REPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
Université de Djilali Bounaàma, Khemis-Miliana
Faculté des sciences et de la technologie
Département de Mathématique et informatique

Mémoire de fin d'étude

En vue de l'obtention du Diplôme de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématique

Spécialité : Analyse mathématique et applications

Thème

Existence et stabilité de solution des équations différentielles fractionnaires du pantographe avec deux dérivés de Caputo-Hadamard

Présenté par :

AICHOUBA Hocine

Devant le jury composé de:

Mr.	M.Bouderbala	MCB	Université Khemis-Miliana	Président
Mr.	M.Houas	MCA	Université Khemis-Miliana	Encadreur
Mr.	O.Benniche	MCA	Université Khemis-Miliana	Examinateur
Mr.	B.Chaouchi	MCA	Université Khemis-Miliana	Examinateur

Année universitaire : 2020/2021

REMERCEMENT

Tout d'abord, je remercie Allah le Tout Puissant de m'avoir donnée la patience, la volonté et l'énergie pour réaliser ce travail. Je remercier mon encadreur monsieur" HOUAS Mohamed" pour son encouragement, son aide, son soutien aux moments difficiles et son suivi pour terminer ce travail,et les membre du jury. Je remercie tout la famille et tous mes amis, les vieux et les nouveaux, qui sont loin ou proche. Vous étiez tous un cadeau de la vie pour moi, des maitres et maitresses.

DEDECACE

je dédie ce modeste travai à : A toute personne qui choisi le chemain des mathématique, A toute ma famille sans exception, A tous mes amis, A mon encadrant, A tous enseignants du palier primaire jusqu'un à palier universitaire, En fin à tous ceux que j'aime,et à tous je dédie ce mé-moire.

Résumé

Dans ce travail,nous étudions l'existence,l'unicité et stabilité Ulam-hyers de solutions des équations differontielles fractionnaires du pantographe avec deux dérivées de caputo-Hadamard .antsuren ce basant sur les théorèmes de points fixes nous montrons l'existence,l'unicité du probléme posé. Nous présentons et discutons égalment de différents types de stabilité Ulam pour notre probleme. Enfin, nous donnons quelques exemples illustratifs.

Abstract

In this work, we study existence, uniqueness and Ulam stability type of solutions of fractional pantograph equations involving two Caputo-Hadamard fractional.The existence and uniqueness of solutions is established by contraction mapping principale, while the existence of solutions is derived by leary-schauders alternative. We also present and discuss different types of Ulam-stability for our problem.Finally, we give some illustrative examples.

Table des matières

INDEX DES NOTATIONS

$\mathbf{R}$	:= Ensemble des nombres réels
$\mathbb{R}^+$:	:= Ensemble des nombres réels positifs ou nuls.
C	:= Ensemble des nombres complexes.
$\mid . \mid$	:= Module d'un nombre complexe.
$\Gamma(.)$	:= Fonction Gamma d'Euler.
$\beta(.,.)$	:= La fonction Bêta.
$\Vert . \Vert_\infty$	:= Norme infinie
$L^p[a,b]$	:= Espace des fonctions mesurables de puisance $p \in [0,+\infty)$ intégrables.
I_a^α	:= Intégrale fractionnaire an sens de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha > 0$.
${}_H I_a^\alpha$	:= Intégrale fractionnaire an sens de Hadamard d'ordre $\alpha > 0$.
${}_H D^\alpha$	:= Dérivée fractionnaire au sens de Hadamard d'ordre $\alpha > 0$.
${}^C D^\alpha$	:= Dérivée fractionnaire au sens de Capato d'ardre $\alpha > 0$.
${}_H^C D^\alpha$	:= Dérivée fractionnaire au sens de Caputo-Hadamard d'ordre $\alpha > 0$.

Introduction générale :

Le pantographe est un système mécanique monter sur le toit du tramway qui est automatiquement relevé à la hauteur de la caténaire pour collecter l'énergie électrique via le contact mécanique entre ses bandes de contact et le fil de contacte de la caténaire.

Bien qu'il existe plusieurs types de pantographes, ils partagent les mêmes principes de fonctionnement.

Le fonctionnement doit être régulier sans perte de contact ou sans induire une force de contact excessive dans le fil de contact.

Le système doit également répondre de manière dynamique aux fréquences avec les quelles il est excité, non seulement pour éviter une usure excessive ou un manque de contact, mais aussi pour répondre au changement de hauteur de la caténaire lors du passage dans des tunnels, des viaducs ou d'autres endroits spéciaux.

Le pantographe est un élément d'une importance vitale et doit donc répondre à une série de critères garantissant un comportement optimal, comme une structure adaptée à l'installation, c'est-à-dire adaptée aux variations et aux contraintes typiques de chaque ligne, un bon comportement et une bonne résistance aux conditions de ligne et d'environnement, ainsi qu'un entretien facile qui n'implique pas de dépenses inutiles ou excessives[1, 3, 4, 10, 8].

La dérivée fractionnaire au sens Caputo-Hadamard est due à Jarad en 2012[8, **?**] , sa formule est obtenue à partir de la définition de la dérivation de Hadamard, en permutant l'opérateur d'intégration et celui de la dérivation.

L'avantage le plus important de la dérivée de Caputo-Hadamard est qu'elle peut être appliquée à des systèmes avec n'importes quelles conditions initiales, contrairement à celle de Hadamard qui impose la présence de la condition initiale nulle au point 1[8, 4] .

La théorie des équations différentielles fractionnaires est l'un les plus importants champs d'applications de la théorie du calcul fractionnaire, en effet de nombreux phénomènes se modélisent par des équations différentielles fractionnaires[3, 10, 8].

Ce mémoire est organisé de la manière suivante :

Le premier chapitre est consacré aux définitions et notions générales qu'on aura besoin dans la suite du travail.

Dans le deuxième chapitre,on s'intéresse à l'étude de l'existence et l'unicité de solutions de problème fractionnaire du pantographe avec deux dérivées fractionnaire au sens de Caputo-Hadamad suivante :

$$\begin{cases} {}_H^C D^{\alpha} \left({}_H^C D^{\beta} + \gamma \right) x(t) = f(t, x(t), x(\lambda t)), t \in [1, T], \gamma \in \mathbb{R}, 0 < \lambda < 1 \\ x(1) = \theta, \quad x(T) = \vartheta, \quad \theta, \vartheta \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{1}$$

Où ${}_H^C \mathcal{D}^{\alpha}, {}_H^C \mathcal{D}^{\beta}$ sont des dérivées fractionnaires au sens de Caputo-Hadamard d'ordre α et β respectivement, θ est une constante positive, $f : [1, e] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction continue.

Le chapitre trois est cosacré à l'étude de la stabilité de la solution du problème fractionnaire du pantographe.

Chapitre 1

Préliminaires :

Dans ce chapitre, on rappelle quelque définitions ,notations,proprétïes sur les différentes approches de la dérivation fractionnaire. dans ce qui suit, on s'intéresse particulièrement à définir des notations fondamentales et quelques théorèmes importants dans la théorie de point fixe.

1.1 Fonctions spécifiques

Dans ce paragraphe nous introduisons les fonctions Gamma et Bêta, qui seront utilisées dans ce qui suit, Ces deux fonctions jouent un rôle très important dans la théorie du calcul fractionnaire.

1.1.1 Fonction Gamma

La fonction factorielle

Tout d'abord, on commence cette section par donner une résultat classique très utilisée :

Proposition 1.1.

pour tout entier $n \in \mathbb{N}$

$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = n! \tag{1.1}$$

Démonstration. On calcule les valeurs de certaines intégrales. Pour $\alpha > 0$, on a :

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} dx = \left[-\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha x} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{\alpha} \ . \tag{1.2}$$

On dérive les deux membres de l'équation (1.2) par rapport à α, on trouve :

$$\int_0^{+\infty} -x e^{-\alpha x} dx = -\frac{1}{\alpha^2}.$$

Ce qui donne :

$$\int_0^{+\infty} x e^{-\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha^2} \tag{1.3}$$

Maintenant, on dérive (1.3) par rapport à α, on trouve :

$$\int_0^{+\infty} x^2 e^{-\alpha x} dx = \frac{2}{\alpha^3}.$$

Pour la dérivée d'ordre 3, on a :

$$\int_0^{+\infty} x^2 e^{-\alpha x} dx = \frac{2 \times 3}{\alpha^4} = \frac{3!}{\alpha^4}.$$

Par récurrence on aura donc :

$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-\alpha x} dx = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}.$$

Pour $\alpha = 1$, on trouve :

$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = n!.$$

Définition 1.1. *[10] (la fonction Gamma)*

La fonction Gamma d'Euler est tout simplement la généralisation de la notion de factoriel d'un entier à tous les nombres réels ou complexes.

