République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de La Recherche Scientifique
Université Djilali Bounaama-Khemis Miliana
Faculté des Sciences et de la technologie
Département de Mathématiques et informatique

Mémoire de fin d'étude
En vue de l'obtention d'un diplôme de Master en Mathématiques
Spécialité Analyse Mathématique et Applications

Thème :

Étude de l'existence et de la stabilité des solutions des equation différentielles fractionnaire du pantographe

Présenté par :

Zeddini Imène

Devant le jury composé par :

Présidente :	L.Djouamai	Université de Djilali Bounaama
Examinatrice 1 :	F.Chita	Université de Djilali Bounaama
Examinateur 2 :	M.Bezziou	Université de Djilali Bounaama
Encadrant :	M.Houas	Université de Djilali Bounaama

Année universitaire : 2020-2021

Remerciement

Tout d'abord, je tiens à remercier DIEU de m'avoir donné la force et le courage pour faire ce modeste travail.

Je tiens à adresser mes sincères remerciements à mon encadreur monsieur HAOUS Mohemed pour son encouragement, son aide et son suivi pour terminer ce travail.

Je voudrais remercier messieurs les membres de jury. Ainsi qu'à tous les enseignants du département de mathématique.

A la fin, je remercie tous ceux qui de prés ou de loin m'ont aidés à la réalisation de ce travail.

MERCI

Je dédie ce travail :

$\mathcal{A}$

la prunelle de mes yeux, a vous : " mes chers parents "

$\mathcal{A}$

celui qui a épuisé sa jeunesse et sa vie, qui n'a vécu que pour me voir réussir, a mon premier encadrant depuis ma naissance, a mon cher père : " Yahya "

$\mathcal{A}$

celui qui ma donner la vie, qui a bercé mes nuits, a mon soleil qui brille, le symbole de tendance, a ma chère mère : " Samia "

$\mathcal{A}$

toutes mes frères et mes sœurs : " Annes, Mohammed, Kamel, Khaled, Sara "

$\mathcal{A}$

mon amis " Amina, Fatima, Nasreddine, " et je leur souhait beaucoup de réussite et de bonheur.

ZEDDINI Imene

Résumé

Le travail de ce mémoire porte sur l'étude de l'existence, l'unicité et la stabilité de solutions des problèmes du pantographe d'ordre fractionnaire avec des dérivées fractionnaires au sens de Caputo et Caputo-Hadamard. Dans ce mémoire, on s'intéresse aux techniques de points fixes pour étudier l'existence des solutions pour les problèmes du pantographe fractionnaire avec des dérivées fractionnaires au sens de Caputo et Caputo-Hadamard. Aussi, on s'intéresse à l'étude de la stabilité au sens d'Ulam-Hyers.

Abstract

The work of this graduation note focuses on the study of the existence, the uniqueness and the stability of solutions of the problems of fractional order pantograph with fractional derivatives in the sense of Caputo and Caputo-Hadamard. In this graduation note, we are interested in fixed point of techniques to study the existence of solutions for the problems of the fractional pantograph with fractional derivatives in the sense of Caputo and Caputo-Hadamard. Also, we are interested in the study of stability in the sense of Ulam-Hyers.

Table des matières

1 Notions Générales et Définitions **8**
1.1 Notions de bases . . . 8
1.2 Pantographe : . . . 9
1.3 Fonctions Spéciales . . . 11
1.4 Intégrale et dérivées d'ordre fractionnaire . . . 13
1.5 Différents Théorème du point fixe . . . 19

2 Équation du pantographe fractionnaire avec deux dérivées fractionnaires au sens de Caputo **21**
2.1 Introduction . . . 21
2.2 Solution Intégrale . . . 21
2.3 Existence et Unicité du problème . . . 22
2.4 Stabilité de la solution du problème (2.1.1) . . . 32
2.5 Stabilité au sens de Ulam-Hyers généralisé . . . 32
2.6 Exemple . . . 35

3 Existence et Unicité de solution des équations différentielles fractionnaires du pantographe avec dérivée au sens de Caputo-Hadamard **36**
3.1 Lemme auxiliaire et Hypothèses . . . 36
3.2 Existence et Unicité . . . 39
3.3 Étude de Stabilité . . . 42
3.4 Exemples . . . 45

Bibliographie **48**

Symbole et notation

$\mathbb{R}$	:=	Ensemble des nombres réels.
$\mathbb{R}^+$	:=	Ensemble des nombres réels positifs ou nuls.
$\mathbb{C}$	:=	Ensemble des nombres complexes.
$\lvert . \rvert$	:=	Valeur absolue d'un nombre réel.
$\lVert . \rVert$	:=	norme infinie.
$L^p[a,b]$	:=	Espace des fonctions mesurables de puisance $p \in [0,+1)$ intégrables.
$T(.)$	:=	Fonction Gamma d'Ealer.
$\beta(.)$	:=	La fonction Beta.

Introduction Général

Le calcul fractionnaire est défini comme étant la branche mathématique qui étudie la généralisation des notions de dérivation et d'intégration à des ordres non nécessairement entiers, permettant le calcul de la dérivée d'ordre α réel ou complexe d'une fonction différentiable $f(t)$ soit :

$$(D^{\alpha} f)(t) = \frac{d^{\alpha}\ f(t)}{dt^{\alpha}}.$$

La théorie des équations différentielles fractionnaire joue un rôle important en théorie du calcul fractionnaire. De plus, les équations différentielles de type fractionnaire sont également assez importante dont les applications sont très nombreuses, notamment en mathématiques et physique. Les théorèmes du point fixes [15, 16, 17] est un outil excrément important qui intervient dans l'étude des équations différentielles fractionnaires et permet d'établir des résultats d'existences et d'unicités. Les équations du pantographe se posent dans la modélisation de divers problèmes en sciences et en ingénierie tels que l'économie, la biologie, le contrôle et l'électrodynamique[2, 11] . Récemment, les équations différentielles d'ordre fractionnaire du pantographe ont été étudiées par de nombreux chercheurs. L'un des sujets intéressants dans ce domaine, est l'investigation de l'existence et la stabilité de solutions.

Ce travail est divisé en trois chapitres :
Le premier chapitre est consacré aux définitions et notations qui seront utiles dans la suite de travail.

Le deuxième chapitre sera consacré à l'étude de l'existence, l'unicité et la stabilité de solutions d'un problème de pantographe avec deux dérivées fractionnaires de Caputo suivant :

$$\begin{cases} D^{\alpha}\left(D^{\beta}+\lambda\right) u\left(t\right) = \varphi\left(t, u\left(t\right), u\left(\eta t\right)\right), t \in [0,1], \\ u\left(0\right) = 0, \quad u\left(1\right) = \theta,\ \theta > 0, \\ \lambda \in \mathbb{R},\ 0 < \alpha, \beta \leq 1,\ 0 < \eta < 1, \end{cases}$$

où D^{β} et D^{α} sont des dérives fractionnaires au sens de Caputo et $\varphi : [0,T] \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue.

Pour le troisième chapitre, on étudie l'existence, l'unicité et la stabilité au sens Ulam-Hyers et Ulam-Hyers-Rassais d'une équation de pantographe fractionnaire avec une dérivée fractionnaire de caputo-Hadamard suivant :

$$\begin{cases} {}^{C}_{H}D^{\alpha} u(t) = \varphi(t, u(t), u(\lambda t)),\ t \in [1,T],\ 0 < \alpha \leq 1,\ 0 < \lambda < 1, \\ u(1) = u_1 - \theta(u),\ u_1 \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

où ${}^{C}_{H}D^{\alpha}$ est la dérivée fractionnaire de type caputo-Hadamard d'ordre αet $\varphi : [0,T] \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue.

Chapitre 1

Notions Générales et Définitions

Ce chapitre rassemblent les définitions et les propriétés essentielles correspondantes à la notion de intégration et la dérivation fractionnaire. Le section 1.2 et consacré au equation de pantographe. La dernière section de ce chapitre est consacrée à la présentations de quelques théorèmes classiques de point fixe[13, 3, 7, 5, 8, 6, 14, 4].

1.1 Notions de bases

Dans cette section, on présente les notations, les définitions et quelques propriétés préliminaires qui sont utilisées dans ce travail.

Définition 1.
On appelle boule ouverte de centre a et de rayon r, l'ensemble noté $B(a,r)$ telle que

$$B(a,r) = \{x \in E / \|x-a\| < r\}.$$

Définition 2.
On appelle boule fermée de centre a et de tayon r, l'ensemble noté $B'(a,r)$ tele que

$$B'(a,r) = \{x \in E / \|x-a\| \leq r\}.$$

Définition 3.
On dit que A est une partie compact de $(E, \|.\|)$ si de toute suite de points de A on peut extraire une sous-suite qui converge vers un élément de A .

Définition 4.
Une partie A de $(E, \|, \|)$, est dite relativement compact si son adhérence est compact.

Définition 5.
Soient E et F deux espace de Banach, et $A : E \longrightarrow F$ une application lineaire. On dit que A et borné si elle envoie les parties bornées de E sur des parties bornées de F.

Définition 6.
Soient E et F deux espaces de Banach. on appelle opérateur borné toute application linéaire continue de E dans F.

Définition 7.
Soient E et F deux espaces de Banach et f une application définie de E a. valeurs dans F. On dit que f est complètement continue si elle est continue et transforme tout borné de E en une ensemble relativement compact dans F. f est dite compact si $f(E)$ est relativement compact dans F.

Définition 8.

Soit A un sous ensemble de $C(J,\mathbb{R})$, L'ensemble A est equicontinue. i.e pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que :

$$|t_1 - t_2| < \delta \Longrightarrow \|f(t_1) - f(t_2)\| \leq \varepsilon \text{ pour tout } t_1, t_2 \in J \text{ et tout } f \in A.$$

Définition 9.

Soit E un espace de Banach muni de la norme $\|.\|$ et $T : E \to E$ une application. Un élément x de E est un point fixe de T si $Tx = x$.

1.2 Pantographe :

Le pantographe est un dispositif installé sur le toit d'un train qui relie automatiquement une locomotive à une caténaire pour collecter l'énergie électrique via le contact mécanique entre ses bandes de contact et le fil de contact de la caténaire. Il est constitué de bras articulés et une bande de captage en carbone qui permet de capter le courant électrique par frottement sur la ligne aérienne d'alimentation.
Le pantographe est un élément d'une importance vitale et doit donc répondre à une série de critères garantissant un comportement optimal, comme une structure adaptée à réinstallation, c'est-à-dire adaptée aux variations et aux contraintes typiques de chaque ligne, un bon comportement et une bonne résistance aux conditions de ligne et d'environnement, ainsi qu'un entretien facile qui n'implique pas de dépenses inutiles ou excessives.

les types de pantographe :

- *Pantographe a symtrique polygonal.*
- *Pantographe polygonal double etage.*
- *Pantographe a symtrique.*
- *Pantographe symtrique double etage.*

Modèle mathématique du pantographe :

L'équation du pantographe est :

$$y'(t) = ay(t) + by(\lambda t).$$

où a et b sont des réels, et $0 < \lambda < 1$.

Différentes formes de l'équation du pantographe :

Ces dernières années, de nombreuses recherches ont porté sur l'équation du pantographe et différentes formes de cette équation ont vu le jour :

1. L'équation du pantographe non autonome :

$$\begin{cases} y'(t) = a(t)y(t) + b(t)y(\lambda t), \quad t \geq 0 \\ y(0) = \bar{y}, \end{cases}$$

où : $a(t)$ et $b(t)$ sont des fonctions continues à valeurs complexes et $\lambda \in (0,1)$ est une constante fixe. On étudie également notre analyse à l'équation

$$y'(t) = a(t)y(t) + by(\lambda t) + f(t),$$

où : $f(t)$ est également une fonction continue à valeurs complexes.

2. L'équation du pantographe de second ordre :

$$y''(z) - ay'(z) - by(z) + \lambda y(\alpha z) = 0$$

où : z est complexe, $\alpha > 0, a > 0$ et $b > 0$ sont des constantes et $\lambda \neq 0$ est un paramètre réel ou complexe.

3. L'équation multi-pantographe :

$$\begin{cases} u'(t) = \lambda u(t) + \sum_{i=1}^{n} \mu_i u(q_i t) \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

où :

$$0 < q_n < q_{n-1} < \cdots < q_1 < 1 \text{ et } \lambda, \mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n, u_0 \in C$$

4. L'équation du pantographe non homogène :

$$\begin{cases} u'(t) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(t) u(q_i t) + f(t), t \in [0,T] \\ u(0) = 0, \end{cases}$$

où : $0 < q_i \leq 1$ et λ_i sont des fonctions continues sur $[0, T]$ pour $i = 1, \cdots, m$ et f est intégrable au sens de Riemann.

1.3 Fonctions Spéciales

Dans cette section on présente des définitions et quelques propriétés pour les fonctions :
Gamma et Bêta.Ces deux fonctions jouent un rôle très important dans la théorie du calcul fractionnaire et ces applications.

Fonction Gamma

La fonction Gamma est tout simplement la généralisation de la notion de factoriel à tous les nombres réels. Elle est définie par une intégrale impropre.

Définition 10.

On appelle fonction Gamma la fonction définie par :

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, z \in \mathbb{C} \; etz > 0. \tag{1.1}$$

Exemple 1.

