)^{(v-1)}}{\Gamma_q(v)} f(s,x(s)) d_q s \\
&+ \frac{t}{B}\Big\{ b \int_\eta^1 \left(\int_0^s \frac{(s-qu)^{(v-1)}}{\Gamma_q(v)} f(u,x(u)) d_q u \right) d_q s \\
&- \int_0^\xi \frac{(\xi-qs)^{(v-1)}}{\Gamma_q(v)} f(s,x(s)) d_q s \Big\} \\
&+ \left[1 + \frac{t}{B}(b(1-\eta) - 1) \right] (x_0 + g(x)) \mid
\end{aligned}$$

Par suit :

$$
\begin{aligned}
\mid Ax(t)\mid \ &\leq \int_0^t \frac{(t-qs)^{(v-1)}}{\Gamma_q(v)} \mid f(s,x(s))\mid d_qs \\
&+\frac{t}{\mid B\mid}\Big\{ \mid b\mid \int_\eta^1 \left(\int_0^s \frac{(s-qu)^{(v-1)}}{\Gamma_q(v)} \mid f(u,x(u))\mid d_qu\right) d_qs \\
&+\int_0^\xi \frac{(\xi-qs)^{v-1}}{\Gamma_q(v)} \mid f(s,x(s))\mid d_qs\Big\} \\
&+\left[1+\frac{t}{\mid B\mid} \mid b(1-\eta)-1\mid\right](\mid x_0\mid + \mid g(x)\mid
\end{aligned}
$$

En appliquant les hypothèses H_5 et H_2 on obtient :

$$
\begin{aligned}
\mid Ax(t)\mid \ &\leq \parallel p \parallel \chi(\parallel (r_0)\parallel)\Big[\int_0^t \frac{(t-qs)^{(v-1)}}{\Gamma_q(v)} d_qs \\
&+\frac{1}{\mid B\mid}\Big\{ \mid b\mid \int_\eta^1 \left(\int_0^s \frac{(s-qu)^{(v-1)}}{\Gamma_q(v)} d_qu\right) d_qs \\
&+\int_0^\xi \frac{(\xi-qs)^{(v-1)}}{\Gamma_q(v)} d_qs\Big\}\Big] \\
&+\left[1+\frac{1}{\mid B\mid}(b(1-\eta)-1)\right] \mid (x_0\mid + Mr_0)
\end{aligned}
$$

Alors :

$$
\begin{aligned}
\mid Ax(t)\mid \ &\leq \chi(r_0)\parallel p \parallel \Big[\frac{1}{\Gamma_q(v+1)} + \frac{1}{\mid B\mid}\Big\{\frac{\mid b\mid (1-\eta^{v+1})}{\Gamma_q(v+2)} + \frac{\xi^v}{\Gamma_q(v+1)}\Big\}\Big] \\
&+\left[1+\frac{1}{\mid B\mid} \mid b(1-\eta)-1\mid\right](\mid x_0\mid + Mr_0)
\end{aligned}
$$

D'où :

$$\mid Ax(t)\mid \leq \chi(r_0)\parallel p \parallel \mu_0 + k_0(\mid x_0\mid + Mr_0)$$

Ce qui donne :

$$\mid Ax(t)\mid \leq N$$

avec

$$N = \chi(r_0) \parallel p \parallel \mu_0 + k_0(\mid x_0 \mid + M r_0)$$

et N est finis.

D'où $A(\overline{\Omega}_{r_0})$ est uniformément borné.

Étape 3

$A(\overline{\Omega}_{r_0})$ est équicontinue.

Soit $x \in \overline{\Omega}_{r_0}$, pour tout $t_1, t_2 \in [0,1], t_1 < t_2$ on a :

$$\begin{aligned}
\mid Ax(t_2) - Ax(t_1) \mid \ &= \Big| \mid \frac{1}{\Gamma_q(v)} \int_0^{t_2} (t_2 - qs)^{(v-1)} f(s, x(s)) d_q s \\
&+ \frac{t_2}{B} \Big\{ b \int_\eta^1 \left(\int_0^s \frac{(s-qu)^{(v-1)}}{\Gamma_q(v)} f(u, x(u)) d_q u \right) d_q s \\
&- \int_0^\xi \frac{(\xi - qs)^{(v-1)}}{\Gamma_q(v)} f(s, x(s)) d_q s \Big\} \\
&+ \left[1 + \frac{t_2}{B}(b(1-\eta) - 1) \right] (x_0 + g(x)) \\
&- \frac{1}{\Gamma_q(v)} \int_0^{t_1} (t_1 - qs)^{(v-1)} f(s, x(s)) d_q s \\
&- \frac{t_1}{B} \Big\{ b \int_\eta^1 \left(\int_0^s \frac{(s-qu)^{(v-1)}}{\Gamma_q(v)} f(u, x(u)) d_q u \right) d_q s \\
&- \int_0^\xi \frac{(\xi - qs)^{(v-1)}}{\Gamma_q(v)} f(s, x(s)) d_q s \Big\} \\
&- \left[1 + \tfrac{t_1}{B}(b(1-\eta) - 1) \right] (x_0 + g(x)) \Big|
\end{aligned}$$

Par suit :

$$\begin{aligned}
\mid Ax(t_2)-Ax(t_1)\mid \; &= \Big|\frac{1}{\Gamma_q(v)}\left[\int_0^{t_2}(t_2-qs)^{(v-1)}f(s,x(s))d_qs+\int_{t_1}^{t_2}(t_2-qs)^{(v-1)}f(s,x(s))d_qs\right] \\
&+\frac{t_2-t_1}{B}\Big\{b\int_\eta^1\left(\int_0^s\frac{(s-qu)^{(v-1)}}{\Gamma_q(v)}f(u,x(u))d_qu\right)d_qs \\
&-\int_0^\xi\frac{(\xi-qs)^{(v-1)}}{\Gamma_q(v)}f(s,x(s))d_qs\Big\} \\
&-\frac{1}{\Gamma_q(v)}\int_0^{t_1}(t_1-qs)^{(v-1)}f(s,x(s))d_qs+\frac{t_2-t_1}{B}[b(1-\eta)-1](x_0+g(x))\Big|
\end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned}
\mid Ax(t_2)-Ax(t_1)\mid \; &= \Big|\frac{1}{\Gamma_q(v)}\int_0^{t_1}\left[t_2-qs)^{(v-1}-(t_1-qs)^{(v-1)}\right]f(s,x(s))d_qs \\
&+\frac{1}{\Gamma_q(v)}\int_{t_1}^{t_2}(t_2-qs)^{(v-1)}f(s,x(s))d_qs \\
&+\frac{(t_2-t_1)}{B}\Big\{b\int_\eta^1\left(\int_0^s\frac{(s-qu)^{(v-1)}}{\Gamma_q(v)}f(u,x(u))d_qu\right)d_qs \\
&-\int_0^\xi\frac{(\xi-qs)^{(v-1)}}{\Gamma_q(v)}f(s,x(s))d_qs\Big\}+\frac{t_2-t_1}{B}[b(1-\eta)-1](x_0+g(x))\Big|
\end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$
\begin{aligned}
\mid Ax(t_2) - Ax(t_1) \mid \; &\leq \frac{1}{\Gamma_q(v)} \int_0^{t_1} \left[(t_2 - qs)^{(v-1)} - (t_1 - qs)^{(v-1)} \right] \mid f(s, x(s)) \mid d_q s \\
&+ \frac{1}{\Gamma_q(v)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - qs)^{(v-1)} \mid f(s, x(s)) \mid d_q s \\
&+ \frac{\mid t_2 - t_1 \mid}{\mid B \mid} \Big\{ \mid b \mid \int_\eta^1 \left(\int_0^s \frac{(s - qu)^{(v-1)}}{\Gamma_q(v)} f(u, x(u)) d_q u \right) d_q s \\
&- \int_0^\xi \frac{(\xi - qs)^{(v-1)}}{\Gamma_q(v)} \mid f(s, x(s)) \mid d_q s \Big\} \\
&+ \frac{\mid t_2 - t_1 \mid}{B} \mid b(1 - \eta) - 1 \mid (\mid x_0 \mid + \mid g(x) \mid)
\end{aligned}
$$

En appliquant les hypothèses H_2 et H_5 on obtient :

$$
\begin{aligned}
\mid A_1 x(t_2) - A_1 x(t_1) \mid \; &\leq \frac{\parallel p \parallel \chi(r_0)}{\Gamma_q(v)} \int_0^{t_1} \left[(t_2 - qs)^{(v-1)} - (t_1 - qs)^{(v-1)} \right] d_q s \\
&+ \frac{\parallel p \parallel \chi(r_0)}{\Gamma_q(v)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - qs)^{(v-1)} d_q s \\
&+ \frac{\mid t_2 - t_1 \mid \parallel p \parallel \chi(r_0)}{\mid B \mid} \Big\{ \mid b \mid \int_\eta^1 \left(\int_0^s \frac{(s - qu)^{(v-1)}}{\Gamma_q(v)} d_q u \right) d_q s \\
&- \int_0^\xi \frac{(\xi - qs)^{(v-1)}}{\Gamma_q(v)} d_q s \Big\} + \frac{\mid t_2 - t_1 \mid}{\mid B \mid} \mid b(1 - \eta) - 1 \mid (\mid x_0 \mid + M r_0)
\end{aligned}
$$

On a :

$$
\begin{aligned}
\int_0^{t_1} (t_2 - qs)^{(v-1)} d_q s &= \frac{t_2^v - (t_2 - t_1)^v}{v} \\
\int_0^{t_1} (t_1 - qs)^{(v-1)} d_q s &= \frac{t_1^v}{v} \\
\int_{t_1}^{t_2} (t_2 - qs)^{(v-1)} d_q s &= \frac{(t_2 - t_1)^v}{v}
\end{aligned}
$$

Alors,l'inégalité devient :

$$\begin{aligned}\| Ax(t_2)-Ax(t_1) \| &\leq \frac{\| p \| \chi(r_0)}{\Gamma_q(v+1)}\left[t_2^v-(t_2-t_1)^v-t^v+(t_2-t_1)^v\right]\\ &+\frac{| t_2-t_1 |}{| B |} \mid b(1-\eta)-1 \mid (\mid x_0 \mid +Mr_0)\end{aligned}$$

Par suit :

$$\begin{aligned}\| Ax(t_2)-Ax(t_1) \| &\leq \frac{\| p \| \chi(r_0)}{\Gamma_q(v+1)}(t_2^v-t_1^v)+\frac{| t_2-t_1 | \chi(r_0) \| p \|}{B}\mu_0\\ &+\frac{| t_2-t_1 |}{| B |} \mid b(1-\eta)-1 \mid (\mid x_0 \mid +Mr_0)\end{aligned}$$

Alors pour $t_1 \longrightarrow t_2$,on avoir :

$$\| Ax(t_2)-Ax(t_1) \|_\infty \longrightarrow 0$$

Donc $A(\overline{\Omega}_{r_0})$ est équicontinue.