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx \quad , \alpha \in \mathbb{C} \quad \textit{et} \quad \mathrm{Re}(\alpha) > 0. \tag{1.4}$$

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha), \quad \mathrm{Re}(\alpha) \geq 0$$

.

$$\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1 \textit{ et } \Gamma(-m) = +\infty \textit{ pour tout } m \in \mathbb{N}$$

.

Exemple 1.1.

1. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{4^n n!}$.
2. $\Gamma(n+1) = n!, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Ce qui permet de dire que la fonction Gamma généralisé la notion de factoriel.

Exemple 1.2. *On a :* $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$. *En effet, par définition on a :*

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-x} dx.$$

On pose $x = y^2$, *alors :*

$$dx = 2ydy,$$

d'où

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{y} e^{-y^2} 2ydy = 2\int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy$$

Maintenant, on calcule $\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2$:

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = \left[2\int_0^{+\infty} e^{-y^2}dy\right]^2.$$

grâce à Fubini

$$= \left[2\int_0^{+\infty} e^{-y^2}dy\right]\left[2\int_0^{+\infty} e^{-r^2}dt\right]$$
$$= 4\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-\left(t^2+y^2\right)}dtdy.$$

On pose

$$\begin{cases} t = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}, r \in \left[0, +\infty\right[, \quad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

On aura

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = 4\int_{\theta=0}^{\pi/2}\int_{r=0}^{+\infty} e^{-r^2+}rdrd\theta = 4\int_{\theta=0}^{\pi/2}\left[-\frac{e^{-r^2}}{2}\right]_0^{+\infty} d\theta$$
$$= 4\left[-\frac{e^{-r^2}}{2}\right]_0^{+\infty}\int_{\theta=0}^{\pi/2} d\theta = 4 * \frac{1}{2} * \frac{\pi}{2} = \pi$$
$$\Longrightarrow \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

1.1.2 Fonction Bêta

Définition 1.2. *[10] On appelle fonction Bêta la fonction définie par :*

$$\beta(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt, \quad p, \quad q \in \mathbb{C}. \tag{1.5}$$

Propriété 1.1. *[3] on a :*

$$\beta(p,q) = \beta(q,p)$$

1.1.3 La relation entre la fonction Gamma et Bêta

Théorème 1.1.

La fonction Bêta est liée à la fonction Gamma par la relation suivante :

On a pour tout $p, \quad q \in \mathbb{C}$:

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \quad \mathrm{Re}(p) > 0, \quad \mathrm{Re}(q) > 0 \tag{1.6}$$

Démonstration. On a :

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} t^{p-1} e^{-t} dt.$$

On pose : $t = y^2 \Rightarrow dt = 2ydy$, donc :

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} t^{p-1} e^{-t} dt = 2\int_0^{+\infty} y^{2(p-1)} e^{-y^2} y dy = 2\int_0^{+\infty} y^{2p-1} e^{-y^2} dy.$$

Et donc :

$$\Gamma(q) = 2\int_0^{+\infty} x^{2q-1} e^{-x^2} dx.$$

Maintenant, on multiple les deux membres de deux équations et on passe en coordonnées polaire :

$$\begin{aligned}
\Gamma(p)\Gamma(q) &= 4\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} y^{2p-1} e^{-y^2} x^{2q-1} e^{-x^2} dxdy \\
&= 4\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} y^{2p-1} x^{2q-1} e^{-\left(x^2+y^2\right)} dxdy \\
&= 4\int_0^{+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (r\cos\theta)^{2q-1} (r\sin\theta)^{2p-1} e^{-r^2} r dr d\theta \\
&= 2\int_0^{+\infty} r^{2(p+q)-1} e^{-r^2} dr 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta)^{2q-1} (\sin\theta)^{2p-1} d\theta \\
&= \Gamma(p+q)\beta(p,q).
\end{aligned}$$

d'où le résultat. □

1.2 Intégration Fractionnaire

L'intégration d'ordre fractionnaire est une généralisation de la notion de l'intégration d'ordre entier.

1.2.1 Intégration Fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

L'intégration fractionnaire au sens de Riemann-Liouville est une généralisation à l'ordre α réel de la formule de Cauchy $(1789-1857)$, qui est obtenue comme suit :

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, on note

$$I^1 f(t) = \int_a^t f(s)ds$$

Une double intégration

$$I^2 f(t) = \int_a^t \int_a^s f(\mu)d\mu ds = \int_a^t (t-s)f(s)ds.$$

En répétant le processus $(\alpha - 1)$ fois, on obtient la relation suivante :

$$I^\alpha f(t) = \frac{1}{(\alpha-1)!} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s)ds$$

ainsi

$$I^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s)ds.$$

Et pour un ordre α plus général, on a la définition suivante :

Définition 1.3. *[8]*

L'opérateur intégral fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha \geq 0$; *pour une fonction* $f \in C([a;b))$ *est défini par :*

$$I_a^\alpha f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds, & \alpha > 0, \\ f(t), & \alpha = 0, \end{cases}$$

Remarque 1.1. *Si* $a = 0$; I_a^α *sera notée* I^α.

Proposition 1.2. *[10]* *Soit* $f \in C([a,b))$. *Pour* $\alpha > 0, \beta > 0$ *et* $A, B \in R$, *on a :*

1. $I_a^\alpha \left(I_a^\beta f\right)(t) = I_a^\beta \left(I_a^\alpha f\right)(t) = I_a^{\alpha+\beta} f(t)$.
2. $I_a^\alpha [Af(t) + Bg(t)] = AI_a^\alpha f(t) + BI_a^\alpha g(t)$.

1.2.2 Intégration Fractionnaire au Sens de Hadamard

Définition 1.4. *[?]*

Soit f *une fonction continue sur* $[a,b]$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *:*

avec $0 < a \leq b \leq \infty$ *et* $\alpha > 0$.

L'intégrale fractionnaire d'ordre α *au sens de Hadamard de* f *est définie par :*

$$I_a^\alpha = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \left(\log \frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} \frac{f(t)}{t} dt, \quad a < x < b. \tag{1.7}$$

Où Γ *est la fonction Gamma d'Euler.*

Quelques propriétés :

Proposition 1.3. *[8](La linéarité))*

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$,

$$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \forall \alpha > 0 \quad alors: \quad a^{\alpha}\left(\lambda_1 f(x) + \lambda_2 g(x)\right) = \lambda_1 I_a^{\alpha} f(x) + \lambda_2 I_a^{\alpha} g(x).$$

Pour la preuve on utilisant la linéarité de l'intégrale classique.

Proposition 1.4. *[10](Propriété de semi groupe)*

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue,

$$\begin{aligned} f :\in L_p([a,b])\forall\alpha, \quad \beta \in \mathbb{R}_+^*; I_a^{\alpha} I_a^{\beta} f(x) &= I_a^{\alpha+\beta} f(x) \\ &= I_a^{\beta} I_a^{\alpha} f(x). \end{aligned} \tag{1.8}$$

Démonstration. : $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$ on a :

$$I_a^{\alpha} I_a^{\beta} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \int_a^t \left(\log\frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} \left(\log\frac{t}{s}\right)^{\beta-1} f(s) \frac{ds}{s}\frac{dt}{t}. \tag{1.9}$$

On remarque que : $a \leq t \leq x$, et $a \leq s \leq t$. Donc on prend $s \leq t \leq x$. puis on pose le changement de variable :

$$y = \frac{\log\frac{t}{s}}{\log\frac{x}{t}}. \tag{1.10}$$

On obtient alors :

$$I_a^{\alpha} I_a^{\beta} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \left[\int_s^t \left(\log\frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} \left(\log\frac{t}{s}\right)^{\beta-1} f(s)\frac{dt}{t}\right] \frac{ds}{s}. \tag{1.11}$$

