République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Djilali Bounaâma-Khemis Miliana

Faculté des Sciences de la Matière et de l'Informatique
Département de Mathématiques et Informatique
Spécialité : Analyse Mathématique et Applications

Mémoire

présenté en vue de l'obtention du

DIPLÔME DE MASTER EN MATHÉMATIQUES

par

Mokhtari Chaima

Thème

Etude de l'existence et de la stabilité des équations différentielles fractionnaire quantique de Duffing

Soutenue publiquement le 29/06/2024, devant le jury composé de

Président :	**Meghatria**	**Farida**	**Univ. Khemis Miliana**
Examinatrice :	**Chita**	**Fouzia**	**Univ. Khemis Miliana**
Examinateur :	**Bezziou**	**Mohamed**	**Univ. Khemis Miliana**
Encadrant :	**Houas**	**Mohamed**	**Univ. Khemis Miliana**

Année universitaire 2023/2024

REMERCIEMENT

Je tiens tous d'abords à remercie "ALLAH" le tout puissant de m'avoir donné la santé et la volonté d'entamer et de terminer ce travail.

J'exprime toutes mes gratitudes à mon encadrant "Mr.Houas Mohamed"

pour m'avoir proposé le thème de ce mémoire, et pour ses conseils, son encouragement et son aide.

Je veux exprimer un grand merci aux membres du jury

"Mme.f.Meghatria" et "Mme.f.Chita" et "Mr.m.Bezziou" pour m'avoir fait l'honneur d'être membres de mon jury.

Finalement, je remercie mes parents, mes frères, toute ma famille et mes amies qui m'ont soutenu tout au long de ces années

Mokhtari Chaima

DÉDICACE

Du profond de mon cœur, je dédie ce travail a tous ceux me sont chers.

A celle qui le paradis sous ses pieds. A celle qui s'est privée et donnée, et attendu avec patience les fruits de sa bonne éducation.

A ma chère mère ♡

A celui qui fait mon affiliation avec me rend fier. A celui qui changé la nuit en jour pour m'assurer les bonnes conditions.

A mon cher père ♡

A mes chères frères Azzedine, Ahmed, Kamel, Diyaeddine.

A tous les membres de ma famille, et à tous mes amis.

Mokhtari Chaima

Abstract

In this memoir, I discuss the existence, uniqueness and Ulam stability of solutions for q-fractional Duffing problem involving two Caputo and Riemann-Liouville q-fractional derivatives. Uniqueness result for solution of the underlying Duffing problem is presented with the aid of Banach's fixed point theorem, while the existence result is derived from Leray-Schauder's alternative. Also the Ulam stability outcomes are obtained by using generalized singular Gronwall's inequality. An illustrative example is also included.

Keywords : q-Fractional derivative, Duffing equation, Ulam stability, fixed. point

Résumé

Dans ce mémoire, je discute de l'existence, de l'unicité et de la stabilité de Ulam des solutions du problème de Duffing q-fractionnaire impliquant deux dérivées q-fractionnaires de Caputo et de Riemann-Liouville. Le résultat d'unicité pour la solution du problème de Duffing sous-jacent est présenté à l'aide du théorème du point fixe de Banach, tandis que le résultat d'existence est dérivé de l'alternative de Leray-Schauder. De plus, les résultats de stabilité de Ulam sont obtenus en utilisant l'inégalité de Gronwall singulière généralisée. Un exemple illustratif est également inclus.

Mots-clés : Dérivée q-fractionnaire, equation de Duffing, stabilité de Ulam, point fixe.

ملخص

في هذا البحث، أناقش وجود وتفرد واستقرار أولام لحلول مسألة دافينغ ك-الكسرية التي تتضمن مشتقتين ك-الكسريتين لكابوتو وريمان-ليوفيل. تم تقديم نتيجة التفرد لحل مشكلة دافينغ الأساسية باستخدام نظرية النقطة الثابتة لباناخ، في حين تم اشتقاق نتيجة الوجود من بديل لراي-شودر. بالإضافة إلى ذلك، تم الحصول على نتائج استقرار أولام باستخدام متباينة جرونوال المفردة المعممة. تم تضمين مثال توضيحي أيضًا.

الكلمات المفتاحية: المشتقة ك-الكسرية، معادلة دافينغ، ثبات أولام، النقطة الثابتة.

Table des matières

Introduction **6**

1 Notion de base de calcul q-fractionnaire **8**
1.1 Fonction de base 8
1.1.1 Fonction q-Gamma 8
1.1.2 Fonction q-Bêta 9
1.2 Intégration q-fractionnaire 9
1.2.1 Intégrale q-fractionnaire au sens de Riemann-Liouville 9
1.3 Dérivation q-fractionnaire 10
1.3.1 Dérivée q-fractionnaire au sens de Riemann-Liouville 10
1.3.2 Dérivées q-fractionnaire au sens de Caputo 11
1.4 Quelques théorèmes du point fixe 12

2 Existence et unicité du Problème q-fractionnaire de Duffing **14**
2.1 Lemmes auxiliaire : 14
2.2 Existence et unicité de solution du problème (2.2) 17
2.2.1 Unicité de la solution du problème (2.2) 19
2.2.2 Existence de la solution du problème (2.2) 27

3 Stabilité du problème q-fractionnaire du Duffing **37**
3.1 Stabilité de q-fractionnaire du Duffing 38
3.1.1 Stabilité au sens d'Ulam-Hyers 38
3.1.2 Stabilité au sens d'Ulam-Hyers-Rassais : 40

bibliography **44**

Notations

Pour facilité la lecture, on commence par introduire les différentes notations utilisées tout au long de ce travail.

$\mathbb{R}$: Ensemble des nombres réels.

$\mathbb{C}$: Ensemble des nombres Complexes.

$\mathbb{K}$: Le corps des nombres réels ou complexes.

$\Gamma_q(.)$: Fonction q-Gamma.

$\beta_q(.,.)$: Fonction q-Bêta.

$(X, \| \ . \ \|)$: Espace vectoriel normé.

$\| \ . \ \|$: norme infinie .

$\mathbb{C}([0;1],\mathbb{R})$: Espace de Banach des fonctions continues définies de $[0;1]$ à valeur dans $\mathbb{R}$.

$I_q^\alpha f(x)$: Intégrale q-fractionnaire d'ordre α de la fonction f(x) selon la définition de Riemann-Liouville.

${}^{RL}D_q^\alpha f(x)$: Dérivée q-fractionnaire d'ordre α de la fonction f(x) selon la définition de Riemann-Liouville.

${}^{c}D_q^\alpha f(x)$: Dérivée d'ordre non entière α de la fonction f(x) selon la définition de Caputo.

Introduction

Les équations q-différentielles avec des opérateurs dérivés q-fractionnaires ont attiré une grande attention ces dernières années. Ces équations différentielles q-fractionnaires interviennent dans la modélisation de divers problèmes scientifiques et d'ingénierie tels que l'économie, le contrôle, la biologie et l'électrodynamique, etc.. Les conditions aux limites intégrales ont des applications différentes dans la conception chimique, la thermoélectricité, le flux d'eau souterraine et le flux de population. Les conditions de détermination de la solution peuvent être imposées à l'espace du noyau de reproduction, et on peut donc calculer le noyau de reproduction satisfaisant aux conditions de détermination de la solution.
Ces dernières années, de nombreux chercheurs se sont intéressés au domaine de la théorie des équations différentielles fractionnaires non linéaires, qui peuvent être utilisées pour décrire des merveilles du monde réel . L'une des équations différentielles non linéaires les plus importantes est l'équation de Duffing, donnée par :

$$D^2x(t) + \kappa D^1x(t) = m(t) - p(t, x(t)), \qquad \kappa > 0, t \in [0; 1],$$

avec la condition aux limites :

$$x(0) - a_1 = 0, \qquad D_q^1 x(0) - a_2 = 0, \qquad a_i \in \mathbb{R}, (i = 1, 2),$$

où m et p sont des fonctions continues données, cette équation est utilisée pour modéliser certains oscillateurs amortis pilotés. De nombreux chercheurs ont discuté de la version fractionnaire de l'équation de Duffing. Dans [5], les auteurs ont considéré le problème de Duffing fractionnaire

$${}^cD^\alpha + \kappa {}^cD^\beta x(t) = Sin(\mu t) - \varphi x(t) - \xi x^3(t), \qquad \kappa, \varphi, \xi, \mu > 0,$$

$\forall t \in [0; 1]$, sous les conditions $x(0) - a_1 = 0, {}^c D^\beta x(0) - a_2 = 0, a_i \in \mathbb{R}(i = 1, 2)$, où $1 < x < 2, 0 < \beta < 1, {}^c D^\alpha$ et ${}^cD^\beta$ sont les dérivées fractionnaires de Caputo.

Dans cet mémoire de fin étude, on discute de l'existence et l'unicité et de la stabilité Ulam des solutions pour le problème de Duffing q-fractionnaire séquentiel de Caputo-Riemann-Liouville, donnée par :

$$\begin{cases} {}^cD_q^{\alpha}\left[{}^cD_q^{\beta}\left[{}^{R.L}D_q^{\gamma}x(t)\right]\right] = m(t) - Ap(t,x(t),{}^{R.L}D_q^{\mu}[x(t)]) - q(t,x(t),I_q^{\varpi}[x(t)]), \\ \\ x(0)=0, \quad {}^cD_q^{\beta}[{}^{R.L}D_q^{\gamma}x(1)]=0, \quad {}^{R.L}D_q^{\gamma}[x(1)] = I_q^{\theta}[x(\lambda)], \\ \\ \forall t\in[0;1] \ , \ \alpha,\beta,\gamma,\lambda\in[0;1], \ \ \mu<\gamma,\varpi,\theta\geq 0, \ \ A>0 \ \ \Gamma_q(\gamma+\theta+1)\neq\lambda^{\gamma+\theta}. \end{cases} \tag{0.1}$$

Où ${}^cD_q^{\vartheta}, \vartheta\in\alpha,\beta,{}^{R.L}D_q^{\gamma}$ désignent les dérivées q-fractionnaires de Caputo et de Riemann-Liouville, ${}^{R.L}I_q^{\zeta}, \ \in \theta,\varpi$ est l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville, et $p,q : [0;1]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ et $m:[0;1]\to\mathbb{R}$ sont des fonction continue.

Ce mémoire décompose en trois chapitre :

Le premier chapitre, est un rappel de quelque définitions, notions de base, résultats sur la dérivation q-fractionnaire et quelque théorème de point fixe utilisés dans ce travail.

Le deuxième chapitre, on s'intéresse à l'étude de l'existence et l'unicité des solution pour le problème q-fractionnaire (0.1). L'idée est que transforme ce problème en un problème du point fixe et le point fixe déterminé est considéré soit comme une solution unique pour le problème, soit l'une de ses solution. On donne deux résultats, Le premier est un résultat d'unicité obtenu par utilisation du théorème de point fixe de Banach. Le deuxième est un résultat d'existence basés respectivement sur le théorème de Leray-Schauder.

Le troisième chapitre, on étudie la stabilité au sens de Ulam-Hyers du problème traité (0.1). On termine ce chapitre par un exemple illustratif.

Chapitre 1

Notion de base de calcul q-fractionnaire

Ce chapitre rappel quelques notations, concepts et résultats généraux concernant la théorie du $q-$calcul fractionnaire. Ces notions de base et résultats sont bien connus dans la littérature et seront utiles pour ce travail, voir [9], [7], [12].

1.1 Fonction de base

1.1.1 Fonction q-Gamma

Définition

Pour tout nombre réel α(où même complexe $(Re(\alpha) > 0)$, tel que $\alpha > 0$, on définit la fonction q-Gamma par :

$$\Gamma_q(\alpha) = \frac{(1-q)_q^{(\alpha-1)}}{(1-q)^{\alpha-1}}, \qquad 0 < q < 1.$$

Elle admet une représentation intégrale :

$$\Gamma_q(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e_q^{-qx} d_q x. \tag{1.1}$$

Propriété :
Pour tout $\alpha > 0$, la fonction q-Gamma satisfait les propriétés suivantes :

1. $\Gamma_q(\alpha+1) = [\alpha]_q \Gamma_q(\alpha)$, avec $[\alpha]_q = \dfrac{1-q^\alpha}{1-q}$.

2. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma_q(n+1) = [n]_q!$, avec $[n]_q! = [n]_q[n-1]_q...[1]_q$.
   En particulier, $\Gamma_q(1) = 1$.

1.1.2 Fonction q-Bêta

Définition

La fonction q-Bêta est donnée par l'intégrale suivante :

$$\beta_q(\alpha,\beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-qx)^{\beta-1} d_q x. \qquad \forall\ \alpha,\beta > 0. \tag{1.2}$$

La relation entre q-Gamma et q-Bêta

La fonction q-Béta est liée à la fonction q-Gamma par la relation suivante :

$$\beta_q(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma_q(\alpha)\Gamma_q(\beta)}{\Gamma_q(\alpha+\beta)}.$$

1.2 Intégration q-fractionnaire

1.2.1 Intégrale q-fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Définition

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, on appelle intégrale q-fractionnaire de Riemann-Liouville de f l'intégrale suivante :

$$(I_q^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma_q(\alpha)} \int_0^x (x-qs)^{\alpha-1} f(s) d_q s. \tag{1.3}$$

Où α est un réel (ou même complexe) convenablement choisi.

Proposition

Soit $f \in C^0([a,b])$, pour α,β complexes tels que $Re(\alpha) > 0$ et $Re(\beta) > 0$, on a

$$I_q^\alpha(I_q^\beta) = I_q^{\alpha+\beta},$$

et pour $Re(\alpha) > 0$ on a :

$$\frac{d_q}{d_q x} I_q^\alpha f = I_q^{\alpha-1} f.$$

Exemple 01

Considérons la fonction $f(x) = x^\beta$.
Soient $\alpha > 0 \ \ et \ \ \beta > 0$, en remplaçant dans la définition de l'intégrale de R-L, on obtient :

$$\begin{aligned}
(I_q^\alpha f)(x) &= \frac{1}{\Gamma_q(\alpha)} \int_0^x (x-qs)^{\alpha-1} s^\beta d_q s \\
&= \frac{1}{\Gamma_q(\alpha)} \int_0^x (x(1-q\frac{s}{x}))^{\alpha-1} s^\beta d_q s \\
&= \frac{1}{\Gamma_q(\alpha)} \int_0^x x^{\alpha-1}(1-q\frac{s}{x})^{\alpha-1} s^\beta d_q s,
\end{aligned}$$

en effectuant le changement de variable

$$y = \frac{s}{x} \implies s = xy,$$

avec

$$d_q s = x d_q y,$$

donc on obtient

$$\begin{aligned}
(I_q^{\alpha} f)(x) &= \frac{1}{\Gamma_q(\alpha)} \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-qy)^{\alpha-1}(xy)^{\beta} x d_q y \\
&= \frac{1}{\Gamma_q(\alpha)} \int_0^1 (1-qy)^{\alpha-1} x^{\alpha+\beta} y^{\beta} d_q y \\
&= \frac{x^{\alpha+\beta}}{\Gamma_q(\alpha)} \int_0^1 y^{\beta}(1-qy)^{\alpha-1} d_q y \\
&= \frac{x^{\alpha+\beta}}{\Gamma_q(\alpha)} \beta_q(\beta+1, \alpha) \\
&= \frac{x^{\alpha+\beta}}{\Gamma_q(\alpha)} \frac{\Gamma_q(\beta+1)\Gamma_q(\alpha)}{\Gamma_q(\beta+\alpha+1)} \\
&= \frac{\Gamma_q(\beta+1)}{\Gamma_q(\beta+\alpha+1)} x^{\alpha+\beta}.
\end{aligned}$$

1.3 Dérivation q-fractionnaire

1.3.1 Dérivée q-fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Définition

Soit $m-1 < \alpha < m$ avec $m \in \mathbb{N}^*$, on appelle la dérivée q-fractionnaire d'ordre α au sens de Riemann-Liouville la fonction définie par :

$$({}^{RL}D_q^{\alpha} f)(x) = \left(\frac{d_q}{d_q x}\right)^m \left[(I_q^{m-\alpha} f)(x)\right]. \tag{1.4}$$

Exemple 02

On prend la fonction $f(x) = (x-a)^{\beta}$.

$$\begin{aligned}({}^{RL}D_q^{\alpha} f)(x) &= D_q^m[I_q^{m-\alpha}(x-a)^{\beta}] \\ &= D_q^m[\frac{\Gamma_q(\beta+1)}{\Gamma_q(\beta+1+m-\alpha)}(x-a)^{\beta+m-\alpha}] \\ &= \frac{\Gamma_q(\beta+1)}{\Gamma_q(\beta+1+m-\alpha)} D_q^m(x-a)^{\beta+m-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma_q(\beta+1)}{\Gamma_q(\beta+1+m-\alpha)} \frac{\Gamma_q(\beta+m-\alpha+1)}{\Gamma_q(\beta-\alpha+1)}(x-a)^{\beta-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma_q(\beta+1)}{\Gamma_q(\beta-\alpha+1)}(x-a)^{\beta-\alpha}.\end{aligned}$$

