République Algérienne Démocratique Et Populaire

Ministère de L'enseignement Supérieur et de la Recherchre Scientifique

Université de Djilali Bounaâma-Khemis Miliana

Faculté des Sciences et de la Technologie

Département de Mathématiques et Informatique

Mémoire de fin d'étude

En vue de l'obtenation du Diplôme de master

en Analyse Mathématiques et Applications

Thème

Existence et Stabilité de la solution d'une équation différentielle q-fractionnaire

---

Présenté par :

Ayache Rania

Devant le jury composé de :

Encadrant :	Mr.M.Houas	MCA	Université Djilali Bounaâma.
Présidente :	Mme.L.Djouamai	MCB	Université Djilali Bounaâma.
Examinatrice :	Mme.F.Chita	MCB	Université Djilali Bounaâma.
Examinateur :	Mr.M.Bezziou	MCA	Université Djilali Bounaâma.

Année universitaire : 2022-2023

Remerciements

Je tiens tous d'abords à remercie "ALLAH" le tout puissant de m'avoir donné la santé et la volonté d'entamer et de terminer ce travail.

J'exprime toutes mes gratitudes à mon encadrant "**MR.HOUAS MOHAMED**" pour m'avoir proposé le thème de ce mémoir, et pour ses conseils, son encouragement et son aide.

Je veux exprimer un grand merci aux membres du jury "**MME.L.DJOUAMAI**" et "**MME.F.CHITA**" et "**MR.M.BEZZIOU**" pour m'avoir fait l'honneur d'être membres de mon jury.

Je remercie également mes enseignants qui ont contribué durant mes études surtout "**MR.CHAOUCHI BELKACEM**".

Finalements, je remercie mes parents, mes frères, toute ma famille et mes amies qui m'ont soutenu tout au long de ces années.

Dédicaces

Á l'homme de ma vie, mon soutien moral et source de joie et de bonheur, celui qui m'a encouragé, à toi mon "**PAPA**".

Á la lumière de ma vie, qui m'a encouragé sur mes études, et fatiguée pour nous, à toi "**MAMAN**".

Á mes frères "**RIADH**" et "**NOUR EL ISLAM**", a tous les moments d'enfance passés avec vous.

Á mes amies surtout "**WISSAM**", "**ZAHIRA**", "**HAFSA**", "**HAYAT**","**NOUR EL HOUDA**", "**Nihad**"et "**Manel**" vous êtes les meilleures, 5 ans de bonheur, je vous remercie d'être toujours à mes côtés pour m'encourager.

Résumé

L'objet de ce travail est d'étudier l'éxistence de solutions pour les équations différentielles q-fractionnaires par l'utilisation de théorèmes de point fixe dans l'espace de Banach. Ainssi d'étudier la stabilité au sense d'Ulam-Hyers de solutions.

Mots-Clés : Eqations différentielles q-fractionnaires, point fixe, espace de Banach, stabilité au sense d'Ulam-Hyers.

Abstract

The object of this work is to study the existence of solutions for q-fractional differential equations by using the fixed point theorems in Banach space. Also to study the stability in the sense of Ulam-Hyers of solutions.

Keywords : q-Fractional differential equations, fixed point, Banach space, stability in the sense of Ulam-Hyers.

ملخص

الهدف من هذا العمل هو دراسة وجود حلول المعادلات التفاضلية الكسرية ك باستخدام نظريات النقطة الثابتة في فضاء باناخ. أيضا سنقوم بدراسة استقرارالحلول بمعنى اولام هايرز.

الكلمات المفتاحية : المعادلات التفاضلية الكسرية ك، النقطة الثابتة، فضاء باناخ، الاستقرار بمعنى اولام هايرز.

Liste des symboles

$\mathbb{R}$:Ensemble des nombres réels.

$\mathbb{C}$:Ensemble des nombres Complexes.

$\mathbb{K}$:Le corps des nombres réels ou complexes.

$\mathbb{N}$:Ensemble des nombres entiers naturels.

$\Gamma_q(.)$: Fonction q-Gamma.

$\beta_q(.,.)$: Fonction q-Bêta.

$(X, \|\,.\,\|)$:Espace vectoriel normé.

$\|\,.\,\|$:norme infinie .

$\mathbb{C}(\mathbb{J}, \mathbb{R})$:Espace de Banach des fonctions continues définies de $\mathbb{J}$ dans $\mathbb{R}$.

$I_q^{\alpha} f(x)$: Intégrale q-fractionnaire d'ordre α de la fonction f(x) selon la définition de Riemann-Liouville.

${}^{RL}D_q^{\alpha} f(x)$: Dérivée q-fractionnaire d'ordre α de la fonction f(x) selon la définition de Riemann-Liouville.

${}^{c}D_q^{\alpha} f(x)$:Dérivée d'ordre non entière α de la fonction f(x) selon la définition de Caputo.

Table des matières

introduction

L'analyse fractionnaire est une branche de l'analyse mathématiques qui étudie la possibilité de définir des puissances non entières des opérateurs de dérivation et d'intégration.
Le calcul q-fractionnaire apparu en 1846 par Heine qui introduit la notion de q-analogue ou q-extension. En 1867 son élève Thomae a utilisé les travaux de fermat en probabilité pour introduire la notion de q-intégrale entre 0 et 1, cette notion est prolongée au début du vingtième siècle par F.H.Jackson [1870-1960] : il a introduit la q-théorie de q-analogue, il s'intéressé aux q-analogues de certaines fonctions spéciales, de même il s'est construit les notions de q-dérivée, q-intégrale .[3]
Au cours des dernières années, les équations différentielles q-fractionnaires apparaissent dans différents domaines scientifiques comme la physique, l'ingénierie, la médcine, l'éléctrochimie...Pour cela, plusieurs chercheurs s'intérèssent à tirer de nombreux résultats concernant l'existence, l'unicité et la stabilité des solutions.
Le sujet principal de ce mémoire est l'étude de l'existence de solutions pour des problèmes aux limites par l'utilisation des différentes techniques du point fixe. Aussi d'étudier la stabilité des solutions qui apparaît lors-qu'on remplace cette équation par une inégalité qui agit comme une perturbation de l'équation, ainssi la question de la stabilité des équations fonctionnelles est de Savoir comment les solutions de l'inégalité différent de celles de l'équation fonctionnelle donnée ?
Ce travail se compose de trois chapitres.
Dans le premier chapitre, on va présenter les notions de base de calcul q-fractionnaire, puis on donne quelques théorèmes de point fixe.
Le deuxième chapitre est consacré à l'étude d'un problème aux limites d'une équation différentielle q-fractionnaire par le principe de contraction de Banach et le théorème de point fixe de Scheafer. On termine ce chapitre par l'étude de stabilité au sens d'Ulam-Hyers de solution.
Dans le dernier chapitre on s'intèresse à l'étude d'un système différentielle q-fractionnaire, en

utilisant le théorème de point fixe de Banach et l'alternaive non linéaire de Leray Schauder pour étudier l'unicité et l'éxistence de solution. Dans la dernière section, nous avons étudier la stabilité au sens d'Ulam-Hyers.

Chapitre

1

ELÉMENTS DE CALCUL Q-FRACTIONNAIRE

Ce chapitre sera consacré aux définitions élémentaires et notions de base relatives au calcul q-fractionnaire, telles que : les fonctions de base, l'intégration q-fractionnaire de Riemann Liouville, la dérivation q-fractionnaire au sense de Riemann Liouville et caputo, qui sont les plus utilisées, lemmes fondamentaux et théorèmes de point fixe [5],[9],[10].

1.1 Fonction q-spéciales

1.1.1 Fonction q-Gamma

Définition 1.1.1

Pour tout nombre réel α, tel que $\alpha > 0$, on définit la fonction q-Gamma par :

$$\boxed{\Gamma_q(\alpha) = \frac{(1-q)^{(\alpha-1)}}{(1-q)^{\alpha-1}} \quad , \quad 0 < q < 1,}$$

avec $(1-q)^{(n)} = \prod_{k=0}^{n-1}(1-q^k)$.

Elle admet une représentation intégrale :

$$\boxed{\Gamma_q(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e_q^{-qx} d_q x.}$$

Propriétés 1.1.1

Pour tout $\alpha > 0$, la fonction q-Gamma satisfait les propriétés suivantes :

1. $\Gamma_q(\alpha+1) = [\alpha]_q \Gamma_q(\alpha)$, avec $[\alpha]_q = \dfrac{1-q^\alpha}{1-q}$.

2. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \Gamma_q(n+1) = [n]_q!, \quad$ avec $\quad [n]_q! = \prod_{k=1}^{n-1} [k]_q.$

1.1.2 Fonction q-Bêta

Définition 1.1.2

la fonction q-Bêta est donnée par l'intégrale suivante :

$$\boxed{\beta_q(m,n) = \int_0^1 x^{(m-1)}(1-qx)^{(n-1)} d_q x. \qquad \forall \quad m,n > 0.}$$

R La fonction q-Béta est liée à la fonction q-Gamma par la relation suivante :

$$\boxed{\beta_q(m,n) = \frac{\Gamma_q(m)\Gamma_q(n)}{\Gamma_q(m+n)}.}$$

1.2 Opérateurs de Riemann-Liouville

1.2.1 Intégrale q-fractionnaire de Riemann-Liouville

Définition 1.2.1

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue, On appelle intégrale q-fractionnaire de Riemann-Liouville de f d'ordre $\alpha > 0$ l'intégral suivant :

$$\boxed{(I_q^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma_q(\alpha)} \int_0^t (t-qs)^{\alpha-1} f(s) d_q s.}$$

Propriétés 1.2.1

Soit α *et* $\beta \in \mathbf{R}^+$ et f définie sur $[0,1]$, l'intégral q-fractionnaire possède les propriétés suivante :

1. $(I_q^\alpha I_q^\beta) f(t) = I_q^{\alpha+\beta} f(t).$
2. $(D_q^\alpha I_q^\alpha f)(x) = f(x).$

Exemple d'intégrale q-fractionnaire

Considérons la fonction $f(t) = t^{\beta}$.

Soient $\alpha > 0, \beta > 0$,

en remplaçant dans la définition de l'intégrale de R-L, on obtient :

$$\begin{aligned}
(I_q^{\alpha} f)(t) &= \frac{1}{\Gamma_q(\alpha)} \int_0^t (t - qs)^{\alpha-1} s^{\beta} d_q s \\
&= \frac{1}{\Gamma_q(\alpha)} \int_0^t (t(1 - q\frac{s}{t}))^{\alpha-1} s^{\beta} d_q s \\
&= \frac{1}{\Gamma_q(\alpha)} \int_0^t x^{\alpha-1} (1 - q\frac{s}{t})^{\alpha-1} s^{\beta} d_q s,
\end{aligned}$$

en effectuant le changement de variable

$$y = \frac{s}{t} \implies s = ty,$$

$$avec \;\; d_q s = t d_q y,$$

donc on obtient :

$$\begin{aligned}
(I_q^{\alpha} f)(t) &= \frac{1}{\Gamma_q(\alpha)} \int_0^1 t^{\alpha-1} (1 - qy)^{\alpha-1} (ty)^{\beta} t d_q y \\
&= \frac{1}{\Gamma_q(\alpha)} \int_0^1 (1 - qy)^{\alpha-1} t^{\alpha+\beta} y^{\beta} d_q y \\
&= \frac{t^{\alpha+\beta}}{\Gamma_q(\alpha)} \int_0^1 y^{\beta} (1 - qy)^{\alpha-1} d_q y \\
&= \frac{t^{\alpha+\beta}}{\Gamma_q(\alpha)} \beta_q(\beta + 1, \alpha) \\
&= \frac{t^{\alpha+\beta}}{\Gamma_q(\alpha)} \frac{\Gamma_q(\beta+1)\Gamma_q(\alpha)}{\Gamma_q(\beta+\alpha+1)} \\
&= \frac{\Gamma_q(\beta+1)}{\Gamma_q(\beta+\alpha+1)} t^{\alpha+\beta}.
\end{aligned}$$

1.2.2 Dérivée q-fractionnaire de Riemann-Liouville

Définition 1.2.2

Soit $m-1<\alpha<m$ avec $m\in\mathbb{N}^*$. On appelle dérivée q-fractionnaire au sense de Riemann-Liouville d'orde $\alpha>0$ la quantité suivante :

$$\begin{aligned}({}^{RL}D_q^{\alpha}f)(t) &= (D_q^m I_q^{m-\alpha}f)(t)\\ &= \frac{1}{\Gamma_q(m-\alpha)}D_q^m\int_0^t (t-qs)^{(m-\alpha)-1}f(s)d_qs.\end{aligned}$$

Lemme 1

Soit $\alpha\in R^+$ on a :

$$^{RL}I^{\alpha}\left[D^{\alpha}[f(t)]\right]=f(t)+c_1t^{\alpha-1}+c_2t^{\alpha-2}+...+c_nt^{\alpha-1}. \tag{1.1}$$

Exemple sur la dérivée q-fractionnaire au sens de RL :

On prend la fonction $f(t)=(t-a)^{\beta}$.

$$\begin{aligned}({}^{RL}D_q^{\alpha}f)(t) &= D_q^m[I_q^{m-\alpha}(t-a)^{\beta}]\\ &= D_q^m\left[\frac{\Gamma_q(\beta+1)}{\Gamma_q(\beta+1+m-\alpha)}(t-a)^{\beta+m-\alpha}\right]\\ &= \frac{\Gamma_q(\beta+1)}{\Gamma_q(\beta+1+m-\alpha)}D_q^m(t-a)^{\beta+m-\alpha}\\ &= \frac{\Gamma_q(\beta+1)}{\Gamma_q(\beta+1+m-\alpha)}\frac{\Gamma_q(\beta+m-\alpha+1)}{\Gamma_q(\beta-\alpha+1)}(t-a)^{\beta-\alpha}\\ &= \frac{\Gamma_q(\beta+1)}{\Gamma_q(\beta-\alpha+1)}(t-a)^{\beta-\alpha}.\end{aligned}$$

1.3 Opérateurs de Caputo

1.3.1 Dérivée q-fractionnaire au sens de Caputo

Définition 1.3.1

Soit $m=[\alpha]$ et $f\in\mathbf{C^m}([a.b],\mathbb{R})$, On appelle dérivée q-fractionnaire au sens de caputo d'orde

$\alpha > 0$, la quantité suivante :

$$\begin{aligned}({}^cD_q^\alpha f)(t) &= I_q^{m-\alpha} D_q^m f(t)\\ &= \frac{1}{\Gamma_q(m-\alpha)} \int_0^t (t-qs)^{(m-\alpha)-1} D_q^m f(t) d_q s.\end{aligned}$$

Lemme 2

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^+$ ona :

$$(I_q^\alpha \, {}^cD_q^\alpha f)(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{\Gamma_q(k+1)} (D_q f)(0) \qquad \forall t \in (0, a]. \tag{1.2}$$

1.4 Notation Nécessaire

Dans cette sections, nous présentons les définitions qui sont utilisées dans ce mémoire.