On remplace (1.10)dans (1.11), on trouve :

$$\int_a^x \left[\int_s^t \left(\log\frac{x}{t}\right)^{\alpha-1}\left(\log\frac{t}{s}\right)^{\beta-1} f(s)\frac{dt}{t}\right] = \int_0^1 \left[\log x - y\log\frac{x}{s} - \log s\right]^{\alpha-1}\left[\log\frac{x}{s}\right.$$

$$\left. + \operatorname{logs} - \log s\right]^{\beta-1}\log\left(\frac{x}{s}\right) dy.$$

$$= \int_0^1 \left((1-y)^{\alpha-1}y^{\beta-1}\left(\log\frac{x}{s}\right)^{\alpha+\beta-1} dy\right.$$

$$= B(\alpha,\beta)\left(\log\frac{x}{s}\right)^{\alpha+\beta-1}$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\left(\log\frac{x}{s}\right)^{\alpha+\beta-1}$$

Égalité ((1.9)) devient :

$$\begin{aligned} I_a^\alpha I_a^\beta f(x) &= \frac{B(\alpha,\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x \left(\log\frac{x}{s}\right)^{\alpha+\beta-1}\frac{f(s)}{s}ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_a^x \left(\log\frac{x}{s}\right)^{\alpha+\beta-1}\frac{f(s)}{s}ds \\ &= I_a^{\alpha+\beta} f(x). \end{aligned}$$

De la même manière, on trouve :

$$I_a^\alpha I_a^\beta f(x) = I_a^{\alpha+\beta} f(x).$$

D'où le résultat. □

Exemple 1.3. *Soit* $\alpha > 0, \beta > 0$ *et* $f(t) = \left(\log\left(\frac{t}{a}\right)\right]^{\beta-1}$

$$I_a^\alpha f(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\left(\log\left(\frac{t}{a}\right)\right]^{\alpha+\beta-1}. \tag{1.12}$$

En effet,

$$I_a^\alpha \left(\log\left(\frac{t}{a}\right)\right)^{\beta-1} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_t^a \left(\log\left(\frac{t}{s}\right)\right)^{\alpha-1}\left(\log\left(\frac{s}{a}\right)\right)^{\beta-1}\frac{ds}{s}. \tag{1.13}$$

Effectuant le changement de variable

$$u = \frac{\left(\log \frac{s}{a}\right)}{\left(\log \frac{t}{a}\right)}. \tag{1.14}$$

Alors (1.13) devient

$$I_a^\alpha \left(\log\left(\frac{t}{a}\right)\right)^{\beta-1} = \frac{\left(\log\left(\frac{t}{a}\right)\right)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} u^{\beta-1}. \tag{1.15}$$

En utilisant la définition (1.4) et la propriété (1.1) qui devient :

$$\begin{aligned} I_a^\alpha f(t) &= \frac{B(\alpha,\beta)}{\Gamma(\alpha)} \left(\log\left(\frac{t}{a}\right)\right)^{\alpha+\beta-1} \\ &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \left(\log\left(\frac{t}{a}\right)\right)^{\alpha+\beta-1} \end{aligned}$$

1.3 Dérivation fractionnaire

1.3.1 Dérivé fractionnaire au sens de Caputo

Définition 1.5. *[?]*

Soit $\alpha > 0, n = [\alpha] + 1$.

La dérivée fractionnaire de Caputo à gauche d'ordre α *de* f *définie par :*

$$\begin{aligned} \forall t \in [a,b], \quad \left({}^C\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha} f\right)(t) &= \left(I_{a^+}^{n-\alpha} f^{(n)}\right)(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau. \end{aligned} \tag{1.16}$$

Définissons aussi son analogue à droit.

La dérivée fractionnaire de Caputo à droite d'ordre α *de* f *définie par :*

$$\begin{aligned} \forall t \in [a,b], \quad \left({}^C\mathcal{D}_{b^-}^{\alpha} f\right)(t) &= \left(I_{b^-}^{n-\alpha} f^{(n)}\right)(t) \\ &= \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_t^b (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau \end{aligned} \tag{1.17}$$

Remarque 1.2. *De telles définitions ne se recollent pas correctement aux dérivé classique :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \begin{cases} {}^C\mathcal{D}_{a^+}^{n} f(t) = f^{(n)}(t) - f^{(n)}(a) \\ \\ {}^C\mathcal{D}_{b^-}^{n} f(t) = (-1)^n \left(f^{(n)}(t) - f^{(n)}(a)\right) \end{cases} \tag{1.18}$$

Le résultat suivant montre qu'elles approchent les dérivées classique par limites inférieure.

Lemme 1.1. *[8] Soit* $\alpha \in \mathbb{R}^+ -$ *Net* $n = [\alpha] + 1$. *si* $f \in AC^n([a,b])$

alors :

$$\lim_{\alpha \to n} \mathcal{D}_{a^+}^{n} f(t) \quad = f^{(n)}(t) \tag{1.19}$$

$$\lim_{\alpha \to n} \mathcal{D}_{b^-}^{n} f(t) \quad = (-1)^n f^{(n)}(t). \tag{1.20}$$

Proposition 1.5. *Pour* $\alpha \geq 0, \beta > 0$ *on a*

1. $\left({}^{c}\mathcal{D}_{a^+}^{n} (t-a)^{\beta-1}\right)(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(t-a)^{\beta-\alpha-1}, \beta > \alpha$
2. $\left({}^{c}\mathcal{D}_{b^-}^{n} (b-t)^{\beta-1}\right)(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(b-t)^{\beta-\alpha-1}, \beta > \alpha$

Démonstration. 1. Posons $f(t) = (t-a)^{\beta-1}$, On a :

$$\left({}^{c}\mathcal{D}_{a^+}^{n} f\right)(t) = \mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha} f^{n}(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau$$

et

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^n (t-a)^{\beta-1} = (\beta-1)(\beta-2)\ldots(\beta-1-(n-1))(t-a)^{\beta-1-n}.$$

$$= (\beta-1)(\beta-2)\ldots(\beta-n)(t-a)^{\beta-n-1}$$

D'où

$$\left({}^{c}\mathcal{D}_{a^+}^{n} f\right)(t) = \frac{(\beta-1)(\beta-2)\ldots(\beta-n)}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1}(\tau-a)^{\beta-n-1}.$$

Posons

$$\begin{aligned}
\tau - a =& s(t-a) \\
&= \frac{(\beta-1)(\beta-2)\ldots(\beta-n)}{\Gamma(n-\alpha)}(t-a)^{\beta-\alpha-1} \int_0^1 (1-s)^{n-\alpha-1} s^{\beta-n-1} ds \\
&= \frac{(\beta-1)(\beta-2)\ldots(\beta-n)}{\Gamma(n-\alpha)}(t-a)^{\beta-\alpha-1} B(n-\alpha, \beta-n) \\
&= \frac{(\beta-1)(\beta-2)\ldots(\beta-n)\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n)}(t-a)^{\beta-\alpha-1} \\
&= \left| B(n-\alpha, \beta-n) = \frac{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n)}{\Gamma(\beta-\alpha)} \right| \\
&= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(t-a)^{\beta-\alpha-1}.
\end{aligned}$$

2. De même manière

□

Remarque 1.3. *Pour* $\lambda = \beta - 1, a = 0$ *on a :*

$$
{}^{C}\mathcal{D}_0^{\alpha} t^{\lambda}(t) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda-\alpha+1)} t^{\lambda-\alpha}, \ si \quad \lambda \notin \{0,1,2,\ldots,n-1\}, \lambda > -1, \\ 0 \quad si \quad \lambda \in \{0,1,2,\ldots,n-1\}, \end{cases}
$$

i.e

$$
{}^{C}\mathcal{D}_0^{\alpha} t^{m}(t) = 0, m \in \{0,1,2,\ldots,n-1\}.
$$

1.3.2 Dérivée fractionnaire au sens de Hadamard

Soit $[a,b]$ une intervalle de $\mathbb{R}$, et on a la fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ et $\delta = t\frac{d}{dt}$

et

$$
AC_{\delta}^{n}[a,b] = \left\{ f : [a,b] \to C : \delta^{n-1} f(t) \in AC[a,b], \delta = t\frac{d}{dt} \right\}
$$

Définition 1.6. *[8]*

Soit $\alpha > 0$ *et* $n = [\alpha] + 1$ *Les dérives fractionnaires de Hadamard à gauche et à droite d'ordre* α *de* f *sont définies par :*

$$
\begin{aligned}
\left({}_{H}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha} f\right)(t) &= (\delta)^n \left(\mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha} f\right)(t) \\
&= \left(t\frac{d}{dt}\right)^n \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \left(\log\frac{\tau}{t}\right)^{n-\alpha+1} \frac{f(\tau)}{\tau} d\tau, \quad (t > a),
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
\left({}_{H}\mathcal{D}_{b^-}^{\alpha} f\right)(t) &= (-\delta)^n \left(\mathcal{I}_{b^-}^{n-\alpha} f\right)(t) \\
&= \left(-t\frac{d}{dt}\right)^n \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_t^b \left(\log\frac{\tau}{t}\right)^{n-\alpha+1} \frac{f(\tau)}{\tau} d\tau, \quad (t < b).
\end{aligned}
$$

