République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de
La Recherche Scientifique
Université Djilali Bounaama-Khemis Miliana
Faculté des sciences et de la Technologie
Département de Mathématiques et Informatique

Mémoire de fin d'étude
En vue de l'obtention d'un diplôme de Master en
Mathématique
Spécialité Analyse Mathématique et Applications

Thème :

Variables Aléatoires Continues
avec
Intégrale Fractionnaire au sens de Hadamard

Présenté par :
Belkacemi Lakhdar

Devant le jury composé de :

Examinateur 1 : F.CHITA MCB Université Djilali Bounaama-Khemis Miliana.

Examinateur 2 : A.YACHE MAA Université Djilali Bounaama-Khemis Miliana.

Encadreur : M.HOUAS MCA Université Djilali Bounaama-Khemis Miliana.

Année universitaire 2019/2020

Dédicaces

Je dédie ce travail à mes chers parents.
Dieu les protège,
À toute ma famille et mes amis.
À tous mes collègues des 2019/2020 et 2018/2019.
À Abderrahmen, Tahar et Mohammed.
À Abdelhaq, Azzedine, Redouane.
À Nourddine, Hicham et Abdelrahim.
À Abdessammed, Walid, Billal.
À Karim, Abdellah, Hakem, Ayoub.
À Lakhdar, Houssam, Ahmed.

Remerciements

Au début, je remercie **ALLAH** qui m'a aidé et m'a donné de la patience et courage pendant ces années d'études.

Je désire exprimer mes sincères remerciements aux personnes qui m'ont aidé et qui ont contribué au développement de ce message et au succès de cette merveilleuse année académique.

Tout d'abord, je tiens à remercier les professeurs et les membres de la Faculté des sciences et de la technologie pour la richesse et la qualité de leur éducation et pour la formation moderne offert à leurs étudiants.

Je désire exprimer mes sincères remerciements à **M. HOUAS** qui, en tant que Directeur de la Mémoire, a toujours été attentif et disponible tout au long de la mise en œuvre de ce travail, ainsi que l'inspiration et l'aide qu'il m'a fournie tout au long de cette mémoire.

Je n'oublie pas mon père et ma mère pour leur contribution, leur soutien et leur patience tout au long de ma vie universitaire. Enfin, je tiens à remercier tous mes amis et ma famille qui ont m'a toujours encouragé à le faire.

Merci à tous.

Résumé

Dans ce mémoire, en utilisant l'intégrale fractionnaire au sens de Hadamard, nous présenterons, les intégrales de l'espérance fractionnaire, la variance fractionnaire et le moment fractionnaire pour une variable aléatoire continue.

Abstract

In this paper, using the fractional integral in the sense of Hadamard, we present, the fractional hope integrals, the fractional variance and the fractional moment for a continuous random variable.

ملخص

في هذه المذكرة، باستخدام التكامل الكسري بمعنى هادامارد، سنقدم، تكاملات الأمل الكسري، التباين الكسري، واللحظة الكسرية لمتغير عشوائي مستمر.

Table des matières

Introduction

Les inégalités intégrales est un outil extrêmes important qui intervient dans l'étude des équations différentielles fractionnaires et les sciences appliquées. Dans les deux dernières décennies, plusieurs de chercheurs en mathématiques ont investi dans le développement de cette théorie [1,2]. Les inégalités d'ordre fractionnaire sont également assez importantes dont les applications sont très nombreuses, notamment en théorie des équations différentielles fractionnaires et en théorie de probabilités. Plusieurs auteurs s'intéressent à l'étude des inégalités intégrales fractionnaires, voir [3,4,5,6,7,8,16,17,19,20]. Dans ce mémoire,

nous intéressons aux inégalités intégrales fractionnaires et les inégalités intégrales fractionnaire au sens de Hadamard pour une variable aléatoire continue X avec une fonction de densité de probabilité (f : d : p :) $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ définie sur un intervalle fini. Nous présenterons des estimations des moments fractionnaires en utilisant l'intégrale fractionnaire de Hadamard.

Chapitre 1

Intégration fractionnaire

1.1 Fonctions spéciales

Dans ce paragraphe, on présente deux fonctions spéciales qui sont trés utilisées dans l'intégration fractionnaire. Il s'agit de la fonction Gamma et de la fonction Bêta.[15]

1.1.1 Fonction Gamma

La fonction Gamma est simplement la généralisation de la factorielle, cette fonction est l'un des outils de base du calcul fractionnaire.

Définition 1.1.1. *La fonction Gamma est définie par l'intégrale*

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt, \quad \mathrm{Re}(\alpha) > 0. \tag{1.1}$$

Exemple 1.1.1. *Evaluons* $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ *par définition*

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-t} dt. \tag{1.2}$$

Posons $t = v^2$ *alors* $dt = 2vdv$

D'où

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{v} e^{-v^2} 2vdv,$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^{+\infty} e^{-v^2} dv.$$

Calculons $\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2$, *on trouve*

$$\begin{aligned}\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 &= \left[2\int_0^{+\infty} e^{-v^2}dv\right]^2\\ &= 2\int_0^{+\infty} e^{-v^2}dv\\ &= 4\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-\left(u^2+v^2\right)}dudv\\ &= 4\int_0^{\infty} e^{-u^2}du.\end{aligned}$$

On pose

$$\left\{\begin{array}{l} u = r\cos\theta \\ , v = r\sin\theta, r \in \left[0, +\infty\right[, \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \end{array}\right. .$$

On aura

$$\begin{aligned}\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 =& 4\int_{\theta=0 r=0}^{\frac{\pi}{2}+\infty} e^{-r^2}rdrd\theta\\ =& 4\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}\left[-\frac{e^{-r^2}}{2}\right]_0^{+\infty} d\theta\\ =& 4\left[-\frac{e^{-r^2}}{2}\right]_0^{+\infty}\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} d\theta.\\ =& 4\frac{1}{2}\frac{\pi}{2} = \pi\\ \Rightarrow \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) =& \sqrt{\pi}\end{aligned}$$

Propriétés de la fonction Gamma

Une propriété importante de la fonction $\Gamma(\alpha)$ est la relation de récurrence suivante :

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha).$$

qu'on peut démontrer par une intégration par partie :

$$\Gamma(\alpha+1) = \int_0^{\infty} t^{\alpha}e^{-t}dt = \left[-e^{-t}t^{\alpha}\right]_0^{+\infty} + \alpha\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}dt = \alpha\Gamma(\alpha).$$

Puisque $\Gamma(1) = 1$, en utilisant la relation de récurrence, on obtient pour $z = 1, 2, 3\ldots$

$$\begin{aligned}\Gamma(2) &= 1\Gamma(1) = 1!,\\ \Gamma(3) &= 2\Gamma(2) = 2!,\\ \Gamma(4) &= 3\Gamma(3) = 3!,\end{aligned}$$

donc

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)! = n!.$$

1.1.2 Fonction Bêta

Définition 1.1.2. *La fonction Bêta est donnée par :*

$$\beta(p,q)=\int_0^1 (1-t)^{p-1}t^{q-1}dt, \quad \mathrm{Re}(p)>0, \quad \mathrm{Re}(q)>0.$$

Propriétés de la fonction Bêta

1. La fonction Bêta est symétrique c'est-à-dire que :

$$\beta(p,q)=\beta(q,p).$$

2. Elle peut prendre aussi les formes intégrales :

$$\beta(p,q)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p-1}\theta\cos^{2q-1}\theta d\theta,$$

$$\beta(p,q)=\int_0^{\infty}\frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}dt.$$

Proposition 1.1.1. *Les fonctions Gamma et Bêta sont reliées par la relation :*

$$\beta(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

1.2 Intégrale fractionnaire de Hadamard

1.2.1 Variable aléatoire fractionnaires

Définition 1.2.1. [1, 4, 5] *L'intégrale fractionnelle de l'ordre $\alpha\in\mathbb{R}^+$ de la fonction $f(x)$, pour tout $x>1$ est défini comme*

$$_{H}I^{\alpha}f(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t\left(\ln\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1}f(s)\frac{ds}{s}. \tag{1.3}$$

où $\Gamma(\alpha)=\int_0^{\infty}e^{-u}u^{\alpha-1}du$.

Quelques propriétés :

Proposition 1.2.1. [1, 4, 5] *(La linéarité) Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. $\forall\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R},\forall\alpha>0$ on a :*

$$_{\mathrm{H}}\mathrm{I}_a^{\alpha}\left(\lambda_1 f(x)+\lambda_2 g(x)\right)=\lambda_{1\mathrm{H}}\mathrm{I}_a^{\alpha}f(x)+\lambda_{2\mathrm{H}}\mathrm{I}_a^{\alpha}g(x). \tag{1.4}$$

Pour la preuve on utilisant la linéarité de l'intégrale classique.

Proposition 1.2.2. $[1,4,5]$ *(Propriété de semi groupe) Soit* $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ *une fonction continue,* $f \in \mathrm{L}^p([a,b])$ $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$*, on a :*

$$\begin{aligned} {}_{\mathrm{H}}\mathrm{I}_a^{\alpha}\,{}_{\mathrm{H}}\mathrm{I}_a^{\beta} f(x) &= {}_{\mathrm{H}}\mathrm{I}_a^{\alpha+\beta} f(x) \\ &= {}_{\mathrm{H}}\mathrm{I}_a^{\beta}\,{}_{\mathrm{H}}\mathrm{I}_a^{\alpha} f(x). \end{aligned} \tag{1.5}$$

Démonstration. .
$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$${}_{\mathrm{H}}\mathrm{I}_a^{\alpha}\mathrm{f}_a^{\beta} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \int_a^t \left(\log \frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\beta-1} f(s) \frac{ds}{s}\frac{dt}{t}, \tag{1.6}$$

On remarque que :

$$\begin{gathered} a \leq t \leq x, \\ \text{et} \\ a \leq s \leq, t \end{gathered} \tag{1.7}$$

Donc, on prend $s \leq t \leq x$ Puis, on pose le changement de variable :

$$y = \frac{\log\left(\frac{t}{s}\right)}{\log\left(\frac{x}{s}\right)}, \tag{1.8}$$

On obtient alors :

$${}_{\mathrm{H}}\mathrm{I}_a^{\alpha}\,{}_{\mathrm{H}}\mathrm{I}_a^{\beta} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \left[\int_s^t \left(\log \frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\beta-1} f(s) \frac{dt}{t}\right] \frac{ds}{s}, \tag{1.9}$$

On remplace (1.8) dans (1.9) , on obtient :

$$\begin{aligned} \int_s^t \left(\log \frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\beta-1} f(s) \frac{dt}{t} &= \int_0^1 \left[\log x - y \log \frac{x}{s} - \log s\right]^{\alpha-1} \left[y \log \frac{x}{s} + \log s - \log s\right]^{\beta-1} \\ &= \int_0^1 \left((1-y)^{\alpha-1} y^{\beta-1}\right) \left(\log \frac{x}{s}\right)^{\alpha+\beta-1} dy \\ &= B(\alpha,\beta) \left(\log \frac{x}{s}\right)^{\alpha+\beta-1} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \left(\log \frac{x}{s}\right)^{\alpha+\beta-1}, \end{aligned} \tag{1.10}$$

égalité (1.6) devient :

$$
\begin{aligned}
{}_H I_a^{\alpha}\, {}_H I_a^{\beta} f(x) &= \frac{B(\alpha,\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \left(\log\left(\frac{x}{s}\right)\right)^{\alpha+\beta-1} \frac{f(s)}{s} ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^x \left(\log\left(\frac{x}{s}\right)\right)^{\alpha+\beta-1} \frac{f(s)}{s} ds \\
&= {}_{\mathrm{H}}\mathrm{I}_a^{\alpha+\beta} f(x).
\end{aligned} \tag{1.11}
$$

De la même manière, on trouve :

$$
{}_{\mathrm{H}}\mathrm{I}_a^{\beta}\, {}_{\mathrm{H}}\mathrm{I}_a^{\alpha} f(x) = {}_{\mathrm{H}}\mathrm{I}_a^{\alpha+\beta} f(x). \tag{1.12}
$$

D'où la résultat. $\square$

Exemple 1.2.1. *Soient $\alpha > 0, \beta > 0$ et $f(t) = \left(\log\left(\frac{t}{a}\right)\right)^{\beta-1}$*

$$
{}_{\mathrm{H}}\mathrm{I}_a^{\alpha} f(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \left(\log\frac{t}{a}\right)^{\alpha+\beta-1}, \tag{1.13}
$$