1) $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1.$

2) $\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt = 2 \int_0^{+\infty} e^{-s^2} ds = \sqrt{\pi}$,*(posant le changement de variable,* $t = s^2$*).*

Proposition 1.

pour tout $z \in \mathbb{C}, z > 0, n \in \mathbb{N}$, *on a :*

i)

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z). \tag{1.2}$$

ii)

$$\Gamma(n) = (n-1)!. \tag{1.3}$$

iii)

$$\Gamma(n + \frac{1}{2}) = \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{4^n n!}. \tag{1.4}$$

Preuve 1.

i) En intégrant par partie

$$\begin{aligned} \Gamma(z+1) &= \int_0^{+\infty} t^z e^{-t} dt = \left[-t^Z e^{-t}\right]_0^{+\infty} + z \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \\ &= z\Gamma(z). \end{aligned}$$

ii) On pose $z = n - 1$,

$$\begin{aligned} \Gamma(n) &= (n-1)\Gamma(n-1) \\ &= (n-1)(n-2)...\Gamma(1) \\ &= (n-1)! \end{aligned}$$

iii) On démontre la formule $\Gamma(n + \frac{1}{2}) = \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{4^n n!}$ *par récurrence pour* $n \in \mathbb{N}$

pour $n = 0$ *on a :*

$$\Gamma(0 + \frac{1}{2}) = \frac{(0)!\sqrt{\pi}}{4^0(0!)} = \sqrt{\pi}.$$

- Supposons que la formule est vérifiée pour $(n-1)$ *et considère* n*.*
supposons que

$$\Gamma((n-1) + \frac{1}{2}) = \frac{(2(n-1))!\sqrt{\pi}}{4^{n-1}(n-1)!}.$$

est vérifié.Alors

$$\begin{aligned}
\Gamma(n + \frac{1}{2}) &= (n - \frac{1}{2})\Gamma(n - \frac{1}{2}) \\
&= (n - \frac{1}{2})\frac{(2(n-1))!\sqrt{\pi}}{4^{n-1}(n-1)!} \\
&= \frac{2n-1}{2}\frac{(2n-2)!\sqrt{\pi}}{4^{n-1}(n-1)!} \\
&= \frac{2n}{2n}\frac{2n-1}{2}\frac{(2n-2)!\sqrt{\pi}}{4^{n-1}(n-1)!} \\
&= \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{4^n n!}.
\end{aligned}$$

Donc la formule est vérifée pour $n \in \mathbb{N}$*.*

Fonction Bêta

Dans de nombreux cas ,il est préférable d'utiliser la fonction Bêta au lieu de certaines combinaisons de la fonction Gamma.

Définition 11.
La fonction Bêta est donnée par :

$$B(z, w) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1}dt. \quad z > 0, w > 0. \tag{1.5}$$

le changement de variable $u = 1 - t$ *permet de montrer que la fonction Bêta est symétrique c'est-à-dire*

$$B(z, w) = B(w, z). \tag{1.6}$$

Proposition 2.
la fonction Bêta est reliée au fonction Gamma par la relation suivante : $\forall z, w > 0$*, on a :*

$$B(z, w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}. \tag{1.7}$$

En effectuant le changement de variable $t_2^{'} = t_1 + t_2$
On trouve,

$$\begin{aligned}
\Gamma(z)\Gamma(w) &= \int_0^{+\infty} t_1^{z-1}dt_1 \int_0^{+\infty} (t_2^{'} - t_1)^{w-1}e^{-t_2^{'}}dt_2^{'} \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-t_2^{'}}dt_2^{'} \int_0^{t_1} (t_2^{'} - t_1)^{w-1}t_1^{z-1}dt_1.
\end{aligned}$$

Si on pose $t_1^{'} = \frac{t_1}{t_2^{'}}$, *on arrive à :*

$$\begin{aligned}\Gamma(z)\Gamma(w) &= \int_0^{+\infty} e^{-t_2^{'}} dt_2^{'} \left(\int_0^1 (t_2^{'} t_1^{'})^{z-1} (t_2^{'} - t_2^{'} t_1^{'})^{w-1} t_2^{'} dt_1^{'} \right) \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-t_2^{'}} dt_2^{'} ((t_2^{'})^{z+w-1} B(z,w)) \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-t_2^{'}} (t_2^{'})^{z+w-1} dt_2^{'} B(z,w) \\ &= \Gamma(z+w) B(z,w).\end{aligned}$$

Ce qui donne le résultat désiré.

Exemple 2. *Calculons* $B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

$$\begin{aligned}B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) &= \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(1)} \\ &= \pi.\end{aligned}$$

1.4 Intégrale et dérivées d'ordre fractionnaire

Dans cette section, on présente l'opérateur d'intégration fractionnaire ainsi que les définitions les plus utilisées des dérivées fractionnaires, a savoir, les dérivées de Riemann-Liouville, Caputo, Hadamard et de Caputo-Hadamard.

Intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Définition 12.
Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction continue, on appelle integrale d'ordre* α *au sens de Riemens Liouville de* f *l'intégrale suivante :*

$$\mathcal{I}_a^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds \quad t > a, \alpha > 0.$$

Exemple 3.
On considère la fonction f *definie par :*

$$f(t) = (t-a)^{\beta} \quad t \in [a,b], \beta \in \mathbb{R}, (\beta > -1).$$

On a :

$$\mathcal{I}_a^{\alpha} f(t) = \mathcal{I}_a^{\alpha} (t-a)^{\beta} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} (s-a)^{\beta} ds.$$

Soit le changement de variable suivant :

$$s = t - r(t-a) \Longrightarrow ds = -(t-a) dr.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_a^\alpha(t-a)^\beta &= \frac{-1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^0 [r(t-a)]^{\alpha 1}[t-a-r(t-a)]^\beta (t-a)dr \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (t-a)^{\alpha+\beta} r^{\alpha-1}(1-r)^\beta dr \\ &= \frac{(t-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 r^{\alpha-1}(1-r)^\beta dr \\ &= \frac{(t-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} B(\alpha,\beta+1),\end{aligned}$$

en utilisant la proposition (2), *on obtient :*

$$\mathcal{I}_a^\alpha(t-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}(t-a)^{\alpha+\beta}. \tag{1.8}$$

Si $\alpha = 1$, *alors :*

$$\mathcal{I}_a^1(t-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+2)}(t-a)^{\beta+1}.$$

D'après la propriété (i) du proposition (1), on a :

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_a^1(t-a)^\beta &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{(\beta+1)T'(\beta+1)}(t-a)^{\beta+1} \\ &= \frac{(t-a)^{\beta+1}}{\beta+1}.\end{aligned}$$

Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Définition 13.

On appelle dérivée d'ordre α *au sens de Riemenn-Lion ville de la fonction* f. *la fonction définie par :*

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_a^\alpha f(t) &= \left(\frac{d}{dt}\right)^n \left(\mathcal{I}_n^{n-\mathrm{a}} f\right)(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f(s)ds,\end{aligned} \tag{1.9}$$

avec $\alpha \geq 0$ *et* $n = [\alpha]+1$.

♦*Pour* $\alpha = n \in \mathbb{N}$, *on a :*

$$\mathcal{D}_a^n f(t) = f^{(n)}(t).$$

En particulier, $\mathcal{D}_a^\rho f(t) = f(t)$.

Exemple 4.

Soit la fonction

$$f(t) = (t-a)^\beta, \quad t \in [a,b], \beta \in \mathbb{R}, (\beta > -1).$$

On a :

$$\mathcal{D}_a^\alpha (t-a)^\beta = \left(\frac{d}{dt}\right)^n \left[\mathcal{I}_a^{n-\alpha}(t-a)^\beta\right].$$

en utilisant (1.9), on obtient :

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_a^\alpha (t-a)^\beta &= \left(\frac{d}{dt}\right)^n \left[\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha+\beta+1)}(t-a)^{n+\beta-\alpha}\right] \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha+\beta+1)}\left(\frac{d}{dt}\right)^n (t-a)^{n+\beta-\alpha}.\end{aligned}$$

Or, on sait que :

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^n (t-a)^\lambda = \lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-n+1)(t-a)^{\lambda-n} = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+1-n)}(t-a)^{\lambda-n}. \tag{1.10}$$

Ainsi,

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^n (t-a)^{n+\beta-a} = \frac{\Gamma(n+\beta-\alpha+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(t-a)^{\beta-a}.$$

Il s'ensuit que :

$$\mathcal{D}_a^\alpha (t-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(t-a)^{\beta-\alpha}. \tag{1.11}$$

Si $\alpha = 1$, alors :

$$\mathcal{D}_a^1 (t-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta)}(t-a)^{\beta-1}$$

Par la propriété (i), on trouve :

$$\mathcal{D}_a^1 (t-a)^\beta = \beta(t-a)^{\beta-1} = \frac{d}{dt}(t-a)^\beta.$$

Remarque 1.

On pose $\beta = 0$ dans (1.11), on obtient :

$$\mathcal{D}_a^\alpha 1 = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}(t-a)^{-\alpha} \ .$$

Ce qui montre que in dérivé au sens de Riemann-Liouville d'une constante n'est pas nulle.

Dérivée fractionnaire au sens Caputo

Définition 14.

Soit $\alpha > 0$ et $n = [\alpha] + 1$ la dérivée fractionnaire au sens de Caputo est définir par la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville tel que :

$$^C\mathcal{D}_a^\alpha f(x) = \mathcal{D}_a^\alpha \left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k\right](x), \tag{1.12}$$

Si $\alpha \in]0;1]$ alors $n = 1$ tel que

$$^C\mathcal{D}_a^\alpha f(x) = \mathcal{D}_a^\alpha \left[f(t) - f(a)\right](x), \tag{1.13}$$

Lemme 1.

Si $\alpha \notin \mathbb{N}$ et f est une fonction continue, la dérivée fractionnaire au sens Caputo et Riemann-Liouville existent, on a la relation suivant :

$$^C\mathcal{D}_a^\alpha f(x) = \mathcal{D}_a^\alpha f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^k(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)}(x-a)^{k-\alpha}, \tag{1.14}$$

Théoréme 1.

La dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre $\alpha > 0$ avec $n = [\alpha] + 1$ est définie par :

$$\forall x \in [a,b], {}^{C}\mathcal{D}_a^{\alpha} f(x) = \mathcal{I}_a^{n-\alpha}(\mathcal{D}^n f)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{(n-\alpha-1)} f^{(n)} dt, \tag{1.15}$$

Cas particulier : *Si $\alpha \in [0,1]$ alors $n = 1$, la dérivée fractionnaire de Caputo est*

$${}^{C}\mathcal{D}_a^{\alpha} f(x) = \mathcal{I}_a^{1-\alpha}(\mathcal{D} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{(-\alpha)} f^{(1)} dt, \tag{1.16}$$

Corollaire 1.

Soit $\alpha > 0)$ et $n = [\alpha] + 1$, tel que ${}^{C}\mathcal{D}^{\alpha}$ et $\mathcal{D}^{\alpha}$ existent.

Si $f^{(k)}(a) = 0$ pour tout $k \in \{0, 1, ..., n-1\}$, alors

$${}^{C}\mathcal{D}^{\alpha} f(x) = \mathcal{D}^{\alpha} f(x)$$

Proposition 3.

Soit $\alpha > 0$,$\beta > 0$,avec $n = [\alpha] + 1$, on a les propriétés suivantes :

i) Si $f(x) \in C^p([a;b])$, $p = [\alpha + \beta] + 1$,

alors

$${}^{C}\mathcal{D}_a^{\alpha}\, {}^{C}\mathcal{D}_a^{\beta} f(x) = {}^{C}\mathcal{D}_a^{\alpha+\beta} f(x) \tag{1.17}$$

ii) Si $f(x) \in C^n([a;b])$ ou $f(x) \in AC^n([a;b])$, alors

$$\mathcal{I}_a^{\alpha}\, {}^{C}\mathcal{D}_a^{\alpha} f(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \tag{1.18}$$

Exemple 5.

i) La dérivée fractionnaire d'une fonction constante au sens de Caputo est nulle .

$${}^{C}\mathcal{D}^{\alpha} C = 0.$$

ii) La dérivée de $f(x) = (x-a)^{\beta-1}$ au sens de Caputo :

Soit α non entier et $n - 1 < \alpha < n$ et $\beta - 1 > 0$, alors on a

$${}^{C}\mathcal{D}_a^{\alpha} f(x) = \mathcal{I}_a^{n-\alpha}(\mathcal{D}^n f)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{(n-\alpha-1)} f^{(n)}(t) dt,$$

et

$$\frac{d^n}{dx^n}(x-a)^{\beta-1} = (\beta-1)(\beta-2)...(\beta-n)(x-a)^{\beta-n-1},$$

posons

$$(t-a) = s(x-a) \text{ et } s \in [0;1].$$

$$dt = (x-a)ds.$$

$$\begin{aligned} {}^{C}\mathcal{D}_a^\alpha f(x) &= \frac{(\beta-1)(\beta-2)...(\beta-n)}{\Gamma(n-\alpha)}(x-a)^{\beta-\alpha-1}\int_0^1 (1-s)^{n-\alpha-1}s^{\beta-n-1}ds \\ &= \frac{(\beta-1)(\beta-2)...(\beta-n)}{\Gamma(n-\alpha)}(x-a)^{\beta-\alpha-1}B(n-\alpha,\beta-n) \\ &= \frac{(\beta-1)(\beta-2)...(\beta-n)\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-\alpha)}(x-a)^{\beta-\alpha-1} \\ &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(x-a)^{\beta-\alpha-1}. \end{aligned}$$

Le même resultat avec la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville .

L'intégrale fractionnaire au sens de de Hadamard

Soit $[a,b]$ un intervalle fini ou infinie telle que $(0 \leq a < b < +\infty)$ et $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$.

Définition 15.
Soit $(\alpha > 0)$. *L'intégrale fractionnaire de Hadamard d'ordre* α *de* f *est définie par :*

$$\left(\mathcal{I}_a^\alpha f\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t \left(\log\frac{t}{\tau}\right)^{\alpha-1}\frac{f(\tau)}{\tau}d\tau.$$

Proposition 4. *Si* $\alpha > 0, \beta > 0$ *et* $(0 < a < b < +\infty)$, *on a :*

$$\left(\mathcal{J}_a^\alpha\left(\log\frac{t}{a}\right)^{\beta-1}\right)(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\left(\log\frac{t}{a}\right)^{\beta+\alpha-1}.$$

Dérivées fractionnaires au sens de de Hadamard

Soit $[a,b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$, et ou a la fonction $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\left(\delta = t\frac{d}{dt}\right)$ le δ -dérivé et

$$AC_j^n[a,b] = \left\{g : [a,b] \to C : \delta^{n-1}g(t) \in AC[a,b], \delta = t\frac{d}{dt}\right\}.$$

Définition 16.
Soit $\alpha > 0$ *et* $n = [\alpha]+1$. *Les dérivées fractionnaires de Hadamand d'ordre* α *de* f *sont définies par :*

$$\left({}^{H}\mathcal{D}_a^\alpha f\right)(t) \quad = \delta^n\left(\mathcal{J}_{a+}^{n-\alpha}f\right)(t). \tag{1.19}$$

$$= \left(t\frac{d}{dt}\right)^n\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^t\left(\log\frac{t}{\tau}\right)^{n-\alpha+1}\frac{f(\tau)}{\tau}d\tau, \quad (t > a). \tag{1.20}$$

et

$$\begin{aligned} &\left({}^{H}\mathcal{D}_b^\alpha - f\right)(t) = (-\delta)^n\left(\mathcal{J}_{b-}^{n-a}f\right)(t). \\ &= \left(-t\frac{d}{dt}\right)^n\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_t^b\left(\log\frac{\tau}{t}\right)^{n-a+1}\frac{f(\tau)}{\tau}d\tau, \quad (t < b), \end{aligned} \tag{1.21}$$

Proposition 5. *Si $\alpha > 0, \beta > 0$, alors*

$$\left({}^H\mathcal{D}_a^a \left(\log \frac{t}{a}\right)^{\beta-1}\right)(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}\left(\log \frac{t}{a}\right)^{\beta-\alpha-1}, \quad \beta > \alpha.$$

En particulaire, si $\beta = 1$, on a

$$\left({}^H\mathcal{D}_a^{\mathrm{a}} + 1\right)(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\log \frac{t}{a}\right)^{-\infty}.$$

Lemme 2.

Soit $\alpha > 0$ et $n = [\alpha] + 1$, si $f \in AC_b^m[a,b]$, alors

$$\left({}^H\mathcal{D}_a^a f\right)(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\left(\delta^k f\right)(a)}{\Gamma(1+k-\alpha)}\left(\log \frac{t}{a}\right)^{k-\alpha} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^t \left(\log \frac{t}{\tau}\right)^{n-a-1} \left(\delta^n f\right)(\tau) d\tau.$$

et En particulaire, si $0 < \alpha < 1$, alors pour $f \in AC[a,b]$,

$$\left({}^H D_a^\alpha f\right)(t) - \frac{f(a)}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\log \frac{t}{a}\right)^{-a} + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^t \left(\log \frac{t}{\tau}\right)^{-\alpha} \frac{f'(\tau)}{\tau} d\tau.$$

Théoréme 2.

Soit $\alpha > 0$, et $f \in L(a,b)$ et $\left(\mathcal{J}_a^{n-\alpha} f\right)(t) \in AC_\delta^n[a,b]$. Alors En particulaire, si $\alpha = n \in \mathbb{N}$ et $f \in AC_j^n[a,b]$,

Alors

$$\left(\mathcal{J}_a^{n\,H}\mathcal{D}_a^n f\right)(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\left(\delta^k f\right)(a)}{k!}\left(\log \frac{t}{a}\right)^k.$$

Dérivées fractionnaires au sens de Caputo-Hadamard

On définie les modification du type Caputo des dérivés fractionnaire de Hadamard comme suite :

Définition 17.

Soit $\alpha \geq 0$ et $n = [\alpha] + 1$, si $f \in AC_\delta^n$, Les dérivées fractionnaires de Caputo-Hadamard à gauche et a droite d'ordre α de f sont définies par :

$$\begin{aligned}\left({}_H^C\mathcal{D}_a^a f\right)(t) &= \mathcal{J}_a^{n-a}\delta^n f(t). \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_\alpha^t \left(\log \frac{t}{\tau}\right)^{n-\alpha+1} \left(\tau \frac{d}{d\tau}\right)^n f(\tau)\frac{d\tau}{\tau}, \quad (t > a),\end{aligned} \tag{1.22}$$

respectivement. Si $\alpha \in \mathbb{N}$, alors

$${}_H^C\mathcal{D}_a^a f(t) = \delta^n f(t).$$

Théoréme 3.

Soit $\alpha \geq 0$ et $n = [\alpha] + 1$, si $f \in AC_b^n$. Alors :

$${}_H^C\mathcal{D}_a^\alpha f(t) = {}^H\mathcal{D}_a^\alpha \left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\delta^k f(a)}{k!}\left(\log \frac{t}{a}\right)^k\right](t).$$

En particulaire, si $0 < \alpha < 1$, on a

$${}^c\mathcal{D}_a^\alpha f(t) = {}^H\mathcal{D}_a^\alpha [f(t) - f(a)](t)$$

Lemme 3. *Soit $\alpha > 0, n = [\alpha] + 1$ et $f \in C[a, b]$.*

(i) Si$\alpha \neq 0$ ou $\alpha \in \mathbb{N}$, alors :

$$ {}_{H}^{C}\mathcal{D}_{\alpha}^{\alpha}\left(\mathcal{J}_{a}^{\mathrm{a}} f\right)(t)=f(t), $$

(ii) Si $\alpha \in \mathbb{N}$ et $\alpha \neq 0$, alors :

$$ {}^{c}\mathcal{D}_{\alpha}^{\alpha}\left(\mathcal{J}_{a}^{\mathrm{a}} f\right)(t)=f(t)-\frac{\mathcal{J}_{\mathrm{a}}^{\mathrm{a}-n+1} f(a)}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\log \frac{t}{a}\right)^{n-a} \cdot . $$

Lemme 4. *Soit $\alpha > 0$, et $f \in AC_{b}^{m}[a, b]$ ou $C_{b}^{n}[a, b]$. Alors*

$$ \mathcal{J}_{a}^{\alpha}\left({}^{c}\mathcal{D}_{a}^{\alpha} f\right)(t)=f(t)-\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\delta^{k} f(a)}{k^{1}}\left(\log \frac{t}{a}\right)^{k} $$

Proposition 6. *Soit $\alpha \geq 0, n = [\alpha] + 1$ et $\beta > 0$. Alors*

$$ {}_{H}^{C}\mathcal{D}_{\alpha}^{\mathrm{o}}\left(\log \frac{t}{a}\right)^{\beta-1}=\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}\left(\log \frac{t}{a}\right)^{\beta-\alpha-1}, \quad \beta>\alpha . $$

et

$$ {}_{H}^{C}\mathcal{D}_{a}^{\alpha}\left(\log \frac{t}{a}\right)^{k}=0. $$

Les dérivés fractionnaire de type Caputo-Hadamard peut être définie sur le demi-axe positif $\mathbb{R}^{+}$ par remplaçant a par 0 dans la formule1.22 à condition que $f(t) \in AC_{\delta}^{\mathrm{m}}\left(\mathbb{R}^{+}\right)$ ou $f(t) \in C_{d}^{n}\left(\mathbb{R}^{+}\right)$, on a :

$$ {}^{C}\mathcal{D}_{0+}^{\alpha} f(t)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{0}^{t}\left(\log \frac{t}{\tau}\right)^{n-a-1} \delta^{n} \frac{f(\tau)}{\tau} d \tau . $$

.

1.5 Différents Théorème du point fixe

Dans ce paragraphe, on présente les théorèmes de points fixes que on va utiliser tout au long de ce mémoire.

Théorème du point fixe de Banach

Le théorème du point fixe de Banach, connu aussi sous le nom du principe de contraction de Banach.

Théoréme 4. *Principe de contraction de Banach, 1922*

Soit (X, d) un espace métrique complet. Soit $T : X \to X$ un opérateur contractant. Alors : T admet un point fixe unique.i.e

$$ \exists! x \in X \text{ tel que } \quad T x=x . $$

Théorème de point fixe de Schaefer

Soit X un espace de Banach et $A : X \longrightarrow X$ est un opérateur complètement continue.
Si l'ensemble

$$ \{\varepsilon=x \in X: \lambda A x=x \text { pour certain } 0<\lambda<1\} ; $$

est borné,
alors A possède au moins une point fixe.

Théorème du point fixe de Krasnoselskii

On donne un théorème d'existence du point fixe concernant les applications de la forme $T = F + G$, où F est continue et compacte et G une contraction.

Théoréme 5. *(Krasnoselskii, 1958)*
Soit X un espace de Banach et K un sous ensemble non vide, fermé, borné et convexe de X. Soient F et G deux applications de K dans X telles que :

1. $\forall x, y \in K, F(x) + G(y) \in K$;

2. F est continue et compacte ;

3. G est contractante de constante $k < 1$; Alors, il existe $x^* \in K$ tel que $(F + G)(x^*) = x^*$.

Théorème du point fixe de Leray-Schauder

Soit X un espace de Banach et M un convexe fermé borné de X et $A : M \longmapsto M$ un opérateur continue

et compact alors A admet au moins un point fixe.

Théorème d'Arzela-Ascoli

Définition 18.
Soit $\{f_n\}$ une suite de fonctions définies sur l'intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$. On dit que la suite $\{f_n\}$ est équicontinue si : $\forall x \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall y \in I : |x - y| \leq \eta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon.$$

Autrement dit, toutes les fonctions f_n sont continues sur I, et elles sont continues "de la même façon".

Théoréme 6.
Soient (E, d) une espace métrique compacte, (F, δ) un espace métrique complet. Une partie A de $C(E, F)$ est relativement compacte si et seulement si :
1. A est équicontinue, ie :

$$\forall x \in E, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ tels que } : \forall f \in A, \forall y \in E : d(x, y) \leq \eta \Rightarrow \delta(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

2. Pour tout $x \in E$, l'ensemble $A = \{f(x), f \in A\}$ est relativement compact.

Chapitre 2

Équation du pantographe fractionnaire avec deux dérivées fractionnaires au sens de Caputo

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, on s'intéresse l'étude de l'existence et l'unicitéé des solutions pour un problème du pantographe fractionnaire avec deux dérives fractionnaires au sens de Caputo. On considère alors le problème suivant [19, 18, 20] :

$$\begin{cases} D^{\alpha}\left(D^{\beta}+\lambda\right)u\left(t\right)=\varphi\left(t,u\left(t\right),u\left(\eta t\right)\right),t\in\left[0,1\right], \\ u\left(0\right)=0, \quad u\left(1\right)=\theta,\ \theta>0, \\ \lambda\in\mathbb{R},\ 0<\alpha,\beta\leq 1,\ 0<\eta<1, \end{cases} \tag{2.1}$$

ou D^{β} et D^{α} sont des dérives fractionnaires au sens de Caputo, $\varphi:[0,T]\times\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}$ est une fonction continue et $W=C\left([0,1],\mathbb{R}\right)$ est l'espace de Banach de toutes les fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme $\|.\|$, $\|u\|=\{|u\left(t\right)|:t\in[0,1]\}$. On prouvera l'unicité de la solution du problème en utilisant le théorème de Banach, aussi on montre l'existence de la solution du problème fractionnaire en appliquant les théorèmes de Krasnosselski et Schaefer.

2.2 Solution Intégrale

Lemme 5.

Soient $\alpha>0$ et g,une fonction définie sur $\mathbb{R}^+$. Alors la solution de l'équation

$$D^{\alpha}\varphi(t)=0,$$

est donnée par :

$$\varphi(t)=c_0+c_1t+c_2t^2+...+c_nt^{n-1},$$

ou $c_i\in\mathbb{R}$, $i=0,......,n-1$, $n=[\alpha]+1$.

Lemme 6.

Soient $\alpha>0$ et g,une fonction définie sur $\mathbb{R}^+$, alors

$$I^{\alpha}D^{\alpha}\varphi\left(t\right)=\varphi\left(t\right)+c_0+c_1t+c_2t^2+...+c_nt^{n-1},$$

ou $c_i\in\mathbb{R}$, $i=0,1,2,....,n-1$, $n=[\alpha]+1$.