Proposition 1.6. *[8]* *Si* $\alpha > 0, \beta > 0$ *alors :*

1. $\left({}_{H}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha} \left(\log\frac{t}{a}\right)^{\beta-1}\right)(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} \left(\log\frac{t}{a}\right)^{\beta-\alpha-1}, \beta > \alpha$

2 $\cdot$ $\left({}_{H}\mathcal{D}_{b^-}^{\alpha} \left(\log\frac{b}{t}\right)^{\beta-1}\right)(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} \left(\log\frac{b}{t}\right)^{\beta-\alpha-1}, \beta > \alpha$

En particulière, Si $\beta = 1$, On a :

1. $\left({}_H\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}1\right)(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\log\frac{t}{a}\right)^{-\alpha}$

2 $\cdot \left({}_H\mathcal{D}^{\alpha}_{b-}1\right)(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\log\frac{b}{t}\right)^{-\alpha}$.

Lemme 1.2. *[11] Soit $\alpha > 0$ et $n = [\alpha] + 1$, Si $f \in AC^n_{\delta}[a, b]$, alors :*

$$\left({}_H\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}f\right)(t) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\left(\delta^k f\right)(a)}{\Gamma(1+k-\alpha)}\left(\log\frac{t}{a}\right)^{k-\alpha} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^t\left(\log\frac{\tau}{t}\right)^{n-\alpha-1}\left(\delta^n f\right)(\tau)d\tau$$

et

$$\left({}_H\mathcal{D}^{\alpha}_{b-}f\right)(t) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^n\left(\delta^k f\right)(a)}{\Gamma(1+k-\alpha)}\left(\log\frac{b}{t}\right)^{k-\alpha} + \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)}\int_b^t\left(\log\frac{\tau}{t}\right)^{n-\alpha-1}\left(\delta^n f\right)(\tau)d\tau$$

En particulière, Si $0 < \alpha < 1$, alors pour $f \in AC[a, b]$,

$$\left({}_H\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}f\right)(t) = \frac{f(a)}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\log\frac{t}{a}\right)^{-\alpha} + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^t\left(\log\frac{t}{a}\right)^{-\alpha}\frac{f'(\tau)}{\tau}d\tau$$

Et

$$\left({}_H\mathcal{D}^{\alpha}_{b-}f\right)(t) = \frac{f(b)}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\log\frac{b}{t}\right)^{-\alpha} - \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_t^b\left(\log\frac{\tau}{a}\right)^{-\alpha}\frac{f'(\tau)}{\tau}d\tau$$

Proposition 1.7. *[8] Soit $\alpha > 0$, et $\beta > 0$: Si $1 \leq p \leq \infty$,alors, pour $f \in L^p(a, b)$*

$${}_H\mathcal{D}^{\beta}_{a+}\mathcal{I}^{\alpha}_{a+}f = \mathcal{I}^{\alpha-\beta}_{a+}f \quad \text{et} \quad {}_H\mathcal{D}^{\beta}_{b-}\mathcal{I}^{\alpha}_{b-}f = \mathcal{I}^{\alpha-\beta}_{b-}f.$$

En particulière, $\beta = m \in \mathbb{N}$, alors :

$${}_H\mathcal{D}^{m}_{a+}\mathcal{I}^{\alpha}_{a+}f = \mathcal{I}^{\alpha-m}_{a+}f \text{ et } {}_H\mathcal{D}^{m}_{b-}\mathcal{I}^{\alpha}_{b-}f = \mathcal{I}^{\alpha-m}_{b-}f.$$

Proposition 1.8. [8] *Soit $\alpha > 0$ et, $1 \leq p \leq \infty$, donc pour $f \in L^p(a,b)$*

$$ {}_H\mathcal{D}^{\alpha}_{a^+}\mathcal{I}^{\alpha}_{a^+} f = f \quad (c \leq 0). $$

$$ {}_H\mathcal{D}^{\alpha}_{b^-}\mathcal{I}^{\alpha}_{b^-} f = f \quad (c \leq 0). $$

1.3.3 Dérivé fractionnaire au sens de Caputo-Hadamard

On définie les modification du type Caputo des dérivés fractionnaire de Hadamard comme suite :

Définition 1.7. [?]

Soit $\alpha \geq 0$ et $n = [\alpha] + 1$, si $f \in AC^n_\sigma$.

Les dérivées fractionnaires de Caputo-Hadamard à gauche et à droite d'ordre α de f sont définies par :

$$ \begin{aligned} \left({}^C_H\mathcal{D}^{\alpha}_{a^+} f\right)(t) &= \mathcal{I}^{n-\alpha}_{a^+}\delta^n f(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \left(\log\frac{t}{\tau}\right)^{n-\alpha+1} \left(\tau\frac{d}{d\tau}\right)^n f(\tau)\frac{d\tau}{\tau}, (t > a), \end{aligned} \tag{1.21} $$

tel que $\delta = t\frac{d}{dt}$ et $\delta^0 f(t) = f(t)$, et

$$ \begin{aligned} \left({}^C_H\mathcal{D}^{\alpha}_{b^-} f\right)(t) &= (-1)^n I^{n-\alpha}_{b^-}\delta^n f(t) \\ &= \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_t^b \left(\log\frac{t}{\tau}\right)^{n-\alpha+1} \left(\tau\frac{d}{d\tau}\right)^n f(\tau)\frac{d\tau}{\tau}, (t < b). \end{aligned} \tag{1.22} $$

Si $\alpha \in \mathbb{N}$, alors :

$$ \left({}^C_H\mathcal{D}^{\alpha}_{a^+} f\right)(t) = \delta^n f(t) \quad \text{et} \quad \left({}^C_H\mathcal{D}^{\alpha}_{b^-} f\right)(t) = (-1)^n\delta^n f(t). $$

Exemple 1.4. *On considère la fonction f définie par :*

$$ f : t \to \left(\log\frac{t}{a}\right)^{\beta} $$

On a :

$$ {}_H^C\mathcal{D}_a^{\alpha}\left(\log\frac{t}{a}\right)^{\beta}=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^t\left(\log\frac{t}{a}\right)^{n-\alpha-1}\delta^n\left(\log\frac{s}{a}\right)^{\beta}\frac{ds}{s}. $$

Si on prend $\beta=\frac{3}{2},\alpha=\frac{1}{2}$ *et* $n=1$ *alors :*

$$ \delta^n\left(\log\tfrac{s}{a}\right)^{\beta}=\delta^1\left(\log\tfrac{s}{a}\right)^{\frac{3}{2}}=\frac{3}{2}\left(\log\tfrac{s}{a}\right)^{\frac{1}{2}}, $$

et

$$ {}_H^C\mathcal{D}_a^{\frac{1}{2}}\left(\log\frac{t}{a}\right)^{\frac{3}{2}}=\frac{\frac{3}{2}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int_a^t\left(\log\frac{t}{a}\right)^{1-\frac{1}{2}-1}\left(\log\frac{s}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{ds}{s}. $$

Par changement de variable $v=\frac{\log\frac{s}{a}}{\log\frac{t}{a}}$, *on obtient :*

$$ \begin{aligned} {}_H^C\mathcal{D}_a^{\frac{1}{2}}\left(\log\frac{t}{a}\right)^{\frac{3}{2}} &=\frac{\frac{3}{2}\left(\log\frac{t}{a}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int_1^1 v^{\frac{3}{2}}(1-v)^{\frac{1}{2}}dv \\ &=\frac{\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\left(\log\frac{t}{a}\right)}{\Gamma(2)}=\frac{3\sqrt{\pi}}{4}\left(\log\frac{t}{a}\right). \end{aligned} $$

Dans la suite,on donne une relation reliant la dérivée de Hadamard à celle de Caputo-Hadamard.