En effet

$$
{}_{\mathrm{H}}\mathrm{I}_a^{\alpha} \left(\log\frac{t}{a}\right)^{\beta-1} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} \left(\log\frac{s}{a}\right)^{\beta-1} \frac{ds}{s}, \tag{1.14}
$$

Effectuant le changement de variable

$$
u = \frac{\left(\log\frac{s}{a}\right)}{\left(\log\frac{t}{a}\right)}, \tag{1.15}
$$

alors,(1.14) devient

$$
J_a^{\alpha}\left(\log\left(\frac{t}{a}\right)\right)^{\beta-1} = \frac{\left(\log\frac{t}{a}\right)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} u^{\beta-1}, \tag{1.16}
$$

En utilisant les deux formules $\left(\mathrm{I}_a^\alpha f\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-s)^{\alpha-1}(s-a)^\beta ds$ *et* $\left(\mathrm{I}_a^\alpha f\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds$ *on a*

$$\begin{aligned} {}_{\mathrm{H}}\mathrm{I}_a^\alpha f(t) &= \frac{\mathrm{B}(\beta,\alpha)}{\Gamma(\alpha)}\left(\log\frac{t}{a}\right)^{\alpha+\beta-1} \\ &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\left(\log\frac{t}{a}\right)^{\alpha+\beta-1}. \end{aligned} \tag{1.17}$$

Exemple 1.2.2. *Calcul fractionnaire de la fonction* $f(t) = c$ *au sens de hadamard*

$$H_a^\alpha c = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t \left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1}\frac{c}{s}ds,$$

On pose $x = \log\frac{t}{s} \Rightarrow \exp(x) = \frac{t}{s} \Rightarrow s = t.\exp(-x)$ $ds = -t.\exp(-x)dx$

$$\begin{aligned} H_a^\alpha c =& \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t \left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1}\frac{c}{s}ds \\ =& \frac{c}{\Gamma(\alpha)}\int_{\log\frac{t}{a}}^{0} (x)^{\alpha-1}\frac{-t\cdot\exp(-x)}{\mathrm{t}.\exp(-x)}dx \\ =& \frac{-c}{\Gamma(\alpha)}\int_{\log\frac{t}{a}}^{0)} (x)^{\alpha-1}dx \\ =& \frac{c}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\log\frac{t}{a}} (x)^{\alpha-1}dx \\ =& \frac{c}{\Gamma(\alpha)}\left[\frac{(x)^\alpha}{\alpha}\right]_0^{\log\frac{t}{a}} \\ =& \frac{c}{\Gamma(\alpha+1)}\left(\log\frac{t}{a}\right)^\alpha \end{aligned}. \tag{1.18}$$

Exemple 1.2.3. *calcul fractionnaire de la fonction* $f(t) = c^r$ *au sens de hadamard*

$$H_a^\alpha c^r = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t \left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1}\frac{c^r}{s}ds,$$

On pose $x = \log\frac{t}{s} \Rightarrow \exp(x) = \frac{t}{s} \Rightarrow s = t.\exp(-x)$ $ds = -t.\exp(-x)dx$

$$
\begin{aligned}
H_a^\alpha c^r =& \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} \frac{c^r}{s} ds \\
=& \frac{c^r}{\Gamma(\alpha)} \int_{\log \frac{t}{a}}^{0} (x)^{\alpha-1} \frac{-t \cdot \exp(-x)}{\mathrm{t}.\exp(-x)} dx \\
=& \frac{-c^r}{\Gamma(\alpha)} \int_{\log \frac{t}{a}}^{0} (x)^{\alpha-1} dx \\
=& \frac{c^r}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\log \frac{t}{a}} (x)^{\alpha-1} dx \\
=& \frac{c^r}{\Gamma(\alpha)} \left[\frac{(x)^\alpha}{\alpha}\right]_0^{\log \frac{t}{a}} \\
=& \frac{c^r}{\Gamma(\alpha+1)} \left(\log \frac{t}{a}\right)^\alpha .
\end{aligned}
\tag{1.19}
$$

Maintenant, On introduisons les définitions suivantes :

Définition 1.2.2. [6, 7, 12] *La fonction espérance fractionnaire de l'ordre $\alpha > 0$, pour une variable aléatoire X avec une fonction de densité de probabilité positive (f.d.p) f définie le $[a, b]$, avec un $\alpha > 1$, est définie comme suit :*

$$
E_{X,\alpha}(t) = {}_H D^\alpha [tf(t)] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \left(\ln \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} sf(s) \frac{ds}{s}; \qquad \alpha > 0, \qquad a < t < b. \tag{1.20}
$$

Définition 1.2.3. [6, 7, 12] *La fonction espérance fractionnaire de l'ordre $\alpha > 0$, pour une variable aléatoire $X - E(X)$ est défini comme*

$$
\begin{aligned}
E_{X-E(X),\alpha}(t) &= {}_H D^\alpha t f(t) \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \left(\ln \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} (s - E(X)) f(s) \frac{ds}{s}; \qquad \alpha > 0, \qquad a < t < b.
\end{aligned}
\tag{1.21}
$$

où $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ est le f.d.p. de X avec $\alpha > 1$.

Pour $t = b$, nous introduisons le concept suivant :

Définition 1.2.4. [6, 7, 12] *L'espérance fractionnaire de l'ordre $\alpha > 0$, pour une variable aléatoire X avec une f.d.p. positive f définie le $[a, b]$, avec $\alpha > 1$, est définie comme suit :*

$$
E_{X,\alpha}(b) = {}_H D^\alpha [bf(b)] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b \left(\ln \frac{b}{s}\right)^{\alpha-1} sf(s) \frac{ds}{s}; \qquad \alpha \geq 0.
$$

Définition 1.2.5. [6, 7, 12] *La fonction de variance fractionnaire de l'ordre $\alpha \geq 0$, pour une variable aléatoire X ayant a f.d.p. $f : [a, b] \to \mathbb{R}^+$ avec*

$a \geqslant 1$, se définit comme un

$$\sigma^2_{X,\alpha} := {}_H D^\alpha \left[(t - E(X))^2 f(t) \right]$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \left(\ln \frac{t}{s} \right)^{\alpha - 1} (s - E(X))^2 f(s) \frac{ds}{s}, \qquad \alpha > 0, \qquad a < t < b.$$

où $E_X(t) = \int_a^b s f(s) ds$ est l'attente classique de X.

Définition 1.2.6. [6, 7, 12] *La variance fractionnaire de l'ordre $\alpha > 0$, pour une variable aléatoire X avec un f.d.p. $f : [a, b] \to \mathbb{R}^+$ se définit comme suit :*

$$\sigma^2_{X,\alpha} := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b \left(\ln \frac{b}{s} \right)^{\alpha - 1} (s - E(X))^2 f(s) \frac{ds}{s}, \qquad \alpha \geq 0, \qquad a \geqslant 1. \tag{1.22}$$

où $E_X(t) = \int_a^b s f(s) ds$ est la espérance classique de X.

Chapitre 2

Estimations fractionnaires : Espérances, Variances

2.1 Inégalités pondérées de type Gruss via intégrales fractionnaire de hadamard

2.1.1 Introduction

En 1935, G. Gruss [7] a prouvé l'inégalité intégrale classique suivante :

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx-\left(\tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right)\left(\tfrac{1}{b-a}\int_a^b g(x)dx\right)\\ &\leq \frac{(\Phi-\varphi)(\Psi-\psi)}{4}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

à condition que f et g soient deux fonctions intégrables sur $[a,b]$ et répondant aux conditions

$$\varphi \leq f(x) \leq \Phi, \psi \leq g(x) \leq \Psi; \quad \Phi,\varphi,\Psi,\psi \in \mathbb{R}, x \in [a,b], \tag{2.2}$$

Dans le cas d'une fonction positive p sur $[a,b]$, Dragomir [6] a prouvé que

$$|T(f,g,p)| \leq \frac{(\Phi-\varphi)(\Psi-\psi)}{4}\left(\int_a^b p(x)\right)^2, \tag{2.3}$$

où

$$T(f,g,p) := \int_a^b p(x)dx\int_a^b p(x)f(x)g(x)dx-\left(\int_a^b p(x)f(x)dx\right)\left(\int_a^b p(x)g(x)dx\right). \tag{2.4}$$

et f et g sont deux fonctions intégrables sur $[a,b]$ satisfaisant (2.2).
De nombreux chercheurs ont accordé une attention considérable à (2.1) et (2.3) et un certain nombre de les inégalités sont apparues dans la littérature, pour n'en citer que quelques-unes, voir [8, 9, 10, 11] et les références qui y sont citées. dans le cas des intégrales fractionnaires [1], en prenant un cas particulier ;

$h(x) = (b-x)^{\alpha-1}f(x), \quad k(x) = (b-x)^{\alpha-1}g(x), \quad \alpha > \frac{1}{2}$, et h, k satisfont à la condition (2.2), G. Anastassiou établi une autre inégalité partielle intégrale. D'autres documents traitant de diverses extensions ont paru dans la littérature [2-5]. L'objectif principal de ce document est d'établir nouveaux résultats pour (2.1) et (2.3), en utilisant les intégrales fractionnaires Hadamard.

2.1.2 Inégalité intégrale fractionnaire de type Gruss via l'intégrale de hadamard

Pour prouver notre résultat principal, nous avons besoin du lemme suivant.

Lemme 2.1.1. $[2,3,8,9]$ *Soit* $m, M \in \mathbb{R}$ *et* v *être une fonction intégrable sur* $[0,\infty)$*, Puis pour tous* $t > 0, \alpha > 0$*, nous avons*

$$\begin{aligned} &\tfrac{(\ln t)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} {}_H D^\alpha v^2(t) - \left({}_H D^\alpha v(t)\right)^2 = \left(M \tfrac{(\ln t)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - {}_H D^\alpha v(t)\right) \\ &\left({}_H D^\alpha v(t) - m \tfrac{(\ln t)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\right) - \tfrac{(\ln t)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} {}_H D^\alpha (M - v(t))(v(t) - m). \end{aligned} \tag{2.5}$$

Démonstration. Soit $m, M \in \mathbb{R}$ et v soit une fonction intégrable sur $[0,\infty)$. Pour tous $\tau, \rho \in [0,\infty)$, nous avons

$$\begin{aligned} &(M - v(\rho))(v(\tau) - m) + (M - v(\tau))(v(\rho) - m) \\ &-(M - v(\tau))(v(\tau) - m) - (M - v(\rho))(v(\rho) - m) \\ &= v^2(\tau) + v^2(\rho) + 2v(\tau)v(\rho). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Multiplier les deux côtés de (2.6) par $\frac{\left(\ln\left(\frac{t}{\tau}\right)\right)^{\alpha-1}}{\tau\Gamma(\alpha)}$, et est positif parce que $\tau \in (0,t), t > 0$ puis l'intégration de l'identité résultante en ce qui concerne τ de 1 à t, nous obtenons

$$\begin{aligned} &(M - v(\rho))\left({}_H D^\alpha v(t) - m \tfrac{(\ln t)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\right) + \left(M \tfrac{(\ln t)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - {}_H D^\alpha v(t)\right) \\ &(v(\rho) - m) - {}_H D^\alpha((M - v(t))(v(t) - m)) - ((M - v(\rho))(v(\rho) - m)) \times (12) \\ &\tfrac{(\ln t)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} = {}_H D^\alpha v^2(t) + v^2(\rho) \tfrac{(\ln t)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + 2v(\rho) {}_H D^\alpha v(t). \end{aligned} \tag{2.7}$$