1.3.2 Dérivées q-fractionnaire au sens de Caputo

Définition

Soit $m-1 < \alpha < m$ et $f \in C^m([a,b])$. On appelle dérivée q-fractionnaire au sens de Caputo la fonction définie par :

$$({}^{c}D_q^{\alpha} f)(x) = (I_q^{m-\alpha} f^m)(x) = \frac{1}{\Gamma_q(m-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(t) d_q(t). \tag{1.5}$$

Exemple 03

Soit $f(x) = (x-a)^{\beta}, x \in [a;b]$, on a :

$$\begin{aligned}{}^{c}D_q^{\alpha}(x-a)^{\beta} &= I_q^{m-a}\left[\left(\frac{d_q}{d_q x}\right)^m (x-a)^{\beta}\right] \\ &= I_q^{m-a}\left(\frac{\Gamma_q(\beta+1)}{\Gamma_q(\beta+1-m)}(x-a)^{\beta-m}\right) \\ &= \frac{\Gamma_q(\beta+1)}{\Gamma_q(\beta+1-m)} I_q^{m-a}(x-a)^{\beta-m} \\ &= \frac{\Gamma_q(\beta+1)}{\Gamma_q(\beta+1-m)} \frac{\Gamma_q(\beta+1-m)}{\Gamma_q(\beta+1-\alpha)}(x-a)^{\beta-\alpha}.\end{aligned}$$

Alors

$${}^{c}D_q^{\alpha}(x-a)^{\beta} = \frac{\Gamma_q(\beta+1)}{\Gamma_q(\beta+1-\alpha)}(x-a)^{\beta-\alpha}.$$

Quelques Propriétés

1. La dérivation q-fractionnaire au sens de Caputo est une opération linéaire,

$$^{c}D_q^{\alpha}(\lambda f(t)+\mu g(t))=\lambda^{c}D_q^{\alpha}+\mu^{c}D_q^{\alpha}g(t).$$

2. $^{c}D_q^{\alpha}(^{c}D_q^{\beta}f(t))=^{c}D_q^{\beta+\beta}f(t)=^{c}D_q^{\beta}(^{c}D_q^{\alpha}f(t))$ou $f\in C^1([0;T],\mathbb{R}),\quad 0<\alpha,\beta<1$ et $0<\alpha+\beta<1$.
3. $^{c}D_q^{\alpha}[I_q^{\alpha}f]=f$.
4. $I_a^{\alpha}[^{c}D_a^{\alpha}f](x)=f(x)+\Sigma_{j=0}^{m-1}\dfrac{(x-a)^j}{j!}f^{(j)}(a)$.

1.4 Quelques théorèmes du point fixe

Dans cette section, on présenté les définition et les théorème du point fixe qui utilisées dans ce mémoire.

Définition 1.4.1
Soit $(X,\|\ .\ \|)$ un espace vectoriel normé, et $\mathcal{A}:X\to X$ une application, on appelle point fixe de$\mathcal{A}$ tout point $x\in X$ tel que : $\mathcal{A}x=x$.

Définition 1.4.2
Soit X un espace de Banach, l'opérateur linéaire $\mathcal{A}:X\to X$ est compact s'il transforme tout ensemble borné de X dans un ensemble relativement compact de X.

Définition 1.4.3
Un opérateur est dit complètement continue, s'il est compact et continu.

Définition 1.4.4
Soit $(X,\|\ .\ \|)$ un espace vectorielle normé, une application $\mathcal{A}:X\to X$ est dite contractante, s'il existe un nombre positif $k\in]0,1[$ tel que $\forall x,y\in X$, on a :

$$\|\ \mathcal{A}x-\mathcal{A}y\ \|\leq k\ \|\ x-y\ \|\ .$$

Définition 1.4.5
Soit A une application de $\mathbf{C}([\mathbf{0};\mathbf{1}],\mathbb{R})$, A est équicontinue si pour tout $\epsilon>0$, pour tout $x_1,x_2\in[0;1]$ et tout $f\in\mathcal{A}$, il existe $\delta>0$ tel que :

$$|x_1-x_2|\leq\delta\Rightarrow\|\ f(x_1)-f(x_2)\ \|\leq\epsilon.$$

Définition 1.4.6
Soit A une application de $\mathbf{C}([\mathbf{0};\mathbf{1}],\mathbb{R})$, A est uniformément bornée s'il existe une constante $k>0$ telle que : $\|\ f(x)\ \|\leq k$, pour tout $x\in[0;1]$ et tout $f\in\mathcal{A}$.

Théorème de point fixe de Banach

Théorème :[2]Soit X un espace de Banach et $\mathcal{A} : X \to X$ un opérateur contractant

$$\| \mathcal{A}x - \mathcal{A}y \| \leq K \| x - y \| .$$

Alors A admet un point fixe unique, c'est-à-dire $\exists! x \in X$ tel que $\mathcal{A}x = x$.

Théorème de l'Alternative de Leray-Schauder

Théorème :[8]Soit $\mathcal{A} : X \to X$ telle que pour tout $r > 0$, l'application $\mathcal{A} \mid_{B(0,r)}$ est une contraction.

Soit

$$\varepsilon_{\mathcal{A}} = \{x \in X : x \in \lambda \mathcal{A}x \qquad \forall \lambda \in [0;1]\}$$

Alors, au moins l'un des énoncés est vérifie :

1. L'ensemble $\varepsilon_{\mathcal{A}}$ est non-borné.
2. L'application $\mathcal{A}$ a un point fixe.

Théorème de Arzela-Ascoli

Théorème :[2]Soit $\mathcal{A}$ une application de $\mathbb{C}([0;1], \mathbb{R})$, $\mathcal{A}$ est relativement compact dans $\mathbb{C}([0;1], \mathbb{R})$ si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :

1. $\mathcal{A}$ est uniformément borné.
2. $\mathcal{A}$ est équicontinue.
3. Pour tout $x \in [0;1]$ l'ensemble $\{f(x), f \in \mathcal{A}\} \subset X$ est relativement compact.

Chapitre 2

Existence et unicité du Problème q-fractionnaire de Duffing

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'étude de l'existence et l'unicité des solutions pour un problème q-fractionnaire de Duffing avec des dérivées q-fractionnaires au sens de Caputo et Riemann-Liouville.
On considère le problème de Duffing suivant :

$$\begin{cases} {}^{c}D_q^{\alpha}\left[{}^{c}D_q^{\beta}\left[{}^{R.L}D_q^{\gamma}x(t)\right]\right] = m(t) - Ap(t, x(t), {}^{R.L}D_q^{\mu}[x(t)]) - q(t, x(t), I_q^{\varpi}[x(t)]), \\ \\ x(0) = 0, \quad {}^{c}D_q^{\beta}[{}^{R.L}D_q^{\gamma}x(1)] = 0, \quad {}^{R.L}D_q^{\gamma}[x(1)] = I_q^{\theta}[x(\lambda)], \\ \\ \forall t \in [0;1], \quad \alpha, \beta, \gamma, \lambda \in [0;1], \quad \mu < \gamma, \varpi, \theta \geq 0, \quad A > 0 \;\; \Gamma_q(\gamma+\theta+1) \neq \beta^{\gamma+\theta}. \end{cases} \tag{2.1}$$

Où ${}^{c}D_q^{\alpha}$ *et* ${}^{c}D_q^{\beta}$ sont des dérivées q-fractionnaire au sens de Caputo. ${}^{R.L}D_q^{\gamma}$ *et* ${}^{R.L}D_q^{\mu}$ sont des dérivées q-fractionnaire au sens de Riemann-Liouville, I_q^{ϖ} *et* I_q^{θ} sont des intégrale de Riemann-Liouville.
$p, q : \;[0;1] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $m : \;[0;1] \times \mathbb{R}$ sont des fonction continue.
On va étudier l'existence et l'unicité de la solution à l'aide de principe de contraction de Banach puis on montre l'existence de solution pour le problème avant est montre par utilisation du théorème de point fixe de Leray-Schauder[10],[8] .

2.1 Lemmes auxiliaire :

Lemme 1:
Soit $h \in C^m([0;1], \mathbb{R})$, $m \in \mathbb{N}^*$ pour $m - \alpha < \alpha < m$. La solution général de l'équation différentielle ${}^{c}D_q^{\alpha}[h(t)] = 0$ est donnée par :

$$h(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + ... + c_{m-1} t^{m-1},$$

où $c_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{0, m-1}$, $m = [\alpha] + 1$.
Lemme 2:
Soit $h \in C^m([0;1], \mathbb{R})$, $m \in \mathbb{N}^*$ pour $m - 1 < \alpha < m$, on a :

$$I_q^{\alpha}\left[{}^{c}D_q^{\alpha}[h(t)]\right] = h(t) + c_0 + c_1 t + ... + c_{m-1} t^{m-1},$$

pour tout $c_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{0, m-1}$, $m = [\alpha] + 1$.

Lemme 3:
Soit $h \in C^m([0;1], \mathbb{R})$, $m \in \mathbb{N}^*$ pour $m - 1 < \alpha < m$, on a :

$$I_q^\alpha \left[{}^{R.L}D_q^\alpha [h(t)]\right] = h(t) + c_1 t + c_2 t^2 ...... + c_{m-1} t^{m-1},$$

pour tout $c_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{0, m-1}$, $m = [\alpha] + 1$.

Lemme 4:
Soit $h \in C\ ([0;1], \mathbb{R})$, alors la solution du problème de Duffing q-fractionnaire suivant :

$$\begin{cases} {}^c D_q^\alpha [{}^c D_q^\beta [{}^{R.L} D_q^\gamma x(t)]] = h(t), \\ \\ x(0) = 0, \ {}^c D_q^\beta [{}^{R.L} D_q^\gamma x(1)] = 0, \ {}^{R.L} D_q^\gamma [x(1)] = I_q^\theta [x(\lambda)], \\ \\ \forall t \in [0;1], \ \alpha, \beta, \gamma, \lambda \in [0;1], \ \eta < \gamma, \omega, \theta \geq 0, \ A > 0, \end{cases} \tag{2.2}$$

est donnée par :

$$\begin{aligned} x(t) = & \frac{1}{\Gamma_q(\alpha+\beta+\gamma)} \int_0^t (t-qs)^{\alpha+\beta+\gamma-1} h(s) d_q s \\ & - \frac{t^{\beta+\gamma}}{\Gamma_q(\beta+\gamma+1)\ \Gamma_q(\alpha)} \int_0^1 (1-qs)^{\alpha-1} h(s) d_q s \\ & - \frac{\Delta t^\gamma}{\Gamma_q(\alpha+\beta+\gamma+\theta)} \int_0^\lambda (\lambda-qs)^{\alpha+\beta+\gamma+\theta-1} h(s) d_q s \\ & + \frac{\Delta t^\gamma}{\Gamma_q(\alpha+\beta)} \int_0^1 (1-qs)^{\alpha+\beta-1} h(s) d_q s \\ & + \frac{\Delta \lambda^{\beta+\gamma+\theta} t^\gamma}{\Gamma_q(\beta+\gamma+\theta+1)\Gamma_q(\alpha)} \int_0^1 (1-qs)^{\alpha-1} h(s) d_q s \\ & - \frac{\Delta t^\gamma}{\Gamma_q(\beta+1)\Gamma_q(\alpha)} \int_0^1 (1-qs)^{\alpha-1} h(s) d_q s. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Où

$$\Delta = \frac{\Gamma_q(\gamma+\theta+1)}{\Gamma_q(\gamma+1)[\lambda^{\gamma+\theta} - \Gamma_q(\gamma+\theta+1)]}.$$

Preuve :
Soit l'équation

$$^{c}D_q^{\alpha}[^{c}D_q^{\beta}[^{R.L}D_q^{\gamma}x(t)]] = h(t).$$

En appliquant l'intégrale q-fractionnaire de R.L d'ordre $\alpha > 0,$ on obtient :

$$I_q^{\alpha}[^{c}D_q^{\alpha}[^{c}D_q^{\beta}[^{R.L}D_q^{\gamma}x(t)]]] = I_q^{\alpha}[h(t)].$$

Par lemme 2, on trouve :

$$^{c}D_q^{\beta}[^{R.L}D_q^{\gamma}x(t)] + c_0 = I_q^{\alpha}[h(t)].$$

Alors :

$$^{c}D_q^{\beta}[^{R.L}D_q^{\gamma}x(t)] = I_q^{\alpha}[h(t)] - c_0.$$

En appliquant l'intégrale q-fractionnaire de R.L d'ordre $\beta > 0$, on obtient :

$$I_q^{\beta}[^{c}D_q^{\beta}[^{R.L}D_q^{\gamma}x(t)]] = I_q^{\beta}[I_q^{\alpha}[h(t)] - c_0].$$

Par lemme 2, on trouve :

$$^{R.L}D_q^{\gamma}[x(t)] = I_q^{\alpha+\beta}[h(t)] - I_q^{\beta}[c_0] - c_1.$$

En appliquant l'intégrale q-fractionnaire de R.L d'ordre $\gamma > 0$, on obtient :

$$I_q^{\gamma}[^{R.L}D_q^{\gamma}[x(t)]] = I_q^{\gamma}[I_q^{\alpha+\beta}[h(t)] - I_q^{\beta}[c_0] - c_1].$$

Par lemme 3, on trouve :

$$x(t) = I_q^{\alpha+\beta+\gamma}[h(t)] - I_q^{\beta+\gamma}[c_0] - I_q^{\gamma}[c_1] - c_2 t^{\gamma-1}.$$

Alors, la solution générale du problème (2.2) est exprimée sous la forme de l'équation intégrale suivante :

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{\Gamma_q(\alpha+\beta+\gamma)}\int_0^t (t-qs)^{\alpha+\beta+\gamma-1}h(s)d_qs \\ &- \frac{t^{\beta+\gamma}}{\Gamma_q(\beta+\gamma+1)}c_0 - \frac{t^{\gamma}}{\Gamma_q(\gamma+1)}c_1 - c_2t^{\gamma-1}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Maintenant pour trouve les constante c_0, c_1 et c_2 on utilise le condition du problème (2.2).
D'après la condition $x(0) = 0;$ on obtient :

$$-c_2 = 0 \;\Rightarrow\; c_2 = 0,$$

et$^{c}D_q^{\beta}[^{R.L}D_q^{\gamma}x(1)] = 0,$ on obtient :

$$^{c}D_q^{\beta}[^{R.L}D_q^{\gamma}x(1)] = I_q^{\alpha}[h(1)] - c_0 = 0 \;\Rightarrow\; c_0 =^{R.L} I_q^{\alpha}h(1).$$

On passe par la dernier condition $^{R.L}D_q^{\gamma}[x(1)] - I_q^{\theta}[x(\lambda)] = 0$, on obtient :

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{\Gamma_q(\gamma+\theta+1)}{\lambda^{\gamma+\theta} - \Gamma_q(\gamma+\theta+1)}\left[I_q^{\alpha+\beta+\gamma+\theta}[h(\lambda)] - I_q^{\alpha+\beta}[h(1)]\right. \\ &- \frac{\lambda^{\beta+\gamma+\theta}}{\Gamma_q(\gamma+\theta+1)}I_q^{\alpha}[h(1)] + \frac{1}{\Gamma_q(\beta+1)}I_q^{\alpha}[h(1)]). \end{aligned}$$

Substituant c_0, c_1 et c_2 en (2.4) , on obtient la solution (2.3).