Étape 4

Maintenant,il reste à montrer que :

$$\Omega=\{x \in X, x=\lambda Ax, 0<\lambda<1\} \text{ est borné}$$

Soit $x \in \Omega$ alors $x=\lambda Ax, 0<\lambda<1$,pour tout $t \in [0,1]$ on a :

$$\begin{aligned}| x(t) | &= \Big| \lambda \int_0^t \frac{(t-qs)^{(v-1)}}{\Gamma_q(v)} f(s,x(s))d_qs+\frac{\lambda t}{B}\Big\{ b\int_\eta^1 \left(\int_0^s \frac{(s-qu)^{(v-1)}}{\Gamma_q(v)} f(u,x(u))d_qu\right) d_qs\\ &-\int_0^\xi \frac{(\xi-qs)^{(v-1)}}{\Gamma_q(v)} f(s,x(s))d_qs\Big\}+\lambda\left[1+\frac{t}{B}\left(b(1-\eta)-1\right)\right](x_0+g(x))\Big|\end{aligned}$$

En utilisant les hypothèses H_2 et H_5 on obtient :

$$\begin{aligned}| x(t) | &\leq \chi(r_0) \| p \| \left[\frac{1}{\Gamma_q(v+1)}+\frac{1}{| B |}\Big\{\frac{| b | (1-\eta^{v+1})}{\Gamma_q(v+2)}+\frac{\xi^v}{\Gamma_q(v+1)}\Big\}\right]\\ &+\left[1+\tfrac{1}{|B|} \mid b(1-\eta)-1 \mid\right](x_0+M \| r_0 \|)\end{aligned}$$

D'où :

$$| x(t) | \leq \| p \| \chi(r_0)\mu_0 + k_0(| x_0 | + Mr_0)$$

Ce qui donne :

$$| x(t) | \leq K$$

avec

$$k = \| p \| \chi(r_0)\mu_0 + k_0(| x_0 | + Mr_0)$$

et K *est finis.*

Par conséquent l'opérateur A *admet au moins une point fixe qui est une solution du problème (2.2).*

Exemple 4. *Soit le problème q-fractionnaire suivant :*

$$\begin{cases} {}^{c}D_q^{\frac{3}{2}} x(t) = \dfrac{\cos t) + \sin t}{\sqrt{t+25}} x(t) \\ \\ x(0) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{22}(x(\sigma)), x(\dfrac{1}{4}) = \dfrac{1}{5}\displaystyle\int_{\frac{3}{4}}^{1} x(s)d_q s \end{cases} \tag{2.17}$$

Ou

$$v = \frac{3}{2}, q = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{5}, \xi = \frac{1}{4}, \eta = \frac{3}{4}, M = \frac{1}{22}, 0 < \sigma < 1, \quad avec \quad f(t, x(t)) = \frac{\cos t) + \sin t}{\sqrt{t+25}} x(t)$$

$$| f(t, x(t))) | = | \frac{\cos(t) + \sin t}{\sqrt{t+25}} x(t) | \leq \frac{2}{5}$$

Donc H_4 *est satisfait avec*

$$\chi(r_0) \| p \| = \frac{2}{5}$$

aussi on a :

$$B = 0.191666, \mu_0 = 1.66070, \quad et \quad k_0 = 5.95653$$

donc

$$r_0 > 5.60220$$

Ainsi toutes les hypothèses du théorème (2.2)soit satisfait,par conséquent le problème (2.15)possède au moins une solution sur $[0, 1]$.

Chapitre 3

Problème q-fractionnaire avec deux dérivées au sens de caputo

Dans ce chapitre,on va concentrer sur l'étude de l'existence et l'unicité de la solution du problème q-fractionnaire de valeur aux limites non locales avec des equations de q-différence fractionnaire non linéaire et des equations intégrales de q-différence avec quatre point conditions aux limites intégrales non locales.
On considérer le problème suivant :

$$\begin{cases} {}^cD_q^{\beta}({}^cD_q^{\gamma}+\lambda)x(t) &= f(t,x(t)), t\in[0,1], 0<q<1, 0<\beta,\gamma\leq 1, \lambda\in\mathbb{R} \\ x(0) &= aI_q^{\alpha-1}x(\eta) = a\displaystyle\int_0^{\eta}\frac{(\eta-qs)^{\alpha-2}}{\Gamma_q(\alpha-1)}x(s)d_qs \\ x(1) &= bI_q^{\alpha-1}x(\sigma) = b\displaystyle\int_0^{\sigma}\frac{(\sigma-qs)^{\alpha-2}}{\Gamma_q(\alpha)}x(s)d_qs \quad ,\alpha>2, 0<\eta,\sigma<1 \end{cases} \tag{3.1}$$

Où $f\in C([0,1]\times\mathbb{R},\mathbb{R})$,$D_q^{\beta}$ et D_q^{γ} deux dérivées q-fractionnaire au sens de caputo,avec a, b, sont des réelles.

On va étudier l'existence et l'unicité de la solution à laide de principe de contraction de Banach.Puis en utilisant le théorème de Schaefer,on va aborder la question de l'existence d'une solution au moins.

3.1 Problème intégrale

Soit $h(t) \in C([0,1],\mathbb{R})$,alors la solution du problème q-fractionnaire suivant :

$$\begin{cases} {}^cD_q^\beta({}^cD_q^\gamma+\lambda)x(t) &= h(t), t\in[0,1], 0<q<1, 0<\beta,\gamma\leq 1, \lambda\in\mathbb{R} \\ x(0) &= aI_q^{\alpha-1}x(\eta) = a\int_0^\eta \frac{(\eta-qs)^{\alpha-2}}{\Gamma_q(\alpha-1)}x(s)d_qs \\ x(1) &= bI_q^{\alpha-1}x(\sigma) = b\int_0^\sigma \frac{(\sigma-qs)^{\alpha-2}}{\Gamma_q(\alpha)}x(s)d_qs, \quad \alpha>2, 0<\eta,\sigma<1 \end{cases} \tag{3.2}$$

est donnée par :

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t \frac{(t-qs)^{\gamma-1}}{\Gamma_q(\gamma)}\left[I_q^\beta h(u)-\lambda x(u)\right]d_qu \\ &-\frac{[\delta_3t^\gamma-\delta_4]}{\Delta}\left\{a\int_0^\eta \frac{(t-qs)^{\alpha-2}}{\Gamma_q(\alpha-1)}\left(\int_0^s \frac{(s-qu)^{\gamma-1}}{\Gamma_q(\gamma)}\left[I_q^\beta h(u)-\lambda x(u)\right]d_qu\right)d_qs\right\} \\ &+\frac{[\delta_1t^\gamma-\delta_2]}{\Delta}\left\{b\int_0^\sigma \frac{(\sigma-qs)^{\alpha-2}}{\Gamma_q(\alpha-1)}\left(\int_0^s \frac{(s-qu)^{\gamma-1}}{\Gamma_q(\gamma)}\left[I_q^\beta h(u)-\lambda x(u)\right]d_qu\right)d_qs\right\} \\ &-\frac{[\delta_1t^\gamma-\delta 2]}{\Delta}\left\{\int_0^1 \frac{(1-qu)^{\gamma-1)}}{\Gamma_q(\gamma)}\left[I_q^\beta h(u)-\lambda x(u)\right]\right\} \end{aligned} \tag{3.3}$$

Où

$$\delta_1 = \left(\frac{a\eta^{\alpha-1}}{\Gamma_q(\alpha)}-1\right), \delta_2 = \left(\frac{a\eta^{(\alpha+\gamma-1)}\Gamma_q(\gamma+1)}{\Gamma_q(\alpha+\gamma)}\right),$$

$$\delta_3 = \left(\frac{b\sigma^{(\alpha-1)}}{\Gamma_q(\alpha)}-1\right), \delta_4 = \left(\frac{b\sigma^{(\gamma+\alpha-1)}\Gamma_q(\gamma+1)}{\Gamma_q(\gamma+\alpha)}-1\right)$$

avec $\Delta = \delta_3\delta_2 - \delta_4\delta_1$

Démonstration 3.1. *Soit l'équation :*

$${}^cD_q^\beta({}^cD_q^\gamma+\lambda)x(t) = h(t) \tag{3.4}$$

En prenant l'intégrale de Riemann-Liouville q-fractionnaire d'ordre β pour (3,4)on obtient :

$$I_q^\beta({}^cD_q^\beta({}^cD_q^\gamma+\lambda)x(t)) = I_q^\beta(h(t))$$

Par le lemme (1.3)on trouve :

$$(D_q^\gamma x(t)+\lambda)+c_0 = I_q^\beta(h(t))$$

Alors :

$$D_q^\gamma x(t) = I_q^\beta(h(t)) - \lambda x(t) - c_0 \tag{3.5}$$

En prenant l'intégrale de Riemann-Liouville q-fractionnaire d'ordre γ pour (3,5) on obtient :

$$I_q^\gamma(D_q^\gamma x(t)) = I_q^{\beta+\gamma}h(t) - \lambda I_q^\gamma x(t) - I_q^\gamma c_0$$

Par le lemme (1,3)on trouve :

$$x(t)+c_1 = I_q^{\beta+\gamma}h(t) - \lambda I_q^\gamma x(t) - \frac{t^\gamma}{\Gamma_q(\gamma+1)}c_0$$

Alors,la solution générale du problème (3,2) est exprimée sous la forme intégrale suivant :

$$x(t) = \int_0^t \frac{(t-qu)^{(\gamma-1)}}{\Gamma_q(\gamma)}\left[I_q^\beta h(u) - \lambda x(u)\right] d_qu - c_0\frac{t^\gamma}{\Gamma_q(\gamma+1)} - c_1 \tag{3.6}$$

où c_0 et c_1 sont des constates arbitraire.

Maintenant,on cherche les constantes c_0 et c_1.

D'après la condition $x(0) = aI_q^{\alpha-1}x(\eta)$ peut écrire :

$$\begin{aligned} x(0) \quad &= a\int_0^\eta \frac{(\eta-qs)^{(\alpha-2)}}{\Gamma_q(\alpha-1)}\left(\int_0^s \frac{(s-qu)^{(\gamma-1)}}{\Gamma_q(\gamma)}\left[I_q^\beta h(u) - \lambda x(u)\right] d_qu\right) d_qs \\ &-c_0\frac{a\eta^{(\gamma+\alpha-1)}}{\Gamma_q(\gamma+\alpha)} - c_1\frac{a\eta^{\alpha-1}}{\Gamma_q(\alpha)} = -c_1 \end{aligned}$$

Par suit :

$$\begin{aligned} c_1 \quad &= \frac{\Gamma_q(\alpha)}{\frac{a\eta^{(\alpha-1)}}{\Gamma_q(\alpha)}-1} a\int_0^\eta \frac{(\eta-qs)^{(\alpha-2)}}{\Gamma_q(\alpha-1)}\left(\int_0^s \frac{(s-qu)^{(\gamma-1)}}{\Gamma_q(\gamma)}\left[I_q^\beta h(u) - \lambda x(u)\right] d_qu\right) d_qs \\ &-c_0\frac{a\eta^{(\alpha+\gamma-1)}}{\Gamma_q(\gamma+\alpha)(\frac{a\eta^{\alpha-1}}{\Gamma_q(\alpha)}-1)} \end{aligned}$$