Multipliant à nouveau les deux côtés de (2.7) par $\frac{\left(\ln\left(\frac{t}{\rho}\right)\right)^{\alpha-1}}{\rho\Gamma(\alpha)}$, ce qui est positif parce que $\rho \in (0,t), t > 0$, puis l'intégration de l'identité résultante en ce qui concerne ρ de 1 à t nous obtenons

$$\begin{aligned}
&\left({}_HD^\alpha v(t) - m\tfrac{(\ln t)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\right)\tfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t\left(\ln\tfrac{t}{\rho}\right)^{\alpha-1}(M-v(\rho))\tfrac{d\rho}{\rho}\\
&+\left(M\tfrac{(\ln t)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - {}_HD^\alpha v(t)\right)\tfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t\left(\ln\tfrac{t}{\rho}\right)^{\alpha-1}(v(\rho)-m)\tfrac{d\rho}{\rho}\\
&-{}_HD^\alpha((M-v(t)))\tfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t\left(\ln\tfrac{t}{\rho}\right)^{\alpha-1}(1)\tfrac{d\rho}{\rho}\\
&-\tfrac{(\ln t)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\tfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t\left(\ln\tfrac{t}{\rho}\right)^{\alpha-1}(M-v(\rho))(v(\rho)-m)\tfrac{d\rho}{\rho}\\
&=\tfrac{(\ln t)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}{}_HD^\alpha v^2(t) + v^2(\rho)\tfrac{(\ln t)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + 2{}_HD^\alpha v(t){}_HD^\alpha v(t).
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Ce qui donne (2.5), et prouve le lemme. □

Théorème 2.1.1. *Soit f, g soit deux fonctions intégrables sur $[0,\infty)$, satisfaisant à la condition que*

$$m \leq f(t) \leq M, p \leq g(t) \leq P; m, M, p, P \in R, t \in [0,\infty). \tag{2.9}$$

nous avons

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{(\ln t)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}{}_HD^\alpha fg(t) - {}_HD^\alpha f(t){}_HD^\alpha g(t)\right|\\
&\leq \left(\tfrac{(\ln t)^\alpha}{2\Gamma(\alpha+1)}\right)^2(M-m)(P-p).
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Démonstration. Soit f et g deux fonctions satisfaisant la condition (2.9) Définir

$$H(\tau,\rho) := (f(\tau)-f(\rho))(g(\tau)-g(\rho)); \tau,\rho \in (0,t), t>0. \tag{2.11}$$

il s'ensuit que

$$H(\tau,\rho) := f(\tau)g(\tau) - f(\tau)g(\rho) - f(\rho)g(\tau) + f(\rho)g(\rho). \tag{2.12}$$

Puis, en multipliant (2.12) par $\frac{\left(\ln\left(\frac{t}{\tau}\right)\right)^{\alpha-1}}{\tau\Gamma(\alpha)}$, ce qui est positif car $\tau \in (0,t), t>0$ puis l'intégration de l'identité résultante en ce qui concerne τ de 1 à t, nous obtenons

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t\left(\ln\tfrac{t}{\tau}\right)^{\alpha-1}H(\tau,\rho)\tfrac{d\tau}{\tau}\\
&= {}_HD^\alpha fg(t) - f(\tau){}_HD^\alpha f(t) - f(\rho){}_HD^\alpha g(t) + f(\rho)g(\rho){}_HD^\alpha(1).
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Encore une fois, en multipliant (2.13) par $\frac{\left(\ln\left(\frac{t}{\rho}\right)\right)^{\alpha-1}}{\rho\Gamma(\alpha)}$, ce qui est positif parce que $\rho \in (0,t)$, et intégrer avec respectivement ρ de 1 à t, nous avons,

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{\Gamma^2(\alpha)}\int_1^t\int_1^t\left(\ln\tfrac{t}{\tau}\right)^{\alpha-1}\left(\ln\tfrac{t}{\rho}\right)^{\alpha-1}H(\tau,\rho)\tfrac{d\rho}{\rho}\tfrac{d\tau}{\tau}\\
&= 2\left(\tfrac{(\ln t)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}{}_HD^\alpha fg(t) - {}_HD^\alpha f(t){}_HD^\alpha g(t)\right).
\end{aligned} \tag{2.14}$$

En appliquant l'inégalité Cauchy-Schwarz, nous avons,

$$\begin{aligned} &\left(\tfrac{(\ln t)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} {}_H D^\alpha fg(t) - {}_H D^\alpha f(t) {}_H D^\alpha g(t)\right)^2 \leq \\ &\left(\tfrac{(\ln t)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} {}_H D^\alpha f^2(t) - \left({}_H D^\alpha f(t)\right)^2\right) \times \\ &\left(\tfrac{(\ln t)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} {}_H D^\alpha g^2(t) - \left({}_H D^\alpha g(t)\right)^2\right). \end{aligned} \tag{2.15}$$

Puisque $(M - f(t))(f(t) - m) \geq 0$ et $(P - g(t))(g(t) - p) \geq 0$, alors

$$\frac{(\ln t)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} {}_H D^\alpha (M - f(t))(f(t) - m) \geq 0. \tag{2.16}$$

et

$$\frac{(\ln t)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} {}_H D^\alpha (P - g(t))(g(t) - p) \geq 0. \tag{2.17}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} &\tfrac{(\ln t)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} {}_H D^\alpha f^2(t) - \left({}_H D^\alpha f(t)\right)^2 \\ &\leq \left(M \tfrac{(\ln t)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - {}_H D^\alpha f(t)\right)\left({}_H D^\alpha f(t) - m \tfrac{(\ln t)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\right). \end{aligned} \tag{2.18}$$

Et

$$\begin{aligned} &\tfrac{(\ln t)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} {}_H D^\alpha g^2(t) - \left({}_H D^\alpha g(t)\right)^2 \\ &\leq \left(M \tfrac{(\ln t)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - {}_H D^\alpha f(t)\right)\left({}_H D^\alpha f(t) - m \tfrac{(\ln t)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\right). \end{aligned} \tag{2.19}$$

En combinant (2.15), (2.18) et (2.19), en utilisant lemme 2.1.1, nous concluons que

$$\begin{aligned} &\left(\tfrac{(\ln t)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} {}_H D^\alpha fg(t) - {}_H D^\alpha f(t) {}_H D^\alpha g(t)\right)^2 \\ &\leq \left(P \tfrac{(\ln t)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - {}_H D^\alpha g(t)\right)\left({}_H D^\alpha g(t) - p \tfrac{(\ln t)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\right) \times \\ &\left(P \tfrac{(\ln t)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - {}_H D^\alpha g(t)\right)\left({}_H D^\alpha g(t) - p \tfrac{(\ln t)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\right). \end{aligned} \tag{2.20}$$

Maintenant en utilisant l'inégalité élémentaire $4ab \leq (a+b)^2, a, b \in R$, nous pouvons montrer que

$$\begin{aligned} &4\left(M \tfrac{(\ln t)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - {}_H D^\alpha f(t)\right)\left({}_H D^\alpha f(t) - m \tfrac{(\ln t)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\right) \\ &\leq \left(\tfrac{(\ln t)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} (M - m)\right)^2. \end{aligned} \tag{2.21}$$

et

$$
\begin{aligned}
&4\left(P\tfrac{(\ln t)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}-{}_{H}D^{\alpha}g(t)\right)\left({}_{H}D^{\alpha}g(t)-m\tfrac{(\ln t)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right)\\
&\leq\left(\tfrac{(\ln t)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}(P-p)\right)^{2}.
\end{aligned}
\tag{2.22}
$$

À partir de (2.20), (2.21) et (2.22), nous obtenons le résultat (2.10)

□

Lemme 2.1.2. *Soit f et g soient deux fonctions intégrables sur $[0,\infty)$. alors pour tous $t>0,\alpha>0,\beta>0$, nous avons :*

$$
\begin{aligned}
&\Big[\tfrac{(\ln t)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}{}_{H}D^{\beta}fg(t)+\tfrac{(\ln t)^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}{}_{H}D^{\alpha}fg(t)-{}_{H}D^{\alpha}f(t){}_{H}D^{\beta}g(t)-\\
&{}_{H}D^{\beta}f(t){}_{H}D^{\alpha}g(t)\Big]^{2}\\
&\leq\left(\tfrac{(\ln t)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}{}_{H}D^{\beta}f^{2}(t)+\tfrac{(\ln t)^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}{}_{H}D^{\alpha}f^{2}(t)-2{}_{H}D^{\alpha}f(t){}_{H}D^{\beta}f(t)\right)\times\\
&\left(\tfrac{(\ln t)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}{}_{H}D^{\beta}g^{2}(t)+\tfrac{(\ln t)^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}{}_{H}D^{\alpha}g^{2}(t)-2{}_{H}D^{\alpha}g(t){}_{H}D^{\beta}g(t)\right).
\end{aligned}
\tag{2.23}
$$

Démonstration. Multiplier (2.13) par $\frac{\left(\ln\left(\frac{t}{\rho}\right)\right)^{\beta-1}}{\rho\Gamma(\beta)}$, ce qui est positif parce que $\rho\in(0,t)$ et intégrer avec respectivement ρ de 1 à t, puis appliquer l'inégalité Cauchy-Schwarz pour double intégrale, nous obtenons (2.23).

□

Lemme 2.1.3. *Soit v une fonction intégrable sur $[0,\infty)$ et $m,M\in R$, puis pour tous $t>0,\alpha>0,\beta>0$, nous avons :*

$$
\begin{aligned}
&\tfrac{(\ln t)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}{}_{H}D^{\beta}v^{2}(t)+\tfrac{(\ln t)^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}{}_{H}D^{\alpha}v^{2}(t)-2{}_{H}D^{\alpha}v(t){}_{H}D^{\beta}v(t)=\\
&\left(M\tfrac{(\ln t)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}-{}_{H}D^{\alpha}v(t)\right)\left({}_{H}D^{\beta}v(t)-m\tfrac{(\ln t)^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}\right)\\
&+\left(M\tfrac{(\ln t)^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}-{}_{H}D^{\beta}v(t)\right)\left({}_{H}D^{\alpha}v(t)-m\tfrac{(\ln t)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right)\\
&-\tfrac{(\ln t)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}{}_{H}D^{\alpha}(M-v(t))(v(t)-m)\\
&-\tfrac{(\ln t)^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}{}_{H}D^{\alpha}(M-v(t))(v(t)-m).
\end{aligned}
\tag{2.24}
$$

Démonstration. Multiplier (2.7) par $\frac{\left(\ln\left(\frac{t}{r}\right)\right)^{\beta-1}}{\rho\Gamma(\beta)}$, ce qui est positif car $\rho\in(0,t)$ $t>0$, puis intégration de l'identité résultante par rapport à ρ de 1 à t, nous obtenons

$$\left({}_HD^{\alpha}v(t)-m\tfrac{(\ln t)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right)\tfrac{1}{\Gamma(\beta)}\int_1^t\left(\ln\tfrac{t}{\rho}\right)^{\beta-1}(M-v(\rho))\tfrac{d\rho}{\rho}$$

$$\left(M\tfrac{(\ln t)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}-{}_HD^{\alpha}v(t)\right)\tfrac{1}{\Gamma(\beta)}\int_1^t\left(\ln\tfrac{t}{\rho}\right)^{\beta-1}(v(\rho)-m)\tfrac{d\rho}{\rho}$$

$$-{}_HD^{\alpha}((M-v(t))(v(t)-m))\tfrac{1}{\Gamma(\beta)}\int_1^t\left(\ln\tfrac{t}{\rho}\right)^{\beta-1}(1)\tfrac{d\rho}{\rho} \tag{2.25}$$

$$-\tfrac{(\ln t)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\tfrac{1}{\Gamma(\beta)}\int_1^t\left(\ln\tfrac{t}{\rho}\right)^{\beta-1}(M-v(\rho)(v(\rho)-m))\tfrac{d\rho}{\rho}$$

$$=\tfrac{(\ln t)^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}{}_HD^{\beta}v^2(t)+{}_HD^{\beta}v^2(t)\tfrac{(\ln t)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}-2{}_HD^{\alpha}v(t){}_HD^{\beta}v(t).$$

□

Théorème 2.1.2. *Soit f,g soit deux fonctions intégrables sur $[0,\infty)$, satisfaisant à la condition que*

$$m\leq f(t)\leq M, p\leq g(t)\leq P; m,M,p,P\in R, t\in[0,\infty). \tag{2.26}$$

alors pour tous $T>0,\alpha>0,\beta>0$, Nous avons :

$$\left(\frac{(\ln t)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}{}_HD^{\beta}fg(t)+\frac{(\ln t)^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}{}_HD^{\alpha}fg(t)-{}_HD^{\alpha}f(t){}_HD^{\beta}g(t)-{}_HD^{\beta}f(t){}_HD^{\alpha}g(t)\right)^2$$

$$\begin{aligned}&\leq\left[\left(M\frac{(\ln t)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}-{}_HD^{\alpha}f(t)\right)\left({}_HD^{\beta}f(t)-m\frac{(\ln t)^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}\right)\right.\\&\left.+\left({}_HD^{\alpha}f(t)-m\frac{(\ln t)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right)\left(M\frac{(\ln t)^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}-{}_HD^{\beta}f(t)\right)\right]\\&\times\left[\left(P\frac{(\ln t)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}-{}_HD^{\alpha}g(t)\right)\left({}_HD^{\beta}g(t)-p\frac{(\ln t)^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}\right)\right.\\&\left.+\left({}_HD^{\alpha}g(t)-p\frac{(\ln t)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right)\left(P\frac{(\ln t)^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}-{}_HD^{\beta}g(t)\right)\right].\end{aligned} \tag{2.27}$$