2.2 Existence et unicité de solution du problème (2.2)

Considérons l'espace de Banach X telle que :

$$X = \{x : \quad x \in C([0;1], \mathbb{R}) \quad et \quad {}^{R.L}D_q^{\mu} \in C([0;1], \mathbb{R})\}.$$

De notes l'espace équipé de la norme $\|x\|_X = \|x\| + \|{}^{R.L}D_q^{\mu} x\|$ où :

$$\|x\| = \sup_{t\in[0;1]} |x(t)| \quad et \quad \|{}^{R.L}D_q^{\mu} x\| = \sup_{t\in[0;1]} |{}^{R.L}D_q^{\mu} x(t)|.$$

D'après (2.3) on défini l'opérateur $\mathcal{A}$ telle que :

$$\mathcal{A} \; : \; X \to \; X$$
$$\text{x(t)} \to \mathcal{A}x(t), \qquad \forall \; t \in [0;1],$$

tel que :

$$p_x^*(t) = p(t, x(t), {}^{R.L}D_q^{\mu} x(t)),$$

et

$$q_x^*(t) = q(t, x(t), {}^{R.L}I_q^{\varpi} x(t)).$$

On a :

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}x(t) = & \frac{1}{\Gamma_q(\alpha+\beta+\gamma)} \int_0^t (t-qs)^{\alpha+\beta+\gamma-1} \left(m(s) - Ap_x^*(s) - q_x^*(s)\right) d_q s \\
& - \frac{t^{\beta+\gamma}}{\Gamma_q(\beta+\gamma+1)\;\Gamma_q(\alpha)} \int_0^1 (1-qs)^{\alpha-1} \left(m(s) - Ap_x^*(s) - q_x^*(s)\right) d_q s \\
& - \frac{\Delta t^{\gamma}}{\Gamma_q(\alpha+\beta+\gamma+\theta)} \int_0^{\lambda} (\lambda-qs)^{\alpha+\beta+\gamma+\theta-1} \left(m(s) - Ap_x^*(s) - q_x^*(s)\right) d_q s \\
& + \frac{\Delta t^{\gamma}}{\Gamma_q(\alpha+\beta)} \int_0^1 (1-qs)^{\alpha+\beta-1} \left(m(s) - Ap_x^*(s) - q_x^*(s)\right) d_q s \\
& + \frac{\Delta \lambda^{\beta+\gamma+\theta} t^{\gamma}}{\Gamma_q(\beta+\gamma+\theta+1)\Gamma_q(\alpha)} \int_0^1 (1-qs)^{\alpha-1} \left(m(s) - Ap_x^*(s) - q_x^*(s)\right) d_q s \\
& - \frac{\Delta t^{\gamma}}{\Gamma_q(\beta+1)\Gamma_q(\alpha)} \int_0^1 (1-qs)^{\alpha-1} \left(m(s) - Ap_x^*(s) - q_x^*(s)\right) d_q s.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Et ${}^{R.L}D_q^{\mu}\mathcal{A} \; x(t)$ est donné par :

$$\begin{aligned}
{}^{R.L}D_q^{\mu}\mathcal{A}x(t) = & \frac{1}{\Gamma_q(\alpha+\beta+\gamma-\mu)} \int_0^t (t-qs)^{\alpha+\beta+\gamma-\mu-1} \left(m(s) - Ap_x^*(s) - q_x^*(s)\right) d_q s \\
& - \frac{t^{\beta+\gamma-\mu}}{\Gamma_q(\beta+\gamma-\mu+1)\;\Gamma_q(\alpha)} \int_0^1 (1-qs)^{\alpha-1} \left(m(s) - Ap_x^*(s) - q_x^*(s)\right) d_q s \\
& - \frac{\Gamma_q(\beta+\gamma+1)\Delta t^{\gamma-\mu}}{\Gamma_q(\beta+\gamma-\mu+1)\Gamma_q(\alpha+\beta+\gamma+\theta)} \int_0^{\lambda} (\lambda-qs)^{\alpha+\beta+\gamma+\theta-1} \left(m(s) - Ap_x^*(s) - q_x^*(s)\right) d_q s \\
& + \frac{\Gamma_q(\gamma+1)\Delta t^{\gamma-\mu}}{\Gamma_q(\gamma-\mu+1)\Gamma_q(\alpha+\beta)} \int_0^1 (1-qs)^{\alpha+\beta-1} \left(m(s) - Ap_x^*(s) - q_x^*(s)\right) d_q s
\end{aligned}$$

$$+\frac{\Delta\lambda^{\beta+\gamma+\theta}\Gamma_q(\gamma+1)t^{\gamma-\mu}}{\Gamma_q(\beta+\gamma+\theta+1)\Gamma_q(\alpha)\Gamma_q(\gamma-\mu+1)}\int_0^1(1-qs)^{\alpha-1}\left(m(s)-Ap_x^*(s)-q_x^*(s)\right)d_qs$$
$$-\frac{\Delta\Gamma_q(\gamma+1)t^{\gamma-\mu}}{\Gamma_q(\beta+1)\Gamma_q(\alpha)\Gamma_q(\gamma-\mu+1)}\int_0^1(1-qs)^{\alpha-1}\left(m(s)-Ap_x^*(s)-q_x^*(s)\right)d_qs. \quad (2.6)$$

Dans la suite, on prouve l'existence et l'unicité de la solution de l'équation non linéaire de Duffing-(2.2).

Ainsi, introduire les notation suivantes :

$$\Theta=\frac{1}{\Gamma_q(\alpha+\beta+\gamma+1)}+\frac{1}{\Gamma_q(\beta+\gamma+1)\ \Gamma_q(\alpha+1)}$$
$$+\frac{|\Delta|\lambda^{\alpha+\beta+\gamma+\theta}}{\Gamma_q(\beta+\gamma+1)\Gamma_q(\alpha+\beta+\gamma+\theta+1)}$$
$$+\frac{|\Delta|}{\Gamma_q(\gamma+1)\Gamma_q(\alpha+\beta+1)}$$
$$+\frac{|\Delta|\lambda^{\beta+\gamma+\theta}}{\Gamma_q(\beta+\gamma+\theta+1)\Gamma_q(\alpha+1)\Gamma_q(\gamma+1)}$$
$$+\frac{|\Delta|}{\Gamma_q(\beta+1)\Gamma_q(\alpha+1)\Gamma_q(\gamma+1)}. \quad (2.7)$$

Et

$$\Theta^*=\frac{1}{\Gamma_q(\alpha+\beta+\gamma-\mu+1)}+\frac{1}{\Gamma_q(\beta+\gamma-\mu+1)\ \Gamma_q(\alpha+1)}$$
$$+\frac{|\Delta|\Gamma_q(\beta+\gamma+1)\lambda^{\alpha+\beta+\gamma+\theta}}{\Gamma_q(\beta+\gamma-\mu+1)\Gamma_q(\alpha+\beta+\gamma+\theta+1)}$$
$$+\frac{|\Delta|\Gamma_q(\gamma+1)}{\Gamma_q(\gamma-\mu+1)\Gamma_q(\alpha+\beta+1)}$$
$$+\frac{|\Delta|\lambda^{\beta+\gamma+\theta}\Gamma_q(\gamma+1)}{\Gamma_q(\beta+\gamma+\theta+1)\Gamma_q(\alpha+1)\Gamma_q(\gamma-\mu+1)}$$
$$+\frac{|\Delta|\Gamma_q(\gamma+1)}{\Gamma_q(\beta+1)\Gamma_q(\alpha+1)\Gamma_q(\gamma-\mu+1).} \quad (2.8)$$

2.2.1 Unicité de la solution du problème (2.2)

En se basant sur le principe de contraction de Banach, l'unicité de la solution du problème q-fractionnaire (2.2) sera prouvée.

Théorème 2.2.1
Soit p,q :$[0;1]\times\mathbb{R}^2\to\ \mathbb{R}$ et $m:[0;1]\to\mathbb{R}$ des fonction continue, supposons que :

(H_1) : il existe une constant $k_i>0$, (i=1,2) telle que $\forall t\in[0;1]$ et $x_i,y_i\in\mathbb{R},(i=1,2)$

$$|p(t,x_1,x_2)-p(t,y_1,y_2)\le k_1\left(|x_1-y_1)|+|x_2-y_2|\right),$$

et

$$|q(t,x_1,x_2)-q(t,y_1,y_2)\le k_2\left(|x_1-y_1)|+|x_2-y_2|\right).$$

Si

$$k_1A+k_2(1+\frac{1}{\Gamma_q(\varpi+1)})<(\Theta+\Theta^*)^{-1}. \qquad (2.9)$$

Où Θ et Θ^* sont données par (2.7), (2.8). Alors le problème (2.2) admet une solution unique sur $[0;1]$.

Preuve :
Pour montrer que $\mathcal{A}$ admet un point fixe unique, il suffit de montrer que l'opérateur $\mathcal{A}$ est contractant. Définir $\Pi=max\{\Pi_i\ \ i=1,2,3\}$, où Π_i sont des nombres finis donnés par :

$$\Pi_1=\sup_{t\in[0;1]}|p(t,0,0)| \qquad \Pi_2=\sup_{t\in[0;1]}|q(t,0,0)|$$

et

$$\Pi_3=\sup_{t\in[0;1]}|m(t)|$$

On montrons que $\mathcal{A}B_\epsilon\subset B_\epsilon$ où $B_\epsilon=\{x\in X,\quad \|x\|_X\le\epsilon\}$
telle que :

$$\epsilon\ge\frac{\Pi(A+2)(\Theta+\Theta^*)}{1-\left[K_1A+K_2+\dfrac{K_2}{\Gamma_q(\varpi+1)}\right](\Theta+\Theta^*)}, \qquad (2.9)$$

pour $x\in B_\epsilon$, on obtient :

$$|p_x^*(t)|=|p(t,x(t),^{R.L}D_q^\mu x(t))|$$

$$\le|p(t,x(t),^{R.L}D_q^\mu x(t))-p(t,0,0)|+|p(t,0,0)|$$

$$\leq K_1 \left(\|x\| + \|^{R.L}D_q^{\mu}x\|\right) + \Pi_1$$

$$\leq K_1\|x\|_X + \Pi_1 \leq K_1\epsilon + \Pi. \tag{2.10}$$

Et

$$\begin{aligned}|q_x^*(t)| &= |q(t, x(t), ^{R.L} I_q^{\varpi} x(t))| \\ &\leq |q(t, x(t), ^{R.L} I_q^{\varpi} x(t)) - q(t, 0, 0)| + |q(t, 0, 0)| \\ &\leq K_2 \left(\|x\| + \|^{R.L}I_q^{\varpi}(x)\|\right) + \Pi_2 \\ &\leq K_2 \left(1 + \frac{1}{\Gamma_q(\varpi+1)}\right) \|x\|_X + \Pi_2 \\ &\leq K_2 \left(1 + \frac{1}{\Gamma_q(\varpi+1)}\right) \epsilon + \Pi. \end{aligned} \tag{2.11}$$

J'utilise maintenant (2.10) et (2.11), on peut écrire

$$\begin{aligned}\|\mathcal{A}(x)\| \leq \sup_{t\in[0;1]} \Bigg\{ &\frac{1}{\Gamma_q(\alpha+\beta+\gamma)} \int_0^t (t-qs)^{\alpha+\beta+\gamma-1} |\left(m(s) - Ap_x^*(s) - q_x^*(s)\right)| d_q s \\ &- \frac{t^{\beta+\gamma}}{\Gamma_q(\beta+\gamma+1)\ \Gamma_q(\alpha)} \int_0^1 (1-qs)^{\alpha-1} |\left(m(s) - Ap_x^*(s) - q_x^*(s)\right)| d_q s \\ &- \frac{\Delta t^{\gamma}}{\Gamma_q(\alpha+\beta+\gamma+\theta)} \int_0^{\lambda} (\lambda-qs)^{\alpha+\beta+\gamma+\theta-1} |\left(m(s) - Ap_x^*(s) - q_x^*(s)\right)| d_q s \\ &+ \frac{\Delta t^{\gamma}}{\Gamma_q(\alpha+\beta)} \int_0^1 (1-qs)^{\alpha+\beta-1} |\left(m(s) - Ap_x^*(s) - q_x^*(s)\right)| d_q s \\ &+ \frac{\Delta \lambda^{\beta+\gamma+\theta} t^{\gamma}}{\Gamma_q(\beta+\gamma+\theta+1)\Gamma_q(\alpha)} \int_0^1 (1-qs)^{\alpha-1} |\left(m(s) - Ap_x^*(s) - q_x^*(s)\right)| d_q s \\ &- \frac{\Delta t^{\gamma}}{\Gamma_q(\beta+1)\Gamma_q(\alpha)} \int_0^1 (1-qs)^{\alpha-1} |\left(m(s) - Ap_x^*(s) - q_x^*(s)\right)| d_q s \Bigg\}.\end{aligned}$$

Ce qui implique que :

$$\begin{aligned}\|\mathcal{A}(x)\| \leq \left[k_1 A + k_2 + \frac{k_2}{\Gamma_q(\varpi+1)}\right] \Bigg(&\frac{1}{\Gamma_q(\alpha+\beta+\gamma+1)} \\ &+ \frac{1}{\Gamma_q(\beta+\gamma+1)\ \Gamma_q(\alpha+1)} + \frac{|\Delta|\lambda^{\alpha+\beta+\gamma+\theta}}{\Gamma_q(\beta+\gamma+1)\Gamma_q(\alpha+\beta+\gamma+\theta+1)} \\ &+ \frac{|\Delta|}{\Gamma_q(\gamma+1)\Gamma_q(\alpha+\beta+1)} + \frac{|\Delta|\lambda^{\beta+\gamma+\theta}}{\Gamma_q(\beta+\gamma+\theta+1)\Gamma_q(\alpha+1)\Gamma_q(\gamma+1)}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{|\Delta|}{\Gamma_q(\beta+1)\Gamma_q(\alpha+1)\Gamma_q(\gamma+1)}\Bigg)\epsilon+\Pi(A+2)\Bigg(\frac{1}{\Gamma_q(\alpha+\beta+\gamma+1)}\\
&+\frac{1}{\Gamma_q(\beta+\gamma+1)\ \ \Gamma_q(\alpha+1)}+\frac{|\Delta|\lambda^{\alpha+\beta+\gamma+\theta}}{\Gamma_q(\beta+\gamma+1)\Gamma_q(\alpha+\beta+\gamma+\theta+1)}\\
&+\frac{|\Delta|}{\Gamma_q(\gamma+1)\Gamma_q(\alpha+\beta+1)}+\frac{|\Delta|\lambda^{\beta+\gamma+\theta}}{\Gamma_q(\beta+\gamma+\theta+1)\Gamma_q(\alpha+1)\Gamma_q(\gamma+1)}\\
&+\frac{|\Delta|}{\Gamma_q(\beta+1)\Gamma_q(\alpha+1)\Gamma_q(\gamma+1)}\Bigg).\\
&=\left[k_1A+k_2+\frac{k_2}{\Gamma_q(\varpi+1)}\right]\Theta\epsilon+\Pi(A+2)\Theta.
\end{aligned}
$$

Aussi, en utilisant (2.6), on a

$$
\begin{aligned}
\|^{R.L}D_q^{\mu}\mathcal{A}(x)\| \leq &\left[k_1A+k_2+\frac{k_2}{\Gamma_q(\varpi+1)}\right]\Bigg(\frac{1}{\Gamma_q(\alpha+\beta+\gamma-\mu+1)}\\
&+\frac{1}{\Gamma_q(\beta+\gamma-\mu+1)\ \ \Gamma_q(\alpha+1)}+\frac{|\Delta|\Gamma_q(\beta+\gamma+1)\lambda^{\alpha+\beta+\gamma+\theta}}{\Gamma_q(\beta+\gamma-\mu+1)\Gamma_q(\alpha+\beta+\gamma+\theta+1)}\\
&+\frac{|\Delta|\Gamma_q(\gamma+1)}{\Gamma_q(\gamma-\mu+1)\Gamma_q(\alpha+\beta+1)}+\frac{|\Delta|\lambda^{\beta+\gamma+\theta}\Gamma_q(\gamma+1)}{\Gamma_q(\beta+\gamma+\theta+1)\Gamma_q(\alpha+1)\Gamma_q(\gamma-\mu+1)}\\
&+\frac{|\Delta|\Gamma_q(\gamma+1)}{\Gamma_q(\beta+1)\Gamma_q(\alpha+1)\Gamma_q(\gamma-\mu+1)}\Bigg)\epsilon+\Pi(A+2)\Bigg(\frac{1}{\Gamma_q(\alpha+\beta+\gamma-\mu+1)}\\
&+\frac{1}{\Gamma_q(\beta+\gamma-\mu+1)\ \ \Gamma_q(\alpha+1)}+\frac{|\Delta|\Gamma_q(\beta+\gamma+1)\lambda^{\alpha+\beta+\gamma+\theta}}{\Gamma_q(\beta+\gamma-\mu+1)\Gamma_q(\alpha+\beta+\gamma+\theta+1)}\\
&+\frac{|\Delta|\Gamma_q(\gamma+1)}{\Gamma_q(\gamma-\mu+1)\Gamma_q(\alpha+\beta+1)}+\frac{|\Delta|\lambda^{\beta+\gamma+\theta}\Gamma_q(\gamma+1)}{\Gamma_q(\beta+\gamma+\theta+1)\Gamma_q(\alpha+1)\Gamma_q(\gamma-\mu+1)}\\
&+\frac{|\Delta|\Gamma_q(\gamma+1)}{\Gamma_q(\beta+1)\Gamma_q(\alpha+1)\Gamma_q(\gamma-\mu+1)}\Bigg).\\
&=\left[k_1A+k_2+\frac{k_2}{\Gamma_q(\varpi+1)}\right]\Theta^*\epsilon+\Pi(A+2)\Theta^*.
\end{aligned}
$$