On utilise la condition $x(1) = bI_q^{\alpha-1}x(\sigma)$ on trouve :

$$\begin{aligned} x(1) &= b\int_0^\sigma \frac{(\sigma-qs)^{(\alpha-2)}}{\Gamma_q(\alpha-1)}\left(\int_0^s \frac{(s-qu)^{(\gamma-1)}}{\Gamma_q(\gamma)}\left[I_q^\beta h(u)-\lambda x(u)\right]d_qu\right)d_qs \\ &\quad -c_0\frac{b\sigma^{(\alpha+\gamma-1)}}{\Gamma_q(\gamma+\alpha)}-c_1\frac{b\sigma^{(\alpha-1)}}{\Gamma_q(\alpha)} \\ &= \int_0^1 \frac{(1-qu)^{(\gamma-1)}}{\Gamma_q(\gamma)}\left[I_q^\beta h(u)-\lambda x(u)\right]d_qu-\frac{c_0}{\Gamma_q(\gamma+1)}-c_1 \end{aligned}$$

Par suit :

$$\begin{aligned} & b\int_0^\sigma \frac{(\sigma-qs)^{(\alpha-2)}}{\Gamma_q(\alpha-1)}\left(\int_0^s \frac{(s-qu)^{(\gamma-1)}}{\Gamma_q(\gamma)}\left[I_q^\beta h(u)-\lambda x(u)\right]d_qu\right)d_qs \\ & -\int_0^1 \frac{(1-qu)^{(\gamma-1)}}{\Gamma_q(\gamma)}\left[I_q^\beta h(u)-\lambda x(u)\right]d_qu-c_1\left(\frac{b\sigma^{\alpha-1}}{\Gamma_q(\alpha)}-1\right) \\ & = c_0\left(\frac{b\sigma^{(\alpha+\gamma-1)}}{\Gamma_q(\gamma+\alpha)}-\frac{1}{\Gamma_q(\gamma+1)}\right) \end{aligned} \tag{3.7}$$

On remplace c_1 dans(3,7) on obtient :

$$\begin{aligned} & b\int_0^\sigma \frac{(\sigma-qs)^{(\alpha-2)}}{\Gamma_q(\alpha-1)}\left(\int_0^s \frac{(s-qu)^{(\gamma-1)}}{\Gamma_q(\gamma)}[I_q^\beta h(u)-\lambda x(u)]d_qu\right)d_qs \\ & -\int_0^1 \frac{(1-qu)^{(\gamma-1)}}{\Gamma_q(\gamma)}\left[I_q^\beta h(u)-\lambda x(u)\right]d_qu \\ & -\Bigg\{\frac{\Gamma_q(\alpha)}{\frac{a\eta^{(\alpha-1)}}{\Gamma_q(\alpha)}-1}a\int_0^\eta \frac{(\eta-qs)^{(\alpha-2)}}{\Gamma_q(\alpha-1)}\left(\int_0^s \frac{(s-qu)^{(\gamma-1)}}{\Gamma_q(\gamma)}\left[I_q^\beta h(u)-\lambda x(u)\right]d_qu\right)d_qs \\ & -c_0\frac{a\eta^{(\alpha+\gamma-1)}}{\Gamma_q(\gamma+\alpha)(\dfrac{a\eta^{\alpha-1}}{\Gamma_q(\alpha)}-1)}\Bigg\}\left(\tfrac{b\sigma^{\alpha-1}}{\Gamma_q(\alpha)}-1\right)=c_0\left(\frac{b\sigma^{(\gamma+\alpha-1)}}{\Gamma_q(\gamma+\alpha)}-\frac{1}{\Gamma_q(\gamma+1)}\right) \end{aligned}$$

Alors :

$$b\int_0^{\sigma}\frac{(\sigma-qs)^{(\alpha-2)}}{\Gamma_q(\alpha-1)}\left(\int_0^{s}\frac{(s-qu)^{(\gamma-1)}}{\Gamma_q(\gamma)}\left[I_q^{\beta}h(u)-\lambda x(u)\right]d_qu\right)d_qs$$

$$-\int_0^{1}\frac{(1-qu)^{(\gamma-1)}}{\Gamma_q(\gamma)}\left[I_q^{\beta}h(u)-\lambda x(u)\right]d_qu$$

$$+\frac{\left(\frac{b\sigma^{\alpha-1}}{\Gamma_q(\alpha)}-1\right)}{\left(\frac{a\eta^{\alpha-1)}}{\Gamma_q(\alpha)}-1\right)}a\int_0^{\eta}\frac{(\eta-qs)^{(\alpha-2)}}{\Gamma_q(\alpha-1)}\left(\int_0^{s}\frac{(s-qu)^{(\gamma-1)}}{\Gamma_q(\gamma)}\left[I_q^{\beta}h(u)-\lambda x(u)\right]d_qu\right)d_qs$$

$$=c_0\left\{\frac{a\eta^{(\gamma+\alpha-1)}\left(\frac{b\sigma^{\alpha-1}}{\Gamma_q(\alpha)}-1\right)}{\Gamma_q(\gamma+\alpha)\left(\frac{a\eta^{\alpha-1}}{\Gamma_q(\alpha)}-1\right)}-\frac{b\sigma^{(\alpha+\gamma-1)}}{\Gamma_q(\gamma+\alpha)}-\frac{1}{\Gamma_q(\gamma+1)}\right\}$$

D'où :

$$c_0 = \frac{\Gamma_q(\gamma+1)}{\left(\frac{b\sigma^{\alpha-1}}{\Gamma_q(\alpha)}-1\right)\left(\frac{a\eta^{(\gamma+\alpha-1)}\Gamma_q(\gamma+1)}{\Gamma_q(\gamma+\alpha)}\right)-\left(\frac{b\sigma^{\gamma+\alpha-1}\Gamma_q(\gamma+1)}{\Gamma_q(\gamma+\alpha)}-1\right)\left(\frac{a\eta^{\alpha-1}}{\Gamma_q(\alpha)}-1\right)}$$

$$\Big\{\left(\frac{b\sigma^{\alpha-1}}{\Gamma_q(\alpha)-1}\Big(a\int_0^{\eta}\frac{(\eta-qs)^{(\alpha-2)}}{\Gamma_q(\alpha-1)}\left(\int_0^{s}\frac{(s-qu)^{(\gamma-1)}}{\Gamma_q(\gamma)}\left[I_q^{\beta}h(u)-\lambda x(u)\right]d_qu\right)d_qs\right)$$

$$-\left(\frac{a\eta^{\alpha-1}}{\Gamma_q(\alpha)-1}\right)\left(b\int_0^{\sigma}\frac{(\sigma-qs)^{(\alpha-2)}}{\Gamma_q(\alpha-1)}\int_0^{s}\frac{(s-qu)^{(\gamma-1)}}{\Gamma_q(\gamma)}\left[I_q^{\beta}h(u)-\lambda x(u)\right]d_qu\,)d_qs\right)$$

$$+\left(\frac{a\eta^{\alpha-1}}{\Gamma_q(\alpha)}-1\right)\int_0^{1}\frac{(1-qu)^{(\gamma-1)}}{\Gamma_q(\gamma)}\left[I_q^{\beta}h(u)-\lambda x(u)\right]d_qu\Big\}$$

avec :

$$c_1 = \frac{1}{\left(\frac{b\sigma^{\alpha-1}}{\Gamma_q(\alpha)}-1\right)\left(\frac{a\eta^{(\gamma+\alpha-1)}\Gamma_q(\gamma+1)}{\Gamma_q(\gamma+\alpha)}\right)-\left(\frac{b\sigma^{\gamma+\alpha-1}\Gamma_q(\gamma+1)}{\Gamma_q(\gamma+\alpha)}-1\right)\left(\frac{a\eta^{\alpha-1}}{\Gamma_q(\alpha)}-1\right)}$$

$$\left\{\frac{b\sigma^{\gamma+\alpha-1}\Gamma_q(\gamma+1)}{\Gamma_q(\gamma+\alpha)}\left(a\int_0^\eta \frac{(\eta-qs)^{(\alpha-2)}}{\Gamma_q(\alpha-1)}\left(\int_0^s \frac{(s-qu)^{(\gamma-1)}}{\Gamma_q(\gamma)}\left[I_q^\beta h(u)-\lambda x(u)\right]d_qu\right)d_qs\right.\right.$$

$$+\left(\frac{a\eta^{(\gamma+\alpha-1)}\Gamma_q(\gamma+1)}{\Gamma_q(\gamma+\alpha)}-1\right)\left(b\int_0^\sigma \frac{(\sigma-qs)^{(\alpha-2)}}{\Gamma_q(\alpha-1)}\int_0^s \frac{(s-qu)^{(\gamma-1)}}{\Gamma_q(\gamma)}\left[I_q^\beta h(u)-\lambda x(u)\right]d_qu\right)d_qs\,))$$

$$\left.-\left(\frac{a\eta^{(\gamma+\alpha-1)}\Gamma_q(\gamma+1)}{\Gamma_q(\gamma+\alpha)}\int_0^\sigma \frac{(1-qu)^{(\gamma-1)}}{\Gamma_q(\gamma)}\left[I_q^\beta h(u)-\lambda x(u)\right]d_qu\right\}\right.$$

Substituant c_0 et c_1 en (3.6),on obtient la solution (3,3).

Problème du point fixe

Avant tout,on introduit l'espace de Banach suivant :

$$X = \{x, x \in C([0,1],\mathbb{R})\}$$

muni de la norme :

$$\begin{aligned}\| x \|_X &= \| x \|_\infty \\ \| x \|_\infty &= \sup_{t\in[0,1]} | x(t) |\end{aligned}$$

En vue du (3,3),on définie un opérateur A par :

$$\begin{aligned}A : X &\longrightarrow X \\ x(t) &\longrightarrow Ax(t)\end{aligned}$$

telle que, $\forall t \in [0,1]$,on a :

$$\begin{aligned}
Ax(t) \; &= \int_0^t \frac{(t-qu)^{(\gamma-1)}}{\Gamma_q(\gamma)} \left(\int_0^u \frac{(u-qm)^{(\beta-1)}}{\Gamma_q(\beta)} f(m,x(m))d_qm + \lambda x(u) \right) d_qu \\
&- \frac{[\delta_3 t^\gamma - \delta_4]}{\Delta} \left\{ a \int_0^\eta \frac{(\eta-qs)^{(\alpha-2)}}{\Gamma_q(\alpha-1)} \right) \int_0^s \frac{(s-qu)^{(\gamma-1)}}{\Gamma_q(\gamma)} \\
&\left(\int_0^u \frac{(u-qm)^{(\beta-1)}}{\Gamma_q(\beta)} f(m,x(m))d_qm + \lambda x(u) \right) d_qu\,)d_qs\} + \frac{[\delta_1 t^\gamma - \delta_2]}{\Delta} \left\{ b \int_0^\sigma \frac{(\sigma-qs)^{(\alpha-2)}}{\Gamma_q(\alpha-1)} \right. \\
&\left(\frac{(s-qu)^{(\gamma-1)}}{\Gamma_q(\gamma)} \left(\int_0^u \frac{(u-qm)^{(\beta-1)}}{\Gamma_q(\beta)} f(m,x(m))d_qm + \lambda x(u) \right) d_qu \right) d_qs \Big\} \\
&- \frac{[\delta_1 t^\gamma - \delta_2]}{\Delta} \left\{ \int_0^1 \frac{(1-qu)^{\gamma-1}}{\Gamma_q(\gamma)} \left(\int_0^u \frac{(u-qm)^{(\beta-1)}}{\Gamma_q(\beta)} f(m,x(m))d_qm + \lambda x(u) \right) d_qu \right\}
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Il convient de noter que le problème a des solutions si et seulement si l'opérateur A a des points fixes.