Démonstration. Depuis $(M-f(x))(f(x)-m)\geq 0$ et $(P-g(x))(g(x)-p)\geq 0$, alors nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}&-\tfrac{(\ln t)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}{}_HD^{\beta}(M-f(t))(f(t)-m)-\\&\tfrac{(\ln t)^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}{}_HD^{\alpha}(M-f(t))(f(t)-m)\leq 0.\end{aligned} \tag{2.28}$$

$$-\frac{(\ln t)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}{}_{H}D^{\beta}(P-g(t))(g(t)-p)-$$
$$\frac{(\ln t)^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}{}_{H}D^{\alpha}(P-g(t))(g(t)-p) \leq 0. \tag{2.29}$$

Appliquer la lemme 2.1.3 à f et g, puis utiliser la lemme 2.1.2 et l'équation (2.28) et (2.29) nous obtenons (2.27). □

Théorème 2.1.3. *Soit f et g être deux fonctions intégrables sur $[0,\infty]$ satisfaisant à la condition (2.2) sur $[0,\infty]$ et laisser p être une fonction positive sur $[0,\infty]$: Alors pour tous $t > 0$, $\alpha > 0$, nous avons :*

$$\left|{}_{H}I^{\alpha}p(t){}_{H}I^{\alpha}pfg(t) - {}_{H}I^{\alpha}pf(t){}_{H}I^{\alpha}pg(t)\right|$$
$$\leq \left(\frac{{}_{H}I^{\alpha}p(t)}{2}\right)^{2}(\Phi-\varphi)(\Psi-\psi). \tag{2.30}$$

Pour prouver ce théorème, nous avons besoin de la lemme suivante

Lemme 2.1.4. *Soit u est une fonction intégrable sur $[0,\infty]$ satisfaisant à la condition (2.2) sur $[0,\infty]$ et laisser p être une fonction positive sur $[0,\infty]$: Alors pour tous $t > 0$, $\alpha > 0$, nous avons :*

$${}_{H}I^{\alpha}p(t){}_{H}I^{\alpha}pu^{2}(t) - \left({}_{H}I^{\alpha}pu(t)\right)^{2}$$
$$= \left(\Phi_{H}I^{\alpha}p(t) - {}_{H}I^{\alpha}pu(t)\right)\left({}_{H}I^{\alpha}pu(t) - \varphi_{H}I^{\alpha}p(t)\right) \tag{2.31}$$
$$-{}_{H}I^{\alpha}p(t){}_{H}I^{\alpha}((\Phi-u(t))(u(t)-\varphi)p(t)).$$

Démonstration. Nous avons

$$(\Phi p(\rho)-u(\rho)p(\rho))(p(\tau)u(\tau)-\varphi p(\tau))$$
$$+(\Phi p(\tau)-u(\tau)p(\tau))(p(\rho)u(\rho)-\varphi p(\rho))$$
$$-p(\tau)(\Phi-u(\tau))(u(\tau)-\varphi)p(\rho)-p(\rho)(\Phi-u(\rho))(u(\rho)-\varphi)p(\tau) \tag{2.32}$$
$$=p(\rho)u^{2}(\tau)p(\tau)+p(\tau)u^{2}(\rho)p(\rho)-2p(\tau)u(\tau)u(\rho)p(\rho).$$

Multiplication des deux côtés de (2.32) par $\ln\left(\frac{t}{\tau}\right)^{\alpha-1}\frac{1}{\tau\Gamma(\alpha)}$, $\quad \tau \in (0,t)$ et l'intégration de l'identité résultante par rapport à τ de 0 à t, nous obtenons

$$(\Phi p(\rho)-u(\rho)p(\rho))\left({}_{H}I^{\alpha}p(t)u(t)-\varphi_{H}I^{\alpha}p(t)\right)$$
$$+\left(\Phi_{H}I^{\alpha}p(t)-{}_{H}I^{\alpha}u(t)p(t)\right)(p(\rho)u(\rho)-\varphi p(\rho))$$
$$-p(\rho){}_{H}I^{\alpha}(p(t)(\Phi-u(t))(u(t)-\varphi))-p(\rho)(\Phi-u(\rho))(u(\rho)-\varphi){}_{H}I^{\alpha}p(t)$$
$$=p(\rho){}_{H}I^{\alpha}u^{2}(t)p(t)+p(\rho)u^{2}(\rho){}_{H}I^{\alpha}p(t)-2p(\rho)u(\rho){}_{H}I^{\alpha}(u(t)p(t)). \tag{2.33}$$

Maintenant, en multipliant les deux côtés de (2.33) par $\ln\left(\frac{t}{\tau}\right)^{\alpha-1}\frac{1}{\tau\Gamma(\alpha)}$, $\rho\in(0,t)$ et l'intégration de l'identité résultante par rapport à ρ de 0 à t, nous obtenons

$$\begin{aligned}
&\left({}_HI^{\alpha}p(t)u(t)-\varphi{}_HI^{\alpha}p(t)\right)\tfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\textstyle\int_1^t\ln\left(\frac{t}{\rho}\right)^{\alpha-1}\left(\Phi p(\rho)-u(\rho)p(\rho)\right)\frac{d\rho}{\rho}\\
&+\left(\Phi{}_HI^{\alpha}p(t)-{}_HI^{\alpha}u(t)p(t)\right)\tfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\textstyle\int_0^t\ln\left(\frac{t}{\rho}\right)^{\alpha-1}\left(p(\rho)u(\rho)-\varphi p(\rho)\right)\frac{d\rho}{\rho}\\
&-{}_HI^{\alpha}(p(t)(\Phi-u(t))(u(t)-\varphi))\tfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\textstyle\int_0^t\ln\left(\frac{t}{\rho}\right)^{\alpha-1}p(\rho)\frac{d\rho}{\rho}\\
&-{}_HI^{\alpha}p(t)\tfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\textstyle\int_0^t\ln\left(\frac{t}{\rho}\right)^{\alpha-1}p(\rho)(\Phi-u(\rho))(u(\rho)-\varphi)\frac{d\rho}{\rho}\\
&={}_HI^{\alpha}p(t){}_HI^{\alpha}pu^2(t)+{}_HI^{\alpha}pu^2(t){}_HI^{\alpha}p(t)-2{}_HI^{\alpha}pu(t){}_HI^{\alpha}pu(t).
\end{aligned}\tag{2.34}$$

qui donne (2.31) et prouve la lemme. □

Preuve de théorème 2.1.3

Définir

$$H(\tau,\rho):=\left(f(\tau)-f(\rho)\right)\left(g(\tau)-g(\rho)\right).\tag{2.35}$$

Multiplication des deux côtés de (2.35) par $\dfrac{\ln\left(\frac{t}{\tau}\right)^{\alpha-1}\ln\left(\frac{t}{\rho}\right)^{\alpha-1}}{\tau\rho\left(\Gamma(\alpha)\right)^2}p(\tau)p(\rho)$, $\rho\in(0,t)$ intégrer ensuite l'identité résultante par rapport à ρ plus $(0,t)^2$, nous pouvons affirmer que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(\Gamma(\alpha))^2}\int_1^t\int_1^t\ln\left(\frac{t}{\tau}\right)^{\alpha-1}\ln\left(\frac{t}{\rho}\right)^{\alpha-1}\frac{p(\tau)p(\rho)H(\tau,\rho)}{\tau\rho}d\tau d\rho\\
&=2{}_HI^{\alpha}p(t){}_HI^{\alpha}pfg(t)-2{}_HI^{\alpha}pf(t){}_HI^{\alpha}pg(t).
\end{aligned}\tag{2.36}$$

D'une application de l'inégalité intégrale pondérée de Cauchy Schwartz (pour double intégrale), nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{(\Gamma(\alpha))^2}\int_1^t\int_1^t\ln\left(\frac{t}{\tau}\right)^{\alpha-1}\ln\left(\frac{t}{\rho}\right)^{\alpha-1}\frac{p(\tau)p(\rho)H(\tau,\rho)}{\tau\rho}d\tau d\rho\right)^2\\
&\leq\frac{1}{(\Gamma(\alpha))^2}\int_1^t\int_1^t\ln\left(\frac{t}{\tau}\right)^{\alpha-1}\ln\left(\frac{t}{\rho}\right)^{\alpha-1}\frac{p(\tau)p(\rho)\left(f(\tau)-f(\rho)\right)^2}{\tau\rho}d\tau d\rho\\
&\times\frac{1}{(\Gamma(\alpha))^2}\int_1^t\int_1^t\ln\left(\frac{t}{\tau}\right)^{\alpha-1}\ln\left(\frac{t}{\rho}\right)^{\alpha-1}\frac{p(\tau)p(\rho)\left(g(\tau)-g(\rho)\right)^2}{\tau\rho}d\tau d\rho.
\end{aligned}\tag{2.37}$$

En utilisant $I^{\alpha}f(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}f(\tau)d\tau$ nous pouvons développer le côté droit de (2.37) comme suit

$$\frac{1}{(\Gamma(\alpha))^2}\int_1^t\int_1^t \ln\left(\frac{t}{\tau}\right)^{\alpha-1}\ln\left(\frac{t}{\rho}\right)^{\alpha-1}\frac{p(\tau)p(\rho)\left(f(\tau)-f(\rho)\right)^2}{\tau\rho}d\tau d\rho \tag{2.38}$$

$$=2{}_HI^{\alpha}p(t){}_HI^{\alpha}pf^2(t)-2\left({}_HI^{\alpha}pf(t)\right)^2.$$

et

$$\frac{1}{(\Gamma(\alpha))^2}\int_1^t\int_1^t \ln\left(\frac{t}{\tau}\right)^{\alpha-1}\ln\left(\frac{t}{\rho}\right)^{\alpha-1}\frac{p(\tau)p(\rho)\left(g(\tau)-g(\rho)\right)^2}{\tau\rho}d\tau d\rho \tag{2.39}$$

$$=2{}_HI^{\alpha}p(t){}_HI^{\alpha}pg^2(t)-2\left({}_HI^{\alpha}pg(t)\right)^2.$$

En utilisant (2.36) ; (2.38) et (2.39) ; nous pouvons écrire (2.37) comme suit

$$\left({}_HI^{\alpha}p(t){}_HI^{\alpha}pfg(t)-{}_HI^{\alpha}pf(t){}_HI^{\alpha}pg(t)\right)^2$$

$$=\left({}_HI^{\alpha}p(t){}_HI^{\alpha}pf^2(t)-\left({}_HI^{\alpha}pf(t)\right)^2\right)\left({}_HI^{\alpha}p(t){}_HI^{\alpha}pg^2(t)-\left({}_HI^{\alpha}pg(t)\right)^2\right). \tag{2.40}$$