Définition 1.4.1

Un espace $(X, \| \, . \, \|)$ est dite espace vectoriel normé sur le corps $\mathbb{K}$ s'il est muni d'une application $\| \, . \, \|: X \to \mathbb{R}$ qui vérifie :

1. $\forall x \in X : \| x \| = 0 \iff x = 0_X$,
2. $\forall \lambda \in \mathbb{K}, x \in X : \| \lambda x \| = |\lambda| \, \| x \|$,
3. $\forall x, y \in X : \| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$.

L'application $\| \, . \, \|$ ainsi définie est appelée norme.

Définition 1.4.2

On dit qu'un espace vectoriel normé $(X, \| \, . \, \|)$ est un espace de Banach, si toute suite de Cauchy dans E est convergente.

Définition 1.4.3

Soit $(X, \| \, . \, \|)$ un espace vectoriel normé, et $A : X \to X$ une application, on appelle point fixe de A tout point $x \in X$ tel que : Ax=x.

Définition 1.4.4

Soit X et Y deux espaces de Banach, l'opérateur linéaire $A : X \longmapsto Y$ est compact s'il transforme tout ensemble bourné de x dans un ensemble relativement compact de Y.

Définition 1.4.5

Un opérateur est dit complètement continue, s'il est compact et continu.

Définition 1.4.6

Soit $(X, \|\,.\,\|)$ un espace vectorielle normé, une application $A : X \longmapsto X$ est dite contractante, s'il existe un nombre positif $k \in]0,1[$ tel que $\forall x, y \in X$, ona :

$$\| Ax - Ay \| \leq k \| x - y \| .$$

Définition 1.4.7

Soit A un sous ensemble de $\mathbf{C}(\mathbf{J}, \mathbb{R})$, l'ensemble A est équicontinue si pour tout $\epsilon > 0$, pour tout $t_1, t_2 \in \mathbf{J}$ et tout $f \in A$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$|t_1 - t_2| \leq \delta \Rightarrow \| f(t_1) - f(t_2) \| \leq \epsilon.$$

Définition 1.4.8

Soit A un sous ensemble de $\mathbf{C}(\mathbf{J}, \mathbb{R})$, l'ensemble A est uniformément bornée s'il existe une constante $k > 0$ telle que :$\| f(x) \| \leq k$, pour tout $x \in J$ et tout $f \in A$.

1.5 Théorèmes du point fixe

Les théorèmes de point sont les outils mathématiques de base qui aident à établir l'existence de solutions de divers genres d'équations. En effet, ces théorèmes accordent des conditions suffisantes pour assurer l'existence d'un point fixe pour une fonctions donnée. Les points fixes du problème transformé est considéré soit comme une solution unique pour le problème, soit l'une de ses solutions.

Dans cette section nous reppelons les théorèmes célèbres du point fixe que nous allons utiliser pour obtenir des résultats d'existence variés .

1.5.1 Théorème du point fixe de Banach

Soit X un espace de Banach et $A : X \longmapsto X$ un opérateur contractant.

Alors A admet un point fixe unique, c'est-à-dire $\exists! x \in X$ tel que Ax=x.

1.5.2 Théorème du point fixe de Shaefer

Soit X un espace de Banach et $A : X \longmapsto X$ un opérateur complètement continue, si

$$\omega = \{x \in X : x = \lambda Ax, \forall \lambda \in]0,1[\}$$

est borné, Alors A admet au moins un poit fixe .

1.5.3 Théorème de Arzela-Ascoli

Soit A un sous ensemble de $\mathbb{C}(J,\mathbb{R})$, A est relativement compact dans $\mathbb{C}(J,\mathbb{R})$ si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :

1. L'ensemble A est uniformément borné.
2. L'ensemble A est équicontinue.
3. Pour tout $x \in J$ l'ensemble $\{f(x), f \in A\} \subset E$ est relativement compact.

1.5.4 L'alternative non linéare de Leray-Schauder

Soit A un opérateur complètement continue, et $\epsilon(A) = \{x \in E : x = \lambda A(x), 0 < \lambda < 1\}$ ensemble non borné, alors l'opérateur A admet au moins un point fixe.

Chapitre

2

Equation différentielle q-fractionnaire avec trois dérivées q-fractionnaire au sens de Caputo

Dans ce chapitre, on intéresse à l'étude d'un problème défférentiel q-fractionnaire . Dans la première section, on montre à l'aide du principe de contraction de Banach, l'existence et l'unicité de solution pour notre problème .
Dans la deuxième section, on utilise le théorème classique de Scheaffer pour montrer l'existence d'une solution au moins du même problème. On termine ce chapitre par l'étude de stabilité au sense d'Ulam-Hyers[6], [11], [12].

2.1 Présentation de problème

On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} D_q^{\alpha}\left[D_q^{\beta}\left[D_q^{\gamma}x(t)\right]\right] = f(t,x(t)), t \in [0,1], \\ x(0) = g(x), D_q^{\gamma}x(0) = \mu, D_q^{\beta}\left[D_q^{\gamma}x(1)\right] = \vartheta, \\ 0 < q < 1,\ 0 < \alpha,\beta,\gamma \leq 1,\ \mu,\vartheta \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{2.1}$$

où $D^{\tau}, \tau \in \{\alpha,\beta,\gamma\}$, est la dérivée q–fractionnaire au sens de Caputo, $f : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{C}([0,1],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{*}$.

2.2 Solution Intégrale

Lemme 3

Soit h(t) $\in \mathbb{C}([0,1],\mathbb{R})$, alors la solution du problème q-fractionnaire suivant :

$$\begin{cases} D_q^{\alpha}\left[D_q^{\beta}\left[D_q^{\gamma}x(t)\right]\right]=h(t), t\in[0,1], \\ x(0)=g(x), D_q^{\gamma}x(0)=\mu, D_q^{\beta}\left[D_q^{\gamma}x(1)\right]=\vartheta, \\ 0<q<1,\ 0<\alpha,\beta,\gamma\leq 1,\ \mu,\vartheta\in\mathbb{R} \end{cases}$$

est donnée par :

$$\begin{aligned} x(t)=&\frac{1}{\Gamma_q(\alpha+\beta+\gamma)}\int_0^t(t-qs)^{\alpha+\beta+\gamma-1}h(s)d_qs \\ &-\frac{t^{\beta+\gamma}}{\Gamma_q(\beta+\gamma+1)\Gamma_q(\alpha)}\int_0^1(1-qs)^{\alpha-1}h(s)d_qs \\ &+\frac{t^{\beta+\gamma}}{\Gamma_q(\beta+\gamma+1)\Gamma_q(\alpha)}\vartheta+\frac{t^{\gamma}}{\Gamma_q(\gamma+1)}\mu+g(x). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Preuve

Soit l'équation :

$$D_q^{\alpha}\left[D_q^{\beta}\left[D_q^{\gamma}x(t)\right]\right]=h(t),$$

En appliquant l'intégrale q-fractionnaire de R-L d'ordre $\alpha>0$, on obtient :

$$I_q^{\alpha}\left[D_q^{\alpha}\left[D_q^{\beta}\left[D_q^{\gamma}x(t)\right]\right]\right]=I_q^{\alpha}\left[h(t)\right],$$

par le lemme (1.2), on trouve :

$$D_q^{\beta}\left[D_q^{\gamma}x(t)\right]+c_0=I_q^{\alpha}\left[h(t)\right],$$

alors

$$D_q^{\beta}\left[D_q^{\gamma}x(t)\right]=I_q^{\alpha}\left[h(t)\right]-c_0.$$

Maintenant en appliquant l'intégrale q-fractionnaire de R-L d'ordre $\beta>0$, on obtient :

$$I_q^{\beta}\left[D_q^{\beta}\left[D_q^{\gamma}x(t)\right]\right]=I_q^{\beta}\left[I_q^{\alpha}\left[h(t)\right]-c_0\right],$$

par le lemme (1.2), on trouve :

$$D_q^{\gamma}[x(t)] = I_q^{\alpha+\beta}[h(t)] - I_q^{\beta}[c_0] - c_1,$$

en utilisant l'intégrale I_q^{γ} , on obtient :

$$I_q^{\gamma}\left[D_q^{\gamma}[x(t)]\right] = I_q^{\gamma}\left[I_q^{\alpha+\beta}[h(t)] - I_q^{\beta}[c_0] - c_1\right],$$

de lemme (1.2), il vient :

$$x(t) = \frac{1}{\Gamma_q(\alpha+\beta+\gamma)}\int_0^t (t-qs)^{\alpha+\beta+\gamma-1}h(s)d_qs - \frac{t^{\beta+\gamma}}{\Gamma_q(\beta+\gamma+1)}c_0 - \frac{t^{\gamma}}{\Gamma_q(\gamma+1)}c_1 - c_2. \tag{2.3}$$

Maintenant pour déterminer les constantes c_0, c_1 et c_2, on utilise les conditions du problème (2.1).

D'aprés la condition x(0)=g(x) et $D_q^{\gamma}x(0) = \mu$, on obtient :

$$c_2 = -g(x)\ ,\ c_1 = -\mu.$$

Par la troisième condition $D_q^{\beta}\left[D_q^{\gamma}x(1)\right] = \vartheta$, on trouve :

$$D_q^{\beta}\left[D_q^{\gamma}x(1)\right] = I_q^{\alpha}h(1) - c_0,$$

ce qui donne

$$\frac{1}{\Gamma_q(\alpha)}\int_0^1 (1-qs)^{\alpha-1}h(s)d_qs - c_0 = \vartheta,$$

d'où

$$c_0 = \frac{1}{\Gamma_q(\alpha)}\int_0^1 (1-qs)^{\alpha-1}h(s)d_qs - \vartheta.$$

Substituant c_0 , c_1 et c_2 dans (2.3) on obtient la solution (2.2).

2.3 Existence et Unicité de solutions du problème q-fractionnaire (2.1)

On introduit l'espace de Banach noté par X telque :

$$X = \{x, x \in \mathbb{C}([0,1], \mathbb{R})\},$$

muni de la norme :

$$\| x \| = \sup_{t\in[0,1]} |x(t)|.$$

D'aprés (2.2), on défini l'opérateur :

$$A : X \to X$$

$$x(t) \longmapsto Ax(t),$$

tel que, $\forall t \in [0,1]$, ona :

$$Ax(t) = \frac{1}{\Gamma_q(\alpha+\beta+\gamma)} \int_0^t (t-qs)^{\alpha+\beta+\gamma-1} f(s,x(s))d_q s$$

$$-\frac{t^{\beta+\gamma}}{\Gamma_q(\beta+\gamma+1)\Gamma_q(\alpha)} \int_0^1 (1-qs)^{\alpha-1} f(s,x(s))d_q s$$

$$+\frac{t^{\beta+\gamma}}{\Gamma_q(\beta+\gamma+1)\Gamma_q(\alpha)}\vartheta + \frac{t^{\gamma}}{\Gamma_q(\gamma+1)}\mu + g(x).$$

2.3.1 Unicité de la solution

Théorème 2.3.1

Soient $f : [0,1]\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{C}([0,1],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*$ sont des fonctions continues. On suppose que :

(H_1) : Il existe deux constantes k,M positives telles que :

$$\left|f(t,x) - f(t,y)\right| \le k\left|x-y\right| \qquad \forall t \in [0,1] \ \ et \ \ \forall x,y \in \mathbb{R}.$$

$$\left|g(x) - g(y)\right| \le M\left|x-y\right| \qquad \forall x,y \in ([0,1],\mathbb{R}).$$

(H_2) : $\ ku + M < 1$, où u est un constant définies par :

$$u = \frac{1}{\Gamma_q(\alpha+\beta+\gamma+1)} + \frac{1}{\Gamma_q(\alpha+\beta+1)\Gamma_q(\alpha+1)}.$$

Alors le problème (2.1) admet une solution unique sur [0,1].

Preuve

Pour montrer que A admet un point fixe unique, il suffit de montrer que A est une contraction.

On a

$$Ay(t) = \frac{1}{\Gamma_q(\alpha+\beta+\gamma)} \int_0^t (t-qs)^{\alpha+\beta+\gamma-1} f(s,y(s))d_qs$$
$$-\frac{t^{\beta+\gamma}}{\Gamma_q(\beta+\gamma+1)\Gamma_q(\alpha)} \int_0^1 (1-qs)^{\alpha-1} f(s,y(s))d_qs$$
$$+\frac{t^{\beta+\gamma}}{\Gamma_q(\beta+\gamma+1)\Gamma_q(\alpha)}\vartheta + \frac{t^{\gamma}}{\Gamma_q(\gamma+1)}\mu + g(y).$$

Pour tout x , y $\in \mathbb{R}$ et $t \in [0,1]$, on a :

$$\left|Ax(t) - Ay(t)\right| = \left|\frac{1}{\Gamma_q(\alpha+\beta+\gamma)} \int_0^t (t-qs)^{\alpha+\beta+\gamma-1} f(s,x(s))d_qs\right.$$
$$-\frac{t^{\beta+\gamma}}{\Gamma_q(\beta+\gamma+1)\Gamma_q(\alpha)} \int_0^1 (1-qs)^{\alpha-1} f(s,x(s))d_qs$$
$$+\frac{t^{\beta+\gamma}}{\Gamma_q(\beta+\gamma+1)\Gamma_q(\alpha)}\vartheta + \frac{t^{\gamma}}{\Gamma_q(\gamma+1)}\mu + g(x)$$
$$-\frac{1}{\Gamma_q(\alpha+\beta+\gamma)} \int_0^t (t-qs)^{\alpha+\beta+\gamma-1} f(s,y(s))d_qs$$
$$+\frac{t^{\beta+\gamma}}{\Gamma_q(\beta+\gamma+1)\Gamma_q(\alpha)} \int_0^1 (1-qs)^{\alpha-1} f(s,y(s))d_qs$$
$$-\frac{t^{\beta+\gamma}}{\Gamma_q(\beta+\gamma+1)\Gamma_q(\alpha)}\vartheta - \frac{t^{\gamma}}{\Gamma_q(\gamma+1)}\mu - g(y)|$$

$$\leq \frac{1}{\Gamma_q(\alpha+\beta+\gamma)} \int_0^t (t-qs)^{\alpha+\beta+\gamma-1} \left|f(s,x(s)) - f(s,y(s))\right| d_qs$$
$$+\frac{\left|t^{\beta+\gamma}\right|}{\Gamma_q(\beta+\gamma+1)\Gamma_q(\alpha)} \int_0^1 (1-qs)^{\alpha-1} \left|f(s,x(s)) - f(s,y(s))\right| d_qs$$
$$+\left|g(x) - g(y)\right|$$

$$\leq \sup_{t\in[0,1]} \left\{\frac{1}{\Gamma_q(\alpha+\beta+\gamma)} \int_0^t (t-qs)^{\alpha+\beta+\gamma-1} \left|f(s,x(s)) - f(s,y(s))\right| d_qs\right.$$

$$+\frac{\left|t^{\beta+\gamma}\right|}{\Gamma_q(\beta+\gamma+1)\Gamma_q(\alpha)}\int_0^1(1-qs)^{\alpha-1}\left|f(s,x(s))-f(s,y(s))\right|d_qs$$
$$+\left|g(x)-g(y)\right|\}.$$

En passant à la norme et en utilisant l'hypothèse (H_1), on trouve :

$$\| Ax-Ay \|\leq \frac{k}{\Gamma_q(\alpha+\beta+\gamma+1)}\| x-y \|+\frac{k}{\Gamma_q(\beta+\gamma+1)\Gamma_q(\alpha+1)}\| x-y \|+M\| x-y \|,$$

ce qui donne

$$\| Ax-Ay \|\leq k\| x-y \|\left[\frac{1}{\Gamma_q(\alpha+\beta+\gamma+1)}+\frac{1}{\Gamma_q(\beta+\gamma+1)\Gamma_q(\alpha+1)}\right]+M\| x-y \|,$$

alors

$$\| Ax-Ay \|\leq (ku+M)\| x-y \|,$$

telle que

$$u=\frac{1}{\Gamma_q(\alpha+\beta+\gamma+1)}+\frac{1}{\Gamma_q(\beta+\gamma+1)\Gamma_q(\alpha+1)}.$$

d'après (H_2), $ku+M<1$.