3.2 Existence et unicité

On va donner un première résultat concernent l'unicité de la solution du problème q-fractionnaire (3,2),en utilisant le théorème de contraction de Banach.

Théorème 3.1. *Soit $f : [0,1] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue,on suppose que :*
(H_1) *Il existe une fonction q-intégrable $\tau : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :*

$$\mid f(t,x) - f(t,y) \mid \leq \tau(t) \mid x - y \mid, \quad \forall t \in [0,1], x, y \in \mathbb{R}.$$

(H_2), $\quad \Omega := k_1 + \mid \lambda \mid k_2 < 1$,*où les constantes k_1,k_2 sont définie par :*

$$k_1 := (1+\alpha_2)(I_q^{(\beta+\gamma)}\tau)(1) + \alpha_1 \mid a \mid (I_q^{(\beta+\gamma)}\tau)(\eta) + \alpha_2 \mid b \mid (I_q^{(\beta+\gamma)}\tau)(\sigma)$$

$$k_2 := \frac{1}{\Gamma_q(\gamma+1)}(1+\alpha_2) + \frac{1}{\Gamma_q(\gamma+\alpha)} \left\{ \alpha_1 \mid a \mid \eta^{(\alpha+\gamma-1)} + \alpha_2 \mid b \mid \sigma^{(\alpha+\gamma-1)} \right\}$$

avec $\alpha_1 = \dfrac{\mid \delta_3 - \delta_4 \mid}{\mid \Delta \mid}, \alpha_2 = \dfrac{\mid \delta_1 - \delta_2 \mid}{\mid \Delta \mid}$

Alors,il existe une solution unique pour le problème (3,2).

Démonstration 3.2. *Dans le but d'établir l'existence et l'unicité de la solution du problème (3,2),on a eu recours au principe de contraction de Banach.*

pour $x, y \in \mathbb{R}$ *et* $t \in [0,1]$ *on a :*

$$\mid Ax(t) - Ay(t) \mid \ = \Big| \int_0^t \frac{(t-qu)^{(\gamma-1)}}{\Gamma_q(\gamma)} \left(\int_0^u \frac{(u-qm)^{(\beta-1)}}{\Gamma_q(\beta)} f(m,x(m))d_qm + \lambda x(u) \right) d_qu$$

$$-\frac{[\delta_3 t^\gamma - \delta_4]}{\Delta} \Bigg\{ a \int_0^\eta \frac{(\eta-qs)^{(\alpha-2)}}{\Gamma_q(\alpha-1)} \Bigg(\int_0^s \frac{(s-qu)^{(\gamma-1)}}{\Gamma_q(\gamma)}$$

$$\left(\int_0^u \frac{(u-qm)^{(\beta-1)}}{\Gamma_q(\beta)} f(m,x(m))d_qm + \lambda x(u) \right) d_qu\,)d_qs\}$$

$$+\frac{[\delta_1 t^\gamma - \delta_2]}{\Delta} \Bigg\{ b \int_0^\sigma \frac{(\sigma-qs)^{(\alpha-2)}}{\Gamma_q(\alpha-1)} \Bigg(\frac{(s-qu)^{(\gamma-1)}}{\Gamma_q(\gamma)}$$

$$\left(\int_0^u \frac{(u-qm)^{(\beta-1)}}{\Gamma_q(\beta)} f(m,x(m))d_qm + \lambda x(u) \right) d_qu\,)d_qs\}$$

$$-\frac{[\delta_1 t^\gamma - \delta_2]}{\Delta} \left\{ \int_0^1 \frac{(1-qu)^{\gamma-1}}{\Gamma_q(\gamma)} \left(\int_0^u \frac{(u-qm)^{\beta-1}}{\Gamma_q(\beta)} f(m,x(m))d_qm + \lambda x(u) \right) d_qu \right\}$$

$$-\int_0^t \frac{(t-qu)^{(\gamma-1)}}{\Gamma_q(\gamma)} \left(\int_0^u \frac{(u-qm)^{(\beta-1)}}{\Gamma_q(\beta)} f(m,y(m))d_qm + \lambda y(u) \right) d_qu$$

$$+\frac{[\delta_3 t^\gamma - \delta_4]}{\Delta} \Bigg\{ a \int_0^\eta \frac{(\eta-qs)^{(\alpha-2)}}{\Gamma_q(\alpha-1)} \Bigg) \int_0^s \frac{(s-qu)^{(\gamma-1)}}{\Gamma_q(\gamma)}$$

$$\left(\int_0^u \frac{(u-qm)^{(\beta-1)}}{\Gamma_q(\beta)} f(m,y(m))d_qm + \lambda y(u) \right) d_qu\,)d_qs\}$$

$$-\frac{[\delta_1 t^\gamma - \delta_2]}{\Delta} \Bigg\{ b \int_0^\sigma \frac{(\sigma-qs)^{(\alpha-2)}}{\Gamma_q(\alpha-1)} \Bigg) \frac{(s-qu)^{(\gamma-1)}}{\Gamma_q(\gamma)}$$

$$\left(\int_0^u \frac{(u-qm)^{(\beta-1)}}{\Gamma_q(\beta)} f(m,y(m))d_qm + \lambda y(u) \right) d_qu\,)d_qs\}$$

$$+\frac{[\delta_1 t^\gamma - \delta_2]}{\Delta} \left\{ \int_0^1 \frac{(1-qu)^{\gamma-1}}{\Gamma_q(\gamma)} \left(\int_0^u \frac{(u-qm)^{\beta-1}}{\Gamma_q(\beta)} f(m,y(m))d_qm + \lambda y(u) \right) d_qu \right\} \Big|$$

Ce qui donne :

$$
\begin{aligned}
\mid Ax(t) - Ay(t) \mid \ \leq \ & \sup_{t\in[0,1]} \int_0^t \frac{(t-qu)^{(\gamma-1)}}{\Gamma_q(\gamma)} \Bigg(\int_0^u \frac{(u-qm)^{(\beta-1)}}{\Gamma_q(\beta)} \mid f(m,x(m)) - f(m,y(m)) \mid d_q m \\
& + \mid \lambda \mid\mid x(u) - x(u) \mid) \, d_q u + \alpha_1 \mid a \mid \Bigg\{ \int_0^\eta \frac{(\eta-qs)^{(\alpha-2)}}{\Gamma_q(\alpha-1)} \Bigg) \int_0^s \frac{(s-qu)^{(\gamma-1)}}{\Gamma_q(\gamma)} \\
& \Bigg(\int_0^u \frac{(u-qm)^{(\beta-1)}}{\Gamma_q(\beta)} \mid f(m,x(m)) - f(m,y(m)) \mid d_q m + \mid \lambda \mid \\
& \mid x(u) - y(u) \mid \Bigg) d_q u \Bigg) d_q s \Bigg\} + \alpha_2 \mid b \mid \Bigg\{ \int_0^\sigma \frac{(\sigma-qs)^{(\alpha-2)}}{\Gamma_q(\alpha-1)} \Bigg) \ \frac{(s-qu)^{(\gamma-1)}}{\Gamma_q(\gamma)} \\
& \Bigg(\int_0^u \frac{(u-qm)^{(\beta-1)}}{\Gamma_q(\beta)} \mid f(m,x(m)) - f(m,y(m)) \mid d_q m + \mid \lambda \mid x(u) - y(u) \mid \Bigg) d_q u \,) \\
& d_q s \Bigg\} + \alpha_2 \Bigg\{ \int_0^1 \frac{(1-qu)^{\gamma-1}}{\Gamma_q(\gamma)} \ \Bigg(\int_0^u \frac{(u-qm)^{\beta-1}}{\Gamma_q(\beta)} \mid f(m,x(m)) - f(m,y(m)) \mid d_q m \\
& + \mid \lambda \mid\mid x(u) - y(u) \mid) \, d_q u \}
\end{aligned}
$$

En utilisant l'hypothèse H_1 on obtient :

$$\begin{aligned}
\mid Ax(t)-Ay(t)\mid \quad & \leq \parallel x-y \parallel \sup_{t\in[0,1]} \left\{ \int_0^t \frac{(t-qu)^{(\gamma-1)}}{\Gamma_q(\gamma)} \left(\int_0^u \frac{(u-qm)^{(\beta-1)}}{\Gamma_q(\beta)} \tau(m) d_q m \right) d_q u \right. \\
& +\alpha_1 \mid a \mid \int_0^\eta \frac{(\eta-qs)^{(\alpha-2)}}{\Gamma_q(\alpha-1)} \left(\int_0^s \frac{(s-qu)^{(\gamma-1)}}{\Gamma_q(\gamma)} \right. \\
& \left. \left(\int_0^u \frac{(u-qm)^{(\beta-1)}}{\Gamma_q(\beta)} \tau(m) d_q m \right) d_q u \right) d_q s + \alpha_2 \mid b \mid \int_0^\sigma \frac{(\sigma-qs)^{(\alpha-2)}}{\Gamma_q(\alpha-1)} \\
& \left(\frac{(s-qu)^{(\gamma-1)}}{\Gamma_q(\gamma)} \left(\int_0^u \frac{(u-qm)^{(\beta-1)}}{\Gamma_q(\beta)} \tau(m) d_q m \right) d_q u \right) d_q s \\
& \left. + \alpha_2 \int_0^1 \frac{(1-qu)^{\gamma-1}}{\Gamma_q(\gamma)} \left(\int_0^u \frac{(u-qm)^{\beta-1}}{\Gamma_q(\beta)} \tau(m) d_q m \right) d_q u \right\} \\
& + \parallel x-y \parallel \mid \lambda \mid \sup_{t\in[0,1]} \left\{ \int_0^1 \frac{(1-qu)^{\gamma-1}}{\Gamma_q(\gamma)} d_q u + \alpha_1 \mid a \mid \int_0^\eta \frac{(\eta-qs)^{(\alpha-2)}}{\Gamma_q(\alpha-1)} \right. \\
& \left(\int_0^s \frac{(s-qu)^{(\gamma-1)}}{\Gamma_q(\gamma)} d_q u \right) d_q s + \alpha_2 \mid b \mid \int_0^\sigma \frac{(\sigma-qs)^{(\alpha-2)}}{\Gamma_q(\alpha-1)} \\
& \left. \left(\frac{(s-qu)^{(\gamma-1)}}{\Gamma_q(\gamma)} d_q u \right) d_q s + \alpha_2 \int_0^1 \frac{(1-qu)^{\gamma-1}}{\Gamma_q(\gamma)} \right\}
\end{aligned}$$

Par suit :

$$\begin{aligned}
\mid Ax(t)-Ay(t)\mid \quad & \leq \parallel x-y \parallel \left\{ I_q^{\beta+\alpha}(1+\alpha_2)\tau(1) + \alpha_1 \mid a \mid I_q^{\beta+\alpha+\gamma-1}\tau(\eta) + \alpha_2 \mid b \mid I_q^{\beta+\gamma+\alpha-1}\tau(\sigma) \right\} \\
& + \mid \lambda \mid \parallel x-y \parallel \left\{ \frac{1}{\Gamma_q(\gamma+1)}(1+\alpha_2) + \alpha_1 \mid a \mid \frac{\eta^{\alpha+\gamma-1}}{\Gamma_q(\gamma+\alpha)} + \alpha_2 \mid b \mid \frac{\sigma^{\alpha+\gamma-1}}{\Gamma_q(\gamma+\alpha)} \right\}
\end{aligned}$$

D où :

$$\mid Ax(t)-Ay(t) \mid \leq k_1 + \mid \lambda \mid k_2$$

Où

$$\begin{aligned}
k_1 \quad & := (1+\alpha_2)(I_q^{(\beta+\gamma)}\tau)(1) + \alpha_1 \mid a \mid (I_q^{(\beta+\gamma)}\tau)(\eta) + \alpha_2 \mid b \mid (I_q^{(\beta+\gamma)}(\tau)(\sigma), \\
k_2 \quad & := \frac{1}{\Gamma_q(\gamma+1)}(1+\alpha_2) + \frac{1}{\Gamma_q(\gamma+\alpha)} \left\{ \alpha_1 \mid a \mid \eta^{(\alpha+\gamma-1)} + \alpha_2 \mid b \mid \sigma^{(\alpha+\gamma-1)} \right\}
\end{aligned}$$

Alors :

$$| Ax(t) - Ay(t) | \leq \Omega \parallel x - y \parallel, \textit{avec} \quad \Omega = k_1 + | \lambda | k_2$$

D'après l'hypothèse H_2 l'opérateur A est contractant par conséquent le problème (3,2) admet une solution unique.