Lemme 7.
Soit $\delta \in C([0,1],\mathbb{R})$, alors la solution du problème aux limites fractionnaire suivant :

$$\begin{cases} D^{\beta}(D^{\alpha}+\lambda)u(t)=\delta(t),\ t\in[0,1],\ 0<\alpha,\ \beta\leq 1, \\ u(0)=0, \qquad u(1)=\theta, \end{cases}$$

est donné par :

$$u(t)=\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)}\delta(s)\,ds-\lambda\int_0^t \frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}u(s)\,ds \tag{2.2}$$

$$+t^{\beta}\left[\theta-\int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)}\delta(s)\,ds+\lambda\int_0^1 \frac{(1-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}u(s)\,ds\right].$$

Preuve 2. *Appliquant les lemmes (5),(6)on trouve :*

$$u(t)=J^{\alpha+\beta}\delta(t)-\lambda J^{\beta}u(t)+\frac{c_0}{\Gamma(\beta+1)}t^{\beta}+c_1, \tag{2.3}$$

ou c_0 et c_1 sont des constants arbitraires.
D'après les conditions $u(0)=0$ et $u(1)=\theta$, on peut écrit

$$c_0=\Gamma(\beta+1)\left(\theta-J^{\alpha+\beta}\delta(1)+\lambda J^{\beta}u(1)\right), c_1=0.$$

On remplace c_0 et c_1 dans (2.3) on trouve (2.2) .

Maintenant, on transforme le problème(2.1) à un problème du point fixe. Pour cela, on considère l'opérateur $T: C([0,1],\mathbb{R})\to C([0,1],\mathbb{R})$ défini par :

$$Tu(t)=\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)}f(s,u(t),u(\eta s))\,ds \tag{2.4}$$

$$+t^{\beta}\left(\theta+\int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)}f(s,u(t),u(\eta s))\,ds\right)$$
$$-\lambda\int_0^t \frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}u(s)\,ds+t^{\beta}\lambda\int_0^1 \frac{(1-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}u(s)\,ds.$$

2.3 Existence et Unicité du problème

Unicité de Solutions

En se basant sur le principe de contraction de Banach, l'unicité de la solution du problème (2.1) sera prouvée.

Théoréme 7.
Soit $f:[0,1]\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ une fonction continue. Supposons que l' hypothèse suivante est satisfaite :
(H_1) : Il existe une constante ω telle que pour tout $t\in[0,1]$ et $u_i,\ v_i\in\mathbb{R}\ (i=1,2)$, on a

$$|\varphi(t,u_1,u_2)-\varphi(t,v_1,v_2)|\leq\omega(|u_1-v_1|+|u_2-v_2|).$$

Si

$$\frac{\omega}{\Gamma\left(\alpha+\beta+1\right)}+\frac{|\lambda|}{\Gamma\left(\beta+1\right)}<\frac{1}{2}, \tag{2.5}$$

alors le problème fractionnaire (2.1) admet une solution unique.

Preuve 3.

Pour démontrer le théorème (7) il suffit de montrer que l'opérateur T admet un point fixe sur :

$$B_r=\left\{u\in W:\left\|u\right\|_W\leq r\right\},r\geq\frac{\frac{2N}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}+|\theta|}{1-2\left[\frac{\omega}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}+\frac{|\lambda|}{\Gamma(\beta+1)}\right]}.$$

On montre que $TB_r\subset B_r$. Soit $u\in B_r$, alors :

$$\begin{aligned}&\left|T\left(t,u\left(t\right),u\left(\eta t\right)\right)\right|\leq\left(\left|T\left(t,u\left(t\right),u\left(\eta t\right)\right)-T\left(t,0,0\right)\right|+\left|T\left(t,0,0\right)\right|\right)\\&\leq\omega(\left|u\left(t\right)\right|+\left|u\left(t\right)\right|)+N\leq\omega2\left\|u\right\|+N\\&\leq\omega2\left\|u\right\|_W+N\\&\leq\omega r+N.\end{aligned} \tag{2.6}$$

Alors,

$$\begin{aligned}\left|Tu\left(t\right)\right|&\leq\int_0^t\frac{\left(t-s\right)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma\left(\alpha+\beta\right)}\left|\varphi\left(s,u\left(s\right),u\left(\eta s\right)\right)\right|ds\\&+t^\beta\left(\left|\theta\right|+\int_0^1\frac{\left(1-s\right)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma\left(\alpha+\beta\right)}\left|\varphi\left(s,u\left(s\right),u\left(\eta s\right)\right)\right|ds\right)\\&+\left|\lambda\right|\int_0^t\frac{\left(t-s\right)^{\beta-1}}{\Gamma\left(\beta\right)}\left|u\left(s\right)\right|ds+t^\beta\left|\lambda\right|\int_0^1\frac{\left(1-s\right)^{\beta-1}}{\Gamma\left(\beta\right)}\left|u\left(s\right)\right|ds.\end{aligned} \tag{2.7}$$

En utilisant (2.6), on obtient

$$\begin{aligned}\left|Tu\left(t\right)\right|&\leq\int_0^t\frac{\left(t-s\right)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma\left(\alpha+\beta\right)}\left|\varphi\left(s,u\left(s\right),u\left(\eta s\right)\right)\right|ds\\&+t^\beta\left(\left|\theta\right|+\int_0^1\frac{\left(1-s\right)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma\left(\alpha+\beta\right)}\left|\varphi\left(s,u\left(s\right),u\left(\eta s\right)\right)\right|ds\right)\\&+\left|\lambda\right|\int_0^t\frac{\left(t-s\right)^{\beta-1}}{\Gamma\left(\beta\right)}u\left(s\right)ds+t^\beta\left|\lambda\right|\int_0^1\frac{\left(1-s\right)^{\beta-1}}{\Gamma\left(\beta\right)}\left|u\left(s\right)\right|ds\\&\leq2\left[\frac{\omega}{\Gamma\left(\alpha+\beta+1\right)}+\frac{|\lambda|}{\Gamma\left(\beta+1\right)}\right]r+\frac{2N}{\Gamma\left(\alpha+\beta+1\right)}+\left|\theta\right|.\end{aligned} \tag{2.8}$$

D'où,

$$\left\|Tu\right\|\leq2\left[\frac{\omega}{\Gamma\left(\alpha+\beta+1\right)}+\frac{|\lambda|}{\Gamma\left(\beta+1\right)}\right]r+\frac{2N}{\Gamma\left(\alpha+\beta+1\right)}+\left|\theta\right|, \tag{2.10}$$

Cela implique $TB_r\subset B_r$ donc T est une application de B_r dans B_r.

Maintenant, on montrant que T est contractante :

Soient $u, v \in B_r$, pour tout $t \in [0,1]$, on a :

$$
\begin{aligned}
&|\phi u(t) - \phi v(t)| \\
&\leq \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)} |\varphi(s, u(s), u(\eta s)) - \varphi(s, v(s), v(\eta s))| \, ds \\
&+ t^\beta \int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)} |\varphi(s, u(s), u(\eta s)) - \varphi(s, v(s), v(\eta s))| \, ds \\
&+ |\lambda| \int_0^t \frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} |u(s) - v(s)| \, ds + |\lambda| \, t^\beta \int_0^1 \frac{(1-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} |u(s) - v(s)| \, ds. \qquad (2.11)
\end{aligned}
$$

En utilisant (H_1), on obtient

$$
\begin{aligned}
&|\phi u(t) - \phi v(t)| \\
&\leq \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)} |\varphi(s, u(s), u(\eta s)) - \varphi(s, v(s), v(\eta s))| \, ds \\
&+ t^\beta \int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)} |\varphi(s, u(s), u(\eta s)) - \varphi(s, v(s), v(\eta s))| \, ds \\
&+ |\lambda| \int_0^t \frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} |u(s) - v(s)| \, ds + |\lambda| \, t^\beta \int_0^1 \frac{(1-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} |u(s) - v(s)| \, ds \\
&\leq \frac{2\omega}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} \|u - v\| + \frac{2|\lambda|}{\Gamma(\beta+1)} \|u - v\| \\
&= \left(\frac{\omega}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} + \frac{|\lambda|}{\Gamma(\beta+1)} \right) \|u - v\| = 2\Lambda_1 \|u - v\|. \qquad (2.12)
\end{aligned}
$$

Ce qui implique :

$$\|T(u) - T(v)\| \leq 2\Lambda_1 \|u - v\|. \qquad (2.13)$$

Comme Λ_1 alors T est contractant. On conclut par le théorème de point fixe de Banach l'opérateur T admet au moins un point fixe $u \in W$ qui est la solution du problème fractionnaire (2.1), ce qui achève la preuve..

Existence de la solution du problème (2.1)

Existence de la solution via le théorème du point fixe de Krasnosselski

Théoréme 8.

Soit $f : [0.1] \times R^2 \longrightarrow R$ une fonction continue,supposons que l'hypothèse suivants est satisfaite :

(H_2) *: Il existe une constant positives L telle que :*

$$\varphi(t, u, v) \leq L, \forall t \in [0.1], u, v \in R$$

Si

$$\frac{2\omega}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} + \frac{|\lambda|}{\Gamma(\beta+1)} < 1, \qquad (2.14)$$

alors le problème fractionnaire (2.1) admet au moins une seule solution .

Preuve 4.

Pour montrer l'existence de la solution du problème (2.1) ; il suffit de vérifier les hypothèses du théorème du point fixe de Krasnosselski.

Soit :

$$\sigma \geq \frac{2L + |\theta| T(\alpha+\beta+1) + T(\beta+2)}{T(\alpha+\beta+1) + T(\beta+2) - 2|\lambda|\sigma},$$

et on considère l'ensemble :

$$B_\sigma = \{u \in W, \|u\| \leq \sigma\}.$$

on définit aussi les opérateur S_1 et S_2 sur B_σ comme suit :

$$Tu(t) = (S_1 u(t), S_2 u(t)), t \in [0.1],$$

où

$$\begin{aligned} S_1 u(t) = &\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)} \varphi(s, u(s), u(\eta s))\, ds \\ &- \lambda \int_0^t \frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} u(s)\, ds. \end{aligned} \tag{2.15}$$

et

$$\begin{aligned} S_2 u(t) = & t^\beta \left(\theta + \int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)} \varphi(s, u(s), u(\eta s))\, ds \right) \\ & + t^\beta \lambda \int_0^1 \frac{(1-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} (u(s))\, ds. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Premièrement, on montre que si $u; v \in B_\sigma$; alors,$S_1 u(t) + S_2 v(t) \in B_\sigma$ En effet, pour tout $u; v \in B_\sigma$ et $t \in [0.1]$; on a :

$$\begin{aligned} |S_1 u + S_2 v| \leq & \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)} |\varphi(s, u(s), u(\eta s))| ds - |\lambda| \int_0^t \frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} |u(s)| ds \\ & + t^\beta \left(|\theta| + \int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)} |\varphi(s, v(s), v(\eta s))| ds \right) + t^\beta |\lambda| \int_0^1 \frac{(1-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} |v(s)|\, ds. \end{aligned} \tag{2.17}$$

En utilisant l'hypothèse (H_1) et(H_2) et en calculant les intégrales du second membre (2.17) ,on obtient :

$$\begin{aligned} |S_1 u + S_2 v| \leq & \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)} L\ ds - |\lambda| \int_0^t \frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \sigma ds \\ & + t^\beta \left(|\theta| + \int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)} L\ ds \right) + t^\beta |\lambda| \int_0^1 \frac{(1-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \sigma ds. \end{aligned}$$

par conséquent,

$$\begin{aligned}\|S_1u+S_2v\| \leq & \frac{2L}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}+\frac{|2\lambda\sigma|}{\Gamma(\beta+1)}+|\theta| \\ \leq & \sigma. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Donc

$$S_1u(t)+S_2v(t)\in B_\sigma. \tag{2.19}$$

Deuxièment, on montre que S_2 *est continu et compact.*

- *On montre que* R *est continu.*

  Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset W$ *une suite telle que* $u_n\to u$*, alors pour tout* $t\in[0,1]$*, on a :*

$$\begin{aligned}&|S_2u_n(t)-S_2u(t)| \\ &=\left|t^\beta\left(\theta+\int_0^1\frac{(1-s)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)}\varphi(s,u_n(t),u_n(\eta s))\,ds\right)+t^\beta\lambda\int_0^1\frac{(1-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}u_n(s)\,ds\right. \\ &\left.-t^\beta\left(\theta+\int_0^1\frac{(1-s)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)}\varphi(s,u(t),u(\eta s))\,ds\right)-t^\beta\lambda\int_0^1\frac{(1-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}u(s)\,ds\right|.\end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned}&|S_2u_n(t)-S_2u(t)| \\ &\leq t^\beta\int_0^1\frac{(1-s)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)}|\varphi(s,u_n(t),u_n(\eta s))-\varphi(s,u(t),u(\eta s))|\,ds \\ &+t^\beta|\lambda|\int_0^1\frac{(1-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}|u_n(s)-u(s)|\,ds.\end{aligned}$$

Par suite

$$\begin{aligned}&|S_2u_n(t)-S_2u(t)| \\ &\leq\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}|\varphi(s,u_n(t),u_n(\eta s))-\varphi(s,u(t),u(\eta s))| \\ &+\frac{|\lambda|}{\Gamma(\beta+1)}|u_n(s)-u(s)|.\end{aligned}$$

Puisque φ *est continue, alors*

$$\|S_2(u_n)-S_2(u)\|\to 0,\ \textit{quand}\ n\to 0,$$

ce qui prouve la continuité de S.