Donc l'opérateur A est contractant, par conséquent le problème (2.1) admet une solution unique.

2.3.2 Existence de la solution

Théorème 2.3.2

Soit $f:[0.1]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ et $g:\mathbb{C}([0.1],\mathbb{R})\to\mathbb{R}^*$ sont des fonctions continues, on suppose que (H_2) et l'hypothèse suivante sont satisfaites :

(H_3) : Il existe deux constantes L,N >0 , telles que :

$$|f(t,x(t))|\leq L,\quad \forall x\in\mathbb{R}\ \ t\in[0,1].$$

$$|g(x)|\leq N,\quad \forall x\in\mathbb{R}\ \ t\in[0,1],$$

alors le problème (2.1) admet au moins une solution sur [0,1] .

Preuve

On va utiliser le théorème du point fixe de scheafer pour montrer l'existence d'une solution pour le problème (2.1), et pour cela on passera par 4 étapes .

Etape 1 : Montrons que A est continue :

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ une suite telle que : $x_n \to x\left(\lim_{n\to+\infty} \| x_n - x \|= 0\right)$, il faut montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \| Ax_n - Ax \|= 0.$$

Ona

$$\begin{aligned}
Ax_n(t) &= \frac{1}{\Gamma_q(\alpha+\beta+\gamma)}\int_0^t (t-qs)^{\alpha+\beta+\gamma-1} f(s,x_n(s))d_qs \\
&- \frac{t^{\beta+\gamma}}{\Gamma_q(\beta+\gamma+1)\Gamma_q(\alpha)}\int_0^1 (1-qs)^{\alpha-1} f(s,x_n(s))d_qs \\
&+ \frac{t^{\beta+\gamma}}{\Gamma_q(\alpha+\beta+1)}\vartheta + \frac{t^{\gamma}}{\Gamma_q(\gamma+1)}\mu + g(x_n).
\end{aligned}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}\ et\ t \in [0,1]$, ona :

$$\begin{aligned}
|Ax_n(t) - Ax(t)| = \Bigg| &\frac{1}{\Gamma_q(\alpha+\beta+\gamma)}\int_0^t (t-qs)^{\alpha+\beta+\gamma-1} f(s,x_n(s))d_qs \\
&- \frac{t^{\beta+\gamma}}{\Gamma_q(\alpha+\beta+1)\Gamma_q(\alpha)}\int_0^1 (1-qs)^{\alpha-1} f(s,x_n(s))d_qs \\
&+ \frac{t^{\beta+\gamma}}{\Gamma_q(\beta+\gamma+1)}\vartheta + \frac{t^{\gamma}}{\Gamma_q(\gamma+1)}\mu + g(x_n) \\
&- \frac{1}{\Gamma_q(\alpha+\beta+\gamma)}\int_0^t (t-qs)^{\alpha+\beta+\gamma-1} f(s,x(s))d_qs \\
&+ \frac{t^{\beta+\gamma}}{\Gamma_q(\beta+\gamma+1)\Gamma_q(\alpha)}\int_0^1 (1-qs)^{\alpha-1} f(s,x(s))d_qs \\
&- \frac{t^{\beta+\gamma}}{\Gamma_q(\beta+\gamma+1)}\vartheta - \frac{t^{\gamma}}{\Gamma_q(\gamma+1)}\mu - g(x)|,
\end{aligned}$$

ce qui donne

$$|Ax_n(t) - Ax(t)| \leq \frac{1}{\Gamma_q(\alpha+\beta+\gamma)}\int_0^t (t-qs)^{\alpha+\beta+\gamma-1} |f(s,x_n(s)) - f(s,x(s))| d_qs$$

$$+\frac{t^{\beta+\gamma}}{\Gamma_q(\beta+\gamma+1)\Gamma_q(\alpha)}\int_0^1 (1-qs)^{\alpha-1}|f(s,x_n(s)-f(s,x(s))|d_qs|$$

$$+|g(x_n)-g(x)|,$$

Par conséquent, on trouve :

$$\| Ax_n - Ax \| \leq \left[\frac{1}{\Gamma_q(\alpha+\beta+\gamma+1)}+\frac{1}{\Gamma_q(\beta+\gamma+1)\Gamma_q(\alpha+1)}\right]\| f(s,x_n(s))-f(s,x(s))\|$$

$$+\| g(x_n)-g(x)\|.$$

Puisque f et g sont continues, on a $\lim_{n\to+\infty}\| Ax_n - Ax \|= 0$.
$(Ax_n(t)\to Ax(t))$, d'où A est continue.

Etape 2 : Montrons que A est borné :

On définit l'ensemble

$$Br = \{x\in X, \| x\|_X \leq r\},$$

où $r>0$ pour $x\in Br$, ona :

$$|Ax(t)| = \left|\frac{1}{\Gamma_q(\alpha+\beta+\gamma)}\int_0^t (t-qs)^{\alpha+\beta+\gamma-1}f(s,x(s))d_qs\right.$$

$$-\frac{t^{\beta+\gamma}}{\Gamma_q(\beta+\gamma+1)\Gamma_q(\alpha)}\int_0^1 (1-qs)^{\alpha-1}f(s,x(s))d_qs$$

$$\left.+\frac{t^{\beta+\gamma}}{\Gamma_q(\beta+\gamma+1)}\vartheta+\frac{t^{\gamma}}{\Gamma_q(\gamma+1)}\mu+g(x)\right|$$

$$\leq \frac{1}{\Gamma_q(\alpha+\beta+\gamma)}\int_0^t (t-qs)^{\alpha+\beta+\gamma-1}|f(s,x(s))|d_qs$$

$$+\frac{t^{\beta+\gamma}}{\Gamma_q(\beta+\gamma+1)\Gamma_q(\alpha)}\int_0^1 (1-qs)^{\alpha-1}|f(s,x(s))|d_qs$$

$$+\frac{|\vartheta|\,t^{\beta+\gamma}}{\Gamma_q(\beta+\gamma+1)}+\frac{|\mu|\,t^{\gamma}}{\Gamma_q(\gamma+1)}+|g(x)|,$$

en utilisant l'hypothèse (H_3), on obtient :

$$\| Ax \| \leq \frac{L}{\Gamma_q(\alpha+\beta+\gamma)}\int_0^t (t-qs)^{\alpha+\beta+\gamma-1}d_qs$$

$$+\frac{Lt^{\beta+\gamma}}{\Gamma_q(\beta+\gamma+1)\Gamma_q(\alpha)}\int_0^1 (1-qs)^{\alpha-1}d_q s$$

$$+\frac{|\vartheta|\, t^{\beta+\gamma}}{\Gamma_q(\beta+\gamma+1)}+\frac{|\mu|\, t^{\gamma}}{\Gamma_q(\gamma+1)}+N$$

$$\| Ax \| \leq \frac{L}{\Gamma_q(\alpha+\beta+\gamma+1)}+\frac{L}{\Gamma_q(\beta+\gamma+1)\Gamma_q(\alpha+1)}+\frac{|\vartheta|}{\Gamma_q(\beta+\gamma+1)}+\frac{|\mu|}{\Gamma_q(\gamma+1)}+N$$

$$\leq L\left[\frac{1}{\Gamma_q(\alpha+\beta+\gamma+1)}+\frac{1}{\Gamma_q(\beta+\gamma+1)\Gamma_q(\alpha+1)}\right]+\frac{|\vartheta|}{\Gamma_q(\beta+\gamma+1)}+\frac{|\mu|}{\Gamma_q(\gamma+1)}+N=W,$$

avec $W>0$,

ce qui implique

$$\| Ax \| \leq W.$$

D'où A est borné.

Etape 3 : On montre que A est équicontinue :

Soit $x \in \mathbb{R},\ t \in [0,1]$ avec $t_1 < t_2$, on a :

$$|Ax(t_2)-Ax(t_1)| = \left|\frac{1}{\Gamma_q(\alpha+\beta+\gamma)}\int_0^{t_2} (t_2-qs)^{\alpha+\beta+\gamma-1} f(s,x(s))d_q s\right.$$

$$-\frac{t_2^{\beta+\gamma}}{\Gamma_q(\beta+\gamma+1)\Gamma_q(\alpha)}\int_0^1 (1-qs)^{\alpha-1} f(s,x(s))d_q s$$

$$+\frac{t_2^{\beta+\gamma}}{\Gamma_q(\beta+\gamma+1)}\vartheta+\frac{t_2^{\gamma}}{\Gamma_q(\gamma+1)}\mu+g(x)$$

$$-\frac{1}{\Gamma_q(\alpha+\beta+\gamma)}\int_0^{t_1} (t_1-qs)^{\alpha+\beta+\gamma-1} f(s,x(s))d_q s$$

$$+\frac{t_1^{\beta+\gamma}}{\Gamma_q(\beta+\gamma+1)\Gamma_q(\alpha)}\int_0^1 (1-qs)^{\alpha-1} f(s,x(s))d_q s$$

$$-\frac{t_1^{\beta+\gamma}}{\Gamma_q(\beta+\gamma+1)}\vartheta-\frac{t_1^{\gamma}}{\Gamma_q(\gamma+1)}\mu-g(x)|$$

$$|Ax(t_2)-Ax(t_1)| = \left|\frac{1}{\Gamma_q(\alpha+\beta+\gamma)}\int_0^{t_1} (t_2-qs)^{\alpha+\beta+\gamma-1} f(s,x(s))d_q s\right.$$

$$+\frac{1}{\Gamma_q(\alpha+\beta+\gamma)}\int_{t_1}^{t_2} (t_2-qs)^{\alpha+\beta+\gamma-1} f(s,x(s))d_q s$$

$$-\frac{t_2^{\beta+\gamma}}{\Gamma_q(\beta+\gamma+1)\Gamma_q(\alpha)}\int_0^1(1-qs)^{\alpha-1}f(s,x(s))d_qs$$

$$+\frac{t_2^{\beta+\gamma}}{\Gamma_q(\beta+\gamma+1)}\vartheta+\frac{t_2^{\gamma}}{\Gamma_q(\gamma+1)}\mu$$

$$-\frac{1}{\Gamma_q(\alpha+\beta+\gamma)}\int_0^{t_1}(t_1-qs)^{\alpha+\beta+\gamma-1}f(s,x(s))d_qs$$

$$+\frac{t_1^{\beta+\gamma}}{\Gamma_q(\beta+\gamma+1)\Gamma_q(\alpha)}\int_0^1(1-qs)^{\alpha-1}f(s,x(s))d_qs$$

$$-\frac{t_1^{\beta+\gamma}}{\Gamma_q(\beta+\gamma+1)}\vartheta-\frac{t_1^{\gamma}}{\Gamma_q(\gamma+1)}\mu|,$$

ce qui donne

$$|Ax(t_2)-Ax(t_1)|\leq\frac{1}{\Gamma_q(\alpha+\beta+\gamma)}\int_0^{t_1}\left[(t_2-qs)^{\alpha+\beta+\gamma-1}-(t_1-qs)^{\alpha+\beta+\gamma-1}\right]|f(s,x(s))|d_qs$$

$$+\frac{1}{\Gamma_q(\alpha+\beta+\gamma)}\int_{t_1}^{t_2}(t_2-qs)^{\alpha+\beta+\gamma-1}|f(s,x(s))|d_qs$$

$$+\frac{\left|t_1^{\beta+\gamma}-t_2^{\beta+\gamma}\right|}{\Gamma_q(\beta+\gamma+1)\Gamma_q(\alpha)}\int_0^1(1-qs)^{\alpha-1}|f(s,x(s))|d_qs$$

$$+\frac{\left|t_2^{\beta+\gamma}-t_1^{\beta+\gamma}\right|}{\Gamma_q(+\beta+\gamma+1)}|\vartheta|+\frac{\left|t_2^{\gamma}-t_1^{\gamma}\right|}{\Gamma_q(\gamma+1)}\left|\mu\right|,$$

en utilisant (H_3), on trouve :

$$|Ax(t_2)-Ax(t_1)|\leq\frac{L}{\Gamma_q(\alpha+\beta+\gamma)}\int_0^{t_1}\left[(t_2-qs)^{\alpha+\beta+\gamma-1}-(t_1-qs)^{\alpha+\beta+\gamma-1}\right]d_qs$$

$$+\frac{L}{\Gamma_q(\alpha+\beta+\gamma)}\int_{t_1}^{t_2}(t_2-qs)^{\alpha+\beta+\gamma-1}d_qs$$

$$+\frac{L\left|t_1^{\beta+\gamma}-t_2^{\beta+\gamma}\right|}{\Gamma_q(\beta+\gamma+1)\Gamma_q(\alpha)}\int_0^1(1-qs)^{\alpha-1}d_qs$$

$$+\frac{\left|t_2^{\beta+\gamma}-t_1^{\beta+\gamma}\right|}{\Gamma_q(\beta+\gamma+1)}|\vartheta|+\frac{\left|t_2^{\gamma}-t_1^{\gamma}\right|}{\Gamma_q(\gamma+1)}\left|\mu\right|,$$

ce qui donne

$$|Ax(t_2)-Ax(t_1)|\leq\frac{L}{\Gamma_q(\alpha+\beta+\gamma+1)}\left[(t_2-t_1)^{\alpha+\beta+\gamma}+t_2^{\alpha+\beta+\gamma}-t_1^{\alpha+\beta+\gamma}\right]$$

$$+\frac{L(t_2-t_1)^{\alpha+\beta+\gamma}}{\Gamma_q(\alpha+\beta+\gamma+1)}+\frac{L(t_1^{\beta+\gamma}-t_2^{\beta+\gamma})}{\Gamma_q(\beta+\gamma+1)\Gamma_q(\alpha+1)}$$

$$+\frac{(t_2^{\beta+\gamma}-t_1)^{\beta+\gamma}}{\Gamma_q(\beta+\gamma+1)}|\vartheta|+\frac{(t_1^{\gamma}-t_2^{\gamma})}{\Gamma_q(\gamma+1)}\left|\mu\right|$$

$$|Ax(t_2)-Ax(t_1)|\leq\frac{L}{\Gamma_q(\alpha+\beta+\gamma+1)}\left[2(t_2-t_1)^{\alpha+\beta+\gamma}+t_2^{\alpha+\beta+\gamma}-t_1^{\alpha+\beta+\gamma}\right]$$

$$\frac{L(t_1^{\beta+\gamma}-t_2^{\beta+\gamma})}{\Gamma_q(\beta+\gamma+1)\Gamma_q(\alpha+1)}+\frac{(t_2^{\beta+\gamma}-t_1)^{\beta+\gamma}}{\Gamma_q(\beta+\gamma+1)}|\vartheta|+\frac{(t_1^{\gamma}-t_2^{\gamma})}{\Gamma_q(\gamma+1)}\left|\mu\right|,$$

Si $t_1\to t_2$, alors :

$$|Ax(t_2)-Ax(t_1)|\to 0.$$

Donc A est èquicontinue. D'aprés l'étapes (2) et (3) , A est complètement continue.