Théorème 1.2. *[8] Soit* $\alpha\geq 0$ *et* $n=[\alpha]+1$, *si* $f\in AC_\delta^m$. *Alors :*

$$ \left({}_H^C\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha}f\right)(t)={}^H\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha}\left[f(t)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\delta^k f(a)}{k!}\left(\log\frac{t}{a}\right)\right]^k(t), $$

et

$$ \left({}_H^C\mathcal{D}_{b^-}^{\alpha}f\right)(t)={}^H\mathcal{D}_{b^-}^{\alpha}\left[f(t)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k\delta^k f(b)}{k!}\left(\log\frac{b}{t}\right)\right]^k(t). $$

En particulière, Si $0<\alpha<1$,*On trouve :*

$$ \left({}^C\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha}f\right)(t)={}^H\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha}[f(t)-f(a)](t), $$

$$ \left({}^C\mathcal{D}_{b^-}^{\alpha}f\right)(t)={}^H\mathcal{D}_{b^-}^{\alpha}[f(t)-f(b)](t). $$

Lemme 1.3. *[8] Soit $\alpha > 0, n = [\alpha] + 1$ et $f \in C[a, b]$*

(i) *Si $\alpha \neq 0$ ou $\alpha \in \mathbb{N}$ Alors :* ${}^{C}_{H}\mathcal{D}^{\alpha}_{a^+}\left(\mathcal{I}^{\alpha}_{a^+} f\right)(t) = f(t), \quad {}^{C}_{H}\mathcal{D}^{\alpha}_{b^-}\left(\mathcal{I}^{\alpha}_{b^-} f\right)(t) = f(t).$

(ii) *Si $\alpha \in \mathbb{N}$ et $\alpha \neq 0$, alors :*

$$
\begin{aligned}
{}^{C}\mathcal{D}^{\alpha}_{a^+}\left(\mathcal{I}^{\alpha}_{a^+} f\right)(t) &= f(t) - \frac{\mathcal{I}^{(\alpha+1-n)}_{a^+} f(a)}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\log\frac{t}{a}\right)^{n-\alpha}. \\
{}^{C}\mathcal{D}^{\alpha}_{b^-}\left(\mathcal{I}^{\alpha}_{b^-} f\right)(t) &= f(t) - \frac{\mathcal{I}^{(\alpha+1-n)}_{b^-} f(b)}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\log\frac{b}{t}\right)^{n-\alpha}.
\end{aligned}
$$

Lemme 1.4. *[11] Soit $\alpha > 0$, et $f \in AC^n_\delta[a, b]$ ou $C^m_\delta[a, b]$. alors :*

$$
\begin{aligned}
\mathcal{I}^{\alpha}_{a^+}\left({}^{C}\mathcal{D}^{\alpha}_{b^-} f\right)(t) &= f(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\delta^k f(a)}{k!}\left(\log\frac{t}{a}\right)^{k} \\
\mathcal{I}^{\alpha}_{b^-}\left({}^{C}\mathcal{D}^{\alpha}_{b^-} f\right)(t) &= f(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k\delta^k f(b)}{k!}\left(\log\frac{b}{t}\right)^{k}.
\end{aligned}
$$

Proposition 1.9. *[3] Soit $\alpha \geq 0, n = [\alpha] + 1$ et $\beta > 0$. Alors :*

$$
\begin{aligned}
{}^{C}_{H}\mathcal{D}^{\alpha}_{a^+}\left(\log\frac{t}{a}\right)^{\beta-1} &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}\left(\log\frac{t}{a}\right)^{\beta-\alpha-1}, \beta > \alpha, \\
{}^{C}_{H}\mathcal{D}^{\alpha}_{b^-}\left(\log\frac{b}{t}\right)^{\beta-1} &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}\left(\log\frac{b}{t}\right)^{\beta-\alpha-1}, \beta > \alpha,
\end{aligned}
$$

et

$$
{}^{C}_{H}\mathcal{D}^{\alpha}_{a^+}\left(\log\frac{t}{a}\right)^{k} = 0 \quad et \quad {}^{C}_{H}\mathcal{D}^{\alpha}_{b^-}\left(\log\frac{b}{t}\right)^{k} = 0, \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1).
$$

Les dérivés fractionnaire de type Caputo-Hadamard peut être définie sur le demi-axe positif $\mathbb{R}^+$

On remplaçant a par 0 dans la formule (1.19) et b par 1 dans la formule (1.20) à condition que : $f(t) \in AC^n_\delta(\mathbb{R}^+)$ ou $f(t) \in C^n_\delta(\mathbb{R}^+)$, On obtient :

$$
\begin{aligned}
{}^{C}\mathcal{D}^{\alpha}_{0^+} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^t\left(\log\frac{t}{\tau}\right)^{n-\alpha-1}\delta^n\frac{f(\tau)}{\tau}d\tau \\
{}^{C}\mathcal{D}^{\alpha}_{-1} f(t) &= \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)}\int_t^{\infty}\left(\log\frac{\tau}{t}\right)^{n-\alpha-1}\delta^n\frac{f(\tau)}{\tau}d\tau
\end{aligned}
$$

1.4 Théorèmes du point fixe

Les équations différentielles fractionnaires sont considérées comme des équations différentielles non-linéaires, alors plusieurs théorèmes ont été utilisés pour résoudre ce type d'équations. L'un des méthodes les plus utilisées : les théorèmes du point fixe.

1.4.1 Définitions

Dans cette sections, nous présentons les définitions et quelques propriétés préliminaires qui sont utilisées dans ce mémoire.

Soit $\mathbf{J} = [1, T], T > 1$, notons $\mathrm{C}(\mathbf{J}, \mathbb{R})$ l'espace de Banach des fonctions continues définies de $\mathbf{J}$ dans $\mathbb{R}$, muni de la norme :

$$\|y\|_\infty = \sup\{|y(t)| \quad /t \in \mathbf{J}\},$$

où $\|.\|$ est une norme sur $\mathbb{R}$.

Définition 1.8. *[3]*

Soit E un espace vectoriel sur le corps des nombres réels $\mathbb{R}$, où sur le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$.On appelle norme sur E une application de E dans $\mathbb{R}_+$ notée $x \to \|x\|$ satisfaisant les conditions suivantes :

1. $\forall x \in E : \|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0_E$,

2. $\forall \lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C}) : \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$

3. $\forall x, y \in E : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Définition 1.9.

On appelle boule ouverte de centre a et de rayon r, l'ensemble notée $B(a;r)$ telle que :

$$B(a,r) = \{x \in E / \|x - a\| < r\}$$

Définition 1.10. *[2]*

On appelle boule fermée de centre a et de rayon r, l'ensemble notée $\bar{B}(a,r)$telle que :

$$\bar{B}(a,r) = \{x \in E / \|x - a\| \leq r\}$$

Définition 1.11. *[2]*

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés sur le même corps $\mathbb{K}$, alors l'espace produit $E \times F = \{(x,y)/x \in E \text{ et } y \in F\}$ est un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$ par l'une des normes suivantes :

1. $\|(x,y)\|_1 = \|x\|_E + \|y\|_F$,
2. $\|(x,y)\|_p = (\|x\|_E^p + \|y\|_F^p)^{\frac{1}{p}}, 1 \leq p \leq \infty$,
3. $\|(x,y)\|_\infty = \max\{\|x\|_E, \|y\|_F\}$.

Définition 1.12. *[3]*

On dit qu'un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|_E)$ est complet, ou que c'est un espace de Banach, si toute suite de Cauchy dans E est convergente.

Définition 1.13. *[8]*

On dit que A est une partie compacte de $(E, \|\cdot\|_E)$ si de toute suite de points de A , on peut extraire une sous-suite qui converge vers un élément de A.

Définition 1.14. *[8]*

Une partie A de $(E, \|\cdot\|_E)$ est dite relativement compact si son adhérence est compact.

Définition 1.15.

Soient E et F deux espace de Banach, et $A : E \longrightarrow F$ une application linéaire. On dit que A est borné si elle envoie les parties bornées de E sur des parties bornées de F.

Définition 1.16. *[8]*

Soit A un sous ensemble de $\mathrm{C}(\mathbf{J}, \mathbb{R})$, A est uniformément borné.

s'il existe une constante $k > 0$ telle que : $\|f(x)\| \leq k$ pour tout $x \in J$ et tout $f \in A$.

Définition 1.17. *[8]*

Soient E et F deux espaces de Banach. On appelle opérateur borné toute application linéaire continue de E dans F.

Définition 1.18. *[8]*

Soient E et F deux espaces de Banach et f une application définie de E à valeurs dans F

On dit que f est complètement continue si elle est continue et transforme tout borné de E en une ensemble relativement compact dans F.f est dite compact si $f(E)$ est relativement compact dans F.