••) *: On montre que* $S_2(B_\sigma)$ *est borné. En effet, soit* $u\in(B_\sigma)$ *et* $t\in[0.1]$*alors*

$$\begin{aligned}|S_2u|=&|t^\beta\left(\theta+\int_0^1\frac{(1-s)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)}\varphi(s,u(s),u(\eta s))\,ds\right) \\ &+t^\beta\lambda\int_0^1\frac{(1-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}(u(s))\,ds.|\end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$
\begin{aligned}
|S_2u| \leq & t^\beta \left(|\theta| + \int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)} |\varphi(s,u(s),u(\eta s))\, ds| \right) \\
& + t^\beta |\lambda| \int_0^1 \frac{(1-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} (|u(s))|ds. \qquad (2.20)
\end{aligned}
$$

En utilisant l'hypothèse (H_2) *et en calculant les intégrales du second membre de* (2.20)*, on obtient :*

$$\|S_2u\| \leq \frac{L}{T(\alpha+\beta+1)} + \frac{|\lambda|\sigma}{T(\beta+1)}|\theta| = N. \qquad (2.22)$$

Donc

$$\|S_2u\| \leq N.$$

D'où S_2 *est bornée.*

●●● *: Maintenant, on montre que* $S_2(B_r)$ *est équicontinu. En effet, soient* $t_1; t_2 \in [0.1]$*, tel que* $t_2 < t_1$ *et* $u \in Br$*, alors par* $(H_1)et(H_2)$*, on*

$$
\begin{aligned}
\|S_2u(t_1) - S_2u(t_2)\| \leq & (t_1^\beta - t_2^\beta)|\theta| + \frac{(t_1^\beta - t_2^\beta) sup_{t\in[0.1]} v(t)}{T(\alpha+\beta)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha+\beta-1} ds \\
& + \frac{(t_1^\beta - t_2^\beta)|\lambda|}{T(\beta)} \int_0^1 (1-s)^{\beta-1} \|u(s)\| ds. \qquad (2.23)
\end{aligned}
$$

De (2.23),on obtient :

$$\|S_2u(t_1) - S_2u(t_2)\| \leq \left[|\theta| + \frac{V}{T(\alpha+\beta+1)} + \frac{|\lambda| r}{T(\beta+1)} \right] (t_1^\beta - t_2^\beta). \qquad (2.24)$$

Comme$t_1 \longrightarrow t_2$*le second nombre de (2.24)tend vers zéro.Par conséquent* $S_2(B_r)$ *est équicontinu. D'après le théorème d'Ascoli-Arzela,* S_2 *est compact.*

Finalement ,on prouve que S_2 *est une contraction.En effet pour* $u \in X$ *et* $t \in [0.1]$*,on a :*

$$
\begin{aligned}
& \|S_1(u) - S_1(v)\| \\
& \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^t (t-s)^{\alpha+\beta-1} \|\varphi(s,u(s),u(\eta s)) - \varphi(s,v(s),v(\eta s))\| ds \\
& + \frac{|\lambda|}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} \|u(s) - v(s)\| ds. \qquad (2.25)
\end{aligned}
$$

En appliquant l'hypothèse (H_1)*, on aboutit à :*

$$
\begin{aligned}
& \|S_1(u) - S_1(v)\| \\
& \leq \frac{w\|u-v\|}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^t (t-s)^{\alpha+\beta-1} ds + \frac{|\lambda|\|u-v\|}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} ds. \qquad (2.26)
\end{aligned}
$$

En calculant l'intégrale du second membre de (2.26), on obtient :

$$\|S_1(u) - S_1(v)\| \leq \frac{w\|u-v\|}{\Gamma(\alpha+\beta)} + \frac{|\lambda|\|u-v\|}{\Gamma(\beta)}. \tag{2.27}$$

et donc,

$$\|S_1(u) - S_1(v)\| \leq \left[\frac{w}{\Gamma(\alpha+\beta)} + \frac{|\lambda|}{\Gamma(\beta)}\right]\|u-v\|. \tag{2.28}$$

En utilisant la condition (2 :14), on conclut que S_1 est une contraction.

Par conséquence du théorème du point fixe de Krasnosselski, on peut conclure que a un point fixe qui est une solution du problème(2.1).

Existence de la solution via le théorème du point fixe de Schaefer

Dans la présente section l'étudie de l'existence et l'unicité de la solution du du problème (2.1) est base sur le théorème de point fixe de Schaefer.

Théoréme 9.
Soit $\varphi : [0,1] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Supposons que l'hypothèse (H_2) est satisfaite.
Si

$$\frac{|\lambda|}{\Gamma(\beta+1)} < \frac{1}{2},$$

alors le problème(2.1) admet au moins une solution.

Preuve 5. *On va utiliser le théorème de Schaefer pour montrer que T admet des points fixes qui sont des solutions de problème(2.1). La preuve sera donnée en plusieurs étapes :*

***Étape 1** : T est un opérateur continu sur W (φ : est continue).*

***Étape 2** : L'image d'un ensemble borné est un ensemble borné.*
En effet, il su t démontrer que pour tout $r > 0$; il existe une constante positive M telle que pour chaque

$$u \in B_r = \{u \in W : \|u\| \leq r\},$$

on a :

$$\begin{aligned}
|Tu(t)| \leq & \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)} |\varphi(s,u(s),u(\eta s))|\, ds \\
& + |\lambda| \int_0^t \frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} u(s)\, ds \\
& + t^\beta \left(|\theta| + \int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)} |\varphi(s,u(s),u(\eta s))|\, ds\right) \\
& + t^\beta |\lambda| \int_0^1 \frac{(1-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} |u(s)|\, ds.
\end{aligned} \tag{2.29}$$

D'après l'hypothèse (H_3) *; on obtient l'estimation suivante :*

$$|Tu(t)| \leq \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)} L ds + |\lambda| \int_0^t \frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} u(s)\, ds$$
$$+ t^\beta \left(|\theta| + \int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)} L ds \right) + t^\beta |\lambda| \int_0^1 \frac{(1-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} |u(s)|\, ds. \tag{2.30}$$

En calculant les intégrales du second membre, on aboutit a :

$$\|T(u)\| \leq \frac{2L}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} + \frac{2|\lambda| r}{\Gamma(\beta+1)} + |\theta| = M.$$

Donc

$$\|T(u)\| \leq M.$$

Étape 3 *: L'image d'un ensemble borné est un ensemble équicontinu dans* W.
Soient $t_1, t_2 \in [0,1]$, $t_1 < t_2$. *Si* $u \in B_r$, *alors*

$$\begin{aligned}
|Tu(t_2) - Tu(t_1)| = \Bigg| & \int_0^{t_2} \frac{(t_2-s)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)} \varphi(s, u(s), u(\eta s))\, ds \\
& + |\lambda| \int_0^{t_2} \frac{(t_2-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} u(s)\, ds \\
& + t_2^\beta \left(|\theta| + \int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)} \varphi(s, u(s), u(\eta s))\, ds \right) \\
& + t_2^\beta |\lambda| \int_0^1 \frac{(1-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} u(s)\, ds. \\
& - \int_0^{t_2} \frac{(t_2-s)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)} \varphi(s, u(s), u(\eta s))\, ds \\
& - |\lambda| \int_0^{t_1} \frac{(t_1-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} u(s)\, ds \\
& - t_1^\beta \left(|\theta| + \int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)} \varphi(s, u(s), u(\eta s))\, ds \right) \\
& - t_1^\beta |\lambda| \int_0^1 \frac{(1-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} u(s)\, ds \Bigg|.
\end{aligned} \tag{2.31}$$

En utilisant(H_2), *on obtient :*

$$\begin{aligned}
& |Tu(t_2) - Tu(t_1)| \\
& \leq L \int_0^{t_1} \frac{(t_2-s)^{\alpha+\beta-1} - (t_2-s)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)} ds + L \int_0^{t_1} \frac{(t_2-s)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)} ds \\
& + |\lambda| r \int_0^{t_1} \frac{(t_2-s)^{\beta-1} - (t_2-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} ds + |\lambda| r \int_{t_1}^{t_2} \frac{(t_2-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} ds \\
& + \left(t_2^\beta - t_1^\beta\right) L \left(|\theta| + \int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)} ds \right) \\
& + \left(t_2^\beta - t_1^\beta\right) |\lambda| r \int_0^1 \frac{(1-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} ds.
\end{aligned} \tag{2.32}$$

Ce qui implique

$$\begin{aligned}
&|Tu(t_2) - Tu(t_1)| \\
&\leq L\frac{(t_2-t_1)^{\alpha+\beta-1} + {t_2}^{\alpha+\beta-1} - {t_1}^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} + |\lambda| r \frac{(t_2-t_1)^{\beta-1} + {t_2}^{\beta-1} - {t_1}^{\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} \\
&+ \left(t_2^\beta - t_1^\beta\right)\left(|\theta| + \frac{L}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} + \frac{|\lambda| r}{\Gamma(\beta+1)}\right). \qquad (2.33)
\end{aligned}$$

Lorsque $t_1 \to t_2$, le second membre de l'inégalité précédent tend vers zéro. Comme une conséquence des étapes 1, 2 et 3 avec le théorème de Arzela -Ascoli, on peut conclure que T est continu et complètement continu.

Étape 4 *: Finalement, on montre que l'ensemble Ω défini par :*

$$\Omega = \{u \in W : u = \rho Tu(t),\ 0 < \rho < 1\},$$

est borné. En effet, soit $u \in \Omega$, alors

$$\begin{aligned}
u &= \rho Tu(t) \\
&= \rho \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)} \varphi(s, u(t), u(\eta s))\, ds - \rho\lambda \int_0^t \frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} u(s)\, ds \\
&+ \rho t^\beta \left(\theta + \int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)} \varphi(s, u(t), u(\eta s))\, ds\right) + \rho t^\beta \lambda \int_0^1 \frac{(1-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} u(s)\, ds. \qquad (2.34)
\end{aligned}$$

Alors pour tout $t \in [0,1]$, on a :

$$\begin{aligned}
\|u\| &\leq \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)} |\varphi(s, u(t), u(\eta s))|\, ds + |\lambda| \int_0^t \frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} |u(s)|\, ds \\
&+ t^\beta \left(|\theta| + \int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)} |\varphi(s, u(t), u(\eta s))|\, ds\right) + t^\beta |\lambda| \int_0^1 \frac{(1-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} |u(s)|\, ds. \qquad (2.35)
\end{aligned}$$

Grèce à (H_3) ; on a :

$$\begin{aligned}
\|u\| &\leq \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)} L ds + |\lambda| \int_0^t \frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \|u\|\, ds \\
&+ t^\beta \left(|\theta| + \int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)} L ds\right) + t^\beta |\lambda| \int_0^1 \frac{(1-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \|u\|\, ds. \qquad (2.36)
\end{aligned}$$

En calculant les intégrales du seconde membre de (2.36), on trouve :

$$\|u\| \leq \frac{2L}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} + |\theta| + \frac{2|\lambda|}{\Gamma(\beta+1)} \|u\|. \qquad (2.37)$$

De (2.36), il vient

$$\|u\| \left(1 - \frac{2|\lambda|}{\Gamma(\beta+1)}\right) \leq \frac{2L}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} + |\theta|.$$

D'où

$$\|u\| \leq \frac{\frac{2L}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} + |\theta|}{\left(1 - \frac{2|\lambda|}{\Gamma(\beta+1)}\right)} = N. \tag{2,38}$$

Cela montre que l'ensemble Ω est borné. En conséquence du théorème de point fixe de Schaefer, on en déduit que T a des points fixes qui sont des solutions du problème (2.1).

2.4 Stabilité de la solution du problème (2.1.1)

Dans la présente section, on va définir et étudies la stabilité au sens d'Ulam Hyers de la solution du problème(2.1.1).

$$\begin{cases} D^{\alpha}\left(D^{\beta}+\lambda\right) u\left(t\right)=\varphi\left(t, u\left(t\right), u\left(\eta t\right),\right) t\in\left[0,1\right], \\ u\left(0\right)=0, \quad u\left(1\right)=\theta,\ \theta>0, \\ \lambda\in\mathbb{R},\ 0<\alpha,\beta\leq 1,\ 0<\eta<1, \end{cases} \tag{2.1.1}$$

Stabilité au sens de Ulam-Hyer

Définition 19.

On dit que le problème (2.1.1) est stable au sens d'Ulam-Hyers, s'il existe un nombre réel $C_{\varphi}>0$ tel que pour toute $\varepsilon>0$, et pour toute solution $v\in W$ de l'inégalité suivante :

$$\left|\left(D^{\alpha}\right)\left(D^{\beta}+\lambda\right) v\left(t\right)\right)-\varphi\left(t, v\left(t\right), v\left(\eta t\right)\right)\right|\leq\varepsilon, t\in\ \left[0,1\right], \tag{2.1.2}$$

il existe une solution $u\in W$ du problème (2.1.1) satisfait :

$$\left(D^{\alpha}\right)\left(D^{\beta}+\lambda\right) u\left(t\right)\right)-\varphi\left(t, u\left(t\right), u\left(\eta t\right)\right)=\ 0,\ t\ \in\ \left[0,1\right],$$

$$u\left(0\right)=0, \quad u\left(1\right)=\theta,\ \theta>0,$$

telle que :

$$|v(t)-u(t)|_{w}\leqslant\ C_{\varphi}\varepsilon, \quad t\in\ \left[0,1\right], \tag{2.1.3}$$

2.5 Stabilité au sens de Ulam-Hyers généralisé

Définition 20.