Etape 4 :Montrons que l'ensemble

$$\omega=\{x\in X,x=\lambda Ax,0<\lambda<1\}$$

est borné :

$$|x(t)|=|\lambda Ax(t)|=\left|\frac{\lambda}{\Gamma_q(\alpha+\beta+\gamma)}\int_0^t(t-qs)^{\alpha+\beta+\gamma-1}f(s,x(s))d_qs\right.$$

$$-\frac{\lambda t^{\beta+\gamma}}{\Gamma_q(\beta+\gamma+1)\Gamma_q(\alpha)}\int_0^1(1-qs)^{\alpha-1}f(s,x(s))d_qs$$

$$+\frac{\lambda t^{\beta+\gamma}}{\Gamma_q(\beta+\gamma+1)}\vartheta+\frac{\lambda t^{\gamma}}{\Gamma_q(\gamma+1)}\mu+\lambda g(x)|,$$

alors

$$|\lambda Ax(t)|\leq\frac{\lambda L}{\Gamma_q(\alpha+\beta+\gamma)}\int_0^t(t-qs)^{\alpha+\beta+\gamma-1}d_qs$$

$$+\frac{\lambda Lt^{\beta+\gamma}}{\Gamma_q(\beta+\gamma+1)\Gamma_q(\alpha)}\int_0^1(1-qs)^{\alpha-1}d_qs$$

$$+\frac{\lambda t^{\beta+\gamma}}{\Gamma_q(\alpha+\beta+1)}|\vartheta|+\frac{\lambda t^{\gamma}}{\Gamma_q(\gamma+1)}\left|\mu\right|+\lambda N,$$

ce qui donne

$$|\lambda Ax(t)|\leq\frac{\lambda L}{\Gamma_q(\alpha+\beta+\gamma+1)}+\frac{\lambda L}{\Gamma_q(\beta+\gamma+1)\Gamma_q(\alpha+1)}+\frac{\lambda|\vartheta|}{\Gamma_q(\alpha+\beta+1)}+\frac{\lambda\left|\mu\right|}{\Gamma_q(\gamma+1)}+\lambda N$$

$$\leq \lambda L\left[\frac{1}{\Gamma_q(\alpha+\beta+\gamma+1)}+\frac{1}{\Gamma_q(\beta+\gamma+1)\Gamma_q(\alpha+1)}\right]+\lambda\left[\frac{|\vartheta|}{\Gamma_q(\alpha+\beta+1)}+\frac{|\mu|}{\Gamma_q(\gamma+1)}+N\right]=M^{'}.$$

Donc

$$\| x \| \leq M^{'} \leq \infty$$

L'ensemble ω est borné.

D'où d'aprés le théorème de scheafer l'opérateur A admet au moins un point fixe, par conséquent le problème (2.1) admet au moins une solution .

Exemple 3

On considère le problème q-fractionnaire suivant :

$$\begin{cases} D_{\frac{1}{2}}^{\frac{4}{5}}\left[D_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{7}}\left[D_{\frac{1}{2}}^{\frac{2}{5}}(x(t))\right]\right]=\dfrac{\cos x(t)}{e^t+3} \quad ,t\in[0,1], \\ x(0)=\dfrac{1}{20}x,\ D_{\frac{1}{2}}^{\frac{2}{5}}(x(0))=9,\ D_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{7}}\left[D_{\frac{1}{2}}^{\frac{2}{5}}(x(1))\right]=e. \end{cases} \tag{2.4}$$

Avec : $\alpha=\frac{4}{5}$, $\beta=\frac{1}{7}$, $\gamma=\frac{2}{5}$, $q=\frac{1}{2}$, $\mu=9$, $\vartheta=e$,

et

$$f(t,x(t))=\frac{\cos x(t)}{e^t+3},$$

$$g(x)=\frac{1}{20}x.$$

Soient x , $y\in\mathbb{R}$ et $t\in[0,1]$, on a

$$\begin{aligned}\left|f(t,x)-f(t,y)\right| &= \left|\frac{\cos x}{e^t+3}-\frac{\cos y}{e^t+3}\right| \\ &\leq \frac{1}{4}\left|x-y\right|.\end{aligned}$$

Aussi

$$\begin{aligned}\left|g(x)-g(y)\right| &= \left|\frac{1}{20}x-\frac{1}{20}y\right| \\ &\leq \frac{1}{20}\left|x-y\right|.\end{aligned}$$

Alors (H_2) est satisfaite avec $ku+M=0.4965$,

anssi

$$|f(t,x)|\leq\frac{1}{4},$$

$$|g(x)| \leq \frac{1}{20},$$

donc (H_3) est satisfaite, par conséquent le problème (2.4) possède au moins une solution.

2.4 Stabilité de la solutions du problème q-fractionnaire 2.1

2.4.1 Stabilité au sens d'Ulam-Hyers

Définition 2.4.1

Le problème (2.1) est stable au sens d'Ulam-Hyers s'il existe un nombre réel $\tau_\Phi > 0$, tel que pour tout $\sigma > 0$ et pour chaque solution $y \in X$ de l'inégalité

$$\left| D_q^\alpha \left[D_q^\beta \left[D_q^\gamma y(t) \right] \right] - f(t, y(t)) \right| \leq \sigma, \quad t \in [0,1], \tag{2.5}$$

il existe une solution $x \in X$ de l'équation (2.1) vérifiant :

$$\left| y(t) - x(t) \right| \leq \tau_\varphi \sigma, \quad t \in [0,1].$$

Remarque

Une fonction $y \in X$ est dite solution de l'inégalité (2.5) si et seulement s'il existe une fonction $v : [0,1] \to \mathbb{R}$ vérifiant :

1. $|v(t)| \leq \sigma, t \in [0,1]$.
2. $D_q^\alpha \left[D_q^\beta \left[D_q^\gamma y(t) \right] \right] = f(t, y(t)) + v(t), \quad t \in [0,1]$.

2.4.2 Etude de stabilité

Théorème 2.4.3

Soient $f : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{C}([0.1], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*)$ sont des fonctions continues, on suppose que (H_1) est satisfaite .

Si

$$k < \Gamma_q(\alpha + \beta + \gamma + 1),$$

alors le problème (2.1) est stable au sens d'Ulam-Hyers.

Preuve

Soit $y \in X$ une solution de l'inégalité (2.5), et soit $x \in X$ l'unique solution du problème suivant :

$$\begin{cases} D_q^{\alpha}\left[D_q^{\beta}\left[D_q^{\gamma}x(t)\right]\right] = v(t,x(t)), t \in [0,1], \\ \\ x(0) = y(0), D_q^{\gamma}x(0) = D_q^{\gamma}y(0), D_q^{\beta}\left[D_q^{\gamma}x(1)\right] = D_q^{\beta}\left[D_q^{\gamma}y(1)\right], \\ \\ 0 < q < 1,\ 0 < \alpha, \beta, \gamma \leq 1. \end{cases}$$

Par le lemme (3), on trouve :

$$x(t) = \frac{1}{\Gamma_q(\alpha+\beta+\gamma)} \int_0^t (t-qs)^{\alpha+\beta+\gamma-1} h_x(s) d_q s - \frac{t^{\alpha+\gamma}}{\Gamma_q(\beta+\gamma+1)} c_0 - \frac{t^{\gamma}}{\Gamma_q(\gamma+1)} c_1 - c_2.$$

Anssi ona

$$y(t) = \frac{1}{\Gamma_q(\alpha+\beta+\gamma)} \int_0^t (t-qs)^{\alpha+\beta+\gamma-1} h_y(s) d_q s - \frac{t^{\alpha+\gamma}}{\Gamma_q(\beta+\gamma+1} b_0 - \frac{t^{\mu}}{\Gamma_q(\gamma+1)} b_1 - b_2,$$

tel que : $c_0 = b_0, c_1 = b_1\ et\ c_2 = b_2.$

Par q-intégration de l'inégalité (2.5), on trouve :

$$\left| y(t) - \frac{1}{\Gamma_q(\alpha+\beta+\gamma)} \int_0^t (t-qs)^{\alpha+\beta+\gamma-1} h_y(s) d_q s + \frac{t^{\alpha+\gamma}}{\Gamma_q(\beta+\gamma+1)} b_0 + \frac{t^{\mu}}{\Gamma_q(\gamma+1)} b_1 + b_2 \right| \leq \frac{\sigma}{\Gamma_q(\alpha+\beta+\gamma+1)}.$$

Pour tout $t \in [0,1]$, ona :

$$\begin{aligned} \left| y(t) - x(t) \right| \leq & \left| y(t) - \frac{1}{\Gamma_q(\alpha+\beta+\gamma)} \int_0^t (t-qs)^{\alpha+\beta+\gamma-1} h_y(s) d_q s + \frac{t^{\alpha+\gamma}}{\Gamma_q(\beta+\gamma+1)} b_0 + \frac{t^{\mu}}{\Gamma_q(\gamma+1)} b_1 + b_2 \right| \\ & + \left| \frac{1}{\Gamma_q(\alpha+\beta+\gamma)} \int_0^t (t-qs)^{\alpha+\beta+\gamma-1} h_y(s) d_q s - \frac{t^{\alpha+\gamma}}{\Gamma_q(\beta+\gamma+1)} b_0 - \frac{t^{\mu}}{\Gamma_q(\gamma+1)} b_1 - b_2 \right. \\ & \left. - \frac{1}{\Gamma_q(\alpha+\beta+\gamma)} \int_0^t (t-qs)^{\alpha+\beta+\gamma-1} h_x(s) d_q s + \frac{t^{\alpha+\gamma}}{\Gamma_q(\beta+\gamma+1)} c_0 + \frac{t^{\mu}}{\Gamma_q(\gamma+1)} c_1 + c_2 \right| \end{aligned}$$

$$\leq \frac{\sigma}{\Gamma_q(\alpha+\beta+\gamma+1)} + \frac{1}{\Gamma_q(\alpha+\beta+\gamma)} \int_0^t (t-qs)^{\alpha+\beta+\gamma-1} \left|h_y(s)-h_x(s)\right| d_q s$$

$$\leq \frac{\sigma}{\Gamma_q(\alpha+\beta+\gamma+1)} + \frac{k}{\Gamma_q(\alpha+\beta+\gamma+1)} \parallel y-x \parallel.$$

D'où

$$\parallel y-x \parallel \left(1 - \frac{k}{\Gamma_q(\alpha+\beta+\gamma+1)}\right) \leq \frac{\sigma}{\Gamma_q(\alpha+\beta+\gamma+1)}.$$

Alors pour chaque $t \in [0,1]$

$$\left|y(t)-x(t)\right| \leq \frac{1}{\Gamma q(\alpha+\beta+\gamma+1)-k}\sigma = \tau_\varphi \sigma.$$

Donc le problème (2.1) est stable au sens d'Ulam-Hyers.

Exemple 4

On considère le problème q-fractionnaire suivant :

$$\begin{cases} D_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}}\left[D_{\frac{1}{3}}^{\frac{\sqrt{5}}{5}}\left[D_{\frac{1}{3}}^{\frac{e}{6}}(x(t))\right]\right] = \frac{\sin x(t)}{32(e^2+2)} + arctan(t+1) \ \ ,t \in [0,1], \\ x(0) = \frac{1}{25}x,\ D_{\frac{1}{3}}^{\frac{e}{6}}(x(0)) = \frac{7}{11},\ D_{\frac{1}{3}}^{\frac{\sqrt{5}}{5}}\left[D_{\frac{1}{3}}^{\frac{e}{6}}(x(1))\right] = \frac{ln(3)}{5}. \end{cases} \tag{2.6}$$

Avec : $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\gamma = \frac{e}{6}$, $q = \frac{1}{3}$, $\mu = \frac{7}{11}$, $\vartheta = \frac{ln(3)}{5}$,

et

$$f(t,x(t)) = \frac{\sin x(t)}{32(e^2+2)} + arctan(t+1),$$

$$g(x) = \frac{1}{25}x.$$

Soient x , $y \in \mathbb{R}$ et $t \in [0,1]$, on a

$$\left|f(t,x)-f(t,y)\right| = \left|\frac{\sin x}{32(e^2+2)} - \frac{\sin y}{32(e^2+2)}\right|$$

$$\leq \frac{1}{32(e^2+2)}\left|x-y\right|.$$

Aussi

$$\begin{aligned}\left|g(x)-g(y)\right| &= \left|\frac{1}{25}x-\frac{1}{25}y\right|\\ &\leq \frac{1}{25}\left|x-y\right|.\end{aligned}$$

Alors (H_1) est satisfaite et $k=\dfrac{1}{32(e^2+2)}$, $\quad M=\dfrac{1}{25}$, $u=1.993444079$,
alors $ku+M=0.04663486583$, donc $ku+M<1$.

D'où toutes les hypothèses du théorème (2.3.1) sont satisfaits, par conséquent le problème (2.6) possède une solution unique, et par le théorème de stabilité, le problème (2.6) est stable au sense d'Ulam-Hyers.