Application de Lemme 2.1.4 avec $u=f$ puis avec $u=g$, on obtient respectivement

$${}_HI^{\alpha}p(t){}_HI^{\alpha}pf^2(t)-\left({}_HI^{\alpha}pf(t)\right)^2$$

$$=\left(\Phi{}_HI^{\alpha}p(t)-{}_HI^{\alpha}pf(t)\right)\left({}_HI^{\alpha}pf(t)-\varphi{}_HI^{\alpha}p(t)\right) \tag{2.41}$$

$$-{}_HI^{\alpha}p(t){}_HI^{\alpha}((\Phi-f(t))(f(t)-\varphi)p(t)).$$

et

$${}_HI^{\alpha}p(t){}_HI^{\alpha}pg^2(t)-\left({}_HI^{\alpha}pg(t)\right)^2$$

$$=\left(\Psi{}_HI^{\alpha}p(t)-{}_HI^{\alpha}pg(t)\right)\left({}_HI^{\alpha}pg(t)-\psi{}_HI^{\alpha}p(t)\right) \tag{2.42}$$

$$-{}_HI^{\alpha}p(t){}_HI^{\alpha}((\Psi-g(t))(g(t)-\psi)p(t)).$$

car

$$-{}_HI^{\alpha}p(t){}_HI^{\alpha}((\Phi-f(t))(f(t)-\varphi)p(t))\leq 0. \tag{2.43}$$

et

$$-{}_HI^{\alpha}p(t){}_HI^{\alpha}((\Psi-g(t))(g(t)-\psi)p(t))\leq 0. \tag{2.44}$$

alors nous avons respectivement

$$\begin{aligned} &{}_HI^{\alpha}p(t)_HI^{\alpha}pf^2(t) - \left({}_HI^{\alpha}pf(t)\right)^2 \\ &\leq \left(\Phi_HI^{\alpha}p(t) - {}_HI^{\alpha}pf(t)\right)\left({}_HI^{\alpha}pf(t) - \varphi_HI^{\alpha}p(t)\right). \end{aligned} \tag{2.45}$$

et

$$\begin{aligned} &{}_HI^{\alpha}p(t)_HI^{\alpha}pg^2(t) - \left({}_HI^{\alpha}pg(t)\right)^2 \\ &\leq \left(\Psi_HI^{\alpha}p(t) - {}_HI^{\alpha}pg(t)\right)\left({}_HI^{\alpha}pg(t) - \psi_HI^{\alpha}p(t)\right). \end{aligned} \tag{2.46}$$

Maintenant en utilisant (2.45) et (2.46) ; nous pouvons estimer l'inégalité (2.40) comme suit

$$\begin{aligned} &\left({}_HI^{\alpha}p(t)_HI^{\alpha}pfg(t) - {}_HI^{\alpha}pf(t)_HI^{\alpha}pg(t)\right)^2 \\ &\leq \left(\Phi_HI^{\alpha}p(t) - {}_HI^{\alpha}pf(t)\right)\left({}_HI^{\alpha}pf(t) - \varphi_HI^{\alpha}p(t)\right)\times \\ &\left(\Psi_HI^{\alpha}p(t) - {}_HI^{\alpha}pg(t)\right)\left({}_HI^{\alpha}pg(t) - \psi_HI^{\alpha}p(t)\right). \end{aligned} \tag{2.47}$$

Utilisation de l'inégalité $4rs \leq (r+s)^2, \quad r, s \in \mathbb{R}$ donne

$$4\left(\Phi_HI^{\alpha}p(t) - {}_HI^{\alpha}pf(t)\right)\left({}_HI^{\alpha}pf(t) - \varphi_HI^{\alpha}p(t)\right) \leq \left((\Phi-\varphi)_HI^{\alpha}p(t)\right)^2. \tag{2.48}$$

et

$$4\left(\Psi_HI^{\alpha}p(t) - {}_HI^{\alpha}pg(t)\right)\left({}_HI^{\alpha}pg(t) - \psi_HI^{\alpha}p(t)\right) \leq \left((\Psi-\psi)_HI^{\alpha}p(t)\right)^2. \tag{2.49}$$

En combinant (2.47), (2.48) et (2.49) nous obtenons (2.30).

Théorème 2.1.4. *Soit f et g être deux fonctions intégrables sur $[0,\infty]$ satisfaisant à la condition (2.2) sur $[0,\infty]$ et laisser p être une fonction positive sur $[0,\infty]$, Puis pour tous les $t > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, nous avons :*

$$\begin{aligned} &\left({}_HI^{\alpha}p(t)_HI^{\beta}pfg(t) + {}_HI^{\beta}p(t)_HI^{\alpha}pfg(t) - {}_HI^{\alpha}pf(t)_HI^{\beta}pg(t) - {}_HI^{\beta}pf(t)_HI^{\alpha}pg(t)\right)^2 \\ &\leq \Big[\left(\Phi_HI^{\alpha}p(t) - {}_HI^{\alpha}pf(t)\right)\left({}_HI^{\beta}pf(t) - \varphi_HI^{\beta}p(t)\right) \\ &+ \left({}_HI^{\alpha}pf(t) - \varphi_HI^{\alpha}p(t)\right)\left(\Phi_HI^{\beta}p(t) - {}_HI^{\beta}pf(t)\right)\Big] \\ &\times \Big[\left(\Psi_HI^{\alpha}p(t) - {}_HI^{\alpha}pg(t)\right)\left({}_HI^{\beta}pg(t) - \psi_HI^{\beta}p(t)\right) \\ &+ \left({}_HI^{\alpha}pg(t) - \psi_HI^{\alpha}p(t)\right)\left(\Psi_HI^{\beta}p(t) - {}_HI^{\beta}pg(t)\right)\Big]. \end{aligned} \tag{2.50}$$

Pour prouver le théorème 2.1.3, nous avons besoin des lemmes suivants :

Lemme 2.1.5. *Que f et g soient deux fonctions intégrables sur $[0,\infty]$ et que p soit un positif fonction sur $[0,\infty]$, Puis pour tous les $t>0$, $\alpha>0$, $\beta>0$, nous avons :*

$$\Big({}_HI^{\alpha}p(t){}_HI^{\beta}pfg(t)+{}_HI^{\beta}p(t){}_HI^{\alpha}pfg(t)-{}_HI^{\alpha}pf(t){}_HI^{\beta}pg(t)-{}_HI^{\beta}pf(t){}_HI^{\alpha}pg(t)\Big)^2$$
$$\leq\Big({}_HI^{\alpha}p(t){}_HI^{\beta}pf^2(t)+{}_HI^{\beta}p(t){}_HI^{\alpha}pf^2(t)-2{}_HI^{\alpha}pf(t){}_HI^{\beta}pf(t)\Big)$$
$$\times\Big({}_HI^{\alpha}p(t){}_HI^{\beta}pg^2(t)+{}_HI^{\beta}p(t){}_HI^{\alpha}pg^2(t)-2{}_HI^{\alpha}pg(t){}_HI^{\beta}pg(t)\Big). \tag{2.51}$$

Démonstration. Multiplication des deux côtés de (2.33) par $\ln\left(\frac{t}{\rho}\right)^{\beta-1}\frac{1}{\rho\Gamma(\beta)}$, $\quad\rho\in(0,t)$ intégration de l'identité résultante par rapport à ρ plus $(0,t)$, puis application de l'inégalité Cauchy-Schwartz pour les intégrales doubles, nous obtenons (2.51)

□

Lemme 2.1.6. *Soit u est une fonction intégrable sur $[0,\infty]$ satisfaisant à la condition (2.2) sur $[0,\infty]$ et laisser p être une fonction positive sur $[0,\infty]$: Alors pour tous $t>0$, $\alpha>0$, $\beta>0$, nous avons :*

$${}_HI^{\alpha}p(t){}_HI^{\beta}pu^2(t)+{}_HI^{\beta}p(t){}_HI^{\alpha}pu^2(t)-2{}_HI^{\alpha}pu(t){}_HI^{\beta}pu(t)$$
$$=\Big(\Phi{}_HI^{\beta}p(t)-{}_HI^{\beta}pu(t)\Big)\left({}_HI^{\alpha}pu(t)-\varphi{}_HI^{\alpha}p(t)\right)$$
$$+\left(\Phi{}_HI^{\alpha}p(t)-{}_HI^{\alpha}pu(t)\right)\Big({}_HI^{\beta}pu(t)-\varphi{}_HI^{\beta}p(t)\Big)$$
$$-{}_HI^{\beta}p(t){}_HI^{\alpha}((\Phi-u(t))(u(t)-\varphi)p(t))-{}_HI^{\alpha}p(t){}_HI^{\beta}((\Phi-u(t))(u(t)-\varphi)p(t)). \tag{2.52}$$

Démonstration. Multiplication des deux côtés de (2.33) par $\ln\left(\frac{t}{\rho}\right)^{\beta-1}\frac{1}{\rho\Gamma(\beta)}$, $\quad\rho\in(0,t)$ intégration de l'identité résultante par rapport à ρ plus $(0,t)$, nous avons :

$$\left({}_HI^{\alpha}pu(t)-\varphi{}_HI^{\alpha}p(t)\right)\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^t(t-\rho)^{\beta-1}p(\rho)(\Phi-u(\rho))d\rho$$
$$+\left(\Phi{}_HI^{\alpha}p(t)-{}_HI^{\alpha}pu(t)\right)\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^t(t-\rho)^{\beta-1}p(\rho)(u(\rho)-\varphi)d\rho$$
$$-{}_HI^{\alpha}((\Phi-u(t))(u(t)-\varphi)p(t))\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^t(t-\rho)^{\beta-1}p(\rho)d\rho \tag{2.53}$$
$$-{}_HI^{\alpha}p(t)\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^t(t-\rho)^{\beta-1}p(\rho)(\Phi-u(\rho))(u(\rho)-\varphi)d\rho$$
$$={}_HI^{\beta}p(t){}_HI^{\alpha}pu^2(t)+{}_HI^{\alpha}pu^2(t){}_HI^{\beta}p(t)-2{}_HI^{\alpha}pu(t){}_HI^{\beta}pu(t).$$

□

La lemme est ainsi prouvée.

Preuve de théorème 2.1.4

Depuis $(\Phi - f(x))(f(x) - \varphi) \geq 0$ et $(\Psi - g(x))(g(x) - \psi) \geq 0$, puis peut écrire

$$- {}_HI^{\alpha}p(t)_HI^{\beta}((\Phi - f(t))(f(t) - \varphi)p(t)) - {}_HI^{\beta}p(t)_HI^{\alpha}((\Phi - f(t))(f(t) - \varphi)p(t)) \leq 0. \tag{2.54}$$

et

$$- {}_HI^{\alpha}p(t)_HI^{\beta}((\Psi - g(t))(g(t) - \psi)p(t)) - {}_HI^{\beta}p(t)_HI^{\alpha}((\Psi - g(t))(g(t) - \psi)p(t)) \leq 0. \tag{2.55}$$

Appliquer Lemme 2.1.6 deux fois ($u = f$, $u = g$), puis utiliser Lemme 2.1.5 et combiner (2.47) avec (2.48) ; nous obtenons (2.50)

2.1.3 Inégalité intégrale via espérance et variance fractionnaire

Lemme 2.1.7. [10, 11, 18, 19] *Soit X une variable aléatoire continue ayant un f.d.p. $f : [a,b] \to \mathbb{R}^+$. Alors nous avons pour tous $\alpha \geqslant 0$:*

$$\sigma^2_{X,\alpha} = E_{X^2,\alpha} - 2E(X)E_{X,\alpha} + E(X)^2{}_HD^{\alpha}[f(b)]. \tag{2.56}$$

Démonstration. On a

$$\sigma^2_{X,\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b \left(\ln\frac{b}{t}\right)^{\alpha-1}\left[t^2 + E(X)^2 - 2tE(X)\right] f(t)\frac{dt}{t},$$

alors

$$\sigma^2_{X,\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b \left(\ln\frac{b}{t}\right)^{\alpha-1} t^2 f(t)\frac{dt}{t} - \frac{2E(X)}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b \left(\ln\frac{b}{t}\right)^{\alpha-1} tf(t)\frac{dt}{t}$$

$$+ \frac{E(X)^2}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b \left(\ln\frac{b}{t}\right)^{\alpha-1} f(t)\frac{dt}{t},$$

et on obtient

$$\sigma^2_{X,\alpha} = E_{X^2,\alpha} - 2E(X)E_{X,\alpha} + E(X)^2_HD^{\alpha}[f(b)].$$

□

Théorème 2.1.5. *Soit X une variable aléatoire continue ayant un f.d.p. $f : [a,b] \to \mathbb{R}^+$. Alors nous avons.*

1) $\forall \alpha \geq 0, a < t \leq b$

$$ {}_{H}D^{\alpha}[f(t)]\sigma^2_{X,\alpha} - \left(E_{X-E(X),\alpha}(t)\right)^2 \leq \|f\|^2_{\infty} \left[2\frac{\left(\ln \frac{t}{a}\right)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} {}_{H}D^{\alpha}\left[t^2\right] - 2\left({}_{H}D^{\alpha}[t]\right)^2 \right]. \tag{2.57} $$

condition que $f \in L_{\infty}([a,b])$.