Corollaire 3.1. *Comme $\Omega \in (0,1)$ on prend $\tau(t) = L$ donc $\Omega = Lk_3 + | \lambda | k_2 < 1$.*
Supposons que $f : [0,1] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue et qu'il existe une constante $L \in (0, \dfrac{1- | \lambda | k_2}{k_3}$ avec $| f(t,x) - f(t,y) | \leq L | x - y |, t \in [0,1], x, y \in \mathbb{R}$
Où

$$k_3 \quad := \frac{1+\alpha_2}{\Gamma_q(\gamma+\beta+1)} + \frac{1}{\Gamma_q(\gamma+\beta+\alpha)} \left(\alpha_1 | a | \eta^{\beta+\alpha+\gamma-1)} + \alpha_2 | b | \sigma^{(\alpha+\beta+\gamma-1)} \right),$$

Donc le problème (3,2) admet une solution unique.

Exemple 5. *Soit le problème suivant :*

$$\begin{cases} {}^cD_q^{\frac{1}{4}}({}^cD_q^{\frac{1}{4}} + \dfrac{1}{8})x(t) = \dfrac{t}{5}\tan^{-1} x(t), t \in [0,1], \\ \\ x(0) = \dfrac{1}{3} I_q^2 x(\dfrac{1}{3}) \\ \\ x(1) = \dfrac{1}{4} I_q^2 x(\dfrac{2}{3}) \end{cases} \tag{3.9}$$

Où $\gamma = \beta = \dfrac{1}{4}$,$a = 1$,$b = \dfrac{1}{2}$,$\alpha = 3$,$\sigma = \dfrac{2}{3}$,$\eta = \dfrac{1}{3}$,$q = \dfrac{1}{2}$ avec $f(t, x(t)) = \dfrac{t}{5}\tan^{-1} x(t)$.

Soient $x, y \in \mathbb{R}, t \in [0,1]$. Alors :

$$\begin{aligned} | f(t,x(t)) - f(t,y(t)) | &= \left| \frac{t}{5}\tan^{-1} x(t) - \frac{t}{5}\tan^{-1} y(t) \right| \\ &\leq | x(t) - y(t) | \end{aligned}$$

Donc (H_1) est satisfait avec $L = \frac{1}{5}$
aussi on a :

$\delta_1 = -0.925926, \delta_2 = 0.0461128, \delta_3 = -0.851852, \delta_4 = -0.890325, \Delta = -0.863656,$
$\alpha_1 = 0.0445466, \alpha_2 = 1.12549, k_3 = 2.41376, k_2 = 2.41227$

Alors $\Omega = 0.726099 < 1$
ainsi toutes les hypothèses du théorème (3,1) soit satisfaites,par conséquent le problème (3,9)possède une unique solution.

3.3 Existence

3.3.1 Résultat de l'existence via le théorème du point fixe de Schaefer

Théorème 3.2. *Soit* $f : [0,1] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *est une fonction continue,on suppose que* H_1 *et les hypothèses suivant sont satisfaites :*
(H_3) *Il existe une fonction* $\mu \in C([0,1], \mathbb{R}^+)$ *et une fonction non décroissant* $\varphi \in C([0,1], \mathbb{R}^+)$ *telle que :*

$$| f(t,x) | \leq \mu(t)\varphi(| x |) \quad , (t,x) \in [0,1] \times \mathbb{R}$$

(H_4) *Il existe une constant* r *telle que :*

$$r \geq \varphi(r) \parallel \mu \parallel k_4$$

avec $k_4 = \dfrac{k_3}{1- | \lambda | k_2}$,

$$k_3 \;\; := \frac{1+\alpha_2}{\Gamma_q(\gamma+\beta+1)} + \frac{1}{\Gamma_q(\gamma+\beta+\alpha)} \left(\alpha_1 \mid a \mid \eta^{\beta+\alpha+\gamma-1)} + \alpha_2 \mid b \mid \sigma^{(\alpha+\beta+\gamma-1)} \right),$$

$1- | \lambda | k_2 > 0$ *et* $\parallel \mu \parallel = \sup\limits_{t\in[0,1]} | \mu(t) |$.
Si

$$\begin{aligned} &\alpha_1 \mid a \mid (I_q^{\beta+\gamma+\alpha-1}\tau)(\eta) + \alpha_2 \mid b \mid (I_q^{\beta+\gamma+\alpha-1}\tau)(\sigma) + \alpha_2(I_q^{(\beta+\gamma)}\tau(1) \\ &+ \mid \lambda \mid \left[\frac{1}{\Gamma_q(\gamma+\alpha)} \left(\alpha_1 \mid a \mid \eta^{(\gamma+\alpha-1)} + \alpha_2 \mid b \mid \sigma^{(\alpha+\gamma-1)} \right) + \frac{\alpha_2}{\Gamma_q(\gamma+1)} \right] < 1 \end{aligned}$$

Alors,le problème aux valeur aux limites (3,2)admet au moins une solution.

Démonstration 3.3. *Pour montrer l'existence de la solution du (3,2),il suffit de vérifier les conditions du théorème du point fixe de Schaefer.*

Et pour cela on passera par 4 étapes.

Étape 1

On montre que A *est continue .*

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suit converge vers* x *dans* X *.Alors pour tout* $t \in [0,1]$*,on a :*

$$
\begin{aligned}
| Ax_n(t) - Ax(t) | \quad &= \Big| \int_0^t \frac{(t-qu)^{(\gamma-1)}}{\Gamma_q(\gamma)} \left(\int_0^u \frac{(u-qm)^{(\beta-1)}}{\Gamma_q(\beta)} f(m, x_n(m)) d_q m + \lambda x_n(u) \right) d_q u \\
&- \frac{[\delta_3 t^\gamma - \delta_4]}{\Delta} \left\{ a \int_0^\eta \frac{(\eta - qs)^{(\alpha-2)}}{\Gamma_q(\alpha-1)} \left(\int_0^s \frac{(s-qu)^{(\gamma-1)}}{\Gamma_q(\gamma)} \right.\right. \\
&\left.\left. \left(\int_0^u \frac{(u-qm)^{(\beta-1)}}{\Gamma_q(\beta)} f(m, x_n(m)) d_q m + \lambda x_n(u) \right) d_q u \right) d_q s \right\} \\
&+ \frac{[\delta_1 t^\gamma - \delta_2]}{\Delta} \left\{ b \int_0^\sigma \frac{(\sigma - qs)^{(\alpha-2)}}{\Gamma_q(\alpha-1)} \left(\frac{(s-qu)^{(\gamma-1)}}{\Gamma_q(\gamma)} \right.\right. \\
&\left.\left. \left(\int_0^u \frac{(u-qm)^{(\beta-1)}}{\Gamma_q(\beta)} f(m, x_n(m)) d_q m + \lambda x_n(u) \right) d_q u \right) d_q s \right\} \\
&- \frac{[\delta_1 t^\gamma - \delta_2]}{\Delta} \left\{ \int_0^1 \frac{(1-qu)^{\gamma-1}}{\Gamma_q(\gamma)} \right. \\
&\left. \left(\int_0^u \frac{(u-qm)^{\beta-1}}{\Gamma_q(\beta)} f(m, x_n(m)) d_q m + \lambda x_n(u) \right) d_q u \right\} \\
&- \int_0^t \frac{(t-qu)^{(\gamma-1)}}{\Gamma_q(\gamma)} \left(\int_0^u \frac{(u-qm)^{(\beta-1)}}{\Gamma_q(\beta)} f(m, x(m)) d_q m + \lambda x(u) \right) d_q u \\
&+ \frac{[\delta_3 t^\gamma - \delta_4]}{\Delta} \left\{ a \int_0^\eta \frac{(\eta - qs)^{(\alpha-2)}}{\Gamma_q(\alpha-1)} \left(\int_0^s \frac{(s-qu)^{(\gamma-1)}}{\Gamma_q(\gamma)} \right.\right. \\
&\left.\left. \left(\int_0^u \frac{(u-qm)^{(\beta-1)}}{\Gamma_q(\beta)} f(m, x(m)) d_q m + \lambda x(u) \right) d_q u \right) d_q s \right\} \\
&- \frac{[\delta_1 t^\gamma - \delta_2]}{\Delta} \left\{ b \int_0^\sigma \frac{(\sigma - qs)^{(\alpha-2)}}{\Gamma_q(\alpha-1)} \left(\frac{(s-qu)^{(\gamma-1)}}{\Gamma_q(\gamma)} \right.\right. \\
&\left.\left. \left(\int_0^u \frac{(u-qm)^{(\beta-1)}}{\Gamma_q(\beta)} f(m, x(m)) d_q m + \lambda x(u) \right) d_q u \right) d_q s \right\} \\
&+ \frac{[\delta_1 t^\gamma - \delta_2]}{\Delta} \left\{ \int_0^1 \frac{(1-qu)^{\gamma-1}}{\Gamma_q(\gamma)} \left(\int_0^u \frac{(u-qm)^{\beta-1}}{\Gamma_q(\beta)} f(m, x(m)) d_q m + \lambda x(u) \right) d_q u \right\} \Big|
\end{aligned}
$$