Chapitre

3

Système différentielle q-fractionnaire

L'objective de ce chapitre est d'étudier le problème q-fractionnaire suivant :

$$\begin{cases} {}^{RL}D_q^{\lambda_1}\left[{}^{C}D_q^{\delta_1}\left[{}^{C}D_q^{\vartheta_1}x(t)\right]\right] = f(t,x(t),y(t)), t \in [0,1], \\ \alpha_1 x(1) - \beta_1 x(\omega_1) = h_1(x), {}^{C}D_q^{\vartheta_1}x(0) = 0, , {}^{C}D_q^{\delta_1}\left[{}^{C}D_q^{\vartheta_1}x(1)\right] = 0, \\ {}^{RL}D_q^{\lambda_2}\left[{}^{C}D_q^{\delta_2}\left[{}^{C}D_q^{\vartheta_2}y(t)\right]\right] = g(t,x(t),y(t)), t \in [0,1], \\ \alpha_2 y(1) - \beta_2 y(\omega_2) = h_2(y), {}^{C}D_q^{\vartheta_2}y(0) = 0, {}^{C}D_q^{\delta_2}\left[{}^{C}D_q^{\vartheta_2}y(1)\right] = 0, \\ 0 < \lambda_j, \delta_j, \vartheta_j < 1, \ 0 < \omega_j < 1, \alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R}^+, \alpha_j \neq \beta_j, j = 1, 2. \end{cases} \tag{3.1}$$

où ${}^{RL}D^l, l \in \left\{\lambda_j\right\}$,et ${}^{c}D^v$, $v \in \left\{\sigma_j, \vartheta_j\right\}$ sont les dérivées q–fractionnaire au sens de Riemann-Liouville et Caputo respectivement, $f, g : [0,1] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $h_j : \mathbb{C}([0,1],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, j = 1,2$ sont des fonctions continues.

En utilisant le principe de contraction de Banach et l'alternative non linéaire de Leray Shauder pour montrer l'unicité et l'éxistence de la solution .

De plus, on va étudier la stabilité au sens d'Ulam-Hyers de solution[1],[2],[5],[7].

3.1 Solution intégrale

Lemme 4

Soit u,w $\in \mathbb{C}([0,1],\mathbb{R})$, le problème q-fractionnaire suivant :

$$\begin{cases} {}^{RL}D_q^{\lambda_1}\left[{}^{C}D_q^{\delta_1}\left[{}^{C}D_q^{\vartheta_1}x(t)\right]\right] = u(t), t\in[0,1], \\ \alpha_1 x(1) - \beta_1 x(\omega_1) = h_1(x), {}^{C}D_q^{\vartheta_1}x(0) = 0, {}^{C}D_q^{\delta_1}\left[{}^{C}D_q^{\vartheta_1}x(1)\right] = 0, \\ {}^{RL}D_q^{\lambda_2}\left[{}^{C}D_q^{\delta_2}\left[{}^{C}D_q^{\vartheta_2}x(t)\right]\right] = w(t), t\in[0,1], \\ \alpha_2 y(1) - \beta_2 y(\omega_2) = h_2(y), {}^{C}D_q^{\vartheta_2}y(0) = 0,, {}^{C}D_q^{\delta_2}\left[{}^{C}D_q^{\vartheta_2}y(1)\right] = 0, \\ 0<\lambda_j,\delta_j,\vartheta_j<1,\ 0<\omega_j<1, \alpha_j,\beta_j\in\mathbb{R}^+, \alpha_j\neq\beta_j, j=1,2. \end{cases} \tag{3.2}$$

admet une solution intégrale s'écrivant comme suit :

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1)}\int_0^t (t-qs)^{\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1-1}u(s)d_qs \\ &-\frac{t^{\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1}}{\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1)}\int_0^1(1-qs)^{\lambda_1-1}u(s)d_qs \\ &+\frac{\alpha_1}{(\beta_1-\alpha_1)\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1)}\int_0^1(1-qs)^{\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1-1}u(s)d_qs \\ &-\frac{\beta_1}{(\beta_1-\alpha_1)\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1)}\int_0^{\omega_1}(\omega_1-qs)^{\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1-1}u(s)d_qs \\ &+\frac{(\beta_1\omega_1^{\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1}-\alpha_1)}{(\beta_1-\alpha_1)\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1)}\int_0^1(1-qs)^{\lambda_1-1}u(s)d_qs - \frac{1}{(\beta_1-\alpha_1)}h_1(x). \end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{\Gamma_q(\lambda_2+\delta_2+\vartheta_2)}\int_0^t (t-qs)^{\lambda_2+\delta_2+\vartheta_2-1}w(s)d_qs \\ &-\frac{t^{\lambda_2+\delta_2+\vartheta_2}}{\Gamma_q(\lambda_2+\delta_2+\vartheta_2)}\int_0^1(1-qs)^{\lambda_2-1}w(s)d_qs \end{aligned}$$

$$+\frac{\alpha_2}{(\beta_2-\alpha_2)\Gamma_q(\lambda_2+\delta_2+\vartheta_2)}\int_0^1(1-qs)^{\lambda_2+\delta_2+\vartheta_2-1}w(s)d_qs \tag{3.4}$$

$$-\frac{\beta_2}{(\beta_2-\alpha_2)\Gamma_q(\lambda_2+\delta_2+\vartheta_2)}\int_0^{\omega_2}(\omega_2-qs)^{\lambda_2+\delta_2+\vartheta_2-1}w(s)d_qs$$

$$+\frac{(\beta_2\omega_2^{\lambda_2+\delta_2+\vartheta_2}-\alpha_2)}{(\beta_2-\alpha_2)\Gamma_q(\lambda_2+\delta_2+\vartheta_2)}\int_0^1(1-qs)^{\lambda_2-1}w(s)d_qs-\frac{1}{(\beta_2-\alpha_2)}h_2(y).$$

Preuve :

Soit l'équation :

$$^{RL}D_q^{\lambda_1}\left[{}^CD_q^{\delta_1}\left[{}^CD_q^{\vartheta_1}x(t)\right]\right]=u(t),$$

en appliquant l'intégrale q-fractionnaire de R-L d'ordre $\lambda_1>0$, on obtient :

$$I_q^{\lambda_1}\left[{}^{RL}D_q^{\lambda_1}\left[{}^CD_q^{\delta_1}\left[{}^CD_q^{\vartheta_1}x(t)\right]\right]\right]=I_q^{\lambda_1}\left[u(t)\right],$$

par le lemme (1.1), on trouve :

$$^CD_q^{\delta_1}\left[{}^CD_q^{\vartheta_1}x(t)\right]+c_1t^{\lambda_1-1}=I_q^{\lambda_1}\left[u(t)\right],$$

alors

$$^CD_q^{\delta_1}\left[{}^CD_q^{\vartheta_1}x(t)\right]=I_q^{\lambda_1}\left[u(t)\right]-c_1t^{\lambda_1-1}, \tag{3.5}$$

maintenant en appliquant l'intégrale q-fractionnaire de R-L d'ordre $\delta_1>0$ pour (3.5), on obtient :

$$I_q^{\delta_1}\left[{}^CD_q^{\delta_1}\left[{}^CD_q^{\vartheta_1}x(t)\right]\right]=I_q^{\delta_1}\left[I_q^{\lambda_1}\left[u(t)\right]-c_1t^{\lambda_1-1}\right],$$

par le lemme (1.1), on trouve :

$$^CD_q^{\vartheta_1}x(t)=I_q^{\lambda_1+\delta_1}\left[u(t)\right]-I_q^{\delta_1}\left[c_1t^{\lambda_1-1}\right]-c_2, \tag{3.6}$$

par l'intégrale q-fractionnaire de R-L d'ordre $\vartheta_1>0$ pour (3.7), on obtient :

$$I_q^{\vartheta_1}\left[{}^CD_q^{\vartheta_1}x(t)\right]=I_q^{\vartheta_1}\left[I_q^{\lambda_1+\delta_1}\left[u(t)\right]-I_q^{\delta_1}\left[c_1t^{\lambda_1-1}\right]-c_2\right],$$

par le lemme (1.1), on trouve :

$$x(t)=I_q^{\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1}\left[u(t)\right]-I_q^{\delta_1+\vartheta_1}\left[c_1t^{\lambda_1-1}\right]-I_q^{\vartheta_1}\left[c_2\right]-c_3,$$

ce qui donne

$$x(t) = \frac{1}{\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1)} \int_0^t (t-qs)^{\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1-1} u(s) d_q s$$

$$- \frac{\Gamma_q(\lambda_1) t^{\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1-1}}{\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1)} c_1 - \frac{t^{\vartheta_1}}{\Gamma_q(\vartheta_1+1)} c_2 - c_3. \tag{3.7}$$

Maintenant pour déterminer les constantes c_1, c_2 et c_3, on utilise les conditions du problème (2.5).

D'aprés la condition ${}^C D_q^{\vartheta_1} x(0) = 0$ et ${}^C D_q^{\delta_1} \left[{}^C D_q^{\vartheta_1} x(1)\right] = 0$, on obtient :

$$c_2 = 0, \quad c_1 = I_q^{\lambda_1} [u(1)].$$

Par la première condition $\alpha_1 x(1) - \beta_1 x(\omega_1) = h_1(x)$, on trouve :

$$c_3 = -\frac{\alpha_1}{(\beta_1-\alpha_1)\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1)} \int_0^1 (1-qs)^{\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1-1} u(s) d_q s$$

$$+ \frac{\beta_1}{(\beta_1-\alpha_1)\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1)} \int_0^{\omega_1} (\omega_1-qs)^{\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1-1} u(s) d_q s$$

$$- \frac{(\beta_1 \omega_1^{\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1} - \alpha_1)}{(\beta_1-\alpha_1)\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1)} \int_0^1 (1-qs)^{\lambda_1-1} u(s) d_q s + \frac{1}{(\beta_1-\alpha_1)} h_1(x).$$

substituant c_1, c_2 *et* c_3 dans (3.7), on obtient la solution la solution (3.3).

De manière similaire, on obtient la solution (3.4).

3.2 Existence et Unicité de solutions du problème q-fractionnaire (3.1)

On introduit les espace de Banach suivantes :

$$X = \{x, x \in \mathbb{C}([0,1], \mathbb{R})\},$$

muni de la norme :

$$\| x \| = \sup_{t\in[0,1]} |x(t)|,$$

et

$$Y = \{y, y \in \mathbb{C}([0,1],\mathbb{R})\},$$

l'espace de Banach muni de la norme :

$$\| y \| = \sup_{t\in[0,1]} |y(t)|.$$

L'éspace produit $(X \times Y, \| . \|)$ est aussi un espace de Banach muni de la norme :

$$\| (x,y) \| = \| x \| + \| y \| .$$

On introduit l'opérateur A définie par

$$A : X \times Y \to X \times Y$$

$$(x,y) \longmapsto A(x,y) = (A_1x, A_2y),$$

tel que, $\forall t \in [0,1]$, ona :

$$A_1(x,y)(t) = \frac{1}{\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1)}\int_0^t (t-qs)^{\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1-1} f(s,x(s),y(s))d_qs$$

$$-\frac{t^{\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1}}{\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1)}\int_0^1 (1-qs)^{\lambda_1-1} f(s,x(s),y(s)))d_qs$$

$$+\frac{\alpha_1}{(\beta_1-\alpha_1)\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1)}\int_0^1 (1-qs)^{\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1-1} f(s,x(s),y(s))d_qs$$

$$-\frac{\beta_1}{(\beta_1-\alpha_1)\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1)}\int_0^{\omega_1} (\omega_1-qs)^{\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1-1} f(s,x(s),y(s))d_qs$$

$$-\frac{(\beta_1\omega_1^{\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1}-\alpha_1)}{(\beta_1-\alpha_1)\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1)}\int_0^1 (1-qs)^{\lambda_1-1} f(s,x(s),y(s))d_qs + \frac{1}{(\beta_1-\alpha_1)}h_1(x),$$

et

$$A_2(x,y)(t) = \frac{1}{\Gamma_q(\lambda_2+\delta_2+\vartheta_2)}\int_0^t (t-qs)^{\lambda_2+\delta_2+\vartheta_2-1} g(s,x(s),y(s))d_qs$$

$$-\frac{t^{\lambda_2+\delta_2+\vartheta_2}}{\Gamma_q(\lambda_2+\delta_2+\vartheta_2)}\int_0^1 (1-qs)^{\lambda_2-1} g(s,x(s),y(s))d_qs$$

$$+\frac{\alpha_2}{(\beta_2-\alpha_2)\Gamma_q(\lambda_2+\delta_2+\vartheta_2)}\int_0^1(1-qs)^{\lambda_2+\delta_2+\vartheta_2-1}g(s,x(s),y(s))d_qs$$

$$-\frac{\beta_2}{(\beta_2-\alpha_2)\Gamma_q(\lambda_2+\delta_2+\vartheta_2)}\int_0^{\omega_2}(\omega_2-qs)^{\lambda_2+\delta_2+\vartheta_2-1}g(s,x(s),y(s))d_qs$$

$$-\frac{(\beta_2\omega_2^{\lambda_2+\delta_2+\vartheta_2}-\alpha_2)}{(\beta_2-\alpha_2)\Gamma_q(\lambda_2+\delta_2+\vartheta_2)}\int_0^1(1-qs)^{\lambda_2-1}g(s,x(s),y(s))d_qs+\frac{1}{(\beta_2-\alpha_2)}h_2(y).$$

3.2.1 Unicité de la solution

Théorème 3.2.1

Soient $f,g:[0,1]\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ et $h_1,h_2:\mathbb{C}([0,1],\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ sont des fonctions continues. On suppose que :

(H_1) : Ils existent M,k,M' et k' >0 telles que :

$$\left|f(t,x,y)-f(t,x_1,y_1)\right|\le M\left[|x-x_1|+\left|y-y_1\right|\right]\qquad \forall t\in[0,1]\ \ et\ \ \forall x,y,x_1,y_1\in\mathbb{R}.$$

$$\left|g(t,x,y)-g(t,x_1,y_1)\right|\le M'\left[|x-x_1|+\left|y-y_1\right|\right]\qquad \forall t\in[0,1]\ \ et\ \ \forall x,y,x_1,y_1\in\mathbb{R}.$$

$$|h_1(x)-h_1(x_1)|\le k|x-x_1|\qquad \forall x,x_1\in([0,1],\mathbb{R}).$$

$$\left|h_2(y)-h_2(y_1)\right|\le k'\left|y-y_1\right|\qquad \forall y,y_1\in([0,1],\mathbb{R}).$$

(H_2) : $wM+\frac{k}{|\beta_1-\alpha_1|}+w^{'}M^{'}+\frac{k^{'}}{|\beta_2-\alpha_2|}<1,$

Alors le problème (3.1) admet une solution unique sur [0,1].