Par conséquent :

$$
\begin{aligned}
\|\mathcal{A}(x)\|_X &= \|\mathcal{A}(x)\|+\|^{R.L}D_q^{\mu}\mathcal{A}(x)\|\\
&\leq \left[k_1A+k_2+\frac{k_2}{\Gamma_q(\varpi+1)}\right](\Theta+\Theta^*)\epsilon\\
&+\Pi(A+2)(\Theta+\Theta^*)\leq\epsilon.
\end{aligned}
$$

Cela montre que $\mathcal{A}$ mappe B_ϵ sur lui meme . En effet pour $x, y \in B_\epsilon$ et $t \in [0;1]$ on a :

$$
\begin{aligned}
|\mathcal{A}x(t) - \mathcal{A}y(t)| = \Bigg| & \frac{1}{\Gamma_q(\alpha+\beta+\gamma)} \int_0^t (t-qs)^{\alpha+\beta+\gamma-1} \left(m(s) - Ap_x^*(s) - q_x^*(s)\right) d_qs \\
& - \frac{t^{\beta+\gamma}}{\Gamma_q(\beta+\gamma+1)\ \Gamma_q(\alpha)} \int_0^1 (1-qs)^{\alpha-1} \left(m(s) - Ap_x^*(s) - q_x^*(s)\right) d_qs \\
& - \frac{\Delta t^{\gamma}}{\Gamma_q(\alpha+\beta+\gamma+\theta)} \int_0^\lambda (\lambda-qs)^{\alpha+\beta+\gamma+\theta-1} \left(m(s) - Ap_x^*(s) - q_x^*(s)\right) d_qs \\
& + \frac{\Delta t^{\gamma}}{\Gamma_q(\alpha+\beta)} \int_0^1 (1-qs)^{\alpha+\beta-1} \left(m(s) - Ap_x^*(s) - q_x^*(s)\right) d_qs \\
& + \frac{\Delta \lambda^{\beta+\gamma+\theta} t^{\gamma}}{\Gamma_q(\beta+\gamma+\theta+1)\Gamma_q(\alpha)} \int_0^1 (1-qs)^{\alpha-1} \left(m(s) - Ap_x^*(s) - q_x^*(s)\right) d_qs \\
& - \frac{\Delta t^{\gamma}}{\Gamma_q(\beta+1)\Gamma_q(\alpha)} \int_0^1 (1-qs)^{\alpha-1} \left(m(s) - Ap_x^*(s) - q_x^*(s)\right) d_qs \\
& - \frac{1}{\Gamma_q(\alpha+\beta+\gamma)} \int_0^t (t-qs)^{\alpha+\beta+\gamma-1} \left(m(s) - Ap_y^*(s) - q_y^*(s)\right) d_qs \\
& + \frac{t^{\beta+\gamma}}{\Gamma_q(\beta+\gamma+1)\ \Gamma_q(\alpha)} \int_0^1 (1-qs)^{\alpha-1} \left(m(s) - Ap_y^*(s) - q_y^*(s)\right) d_qs \\
& + \frac{\Delta t^{\gamma}}{\Gamma_q(\alpha+\beta+\gamma+\theta)} \int_0^\lambda (\lambda-qs)^{\alpha+\beta+\gamma+\theta-1} \left(m(s) - Ap_y^*(s) - q_y^*(s)\right) d_qs \\
& - \frac{\Delta t^{\gamma}}{\Gamma_q(\alpha+\beta)} \int_0^1 (1-qs)^{\alpha+\beta-1} \left(m(s) - Ap_y^*(s) - q_y^*(s)\right) d_qs \\
& - \frac{\Delta \lambda^{\beta+\gamma+\theta} t^{\gamma}}{\Gamma_q(\beta+\gamma+\theta+1)\Gamma_q(\alpha)} \int_0^1 (1-qs)^{\alpha-1} \left(m(s) - Ap_y^*(s) - q_y^*(s)\right) d_qs \\
& + \frac{\Delta t^{\gamma}}{\Gamma_q(\beta+1)\Gamma_q(\alpha)} \int_0^1 (1-qs)^{\alpha-1} \left(m(s) - Ap_y^*(s) - q_y^*(s)\right) d_qs \Bigg|. \qquad (2.12)
\end{aligned}
$$

Donc :

$$
\begin{aligned}
|\mathcal{A}x(t) - \mathcal{A}y(t)| \leq & \frac{1}{\Gamma_q(\alpha+\beta+\gamma)} \int_0^t (t-qs)^{\alpha+\beta+\gamma-1} (A|p_x^*(s) - p_y^*(s)| + |q_x^*(s) - q_y^*(s)|) d_qs \\
& + \frac{t^{\beta+\gamma}}{\Gamma_q(\beta+\gamma+1)\ \Gamma_q(\alpha)} \int_0^1 (1-qs)^{\alpha-1} (A|p_x^*(s) - p_y^*(s)| + |q_x^*(s) - q_y^*(s)|) d_qs
\end{aligned}
$$

$$+\frac{|\Delta|t^{\beta+\gamma}}{\Gamma_q(\alpha+\beta+\gamma+\theta)}\int_0^\lambda(\lambda-qs)^{\alpha+\beta+\gamma+\theta-1}(A|p_x^*(s)-p_y^*(s)|+|q_x^*(s)-q_y^*(s)|)d_qs$$

$$+\frac{|\Delta|t^{\gamma}}{\Gamma_q(\alpha+\beta)}\int_0^1(1-qs)^{\alpha+\beta-1}(A|p_x^*(s)-p_y^*(s)|+|q_x^*(s)-q_y^*(s)|)d_qs$$

$$+\frac{|\Delta|t^{\gamma}}{\Gamma_q(\alpha+\beta)}\int_0^1(1-qs)^{\alpha+\beta-1}(A|p_x^*(s)-p_y^*(s)|+|q_x^*(s)-q_y^*|)d_qs$$

$$+\frac{|\Delta|t^{\gamma}}{\Gamma_q(\beta+1)\Gamma_q(\alpha)}\int_0^1(1-qs)^{\alpha-1}(A|p_x^*(s)-p_y^*(s)|+|q_x^*(s)-q_y^*(s)|)d_qs$$

$$+\frac{1}{\Gamma_q(\alpha+\beta+\gamma)}\int_0^t(t-qs)^{\alpha+\beta+\gamma-1}(A|p_x^*(s)-p_y^*(s)|+|q_x^*(s)-q_y^*(s)|)d_qs$$

$$+\frac{t^{\beta+\gamma}}{\Gamma_q(\beta+\gamma+1)\ \Gamma_q(\alpha)}\int_0^1(1-qs)^{\alpha-1}(A|p_x^*(s)-p_y^*(s)|+|q_x^*(s)-q_y^*(s)|)d_qs$$

$$+\frac{|\Delta|t^{\beta+\gamma}}{\Gamma_q(\alpha+\beta+\gamma+\theta)}\int_0^\lambda(\lambda-qs)^{\alpha+\beta+\gamma+\theta-1}(A|p_x^*(s)-p_y^*(s)|+|q_x^*(s)-q_y^*(s)|)d_qs$$

$$+\frac{|\Delta|t^{\gamma}}{\Gamma_q(\alpha+\beta)}\int_0^1(1-qs)^{\alpha+\beta-1}(A|p_x^*(s)-p_y^*(s)|+|q_x^*(s)-q_y^*(s)|)d_qs$$

$$+\frac{|\Delta|\lambda^{\beta+\gamma+\theta}t^{\gamma}}{\Gamma_q(\beta+\gamma+\theta+1)\Gamma_q(\alpha)}\int_0^1(1-qs)^{\alpha-1}(A|p_x^*(s)-p_y^*(s)|+|q_x^*(s)-q_y^*(s)|)d_qs$$

$$+\frac{|\Delta|t^{\gamma}}{\Gamma_q(\beta+1)\Gamma_q(\alpha)}\int_0^1(1-qs)^{\alpha-1}(A|p_x^*(s)-p_y^*(s)|+|q_x^*(s)-q_y^*(s)|)d_qs. \tag{2.13}$$

$$\|\mathcal{A}(x)-\mathcal{A}(y)\|\leq\sup_{t\in[0;1]}\left\{\frac{1}{\Gamma_q(\alpha+\beta+\gamma)}\int_0^t(t-qs)^{\alpha+\beta+\gamma-1}(A|p_x^*(s)-p_y^*(s)|+|q_x^*(s)-q_y^*(s)|)d_qs\right.$$

$$+\frac{t^{\beta+\gamma}}{\Gamma_q(\beta+\gamma+1)\ \Gamma_q(\alpha)}\int_0^1(1-qs)^{\alpha-1}(A|p_x^*(s)-p_y^*(s)|+|q_x^*(s)-q_y^*(s)|)d_qs$$

$$+\frac{|\Delta|t^{\beta+\gamma}}{\Gamma_q(\alpha+\beta+\gamma+\theta)}\int_0^\lambda(\lambda-qs)^{\alpha+\beta+\gamma+\theta-1}(A|p_x^*(s)-p_y^*(s)|+|q_x^*(s)-q_y^*(s)|)d_qs$$

$$+\frac{|\Delta|t^{\gamma}}{\Gamma_q(\alpha+\beta)}\int_0^1(1-qs)^{\alpha+\beta-1}(A|p_x^*(s)-p_y^*(s)|+|q_x^*(s)-q_y^*(s)|)d_qs$$

$$+\frac{|\Delta|t^{\gamma}}{\Gamma_q(\alpha+\beta)}\int_0^1(1-qs)^{\alpha+\beta-1}(A|p_x^*(s)-p_y^*(s)|+|q_x^*(s)-q_y^*|)d_qs$$

$$+\frac{|\Delta|t^{\gamma}}{\Gamma_q(\beta+1)\Gamma_q(\alpha)}\int_0^1(1-qs)^{\alpha-1}(A|p_x^*(s)-p_y^*(s)|+|q_x^*(s)-q_y^*(s)|)d_qs$$

$$+\frac{1}{\Gamma_q(\alpha+\beta+\gamma)}\int_0^t(t-qs)^{\alpha+\beta+\gamma-1}(A|p_x^*(s)-p_y^*(s)|+|q_x^*(s)-q_y^*(s)|)d_qs$$

$$+\frac{t^{\beta+\gamma}}{\Gamma_q(\beta+\gamma+1)\ \Gamma_q(\alpha)}\int_0^1(1-qs)^{\alpha-1}(A|p_x^*(s)-p_y^*(s)|+|q_x^*(s)-q_y^*(s)|)d_qs$$

$$+\frac{|\Delta|t^{\beta+\gamma}}{\Gamma_q(\alpha+\beta+\gamma+\theta)}\int_0^\lambda(\lambda-qs)^{\alpha+\beta+\gamma+\theta-1}(A|p_x^*(s)-p_y^*(s)|+|q_x^*(s)-q_y^*(s)|)d_qs$$

$$+\frac{|\Delta|t^{\gamma}}{\Gamma_q(\alpha+\beta)}\int_0^1(1-qs)^{\alpha+\beta-1}(A|p_x^*(s)-p_y^*(s)|+|q_x^*(s)-q_y^*(s)|)d_qs$$

$$+\frac{|\Delta|\lambda^{\beta+\gamma+\theta}t^{\gamma}}{\Gamma_q(\beta+\gamma+\theta+1)\Gamma_q(\alpha)}\int_0^1(1-qs)^{\alpha-1}(A|p_x^*(s)-p_y^*(s)|+|q_x^*(s)-q_y^*(s)|)d_qs$$

$$+\frac{|\Delta|t^{\gamma}}{\Gamma_q(\beta+1)\Gamma_q(\alpha)}\int_0^1(1-qs)^{\alpha-1}(A|p_x^*(s)-p_y^*(s)|+|q_x^*(s)-q_y^*(s)|)d_qs\Bigg\}. \tag{2.14}$$

Donc, en utilisant l'hypothèse (H_1), on trouve :

$$\|\mathcal{A}(x)-\mathcal{A}(y)\|\leq\left[K_1A+K_2+\frac{K_2}{\Gamma_q(\varpi+1)}\right]\Theta\|x-y\|, \tag{2.15}$$

et

$$\|^{R.L}D_q^\mu\mathcal{A}(x)-^{R.L}D_q^\mu\mathcal{A}(y)\|\leq\left[K_1A+K_2+\frac{K_2}{\Gamma_q(\varpi+1)}\right]\Theta^*\|x-y\|. \tag{2.16}$$

De la définition de $\|.\|_X$, on obtient :

$$\|\mathcal{A}(x)-\mathcal{A}(y)\|_X = \|\mathcal{A}x-\mathcal{A}y\| + \|^{R.L}D_q^{\mu}\mathcal{A}x -^{R.L} D_q^{\mu}\mathcal{A}y\|$$

$$\leq \left[K_1A+K_2+\frac{K_2}{\Gamma_q(\varpi+1)}\right](\Theta+\Theta^*)\|x-y\|_X.$$

Où Θ et Θ^* sont donnés par (2.7)(2.8), on a :

$$\left[k_1A+k_2+\frac{k_2}{\Gamma_q(\varpi+1)}\right] < (\Theta+\Theta^*)^{-1}.$$

Par conséquent, $\mathcal{A}$ est une contraction. Ainsi, selon le théorème du point fixe de Banach, le problème (2.2) admet une solution unique.

Exemple 04

On considère le problème de Duffing q-fractionnaire suivante :

$$\begin{cases} {}^cD_{0.25}^{\frac{e}{4}}\left[{}^cD_{0.25}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left[{}^{R.L}D_{0.25}^{\frac{\pi}{5}}x(t)\right]\right] = \dfrac{1+e^{t+1}}{25} - \dfrac{e}{2}\left(\dfrac{t^2+Cos(2\pi x(t))}{39\pi(e+\sqrt{\pi})e^{-t^2}}\right. \\ \left. +\dfrac{t^2Sin(2\pi^{R.L}D_{0.25}^{\frac{1}{10}}[x(t)])}{39\pi(e+\sqrt{\pi})e^{-t^2}} + \dfrac{t^2(cosht+1)}{39\pi(e+\sqrt{\pi})e^{-t^2}}\right) \\ -\dfrac{e^{-\pi}}{49(ln(t+2)+\pi^2)}\left(Sin^2x(t)+\dfrac{{}^{R.L}I_{0.25}^{\frac{5}{6}}x(t)}{1+^{R.L}I_q^{\frac{5}{6}}x(t)}+\dfrac{Sinh(t^2+1)}{7}\right), \\ x(0)=0; \\ {}^cD_{0.25}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left[{}^{R.L}D_{0.25}^{\frac{\pi}{5}}x(1)\right]=0; \\ {}^{R.L}D_{0.25}^{\frac{\pi}{5}}x(1) =^{R.L} I_{0.25}^{\frac{5}{6}}x(\frac{3}{4}); \\ avec \\ \alpha=\frac{e}{4},\ \ \beta=\frac{\sqrt{3}}{2},\ \ \gamma=\frac{\pi}{5},\ \ A=\frac{e}{4}>0. \\ \ \ \mu=\frac{1}{10}<\gamma=\frac{\pi}{5}, \varpi=\frac{5}{6}>0,\ et\ \theta=\frac{1}{3},\ \ \lambda=\frac{3}{4},\ \ \ q=\frac{1}{4}\in[0;1]. \end{cases}$$

Où

$$p_x^*(t) = \frac{t^2+Cos(2\pi x(t))}{39\pi(e+\sqrt{\pi})e^{-t^2}} + \frac{t^2Sin(2\pi^{R.L}D_{0.25}^{\frac{1}{10}}[x(t)])}{39\pi(e+\sqrt{\pi})e^{-t^2}} + \frac{t^2(cosht+1)}{39\pi(e+\sqrt{\pi})e^{-t^2}},$$

$$q_x^*(t) = -\frac{e^{-\pi}}{49(ln(t+2)+\pi^2)}\left(Sin^2x(t)+\frac{{}^{R.L}I_{0.25}^{\frac{5}{6}}x(t)}{1+^{R.L}I_q^{\frac{5}{6}}x(t)}+\frac{Sinh(t^2+1)}{7}\right),$$

$$m(t) = \frac{1+e^{t+1}}{25},$$

à partir de ces données, on obtient :

$$\Delta = \frac{\Gamma_{0.25}(\frac{e}{4}+\frac{1}{3}+1)}{\Gamma_{0.25}(\frac{\pi}{5}+1)\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{\pi}{5}+\frac{1}{3}}-\Gamma_{0.25}(\frac{\pi}{5}+\frac{1}{3}+1)\right]}.$$