Par suit :

$$\begin{aligned}
Ax_n(t) - Ax(t) \mid \quad & \leq \sup_{t\in[0,1]} \int_0^t \frac{(t-qu)^{(\gamma-1)}}{\Gamma_q(\gamma)} \left(\int_0^u \frac{(u-qm)^{(\beta-1)}}{\Gamma_q(\beta)} \mid f(m,x_n(m)) - f(m,x(m)) \mid d_q m \right. \\
& + \mid \lambda \mid\mid x_n(u) - x(u) \mid) \, d_q u + \alpha_1 \mid a \mid \left\{ \int_0^\eta \frac{(\eta-qs)^{(\alpha-2)}}{\Gamma_q(\alpha-1)} \left(\int_0^s \frac{(s-qu)^{(\gamma-1)}}{\Gamma_q(\gamma)} \right. \right. \\
& \left(\int_0^u \frac{(u-qm)^{(\beta-1)}}{\Gamma_q(\beta)} \mid f(m,x_n(m)) - f(m,x(m)) \mid d_q m + \mid \lambda \mid\mid x_n(u) - x(u) \mid \right) \\
& d_q u) \, d_q s\} + \alpha_2 \mid b \mid \left\{ \int_0^\sigma \frac{(\sigma-qs)^{(\alpha-2)}}{\Gamma_q(\alpha-1)} \left(\frac{(s-qu)^{(\gamma-1)}}{\Gamma_q(\gamma)} \right. \right. \\
& \left(\int_0^u \frac{(u-qm)^{(\beta-1)}}{\Gamma_q(\beta)} \mid f(m,x_n(m)) - f(m,x(m)) \mid d_q m + \mid \lambda \mid x_n(u) - x(u) \mid \right) \\
& d_q u) \, d_q s\} + \alpha_2 \left\{ \int_0^1 \frac{(1-qu)^{\gamma-1}}{\Gamma_q(\gamma)} \left(\int_0^u \frac{(u-qm)^{\beta-1}}{\Gamma_q(\beta)} \mid f(m,x_n(m)) - f(m,x(m)) \mid \right. \right. \\
& d_q m + \mid \lambda \mid\mid x_n(u) - x(u) \mid) \, d_q u\}
\end{aligned}$$

comme f est une fonction continue,alors :

$$\| Ax_n(t) - Ax(t) \|_\infty \longrightarrow 0 \quad quand \quad n \longrightarrow \infty$$

D où A est continue.

Étape 2

On montre que A transforme un ensemble bornée en un ensemble bornée dans X.
Soit l'ensemble :

$$B_r = \{x \in X, \| x \| \leq r\}.$$

Pour tout $x \in X, t \in [0,1]$, on a :

$$
\begin{aligned}
Ax(t) \mid \ &= \Big| \int_0^t \frac{(t-qu)^{(\gamma-1)}}{\Gamma_q(\gamma)} \left(\int_0^u \frac{(u-qm)^{(\beta-1)}}{\Gamma_q(\beta)} f(m,x(m)) d_q m + \lambda x(u) \right) d_q u \\
&- \frac{[\delta_3 t^\gamma - \delta_4]}{\Delta} \left\{ a \int_0^\eta \frac{(\eta-qs)^{(\alpha-2)}}{\Gamma_q(\alpha-1)} \left(\int_0^s \frac{(s-qu)^{(\gamma-1)}}{\Gamma_q(\gamma)} \right.\right. \\
&\left.\left. \left(\int_0^u \frac{(u-qm)^{(\beta-1)}}{\Gamma_q(\beta)} f(m,x(m)) d_q m + \lambda x(u) \right) d_q u \right) d_q s \right\} \\
&+ \frac{[\delta_1 t^\gamma - \delta_2]}{\Delta} \left\{ b \int_0^\sigma \frac{(\sigma-qs)^{(\alpha-2)}}{\Gamma_q(\alpha-1)} \left(\frac{(s-qu)^{(\gamma-1)}}{\Gamma_q(\gamma)} \right.\right. \\
&\left.\left. \left(\int_0^u \frac{(u-qm)^{(\beta-1)}}{\Gamma_q(\beta)} f(m,x(m)) d_q m + \lambda x(u) \right) d_q u \right) d_q s \right\} \\
&- \frac{[\delta_1 t^\gamma - \delta_2]}{\Delta} \left\{ \int_0^1 \frac{(1-qu)^{\gamma-1}}{\Gamma_q(\gamma)} \left(\int_0^u \frac{(u-qm)^{\beta-1}}{\Gamma_q(\beta)} f(m,x(m)) d_q m + \lambda x(u) \right) d_q u \right\} \Big|
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mid Ax(t) \mid \ &\leq \int_0^t \frac{(t-qu)^{(\gamma-1)}}{\Gamma_q(\gamma)} \left(\int_0^u \frac{(u-qm)^{(\beta-1)}}{\Gamma_q(\beta)} \mid f(m,x(m)) \mid d_q m + \mid \lambda \mid\mid x(u) \mid \right) d_q u \\
&+ \alpha_1 \mid a \mid \left\{ \int_0^\eta \frac{(\eta-qs)^{(\alpha-2)}}{\Gamma_q(\alpha-1)} \left(\int_0^s \frac{(s-qu)^{(\gamma-1)}}{\Gamma_q(\gamma)} \right.\right. \\
&\left.\left. \left(\int_0^u \frac{(u-qm)^{(\beta-1)}}{\Gamma_q(\beta)} \mid f(m,x(m)) \mid d_q m + \mid \lambda \mid x(u) \mid \right) d_q u \right) d_q s \right\} \\
&+ \alpha_2 \mid b \mid \left\{ \int_0^\sigma \frac{(\sigma-qs)^{(\alpha-2)}}{\Gamma_q(\alpha-1)} \left(\frac{(s-qu)^{(\gamma-1)}}{\Gamma_q(\gamma)} \right.\right. \\
&\left.\left. \left(\int_0^u \frac{(u-qm)^{(\beta-1)}}{\Gamma_q(\beta)} \mid f(m,x(m)) \mid d_q m + \mid \lambda \mid\mid x(u) \mid \right) d_q u \right) d_q s \right\} \\
&+ \alpha_2 \left\{ \int_0^1 \frac{(1-qu)^{\gamma-1}}{\Gamma_q(\gamma)} \left(\int_0^u \frac{(u-qm)^{\beta-1}}{\Gamma_q(\beta)} \mid f(m,x(m)) \mid d_q m + \mid \lambda \mid\mid x(u) \mid \right) d_q u \right\}
\end{aligned}
$$

En utilisant l'hypothèse H_3 on obtient :

$$
\begin{aligned}
\mid Ax(t)\mid \ &\leq \int_0^t \frac{(t-qu)^{(\gamma-1)}}{\Gamma_q(\gamma)}\left(\int_0^u \frac{(u-qm)^{(\beta-1)}}{\Gamma_q(\beta)}\mu(m)\varphi(\mid x(m)\mid)d_qm+\mid\lambda\mid\mid x(u)\mid\right)d_qu\\
&+\alpha_1\mid a\mid\left\{\int_0^\eta \frac{(\eta-qs)^{(\alpha-2)}}{\Gamma_q(\alpha-1)}\left(\int_0^s \frac{(s-qu)^{(\gamma-1)}}{\Gamma_q(\gamma)}\right.\right.\\
&\left.\left.\left(\int_0^u \frac{(u-qm)^{(\beta-1)}}{\Gamma_q(\beta)}\mu(m)\varphi(\mid x(m)\mid)d_qm+\mid\lambda\mid x(u)\mid\right)d_qu\right)d_qs\right\}\\
&+\alpha_2\mid b\mid\left\{\int_0^\sigma \frac{(\sigma-qs)^{(\alpha-2)}}{\Gamma_q(\alpha-1)}\left(\frac{(s-qu)^{(\gamma-1)}}{\Gamma_q(\gamma)}\right.\right.\\
&\left.\left.\left(\int_0^u \frac{(u-qm)^{(\beta-1)}}{\Gamma_q(\beta)}\mu(m)\varphi(\mid x(m)\mid)d_qm+\mid\lambda\mid\mid x(u)\mid\right)d_qu\right)d_qs\right\}\\
&+\alpha_2\left\{\int_0^1 \frac{(1-qu)^{\gamma-1}}{\Gamma_q(\gamma)}\left(\int_0^u \frac{(u-qm)^{\beta-1}}{\Gamma_q(\beta)}\mu(m)\varphi(\mid x(m)\mid)d_qm+\mid\lambda\mid\mid x(u)\mid\right)d_qu\right\}
\end{aligned}
$$

Par suit :

$$
\begin{aligned}
\mid Ax(t)\mid \ &\leq \parallel\mu\parallel\varphi(r)\left[\frac{1+\alpha_2}{\Gamma_q(\gamma+\beta+1)}+\frac{1}{\Gamma_q(\gamma+\beta+\alpha)}\left(\alpha_1\mid a\mid\eta^{\beta+\alpha+\gamma-1)}+\alpha_2\mid b\mid\sigma^{(\alpha+\beta+\gamma-1)}\right)\right]\\
&+r\mid\lambda\mid\left[\frac{(1+\alpha_2)}{\Gamma_q(\gamma+1)}+\frac{1}{\Gamma_q(\gamma+\alpha)}\left(\alpha_1\mid a\mid\eta^{(\gamma+\alpha-1)}+\alpha_2\mid b\mid\sigma^{(\alpha+\gamma-1)}\right)\right]
\end{aligned}
$$

Ce qui donne :

$$\mid Ax(t)\mid\leq\parallel\mu\parallel\varphi(r)k_3+r\mid\lambda\mid k_2$$

avec

$$k_3 \ := \frac{1+\alpha_2}{\Gamma_q(\gamma+\beta+1)}+\frac{1}{\Gamma_q(\gamma+\beta+\alpha)}\left(\alpha_1\mid a\mid\eta^{\beta+\alpha+\gamma-1)}+\alpha_2\mid b\mid\sigma^{(\alpha+\beta+\gamma-1)}\right)$$

$$k_2 := \tfrac{1}{\Gamma_q(\gamma+1)}(1+\alpha_2)+\frac{1}{\Gamma_q(\gamma+\alpha)}\left\{\alpha_1\mid a\mid\eta^{(\alpha+\gamma-1)}+\alpha_2\mid b\mid\sigma^{(\alpha+\gamma-1)}\right\}$$

Par l'hypothèse H_4 on obtient :

$$\mid Ax(t)\mid\leq r$$

Alors A est bornée.