On dit que le problème (2.1.1) est stable au sens d'Ulam-Hyers généralisé s'il existe une fonction $\psi\in C\left(\mathbb{R}^{+};\mathbb{R}^{+}\right)$tel que quelque soit $\varepsilon>0$ et pour toute solution $v\in W$de l'inégalité suivante :

$$\left|\left(D^{\alpha}\right)\left(D^{\beta}+\lambda\right) v\left(t\right)\right)-\varphi\left(t, v\left(t\right), v\left(\eta t\right)\right)\right|\leq\varepsilon, t\ \in\ \left[0,1\right], \tag{2.1.4}$$

il existe une solution $u\in w$ qui satisfait :

$$\left(D^{\alpha}\right)\left(D^{\beta}+\lambda\right) u\left(t\right)\right)-\varphi\left(t, u\left(t\right), u\left(\eta t\right)\right)=\ 0\ t\ \in\ \left[0,1\right],$$

$$u\left(0\right)=0, \quad u\left(1\right)=\theta,\theta>0,$$

telle que :

$$|v(t)-u(t)|_{w}\leqslant\psi(\varepsilon), t\ \in\ \left[0,1\right], \tag{2.1.5}$$

Remarque 2.

Une fonction $u \in w$ est une solution de l'inégalité(2.1.1) si et seulement si il existe une fonction $S \in C([0,1];\mathbb{R})$ telle que :

(a) $|S(t)| \leq \varepsilon, \forall t \in [0,1]$.

(b) $D^{\alpha}(D^{\beta}+\lambda)u(t) = \varphi\left(t, u\left(t\right), u\left(\eta t\right)\right) + S(t)$.

Remarque 3.

Il est clair que : Définition (2.1.1) $\Rightarrow$ Définition (2.1.2).

Etude de la stabilité

Théoréme 10.

Suppose que $\varphi : [0,1] \times R \times R \longrightarrow R$ est une fonction continue satisfaite (H_1) :

Si,

$$\frac{\omega}{\Gamma\left(\alpha+\beta+1\right)} < \frac{1}{2} - \frac{|\lambda|}{\Gamma\left(\beta+1\right)}, \tag{2.1.6}$$

sont vérifies, alors (2.1.1) est stable au sens de Ulam-Hyers et par conséquent, est stable Ulam-Hyers généralisé.

Preuve 6.

Soit $v \in W$ qui satisfait l'inégalité (2.1.4) :

$$\left|\left(D^{\alpha}\right)\left(D^{\beta}+\lambda\right) v\left(t\right)\right) - \varphi\left(t, v\left(t\right), v\left(\eta t\right)\right)\right| \leq \varepsilon \text{ pourtout } , t \in \ [0,1], \tag{2.1.7}$$

Notons par $u \in w$ la solution qui satisfait le problème :

$$\begin{cases} D^{\alpha}\left(D^{\beta}+\lambda\right) u\left(t\right) = \varphi\left(t, u\left(t\right), u\left(\eta t\right), \right) t \in [0,1], \\ u\left(0\right) = v(0), \quad u\left(1\right) = \theta, \ \theta > 0, \\ \lambda \in \mathbb{R}, \ 0 < \alpha, \beta \leq 1, \ 0 < \eta < 1. \end{cases} \tag{2.1.8}$$

D'après la proposition (7)

$$u\left(t\right) = \int_0^t \frac{\left(t-s\right)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma\left(\alpha+\beta\right)} \varphi\left(s, u\left(t\right), u\left(\eta s\right)\right) ds$$

$$+ t^{\beta}\left(\theta + \int_0^1 \frac{\left(1-s\right)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma\left(\alpha+\beta\right)} \varphi\left(s, u\left(t\right), u\left(\eta s\right)\right) ds\right)$$

$$- \lambda \int_0^t \frac{\left(t-s\right)^{\beta-1}}{\Gamma\left(\beta\right)} u\left(s\right) ds + t^{\beta}\lambda \int_0^1 \frac{\left(1-s\right)^{\beta-1}}{\Gamma\left(\beta\right)} u\left(s\right) ds.$$

Donc,

$$u(t) = J^{\alpha+\beta}\delta(t) - \lambda J^{\beta} u(t) + \frac{c_0}{\Gamma(\beta+1)} t^{\beta} + c_1. \tag{2.1.9}$$

On intégré l'inégalité (2.1.4), on trouve :

$$\begin{aligned} |v(t) - J^{\alpha+\beta}\delta(t) - \lambda J^{\beta} u(t) + \frac{b_0}{\Gamma(\beta+1)} t^{\beta} - b_1| &\leq \frac{t^{\beta+\alpha}\varepsilon}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}. \end{aligned} \tag{2.1.10}$$

d'autre part, si $u(0) = v(0)$ et $u(1) = v(1)$, on trouve $c_0 = b_0$ et $c_1 = b_1$:
pour tout$t \in [0.1]$, on a :

$$\begin{aligned} v(t) - u(t) =& v(t) - J^{\alpha+\beta}\delta_u(t) - \lambda J^{\beta} u(t) - \frac{b_0}{\Gamma(\beta+1)} t^{\beta} - b_1 \\ &+ J^{\alpha+\beta}(\delta_v(t) - \delta_u(t)) - \lambda J^{\beta}(v(t) - u(t)). \end{aligned} \tag{2.1.11}$$

avec,

$$\delta_u(t, u(t), u(\eta t)) \text{ et } \delta_v(t, v(t), v(\eta t)).$$

et

$$\begin{aligned} J^{\alpha+\beta}(\delta_v(t) - \delta_u(t)) &= J^{\alpha+\beta}\left[\varphi_v(t, v(t), v(\eta t)) - \varphi_u(t, u(t), u(\eta t))\right] \\ &= \frac{1}{T(\alpha+\beta)} \int_0^1 (1-s)^{(\alpha+\beta-1)} \left[\varphi(t, v(t), v(\eta t)) - \varphi(t, u(t), u(\eta t))\right]. \end{aligned}$$

En utilisant les l'hypothèse (H_1), on obtient :

$$\left|J^{\alpha+\beta}(\delta_v(t) - \delta_u(t))\right| \leq \frac{2}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^t (t-s)^{\alpha+\beta-1} \|u(s) - v(s)\| \, ds.$$

Ce qui implique que

$$\begin{aligned} |v(t) - u(t)| \leq& \left| v(t) - J^{\alpha+\beta}\delta_u(t) - \lambda J^{\beta} u(t) - \frac{b_0}{\Gamma(\beta+1)} t^{\beta} - b_1 \right| \\ &+ \frac{2}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^t (t-s)^{\alpha+\beta-1} \|u(s) - v(s)\| \, ds \\ &+ \frac{|\lambda|}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta} \|u(s) - v(s)\| \, ds. \end{aligned}$$

Ce qui donne

$$|v(t) - u(t)| \leq \frac{\varepsilon}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} + \left[\frac{2\omega}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} + \frac{|\lambda|}{\Gamma(\beta+1)}\right] \|v(s) - u(s)\|.$$

Donc

$$\|v(s) - u(s)\|_W \left(1 - \left[\frac{2\omega}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} + \frac{|\lambda|}{\Gamma(\beta+1)}\right]\right) \leq \frac{\varepsilon}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}.$$

Alors, pour tout $t \in [0, 1]$

$$|u(t) - v(t)| \leq \frac{\varepsilon}{\Gamma(\alpha+\beta+1)\left(1 - \left[\frac{2\omega}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} + \frac{|\lambda|}{\Gamma(\beta+1)}\right]\right)} = C_{\varphi}\varepsilon. \tag{2.1.12}$$

D'où le problème(2.1.1) est stable au sens de Ulam-Hyers.

Si on pose $\lambda(\varepsilon) = \delta\varepsilon,\ \varphi(0) = 0$, alors on peut dire que (2.1.1) est stable au sens de Ulam-Hyers généralisé.

2.6 Exemple

Soit le problème suivant :

$$\begin{cases} D^{\frac{1}{2}}\left(D^{\frac{3}{4}}+\frac{1}{15}\right)=\frac{1}{5}+\frac{1}{11}u\left(t\right)+\frac{1}{11}u\left(\frac{1}{3}t\right), t\in\left[0,1\right], \\ \\ u\left(0\right)=0, \qquad u\left(1\right)=\frac{\sqrt{5}}{3}. \end{cases}$$

Pour cet exemple, on a : $\alpha=\frac{1}{2},\beta=\frac{3}{4},\theta=\frac{\sqrt{5}}{3}$ et

$$f\left(t,u,v\right)=\frac{1}{5}+\frac{1}{11}u\left(t\right)+\frac{1}{11}u\left(\frac{1}{3}t\right).$$

Soit $t\in[0,1]$ et $\left(u,v\right),\left(u_1,v_1\right)\in\mathbb{R}^2$. Alors

$$\left|f\left(t,u,v\right)-f\left(t,u_1,v_1\right)\right|\leq\frac{1}{10}\left(\left|u-v\right|+\left|u_1-v_1\right|\right).$$

Par conséquent, l'hypothèse(H_1) est vérifiée avec $\omega=\frac{1}{10}$ et, on peut avoir

$$\frac{\omega}{\Gamma\left(\alpha+\beta+1\right)}+\frac{|\lambda|}{\Gamma\left(\beta+1\right)}=0.160\,80<\frac{1}{2},$$

D'après le Théorème 2.1, le problème (2.26) admet une solution unique sur $[0,1$. On a aussi :

$$\frac{\omega}{\Gamma\left(\alpha+\beta+1\right)}=8.826\,1\times10^{-2}<\frac{1}{2}-\frac{|\lambda|}{2\Gamma(\beta+1)}=0.463\,73.$$

Donc, la condition (2.24) est satisfaite, d'où le problème (2.28) est stable au sens de Ulam-Hyers.

Chapitre 3

Existence et Unicité de solution des équations différentielles fractionnaires du pantographe avec dérivée au sens de Caputo-Hadamard

Ce chapitre, est consacré à l'étude de l'existence, l'unicité et la stabilité d'Ulam-Hyers de la solution d'une équation différentielle d'ordre fractionnaires du pantographe avec une seul dérivée de Caputo-Hadamard [12, 1, 9, 10]. En effet, après avoir donné la solution du problème fractionnaire, on utilisera les théorèmes de point fixe du Banach, l'alternative de Leray-Schauder pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution du problème posé.
On considère alors :

$$\begin{cases} {}_{H}^{C}D^{\alpha}u(t) = \varphi(t, u(t), u(\lambda t)),\ t \in [1, T],\ 0 < \alpha \leq 1,\ 0 < \lambda < 1, \\ \\ u(1) = u_1 - \theta(u),\ u_1 \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{3.1}$$

où ${}_{H}^{C}D^{\alpha}$ est la dérivée fractionnaire de type caputo-Hadamard d'ordre α.

avec $\varphi : [1, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \theta : C([1, T], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ des fonctions continues .

3.1 Lemme auxiliaire et Hypothèses

Lemme 8.
soient $u \in AC_{\delta}^{n}([a, b], \mathbb{R})$. Alors :

$$_{H}I^{\alpha}\left({}_{H}^{C}D^{\alpha}u\right)(t) = u(t) - \sum_{i=0}^{n-1} c_i(\log t)^i, c_i \in \mathbb{R}. \tag{3.2}$$

Avec $AC_{\delta}^{n}([a, b], \mathbb{R}) = \left\{h : [a, b] \to \mathbb{R} : \delta^{n-1}h \in AC([a, b], \mathbb{R})\right\}$.

On note $X = C([1, T], \mathbb{R})$ l'espace de Banach de toutes les fonctions continues de $[1, T]$ à $\mathbb{R}$ doté de la norme définie par :

$$\|u\| = \sup\{|u(t)|, t \in [1, T]\}.$$

Lemme 9.

Soit : $h \in C^m([0,T,R], \ \forall\alpha \in 0,$
on a :

$$ {}_H I^\alpha \left({}_H^C D^\alpha h\big(t)\right) = h(t) + c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + ... + c_{n-1} t^{n-1}. $$

où

$$ c_i \in R, i = 0, ..., n-1. \ et \ n = [\alpha] + 1. $$

Lemme 10.

Supposons que $g(t) \in (C[1,T,R])$, et on considérer le problème fractionnaire :

$$ {}_H^C D^\alpha u(t) = g(t)), t \in [1,T], 0 < \alpha < 1. \tag{3.3} $$

Avec les condition :

$$ u(1) = u_1 - \theta(u). \tag{3.4} $$

Alors, la solution de(3.1)est donnée par :

$$ u(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t \left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} g(s)\frac{ds}{s} + \theta(u) - u_1. \tag{3.5} $$

Preuve 7.

On a :

$$ {}_H^C D^\alpha u(t) = \varphi(t, u(t), u(\lambda t)). $$

On pose :

$$ \varphi(t, u(t), u(\lambda t)) = g(t). $$

Alors :

$$ {}_H^C D^\alpha u(t) = g(t). $$

$$ {}_H I^\alpha \left({}_H^C D^\alpha u\big(t)\right) = {}_H I^\alpha(g(t)). $$

On utilisant le lemme (8),on obtiens :

$$ {}_H I^\alpha \left({}_H^C D^\alpha u\big(t)\right) = u(t) + c_0. $$

En remplace en (3.5)

$$ u(t) + c_0 = {}_H I^\alpha(g(t)). $$

Donc :

$$u(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} g(s)\frac{ds}{s} - c_0, \;\; ou \; c_0 \in R. \tag{3.6}$$

Maintenant en recherche le constante "c_0".