Preuve

ona

$$A_1(x_1,y_1)(t)=\frac{1}{\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1)}\int_0^t(t-qs)^{\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1-1}f(s,x_1(s),y_1(s))d_qs$$

$$-\frac{t^{\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1}}{\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1)}\int_0^1(1-qs)^{\lambda_1-1}f(s,x_1(s),y_1(s)))d_qs$$

$$+\frac{\alpha_1}{(\beta_1-\alpha_1)\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1)}\int_0^1(1-qs)^{\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1-1}f(s,x_1(s),y_1(s))d_qs$$

$$-\frac{\beta_1}{(\beta_1-\alpha_1)\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1)}\int_0^{\omega_1}(\omega_1-qs)^{\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1-1}f(s,x_1(s),y_1(s))d_qs$$

$$-\frac{(\beta_1\omega_1^{\lambda_1+\gamma_1+\vartheta_1}-\alpha_1)}{(\beta_1-\alpha_1)\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1)}\int_0^1(1-qs)^{\lambda_1-1}f(s,x_1(s),y_1(s))d_qs+\frac{1}{(\beta_1-\alpha_1)}h_1(x_1).$$

Soit $(x,y),(x_1,y_1)\in X\times Y$, et pour chaque $t\in[0,1]$, on a :

$$\begin{aligned}\left|A_1(x,y)(t)-A_1(x_1,y_1)(t)\right| = \Bigg| & \frac{1}{\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1)}\int_0^t(t-qs)^{\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1-1}f(s,x(s),y(s))d_qs\\
& -\frac{t^{\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1}}{\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1)}\int_0^1(1-qs)^{\lambda_1-1}f(s,x(s),y(s)))d_qs\\
& +\frac{\alpha_1}{(\beta_1-\alpha_1)\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1)}\int_0^1(1-qs)^{\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1-1}f(s,x(s),y(s))d_qs\\
& -\frac{\beta_1}{(\beta_1-\alpha_1)\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1)}\int_0^{\omega_1}(\omega_1-qs)^{\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1-1}f(s,x(s),y(s))d_qs\\
& -\frac{(\beta_1\omega_1^{\lambda_1+\gamma_1+\vartheta_1}-\alpha_1)}{(\beta_1-\alpha_1)\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1)}\int_0^1(1-qs)^{\lambda_1-1}f(s,x(s),y(s))d_qs+\frac{1}{(\beta_1-\alpha_1)}h_1(x)\\
& -\frac{1}{\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1)}\int_0^t(t-qs)^{\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1-1}f(s,x_1(s),y_1(s))d_qs\\
& +\frac{t^{\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1}}{\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1)}\int_0^1(1-qs)^{\lambda_1-1}f(s,x_1(s),y_1(s)))d_qs\\
& -\frac{\alpha_1}{(\beta_1-\alpha_1)\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1)}\int_0^1(1-qs)^{\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1-1}f(s,x_1(s),y_1(s))d_qs\\
& +\frac{\beta_1}{(\beta_1-\alpha_1)\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1)}\int_0^{\omega_1}(\omega_1-qs)^{\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1-1}f(s,x_1(s),y_1(s))d_qs\\
& +\frac{(\beta_1\omega_1^{\lambda_1+\gamma_1+\vartheta_1}-\alpha_1)}{(\beta_1-\alpha_1)\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1)}\int_0^1(1-qs)^{\lambda_1-1}f(s,x_1(s),y_1(s))d_qs-\frac{1}{(\beta_1-\alpha_1)}h_1(x_1)\Bigg|.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\le\frac{1}{\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1)}\int_0^t(t-qs)^{\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1-1}\left|f(s,x(s),y(s))-f(s,x_1(s),y_1(s))\right|d_qs\\
&+\frac{\left|t^{\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1}\right|}{\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1)}\int_0^1(1-qs)^{\lambda_1-1}\left|f(s,x(s),y(s))-f(s,x_1(s),y_1(s))\right|)d_qs\\
&+\frac{\alpha_1}{\left|(\beta_1-\alpha_1)\right|\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1)}\int_0^1(1-qs)^{\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1-1}\left|f(s,x(s),y(s))-f(s,x_1(s),y_1(s))\right|d_qs\end{aligned}$$

$$+\frac{\beta_1}{\left|(\beta_1-\alpha_1)\right|\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1)}\int_0^{\omega_1}(\omega_1-qs)^{\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1-1}\left|f(s,x(s),y(s))-f(s,x_1(s),y_1(s))\right|d_qs$$

$$+\frac{\left|(\beta_1\omega_1^{\lambda_1+\gamma_1+\vartheta_1}-\alpha_1)\right|}{\left|(\beta_1-\alpha_1\right|)\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1)}\int_0^1(1-qs)^{\lambda_1-1}\left|f(s,x(s),y(s))-f(s,x_1(s),y_1(s))\right|d_qs$$

$$+\frac{1}{\left|(\beta_1-\alpha_1)\right|}[|h_1(x)-h_1(x_1)|],$$

$$\leq \sup_{t\in[0,1]}\left\{\frac{1}{\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1)}\int_0^t(t-qs)^{\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1-1}\left|f(s,x(s),y(s))-f(s,x_1(s),y_1(s))\right|d_qs\right.$$

$$+\frac{\left|t^{\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1}\right|}{\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1)}\int_0^1(1-qs)^{\lambda_1-1}\left|f(s,x(s),y(s))-f(s,x_1(s),y_1(s))\right|)d_qs$$

$$+\frac{\alpha_1}{\left|(\beta_1-\alpha_1)\right|\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1)}\int_0^1(1-qs)^{\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1-1}\left|f(s,x(s),y(s))-f(s,x_1(s),y_1(s))\right|d_qs$$

$$+\frac{\beta_1}{\left|(\beta_1-\alpha_1)\right|\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1)}\int_0^{\omega_1}(\omega_1-qs)^{\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1-1}\left|f(s,x(s),y(s))-f(s,x_1(s),y_1(s))\right|d_qs$$

$$+\frac{\left|(\beta_1\omega_1^{\lambda_1+\gamma_1+\vartheta_1}-\alpha_1)\right|}{\left|(\beta_1-\alpha_1\right|)\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1)}\int_0^1(1-qs)^{\lambda_1-1}\left|f(s,x(s),y(s))-f(s,x_1(s),y_1(s))\right|d_qs$$

$$\left.+\frac{1}{\left|(\beta_1-\alpha_1)\right|}[|h_1(x)-h_1(x_1)|]\right\}.$$

En passant à la norme et en utilisant (H_1) , on trouve :

$$\| A_1(x,y)-A_1(x_1,y_1)\|_X\leq \frac{M}{\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1+1)}[\| x-x_1\|+\| y-y_1\|]$$

$$+\frac{M}{\lambda_1\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1)}[\| x-x_1\|+\| y-y_1\|]$$

$$+\frac{\alpha_1 M}{\left|(\beta_1-\alpha_1)\right|\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1+1)}[\| x-x_1\|+\| y-y_1\|]$$

$$+\frac{M\beta_1\omega_{\lambda_1+\gamma_1+\vartheta_1}}{\left|(\beta_1-\alpha_1)\right|\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1+1)}[\| x-x_1\|+\| y-y_1\|]$$

$$+\frac{M\left|(\beta_1\omega_1^{\lambda_1+\gamma_1+\vartheta_1}-\alpha_1)\right|}{\lambda_1\left|(\beta_1-\alpha_1\right|)\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1)}[\| x-x_1\|+\| y-y_1\|]$$

$$+\frac{k}{\left|\beta_1-\alpha_1\right|}\| x-x_1\|,$$

ce qui implique

$$\leq M\left[\frac{1}{\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1+1)}+\frac{1}{\lambda_1\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1)}+\frac{\alpha_1}{\left|(\beta_1-\alpha_1)\right|\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1+1)}\right.$$

$$\left.+\frac{\beta_1\omega_1^{\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1}}{\left|(\beta_1-\alpha_1)\right|\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1)}\right]$$

$$[\| x-x_1 \| + \| y-y_1 \|]+\frac{k}{\left|\beta_1-\alpha_1\right|}\| x-x_1 \|.$$

On pose

$$w=\left[\frac{1}{\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1+1)}+\frac{1}{\lambda_1\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1)}+\frac{\alpha_1}{\left|(\beta_1-\alpha_1)\right|\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1+1)}\right.$$

$$\left.+\frac{\beta_1\omega_1^{\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1}}{\left|(\beta_1-\alpha_1)\right|\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1)}\right],$$

on trouve :

$$\| A_1(x,y)-A_1(x_1,y_1) \| \leq wM\,[\| x-x_1 \| + \| y-y_1 \|]+\frac{k}{\left|\beta_1-\alpha_1\right|}\| x-x_1 \|$$

$$\leq\left(wM+\frac{K}{\left|\beta_1-\alpha_1\right|}\right)[\| x-x_1 \| + \| y-y_1 \|]. \tag{3.8}$$

D’une manière similaire, on trouve :

$$\| A_2(x,y)-A_2(x_1,y_1) \| \leq\left(w^{'}M^{'}+\frac{K^{'}}{\left|\beta_2-\alpha_2\right|}\right)[\| x-x_1 \| + \| y-y_1 \|]. \tag{3.9}$$

D’apré (3.8) et (3.9), on conclue que

$$\| A(x,y)-A(x_1,y_1) \| \leq\left(wM+\frac{k}{\left|\beta_1-\alpha_1\right|}+w^{'}M+\frac{k^{'}}{\left|\beta_2-\alpha_2\right|}\right)[\| x-x_1 \| + \| y-y_1 \|].$$

D’aprés (H_2),

$$wM+\frac{k}{\left|\beta_1-\alpha_1\right|}+w^{'}M+\frac{k^{'}}{\left|\beta_2-\alpha_2\right|}<1,$$

donc l’opérateur A est contractant, par conséquent le problème (3.1) admet une solution unique.

3.2.2 Existence de la solution

Théorème 3.2.2

Soit $f,g:[0.1]\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ sont des fonctions continues, on a :

(H_3) : Il existe $k_0>0, J_0>0$, et $k_i, J_i>0$ $(i=1,2)$ telles que :

$$\left|f(t,x(t),y(t))\right|\leq k_0+k_1|x|+k_2\left|y\right|,\quad \forall x,y\in\mathbb{R}\ \ t\in[0,1].$$

$$\left|g(t,(x(t)),(y(t)))\right|\leq J_0+J_1|x|+J_2\left|y\right|,\quad \forall x,y\in\mathbb{R}\ \ t\in[0,1],$$

(H_4) : $h_1, h2:\mathbb{C}([0,1],\mathbb{R})\to\mathbb{R}$, il existe $k_1>0, J_1>0$, telles que :

$$|h_1(x)|\leq k\parallel x\parallel,\quad \forall x\in\mathbb{R}$$

$$\left|h_2(y)\right|\leq J\parallel y\parallel,\quad \forall y\in\mathbb{R}.$$

Alors le problème (3.1), admet au moins une solution sur [0,1].

Preuve :

Premièrement, on montre que l'opérateur $A:X\times Y\to X\times Y$ est complètement continue. Il est claire de voir que A est continu puisque f, g, h_1 et h_2 sont continues.

Soit Ω bornée, alors il existe des constantes positives L, $L^{'}$, N, $N^{'}$, telles que :

$$\left|f(t,x(t),y(t))\right|\leq L,\quad \forall x,y\in\Omega\ \ t\in[0,1].$$

$$\left|g(t,(x(t)),(y(t)))\right|\leq L^{'},\quad \forall x,y\in\Omega\ \ t\in[0,1],$$

$$|h_1(x)|\leq N,\quad \forall x\in\mathbb{C}([0,1],\mathbb{R})\to\mathbb{R}$$

$$\left|h_2(y)\right|\leq N^{'},\quad \forall y\in\mathbb{C}([0,1],\mathbb{R})\to\mathbb{R}$$

Pour tout $(x,y)\in\Omega$, on a :

$$\begin{aligned}\left|A_1(x,y)(t)\right| = \Bigg| & \frac{1}{\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1)}\int_0^t(t-qs)^{\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1-1}f(s,x(s),y(s))d_qs\\ & -\frac{t^{\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1}}{\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1)}\int_0^1(1-qs)^{\lambda_1-1}f(s,x(s),y(s)))d_qs\\ & +\frac{\alpha_1}{(\beta_1-\alpha_1)\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1)}\int_0^1(1-qs)^{\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1-1}f(s,x(s),y(s))d_qs\end{aligned}$$

$$-\frac{\beta_1}{(\beta_1-\alpha_1)\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1)}\int_0^{\omega_1}(\omega_1-qs)^{\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1-1}f(s,x(s),y(s))d_qs$$

$$-\frac{(\beta_1\omega_1^{\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1}-\alpha_1)}{(\beta_1-\alpha_1)\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1)}\int_0^1(1-qs)^{\lambda_1-1}f(s,x(s),y(s))d_qs+\frac{1}{(\beta_1-\alpha_1)}h_1(x)|$$

$$\leq\frac{1}{\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1)}\int_0^t(t-qs)^{\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1-1}\left|f(s,x(s),y(s))\right|d_qs$$

$$+\frac{\left|t^{\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1}\right|}{\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1)}\int_0^1(1-qs)^{\lambda_1-1}(s,x(s),y(s)))\big|d_qs$$

$$+\frac{\alpha_1}{\left|(\beta_1-\alpha_1)\right|\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1)}\int_0^1(1-qs)^{\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1-1}\left|f(s,x(s),y(s))\right|d_qs$$

$$+\frac{\beta_1}{\left|(\beta_1-\alpha_1)\right|\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1)}\int_0^{\omega_1}(\omega_1-qs)^{\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1-1}\left|f(s,x(s),y(s))\right|d_qs$$

$$+\frac{\left|(\beta_1\omega_1^{\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1}-\alpha_1)\right|}{\left|(\beta_1-\alpha_1)\right|\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1)}\int_0^1(1-qs)^{\lambda_1-1}\left|f(s,x(s),y(s))\right|d_qs+\left|\frac{h_1(x)}{(\beta_1-\alpha_1)}\right|,$$

en passant à la norme, On obtient :

$$\|A_1(x,y)\|\leq\frac{L}{\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1)}\int_0^t(t-qs)^{\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1-1}d_qs$$

$$+\frac{L\left|t^{\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1}\right|}{\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1)}\int_0^1(1-qs)^{\lambda_1-1}d_qs$$

$$+\frac{L\alpha_1}{\left|(\beta_1-\alpha_1)\right|\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1)}\int_0^1(1-qs)^{\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1-1}d_qs$$

$$+\frac{L\beta_1}{\left|(\beta_1-\alpha_1)\right|\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1)}\int_0^{\omega_1}(\omega_1-qs)^{\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1-1}d_qs$$

$$+\frac{L\left|(\beta_1\omega_1^{\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1}-\alpha_1)\right|}{\left|(\beta_1-\alpha_1)\right|\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1)}\int_0^1(1-qs)^{\lambda_1-1}d_qs+\frac{N}{\left|(\beta_1-\alpha_1)\right|}$$

$$\leq\frac{L}{\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1+1)}+\frac{L}{\lambda\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1)}+\frac{L\alpha_1}{\left|(\beta_1-\alpha_1)\right|\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1+1)}$$

$$+\frac{L\beta_1\omega^{\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1}}{\left|(\beta_1-\alpha_1)\right|\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1+1)}+\frac{L\left|(\beta_1\omega_1^{\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1}-\alpha_1)\right|}{\lambda_1\left|(\beta_1-\alpha_1)\right|\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1)}+\frac{N}{\left|(\beta_1-\alpha_1)\right|},$$

ce qui implique

$$\| A_1(x,y) \| \leq L\left(\frac{1}{\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1+1)}+\frac{1}{\lambda_1\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1)}+\frac{\alpha_1}{\left|(\beta_1-\alpha_1)\right|\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1+1)}\right.$$

$$\left.+\frac{\beta_1\omega^{\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1}}{\left|(\beta_1-\alpha_1)\right|\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1+1)}+\frac{\left|(\beta_1\omega_1^{\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1}-\alpha_1)\right|}{\lambda_1\left|(\beta_1-\alpha_1)\right|\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1)}\right)+\frac{N}{\left|(\beta_1-\alpha_1)\right|}=z,$$

De même, on peut obtenir que

$$\| A_2(x,y) \| \leq L^{'}\left(\frac{1}{\Gamma_q(\lambda_2+\delta_2+\vartheta_2+1)}+\frac{1}{\lambda_2\Gamma_q(\lambda_2+\delta_2+\vartheta_2)}+\frac{\alpha_2}{\left|(\beta_2-\alpha_2)\right|\Gamma_q(\lambda_2+\delta_2+\vartheta_2+1)}\right.$$

$$\left.+\frac{\beta_2\omega^{\lambda_2+\delta_2+\vartheta_2}}{\left|(\beta_2-\alpha_2)\right|\Gamma_q(\lambda_2+\delta_2+\vartheta_2+1)}+\frac{\left|(\beta_2\omega_2^{\lambda_2+\delta_2+\vartheta_2}-\alpha_2)\right|}{\lambda_2\left|(\beta_2-\alpha_2)\right|\Gamma_q(\lambda_2+\delta_2+\vartheta_2)}\right)+\frac{N^{'}}{\left|(\beta_2-\alpha_2)\right|}=z^{'},$$

tel que $z, z^{'} > 0$,

donc

$$\| A(x,y) \| \leq z+z'.$$

D'où A est uniformément borné.