$\Delta = -4.464919794.$

$$\Theta = \frac{1}{\Gamma_{\frac{1}{4}}(\frac{e}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{5}+1)}+\frac{1}{\Gamma_{\frac{1}{4}}(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{5}+1)\Gamma_{\frac{1}{4}}(\frac{e}{4}+1)}$$
$$+\frac{|-4.464919794|\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{e}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{5}+\frac{1}{3}}}{\Gamma_{\frac{1}{4}}(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{5}+1)\Gamma_{\frac{1}{4}}(\frac{e}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{5}+\frac{1}{3}+1)}$$
$$+\frac{|-4.464919794|}{\Gamma_{\frac{1}{4}}(\frac{\pi}{5}+1)+\Gamma_{\frac{1}{4}}(\frac{e}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}+1)}$$
$$+\frac{|-4.464919794|\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{5}+\frac{1}{3}}}{\Gamma_{\frac{1}{4}}(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{5}+\frac{1}{3}+1)\Gamma_{\frac{1}{4}}(\frac{e}{4}+1)\Gamma_{\frac{1}{4}}(\frac{\pi}{5}+1)}$$
$$+\frac{|-4.464919794|}{\Gamma_{\frac{1}{4}}(\frac{\sqrt{3}}{2}+1)\Gamma_{\frac{1}{4}}(\frac{e}{4}+1)\Gamma_{\frac{1}{4}}(\frac{\pi}{5}+1)}.$$

$\Theta = 10.71615689.$

$$\Theta^* = \frac{1}{\Gamma_{\frac{1}{4}}(\frac{e}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{5}-\frac{1}{2}+1)}+\frac{1}{\Gamma_{\frac{1}{4}}(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{5}-\frac{1}{2}+1)\Gamma_{\frac{1}{4}}(\frac{e}{4}+1)}$$
$$+\frac{|-4.464919794|\Gamma_{\frac{1}{4}}(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{5}+1)\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{e}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{5}+\frac{1}{3}}}{\Gamma_{\frac{1}{4}}(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{5}-\frac{1}{2}+1)\Gamma_{\frac{1}{4}}(\frac{e}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{5}+\frac{1}{3}+1)}$$
$$+\frac{|-4.464919794|\Gamma_{\frac{1}{4}}(\frac{\pi}{5}+1)}{\Gamma_{\frac{1}{4}}(\frac{\pi}{5}-\frac{1}{2}+1)+\Gamma_{\frac{1}{4}}(\frac{e}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}+1)}$$
$$+\frac{|-4.464919794|\Gamma_{\frac{1}{4}}(\frac{\pi}{5}+1)\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{5}+\frac{1}{3}}}{\Gamma_{\frac{1}{4}}(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{5}+\frac{1}{3}+1)\Gamma_{\frac{1}{4}}(\frac{e}{4}+1)\Gamma_{\frac{1}{4}}(\frac{\pi}{5}-\frac{1}{2}+1)}$$
$$+\frac{|-4.464919794|\Gamma_{\frac{1}{4}}(\frac{\pi}{5}+1)}{\Gamma_{\frac{1}{4}}(\frac{\sqrt{3}}{2}+1)\Gamma_{\frac{1}{4}}(\frac{e}{4}+1)\Gamma_{\frac{1}{4}}(\frac{\pi}{5}-\frac{1}{2}+1)}.$$

$\Theta^* = 14.35694133.$

Et pour tous $t \in [0;1]$ et $x_i, y_i \in \mathbb{R}$ $i=(1,2)$

$$|p(t,x_1,x_2)-p(t,y_1,y_2)| \leq \frac{t^2}{39\pi(e+\sqrt{\pi})e^{-t^2}}|x_1-y_1|+\frac{t^2}{39\pi(e+\sqrt{\pi})e^{-t^2}}|x_2-y_2|,$$

et

$$|q(t,x_1,x_2)-q(t,y_1,y_2)| \leq \frac{e^{-\pi}}{49(ln(t+2)+\pi^2)}|x_1-y_1|+\frac{e^{-\pi}}{49(ln(t+2)+\pi^2)}|x_2-y_2|.$$

Donc la condition (C_1) est satisfait

$$k_1 = \frac{e}{39\pi(e+\sqrt{\pi})}, \qquad k_2 = \frac{e^{-\pi}}{49(ln(2)+\pi)}.$$

D'où (H_1)

$$k_1A + K_2 + \frac{k_2}{\Gamma_{\frac{1}{4}(\frac{5}{6}+1)}} = 0.00688447375 \leq (\Theta + \Theta^*)^{-1} = 0.039883388383,$$

donc tout les condition du théorème satisfaite, par conséquent le problème (2.1) admet une solution unique.

2.2.2 Existence de la solution du problème (2.2)

Le théorème suivant établit l'existence d'une solution au moins d'une problème q-fractionnaire(2.2) : la preuve du ce théorème est basé sur le théorème du point fixe de Leray-Schauder.

Théorème 2.2.2

Soit $p, q : [0;1] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $m : [0;1] \to \mathbb{R}$ des fonctions continues, supposons que :
(H_1) : Il existe des constant $\xi_i,\ \ \kappa_i \geq 0 \quad (i = 0, 1, 2)$ telles que :

$$|p(t, x, y)| \leq \xi_0 + \xi_1|x| + \xi_2|y|.$$
$$|q(t, x, y)| \leq \kappa_0 + \kappa_1|x| + \kappa_2|y|.$$

(H_2) : Il existe un constant $M > 0$ et $|m(t)| \leq M,\ \ \forall t \in [0;1]$:

$$A(\xi_1 + \xi_2) + \kappa_1 + \kappa_2 < (\Theta + \Theta^*)^{-1} \tag{2.17}$$

Où Θ et Θ^* sont données par (2.7)(2.8). Alors le problème (2.2)admet au moins une solution sur [0;1].

Preuve :
On va utiliser le théorème du point fixe de Leray-Schauder pour montrer l'existence d'une solution pour le problème (2.2), et pour cela on passera par 4 étapes .
Étape 1:
On montre que $\mathcal{A}$ est continue
Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ une suite telle que : $x_n \to x \quad (\lim\limits_{n\to+\infty} \|x_n - x\| = 0)$, il faut montre que

$$\lim_{n\to+\infty} \|\mathcal{A}x_n - \mathcal{A}x\| = 0.$$

On a

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}x_n(t) = &\frac{1}{\Gamma_q(\alpha+\beta+\gamma)} \int_0^t (t-qs)^{\alpha+\beta+\gamma-1} \left(m(s) - Ap^*_{x_n}(s) - q^*_{x_n}(s)\right) d_qs \\
&- \frac{t^{\beta+\gamma}}{\Gamma_q(\beta+\gamma+1)\ \Gamma_q(\alpha)} \int_0^1 (1-qs)^{\alpha-1} \left(m(s) - Ap^*_{x_n}(s) - q^*_{x_n}(s)\right) d_qs \\
&- \frac{\Delta t^\gamma}{\Gamma_q(\alpha+\beta+\gamma+\theta)} \int_0^\lambda (\lambda-qs)^{\alpha+\beta+\gamma+\theta-1} \left(m(s) - Ap^*_{x_n}(s) - q^*_{x_n}(s)\right) d_qs \\
&+ \frac{\Delta t^\gamma}{\Gamma_q(\alpha+\beta)} \int_0^1 (1-qs)^{\alpha+\beta-1} \left(m(s) - Ap^*_{x_n}(s) - q^*_{x_n}(s)\right) d_qs \\
&+ \frac{\Delta\lambda^{\beta+\gamma+\theta} t^\gamma}{\Gamma_q(\beta+\gamma+\theta+1)\Gamma_q(\alpha)} \int_0^1 (1-qs)^{\alpha-1} \left(m(s) - Ap^*_{x_n}(s) - q^*_{x_n}(s)\right) d_qs
\end{aligned}$$

$$-\frac{\Delta t^{\gamma}}{\Gamma_q(\beta+1)\Gamma_q(\alpha)}\int_0^1 (1-qs)^{\alpha-1}\left(m(s)-Ap_{x_n}^*(s)-q_{x_n}^*(s)\right)d_qs.$$

Pour tout $x\in\mathbb{R}$ et $t\in[0;1]$, on a :

$$|\mathcal{A}x_n(t)-\mathcal{A}x(t)| = \Bigg|\frac{1}{\Gamma_q(\alpha+\beta+\gamma)}\int_0^t (t-qs)^{\alpha+\beta+\gamma-1}\left(m(s)-Ap_{x_n}^*(s)-q_{x_n}^*(s)\right)d_qs$$

$$-\frac{t^{\beta+\gamma}}{\Gamma_q(\beta+\gamma+1)\ \Gamma_q(\alpha)}\int_0^1 (1-qs)^{\alpha-1}\left(m(s)-Ap_{x_n}^*(s)-q_{x_n}^*(s)\right)d_qs$$
$$-\frac{\Delta t^{\gamma}}{\Gamma_q(\alpha+\beta+\gamma+\theta)}\int_0^\lambda (\lambda-qs)^{\alpha+\beta+\gamma+\theta-1}\left(m(s)-Ap_{x_n}^*(s)-q_{x_n}^*(s)\right)d_qs$$
$$+\frac{\Delta t^{\gamma}}{\Gamma_q(\alpha+\beta)}\int_0^1 (1-qs)^{\alpha+\beta-1}\left(m(s)-Ap_{x_n}^*(s)-q_{x_n}^*(s)\right)d_qs$$
$$+\frac{\Delta\lambda^{\beta+\gamma+\theta}t^{\gamma}}{\Gamma_q(\beta+\gamma+\theta+1)\Gamma_q(\alpha)}\int_0^1 (1-qs)^{\alpha-1}\left(m(s)-Ap_{x_n}^*(s)-q_{x_n}^*(s)\right)d_qs$$
$$-\frac{\Delta t^{\gamma}}{\Gamma_q(\beta+1)\Gamma_q(\alpha)}\int_0^1 (1-qs)^{\alpha-1}\left(m(s)-Ap_{x_n}^*(s)-q_{x_n}^*(s)\right)d_qs$$

$$-\frac{1}{\Gamma_q(\alpha+\beta+\gamma)}\int_0^t (t-qs)^{\alpha+\beta+\gamma-1}\left(m(s)-Ap_{x^*(s)-q_x^*(s)}\right)d_qs$$

$$+\frac{t^{\beta+\gamma}}{\Gamma_q(\beta+\gamma+1)\ \Gamma_q(\alpha)}\int_0^1 (1-qs)^{\alpha-1}\left(m(s)-Ap_x^*(s)-q_x^*(s)\right)d_qs$$
$$+\frac{\Delta t^{\gamma}}{\Gamma_q(\alpha+\beta+\gamma+\theta)}\int_0^\lambda (\lambda-qs)^{\alpha+\beta+\gamma+\theta-1}\left(m(s)-Ap_x^*(s)-q_x^*(s)\right)d_qs$$
$$-\frac{\Delta t^{\gamma}}{\Gamma_q(\alpha+\beta)}\int_0^1 (1-qs)^{\alpha+\beta-1}\left(m(s)-Ap_{x_n}^*(s)-q_{x_n}^*(s)\right)d_qs$$
$$-\frac{\Delta\lambda^{\beta+\gamma+\theta}t^{\gamma}}{\Gamma_q(\beta+\gamma+\theta+1)\Gamma_q(\alpha)}\int_0^1 (1-qs)^{\alpha-1}\left(m(s)-Ap_x^*(s)-q_x^*(s)\right)d_qs$$
$$+\frac{\Delta t^{\gamma}}{\Gamma_q(\beta+1)\Gamma_q(\alpha)}\int_0^1 (1-qs)^{\alpha-1}\left(m(s)-Ap_x^*(s)-q_x^*(s)\right)d_qs\Bigg|.$$

Ce qui donne :

$$|\mathcal{A}x_n(t)-\mathcal{A}x(t)| \leq \frac{1}{\Gamma_q(\alpha+\beta+\gamma)}\int_0^t (t-qs)^{\alpha+\beta+\gamma-1}\left|A(p_{xn}^*(s)-p_x^*(s))+(q_{xn}^*(s)-q_x^*(s))\right|d_qs$$

$$+\frac{t^{\beta+\gamma}}{\Gamma_q(\beta+\gamma+1)\ \Gamma_q(\alpha)}\int_0^1 (1-qs)^{\alpha-1}\left|A(p_{xn}^*(s)-p_x^*(s))+(q_{xn}^*(s)-q_x^*(s))\right|d_qs$$

$$+\frac{|\Delta|t^{\gamma}}{\Gamma_q(\alpha+\beta+\gamma+\theta)}\int_0^\lambda (\lambda-qs)^{\alpha+\beta+\gamma+\theta-1}\left|A(p_{xn}^*(s)-p_x^*(s))+(q_{xn}^*(s)-q_x^*(s))\right|d_qs$$

$$+\frac{|\Delta|t^{\gamma}}{\Gamma_q(\alpha+\beta)}\int_0^1 (1-qs)^{\alpha+\beta-1}\left|A(p_{xn}^*(s)-p_x^*(s))+(q_{xn}^*(s)-q_x^*(s))\right|d_qs$$

$$+\frac{|\Delta|\lambda^{\beta+\gamma+\theta}t^{\gamma}}{\Gamma_q(\beta+\gamma+\theta+1)\Gamma_q(\alpha)}\int_0^1 (1-qs)^{\alpha-1}\left|A(p_{xn}^*(s)-p_x^*(s))+(q_{xn}^*(s)-q_x^*(s))\right|d_qs$$

$$+\frac{|\Delta t^{\gamma}}{\Gamma_q(\beta+1)\Gamma_q(\alpha)}\int_0^1 (1-qs)^{\alpha-1}\Big|A(p^*_{xn}(s)-p^*_x(s))+(q^*_{xn}(s)-q^*_x(s))\Big|d_qs.$$

Comme p,q des fonction continue, Alors :

$$\lim_{n\to+\infty}\|\mathcal{A}x_n-\mathcal{A}x\|=0.$$

D'où $\mathcal{A}$ est continue sur X.

Étape 2:

On montre que $\mathcal{A}$ est borné

On définit l'ensemble $x\in B_\epsilon=\{x\in X;\quad \|x\|\leq\epsilon\}$

$$\begin{aligned}|\mathcal{A}x(t)|=\Big|&\frac{1}{\Gamma_q(\alpha+\beta+\gamma)}\int_0^t (t-qs)^{\alpha+\beta+\gamma-1}\left(m(s)-Ap^*_x(s)-q^*_x(s)\right)d_qs\\ &-\frac{t^{\beta+\gamma}}{\Gamma_q(\beta+\gamma+1)\ \Gamma_q(\alpha)}\int_0^1 (1-qs)^{\alpha-1}\left(m(s)-Ap^*_x(s)-q^*_x(s)\right)d_qs\\ &-\frac{\Delta t^{\gamma}}{\Gamma_q(\alpha+\beta+\gamma+\theta)}\int_0^\lambda (\lambda-qs)^{\alpha+\beta+\gamma+\theta-1}\left(m(s)-Ap^*_x(s)-q^*_x(s)\right)d_qs\\ &+\frac{\Delta t^{\gamma}}{\Gamma_q(\alpha+\beta)}\int_0^1 (1-qs)^{\alpha+\beta-1}\left(m(s)-Ap^*_x(s)-q^*_x(s)\right)d_qs\\ &+\frac{\Delta\lambda^{\beta+\gamma+\theta}t^{\gamma}}{\Gamma_q(\beta+\gamma+\theta+1)\Gamma_q(\alpha)}\int_0^1 (1-qs)^{\alpha-1}\left(m(s)-Ap^*_x(s)-q^*_x(s)\right)d_qs\\ &-\frac{\Delta t^{\gamma}}{\Gamma_q(\beta+1)\Gamma_q(\alpha)}\int_0^1 (1-qs)^{\alpha-1}\left(m(s)-Ap^*_x(s)-q^*_x(s)\right)d_qs\Big|.\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}|\mathcal{A}x(t)|\leq&\frac{1}{\Gamma_q(\alpha+\beta+\gamma)}\int_0^t (t-qs)^{\alpha+\beta+\gamma-1}\left(|m(s)-Ap^*_x(s)-q^*_x(s)|\right)d_qs\\ &+\frac{t^{\beta+\gamma}}{\Gamma_q(\beta+\gamma+1)\ \Gamma_q(\alpha)}\int_0^1 (1-qs)^{\alpha-1}\left(|m(s)-Ap^*_x(s)-q^*_x(s)|\right)d_qs\\ &+\frac{|\Delta|t^{\gamma}}{\Gamma_q(\alpha+\beta+\gamma+\theta)}\int_0^\lambda (\lambda-qs)^{\alpha+\beta+\gamma+\theta-1}\left(|m(s)-Ap^*_x(s)-q^*_x(s)|\right)d_qs\\ &+\frac{|\Delta|t^{\gamma}}{\Gamma_q(\alpha+\beta)}\int_0^1 (1-qs)^{\alpha+\beta-1}\left(|m(s)-Ap^*_x(s)-q^*_x(s)|\right)d_qs\\ &+\frac{|\Delta||\lambda|^{\beta+\gamma+\theta}t^{\gamma}}{\Gamma_q(\beta+\gamma+\theta+1)\Gamma_q(\alpha)}\int_0^1 (1-qs)^{\alpha-1}\left(|m(s)-Ap^*_x(s)-q^*_x(s)|\right)d_qs\\ &+\frac{|\Delta|t^{\gamma}}{\Gamma_q(\beta+1)\Gamma_q(\alpha)}\int_0^1 (1-qs)^{\alpha-1}\left((s)-Ap^*_x(s)-q^*_x(s)|\right)d_qs.\end{aligned}$$

Il existe une constante positive $\Lambda_i\ \ (i=1,2)$, telle que :

$$|p^*_x(s)|=|p(s,x(s),^{R.L}D^{\mu}_q[x(s)]|\leq\Lambda_1,$$
$$|q^*_x(s)|=|q(s,x(s),^{R.L}I^{\varpi}_q[x(\lambda)]|\leq\Lambda_2.$$

En utilisant l'hypothèse (H_2), on obtient :

$$\|\mathcal{A}x(t)\| \leq \Theta[M + A\Lambda_1 + \Lambda_2].$$
$$\|^{R.L}D_q^{\mu}\mathcal{A}x(t)\| \leq \Theta^*[M + A\Lambda_1 + \Lambda_2].$$

D'après la définition de $\|.\|_X$, on a ;

$$\begin{aligned}\|\mathcal{A}(x)\|_X &= \|\mathcal{A}(x)\| + \|^{R.L}D_q^{\mu}\mathcal{A}(x)\| \\ &\leq \underbrace{\Theta[M + A\Lambda_1 + \Lambda_2]}_{H} + \underbrace{\Theta^*[M + A\Lambda_1 + \Lambda_2]}_{K} \\ &\leq H + K < \infty\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{A}$ est bornée.