D'après le condition sur (3,4),on obtiens :

$$u(1) = \theta(u) - u_1,$$

et u(1) d'après (3.6) on a :

$$u(1) = -c_0.$$

Donc :

$$c_0 = \theta(u) - u_1.$$

remplacer la valeur de c_0 dans (3,6) donne la solution(3,4)

On désigné par $u = C([1,T], R)$ l'espace de Banach de toutes les fonctions continues de [1, T] dans R associe par la norme définie par $u = sup|x(t)|, \;\; t \in [1,T]$.

On définit l'opérateur $O : X \longrightarrow X$ par :

$$Ou(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} \varphi(s, u(s), u(\lambda(s)))\frac{ds}{s} + \theta(u) - u_1. \tag{3.7}$$

Hypothèse

Pour Établir l'existence et l'unicité de la solution du problème (3.1), on considère les hypothèses suivantes :

(H_1) : il existe une constante $\omega > 0$ telle que :

$$|\varphi(t, u_1, u_2) - \varphi(t, v_1, v_2)| \leq \omega\left(|u_1 - v_1| + |u_2 - v_2|\right), t \in [1,T], u_i, v_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2.$$

(H_2) : il existe une constante $\varpi > 0$ telle que :

$$|\theta(u) - \theta(v)| \leq \varpi|u - v|, u, v \in C([1,T], \mathbb{R}).$$

(H_3) : il existe des constantes $w_i \geq 0 (i = 1, 2)$ *et* $w_0 > 0$ *telleque* : pour tout $u, v \in R$ on a :

$$|\varphi(t, u, v)| \leq w_0 + w_1|u| + w_2|v|.$$

(H_4) : *ilexiste* $M_\varphi \in R$ *telque* :

$$|\theta(u)| \leqslant M\|u\|, \ \forall u \in C([1.T], R)$$

.

3.2 Existence et Unicité

Unicité de solution

On va maintenant montre que O possède un point fixe unique. Pour cela, on va prouver que O est un opérateur contractant.

Théoréme 11.

Soit $\varphi : [1,T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *et* $\theta : C([1,T],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *deux fonctions continues. Supposons que les conditions* (H_1) *et* (H_2) *sont vérifiées.*
Si

$$2\omega(\log t)^\alpha < (1-\varpi)\Gamma(\alpha+1), \tag{3.8}$$

alors, le problème(3.1) *admet une solution unique sur* $[1,T]$.

Preuve 8.

On définis $M = \sup_{t\in[0,T]} |\varphi(t,0,0)|$ *et* $N = \|\theta(0)\|$. *On suppose que :*

$$r \geq \frac{M+N+|u_1|}{1-(2\omega+\varpi)}.$$

On montre que : $OB_r \subset B_r$, *où*

$$B_r = \{u \in X : \|u\| \leq r\},$$

Soit $x \in B_r$, *on a :*

$$\begin{aligned} |\varphi(t,u(t),u(\lambda t))| &= |\varphi(t,u(t),u(\lambda t) + \varphi(s,0,0) - \varphi(s,0,0)|. \\ &\leq |\varphi(t,u(t),u(\lambda t)) - \varphi(s,0,0)| + |\varphi(s,0,0)|. \\ &\leq 2\omega\|u\| + M. \\ &\leq 2\omega r + M. \end{aligned} \tag{3.9}$$

et

$$\begin{aligned} |\theta(u)| &= |\theta(u) - \theta(0) + \theta(0)|. \\ &\leq |\theta(u) - \theta(0)| + |\theta(0)|. \\ &\leq \varpi\|u\| + \|\theta(0)\|. \\ &\leq \varpi r + N. \end{aligned} \tag{3.10}$$

En utilisant (3.9), on trouve :

$$\begin{aligned}|Ou(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} |\varphi(s,u(s),u(\lambda s))| \frac{ds}{s} + |\theta(u)| + |u_1| \\ &\leq 2\omega r + M + \varpi r + N + |u_1| \\ &\leq (2\omega + \varpi) r + M + N + |u_1| \\ &\leq r.\end{aligned} \tag{3.11}$$

Ce qui implique $OB_r \subset B_r$.

Maintenant, pour $u, v \in B_r$ et pour toute $t \in J$,on trouve :

$$\begin{aligned}&|Ou(t) - Ov(t)| \\ \leq &\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} |\varphi(s,u(s),u(\lambda s)) - \varphi(s,v(s),v(\lambda s))| \frac{ds}{s} + |\theta(u) - \theta(v)| \\ \leq &\left(2\omega \frac{(\log t)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + \varpi\right) \|u - v\|.\end{aligned} \tag{3.12}$$

Alors,

$$\|Ou - Ov\| \leq \left(2\omega \frac{(\log T)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + \varpi\right) \|u - v\|. \tag{3.13}$$

Il s'ensuit de la condition (H_1), que l'opérateur O est contractant. Donc O possède un point fixe unique qui est une solution unique du problème (3.1) .

Existence de solution

Théoréme 12.

Soit $\varphi : [1,T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\theta : C([1,T],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. Supposons que les conditions (H_3) et (H_4) sont vérifiées.Si :

$$2w_0(logt)^{\alpha} < (1 - \varpi)\Gamma(\alpha + 1).$$

Alors le problème (3.1) a au moins un solution dans R.

Preuve 9.

Tout d'abord, on montre que l'opérateur $O : X \longrightarrow X$ est complètement continus. L'opérateur O est continue puisque les fonctions φ et θ, sont continue.

Soit $\Theta \subset X$ est borné, alors il existent deux constantes positives L, N telle que :

$$|\varphi(t,u(t),u(\lambda t))| \leq L \text{ et } |\theta u| \leq N. \quad \forall\ u \in \Theta.$$

Alors pour toute $u \in \Theta$, On a :

$$|u(t)| = \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} g(s) \frac{ds}{s} + \theta(u) + u_1 \right|.$$

$$\|Ou\| \leq \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} ds + |\theta(u)| + |u_1|.$$

Par conséquent, on obtient :

$$\|Ou\| \leq \frac{L\ log(T)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + N + |u_1|.$$

D'où l'opérateur est uniformément borné.
Ensuite, on montre que O est equicontinu.

Soit $t_1, t_2 \in [1, T]$ avec $1 \leq t_1 < t_2 \leq T$.
Ensuite ona :

$$|Ou(t_2) - Ou(t_1)| \leq \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t [(\log \frac{t_2}{s})^{\alpha-1} - (\log \frac{t_1}{s})^{\alpha+1}] \frac{ds}{s}$$

$$\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha-1)} [(\log t_2)^{\alpha} - (\log t_1)^{\alpha}].$$

Lorsque $t_2 - t_1 \to 0$, le coté droite de l'inégalité ci dessus tend a zero indépendamment de u.

Par conséquent, par le théorème de Arzelá-Ascoli l'opérateur O est complètement continuous.
Enfin, on vérifiera que l'ensemble $\Omega = \{u \in X : u = \sigma O(u), 0 \leq \sigma \leq 1\}$ est borné.

Soit $u \in \Omega$,alors $u = \sigma O(u)$. Pour tout $t \in [1, T]$, ona :

$$u(t) = \sigma Ou(t).$$

Alors

$$u(t) \leq \sigma(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} |\varphi(s, u(s), u(\lambda s))| \frac{ds}{s} + |\theta(u)| + |u_1|).$$

D'après (H_3), on peut écrire :

$$u(t) \leq \frac{\log(t)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} (w_0 + w_1\|u\|) + |\theta(u)| + |u_1|.$$

Par conséquent,on trouve :

$$\|u\| \leq \frac{\log(t)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} w_0 + \frac{\log(t)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha-1)} w_1\|u\| + \|\theta(u)\| + |u_1|$$

.

$$\|u\| - \frac{\log(t)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} w_1\|u\| \leq \frac{\log(t)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} w_0 + \|\theta(u)\| + |u_1|.$$

Et donc

$$\|u\| \leq \frac{\frac{\log(t)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} w_0 + \|\theta(u)\| + |u_1|}{1 - \frac{\log(t)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} w_1}.$$

Ce qui montre que Ω est borné.

Donc d'après le théorème de Leray-Schauder l'opérateur O a au mois un point fixe .

3.3 Étude de Stabilité

Dans ce section, on va définir et étudier la stabilité de Ulam Hyers, la stabilité de Ulam Hyers généralisé et la stabilité de Ulam-Hyers-Rassias, stabilité de Ulam-Hyers-Rassias généralisé du problème fractionnaire du pantographe avec un seul dérivés de Caputo- Hadamard(3.1).

Dans ce qui suit, on présente quatre types de stabilité d'Ulam pour le problème fractionnaire.Soit σ un nombre réel positif et la fonction $h \in X$, on considère ce qui suit inégalités différentielles fractionnaires suivante :

$$\left|{}_{H}^{C}D^{\alpha}v(t) - \varphi(t, v(t), v(\lambda t))\right| \leq \sigma, t \in [1, T] \tag{3.14}$$

$$\left|{}_{H}^{C}D^{\alpha}y(t) - \varphi(t, y(t), y(\lambda t))\right| \leq h(t), t \in [1, T] \tag{3.15}$$

et

$$\left|{}_{H}^{C}D^{\alpha}y(t) - \varphi(t, y(t), y(\lambda t))\right| \leq \sigma h(t), t \in [1, T]. \tag{3.16}$$

Stabilité au Sens de Ulma-Hyers

Définition 21.

On dit que le problème fractionnaire(3.1) est stable au sens d'Ulam- Hyers, s'il existe une constante $\tau_{\varphi} > 0$ tel que pour tout $\sigma > 0$ et pour tout solution $v \in X$ du l'inégalité (3.14), il existe une solution $u \in X$ du problème fractionnaires (3.1), avec :

$$|v(t) - u(t)| \leq \tau_{\varphi}\sigma, t \in [1, T].$$

Définition 22.

On dit que le problème fractionnaire(3.1) est stable au sens d'Ulam- Hyers-généralisé s'il existe $\psi_{\varphi} \in C(\mathbb{R}_{+}, \mathbb{R}_{+}), \psi_{\varphi}(0) = 0$, tel que pour tout solution $v \in X$ du l'inégalité (3.14), il existe une solution $u \in X$ du fractionnaires(3.1), avec :

$$|v(t) - u(t)| \leq \psi_{\varphi}\sigma, t \in [1, T].$$

Remarque 4.

Une fonction $v \in X$ est solution de l'inégalité (3.14) si et seulement s'il existe une fonction $f : [1, T] \to \mathbb{R}$ telle que :

(1) : $|f(t)| \leq \sigma, t \in [1, T]$.

(2) : ${}_{H}^{C}D^{\alpha}v(t) = \varphi(t, v(t), v(\lambda t)) + f(t), t \in [1, T], 0 < \lambda < 1$.

Théoréme 13.

Suppose que $\varphi : [1, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue satisfaisant (H_1).
Si

$$2\omega(\log T)^{\alpha} < \Gamma(\alpha + 1). \tag{3.17}$$

Alors le problème fractionnaires (3.1) est stable d'Ulam-Hyers et par conséquent, stable d'Ulam-Hyers généralisé.

Preuve 10.
Soit $v \in X$ soit une solution de l'inégalité (3.14) et notons par $u \in X$ l'unique solution du ce problème :

$$\begin{cases} {}_H^C D^{\alpha} u(t) = \varphi(t, u(t), u(\lambda t)), t \in J, 0 < \alpha < 1, 0 < \lambda < 1. \\ u(1) = v(1). \end{cases} \tag{3.18}$$

En utilisant Lemme (7), on a :

$$u(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s} \right)^{\alpha - 1} g(s) \frac{ds}{s} + c_0 = {}_H I^{\alpha} g_u(t) + c_0.$$

Et par intégration de l'inégalité (3.14), on obtient :

$$\begin{aligned} |v(t) - {}_H I^{\alpha} g_v(t) - c_1| &\leq \frac{\sigma}{\Gamma(\alpha+1)} (\log t)^{\alpha}. \\ &\leq \frac{\sigma}{\Gamma(\alpha+1)} (\log T)^{\alpha}. \end{aligned} \tag{3.19}$$

D'autre part, si $u(1) = v(1)$, alors $c_0 = c_1$. Pour tout $t \in [1, T]$, on a :

$$v(t) - u(t) = v(t) - H^{\alpha} g_u(t) - c_1 + H^{\alpha} \left(g_v(t) - g_u(t) \right).$$

où,

$$g_u(t) = \varphi(t, u(t), u(\lambda t)) \text{ and } g_v(t) = \varphi(t, v(t), v(\lambda t)).$$

Alors :

$${}_H I^{\alpha} \left(g_v(t) - g_u(t) \right) = {}_H I^{\alpha} [\varphi(s, v(s), v(\lambda t)) - \varphi(s, u(s), u(\lambda t))].$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s} \right)^{\alpha - 1} [\varphi(s, v(s), v(\lambda t)) - \varphi(s, u(s), u(\lambda t))] \frac{ds}{s}.$$

On utilise (H_1), on trouve :

$$\left|{}_H I^{\alpha} \left(g_v(t) - g_u(t) \right) \right| \leq \frac{2\omega}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s} \right)^{\alpha - 1} \left| v - u \right| \frac{ds}{s}.$$

$$|v(t) - u(t)| \leq |v(t) - {}_H I^{\alpha} g_v(t) - c_1| \quad + \frac{2\omega}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s} \right)^{\alpha - 1} |v - u| \frac{ds}{s}.$$

ce qui implique :

$$|v(t) - u(t)| \leq \frac{\sigma}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{2\omega}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s} \right)^{\alpha - 1} \|v(s) - u(s)\| \frac{ds}{s}.$$

Ainsi :

$$|v(t) - u(t)| \leq \frac{\sigma}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{2\omega (\log T)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \|v(s) - u(s)\|.$$

D'où

$$\|v(s) - u(s)\| \left(1 - \frac{2\omega (\log T)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \right) \leq \frac{\sigma}{\Gamma(\alpha+1)}. \tag{3.20}$$

Ensuite, pour chaque $t \in [1, T]$

$$|u(t) - v(t)| \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha+1) - 2\omega (\log T)^{\alpha}} \sigma = \tau_{\varphi} \sigma. \tag{3.21}$$

Donc, le problème fractionnaire (3.1) est stable d'Ulam-Hyers.