Étape 3

On montre que A est equicntinue :

Soit $x \in \mathbb{R}$,$t_1, t_2 \in [0,1]$, $t_1 < t_2$,*on a :*

$$
\begin{aligned}
\mid Ax(t_2) - Ax(t_1) \mid \; = & \Big| \int_0^{t_2} \frac{(t_2 - qu)^{(\gamma-1)}}{\Gamma_q(\gamma)} \left(\int_0^u \frac{(u-qm)^{(\beta-1)}}{\Gamma_q(\beta)} f(m, x(m)) d_q m + \lambda x(u) \right) d_q u \\
& - \frac{[\delta_3 t_2^{\gamma} - \delta_4]}{\Delta} \left\{ a \int_0^{\eta} \frac{(\eta - qs)^{(\alpha-2)}}{\Gamma_q(\alpha-1)} \left(\int_0^s \frac{(s-qu)^{(\gamma-1)}}{\Gamma_q(\gamma)} \right.\right. \\
& \left.\left. \left(\int_0^u \frac{(u-qm)^{(\beta-1)}}{\Gamma_q(\beta)} f(m, x(m)) d_q m + \lambda x(u) \right) d_q u \right) d_q s \right\} \\
& + \frac{[\delta_1 t_2^{\gamma} - \delta_2]}{\Delta} \left\{ b \int_0^{\sigma} \frac{(\sigma - qs)^{(\alpha-2)}}{\Gamma_q(\alpha-1)} \left(\frac{(s-qu)^{(\gamma-1)}}{\Gamma_q(\gamma)} \right.\right. \\
& \left.\left. \left(\int_0^u \frac{(u-qm)^{(\beta-1)}}{\Gamma_q(\beta)} f(m, x(m)) d_q m + \lambda x(u) \right) d_q u \right) d_q s \right\} \\
& - \frac{[\delta_1 t_2^{\gamma} - \delta_2]}{\Delta} \left\{ \int_0^1 \frac{(1-qu)^{\gamma-1}}{\Gamma_q(\gamma)} \left(\int_0^u \frac{(u-qm)^{\beta-1}}{\Gamma_q(\beta)} f(m, x(m)) d_q m + \lambda x(u) \right) d_q u \right\} \\
& - \int_0^{t_1} \frac{(t_1 - qu)^{(\gamma-1)}}{\Gamma_q(\gamma)} \left(\int_0^u \frac{(u-qm)^{(\beta-1)}}{\Gamma_q(\beta)} f(m, x(m)) d_q m + \lambda x(u) \right) d_q u \\
& + \frac{[\delta_3 t_1^{\gamma} - \delta_4]}{\Delta} \left\{ a \int_0^{\eta} \frac{(\eta - qs)^{(\alpha-2)}}{\Gamma_q(\alpha-1)} \left(\int_0^s \frac{(s-qu)^{(\gamma-1)}}{\Gamma_q(\gamma)} \right.\right. \\
& \left.\left. \left(\int_0^u \frac{(u-qm)^{(\beta-1)}}{\Gamma_q(\beta)} f(m, x(m)) d_q m + \lambda x(u) \right) d_q u \right) d_q s \right\} \\
& - \frac{[\delta_1 t_1^{\gamma} - \delta_2]}{\Delta} \left\{ b \int_0^{\sigma} \frac{(\sigma - qs)^{(\alpha-2)}}{\Gamma_q(\alpha-1)} \left(\frac{(s-qu)^{(\gamma-1)}}{\Gamma_q(\gamma)} \right.\right. \\
& \left.\left. \left(\int_0^u \frac{(u-qm)^{(\beta-1)}}{\Gamma_q(\beta)} f(m, x(m)) d_q m + \lambda x(u) \right) d_q u \right) d_q s \right\} \\
& + \frac{[\delta_1 t_1^{\gamma} - \delta_2]}{\Delta} \left\{ \int_0^1 \frac{(1-qu)^{\gamma-1}}{\Gamma_q(\gamma)} \left(\int_0^u \frac{(u-qm)^{\beta-1}}{\Gamma_q(\beta)} f(m, x(m)) d_q m + \lambda x(u) \right) d_q u \right\} \Big|
\end{aligned}
$$

Par suit :

$$
\begin{aligned}
\mid A(x(t_2) - A(x(t_1) \mid \quad &= \mid \int_0^{t_1} \frac{(t_2-qu)^{(\gamma-1)}}{\Gamma_q(\gamma)} (\int_0^u \frac{(u-qm)^{\beta-1}}{\Gamma_q(\beta)} f(m,x(m)) d_q m + \lambda x(u)) d_q u \\
& - \int_0^{t_1} \frac{(t_1-qu)^{\gamma-1}}{\Gamma_q(\gamma)} (\int_0^u \frac{(u-qm)^{\beta-1}}{\Gamma_q(\gamma)} f(m,x(m)) d_q m + \lambda x(u)) d_q u \\
& + \int_{t_1}^{t_2} \frac{(t_2-qu)^{\gamma-1}}{\Gamma_q(\gamma)} (\int_0^u \frac{(u-qm)^{(\beta-1)}}{\Gamma_q(\beta)} f(m,x(m)) + \lambda x(u)) d_q u \\
& + \left[\frac{[\delta_3 t_1^\gamma - \delta_4]}{\Delta} - \frac{[\delta_3 t_2^\gamma - \delta_4]}{\Delta} \right] \left\{ a \int_0^\eta \frac{(\eta - qs)^{(\alpha-2)}}{\Gamma_q(\alpha-1)} \left(\int_0^s \frac{(s-qu)^{(\gamma-1)}}{\Gamma_q(\gamma)} \right.\right. \\
& \left.\left. \left(\int_0^u \frac{(u-qm)^{(\beta-1)}}{\Gamma_q(\beta)} f(m,x(m)) d_q m + \lambda x(u) \right) d_q u \right) d_q s \right\} \\
& + \left[\frac{[\delta_1 t_2^\gamma - \delta_2]}{\Delta} - \frac{[\delta_1 t_1^\gamma - \delta_2]}{\Delta} \right] \left\{ b \int_0^\sigma \frac{(\sigma - qs)^{(\alpha-2)}}{\Gamma_q(\alpha-1)} \left(\frac{(s-qu)^{(\gamma-1)}}{\Gamma_q(\gamma)} \right.\right. \\
& \left.\left. \left(\int_0^u \frac{(u-qm)^{(\beta-1)}}{\Gamma_q(\beta)} f(m,x(m)) d_q m + \lambda x(u) \right) d_q u \right) d_q s \right\} \\
& + \left[\frac{[\delta_1 t_1^\gamma - \delta_2]}{\Delta} - \frac{[\delta_1 t_2^\gamma - \delta_2]}{\Delta} \right] \left\{ \int_0^1 \frac{(1-qu)^{\gamma-1}}{\Gamma_q(\gamma)} \right. \\
& \left. \left(\int_0^u \frac{(u-qm)^{\beta-1}}{\Gamma_q(\beta)} f(m,x(m)) d_q m + \lambda x(u) \right) d_q u \right\} \mid
\end{aligned}
$$

Ce qui donne :

$$
\begin{aligned}
Ax(t_2)-Ax(t_1)\mid \quad &= \Big| \frac{1}{\Gamma_q(\gamma)} \int_0^{t_1} \left[(t_2-qu)^{(\gamma-1)} - (t_1-qu)^{(\gamma-1)} \right] (\int_0^u \frac{(u-qm)^{(\beta-1)}}{\Gamma_q(\beta)} f(m,x(m)) d_q m \\
&+ \lambda x(u)) d_q u + \int_{t_1}^{t_2} \frac{(t_2-qu)^{(\gamma-1)}}{\Gamma_q(\gamma)} (\int_0^u \frac{(u-qm)^{(\beta-1)}}{\Gamma_q(\beta)} f(m,x(m)) d_q m + \lambda x(u)) d_q u \\
&+ \frac{\delta_3(t_1^\gamma - t_2^\gamma)}{\Delta} \left\{ a \int_0^\eta \frac{(\eta-qs)^{(\alpha-2)}}{\Gamma_q(\alpha-1)} \left(\int_0^s \frac{(s-qu)^{(\gamma-1)}}{\Gamma_q(\gamma)} \right.\right. \\
&\left(\int_0^u \frac{(u-qm)^{(\beta-1)}}{\Gamma_q(\beta)} f(m,x(m)) d_q m + \lambda x(u) \right) \\
& d_q u)\, d_q s\} + \frac{\delta_1(t_2^\gamma - t_1^\gamma)}{\Delta} \left\{ b \int_0^\sigma \frac{(\sigma-qs)^{(\alpha-2)}}{\Gamma_q(\alpha-1)} \left(\frac{(s-qu)^{(\gamma-1)}}{\Gamma_q(\gamma)} \right.\right. \\
&\left.\left. \left(\int_0^u \frac{(u-qm)^{(\beta-1)}}{\Gamma_q(\beta)} f(m,x(m)) d_q m + \lambda x(u) \right) d_q u \right) d_q s \right\} \\
&+ \frac{\delta_1(t_1^\gamma - t_2^\gamma)}{\Delta} \left\{ \int_0^1 \frac{(1-qu)^{\gamma-1}}{\Gamma_q(\gamma)} \left(\int_0^u \frac{(u-qm)^{\beta-1}}{\Gamma_q(\beta)} f(m,x(m)) d_q m + \lambda x(u) \right) d_q u \right\} \Big|
\end{aligned}
$$

Ce qui implique :

$$
\begin{aligned}
Ax(t_2)-Ax(t_1)\mid \quad & \leq \frac{1}{\Gamma_q(\gamma)}\int_0^{t_1}\left[(t_2-qu)^{(\gamma-1)}-(t_1-qu)^{(\gamma-1)}\right]\left(\int_0^u \frac{(u-qm)^{(\beta-1)}}{\Gamma_q(\beta)}\right.\\
& \left.\mid f(m,x(m))\mid d_qm+\mid\lambda\mid\mid x(u)\mid\right)d_qu+\int_{t_1}^{t_2}\frac{(t_2-qu)^{(\gamma-1)}}{\Gamma_q(\gamma)}\\
& \left(\int_0^u \frac{(u-qm)^{(\beta-1)}}{\Gamma_q(\beta)}\mid f(m,x(m))\mid d_qm+\mid\lambda\mid\mid x(u)\mid\right)d_qu\\
& +\frac{\mid\delta_3\mid\mid t_1^\gamma-t_2^\gamma\mid}{\mid\Delta\mid}\left\{a\int_0^\eta \frac{(\eta-qs)^{(\alpha-2)}}{\Gamma_q(\alpha-1)}\left(\int_0^s \frac{(s-qu)^{(\gamma-1)}}{\Gamma_q(\gamma)}\right.\right.\\
& \left.\left.\left(\int_0^u \frac{(u-qm)^{(\beta-1)}}{\Gamma_q(\beta)}\mid f(m,x(m))\mid d_qm+\mid\lambda\mid\mid x(u)\mid\right)d_qu\right)d_qs\right\}\\
& +\frac{\mid\delta_1\mid\mid t_2^\gamma-t_1^\gamma\mid}{\mid\Delta\mid}\left\{b\int_0^\sigma \frac{(\sigma-qs)^{(\alpha-2)}}{\Gamma_q(\alpha-1)}\left(\frac{(s-qu)^{(\gamma-1)}}{\Gamma_q(\gamma)}\right.\right.\\
& \left.\left.\left(\int_0^u \frac{(u-qm)^{(\beta-1)}}{\Gamma_q(\beta)}\mid f(m,x(m))\mid d_qm+\mid\lambda\mid\mid x(u)\mid\right)d_qu\right)d_qs\right\}\\
& +\frac{\mid\delta_1\mid\mid t_1^\gamma-t_2^\gamma\mid}{\mid\Delta\mid}\left\{\int_0^1 \frac{(1-qu)^{\gamma-1}}{\Gamma_q(\gamma)}\left(\int_0^u \frac{(u-qm)^{\beta-1}}{\Gamma_q(\beta)}\mid f(m,x(m))\mid d_qm\right.\right.\\
& \left.\left.+\mid\lambda\mid\mid x(u)\mid\right)d_qu\right\}
\end{aligned}
$$