On montre ensuite que A est équicontinu

Soit $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq 1$, on a

$$\left|A_1(x,y)(t_2)-A_1(x,y)(t_1)\right| = \left|\frac{1}{\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1)}\int_0^{t_2}(t_2-qs)^{\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1-1}f(s,x(s),y(s))d_qs\right.$$

$$-\frac{t_2^{\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1}}{\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1)}\int_0^1(1-qs)^{\lambda_1-1}f(s,x(s),y(s)))d_qs$$

$$+\frac{\alpha_1}{(\beta_1-\alpha_1)\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1)}\int_0^1(1-qs)^{\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1-1}f(s,x(s),y(s))d_qs$$

$$-\frac{\beta_1}{(\beta_1-\alpha_1)\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1)}\int_0^{\omega_1}(\omega_1-qs)^{\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1-1}f(s,x(s),y(s))d_qs$$

$$-\frac{(\beta_1\omega_1^{\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1}-\alpha_1)}{(\beta_1-\alpha_1)\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1)}\int_0^1(1-qs)^{\lambda_1-1}f(s,x(s),y(s))d_qs+\frac{1}{(\beta_1-\alpha_1)}h_1(x)$$

$$-\frac{1}{\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1)}\int_0^{t_1}(t_1-qs)^{\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1-1}f(s,x(s),y(s))d_qs$$

$$+\frac{t_1^{\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1}}{\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1)}\int_0^1(1-qs)^{\lambda_1-1}f(s,x(s),y(s)))d_qs$$

$$-\frac{\alpha_1}{(\beta_1-\alpha_1)\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1)}\int_0^1(1-qs)^{\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1-1}f(s,x(s),y(s))d_qs$$

$$+\frac{\beta_1}{(\beta_1-\alpha_1)\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1)}\int_0^{\omega_1}(\omega_1-qs)^{\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1-1}f(s,x(s),y(s))d_qs$$

$$+\frac{(\beta_1\omega_1^{\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1}-\alpha_1)}{(\beta_1-\alpha_1)\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1)}\int_0^1(1-qs)^{\lambda_1-1}f(s,x(s),y(s))d_qs-\frac{1}{(\beta_1-\alpha_1)}h_1(x)|$$

$$=\Bigg|\frac{1}{\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1)}\int_0^{t_2}(t_2-qs)^{\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1-1}f(s,x(s),y(s))d_qs$$

$$-\frac{t_2^{\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1}}{\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1)}\int_0^1(1-qs)^{\lambda_1-1}f(s,x(s),y(s)))d_qs$$

$$-\frac{1}{\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1)}\int_0^{t_1}(t_1-qs)^{\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1-1}f(s,x(s),y(s))d_qs$$

$$+\frac{t_1^{\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1}}{\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1)}\int_0^1(1-qs)^{\lambda_1-1}f(s,x(s),y(s)))d_qs|$$

$$=\Bigg|\frac{1}{\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1)}\int_0^{t_1}(t_2-qs)^{\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1-1}f(s,x(s),y(s))d_qs$$

$$+\frac{1}{\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1)}\int_{t_1}^{t_2}(t_2-qs)^{\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1-1}f(s,x(s),y(s))d_qs$$

$$-\frac{t_2^{\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1}}{\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1)}\int_0^1(1-qs)^{\lambda_1-1}f(s,x(s),y(s)))d_qs$$

$$-\frac{1}{\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1)}\int_0^{t_1}(t_1-qs)^{\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1-1}f(s,x(s),y(s))d_qs$$

$$+\frac{t_1^{\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1}}{\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1)}\int_0^1(1-qs)^{\lambda_1-1}f(s,x(s),y(s)))d_qs|$$

$$\leq\frac{1}{\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1)}\int_0^{t_1}\left[(t_2-qs)^{\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1-1}-(t_1-qs)^{\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1-1}\right]\left|f(s,x(s),y(s))\right|d_qs$$

$$+\frac{1}{\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1)}\int_{t_1}^{t_2}(t_2-qs)^{\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1-1}\left|f(s,x(s),y(s))\right|d_qs$$

$$+\frac{\left|t_1^{\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1}-t_2^{\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1}\right|}{\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1}\int_0^1(1-qs)^{\lambda_1-1}\left|f(s,x(s),y(s))\right|d_qs,$$

par l'hypothèse, on trouve :

$$\left|A_1(x,y)(t_2)-A_1(x,y)(t_1)\right|\leq\frac{L}{\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1)}\int_0^{t_1}\left[(t_2-qs)^{\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1-1}-(t_1-qs)^{\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1-1}\right]d_qs$$

$$+\frac{L}{\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1)}\int_{t_1}^{t_2}(t_2-qs)^{\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1-1}d_qs$$

$$+\frac{L\left|t_1^{\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1}-t_2^{\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1}\right|}{\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1)}\int_0^1(1-qs)^{\lambda_1-1}d_qs,$$

ce qui donne

$$\left|A_1(x,y)(t_2)-A_1(x,y)(t_1)\right|\leq\frac{L}{\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1)}\left[(t_2-t_1)^{\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1}+t_2^{\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1}-t_1^{\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1}\right]$$

$$+\frac{L(t_2-t_1)^{\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1}}{\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1+1)}+\frac{L\left|t_1^{\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1}-t_2^{\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1}\right|}{\lambda_1\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1)},$$

ce qui implique

$$\left|A_1(x,y)(t_2)-A_1(x,y)(t_1)\right|\leq\frac{L}{\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1)}\left[2(t_2-t_1)^{\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1}+t_2^{\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1}-t_1^{\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1}\right]$$

$$+\frac{L(t_2-t_1)^{\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1}}{\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1+1)}+\frac{L\left|t_1^{\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1}-t_2^{\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1}\right|}{\lambda_1\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1)}$$

Si $t_1\longrightarrow t_2$, alors :

$$\left|A_1(x,y)(t_2)-A_1(x,y)(t_1)\right|\longrightarrow 0$$

De manière analogue, on peut obtenir

$$\left|A_2(x,y)(t_2)-A_2(x,y)(t_1)\right|\leq\frac{L^{'}}{\Gamma_q(\lambda_2+\delta_2+\vartheta_2)}\left[2(t_2-t_1)^{\lambda_2+\delta_2+\vartheta_2}+t_2^{\lambda_2+\delta_2+\vartheta_2}-t_1^{\lambda_2+\delta_2+\vartheta_2}\right]$$

$$+\frac{L'(t_2-t_1)^{\lambda_2+\delta_2+\vartheta_2}}{\Gamma_q(\lambda_2+\delta_2+\vartheta_2+1)}+\frac{L'\left|t_1^{\lambda_2+\delta_2+\vartheta_2}-t_2^{\lambda_2+\delta_2+\vartheta_2}\right|}{\lambda_2\Gamma_q(\lambda_2+\delta_2+\vartheta_2)}.$$

Donc, si $t_2 \to t_1$ alors $\left|A_2(x,y)(t_2) - A_2(x,y)(t_2)\right| \to 0$.

Par conséquent, l'opérateur $A(x,y)(t)$ est équicontinu.

D'aprés les arguments précédents, A est complètement continue par le théorème de Ascoli-Arzela.

Á la fin, on vérifiera que l'ensemble

$$\epsilon = \{(x,y) \in X \times Y | (x,y) = \lambda A(x,y), 0 < \lambda < 1\}$$

est borné.

Soit $(x,y) \in \epsilon$, alors $(x,y) = \lambda A(x,y)$. Pour tout $t \in [0.1]$, ona

$$x(t) = \lambda A_1(x,y)(t), \qquad y(t) = \lambda A_2(x,y)(t),$$

Alors

$$|x(t)| = \left|\lambda A_1(x,y)(t)\right| = \left|\frac{\lambda}{\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1)} \int_0^t (t-qs)^{\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1-1} f(s,x(s),y(s)) d_q s\right.$$

$$-\lambda \frac{t^{\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1}}{\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1)} \int_0^1 (1-qs)^{\lambda_1-1} f(s,x(s),y(s))) d_q s$$

$$+\frac{\lambda\alpha_1}{(\beta_1-\alpha_1)\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1)} \int_0^1 (1-qs)^{\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1-1} f(s,x(s),y(s)) d_q s$$

$$-\frac{\lambda\beta_1}{(\beta_1-\alpha_1)\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1)} \int_0^{\omega_1} (\omega_1-qs)^{\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1-1} f(s,x(s),y(s)) d_q s$$

$$\left.-\frac{\lambda(\beta_1\omega_1^{\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1}-\alpha_1)}{(\beta_1-\alpha_1)\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1)} \int_0^1 (1-qs)^{\lambda_1-1} f(s,x(s),y(s)) d_q s + \frac{\lambda}{(\beta_1-\alpha_1)} h_1(x)\right|$$

$$|x(t)| \leq \frac{\lambda\left(k_0+k_1|x|+k_2\left|y\right|\right)}{\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1)} \int_0^t (t-qs)^{\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1-1} d_q s$$

$$+\frac{\lambda\left(k_0+k_1|x|+k_2\left|y\right|\right)\left|t^{\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1}\right|}{\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1)} \int_0^1 (1-qs)^{\lambda_1-1} d_q s$$

$$+\frac{\lambda\left(k_0+k_1|x|+k_2\left|y\right|\right)\alpha_1}{\left|\beta_1-\alpha_1\right|\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1)} \int_0^1 (1-qs)^{\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1-1} d_q s$$

$$+\frac{\lambda\left(k_0+k_1|x|+k_2\left|y\right|\right)\beta_1}{\left|\beta_1-\alpha_1\right|\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1)} \int_0^{\omega_1} (\omega_1-qs)^{\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1-1} d_q s$$

$$+\frac{\lambda\left(k_0+k_1|x|+k_2|y|\right)\left|\beta_1\omega_1^{\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1}-\alpha_1\right|}{\left|(\beta_1-\alpha_1)\right|\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1)}\int_0^1(1-qs)^{\lambda_1-1}d_qs$$

$$+\frac{\lambda k|x|}{\left|\beta_1-\alpha_1\right|}$$

$$\leq\frac{\lambda\left(k_0+k_1|x|+k_2|y|\right)}{\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1+1)}+\frac{\lambda\left(k_0+k_1|x|+k_2|y|\right)}{\lambda_1\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1)}$$

$$+\frac{\lambda\left(k_0+k_1|x|+k_2|y|\right)\alpha_1}{\left|\beta_1-\alpha_1\right|\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1+1)}+\frac{\lambda\left(k_0+k_1|x|+k_2|y|\right)\beta_1\omega_1^{\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1}}{\left|\beta_1-\alpha_1\right|\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1+1)}$$

$$+\frac{\lambda\left(k_0+k_1|x|+k_2|y|\right)\left|\beta_1\omega_1^{\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1}-\alpha_1\right|}{\lambda_1\left|\beta_1-\alpha_1\right|\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1)}+\frac{\lambda k|x|}{\left|\beta_1-\alpha_1\right|},$$

ce qui implique

$$|x(t)|\leq\lambda\left(k_0+k_1|x|+k_2|y|\right)\left(\frac{1}{\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1+1)}+\frac{1}{\lambda_1\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1)}\right.$$

$$\left.+\frac{\alpha_1}{\left|\beta_1-\alpha_1\right|\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1+1)}+\frac{\beta_1\omega^{\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1}}{\left|\beta_1-\alpha_1\right|\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1+1)}+\frac{\left|\beta_1\omega_1^{\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1}-\alpha_1\right|}{\lambda_1\left|\beta_1-\alpha_1\right|\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1)}\right)$$

$$+\frac{\lambda k|x|}{\left|\beta_1-\alpha_1\right|}.$$

Donc

$$\| x \|\leq\lambda\,(k_0+k_1\| x \|+k_2\| y \|)\left(\frac{1}{\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1+1)}+\frac{1}{\lambda_1\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1)}\right.$$

$$\left.+\frac{\alpha_1}{\left|\beta_1-\alpha_1\right|\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1+1)}+\frac{\beta_1\omega^{\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1}}{\left|\beta_1-\alpha_1\right|\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1+1)}+\frac{\left|\beta_1\omega_1^{\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1}-\alpha_1\right|}{\lambda_1\left|\beta_1-\alpha_1\right|\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1)}\right)$$

$$+\frac{\lambda k}{\left|\beta_1-\alpha_1\right|}\| x \|.$$

En prenant

$$\nabla_1=\frac{1}{\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1+1)}+\frac{1}{\lambda_1\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1)}+\frac{\alpha_1}{\left|\beta_1-\alpha_1\right|\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1+1)}$$

$$+\frac{\beta_1\omega_1^{\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1}}{\left|\beta_1-\alpha_1\right|\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1+1)}+\frac{\left|\beta_1\omega_1^{\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1}-\alpha_1\right|}{\lambda_1\left|\beta_1-\alpha_1\right|\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1)},$$

on obtient

$$\| x \| \leq \lambda k_0 \nabla_1 + \lambda k_1 \nabla_1 \| x \| + \lambda k_2 \nabla_1 \| y \| + \frac{\lambda k}{\left|\beta_1 - \alpha_1\right|} \| x \| .$$

De manière similaire, on peut avoir

$$\| y \| \leq \lambda J_0 \nabla_2 + \lambda J_1 \nabla_2 \| x \| + \lambda J_2 \nabla_2 \| y \| + \frac{\lambda J}{\left|\beta_1 - \alpha_1\right|} \| x \| .$$

Donc

$$\| x \| + \| y \| \leq \lambda(k_0 \nabla_1 + J_0 \nabla_2) + \lambda(k_1 \nabla_1 + J_1 \nabla_2) \| x \| + \lambda(k_2 \nabla_1 + J_2 \nabla_2) \| y \|,$$

$$\Longrightarrow \| x \| + \| y \| \leq \lambda(k_0 \nabla_1 + J_0 \nabla_2) + (\lambda(k_1 \nabla_1 + J_1 \nabla_2) + \lambda(k_2 \nabla_1 + J_2 \nabla_2)) [\| x \| + \| y \|]$$

en prenant

$$M = \lambda(k_0 \nabla_1 + J_0 \nabla_2),$$

et

$$M^{'} = \lambda(k_1 \nabla_1 + J_1 \nabla_2) + \lambda(k_2 \nabla_1 + J_2 \nabla_2)$$

on obtient

$$\| (x, y) \| - M^{'} \| (x, y) \| \leq M$$

$$\| (x, y) \| (1 - M^{'}) \leq M$$

$$\| (x, y) \| \leq \frac{M}{1 - M^{'}}.$$

Ce qui preuve que ϵ est borné.Ainsi l'opérateur A possède au moins un point fixe.D'où le problème (3.1) a au moins une solution.