Définition 1.19. *[10]*

Soit A un sous ensemble de $\mathrm{C}(\mathbf{J}, \mathbb{R})$, *L'ensemble A est équicontinue.*

C-à-d : pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout $t_1, t_2 \in \mathbf{J}$ et tout $f \in A$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$|t_1 - t_2| < \delta \Longrightarrow \|f(t_1) - f(t_2)\| \leq \varepsilon$$

Définition 1.20. *[3]*

Soit $(X, \|.\|)$ un espace vectorielle normé, une application $A : X \longmapsto X$ est dite contractante, s'il existe un nombre positif $k \in [0.1$ telle que $\forall x, y \in X$, on a :

$$\|Ax - Ay\| \leq k\|x - y\|$$

Définition 1.21. *[3]*

Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace vectorielle normé et $A : X \longmapsto X$ une application.

On appelle point fixe de A tout point $x \in X$: $Ax = x$.

1.4.2 Théorème d'existenc et d'unicité de solution :

Théorème 1.3. *[8](Théorème de point fixe de Banach)*

Soit X un espace de Banach, et $A : X \longmapsto X$ un opérateur contractant.

Alors A admet un point fixe unique.

c-à-d :

$\exists x \in X$ tel que $Ax = x$.

Théorème 1.4. *[3](Théorème de point fixe de Schaefer)*

Soit X un espace de Banach et $A : X \longmapsto X$ un opérateur complètement continue.

Si :

$$\Omega = \{x \in X : x = \lambda Ax, \forall \lambda \in]0, [\}1$$

est borné, alors A possède au moins une point fixe.

Théorème 1.5. *[3](Théorème de point fixe de schauder)*

Soit X un espace de Banach et M un convexe fermé borné de X et $A : M \longmapsto M$ un opérateur continue et compact alors A admet au moins un point fixe.

Théorème 1.6. *[5](L'alternative non linéaire de Leray-Schauder)*

Soit E un espace de Banach, C un sous-ensemble convexe fermé de E, U un sous-ensemble ouvert de C et $0 \in U$. l'opérateur $\phi : \bar{U} \to C$ est continue et compact (c'est-à-dire que $\phi(\bar{U})$ est un sous-ensemble relativement compact de C).

Alors :

1. *l'application ϕ admet un point fixe dans $\bar{U}$, ou bien*

2. *Il existe $x \in \partial U$ et $\sigma \in]0, 1[$ avec, $x = \sigma T x$.*

Théorème 1.7. *[5] (Théorème de point fixe de krasnosselski)*

Soit X un espace de Banach et M un sous ensemble fermé borné et convexe de X. On suppose que A_1, A_2 sont deux opérateur de X dans X satisfaisants :

1. *$A_1 x + A_2 y \in M, \forall x, y \in M$*

2. *A_1 est complètement continue,*

3. *A_2 est contractante.*

Alors il existe au moins un élément $z \in M$ tel que : $A_1 z + A_2 z = z$.

Théorème 1.8. *[3] (Théorème de Arzela-Ascoli)*

Soit A un sous ensemble de $\mathrm{C}(\mathbf{J}, \mathbb{R})$*, A est relativement compact dans* $\mathrm{C}(\mathrm{J}, \mathbb{R})$ *si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :*

1. *L'ensemble A est uniformément borné.*

2. *L'ensemble A est équicontinue.*

3. *Pour tout $x \in J$ l'ensemble $\{f(x), f \in A\} \subset E$ est relativement compact.*

Chapitre 2

Existence et Unicité de solution des équations différentielles fractionnaires du pantographe avec deux dérivés de Caputo-Hadamard :

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'étude de l'existence et l'unicité de solution pour un problème fractionnaire du pantographe avec deux dérivées fractionnaires au sens de Caputo-Hadamard. Soit le problème suivant :

$$\begin{cases} {}_{H}^{C}D^{\alpha}\left({}_{H}^{C}D^{\beta}+\gamma\right)x(t)=f(t,x(t),x(\lambda t)), t\in[1,T], \gamma\in\mathbb{R}, 0<\lambda<1, \\ \\ x(1)=\theta, \quad x(T)=\vartheta, \quad \theta,\vartheta\in\mathbb{R}, \end{cases} \tag{2.1}$$

Avec ${}_{H}^{C}\mathcal{D}^{\alpha}, {}_{H}^{C}\mathcal{D}^{\beta}$ sont des dérivées fractionnaires au sens de Caputo-Hadamard d'ordre α et β respectivement, θ est une constante positive, $f:[1,e]\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ est une fonction continue. On va étudier L'existence et L'unicité de probleme fractionnaire.

2.2 Lemmes

Lemme 2.1. *[4] Soit $x \in C_\delta^n([a,b],\mathbb{R})$. Alors :*

$$ {}_H I^\alpha \left({}_H^C D^\alpha x \right)(t) = x(t) - \sum_{i=0}^{n-1} c_i (\log t)^i, c_i \in \mathbb{R}. \tag{2.2} $$

Avec : $C_\delta^n([a,b],\mathbb{R}) = \{h : [a,b] \to \mathbb{R} : \delta^{n-1} h \in C([a,b],\mathbb{R})\}$

Lemme 2.2.

Suppose que $h(t) \in C([1,T],\mathbb{R})$,

$$ {}_H^C D^\beta \left(H^C D^\alpha + \gamma \right) x(t) = h(t), t \in [1,T], 0 < \alpha, \beta \leq 1. \tag{2.3} $$

avec les condition : $x(1) = \theta, \quad x(T) = \vartheta.$

Alors, la solution de (2.1) est donnée par :

$$ \begin{aligned} x(t) =& \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s} \right)^{\alpha+\beta-1} h(s) \frac{ds}{s} - \frac{\gamma}{\Gamma(\beta)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s} \right)^{\beta-1} x(s) ds \\ & - \frac{(\log t)^\beta}{(\log T)^\beta} \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_1^T \left(\log \frac{T}{s} \right)^{\alpha+\beta-1} h(s) \frac{ds}{s} \right. \\ & \left. - \frac{\gamma}{\Gamma(\beta)} \int_1^T \left(\log \frac{T}{s} \right)^{\alpha+\beta-1} x(s) ds - \vartheta + \theta \right) + \theta \end{aligned} \tag{2.4} $$

Démonstration. En utilisant le lemme (2.1), on peut écrire :

$$ \begin{aligned} x(t) =& \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s} \right)^{\alpha+\beta-1} h(s) \frac{ds}{s} \\ & - \frac{\gamma}{\Gamma(\beta)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s} \right)^{\beta-1} x(s) ds + \frac{c_0}{\Gamma(\beta+1)} (\log t)^\beta + c_1, \end{aligned} \tag{2.5} $$

où $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$, on utilise les conditions, on trouve :

$$\begin{aligned} c_1 =& \theta \\ c_0 =& \frac{\Gamma(\beta+1)}{(\log T)^{\beta}} \left(\vartheta - \theta - \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_1^T \left(\log \frac{T}{s}\right)^{\alpha+\beta-1} h(s) \frac{ds}{s} \right. \\ & \left. + \frac{\gamma}{\Gamma(\beta)} \int_1^T \left(\log \frac{T}{s}\right)^{\beta-1} x(s) ds \right) \end{aligned}$$

En remplaçant les deux valeurs c_0 et c_1 dans (2.5), on trouve la solution (2.4). □

2.3 Existence et unicité de solution :

2.3.1 Unicité de la solution

Nous désignons par $X = C([1,T], \mathbb{R})$ l'espace de banach de toutes les fonctions continues de $[1,T]$ dans $\mathbb{R}$ associe par la norme définie par $\|x\| = \sup\{|x(t)| : t \in [1,T]\}$.

On définit l'opérateur $P : X \to X$ par :

$$\begin{aligned} Px(t) =& \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\alpha+\beta-1} f(s, x(s), x(\lambda s)) \frac{ds}{s} - \frac{\gamma}{\Gamma(\beta)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\beta-1} x(s) ds \\ & - \frac{(\log t)^{\beta}}{(\log T)^{\beta}} \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_1^T \left(\log \frac{T}{s}\right)^{\alpha+\beta-1} f(s, x(s), (\lambda s)) \frac{ds}{s} \right. \\ & \left. - \frac{\gamma}{\Gamma(\beta)} \int_1^T \left(\log \frac{T}{s}\right)^{\alpha+\beta-1} x(s) ds - \vartheta + \theta \right) + \theta. \end{aligned} \tag{2.6}$$

On va maintenant montre que P possède un point fixe unique. Pour cela, on va prouver que P est un opérateur contractant.