En utilisant l'hypothèse H_3 on obtient :

$$
\begin{aligned}
\mid Ax(t_2)-Ax(t_1)\mid \ &\leq \frac{1}{\Gamma_q(\gamma)} \parallel \mu \parallel \varphi(r) \int_0^{t_1} \left[(t_2-qu)^{(\gamma-1)}-(t_1-qu)^{(\gamma-1)}\right] \\
&\left(\int_0^u \frac{(u-qm)^{(\beta-1)}}{\Gamma_q(\beta)}+\mid \lambda \mid r\right)d_qu \\
&+\frac{1}{\Gamma_q(\gamma)} \parallel \mu \parallel \varphi(r) \int_{t_1}^{t_2} \frac{(t_2-qu)^{(\gamma-1)}}{\Gamma_q(\gamma)} \left(\int_0^u \frac{(u-qm)^{(\beta-1)}}{\Gamma_q(\beta)}+\mid \lambda \mid r\right) d_qu \\
&+\frac{\mid \delta_3 \mid\mid t_1^{\gamma}-t_2^{\gamma}\mid}{\mid \Delta \mid} \left\{ a \int_0^{\eta} \frac{(\eta-qs)^{(\alpha-2)}}{\Gamma_q(\alpha-1)} \left(\int_0^s \frac{(s-qu)^{(\gamma-1)}}{\Gamma_q(\gamma)}\right.\right. \\
&\left.\left.\left(\int_0^u \frac{(u-qm)^{(\beta-1)}}{\Gamma_q(\beta)}+\mid \lambda \mid r\right) d_qu\right) d_qs\right\} \\
&+\frac{\mid \delta_1 \mid\mid t_2^{\gamma}-t_1^{\gamma}\mid}{\mid \Delta \mid} \left\{ b \int_0^{\sigma} \frac{(\sigma-qs)^{(\alpha-2)}}{\Gamma_q(\alpha-1)} \left(\frac{(s-qu)^{(\gamma-1)}}{\Gamma_q(\gamma)}\right.\right. \\
&\left.\left.\left(\int_0^u \frac{(u-qm)^{(\beta-1)}}{\Gamma_q(\beta)}+\mid \lambda \mid r\right) d_qu\right) d_qs\right\} + \frac{\mid \delta_1 \mid\mid t_1^{\gamma}-t_2^{\gamma}\mid}{\mid \Delta \mid} \\
&\left\{\int_0^1 \frac{(1-qu)^{\gamma-1}}{\Gamma_q(\gamma)} \left(\int_0^u \frac{(u-qm)^{\beta-1}}{\Gamma_q(\beta)}+\mid \lambda \mid r\right) d_qu\right\}
\end{aligned}
$$

Donc :

$$
\begin{aligned}
\mid Ax(t_2)-Ax(t_1)\mid \ &\leq \frac{\varphi(r)\parallel \mu \parallel}{\Gamma_q(\beta+\gamma+1)} \mid t_2^{\beta+\gamma}-t_1^{\gamma+\beta}\mid \\
&+\frac{\mid \lambda \mid r}{\Gamma_q(\gamma)} \mid t_2^{\gamma}-t_1^{\gamma}\mid + \frac{\mid \delta_3 \mid \varphi(r) \parallel \mu \parallel}{\mid \Delta \mid} \frac{\mid a \mid \eta^{\gamma+\alpha+\beta-1}}{\Gamma_q(\gamma+\beta+\alpha)} \mid t_1^{\gamma}-t_2 \mid \\
&+\frac{\mid \delta_3 \mid\mid \lambda \mid\mid a \mid \eta^{\gamma+\alpha-1}}{\Gamma_q(\alpha+\gamma)\mid \Delta \mid} \mid t_1^{\gamma}-t_2^{\gamma}\mid + \frac{\mid \delta_1 \mid\parallel \mu \parallel \varphi(r) \mid b \mid \sigma^{\alpha+\gamma+\beta-1}}{\Gamma_q(\gamma+\beta+\alpha)\mid \Delta \mid} \mid t_2^{\gamma}-t_1^{\gamma}\mid \\
&+\frac{\mid \lambda \mid r \mid \delta_1 \mid\mid b \mid \sigma^{\gamma+\alpha-1}}{\Gamma_q(\gamma+\alpha)\mid \Delta \mid} + \frac{\mid \delta_1 \mid \varphi(r) \parallel \mu \parallel}{\Gamma_q(\gamma+\alpha)\mid \Delta \mid} \mid t_1^{\gamma}-t_2^{\gamma}\mid \frac{\mid \delta_1 \mid\mid \lambda \mid r}{\Gamma_q(\gamma+1)\mid \Delta \mid} \mid t_1^{\gamma}-t_2^{\gamma}\mid
\end{aligned}
$$

Donc si $t_1 \longrightarrow t_2$ *on trouve :*

$$\parallel Ax(t_2)-Ax(t_1) \parallel_X \longrightarrow 0$$

Alors $A(B_r)$ est équicontinue.

Étape 4

On montre que l'ensemble Ω définie par :

$$\Omega = \{x \in X, x = \theta A x, 0 < \theta < 1\}$$

est bornée.

$$\begin{aligned}
\mid \theta x(t) \mid \ &= \Big| \theta \int_0^t \frac{(t-qu)^{(\gamma-1)}}{\Gamma_q(\gamma)} \left(\int_0^u \frac{(u-qm)^{(\beta-1)}}{\Gamma_q(\beta)} f(m,x(m)) d_q m + \lambda x(u) \right) d_q u \\
&- \frac{\theta \left[\delta_3 t^\gamma - \delta_1\right]}{\Delta} \left\{ a \int_0^\eta \frac{(\eta-qs)^{(\alpha-2)}}{\Gamma_q(\alpha-1)} \left(\int_0^s \frac{(s-qu)^{(\gamma-1)}}{\Gamma_q(\gamma)} \right.\right. \\
&\left.\left. \left(\int_0^u \frac{(u-qm)^{(\beta-1)}}{\Gamma_q(\beta)} f(m,x(m)) d_q m + \lambda x(u) \right) d_q u \right) d_q s \right\} \\
&+ \frac{\theta \left[\delta_1 t^\gamma - \delta_1\right]}{\Delta} \left\{ b \int_0^\sigma \frac{(\sigma-qs)^{(\alpha-2)}}{\Gamma_q(\alpha-1)} \left(\frac{(s-qu)^{(\gamma-1)}}{\Gamma_q(\gamma)} \right.\right. \\
&\left.\left. \left(\int_0^u \frac{(u-qm)^{(\beta-1)}}{\Gamma_q(\beta)} f(m,x(m)) d_q m + \lambda x(u) \right) d_q u \right) d_q s \right\} \\
&- \frac{\theta \left[\delta_1 t^\gamma - \delta_2\right]}{\Delta} \left\{ \int_0^1 \frac{(1-qu)^{\gamma-1}}{\Gamma_q(\gamma)} \left(\int_0^u \frac{(u-qm)^{\beta-1}}{\Gamma_q(\beta)} f(m,x(m)) d_q m + \lambda x(u) \right) d_q u \right\} \Big|
\end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned}
\mid \theta x(t) \mid \ &\leq \parallel \mu \parallel \varphi(r) \left[\frac{1+\alpha_2}{\Gamma_q(\gamma+\beta+1)} + \frac{1}{\Gamma_q(\gamma+\beta+\alpha)} \left(\alpha_1 \mid a \mid \eta^{\beta+\alpha+\gamma-1)} + \alpha_2 \mid b \mid \sigma^{(\alpha+\beta+\gamma-1)} \right) \right] \\
&+ r \mid \lambda \mid \left[\frac{(1+\alpha_2)}{\Gamma_q(\gamma+1)} + \tfrac{1}{\Gamma_q(\gamma+\alpha)} \left(\alpha_1 \mid a \mid \eta^{(\gamma+\alpha-1)} + \alpha_2 \mid b \mid \sigma^{(\alpha+\gamma-1)} \right) \right]
\end{aligned}$$

D où par l'hypothèse H_4 on a :

$$\mid \theta x(t) \mid \leq r$$

Donc Ω est un ensemble bornée.

Grâces aux étapes 1,2,3 et 4 et d'après théorème du point fixe de Schaefer,on déduit que A admet une point fixe qui est une solution du problème q-fractionnaire (3,2).

Exemple 6.

$$\begin{cases} D_q^{\frac{1}{2}}({}^cD_q^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{11})x(t) = \frac{2\sin(t)}{e^t+4}\frac{x}{\exp^{|x|}+\cos(t)}, t \in [0,1], \\ \\ x(0) = I_q^2 x(\frac{1}{3}) \\ \\ x(1) = \frac{1}{2} I_q^2 x(\frac{2}{3}) \end{cases} \tag{3.10}$$

Où $\gamma = \beta = \frac{1}{2}$,$a = 1$,$b = \frac{1}{2}$,$\alpha = 3$,$\sigma = \frac{2}{3}$,$\eta = \frac{1}{3}$,$q = \frac{1}{2}$ *avec* $f(t, x(t)) = t \tan^{-1} x(t)$.

Soient $x, y \in \mathbb{R}, t \in [0,1]$. *Alors :*

$$\mid f(t, x(t)) \mid = \mid \frac{2\sin(t)}{\exp^t + 4}\frac{x}{e^{|x|} + \cos(t)} \mid \leq \frac{1}{25} \mid x \mid \tag{3.11}$$

Donc (H_3) *est satisfait avec* $\mu = \frac{1}{25}$ *et* $\varphi(\mid x \mid) = \mid x \mid$

aussi on a :

$\delta_1 = -0.925926$,$\delta_2 = 0.030136$,$\delta_3 = -0.851852$,$\delta_4 = -0.914762$,$\Delta = -0.872674$,
$\alpha_1 = 0.072089$,$\alpha_2 = 1.09555$, $k_3 = 2.158402$,$k_2 = 2.37938$, $k_4 = 2.754225$

Donc l'hypothèse H_4 *est satisfait avec* $r \geq \parallel \mu \parallel \varphi(r) \Rightarrow r \geq \frac{r}{25} k_4$

ainsi tout les hypothèses de théorème (3,2) soit satisfaites,par conséquent le problème (3,10) possède au moins une solution dans l'espace X.

Références

[1] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo, Theory and Applications of Fractional Differential Equations, North-Holland Mathematics Studies, 204. Elsevier Science B.V., Amsterdam, 2006.

[2] S. G. Samko, A. A. Kilbas, O. I. Marichev, Fractional Integrals and Derivatives, Theory and Applications, Gordon and Breach, Yverdon, 1993.

[3] D. Baleanu, O. G. Mustafa, On the global existence of solutions to a class of fractional differential equations, Comp. Math. Appl. 59 (2010), 1835-1841.

[4] J.J. Nieto, J. Pimentel, Positive solutions of a fractional thermostat model, Bound. Value Probl. 2013, 2013 :5, 11 pages.

[5] R. Agarwal, Certain fractional q-integrals and q-derivatives, Proc. Cambridge Philos. Soc. 66 (1969), 365-370.

[6] W. A. Al-Salam, Some fractional q-integrals and q-derivatives, Proc. Edinb. Math. Soc. 15 (1966-1967), 135-140.

[7] F. M. Atici, P. W. Eloe, A transform method in discrete fractional calculus, Int. J. Difference Equ. 2 (2007), 165-176.

[8] X. Li, Z. Han, S. Sun, Existence of positive solutions of nonlinear fractional q-difference equation with parameter, Adv. Difference Equ. 2013, 2013 :260, 13 pp.