Étape 3:

On montre $\mathcal{A}$ est équicontinue

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $t_1, t_2 \in [0;1]$ avec $t_1 < t_2$, on a :

$$\begin{aligned}|\mathcal{A}x(t_2) - \mathcal{A}x(t_1)| = \Bigg| & \frac{1}{\Gamma_q(\alpha+\beta+\gamma)} \int_0^{t_2} (t_2 - qs)^{\alpha+\beta+\gamma-1} \left(m(s) - Ap_x^*(s) - q_x^*(s)\right) d_qs \\ & - \frac{t_2^{\beta+\gamma}}{\Gamma_q(\beta+\gamma+1)\ \Gamma_q(\alpha)} \int_0^1 (1 - qs)^{\alpha-1} \left(m(s) - Ap_x^*(s) - q_x^*(s)\right) d_qs \\ & - \frac{\Delta t_2^{\gamma}}{\Gamma_q(\alpha+\beta+\gamma+\theta)} \int_0^{\lambda} (\lambda - qs)^{\alpha+\beta+\gamma+\theta-1} \left(m(s) - Ap_x^*(s) - q_x^*(s)\right) d_qs \\ & + \frac{\Delta t_2^{\gamma}}{\Gamma_q(\alpha+\beta)} \int_0^1 (1 - qs)^{\alpha+\beta-1} \left(m(s) - Ap_x^*(s) - q_x^*(s)\right) d_qs \\ & + \frac{\Delta \lambda^{\beta+\gamma+\theta} t_2^{\gamma}}{\Gamma_q(\beta+\gamma+\theta+1)\Gamma_q(\alpha)} \int_0^1 (1 - qs)^{\alpha-1} \left(m(s) - Ap_x^*(s) - q_x^*(s)\right) d_qs \\ & - \frac{\Delta t_2^{\gamma}}{\Gamma_q(\beta+1)\Gamma_q(\alpha)} \int_0^1 (1 - qs)^{\alpha-1} \left(m(s) - Ap_x^*(s) - q_x^*(s)\right) d_qs \\ & - \frac{1}{\Gamma_q(\alpha+\beta+\gamma)} \int_0^{t_1} (t_1 - qs)^{\alpha+\beta+\gamma-1} \left(m(s) - Ap_x^*(s) - q_x^*(s)\right) d_qs \\ & + \frac{t_1^{\beta+\gamma}}{\Gamma_q(\beta+\gamma+1)\ \Gamma_q(\alpha)} \int_0^1 (1 - qs)^{\alpha-1} \left(m(s) - Ap_x^*(s) - q_x^*(s)\right) d_qs \\ & + \frac{\Delta t_1^{\gamma}}{\Gamma_q(\alpha+\beta+\gamma+\theta)} \int_0^{\lambda} (\lambda - qs)^{\alpha+\beta+\gamma+\theta-1} \left(m(s) - Ap_x^*(s) - q_x^*(s)\right) d_qs\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{\Delta t_1^{\gamma}}{\Gamma_q(\alpha+\beta)}\int_0^1 (1-qs)^{\alpha+\beta-1}\left(m(s)-Ap_x^*(s)-q_x^*(s)\right)d_qs\\
&-\frac{\Delta\lambda^{\beta+\gamma+\theta}t_1^{\gamma}}{\Gamma_q(\beta+\gamma+\theta+1)\Gamma_q(\alpha)}\int_0^1 (1-qs)^{\alpha-1}\left(m(s)-Ap_x^*(s)-q_x^*(s)\right)d_qs\\
&+\frac{\Delta t_1^{\gamma}}{\Gamma_q(\beta+1)\Gamma_q(\alpha)}\int_0^1 (1-qs)^{\alpha-1}\left(m(s)-Ap_x^*(s)-q_x^*(s)\right)d_qs\Bigg|
\end{aligned}
$$

Ce qui donne :

$$
\begin{aligned}
|\mathcal{A}x(t_2)-\mathcal{A}x(t_1)| \leq &\frac{1}{\Gamma_q(\alpha+\beta+\gamma)}\int_0^{t_1}\left((t_2-qs)^{\alpha+\beta+\gamma-1}-(t_1-qs)^{\alpha+\beta+\gamma-1}\right)|m(s)-Ap_x^*(s)-q_x^*(s)|d_qs\\
&+\frac{1}{\Gamma_q(\alpha+\beta+\gamma)}\int_{t_1}^{t_2}\left((t_2-qs)^{\alpha+\beta+\gamma-1}\right)|m(s)-Ap_x^*(s)-q_x^*(s)|d_qs\\
&+\frac{|t_1^{\beta+\gamma}-t_2^{\beta+\gamma}|}{\Gamma_q(\beta+\gamma+1)\Gamma_q(\alpha)}\int_0^1\left((1-qs)^{\alpha+\beta+\gamma-1}\right)|m(s)-Ap_x^*(s)-q_x^*(s)|d_qs\\
&+\frac{|\Delta||t_2^{\gamma}-t_1^{\gamma}|}{\Gamma_q(\alpha+\beta+\gamma+\theta)}\int_0^{\lambda}\left((\lambda-qs)^{\alpha+\beta-1}\right)|m(s)-Ap_x^*(s)-q_x^*(s)|d_qs\\
&+\frac{|\Delta||t_1^{\alpha}-t_2^{\alpha}|}{\Gamma_q(\alpha+\beta)}\int_0^1(1-qs)^{\alpha+\beta-1}|m(s)-Ap_x^*(s)-q_x^*(s)|d_qs\\
&+\frac{|\Delta|\lambda^{\beta+\gamma+\theta}|t_1^{\gamma}-t_2^{\gamma}|}{\Gamma_q(\alpha+\beta)}\int_0^1(1-qs)^{\alpha+\beta-1}|m(s)-Ap_x^*(s)-q_x^*(s)|d_qs.
\end{aligned}
$$

En utilisant l'hypothèse, on trouve :

$$
\begin{aligned}
\|\mathcal{A}x(t_2)-\mathcal{A}x(t_1)\| \leq &\frac{M+A\Lambda_1+\Lambda_2}{\Gamma_q(\alpha+\beta+\gamma+1)}\left[(t_2-t_1)^{\alpha+\beta+\gamma}+|t_2^{\alpha+\beta+\gamma}-t_1^{\alpha+\beta+\gamma}|\right]\\
&+\frac{M+A\Lambda_1+\Lambda_2}{\Gamma_q(\alpha+\beta+\gamma+1)}(t_2-t_1)^{\alpha+\beta+\gamma}\\
&+\frac{(M+A\Lambda_1+\Lambda_2)}{\Gamma_q(\beta+\gamma+1)\Gamma_q(\alpha+1)}|t_1^{\beta+\gamma}-t_2^{\beta+\gamma}|\\
&+\frac{(M+A\Lambda_1+\Lambda_2)|\Delta||t_2^{\beta+\gamma}-t_1^{\beta+\gamma}|\lambda^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma_q(\alpha+\beta+\gamma+\theta+1)}\\
&+\frac{(M+A\Lambda_1+\Lambda_2)|\Delta||t_2^{\gamma}-t_1^{\gamma}|}{\Gamma_q(\alpha+\beta+1)}\\
&+\frac{(M+A\Lambda_1+\Lambda_2)|\Delta||t_2^{\gamma}-t_1^{\gamma}|\lambda^{\beta+\gamma+\theta}}{\Gamma_q(\beta+\gamma+\theta+\theta+1)\Gamma_q(\alpha+1)}\\
&+\frac{(M+A\Lambda_1+\Lambda_2)|\Delta||t_2^{\gamma}-t_1^{\gamma}|}{\Gamma_q(\beta+1)\Gamma_q(\alpha+1)},
\end{aligned}
$$

d'autre part on a :

$$\|^{R.L}D_q^{\mu}\mathcal{A}x(t_2)-^{R.L}D_q^{\mu}\mathcal{A}x(t_1)\| \leq \frac{M+A\Lambda_1+\Lambda_2}{\Gamma_q(\alpha+\beta+\gamma+1)}\left[(t_2-t_1)^{\alpha+\beta+\gamma-\mu}+|t_2^{\alpha+\beta+\gamma-\mu}-t_1^{\alpha+\beta+\gamma-\mu}|\right]$$

$$+\frac{M+A\Lambda_1+\Lambda_2}{\Gamma_q(\alpha+\beta+\gamma+1)}(t_2^{\alpha+\beta+\gamma-\mu}-t_1^{\alpha+\beta+\gamma-\mu})$$

$$+\frac{(M+A\Lambda_1+\Lambda_2)}{\Gamma_q(\beta+\gamma+1)\Gamma_q(\alpha+1)}|t_1^{\beta+\gamma-\mu}-t_2^{\beta+\gamma-\mu}|$$

$$+\frac{(M+A\Lambda_1+\Lambda_2)|\Delta||t_2^{\beta+\gamma-\mu}-t_1^{\beta+\gamma-\mu}|\lambda^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma_q(\alpha+\beta+\gamma+\theta+1)}$$

$$+\frac{(M+A\Lambda_1+\Lambda_2)|\Delta||t_2^{\gamma-\mu}-t_1^{\gamma-\mu}|}{\Gamma_q(\alpha+\beta+1)}$$

$$+\frac{(M+A\Lambda_1+\Lambda_2)|\Delta||t_2^{\gamma-\mu}-t_1^{\gamma-\mu}|\lambda^{\beta+\gamma+\theta}}{\Gamma_q(\beta+\gamma+\theta+\theta+1)\Gamma_q(\alpha+1)}$$

$$+\frac{(M+A\Lambda_1+\Lambda_2)|\Delta||t_2^{\gamma-\mu}-t_1^{\gamma-\mu}|}{\Gamma_q(\beta+1)\Gamma_q(\alpha+1)}.$$

$\|\mathcal{A}x(t_2)-\mathcal{A}x(t_1)\| \to 0$ car $t_2-t_1\to 0$,
d'où $\mathcal{A}$ est équicontinue.

Étape 4:

On montre que l'ensemble

$$\omega=\{x\in X, x=\rho\mathcal{A}x \qquad 0<\rho<1\},$$

est borné.

$$|x(t)|=\left|\rho\mathcal{A}x(t)\right|=\left|\frac{\rho 1}{\Gamma_q(\alpha+\beta+\gamma)}\int_0^t(t-qs)^{\alpha+\beta+\gamma-1}\left(m(s)-Ap_x^*(s)-q_x^*(s)\right)d_qs\right.$$

$$-\frac{\rho t^{\beta+\gamma}}{\Gamma_q(\beta+\gamma+1)\ \Gamma_q(\alpha)}\int_0^1(1-qs)^{\alpha-1}\left(m(s)-Ap_x^*(s)-q_x^*(s)\right)d_qs$$

$$-\frac{\rho\Delta t^{\gamma}}{\Gamma_q(\alpha+\beta+\gamma+\theta)}\int_0^{\lambda}(\lambda-qs)^{\alpha+\beta+\gamma+\theta-1}\left(m(s)-Ap_x^*(s)-q_x^*(s)\right)d_qs$$

$$+\frac{\rho\Delta t^{\gamma}}{\Gamma_q(\alpha+\beta)}\int_0^1(1-qs)^{\alpha+\beta-1}\left(m(s)-Ap_x^*(s)-q_x^*(s)\right)d_qs$$

$$+\frac{\rho\Delta\lambda^{\beta+\gamma+\theta}t^{\gamma}}{\Gamma_q(\beta+\gamma+\theta+1)\Gamma_q(\alpha)}\int_0^1(1-qs)^{\alpha-1}\left(m(s)-Ap_x^*(s)-q_x^*(s)\right)d_qs$$

$$\left.-\frac{\rho\Delta t^{\gamma}}{\Gamma_q(\beta+1)\Gamma_q(\alpha)}\int_0^1(1-qs)^{\alpha-1}\left(m(s)-Ap_x^*(s)-q_x^*(s)\right)d_qs\right|.$$

Alors :

$$|x(t)|\leq\frac{(M+A(\xi_0+\xi_1|x|+\xi_2)+(k_0+k_1|x|+k_2|y|))}{\Gamma_q(\alpha+\beta+\gamma+1)}$$

$$+\frac{(M+A(\xi_0+\xi_1|x|+\xi_2)+(k_0+k_1|x|+k_2|y|))}{\Gamma_q(\beta+\gamma+1)\ \Gamma_q(\alpha+1)}$$

$$+\frac{\big(M+A(\xi_0+\xi_1|x|+\xi_2)+(k_0+k_1|x|+k_2|y|)\big)|\Delta|\lambda^{\alpha+\beta+\gamma+\theta}}{\Gamma_q(\beta+\gamma+1)\Gamma_q(\alpha+\beta+\gamma+\theta+1)}$$

$$+\frac{(M+A(\xi_0+\xi_1|x|+\xi_2)+(k_0+k_1|x|+k_2|y|))|\Delta|}{\Gamma_q(\gamma+1)\Gamma_q(\alpha+\beta+1)}$$

$$+\frac{\big(M+A(\xi_0+\xi_1|x|+\xi_2)+(k_0+k_1|x|+k_2|y|)\big)|\Delta|\lambda^{\beta+\gamma+\theta}}{\Gamma_q(\beta+\gamma+\theta+1)\Gamma_q(\alpha+1)\Gamma_q(\gamma+1)}$$

$$+\frac{(M+A(\xi_0+\xi_1|x|+\xi_2)+(k_0+k_1|x|+k_2|y|))|\Delta|}{\Gamma_q(\beta+1)\Gamma_q(\alpha+1)\Gamma_q(\gamma+1)}.$$

Ce qui implique que

$$|x(t)|\leq\left[M+A\xi_0+k_0+\left[A(\xi_1+\xi_2)+(k_1+k_2)\right]\|x\|_X\right]\Theta.$$