Théorème 2.1. *[4] Soit $f : [1,T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue . suppose :*

(H_1) : qu'il existes $k > 0$ tel que :

$$|f(t, x_1, x_2) - f(t, y_1, y_2)| \leq k (|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|), t \in [1,T], x_i, y_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2. \tag{2.7}$$

si l'inégalité est vérifie :

$$\frac{4k}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}(\log T)^{\alpha+\beta} < 1 - \frac{2|\gamma|}{\Gamma(\beta+1)}(\log T)^{\beta}.$$

Alors le problème (2.1) admet une solution unique sur $[1, T]$.

Démonstration. On définis

$$L = \sup_{t\in[1,T]} |f(t,0,0)| < \infty.$$

Supposons que :

$$r \geq \frac{\frac{2L}{\Gamma(\alpha+\beta+)}(\log T)^{\alpha+\beta} + 2|\theta| + |\vartheta|}{1 - \left[\frac{4k}{\Gamma(\alpha+\beta+)}(\log T)^{\alpha+\beta} + \frac{2}{\Gamma(\beta+1)}(\log T)^{\beta}\right]}.$$

Nous montrons que

$$PB_r \subset B_r,$$

avec $B_r = \{x \in X : \|u\| \leq r\}$. Pour $u \in B_r$, on a : (H_1) :

$$\begin{aligned} |f(t,x(t),x(\lambda t))| &\leq |f(t,x(t),x(\lambda t)) - f(s,0,0)| + |f(s,0,0)|, \\ &\leq 2k\|x\| + L \leq 2kr + L. \end{aligned} \tag{2.8}$$

En utilisant (2.8), on trouve :

$$\|Px\| \leq \tfrac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_1^t \left(\log\tfrac{t}{s}\right)^{\alpha+\beta-1}|f(s,x(s),u(\lambda s))|\tfrac{ds}{s} + \tfrac{|\gamma|}{\Gamma(\beta)}\int_1^t \left(\log\tfrac{t}{s}\right)^{\beta-1}|(s)|ds$$

$$\begin{aligned} &+ \frac{(\log t)^{\beta}}{(\log T)^{\beta}}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_1^T\left(\log\frac{T}{s}\right)^{\alpha+\beta-1}|f(s,u(s),u(\lambda s))|\frac{ds}{s}\right. \\ &\left.+\frac{|\gamma|}{\Gamma(\beta)}\int_1^T\left(\log\frac{T}{s}\right)^{\beta-1}|x(s)|ds + |\vartheta| + |\theta|\right) + |\theta| \\ &\leq \frac{2(\log T)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+)}(2kr+L) + \frac{2|\gamma|(\log T)^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}r + 2|\theta| + |\vartheta|, \end{aligned}$$

ainsi

$$\|Px\| \leq \left(\frac{4k}{\Gamma(\alpha+\beta+)}(\log T)^{\alpha+\beta} + \frac{2|\gamma|}{\Gamma(\beta+1)}(\log T)^{\beta}\right) r$$
$$+ \frac{2L}{\Gamma(\alpha+\beta+)}(\log T)^{\alpha+\beta} + 2|\theta| + |\vartheta| \leq r,$$

ce qui implique $PB_r \subset B_r$.

Maintenant, pour $x, y \in B_r$ et pour toute $t \in J$. On trouve :

$$\begin{aligned}
&|Px(t) - Py(t)| \\
\leq &\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_1^t \left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha+\beta-1} |f(s, x(s), x(\lambda s)) - f(s, y(s), y(\lambda s))| \frac{ds}{s} \\
&+ \frac{|\gamma|}{\Gamma(\beta)} \int_1^t \left(\log\frac{t}{s}\right)^{\beta-1} |x(s) - y(s)| ds \\
&+ \frac{(\log t)^{\beta}}{(\log T)^{\beta}} \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_1^T \left(\log\frac{T}{s}\right)^{\alpha+\beta-1} |f(s, x(s), x(\lambda s)) - f(s, y(s), y(\lambda s))| \frac{ds}{s}\right. \\
&\left.+ \frac{|\gamma|}{\Gamma(\beta)} \int_1^T \left(\log\frac{T}{s}\right)^{\alpha+\beta-1} |x(s) - y(s)| ds\right).
\end{aligned}$$

En utilisant l'hypothèse (H_1), on obtient :

$$\|P(x) - P(y)\| \leq \left(\frac{4k}{\Gamma(\alpha+\beta)}(\log T)^{\alpha+\beta} + \frac{2|\gamma|}{\Gamma(\beta+1)}(\log T)^{\beta}\right) \|x - y\|.$$

Il s'ensuit de la condition (2.7), que l'opérateur P est contractant. Donc P possède un point fixe unique qui est une solution unique du problme(2.1) . □

Exemple 2.1.

$$\begin{cases} {}^{C}_{H}D^{\frac{3}{4}}\left({}^{C}_{H}D^{\frac{2}{5}} + \frac{1}{10}\right)x(t) = \frac{1}{15}\sin(t)x(t) + \frac{1}{15}x\left(\frac{3}{4}t\right) + \frac{3}{7}, t \in [1, e], \\ \\ x(1) = 2, \quad x(e) = 3 \end{cases} \tag{2.9}$$

ou $\alpha = \frac{3}{4}, \beta = \frac{2}{5}, \gamma = \frac{1}{10}, \lambda = \frac{3}{4}$ *et* $f(t, x, y) = \frac{1}{15}\sin(t)x + \frac{1}{15}y + \frac{3}{7}$ *Pour* $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ *et*

$t \in [1, e]$, *On a :*

$$\begin{aligned} |f(t, x_1, y_1) - f(t, x_2, y_2)| &\leq \frac{1}{15}|\sin(t)|\, |x_1 - x_2| + \frac{1}{15}|y_1 - y_2| \\ &\leq \frac{1}{15}(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|)\,. \end{aligned}$$

L' hypothèses (H_1) *est vérifie si* $k = \frac{1}{15}$.

On peut montrer que :

$$\frac{4k}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}(\log T)^{\alpha+\beta} + \frac{2|\gamma|}{\Gamma(\beta+1)}(\log T)^{\beta} \simeq 0.47394 < 1.$$

D'après le théorème(2.1),on déduit que le problème fractionnaire admet unique solution dans $[1, e]$.

2.3.2 Existence de la solution

Théorème 2.2. *[5] Soit* $f : [1, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est une fonction continue . Suppose que :*

(H_2) : *Il existe des constantes* $\omega_i \geq 0 (i = 1, 2)$ *et* $\omega_0 > 0$ *telle que pour toute* $x, y \in \mathbb{R}$, *On a :*

$$|f(t, x, y)| \leq \omega_0 + \omega_1|x| + \omega_2|y|, \quad si \ \frac{4(\log T)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}\omega_1 + \frac{2|\gamma|(\log T)^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)} < 1, \tag{2.10}$$

Alors le problème (2.1) a au moins un solution dans J.

Démonstration.

Tout d'abord, Nous montrons que l'opérateur $P : X \to X$ est complètement continu. par continuité de la fonction f, il s'ensuit que l'opérateur P est continue. Soit $\Theta \subset X$ est borné. On put alors trouve une constante positive M telle que :

$$|f(t, x(t), x(\lambda t))| \leq M, \forall x \in \Theta.$$

Alors pour toute $x \in \Theta$ et par (H_2), On a :

$$
\begin{aligned}
\|Px\| \leq & \frac{M}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\alpha+\beta-1} \frac{ds}{s} + \frac{\gamma r}{\Gamma(\beta)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\beta-1} ds \\
& + \frac{(\log t)^\beta}{(\log T)^\beta} \left(\frac{M}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_1^T \left(\log \frac{T}{s}\right)^{\alpha+\beta-1} \frac{ds}{s} \right. \\
& \left. + \frac{\gamma r}{\Gamma(\beta)} \int_1^T \left(\log \frac{T}{s}\right)^{\alpha+\beta-1} ds + |\vartheta| + |\theta| \right) + |\theta|
\end{aligned}
$$

Par conséquent, on obtient :

$$
\|Px\| \leq \frac{2M(\log T)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} + \frac{2\gamma r(\log T)^\beta}{\Gamma(\beta+1)} + |\vartheta| + 2|\theta|.
$$

De l'inégalité ci -dessus, il s'ensuit que l'opérateur P est uniformément borné. Ensuite, nous montrons que P est equicontinu.