2) l'inégalité

$$ {}_{H}D^{\alpha}[f(t)]\sigma^2_{X,\alpha} - \left(E_{X-E(X),\alpha}(t)\right)^2 \leq \frac{1}{2}(t-a)^2\left({}_{H}D^{\alpha}[f(t)]\right). \tag{2.58} $$

détient $\forall \alpha \geq 0, a < t \leq b$.

Démonstration. Supposons que pour $s, y \in (a,t)$ et $a < tb$

$$ H(t,y) = (g(s) - g(y))(h(s) - h(y)). \tag{2.59} $$

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}^+$, multiplier (2.59) par $\frac{\left(\ln \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} p(s)$

$$ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \left(\ln \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} p(s)H(s,y)\frac{ds}{s} = {}_{H}D^{\alpha}[pgh(t)] - h(y){}_{H}D^{\alpha}[pg(t)] $$
$$ - g(y){}_{H}D^{\alpha}[ph(t)] + g(y)h(y){}_{H}D^{\alpha}[p(t)] \tag{2.60} $$

Multiplier (2.60) par $\frac{\left(\ln \frac{t}{y}\right)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} p(y)$, $y \in (a,t)$ et l'intégration de l'identité résultante en ce qui concerne $y = over(a,t)$, nous pouvons écrire

$$ \begin{aligned} &\tfrac{1}{\Gamma^2(\alpha)} \textstyle\int_a^t \int_a^t \left(\ln \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} \left(\ln \frac{t}{y}\right)^{\alpha-1} p(y)p(s)H(s,y)\frac{ds}{s}\frac{dy}{y} \\ &= 2{}_{H}D^{\alpha}[p(t)]{}_{H}D^{\alpha}[pgh(t)] - 2{}_{H}D^{\alpha}[ph(t)]{}_{H}D^{\alpha}[pg(t)]. \end{aligned} \tag{2.61} $$

en (2.61), prend $p(t) = f(t), g(t) = h(t) = t - E(X), t \in (a,b)$, On a

$$ \begin{aligned} &\tfrac{1}{\Gamma^2(\alpha)} \textstyle\int_a^t \int_a^t \left(\ln \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} \left(\ln \frac{t}{y}\right)^{\alpha-1} f(y)f(s)(s-y)^2\frac{ds}{s}\frac{dy}{y} \\ &= 2{}_{H}D^{\alpha}[f(t)]{}_{H}D^{\alpha}\left[f(t)\left(t - E(X)^2\right)\right] - 2{}_{H}D^{\alpha}[f(t)(t-E(X))]^2. \end{aligned} \tag{2.62} $$

D'autre part, nous avons

$$ \begin{aligned} &\tfrac{1}{\Gamma^2(\alpha)} \textstyle\int_a^t \int_a^t \left(\ln \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} \left(\ln \frac{t}{y}\right)^{\alpha-1} f(y)f(s)(s-y)^2\frac{ds}{s}\frac{dy}{y} \\ &\leq \|f\|^2_{\infty} \tfrac{1}{\Gamma^2(\alpha)} \textstyle\int_a^t \int_a^t \left(\ln \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} \left(\ln \frac{t}{y}\right)^{\alpha-1} (s-y)^2\frac{ds}{s}\frac{dy}{y} \\ &\leq \|f\|^2_{\infty} \left[2\tfrac{\left(\ln \frac{t}{a}\right)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} H^{-\alpha}_{1,t}\left[t^2\right] - 2\left({}_{H}D^{\alpha}[t]\right)^2 \right]. \end{aligned} \tag{2.63} $$

Par conséquence (2.62) et (2.63), nous obtenons la partie (2.1.5) de théorème 2.1.5. Pour la partie (2.1.5), nous avons

$$\frac{1}{\Gamma^2(\alpha)}\int_a^t\int_a^t\left(\ln\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1}\left(\ln\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1}f(y)f(s)(s-y)^2\frac{ds}{s}\frac{dy}{y}$$
$$\leq \sup_{s,y\in[a,t]}|(s-y)|^2\left({}_HD^{\alpha}[f(t)]\right)^2=(t-a)^2\left({}_HD^{\alpha}[f(t)]\right)^2. \tag{2.64}$$

Donc, par (2.62) et (2.64), on obtient l'inégalité (2.1.5). □

Nous donnons une généraliser le théorème 2.1.5 :

Théorème 2.1.6. *Soit X une variable aléatoire continue ayant un f.d.p. f : $[a,b]\to\mathbb{R}^+$. Alors nous avons*

a) Pour toute $a<t\leqslant b,\alpha\geqslant 0,\beta\geqslant 0$,

$${}_HD^{\alpha}[f(t)]\sigma^2_{X,\beta}+{}_HD^{\beta}[f(t)]\sigma^2_{X,\alpha}-\left(E_{X-E(X),\alpha}(t)\right)\left(E_{X-E(X),\beta}(t)\right)$$
$$\leq\|f\|^2_{\infty}\left[\frac{\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}{}_HD^{\beta}\left[t^2\right]+\frac{\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\beta}}{\Gamma(\alpha+1)}{}_HD^{\alpha}\left[t^2\right]-\left({}_HD^{\alpha}[t]\right)\left({}_HD^{\beta}[t]\right)\right]. \tag{2.65}$$

où $f\in L_{\infty}([a,b])$.

b) L'inégalité

$${}_HD^{\alpha}[f(t)]\sigma^2_{X,\beta}+{}_HD^{\beta}[f(t)]\sigma^2_{X,\alpha}-\left(E_{X-E(X),\alpha}(t)\right)\left(E_{X-E(X),\beta}(t)\right)$$
$$\leq(t-a)^2\left({}_HD^{\alpha}[f(t)]\right)\left({}_HD^{\beta}[f(t)]\right). \tag{2.66}$$

tient pour tout $a<t\leqslant b,\alpha\geqslant 0,\beta\geqslant 0$.

Démonstration. Multiplier (2.60) par $\frac{\left(\ln\frac{t}{y}\right)^{\beta-1}}{\Gamma(\alpha)}p(y)$, on obtient

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t\int_a^t\left(\ln\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1}\left(\ln\frac{t}{y}\right)^{\beta-1}p(y)p(s)H(s,y)\frac{ds}{s}\frac{dy}{y}$$
$$={}_HD^{\alpha}[p(t)]{}_HD^{\beta}[p(t)g(t)h(t)]+{}_HD^{\beta}[p(t)]{}_HD^{\alpha}[p(t)g(t)h(t)] \tag{2.67}$$
$$-{}_HD^{\beta}[p(t)h(t)]{}_HD^{\alpha}[p(t)g(t)]-{}_HD^{\alpha}[p(t)h(t)]{}_HD^{\beta}[p(t)g(t)].$$

prend $p(t)=f(t),g(t)=h(t)=t-E(X),t\in(a,b)$ dans (2.67), nous obtenons :

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t\int_a^t\left(\ln\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1}\left(\ln\frac{t}{y}\right)^{\beta-1}f(y)f(s)(s-y)^2\frac{ds}{s}\frac{dy}{y}$$
$$={}_HD^{\alpha}[f(t)]{}_HD^{\beta}\left[f(t)\left(t-E(X)^2\right)\right]+{}_HD^{\beta}[f(t)]{}_HD^{\alpha}\left[f(t)\left(t-E(X)^2\right)\right]$$
$$-2{}_HD^{\alpha}[f(t)(t-E(X))]{}_HD^{\beta}[f(t)(t-E(X))]. \tag{2.68}$$

nous avons également

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t\int_a^t\left(\ln\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1}\left(\ln\frac{t}{y}\right)^{\beta-1}f(y)f(s)(s-y)^2\frac{ds}{s}\frac{dy}{y}$$

$$\leqslant\| f \|_\infty^2\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t\int_a^t\left(ln\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1}\left(ln\frac{t}{y}\right)^{\beta-1}(s-y)^2\frac{ds}{s}\frac{dy}{y}$$

$$\leqslant\| f \|_\infty^2\left[\frac{\left(ln\frac{t}{a}\right)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}{}_HD^{-\alpha}[t^2]+\frac{\left(ln\frac{t}{a}\right)^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}{}_HD^{\beta}[t^2]-2\left({}_HD^{\alpha}[t]\right)\left({}_HD^{\beta}[t]\right)\right].\tag{2.69}$$

Grâce à (2.68) et (2.69), nous obtenons (2.65).

Pour la partie (2.66), nous avons le fait que $\sup_{t,y\in[a,x]}|(s-y)|^2=(t-a)^2$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t\int_a^t\left(\ln\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1}\left(\ln\frac{t}{y}\right)^{\beta-1}f(y)f(s)(s-y)^2\frac{ds}{s}\frac{dy}{y}\\&\leqslant(t-a)^2\left({}_HD^{\alpha}[f(t)]\right)\left({}_HD^{\beta}[f(t)]\right).\end{aligned}\tag{2.70}$$

Et, par (2.69) et (2.70), nous obtenons (2.66).

□

Chapitre 3

Estimations fractionnaires : Moments d'ordre (r, α)

3.1 Introduction

Dans cette section, nous présentons certaines définitions qui seront utilisées tout au long du présent document :

Définition 3.1.1. [19, 20] *La fonction de l'ordre du moment fractionnaire Hadamard* $(r, \alpha); (r > 0, \alpha > 0)$, *pour une variable aléatoire continue* X *avec un f.d.p.* f *positif défini sur* $[a, b]$ *est défini comme suit :*

$$_{H}M_{r,\alpha}(t) = {}_{H}D_{a}^{\alpha}\left[t^{r} f(t)\right] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{a}^{t} \ln\left(\frac{t}{\tau}\right)^{\alpha-1} \tau^{r-1} f(\tau) d\tau; a < t \leq b, a \geq 1. \tag{3.1}$$

Pour $t = b$, *nous introduisons le fractionnement Hadamard de* X.

Définition 3.1.2. [19, 20] *La fonction de l'ordre du moment fractionnaire Hadamard* $(r, \alpha); (r > 0, \alpha > 0)$, *pour une variable aléatoire continue* X *est défini comme*

$$_{H}M_{r,\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{a}^{b} \ln\left(\frac{b}{\tau}\right)^{\alpha-1} \tau^{r-1} f(\tau) d\tau; a \geq 1. \tag{3.2}$$

3.2 Inégalité fractionnaire via moment

Á travers ce section, nous présentons quelques inégalités intégrales fractionnaires pour les moments d'une variable aléatoire continue ayant la fonction de densité de probabilité f.d.p.

Théorème 3.2.1. *Soit* X *une variable aléatoire continue ayant une fonction de densité de probabilité* f *définie sur* $[a, b]$. *Alors :*

(1) pour tous $\alpha > 0, a < t \leq b$

$$H_a^\alpha[f(t)]H_a^\alpha\left[t^{r-1}(t-E(X))f(t)\right] - (H_a^\alpha[(t-E(X))f(t)]) \quad {}_HM_{r-1,\alpha}(t)$$

$$\leq \|f\|_\infty^2\left[\frac{\left(\ln\frac{t}{a}\right)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}H_a^\alpha\left[t^r\right] - H_a^\alpha[t]H_a^\alpha\left[t^{r-1}\right]\right]. \tag{3.3}$$

où $f \in L_\infty[a,b]$.