D'autre part on a :

$$\left|{}^{R.L}D_q^{\mu}x(t)\right|=\left|\rho^{R.L}D_q^{\mu}x(t)\right|=\left|\frac{\rho}{\Gamma_q(\alpha+\beta+\gamma-\mu)}\int_0^t(t-qs)^{\alpha+\beta+\gamma-\mu-1}\left(m(s)-Ap_x^*(s)-q_x^*(s)\right)d_qs\right.$$

$$-\frac{\rho t^{\beta+\gamma-\mu}}{\Gamma_q(\beta+\gamma-\mu+1)\ \Gamma_q(\alpha)}\int_0^1(1-qs)^{\alpha-1}\left(m(s)-Ap_x^*(s)-q_x^*(s)\right)d_qs$$

$$-\frac{\rho\Gamma_q(\beta+\gamma+1)\Delta t^{\gamma-\mu}}{\Gamma_q(\beta+\gamma-\mu+1)\Gamma_q(\alpha+\beta+\gamma+\theta)}\int_0^{\lambda}(\lambda-qs)^{\alpha+\beta+\gamma+\theta-1}\left(m(s)-Ap_x^*(s)-q_x^*(s)\right)d_qs$$

$$+\frac{\rho\Gamma_q(\gamma+1)\Delta t^{\gamma-\mu}}{\Gamma_q(\gamma-\mu+1)\Gamma_q(\alpha+\beta)}\int_0^1(1-qs)^{\alpha+\beta-1}\left(m(s)-Ap_x^*(s)-q_x^*(s)\right)d_qs$$

$$+\frac{\rho\Delta\lambda^{\beta+\gamma+\theta}\Gamma_q(\gamma+1)t^{\gamma-\mu}}{\Gamma_q(\beta+\gamma+\theta+1)\Gamma_q(\alpha)\Gamma_q(\gamma-\mu+1)}\int_0^1(1-qs)^{\alpha-1}\left(m(s)-Ap_x^*(s)-q_x^*(s)\right)d_qs$$

$$\left.-\frac{\rho\Delta\Gamma_q(\gamma+1)t^{\gamma-\mu}}{\Gamma_q(\beta+1)\Gamma_q(\alpha)\Gamma_q(\gamma-\mu+1)}\int_0^1(1-qs)^{\alpha-1}\left(m(s)-Ap_x^*(s)-q_x^*(s)\right)d_qs\right|.$$

Alors

$$\|{}^{R.L}D_q^{\mu}x(t)\|\leq\frac{(M+A(\xi_0+\xi_1|x|+\xi_2)+(k_0+k_1|x|+k_2|y|))}{\Gamma_q(\alpha+\beta+\gamma-\mu+1)}$$

$$+\frac{(M+A(\xi_0+\xi_1|x|+\xi_2)+(k_0+k_1|x|+k_2|y|))}{\Gamma_q(\beta+\gamma-\mu+1)\ \Gamma_q(\alpha+1)}$$

$$+\frac{\big(M+A(\xi_0+\xi_1|x|+\xi_2)+(k_0+k_1|x|+k_2|y|)\big)|\Delta|\Gamma_q(\beta+\gamma+1)\lambda^{\alpha+\beta+\gamma+\theta}}{\Gamma_q(\beta+\gamma-\mu+1)\Gamma_q(\alpha+\beta+\gamma+\theta+1)}$$

$$+\frac{(M+A(\xi_0+\xi_1|x|+\xi_2)+(k_0+k_1|x|+k_2|y|))|\Delta|\Gamma_q(\gamma+1)}{\Gamma_q(\gamma-\mu+1)\Gamma_q(\alpha+\beta+1)}$$

$$+\frac{\big(M+A(\xi_0+\xi_1|x|+\xi_2)+(k_0+k_1|x|+k_2|y|)\big)|\Delta|\lambda^{\beta+\gamma+\theta}\Gamma_q(\gamma+1)}{\Gamma_q(\beta+\gamma+\theta+1)\Gamma_q(\alpha+1)\Gamma_q(\gamma-\mu+1)}$$

$$+\frac{(M+A(\xi_0+\xi_1|x|+\xi_2)+(k_0+k_1|x|+k_2|y|)\,)|\Delta|\Gamma_q(\gamma+1)}{\Gamma_q(\beta+1)\Gamma_q(\alpha+1)\Gamma_q(\gamma-\mu+1)}$$

$$|^{R.L}D_q^{\mu}x(t)| \leq [M+A\xi_0+k_0+[A(\xi_1+\xi_2)+(k_1+k_2)]\,\|x\|_X]\,\Theta^*.$$

Ce qui implique que

$$\|x\|_X \leq [A(\xi_1+\xi_2)+(k_1+k_2]\,(\Theta+\Theta^*)\|x\|_X$$

$$+[M+A\xi_0+k_0]\,(\Theta+\Theta^*).$$

par conséquent;

$$\|x\|_X \leq \frac{[M+A\xi_0+k_0]\,(\Theta+\Theta^*)}{1-[A(\xi_1+\xi_2)+(k_1+k_2]\,(\Theta+\Theta^*)}.$$

Cela montre que ω est borné. Ainsi, d'après le théorème(2.2.2), l'opérateur $\mathcal{A}$ a au moins un indiquer. le problème(2.2) a admet au moins une solution sur [0;1].

Exemple 05

On considère le problème de Duffing q-fractionnaire suivante :

$$\begin{cases} {}^cD_{0.2}^{\frac{1}{4}}\left[{}^cD_{0.2}^{\frac{1}{3}}\left[{}^{R.L}D_{0.2}^{\frac{1}{5}}x(t)\right]\right] = \frac{5t+1}{25} - \frac{e^{-5}}{152}\left(\frac{t^2e}{10}[x(t)+\frac{\pi}{12}\,{}^cD_{0.2}^{\frac{1}{5}}x(t)+\frac{t}{2^{-t^2}}]\right) \\ -\frac{t}{100}\left(\pi x(t)+eI_{0.2}^{\frac{1}{2}}x(t)+t\right), \\ x(0)=0; \\ {}^cD_{0.2}^{\frac{1}{3}}\left[{}^{R.L}D_{0.2}^{\frac{1}{5}}x(1)\right]=0; \\ {}^{R.L}D_{0.2}^{\frac{1}{5}}x(1) = {}^{R.L}I_{0.2}^{\frac{\pi}{5}}x(\frac{2}{5}); \\ avec \\ \alpha=\frac{1}{4},\ \ \beta=\frac{1}{3},\ \ \gamma=\frac{1}{5},\ \ A=\frac{e^{-5}}{152}>0. \\ \quad \mu=\frac{1}{7}<\gamma=\frac{1}{5},\varpi=\frac{1}{2}>0,\ et\ \theta=\frac{\pi}{5},\ \ \lambda=\frac{2}{5},\ \ \ q=\frac{1}{5}\in[0;1]. \end{cases}$$

Où

$$p_x^*(t)=\frac{t^2e}{10}\left(x(t)+2\pi^cD_{0.2}^{\frac{1}{5}}x(t)+\frac{t}{2^{-t^2}}\right).$$

$$q_x^*(t)=\frac{t}{100}\left(\pi x(t)+eI_{0.2}^{\frac{1}{2}}x(t)+t\right).$$

$m(t) = \dfrac{5t+1}{25}$.

à partir de ces données, on obtient :

$$\Delta = \frac{\Gamma_{0.2}(\frac{1}{5}+\frac{\pi}{5}+1)}{\Gamma_{0.2}(\frac{1}{5}+1)\left[\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{5}+\frac{\pi}{5}} - \Gamma_{0.2}(\frac{1}{5}+\frac{\pi}{5}+1)\right]}.$$

$\Delta = -1.987764946.$

$$\Theta = \frac{1}{\Gamma_{\frac{1}{5}}(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+1)} + \frac{1}{\Gamma_{\frac{1}{5}}(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+1)\Gamma_{\frac{1}{5}}(\frac{1}{4}+1)}$$
$$+\frac{|-1.987764946|\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{\pi}{5}}}{\Gamma_{\frac{1}{5}}(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+1)\Gamma_{\frac{1}{5}}(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{\pi}{5}+1)}$$
$$+\frac{|-1.987764946|}{\Gamma_{\frac{1}{5}}(\frac{1}{5}+1)+\Gamma_{\frac{1}{5}}(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+1)}$$
$$+\frac{|-1.987764946|\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{\pi}{5}}}{\Gamma_{\frac{1}{5}}(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{\pi}{5}+1)\Gamma_{\frac{1}{5}}(\frac{1}{4}+1)\Gamma_{\frac{1}{5}}(\frac{1}{5}+1)}$$
$$+\frac{|-1.987764946|}{\Gamma_{\frac{1}{5}}(\frac{1}{3}+1)\Gamma_{\frac{1}{5}}(\frac{1}{4}+1)\Gamma_{\frac{1}{5}}(\frac{1}{5}+1)}$$

$\Theta = 7.790252099.$

$$\Theta^* = \frac{1}{\Gamma_{\frac{1}{5}}(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+1)} + \frac{1}{\Gamma_{\frac{1}{5}}(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+1)\Gamma_{\frac{1}{5}}(\frac{1}{4}+1)}$$
$$+\frac{|-1.987764946|\Gamma_{\frac{1}{5}}(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+1)\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{\pi}{5}}}{\Gamma_{\frac{1}{5}}(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+1)\Gamma_{\frac{1}{5}}(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{\pi}{5}+1)}$$
$$+\frac{|-1.987764946|\Gamma_{\frac{1}{5}}(\frac{1}{5}+1)}{\Gamma_{\frac{1}{5}}(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+1)+\Gamma_{\frac{1}{5}}(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+1)}$$
$$+\frac{|-1.987764946|\Gamma_{\frac{1}{5}}(\frac{1}{5}+1)\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{\pi}{5}}}{\Gamma_{\frac{1}{5}}(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{\pi}{5}+1)\Gamma_{\frac{1}{5}}(\frac{1}{4}+1)\Gamma_{\frac{1}{5}}(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+1)}$$
$$+\frac{|-1.987764946|\Gamma_{\frac{1}{5}}(\frac{1}{5}+1)}{\Gamma_{\frac{1}{5}}(\frac{1}{3}+1)\Gamma_{\frac{1}{5}}(\frac{1}{4}+1)\Gamma_{\frac{1}{5}}(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+1)}$$

$\Theta^* = 7.788996583.$

Et pour tous $t \in [0;1]$ et $x_i, y_i \in \mathbb{R}\ \ i = (1,2)$

$$|p(t,x(t),{}^{R.L}D_{\frac{1}{5}}^{\frac{1}{7}}[x(t)]| \leq \frac{e}{20} + \frac{e}{10}|x(t)| + \frac{\pi}{120}|{}^{R.L}D_{\frac{1}{5}}^{\frac{1}{7}}x(t)|,$$
$$|q(t,x(t),I_{\frac{1}{5}}^{\frac{1}{2}}[x(t)]| \leq \frac{1}{100} + \frac{\pi}{100}|x(t)| + \frac{e}{100}|I_{\frac{1}{5}}^{\frac{1}{2}}[x(t)]|,$$

$$A(\xi_1 + \xi_2) + k_1 + k_2 = 0.058611955 < (\Theta + \Theta^*)^{-1} = 0.064187947.$$

Ainsi toutes les hypothèses du théorème(2.2.2) sont satisfaites, par conséquent le problème (2.1) posé de au moins une solution x dans l'espace X.

Chapitre 3

Stabilité du problème q-fractionnaire du Duffing

Dans ce chapitre, on définir et étudier les stabilités au sens du Ulam-Hyers [3] et Ulam-Hyers-Rassais [11],[4] du problème q-fractionnaire du Duffing qui traite dans le chapitre 2 [8].

Pour $\sigma > 0$ est un nombre réel positif et $g : [0;1] \to \mathbb{R}^+$ est une fonction continue, on donne la suivre les inégalités q-fractionnaires.

$$\left| {}^{c}D_q^{\alpha}\left[{}^{c}D_q^{\beta}\left[{}^{R.L}D_q^{\gamma}y(t)\right]\right] - \left(m(t) + Ap_y^*(t) + q_y^*(t)\right)\right| \leq \sigma, \qquad t \in [0;1], \tag{3.1}$$

et

$$\left| {}^{c}D_q^{\alpha}\left[{}^{c}D_q^{\beta}\left[{}^{R.L}D_q^{\gamma}y(t)\right]\right] - \left(m(t) - Ap_y^*(t) - q_y^*(t)\right)\right| \leq \sigma g(t), \qquad t \in [0;1]. \tag{3.2}$$

Où

$$p_y^*(t) = p\left(t, y(t), {}^{R.L}D_y^*(t)\right) \quad et \quad q_y^*(t) = q\left(t, y(t), I_q^{\varpi}y(t)\right)$$

3.1 Stabilité de q-fractionnaire du Duffing

3.1.1 Stabilité au sens d'Ulam-Hyers

Définition

Le problème (2.2) est stable au sens d'Ulam-Hyers s'il existe un nombre réel positive $d_\varphi > 0$, tel que pour tout $\sigma > 0$ et pour chaque solution $y \in X$ de l'inégalité (3.1), il existe une solution $x \in X$ de problème(2.2) avec

$$|y(t) - x(t)| \leq d_\varphi \sigma, \qquad t \in [0;1].$$

Théorème 3.2.1

Supposons que $p, q : [0;1] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $m : [0;1] \to \mathbb{R}$ soient des fonction continues et suppose que (H_1) est vérifié si :

$$\left[Ak_1 t^{\alpha+\beta+\gamma} + \left(k_2 + \frac{k_2}{\Gamma_q(\varpi+1)} \right) t^{\alpha+\beta+\gamma} \right] \leq 1. \tag{3.3}$$

Alors le problème (2.2) est stable au sens d'Ulam-Hyres.

Prove :

Soit $y \in X$ une solution de l'inégalité (3.1), et notons $x \in X$ l'unique solution du problème q-fractionnaire de Duffing suivant :

$$\begin{cases} {}^cD_q^\alpha[{}^cD_q^\beta[{}^{R.L}D_q^\gamma x(t)]] = m(t) - Ap_x^*(t) - Aq_x^*(t) \\ x(0) = y(0), \\ {}^cD_q^\beta[{}^{R.L}D_q^\gamma x(1)] = {}^c D_q^\beta[{}^{R.L}D_q^\gamma y(1)], \\ {}^{R.L}D_q^\gamma[x(1)] = {}^{R.L} D_q^\gamma[y(1)]. \end{cases} \tag{3.4}$$

En utilisant le Lemme 2,on a :

$$x(t) = I_q^{\alpha+\beta+\gamma}[h_x(t)] - \frac{c_0 t^{\beta+\gamma}}{\Gamma_q(\beta+\gamma+1)} - \frac{c_1 t^\gamma}{\Gamma_q(\gamma+1)} - c_2 t^{\gamma-1}. \tag{3.5}$$

Et par intégration de l'inégalité(3.1), on obtient :

$$|y(t) - I_q^{\alpha+\beta+\gamma}[h_x(t)] + \frac{c_0 t^{\beta+\gamma}}{\Gamma_q(\beta+\gamma+1)} + \frac{c_1 t^\gamma}{\Gamma_q(\gamma+1)} + c_2 t^{\gamma-1}|$$

$$\leq \frac{t^{\alpha+\beta+\gamma}\sigma}{\Gamma_q(\alpha+\beta+\gamma+1)}$$

$$\leq \frac{\sigma}{\Gamma_q(\alpha+\beta+\gamma+1)}. \qquad (3.6)$$

Alors :

$$|y(t)-x(t)| = |y(t) - I_q^{\alpha+\beta+\gamma}[h_x(t)] + \frac{c_0' t^{\beta+\gamma}}{\Gamma_q(\beta+\gamma+1)} + \frac{c_1' t^{\gamma}}{\Gamma_q(\gamma+1)} + c_2' t^{\gamma-1}$$

$$+ I_q^{\alpha+\beta+\gamma}\left[h_y(t)-h_x(t)\right]|$$

$$\leq |y(t) - I_q^{\alpha+\beta+\gamma}[h_x(t)] + \frac{c_0' t^{\beta+\gamma}}{\Gamma_q(\beta+\gamma+1)} + \frac{c_1' t^{\gamma}}{\Gamma_q(\gamma+1)} + c_2' t^{\gamma-1}|$$

$$+ |I_q^{\alpha+\beta+\gamma}[h_y(t)-h_x(t)]|.$$

Tel que

$$h_x(t) = m(t) - Ap_x^*(t) - q_x^*(t),$$

$$h_y(t) = m(t) - Ap_y^*(t) - q_y^*(t).$$

$$I_q^{\alpha+\beta+\gamma}\left[h_y(t)-h_x(t)\right] = I_q^{\alpha+\beta+\gamma}[A(p_x^*(t)-p_y^*(t)) + (q_x^*(t)-q_y^*(t))]$$

$$= \frac{A}{\Gamma_q(\alpha+\beta+\gamma)} \int_0^t (t-qs)^{\alpha+\beta+\gamma-1}(p_x^*(t)-p_y^*(t))d_qs$$

$$+ \frac{1}{\Gamma_q(\alpha+\beta+\gamma)} \int_0^t (t-qs)^{\alpha+\beta+\gamma-1}(q_x^*(t)-q_y^*(t))d_qs.$$

Maintenant, en utilisant (3.4) et (H_1), on peut écrire :

$$\|y-x\|_X \leq \frac{\sigma}{\Gamma_q(\alpha+\beta+\gamma+1}$$

$$+ \frac{Ak_1}{\Gamma_q(\alpha+\beta+\gamma)} \int_0^t (t-qs)^{\alpha+\beta+\gamma-1}\|y-x\|_X d_qs$$

$$+ \frac{k_2 + \frac{k_2}{\Gamma_q(\varpi+1)}}{\Gamma_q(\alpha+\beta+\gamma)} \int_0^t (t-qs)^{\alpha+\beta+\gamma-1}\|y-x\|_X d_qs$$

$$\leq \frac{\sigma}{\Gamma_q(\alpha+\beta+\gamma)} + \left[Ak_1 t^{\alpha+\beta+\gamma} + \left(k_2 + \frac{k_2}{\Gamma_q(\varpi+1)}\right) t^{\alpha+\beta+\gamma}\right] \|y(t)-x(t)\|_X,$$

alors

$$\|y-x\|_X \leq \frac{\frac{\sigma}{\Gamma_q(\alpha+\beta+\gamma)}}{1-\left[Ak_1 t^{\alpha+\beta+\gamma}+\left(k_2+\frac{k_2}{\Gamma_q(\varpi+1)}\right)t^{\alpha+\beta+\gamma}\right]}.$$

Par conséquent, le problème q-fractionnaire de Duffing (2.2) est stable au sens d'Ulam-Hyers.