Stabilité Au Sens Ulam-Hyers-Rassias

Définition 23.

Le problème fractionnaire (3.1) est stable au sens d'Ulam-Hyers-Rassias avec respecte $h \in X$ s'il existe un nombre réel $\tau_{\varphi,h} > 0$ tel que pour tout $\theta > 0$ et pour tout solution $v \in X$ de l'inégalité (3.14), il existe une solution $u \in X$ du problème (3.1), avec :

$$|v(t) - u(t)| \leq \tau_{\varphi}\sigma h(t), t \in [1, T].$$

Définition 24.

Le problème aux limites fractionnaires (3.1) est généralisé Ulam-Hyers Rassias stable par rapport à $h \in X$ s'il existe un nombre réel $\tau_{\varphi,h} > 0$ tel que pour chaque solution $v \in X$ de l'inégalité (3.15), il existe une solution $u \in X$ du problème(3.1),avec :

$$|v(t) - u(t)| \leq \tau_{\varphi,h}h(t), t \in [1, T].$$

Théoréme 14.

Soit $\varphi : [1, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, on supposons que (H_3) et (3.15), qui satisfaits, alors il existe une fonction $h \in C\,([1, T], \mathbb{R}_+)$et il existe $\eta_h > 0$ tel que pour tout $t \in [1, T]$

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} h(s)\frac{ds}{s} \leq \eta_h h(t). \tag{3.22}$$

Alors le problème fractionnaires (3.1) est stable au sens Ulam-Hyers-Rassias.

Preuve 11.

Soit $v \in X$ est une solution de l'inégalité (3.16) et notons par $u \in X$ l'unique solution du problème(3.1).

$$\begin{cases} {}^{C}_{H}D^{\alpha}u(t) = f(t, u(t), u(\lambda t)), t \in [1, T], 0 < \alpha \leq 1, 0 < \lambda < 1 \\ \\ u(1) = v(1). \end{cases}$$

et donc :

$$u(t) = {}_{H}I^{\alpha}g(t) + c_0$$

et par intégration (3.16), on obtient :

$$|v(t) - {}_{H}I^{\alpha}g_v(t) + c_1| \leq \frac{\varepsilon}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} h(s)\frac{ds}{s}.$$

Par (H_3), on trouve :

$$|v(t) - u(t)| \leq |v(t) - {}_{H}I^{\alpha}g_v(t) - c_1| \quad + \frac{2\omega}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} |v - u|\frac{ds}{s}.$$

En utilisant (H_1), nous pouvons écrire

$$|v(t) - u(t)| \leq \sigma\eta_h h(t) + \frac{2\omega}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} \|v(s) - u(s)\|\frac{ds}{s}. \tag{3.23}$$

Par conséquent,

$$|v(t) - u(t)| \leq \sigma\eta_h h(t) + \frac{2\omega(\log T)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha + 1)}\|v(s) - u(s)\|.$$

ce qui implique :

$$\|v(s)-u(s)\|\left(1-\frac{2\omega(\log T)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right)\leq \sigma\eta_h h(t). \tag{3.24}$$

Ensuite, pour chaque $t\in[1,T]$

$$|u(t)-v(t)|\leq \frac{\eta_h}{1-\frac{2\omega(\log T)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}}\sigma h(t). \tag{3.25}$$

Donc, le problème fractionnaire (3.1) est stable au sen Ulam-Hyers-Rassias.

3.4 Exemples

Exemple 6.

On considérer l'équation fractionnaire du pantographe de type Caputo-Hadamard.

$$\begin{cases} {}^{C}_{H}D^{\frac{1}{2}}u(t)=\frac{1}{4}+\frac{3}{16e^{t+5}}x(t)+\frac{3}{16e^{t+5}}u\left(\frac{1}{2}t\right), t\in[1,e], \\ \\ u(1)=1-\frac{2}{19}u(\gamma), 1<\gamma<e \end{cases} \tag{3.26}$$

Pour cet exemple, nous avons $\alpha=\frac{1}{2}, \lambda=\frac{1}{2}$ et $T=e$.
D'autre part,

$$\varphi(t,u,v)=\frac{1}{4}+\frac{3}{16e^{t+5}}u+\frac{3}{16e^{t+5}}v,$$

$$\theta(u)=\frac{2}{19}u(\gamma),\quad 1<\gamma<e.$$

Pour $t\in[1,2]$ et $(u_1,v_1),(u_2,v_2)\in\mathbb{R}^2$,ona :

$$|\varphi(t,u_1,v_1)-\varphi(t,u_2,v_2)|\leq\frac{3}{16e^5}\left(|u_1-u_2|+|v_1-v_2|\right).$$

Par conséquent, l'hypothèse (H_1)est satisfait avec $\omega=\frac{3}{16e^s}$
Aussi, pour tout $u_1,v_1\in C([1,e])$, ona :

$$|g(u_1)-g(v_1)|\leq\frac{2}{19}|u_1-v_1|.$$

Donc, (H_2)est satisfait de $\varpi=\frac{2}{19}$.
Ainsi les conditions

$$2\omega(\log T)^{\alpha}=2.5267\times10^{-3}<(1-\varpi)\Gamma(\alpha+1)=0.79294,$$

et

$$2\omega\frac{(\log T)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}=2.8511\times10^{-3}<1.$$

Donc, le problème (3.26) a un unique solution sur $[1,e]$, et d'après le théorème président, le problème fractionnaire(3.26) est stable au sens d'Ulam-Hyers.

Exemple 7.

On considérer l'équation fractionnaire du pantographe de type Caputo-Hadamard suivante :

$$\begin{cases} {}_H^C D^{\frac{1}{3}} u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{21}\cos(t)u(t) + \frac{1}{21}u\left(\frac{1}{3}t\right), t \in [1, e] \\ u(1) = \frac{2}{5} - \sum_{i=1}^{n} d_i u(t_i). \end{cases} \tag{3.27}$$

où $1 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n < e, d_i, i = 1, 2, \ldots, n$ *sont des constantes positives avec :*

$$\sum_{i=1}^{n} d_i < \frac{1}{5}.$$

Considérons l'équation fractionnaire du pantographe avec ;

$\alpha = \frac{1}{3}, \lambda = \frac{1}{3}, \varphi(t, u, v) = \frac{1}{2} + \frac{1}{21}\cos(t)u + \frac{1}{21}v, \theta(u) = \sum_{i=1}^{n} d_i u(t_i)$ *Pour* $(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in \mathbb{R}^2$ *et* $t \in [1, e]$, *ona :*

$$\begin{aligned} |\varphi(t, u_1, v_1) - \varphi(t, u_2, v_2)| &\leq \frac{1}{21}|\cos(t)|\,|u_1 - u_2| + \frac{1}{21}|v_1 - v_2|. \\ &\leq \frac{1}{21}(|u_1 - u_2| + |v_1 - v_2|). \end{aligned}$$

D'où l'hypothèse (H_1) *est satisfait de* $\omega = \frac{5}{21}$.
Aussi, pour tout $u_1, u_2 \in C([1, e])$, *ona :*

$$g(u_1) - g(u_2) = \left|\sum_{i=1}^{n} d_i u_1(t_i) - \sum_{i=1}^{n} d_i u_2(t_i)\right| \leq \sum_{i=1}^{n} d_i |u_1 - u_2|.$$

D'où l'hypothèse (H_2) *est satisfait de* $\varpi = \sum_{i=1}^{n} d_i < \frac{1}{5}$ *donc :*

$$\frac{2\omega(\log T)^{\alpha}}{(1 - \varpi)\Gamma(\alpha + 1)} \simeq 0.13332 < 1.$$

comme $h(t) = t^3$. *alors :*

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t \left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha - 1} h(s)\frac{ds}{s} \leq \frac{\Gamma(4)}{\Gamma\left(\frac{13}{3}\right)} t^3 = \eta_h h(t).$$

Ainsi l'hypothèse (H_3) *est satisfait de* $h(t) = t^3$ *et* $\eta_h = \frac{\Gamma(4)}{\Gamma\left(\frac{13}{3}\right)}$.

Donc, le problème (3.26) a un unique solution sur $[1, e]$, *et d'après le théorème président, le problème fractionnaire(3.26) est stable au sens d'Ulam-Hyers.*

Conclusion

Dans ce mémoire, on s'est intéressé à l'étude de l'existence, l'unicité et la stabilité de solutions de certain type de problèmes du pantographe d'ordre fractionnaire au sens de Caputo et au sen de Caputo-Hadamard. En effet, on a d'abord proposé la solution intégrale d'un problème pantographe avec deux dérivées fractionnaires au sen de Caputo, puis on appliqué les techniques de points fixes pour étudier l'existence et l'unicité de solutions pour le problème donné. On a présenté également une étude de la stabilité au sens d'Ulam-Hyers de tel problème. Aussi on a abordé la question de l'existence, l'unicité ainsi que la stabilité de la solution d'un problème du pantographe avec une dérivée fractionnaire au sens de Caputo-Hadamard. En effet, après avoir donné la solution générale du problème, on utilisera les théorèmes de point fixe du Banach et Leray-Schauder pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution du problème fractionnaire.

Bibliographie

[1] A. Ardjounia and A. Djoudi, Existence and uniqueness of solutions for nonlinear implicit Caputo Hadamard fractional differential equations with nonlocal conditions, Advances in the Theory of Nonlinear Analysis and its Applications, 3(1) (2019), 46–52.

[2] K. Balachandran, S. Kiruthika, J. J. Trujillo, Existence of solutions of Nonlinear fractional pantograph equations, Acta Mathematica Scientia, 33B (2013) 1-9.

[3] P.L. Butzer, A.A. Kilbas, J.J. Trujillo, Compositions of Hadamard-type fractional integration operators and the semigroup property, Journal of Mathematical Analysis and Applications 269, 2002, page 387ñ400

[4]] F. M dehaghan, " l'utilisation de la procédure de la décomposition d'adomian pour résoudre une équation différentielle de retard apparaissant en électrodynamique ". Journal phys scr, vol. 78, p. 8. Décembre, 2008.

[5] A. Granas and J. Dugundji, Fixed point theory, Springer-Verlas, New York. 2003.

[6] M. N. Gugliemlmi, " Stability of one-leg-2-methods for the variable coefficient pantograph equation on the quassi-geometric mesh ", vol. 23, pp.

[7] J.Hadamard : Essai sur letude des fonctions donnees par leur developpment de Taylor ,Math. Pures Appl, PIER 8, pp 101186, (1892).

[8] J. K. Hale and S. V. Lunel, Introduction to functional differential equations, Applied Mathematical Sciences, 99, Springer-Verlag, New York, 1993.

[9] M. Houas, Existence and stability of fractional pantograph differential equations with Caputo-Hadamard type derivative, (submitted).

[10] S. Harikrishnan. K. Kanagarajan and D. Vivek, Existence and stability results for boundary value problem for differential equation with w-Hilfer fractional derivative, Journal of Applied Nonlinear Dynamic, 8(2) (2019), 251–259.

[11] R. W. Ibrahim, Generalized Ulam-Hyers stability for fractional differential equations, International Journal of mathematics, 23, (2012)

[12] A. Iserles, Exact and discretized stability of the pantograph equation, Applied Numerical Methods, 24 (1997), 295-308.

[13]] A, Iserles, Y. Liu, On pantograph integro-differential equations, J. Integral Equations Appl., 6 (1994), 213–237.

[14] F. Jarad, Thabet and B. Dumitru, Caputo-type modiÖcation of the Hadamard fractional derivatives, Advances in Diğerence Equations, 2012, page 2 - 8

[15]] G. W. j. C. Marshall, B. van-brunt, " A natural boundary for solutions to the second order pantograph equation ", Journal d'analyse et application mathématique, vol. 299, pp. 21-314, 2004.

[16] Y. Zhang, Z. Bai and T. Feng, Existence results for a coupled system of nonlinear fractional three-point boundary value problems at resonance. Comput.Math. Appl. 61, (2011), 1032-1047.

[17] X. Zhang, C. Zhu and Z.Wu, Solvability for a coupled system of fractional differential equations with impulses at resonance. Boundary Value Problems, 80, (2013), 1-13.

[18] W. Zhong and W. Lin, Nonlocal and multiple-point boundary value problem for fractional differential equations. Comput. Math. Appl. 39 (2010), 1345-1351.

[19] J. Wang, L. Lv, Y. Zhou, Ulam stability and data dependence for fractional differential equations with Caputo derivative, Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, 63, 1-10, (2011).