(2) pour tous $\alpha > 0, a < t \leq b$

$$H_a^\alpha[f(t)]H_a^\alpha\left[t^{r-1}(t-E(X))f(t)\right] - (H_a^\alpha[(t-E(X))f(t)]) \quad {}_HM_{r-1,\alpha}(t)$$

$$\leq \frac{1}{2}(t-a)\left(t^{r-1}-a^{r-1}\right)\left(H_a^\alpha[f(t)]\right)^2. \tag{3.4}$$

Démonstration. Soit $p : [a,b] \to \mathbb{R}^+$ et considérons la quantité

$$\varphi(\tau,\rho) = (g(\tau)-g(\rho))(h(\tau)-h(\rho)), \tau,\rho \in (a,t), a < t \leq b. \tag{3.5}$$

Multiplier (3.5) par $\frac{\ln\left(\frac{t}{\tau}\right)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}p(\tau); \tau \in (a,t)$, puis intégrer le résultat

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t \ln\left(\frac{t}{\tau}\right)^{\alpha-1} p(\tau)\varphi(\tau,\rho)\frac{d\tau}{\tau} \tag{3.6}$$

$$= H_a^\alpha[pgh(t)] - g(\rho)H_a^\alpha[ph(t)] - h(\rho)H_a^\alpha[pg(t)] + g(\rho)h(\rho)H_a^\alpha[p(t)].$$

Maintenant, multiplier (3.6) par $\frac{\left(\ln\frac{t}{\rho}\right)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}p(\rho); \rho \in (a,t)$, et intégrer l'identité résultante par rapport à ρ de a à t, nous avons

$$\frac{1}{\Gamma^2(\alpha)}\int_a^t\int_a^t\left(\ln\frac{t}{\rho}\right)^{\alpha-1}\left(\ln\frac{t}{\rho}\right)^{\alpha-1}p(\tau)p(\rho)\varphi(\tau,\rho)\frac{d\tau}{\tau}\frac{d\rho}{\rho} \tag{3.7}$$

$$= 2H_a^\alpha[p(t)]H_a^\alpha[pgh(t)] - 2H_a^\alpha[pg(t)]H_a^\alpha[ph(t)].$$

En (3.7) prise $p(t) = f(t), g(t) = t - E(X)$ et $h(t) = t^{r-1}, t \in (a,b)$, nous avons

$$\frac{1}{\Gamma^2(\alpha)}\int_a^t\int_a^t\left(\ln\frac{t}{\rho}\right)^{\alpha-1}\left(\ln\frac{t}{\rho}\right)^{\alpha-1}(\tau-\rho)\left(\tau^{r-1}-\rho^{r-1}\right)f(\tau)f(\rho)\frac{d\tau}{\tau}\frac{d\rho}{\rho}$$

$$= 2H_a^\alpha[f(t)]H_a^\alpha\left[t^{r-1}(t-E(X))f(t)\right] - 2H_a^\alpha[(t-E(X))f(t)]H_a^\alpha\left[t^{r-1}f(t)\right]$$

$$= 2H_a^\alpha[f(t)]H_a^\alpha\left[t^{r-1}(t-E(X))f(t)\right] - 2H_a^\alpha[(t-E(X))f(t)]\,{}_HM_{r-1,\alpha}(t). \tag{3.8}$$

nous avons aussi

$$\frac{1}{\Gamma^2(\alpha)}\int_a^t\int_a^t\left(\ln\frac{t}{\rho}\right)^{\alpha-1}\left(\ln\frac{t}{\rho}\right)^{\alpha-1}\left(\tau^{r-1}-\rho^{r-1}\right)f(\tau)f(\rho)\frac{d\tau}{\tau}\frac{d\rho}{\rho}$$

$$\|f\|_\infty^2\frac{1}{\Gamma^2(\alpha)}\int_a^t\int_a^t\left(\ln\frac{t}{\rho}\right)^{\alpha-1}\left(\ln\frac{t}{\rho}\right)^{\alpha-1}(\tau-\rho)\left(\tau^{r-1}-\rho^{r-1}\right)\frac{d\tau}{\tau}\frac{d\rho}{\rho} \tag{3.9}$$

$$\leq 2\|f\|_\infty^2\left[\frac{\left(\ln\frac{t}{a}\right)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}H_a^\alpha\left[t^r\right]-H_a^\alpha[t]H_a^\alpha\left[t^{r-1}\right]\right].$$

Par conséquent(3.8) et (3.9), nous obtenons (3.3).
Pour (2), nous avons

$$\frac{1}{\Gamma^2(\alpha)}\int_a^t\int_a^t\left(\ln\frac{t}{\rho}\right)^{\alpha-1}\left(\ln\frac{t}{\rho}\right)^{\alpha-1}(\tau-\rho)\left(\tau^{r-1}-\rho^{r-1}\right)f(\tau)f(\rho)\frac{d\tau}{\tau}\frac{d\rho}{\rho}$$

$$\leq \sup_{\tau,\rho\in[a,t]}|(\tau-\rho)|\left|\left(\tau^{r-1}-\rho^{r-1}\right)\right|H_a^\alpha[f(t)]^2=(t-a)\left(t^{r-1}-a^{r-1}\right)H_a^\alpha[f(t)]^2. \tag{3.10}$$

Par (3.8) et (3.10), nous obtenons l'inégalité désirée.

□

Théorème 3.2.2. *Soit X une variable aléatoire continue ayant un f.d.p $f : [a,b]\to\mathbb{R}^+$. Alors*

(i) pour tout $a<t\leq b, \alpha>0, \beta>0$, on a

$$H_a^\alpha[f(t)]H_a^\beta\left[f(t)t^{r-1}(t-E(X))\right]+H_a^\beta[f(t)]H_a^\alpha\left[f(t)t^{r-1}(t-E(X))\right]$$

$$-H_a^\alpha[f(t)(t-E(X))]_H M_{r-1,\beta}(t)-H_a^\beta[f(t)(t-E(X))]_H M_{r-1,\alpha}(t)$$

$$\leq\|f\|_\infty^2\left[\frac{\left(\ln\frac{t}{a}\right)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}H_a^\beta\left[t^r\right]+\frac{\left(\ln\frac{t}{a}\right)^\beta}{\Gamma(\beta+1)}H_a^\alpha\left[t^r\right]-H_a^\alpha[t]H_a^\beta\left[t^{r-1}\right]-H_a^\beta[t]H_a^\alpha\left[t^{r-1}\right]\right]. \tag{3.11}$$

où $f\in L_\infty[a,b]$.

(ii) On a aussi

$$H_a^\alpha[f(t)]H_a^\beta\left[f(t)t^{r-1}(t-E(X))\right]+H_a^\beta[f(t)]H_a^\alpha\left[f(t)t^{r-1}(t-E(X))\right]$$

$$-H_a^\alpha[f(t)(t-E(X))]_H M_{r-1,\beta}(t)-H_a^\beta[f(t)(t-E(X))]_H M_{r-1,\alpha}(t)$$

$$\leq(t-a)\left(t^{r-1}-a^{r-1}\right)H_a^\alpha[f(t)]H_a^\beta[f(t)], \tag{3.12}$$

pour tout $\alpha>0,\beta>0,a<t\leq b$

Démonstration. Multipliant par $\frac{\left(\ln\frac{t}{\rho}\right)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}p(\rho); \rho \in (a,t)$, nous avons

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t\int_a^t\left(\ln\frac{t}{\tau}\right)^{\alpha-1}\left(\ln\frac{t}{\rho}\right)^{\beta-1}p(\tau)p(\rho)H(\tau,\rho)\frac{d\tau}{\tau}\frac{d\rho}{\rho}\\
=&H_a^\alpha[p(t)]H_a^\beta[pgh(t)]+H_a^\beta[p(t)]H_a^\alpha[pgh(t)]\\
&-H_a^\alpha[ph(t)]H_a^\beta[pg(t)]-H_a^\beta[ph(t)]H_a^\alpha[pg(t)].
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Dans (3.13), nous prenons $p(t)=f(t), g(t)=t-E(X), h(t)=t^{r-1}, t\in(a,b)$. On a

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t\int_a^t\left(\ln\frac{t}{\tau}\right)^{\alpha-1}\left(\ln\frac{t}{\rho}\right)^{\beta-1}(\tau-\rho)\left(\tau^{r-1}-\rho^{r-1}\right)f(\tau)f(\rho)\frac{d\tau}{\tau}\frac{d\rho}{\rho}\\
=&H_a^\alpha[f(t)]H_a^\beta\left[t^{r-1}(t-E(X))f(t)\right]+H_a^\beta[f(t)]H_a^\alpha\left[t^{r-1}(t-E(X))f(t)\right]\\
&-HM_{r-1,\alpha}(t)H_a^\beta[f(t)(t-E(X))]-HM_{r-1,\beta}(t)H_a^\alpha[f(t)(t-E(X))].
\end{aligned} \tag{3.14}$$

nous avons aussi

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t\int_a^t\left(\ln\frac{t}{\tau}\right)^{\alpha-1}\left(\ln\frac{t}{\rho}\right)^{\beta-1}(\tau-\rho)\left(\tau^{r-1}-\rho^{r-1}\right)f(\tau)f(\rho)\frac{d\tau}{\tau}\frac{d\rho}{\rho}\\
&\le\|f\|_\infty^2\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t\int_a^t\left(\ln\frac{t}{\tau}\right)^{\alpha-1}\left(\ln\frac{t}{\rho}\right)^{\beta-1}(\tau-\rho)\left(\tau^{r-1}-\rho^{r-1}\right)\frac{d\tau}{\tau}\frac{d\rho}{\rho}\\
=&\|f\|_\infty^2\left[\frac{\left(\ln\frac{t}{a}\right)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}H_a^\beta\left[t^r\right]+\frac{\left(\ln\frac{t}{b}\right)^\beta}{\Gamma(\beta+1)}H_a^\alpha\left[t^r\right]-H_a^\alpha[t]H_a^\beta\left[t^{r-1}\right]-H_a^\beta[t]H^\alpha\left[t^{r-1}\right]\right].
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Par (3.14) et (3.15), nous obtenons (3.11).

Pour prouver (ii), nous remarquons que

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t\int_a^t\left(\ln\frac{t}{\tau}\right)^{\alpha-1}\left(\ln\frac{t}{\rho}\right)^{\beta-1}(\tau-\rho)\left(\tau^{r-1}-\rho^{r-1}\right)f(\tau)f(\rho)\frac{d\tau}{\tau}\frac{d\rho}{\rho}$$

$$\leq \sup_{\tau,\rho\in[a,t]}\left[|\tau-\rho|\left|\tau^{r-1}-\rho^{r-1}\right|\right]H_a^{\alpha}[f(t)]H_a^{\beta}[f(t)]$$

$$=(t-a)\left(t^{r-1}-a^{r-1}\right)H_a^{\alpha}[f(t)]H_a^{\beta}[f(t)]. \tag{3.16}$$

De, (3.14) et (3.16), nous obtenons (3.12) □

Théorème 3.2.3. *Soit f est le f.d.p. de la variable aléatoire X sur $[a,b]$. Alors pour $\alpha>0$, nous avons*

$$H_a^{\alpha}[f(t)]_H M_{2r,\alpha}(t)-{}_H M_{r,\alpha}^2(t)\leq\frac{1}{4}\left(H_a^{\alpha}[f(t)]\right)^2\left(b^r-a^r\right)^2, a<t\leq b. \tag{3.17}$$

Démonstration. En utilisant le théorème 3.2 de [19], nous pouvons écrire

$$\left|H_a^{\alpha}[p(t)]H_a^{\alpha}\left[pg^2(t)\right]-\left(H_a^{\alpha}[pg(t)]\right)^2\right|\leq\frac{1}{4}\left(H_a^{\alpha}[p(t)]\right)^2(M-m)^2. \tag{3.18}$$

Maintenant, nous remplaçons $p(t)=f(t)$ et $g(t)=t^r, t\in(a,b)$, nous obtenons $m=a^r$ $M=b^r$. Ainsi, l'inégalité (3.18) nous permet d'obtenir

$$0\leq H_a^{\alpha}[f(t)]H_a^{\alpha}\left[t^{2r}f(t)\right]-\left(H_a^{\alpha}\left[t^r f(t)\right]\right)^2\leq\frac{1}{4}\left(H_a^{\alpha}[f(t)]\right)^2\left(b^r-a^r\right)^2. \tag{3.19}$$

cela implique que

$$H_a^{\alpha}[f(t)]_H M_{2r,\alpha}(t)-{}_H M_{r,\alpha}^2(t)\leq\frac{1}{4}\left(H_a^{\alpha}[f(t)]\right)^2\left(b^r-a^r\right)^2. \tag{3.20}$$

□

Théorème 3.2.4. *Soit X une variable aléatoire continue ayant un f.d.p. $f:[a,b]\to\mathbb{R}^+$ alors, à toutes $a<t\leq b,\alpha>0,\beta>0$, nous avons*

$$\begin{aligned}&H_a^{\alpha}[f(t)]_H M_{2r,\beta}(t)+H_a^{\beta}[f(t)]_H M_{2r,\alpha}(t)+2a^r b^r H_a^{\alpha}[f(t)]H_a^{\beta}[f(t)]\\&\quad\leq\left(a^r+b^r\right)\left[H_a^{\alpha}[f(t)]_H M_{r,\beta}(t)+H_a^{\beta}[f(t)]_H M_{r,\alpha}(t)\right].\end{aligned} \tag{3.21}$$