3.1.2 Stabilité au sens d'Ulam-Hyers-Rassais :

Définition

On dit que l'équation (2.2) est stable au sens d'Ulam-Hyers-Rassais par rapport à $g \in X$, s'il existe un nombre réel $d_\varphi > 0$ tel que quelque soit $\sigma > 0$ et pour toute solution $x \in X$ qui satisfait :

$$\left|{}^cD_q^\alpha\left[{}^cD_q^\beta\left[{}^{R.L}D_q^\gamma x(t)\right]\right]-(m(t)-Ap_x^*(t)-q_x^*(t))\right| \leq \sigma g(t), \qquad t\in[0;1], \tag{3.7}$$

il existe une solution $y \in X$ qui satisfait :

$$|x(t)-y(t)| \leq d_\varphi \sigma g(t) \qquad t\in[0;1].$$

Remarque :

Une fonction $y \in C([0;1],\mathbb{R})$ est une solution de l'inégalité (3.1), si et seulement s'il existe une fonction $g:[0;1]\to\mathbb{R}$ tel que :

1 $|g(t)| \leq \sigma, \qquad t\in[0;1].$

2 $${}^cD_q^\alpha\left[{}^cD_q^\beta\left[{}^{R.L}D_q^\gamma y(t)\right]\right] = m(t)-Ap_y^*(t)-q_y^*(t)+g(t), \qquad t\in[0;1]. \tag{3.8}$$

Théorème 3.2.1

Soit $p,q:[0;1]\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$et $m:[0;1]\to\mathbb{R}$ des fonction continue et supposons que H_1et (3.3) sont satisfaites. De plus l'hypothèse suivante est satisfaite.

(H_2) : il existe une fonction $g\in C([0;1],\mathbb{R}^+)$ et il existe $\chi>0$ tel que :

$$\frac{1}{\Gamma_q(\alpha+\beta+\gamma)}\int_0^t (t-qs)^{\alpha+\beta+\gamma-1}g(s)d_qs \leq \chi g(t), \qquad t\in[0;1]. \tag{3.9}$$

Alors le problème q-fractionnaire (2.2) est Ulam-Hyers-Rassais stable.

Pouve :

En utilisant la remarque (3.8), on peut écrire

$$\left|y(t) - I^{\alpha+\beta+\gamma}[h_y(t)] + \frac{c_0 t^{\beta+\gamma}}{\Gamma_q(\beta+\gamma+1)} + \frac{c_1 t^{\gamma}}{\Gamma_q(\gamma+1)} + c_2 t^{\gamma-1}\right|$$

$$\leq \frac{\sigma}{\Gamma_q(\alpha+\beta+\gamma)} \int_0^t (t-qs)^{\alpha+\beta+\gamma-1} g(t) d_q s \leq \sigma\chi g(t).$$

Où $y \in C([0;1],\mathbb{R})$ est solution de l'inégalité (3.2). En appliquant le lemme 2, on peut écrire

$$x(t) = I^{\alpha+\beta+\gamma}[h_x(t)] - \frac{c_0 t^{\beta+\gamma}}{\Gamma_q(\beta+\gamma+1)} - \frac{c_1 t^{\gamma}}{\Gamma_q(\gamma+1)} - c_2 t^{\gamma-1},$$

où $c_i \in \mathbb{R}(i = 0, 1, 2)$, et $x \in C([0;1],\mathbb{R})$ est l'unique solution du problème (3.4).

Ensuite, on obtient :

$$\begin{aligned}\|y(t) - x(t)\|_X \leq &\frac{\sigma}{\Gamma_q(\alpha+\beta+\gamma)} \int_0^t (t-qs)^{\alpha+\beta+\gamma-1} g(s) d_q s \\ &+ \frac{A}{\Gamma_q(\alpha+\beta+\gamma)} \int_0^t (t-qs)^{\alpha+\beta+\gamma-1} \left|p_y^*(s) - p_x^*(s)\right| d_q s \\ &+ \frac{1}{\Gamma_q(\alpha+\beta+\gamma)} \int_0^t (t-qs)^{\alpha+\beta+\gamma-1} \left|q_y^*(s) - q_x^*(s)\right| d_q s\end{aligned}$$

En utilisant (3.8) et (H_1), on a :

$$\begin{aligned}\|y(t) - x(t)\|_X \leq &\, \sigma\chi g(t) \\ &+ \frac{Ak_1}{\Gamma_q(\alpha+\beta+\gamma)} \int_0^t (t-qs)^{\alpha+\beta+\gamma-1} \|y(s) - x(s)\| d_q s \\ &+ \frac{k_2 + \frac{k_2}{\Gamma_q(\varpi+1)}}{\Gamma_q(\varpi+1)} \int_0^t (t-qs)^{\alpha+\beta+\gamma-1} \|y(s) - x(s)\| d_q s.\end{aligned}$$

Ce qui implique que :

$$\begin{aligned}\|y(t) - x(t)\|_X \leq &\, \sigma\chi g(t) \\ &+ \left[Ak_1 t^{\alpha+\beta+\gamma} + (k_2 + \frac{k_2}{\Gamma_q(\varpi+1)}) t^{\alpha+\beta+\gamma}\right] \|y(t) - x(t)\|_X,\end{aligned}$$

ce qui donnée :

$$\|y(t) - x(t)\|_X \leq \frac{\sigma\chi g(t)}{1 - \left[Ak_1 t^{\alpha+\beta+\gamma} + (k_2 + \frac{k_2}{\Gamma_q(\varpi+1)}) t^{\alpha+\beta+\gamma}\right]}.$$

Ensuite, le problème de q-fractionnaire de Duffing (2.2)est stable au sens d'Ulam-Hyers-Rassais.

Exemple 06

Considérons le problème q-fractionnaire de Duffing suivant.

$$\begin{cases} {}^cD_{0.16}^{\frac{2}{3}}\left[{}^cD_{0.16}^{\frac{4}{5}}\left[{}^{R.L}D_{0.16}^{\frac{\pi}{6}}x(t)\right]\right] = \dfrac{e^{t+3}-2}{20} - \dfrac{ln(e+5)}{47}\left(\dfrac{tSin(2\pi x(t))}{\sqrt{\pi}e^{-t^2}+12}\right.\\ \left. +\dfrac{tSin(2\pi^{R.L}D_{0.16}^{\frac{1}{4}}x(t))}{\sqrt{\pi}e^{-t^2}+12} + \dfrac{tSinh(t^2+1)}{\sqrt{\pi}e^{-t^2}+12}\right) - \left(\dfrac{e^{-\pi}Cos(2\pi x(t))}{e^{t+2}+12}\right.\\ \left. +\dfrac{e^{-\pi}Cos(2\pi^{R.L}I_{0.16}^{\frac{3}{2}}x(t))}{e^{t+2}+12} + \dfrac{tCosh(t^2+1)}{e^{t+2}+12}\right),\\ x(0)=0, \qquad {}^cD_{0.16}^{\frac{4}{5}}[{}^{R.L}D_{0.16}^{\frac{\pi}{6}}x(1)]=0, \qquad {}^{R.L}D_{0.16}^{\frac{\pi}{6}}x(1) = {}^{R.L}\, I_{0.16}^{\frac{5}{6}}x(\tfrac{2}{5}) \end{cases} \tag{3.10}$$

$$P_x^*(t) = \frac{tSin(2\pi x(t))}{\sqrt{\pi}e^{-t^2}+12} + \frac{tSin(2\pi^{R.L}D_{0.16}^{\frac{1}{4}}x(t))}{\sqrt{\pi}e^{-t^2}+12} + \frac{tSinh(t^2+1)}{\sqrt{\pi}e^{-t^2}+12}.$$

$$q_x^*(t) = \frac{e^{-\pi}Cos(2\pi x(t))}{e^{t+2}+12} + \frac{e^{-\pi}Cos(2\pi^{R.L}I_{0.16}^{\frac{3}{2}}x(t))}{e^{t+2}+12} + \frac{tCosh(t^2+1)}{e^{t+2}+12}.$$

$$m(t) = \frac{e^{t+3}-2}{20}.$$

à partir de ces données, on peut conclure que :

$$\Delta = \frac{\Gamma_{0.16}(\frac{\pi}{6}+\frac{5}{6}+1)}{\Gamma_{0.16}(\frac{\pi}{6}+1)\left[\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\frac{\pi}{6}+\frac{5}{6}} - \Gamma_{0.16}(\frac{\pi}{6}+\frac{5}{6}+1)\right]}$$

$$\Delta = -1.43418908942$$

$$\Theta = \frac{1}{\Gamma_{0.16}(\frac{2}{4}+\frac{4}{5}+\frac{\pi}{6}+1)} + \frac{1}{\Gamma_{0.16}(\frac{4}{5}+\frac{\pi}{6}+1)\Gamma_{0.16}(\frac{2}{3}+1)}$$

$$+\frac{|-1.43418908942|\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}+\frac{4}{5}+\frac{\pi}{6}+\frac{5}{6}}}{\Gamma_{0.16}(\frac{4}{5}+\frac{\pi}{6}+1)\Gamma_{0.16}(\frac{2}{3}+\frac{4}{5}+\frac{\pi}{6}+\frac{5}{6}+1)} + \frac{|-1.43418908942|}{\Gamma_{0.16}(\frac{\pi}{6}+1)\Gamma_{0.16}(\frac{2}{3}+\frac{4}{5}+1)}$$

$$+\frac{|-1.43418908942|\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{4}{5}+\frac{\pi}{6}+\frac{5}{6}}}{\Gamma_{0.16}(\frac{4}{5}+\frac{\pi}{6}+\frac{5}{6}+1)\Gamma_{0.16}(\frac{2}{3}+1)\Gamma_{0.16}(\frac{\pi}{6}+1)}$$

$$+\frac{|-1.43418908942|}{\Gamma_{0.16}(\frac{2}{3}+1)\Gamma_{0.16}(\frac{4}{5}+1)\Gamma_{0.16}(\frac{\pi}{6}+1)}$$

$$\Theta = 5.08010372805$$

$$\Theta^* = \frac{1}{\Gamma_{0.16}(\frac{2}{4}+\frac{4}{5}+\frac{\pi}{6}-\frac{1}{4}+1)} + \frac{1}{\Gamma_{0.16}(\frac{4}{5}+\frac{\pi}{6}-\frac{1}{4}+1)\Gamma_{0.16}(\frac{2}{3}+1)}$$

$$+\frac{|-1.43418908942|\Gamma_{0.16}(\frac{4}{5}+\frac{\pi}{6}+1)\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}+\frac{4}{5}+\frac{\pi}{6}+\frac{5}{6}}}{\Gamma_{0.16}(\frac{4}{5}+\frac{\pi}{6}-\frac{1}{4}+1)\Gamma_{0.16}(\frac{2}{3}+\frac{4}{5}+\frac{\pi}{6}+\frac{5}{6}+1)}+\frac{|-1.43418908942|\Gamma_{0.16}(\frac{\pi}{6}+1)}{\Gamma_{0.16}(\frac{\pi}{6}-\frac{1}{4}+1)\Gamma_{0.16}(\frac{2}{3}+\frac{4}{5}+1)}$$

$$+\frac{|-1.43418908942|\Gamma_{0.16}(\frac{\pi}{6}+1)\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{4}{5}+\frac{\pi}{6}+\frac{5}{6}}}{\Gamma_{0.16}(\frac{4}{5}+\frac{\pi}{6}+\frac{5}{6}+1)\Gamma_{0.16}(\frac{2}{3}+1)\Gamma_{0.16}(\frac{\pi}{6}-\frac{1}{4}+1)}$$

$$+\frac{|-1.43418908942|\Gamma_{0.16}(\frac{\pi}{6}+1)}{\Gamma_{0.16}(\frac{2}{3}+1)\Gamma_{0.16}(\frac{4}{5}+1)\Gamma_{0.16}(\frac{\pi}{6}-\frac{1}{4}+1)}$$

$\Theta^* = 5.78261031129$

pour tout $t \in [0;1]$ et $x_i y_i \in \mathbb{R}\ \ i=(1,2)$

$$|p(t,x_1,x_2)-p(t,y_1,y_2)| \leq \frac{t}{\sqrt{\pi}e^{-t^2}+12}\left(|x_1-y_1|+|x_2-y_2|\right)$$

$$|q(t,x_1,x_2)-q(t,y_1,y_2)| \leq \frac{e^{\pi}}{e^{t+2}+12}\left(|x_1-y_1|+|x_2-y_2|\right)$$

Donc (H_1) est satisfaite avec :

$$k_1=\frac{e}{\sqrt{\pi}+12} \qquad et \qquad k_2=\frac{e^{-\pi}}{e^2+12}.$$

De plus,

$$k_1A+k_2+\frac{k_2}{\Gamma_{0.16}(\frac{3}{2}+1)}=0.06193058059 \leq (\Theta+\Theta^*)^{-1}=0.09205802494,$$

et

$$\|y-x\| \leq \frac{\frac{\sigma}{\Gamma_{0.16}(\frac{2}{3}+\frac{4}{5}+\frac{\pi}{6}+1)}}{1-\left[Ak_1T^{\frac{2}{3}+\frac{4}{5}+\frac{\pi}{6}}+\left(k_2+\frac{k_2}{\Gamma_{0.16}(\frac{3}{2}+1)}\right)T^{\frac{2}{3}+\frac{4}{5}+\frac{\pi}{6}}\right]} \leq 1.23\sigma.$$

Alors (H_1) est satisfaite, par conséquent le problème (3.6) possède un solution unique, et stable au sens d'Ulam-Hyers avec :

$$\|y-x\| \leq 1.23\sigma.$$

Bibliographie

[1] A.A., S.A. Marzan. Nonlinear differential equation with the Caputofraction derivative in the space of continuously differentiable functions. Differ. Equ.41(1), (2005), pp.$84 - 89$.

[2] A. Granas and J. Dugundji, fixed point theory, Springer-Verlas, New York. 2003.

[3] D.H. Hyers : On The Stability Of The Linear Functional Equation, Proc. Nat. Acad, Sci.,27, (1941), pp.222.224.

[4] D.H. Hyers, G. Isac and Th. M. Rassias : Stability Of Functional Equations In Several Variables, Birkh Auser., Basel,(1998).

[5] Ejikeme, C.L., Oyesanya, M.O., Agbebaku, D.F., Okofu, M.B.: Solution to nonlinear duffing oscillator with fractional derivatives using homotopy analysis method (ham). Global Journal of Pure and Applied Mathematics 14(10), 1363–1383 (2018)

[6] J. K. Hale and S. V. Lunel, Introduction to functional differntial equaction, Applied Mathematical Sciences,99,Springer-Verlag, New York. 1993

[7] Houas Mohamed, Franciso Martinez, Mohemed Esmael Samei, Mohammed K.A.Kaabar, Uniqueness and Ulam-Hyers Rassias stability results for sequential fractional pantograph q-differential equations, Houas et al. Journal of Inqualities and Application(2022) 2022:93.

[8] Houas M., Samei M.E, Existance and Mittag-Leffler-Ulam-Stability Results for Duffing Type Problem Involving Sequential Fractional Derivatives. Int. J. Appl. Comput. Math (2022) 8:185

[9] R. P. Aqarwal, Certain fractional q-integrals and q-derivatives, Proc. Cambridge philos. Soc. 66(1969), 365-370. MR0247389.

[10] Saadi, A., Houas, M.: Existence and ulam stability of solutions for nonlinear caputo-hadamard fractional differential equations involving two fractional orders. Facta Univ. Ser. Math. Inform 37(1), 089–102(2022)

[11] Th.M. Rassias : On The Stability Of Linear Mappings In Banach Spaces, Proc. Amer. Math. Soc.,72, (1978), pp.297.300.

[12] Ying sheng, Tiens Zhang. Some Results on the q-Calculus and fractional q-Differential Equations. Mathematics 2022, 10(1), 64 ; https :doi.org/10.3390/math10010064