3.3 Etude de la Stabilité

Définition 3.3.1

Le system (3.1) est stable au sense d'Ulam-Hyers si on peut trouver un nombre réel $\tau_\varphi > 0$, tel que pour chaque solution $(x^{'}, y^{'}) \in X \times Y$ de l'inégalité

$$\left| D_q^{\lambda_i} \left[D_q^{\delta_i} \left[D_q^{\vartheta_i} y(t) \right] \right] = P_{f,g}\left(t, x^{'}, y^{'}\right)(t) \right| \leq \sigma, \quad t \in [0,1], \tag{3.10}$$

il existe une solution $(x, y) \in X \times Y$ de système (3.1)vérifiant :

$$\| x^{'} - x, y^{'} - y \| \leq \tau_\varphi \sigma.$$

Théorème 3.3.1

Soient $f,g:[0,1]\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ et $h_1,h_2:\mathbb{C}([0,1],\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ sont des fonctions continues. On suppose que (H_1) est satisfaite si :

$$M<\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1+1),$$

et

$$M'<\Gamma_q(\lambda_2+\delta_2+\vartheta_2+1),$$

alors le prpblème (3.1) est stable au sens d'Ulam-Hyers.

Preuve

Soit $x^{'}\in X$ une solution de l'inégalité suivante :

$$\left|{}^{RL}D_q^{\lambda_1}\left[{}^{C}D_q^{\delta_1}\left[{}^{C}D_q^{\vartheta_1}x(t)\right]\right]-f\left(t,x(t),y(t)\right)\right|\leq\sigma,t\in[0,1], \tag{3.11}$$

et soit $x\in X$ l'unique solution du problème suivant :

$$\begin{cases} D_q^{\lambda_1}\left[D_q^{\delta_1}\left[D_q^{\vartheta_1}x(t)\right]\right]=v\left(t,x(t),y(t)\right),t\in[0,1],\\ \\ \alpha_1x(1)-\beta_1x(\omega_1)=\alpha_1x^{'}(1)-\beta_1x^{'}(\omega_1),{}^{C}D_q^{\vartheta_1}x(0)={}^{C}D_q^{\vartheta_1}x^{'}(0),{}^{C}D_q^{\delta_1}\left[{}^{C}D_q^{\vartheta_1}x(1)\right]={}^{C}D_q^{\delta_1}\left[{}^{C}D_q^{\vartheta_1}x^{'}(1)\right],\end{cases}$$

Par le lemme (3), on obtien :

$$x(t)=\frac{1}{\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1)}\int_0^{\tau}(t-qs)^{\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1-1}u_x(s)d_qs$$

$$-\frac{\Gamma_q(\lambda_1)t^{\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1-1}}{\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1)}c_1-\frac{t^{\vartheta_1}}{\Gamma_q(\vartheta_1+1)}c_2-c_3,$$

ainssi ona :

$$x^{'}(t)=\frac{1}{\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1)}\int_0^{\tau}(t-qs)^{\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1-1}u_{x^{'}}(s)d_qs$$

$$-\frac{\Gamma_q(\lambda_1)t^{\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1-1}}{\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1)}b_1-\frac{t^{\vartheta_1}}{\Gamma_q(\vartheta_1+1)}b_2-b_3,$$

tel que :$c_1=b_1,c_2=b_2,c_3=b_3$.

Par q-intégration de (3.11), on trouve

$$\left|x^{'}(t) - \frac{1}{\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1)}\int_0^{\tau}(t-qs)^{\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1-1}u_{x'}(s)d_qs + \frac{\Gamma_q(\lambda_1)t^{\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1-1}}{\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1)}b_1 - \frac{t^{\vartheta_1}}{\Gamma_q(\vartheta_1+1)}b_2 - b_3\right|$$

$$\leq \frac{\sigma}{\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1+1)}.$$

Pour tout $t \in [0,1]$, on a :

$$\begin{aligned}
\left|x^{'}(t)-x(t)\right| \leq & \left|x^{'}(t) - \frac{1}{\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1)}\int_0^{t}(t-qs)^{\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1-1}u_{x'}(s)d_qs\right. \\
& \left.+\frac{\Gamma_q(\lambda_1)t^{\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1-1}}{\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1)}b_1 - \frac{t^{\vartheta_1}}{\Gamma_q(\vartheta_1+1)}b_2 - b_3\right| \\
& +\left|\frac{1}{\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1)}\int_0^{t}(t-qs)^{\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1-1}u_{x'}(s)d_qs\right. \\
& -\frac{\Gamma_q(\lambda_1)t^{\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1-1}}{\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1)}b_1 + \frac{t^{\vartheta_1}}{\Gamma_q(\vartheta_1+1)}b_2 + b_3 \\
& -\frac{1}{\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1)}\int_0^{t}(t-qs)^{\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1-1}u_{x}(s)d_qs \\
& \left.+\frac{\Gamma_q(\lambda_1)t^{\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1-1}}{\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1)}c_1 - \frac{t^{\vartheta_1}}{\Gamma_q(\vartheta_1+1)}c_2 - c_3\right|
\end{aligned}$$

$$\leq \frac{\sigma}{\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1)} + \frac{1}{\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1)}\int_0^{t}(t-qs)^{\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1-1}\left|u_{x'}(s)-u_x(s)\right|d_qs$$

$$\leq \frac{\sigma}{\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1+1)} + \frac{M}{\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1+1)}\parallel x^{'}-x\parallel.$$

D'où

$$\parallel x^{'}-x\parallel\left(1-\frac{M}{\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1+1)}\right) \leq \frac{\sigma}{\Gamma_q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1+1)}.$$

Alors pour chaque $t \in [0,1]$

$$\left|x^{'}(t)-x(t)\right| \leq \frac{1}{\Gamma q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1+1)-M}\sigma.$$

De même on a

$$\left|y^{'}(t)-y(t)\right| \leq \frac{1}{\Gamma q(\lambda_2+\delta_2+\vartheta_2+1)-M'}\sigma.$$

Donc on a

$$\left|x'(t)-x(t),y'(t)-y(t)\right| \leq \left[\frac{1}{\Gamma q(\lambda_1+\delta_1+\vartheta_1+1)-M}+\frac{1}{\Gamma q(\lambda_2+\delta_2+\vartheta_2+1)-M'}\right]\sigma = \tau_\varphi \sigma.$$

Donc le système (3.1) est stable au sens d'Ulam-Hyers.

Exemple 5

On considère le système q-fractionnaire suivant :

$$\begin{cases} {}^{RL}D^{\frac{3}{2}}_{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left[{}^{C}D^{\frac{5}{4}}_{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left[{}^{C}D^{\frac{3}{7}}_{\frac{\sqrt{2}}{2}}x(t)\right]\right] = e+\dfrac{\cos^2 x(t)}{(e^{-t}+2)^2}+\dfrac{1}{20}y(t), t\in[0,1], \\ 7x(1)-\dfrac{1}{4}x\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{\sqrt{7}}{4}x, {}^{C}D^{\frac{3}{7}}_{\frac{\sqrt{2}}{2}}x(0)=0, {}^{C}D^{\frac{5}{4}}_{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left[{}^{C}D^{\frac{3}{7}}_{\frac{\sqrt{2}}{2}}x(1)\right]=0, \\ {}^{RL}D^{\frac{Ln(6)}{4}}_{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left[{}^{C}D^{\frac{\sqrt{3}}{2}}_{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left[{}^{C}D^{\frac{8}{9}}_{\frac{\sqrt{2}}{2}}y(\tau)\right]\right] = \dfrac{1}{\sqrt{4+t^2}}\sin t+\dfrac{x(t)}{25+t^3}+\dfrac{y(t)}{t+50}, t\in[0,1], \\ y(1)-5y\left(\dfrac{3}{5}\right)=\dfrac{3}{2}y, {}^{C}D^{\frac{8}{9}}_{\frac{\sqrt{2}}{2}}y(0)=0,, {}^{C}D^{\frac{\sqrt{3}}{2}}_{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left[{}^{C}D^{\frac{8}{9}}_{\frac{\sqrt{2}}{2}}y(1)\right]=0, \end{cases} \tag{3.12}$$

On commance par l'existence

il est clair que

$$\left|f(t,x(t),y(t)\right| \leq e+\frac{1}{9}|x|+\frac{1}{20}\left|y\right|,$$

$$\left|g(t,x(t),y(t)\right| \leq \frac{1}{2}+\frac{1}{25}|x|+\frac{1}{50}\left|y\right|,$$

$$|h_1(x)| \leq \frac{\sqrt{7}}{4}|x|,$$

et

$$\left|h_2(y)\right| \leq \frac{3}{2}\left|y\right|.$$

Donc $k_0=e$, $k_1=\frac{1}{9}$, $k_2=\frac{1}{20}$, $J_0=\frac{1}{2}$, $J_1=\frac{1}{25}$, $J_2=\frac{1}{50}$, $k=\frac{\sqrt{7}}{4}$, $J=\frac{3}{2}$, $\lambda=\frac{1}{2}$,

et $M'=0.989175$.

Alors le système (3.12) admet au moins une solution .

Maintenant on passe à l'unicité et la stabilité :

On a :

$$\left|f(t,x,y)-f(t,x_1,y_1)\right| \leq \frac{29}{180}\left[|x-x_1|+\left|y-y_1\right|\right] \qquad \forall t\in[0,1] \ \ et \ \ \forall x,y,x_1,y_1\in\mathbb{R}.$$

$$\left|g(t,x,y)-g(t,x_1,y_1)\right| \leq \frac{3}{50}\left[|x-x_1|+\left|y-y_1\right|\right] \qquad \forall t\in[0,1] \ \ et \ \ \forall x,y,x_1,y_1\in\mathbb{R}.$$

$$|h_1(x) - h_1(x_1)| \leq \frac{\sqrt{7}}{4} |x - x_1| \qquad\qquad \forall x, x_1 \in ([0,1], \mathbb{R}).$$

$$\left|h_2(y) - h_2(y_1)\right| \leq \frac{3}{2} \left|y - y_1\right| \qquad\qquad \forall y, y_1 \in ([0,1], \mathbb{R}).$$

Par calcul simple, on trouve $\mu = 0.757$,

donc $\mu < 1$.

Aussi on a

$$\left|x^{'}(t) - x(t), y(t) - y^{'}(t)\right| \leq 0.622\sigma.$$

Alors (H_1) est satisfaite, d'où toutes les hypothèses du théorème (3.2.1) sont satisfaites, par conséquent le système (3.12) possède une solution unique, et par le théorème de stabilité, le système (3.12) est stable au sense d'Ulam-Hyers.

Bibliographie

[1] *Abdul Hamid Ganie, Mohamed Houas, Mashael M.Albaidani, Dowlath Fathima, Coupled system of three sequential Caputo fractional differential equations : Existence and stability analysis, Math.Meth.Appl.Sci.(2023),1-14.DOI 10.1002/mma.9278.*

[2] *Bashir Ahmed, Sotiris K.Ntouyas, Ahmed Alsaedi, On a coupled nonlocal and integral boundary conditions, Chaos, Solitions and fractals 83 (2016) 234-241 .*

[3] *Beddani Hayet, Etude des systèmes différentiels fractionnaires impliquants la q-dérivée de Caputo, 2016.*

[4] *Jinrong Wang, Yong Zhou, Milan Medved, Existence and stability of fractional differential equations with Hadamard derivative, topological methods in nonlinear analysis volum 41, no 1,2013, 133-133.*

[5] *Houas Mohamed, Francisco Martinez, Mohammed Esmael Samei, Mohammed K.A.Kaabar, Uniqueness and Ulam-HyersRassias stability results for sequential fractional pantograph q-differential equations, Houas et al.Journal of Inqualities and Applications (2022) 2022 :93.*

[6] *Mohamed Houas, Existence and stability of fractional pantograph differential equations with Caputo-Hadamard type derivative, Turkish J. Ineq., 4 (2) (2020), Pages 29 –38 .*

[7] *Sotiris K.Ntouyas, Mustafa Obaid, A coupled system of fractional differential equations with nonlocal integral boundray conditions, Ntouya and Obaid Advances in Difference Equations 2012, 2012 :130.*

[8] *Wengui Yang, Existence Results for nonlinear fractional q-difference equations with nonlocal Riemann-Liouville q-Integral Boundary conditios, Filomat 30 :9(2016), 2521-2533.*

[9] *www.elsevier.com/locate/jnt .*

[10] *Ying sheng, Tiens Zhang. Some Results on the q-Calculus and fractional q-Differential Equations. Mathematics 2022, 10(1), 64 ; https :doi.org/10.3390/math10010064 .*

[11] *Z.Dahmani, L.Tabharit, Fractional order differential equations involving Caputo derivative. Theory Appl. Math. Camput. Sci. 4(1)(2014), 40-55.*

[12] *Z.Dahmani, S.Belarbi, New results for fractional evolution equations usinig Banach fixed point theorem. Int. J. Nonlinear Anal. Appl. 5(2)(2014), 22-30.*