Démonstration. Par théorème 3.5 de [19], nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}&\left[H_a^{\alpha}[p(t)]H_a^{\beta}\left[pg^2(t)\right]+H_a^{\beta}[p(t)]H_a^{\alpha}\left[pg^2(t)\right]-2H_a^{\alpha}[pg(t)]H_a^{\beta}[pg(t)]\right]^2\\&\leq\left[\left(MH_a^{\alpha}[p(t)]-H_a^{\alpha}[pg(t)]\right)\left(H_a^{\beta}[pg(t)]-mH_a^{\beta}[p(t)]\right)\right.\\&\left.+\left(H_a^{\alpha}[pg(t)]-mH_a^{\alpha}[p(t)]\right)\left(MH_a^{\beta}[p(t)]-H_a^{\beta}[pg(t)]\right)\right]^2.\end{aligned} \tag{3.22}$$

Si nous prenons $p(t) = f(t), g(t) = t^r, t \in [a, b]$, nous obtenons

$$\left[H_a^\alpha[f(t)]H_a^\beta\left[t^{2r}f(t)\right] + H_a^\beta[f(t)]H_a^\alpha\left[t^{2r}f(t)\right] - 2H_a^\alpha\left[t^r f(t)\right]H_a^\beta\left[t^r f(t)\right]\right]^2$$

$$\leq \Big[\left(MH_a^\alpha[f(t)] - H_a^\alpha\left[t^r f(t)\right]\right)\left(H_a^\beta\left[t^r f(t)\right] - mH_a^\beta[f(t)]\right)$$

$$+ \left(H_a^\alpha\left[t^r f(t)\right] - mH_a^\alpha[f(t)]\right)\left(MH_a^\beta[f(t)] - H_a^\beta\left[t^r f(t)\right]\right)\Big]^2. \tag{3.23}$$

ce qui implique que

$$H_a^\alpha[f(t)]M_{2r,\beta}(t) + H_a^\beta[f(t)]M_{2r,\alpha}(t) - 2M_{r,\alpha}(t)M_{r,\beta}(t)$$

$$\leq \left(MH_a^\alpha[f(t)] - M_{r,\alpha}(t)\right)\left(M_{r,\beta}(t) - mH_a^\beta[f(t)]\right) \tag{3.24}$$

$$+ \left(M_{r,\alpha}(t) - mH_a^\alpha[f(t)]\right)\left(MH_a^\beta[f(t)] - M_{r,\beta}(t)\right).$$

Substituer les valeurs de m et M en (3.24), nous obtenons

$$H_a^\alpha[f(t)] \quad HM_{2r,\beta}(t) + H_a^\beta[f(t)] \quad HM_{2r,\alpha}(t)$$

$$\leq \left(a^r + b^r\right)H_a^\alpha[f(t)]_H M_{r,\beta}(t) + \left(a^r + b^r\right)H_a^\beta[f(t)]_H M_{r,\alpha}(t) \tag{3.25}$$

$$- 2a^r b^r H_a^\alpha[f(t)]H_a^\beta[f(t)].$$

□

Théorème 3.2.5. *Soit X une variable aléatoire continue ayant un p.d.f.f : $[a, b] \to \mathbb{R}^+$ et $m \leq f \leq M$.Alors, pour tout $a < t \leq b, \alpha > 0$, nous avons*

$$\left|\frac{\left(\ln\frac{t}{a}\right)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}HM_{r,\alpha}(t) - H_a^\alpha[f(t)]H_a^\alpha\left[t^r\right]\right|$$

$$\leq \frac{(M-m)\left(\ln\frac{t}{a}\right)^\alpha}{2\Gamma(\alpha+1)}\left(\frac{\left(\ln\frac{t}{a}\right)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}H_a^\alpha\left[t^{2r}\right] - \left(H_a^\alpha\left[t^r\right]\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.26}$$

Démonstration. nous utilisons Theorem 7 de [18]. Nous trouvons que

$$\left|\frac{\left(\ln\frac{t}{a}\right)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}H_a^\alpha[fg(t)] - H_a^\alpha[f(t)]H_a^\alpha[g(t)]\right|$$

$$\leq \frac{\left(\ln\frac{t}{a}\right)^\alpha}{2\Gamma(\alpha+1)}(M-m)\left(\frac{\left(\ln\frac{t}{a}\right)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}H_a^\alpha\left[g^2(t)\right] - \left(H_a^\alpha[g(t)]\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.27}$$

En (3.27), prenant $g(t) = t^r, a < t \leq b$, nous avons

$$\left| \frac{\left(\ln \frac{t}{a}\right)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} H_a^{\alpha}\left[t^r f(t)\right] - H_a^{\alpha}[f(t)] H_a^{\alpha}\left[t^r\right] \right|$$
$$\leq \frac{\left(\ln \frac{t}{a}\right)^{\alpha}}{2\Gamma(\alpha+1)}(M-m)\left(\frac{\left(\ln \frac{t}{a}\right)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} H_a^{\alpha}\left[t^{2r}\right] - \left(H_a^{\alpha}\left[t^r\right]\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.28}$$

Théorème 3.2.5 est ainsi prouvé.

□

En utilisant deux paramètres fractionnaires, nous considérons la généralisation suivante :

Théorème 3.2.6. *Soit f le f.d.p. de X sur $[a, b]$ et $m \leq f \leq M$. Alors pour tous*

$a < t \leq b, \alpha > 0, \beta > 0,$ *nous avons*

$$\frac{\left(\ln \frac{t}{a}\right)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} HM_{r,\alpha}(t) + \frac{\left(\ln \frac{t}{a}\right)^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)} HM_{r,\beta}(t) - H_a^{\alpha}[f(t)] H_a^{\beta}\left[t^r\right] - H_a^{\beta}[f(t)] H_a^{\alpha}\left[t^r\right]$$
$$\leq \left[\left(M \frac{\left(\ln \frac{t}{a}\right)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} - H_a^{\alpha}[f(t)]\right)\left(H_a^{\beta}[f(t)] - m \frac{\left(\ln \frac{t}{a}\right)^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}\right)\right.$$
$$\left. + \left(H_a^{\alpha}[f(t)] - m \frac{\left(\ln \frac{t}{a}\right)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right)\left(M \frac{\left(\ln \frac{t}{a}\right)^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)} - H_a^{\beta}[f(t)]\right)\right]$$
$$\times \left[\frac{\left(\ln \frac{t}{a}\right)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} H_a^{\beta}\left[t^{2r}\right] + \frac{\left(\ln \frac{t}{a}\right)^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)} H_a^{\alpha}\left[t^{2r}\right] - 2 H_a^{\alpha}\left[t^r\right] H_a^{\beta}\left[t^r\right]\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{3.29}$$

Démonstration. En utilisant le théorème 8 de [18], nous avons

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}H_a^{\beta}[fg(t)]+\frac{\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}H_a^{\alpha}[fg(t)]-H_a^{\alpha}[f(t)]H_a^{\beta}[g(t)]-H_a^{\beta}[f(t)]H_a^{\alpha}[g(t)]\right|\\
&\leq\left[\left(M\frac{\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}-H_a^{\alpha}[f(t)]\right)\left(H_a^{\beta}[f(t)]-m\frac{\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}\right)\right.\\
&\left.+\left(H_a^{\alpha}[f(t)]-m\frac{\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right)\left(M\frac{\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}-H_a^{\beta}[f(t)]\right)\right]\\
&\times\left(\frac{\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}H_a^{\beta}\left[g^2(t)\right]+\frac{\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}H_a^{\alpha}\left[g^2(t)\right]-2H_a^{\alpha}[g(t)]H_a^{\beta}[g(t)]\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
\tag{3.30}
$$

En prenant $g(t)=t^r, a<t\leq b$, on peut écrire

$$
\begin{aligned}
&|\frac{\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}H_a^{\beta}\left[t^r f(t)\right]+\frac{\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}H_a^{\alpha}\left[t^r f(t)\right]-H_a^{\alpha}[f(t)]H_a^{\beta}\left[t^r\right]-H_a^{\beta}[f(t)]H_a^{\alpha}\left[t^r\right]\\
&\leq\left[\left(M\frac{\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}-H_a^{\alpha}[f(t)]\right)\left(H_a^{\beta}[f(t)]-m\frac{\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}\right)\right.\\
&\left.+\left(H_a^{\alpha}[f(t)]-m\frac{\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right)\left(M\frac{\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}-H_a^{\beta}[f(t)]\right)\right]\\
&\times\left(\frac{\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}H_a^{\beta}\left[t^{2r}\right]+\frac{\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}H_a^{\alpha}\left[t^{2r}\right]-2H_a^{\alpha}\left[t^r\right]H_a^{\beta}\left[t^r\right]\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
\tag{3.31}
$$

□

Bibliographie

[1] K.Ouldmelha et Vaijanath Laxmanrao Chinchane, Contunuous random variable swith hadamard fractional integral, Volume 50, Number 1, 103-109, March 2019.

[2] L.Tabharit, Zoubir Dahmani, On weighted Gruss type inequalities via fractional integrals, Laboratory of Pure and Applied Mathematics, Faculty of SESNV, University of Mostaganem, Mostaganem, Algeria, Vol. 2, Issue. 4, 2010, pp. 31-38, Online ISSN : 1943-2380.

[3] V. L. Chinchane and D. B. Pachpatte, On some new Grüss-type inequality using Hadamard fractional integral operator, Journal Fractional Calculus and Applications. 5(12) (2014),1-10.

[4] M. Bengrine and Z. Dahmani : Boundary Value Problems For Fractional Differential Equations, J. Open Problems Compt.Math, (2012).

[5] J.Hadamard : Essai sur l'etude des fonctions donnees par leur developpment de Taylor ,Math. Pures Appl, PIER 8, pp 101–186, (1892).

[6] A.A. Kilbas, I.O Marichev, G.S Samko : Fractional Integrals and Derivatives - Theory and Applications, Gordon and Breach, Langhorne, (1993).

[7] D.S. Mitrinovic, J.E. Pecaric, A.M. Fink. Classical and New Inequalities in Analysis. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1993.

[8] A. McD Mercer. An improvment of the Gruss inequality. J. Inequal. Pure and Appl. Math., 2005, 10(4) : Art. 93, 4 pp.

[9] A. McD Mercer, P. Mercer. New proofs of the Gruss inequality. Aust. J. Math. Anal. Appl., 2004, 1(2) : Art. 12.

[10] B.J. Pachpatte. New weighted multivariate Gruss type inequalities. J. Inequal. Pure and Appl. Math, 2003, 4(5) : Art 108, 9 pp.

[11] M.Z. Sarikaya, N. Aktan, H. Yildirim. On weighted Chebyshev-Gruss like inequalities on time scales. J. Math. Inequal., 2008, 2(2) : 185 - 195.

[12] S. Belarbi, Z. Dahmani. On some new fractional integral inequalities. J. Inequal. Pure and Appl. Math., 2009, 10(3) : Art. 86, 5 pp.

[13] Z. Dahmani. On some fractional integral inequalities. International Journal of Nonlinear Sciences, to appear.

[14] Z. Dahmani, L. Tabharit, S. Taf. Some fractional integral inequalities. Nonlinear Science Letters A, 2010, 2(1) : 155 - 160.

[15] Z. Dahmani, louiza Tabharit, Sabrina Taf. New inequalities via Riemann-Liouville fractional integration. J. Adv. Res. Sci. Comput., 2010, 2(1) : 40 - 45.

[16] D. Baleanu, J. A. T.Machado and C.J. Luo, Fractional Dynamic and Control, Springer, 2012, 159–171.

[17] V. L. Chinchane and D. B. Pachpatte,New fractional inequalities viz Hadamard fractional integral, Internat. J.Functional. Analyisis, Operator. TheoryMath., 8 (2001), 357–380.

[18] V. L. Chinchane and D. B. Pachpatte, On some new GrÃss-type inequality using Hadamar fractional integral operator, Journal of Fractional Calculusand Application, 5 (3S) (2014), 1–10.

[19] M. Houas. Grüss and pre-Grüss-type integral inequalities for Hadamard fractional integral operators.(submitted).

[20] O.M. khellaf and V.L. Chinchane, Continuous random variables with Hadamard fractional integral,Tamkang J. Math. 50(1) (2019), 103-109.