Soit $t_1, t_2 \in [1, T]$ avec $1 \leq t_1 < t_2 \leq T$.

Ensuite on a :

$$
\begin{aligned}
& |Px(t_2) - Px(t_1)| \\
\leq & \frac{M}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_1^{t_1} \left[\left(\log \frac{t_2}{s}\right)^{\alpha+\beta-1} - \left(\log \frac{t_1}{s}\right)^{\alpha+\beta-1} \right] \frac{ds}{s} + \frac{M}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_{t_1}^{t_2} \left(\log \frac{t_2}{s}\right)^{\alpha+\beta-1} \\
& + \frac{\gamma r}{\Gamma(\beta)} \int_1^{t_1} \left[\left(\log \frac{t_1}{s}\right)^{\beta-1} - \left(\log \frac{t_2}{s}\right)^{\beta-1} \right] \frac{ds}{s} + \frac{\gamma r}{\Gamma(\beta)} \int_{t_1}^{t_2} \left(\log \frac{t_2}{s}\right)^{\beta-1} \frac{ds}{s} \\
& + \frac{(\log t_1)^\beta - (\log t_2)^\beta}{(\log T)^\beta} \left(\frac{M(\log T)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} + \frac{\gamma r(\log T)^\beta}{\Gamma(\beta+1)} + |\vartheta| + |\theta| \right) \\
\leq & \frac{M}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} \left[(\log t_2)^{\alpha+\beta} - (\log t_1)^{\alpha+\beta} \right] \\
& + \frac{\gamma r}{\Gamma(\beta+1)} \left[(\log t_1)^\beta - (\log t_2)^\beta + 2\left(\log \frac{t_2}{t_1}\right)^\beta \right] \\
& + \frac{(\log t_1)^\beta - (\log t_2)^\beta}{(\log T)^\beta} \left(\frac{M(\log T)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} + \frac{\gamma r(\log T)^\beta}{\Gamma(\beta+1)} + |\vartheta| + |\theta| \right)
\end{aligned}
$$

Lorsque $t_2 - t_1 \to 0$, le côté droite de l'inégalité ci dessus tend a zero indépendamment de x.

Par conséquent, par le théorème de Arzelá-Ascoli l'opérateur P est completement continuous.

Enfin, on vérifiera que l'ensmble $\Omega = \{x \in X : x = \sigma P(x), 0 \leq \sigma \leq 1\}$ est borné.

Soit $x \in \Omega$,alors $x = \sigma P(x)$. Pour tout $t \in [1, T]$,on a : $x(t) = \sigma Px(t)$, Alors :

$$
\begin{aligned}
x(t) \leq &\sigma \Bigg(\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\alpha+\beta-1} |f(s, x(s), x(\lambda s))| \frac{ds}{s} + \frac{|\gamma|}{\Gamma(\beta)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\beta-1} |u(s)| ds \\
&+ \frac{(\log t)^\beta}{(\log T)^\beta} \Bigg(\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_1^T \left(\log \frac{T}{s}\right)^{\alpha+\beta-1} |f(s, x(s), x(\lambda s))| \frac{ds}{s} \\
&+ \frac{|\gamma|}{\Gamma(\beta)} \int_1^T \left(\log \frac{T}{s}\right)^{\alpha+\beta-1} x(s) ds + |\vartheta| + |\theta| \Bigg) + |\theta| \Bigg).
\end{aligned}
$$

D'après (H_2), on peut écrire :

$$
u(t) \leq \frac{2(\log T)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} (\omega_0 + 2\omega_1 \|x\|) + \frac{2\gamma(\log T)^\beta}{\Gamma(\beta+1)} \|x\| + 2|\theta| + |\vartheta|.
$$

Par conséquent,on trouve :

$$
\|x\| \leq \left(\frac{4(\log T)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} \omega_1 + \frac{2\gamma(\log T)^\beta}{\Gamma(\beta+1)} \right) \|x\| + \frac{2(\log T)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} \omega_0 + 2|\theta| + |\vartheta|.
$$

Et donc

$$
\|x\| \leq \frac{\frac{2(\log T)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} \omega_0 + 2|\theta| + |\vartheta|}{1 - \left(\frac{4(\log T)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} \omega_1 + \frac{2\gamma(\log T)^\beta}{\Gamma(\beta+1)} \right)},
$$

ce qui montre que Ω est borné.

Ainsi, par le lemme (2.2) , l'opérateur P a au mois un point fixe .

$\square$

Chapitre 3

Stabilité des équations différentielles fractionnaires du pantographe avec deux dérivés de Caputo-Hadamard

3.1 Introduction

Dans ce chapitre ,on va définir et étudier la stabilité de UlamHyers, la stabilité de UlamHyers généralisé et la stabilité de Ulam-Hyers-Rassias , stabilité de Ulam-Hyers-Rassias généralisé du problème fractionnaire du pantographe avec deux dérivés de Caputo- Hadamard(2.1).

3.2 Stabilité au sens de Ulam-Hyers

Définition 3.1. *[9, 6]*

On dit que le problème fractionnaire (2.1) est stable au sens UlamHyers , s'il existe une constante positive $C_f > 0$*, tel que pour tout* $\varepsilon > 0$*, et pour tout solution* $y \in X$ *qui satisfait :*

$$\left| {}_H^C D^{\alpha} \left({}_H^C D^{\beta} + \gamma \right) y(t) - f(t, y(t), y(\lambda t)) \right| \leq \varepsilon, t \in [1, T]. \tag{3.1}$$

il existe une solution $x \in X$ *de problème fractionnaire (2.1) avec*

$$|y(t) - x(t)| \leq c_f \varepsilon, t \in [1, T].$$

Définition 3.2. *[5]*

On dit que le problème fractionnaire (2.1) est stable au sens Ulam-hyers-généralisé si il existe $\varphi_f \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+), \varphi_f(0) = 0$*, tel que pour tout solution* $y \in X$ *qui satisfait (3.1) ; il existe une solution* $x \in X$ *de problème fractionnaire (2.1) avec*

$$|y(t) - x(t)| \leq \varphi_f \varepsilon, t \in [1, T].$$

Remarque 3.1. *Une fonction* $y \in X$ *est une solution de l'équation (3.1) si et seulement si il existe une fonction* $\psi : [1, T] \to \mathbb{R}$ *telle que :*

1. : $|\psi(t)| \leq \varepsilon, t \in [1, T],$
2. : ${}_H^C D^{\alpha} \left({}_H^C D^{\beta} + \gamma \right) x(t) = f(t, x(t), x(\lambda t)) + \psi(t), t \in [1, T]. \gamma \in \mathbb{R}, 0 < \lambda < 1$

Théorème 3.1. *[11]* *Suppose que* $f : [1, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est une fonction continue satisfaite*

(H_1) . *Si*

$$\frac{2k}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}(\log T)^{\alpha+\beta}+\frac{|\gamma|}{\Gamma(\beta+1)}(\log T)^{\beta}<1. \tag{3.2}$$

$$\tag{3.3}$$

Alors, le problème fractionnaire (2.1) est stable au sens Ulam-Hyers et par conséquent, est stable Ulam-Hyers généralisé.

Démonstration.

Soit $y \in X$ est une solution qui satisfait (3.1), i.e :

$$\left|{}_{H}^{C}D^{\alpha}\left({}_{H}^{C}D^{\beta}(t)+\gamma\right)y(t)-f(t,y(t),y(\lambda t))\right|\leq\varepsilon, t\in[1,T]$$

et notons par $x \in X$ l'unique solution du ce problème :

$$\begin{cases} H^{C}D^{\alpha}\left({}_{H}^{C}D^{\beta}x(t)+\gamma\right)=f(t,x(t),x(\lambda t)), \gamma\in\mathbb{R}, t\in J, 0<\alpha,\beta<1, 0<\lambda<1 \\ x(1)=y(1), x(T)=y(T) \end{cases}$$

Alors :

$$x(t)={}_{H}I^{\alpha+\beta}h_{x}(t)-\gamma_{H}I^{\beta}x(t)+\frac{c_0(\log t)^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}+c_1,$$

et par l'intégration de (3.1), on obtient :

$$\begin{aligned} y(t)-{}_{H}I^{\alpha+\beta}h_{y}(t)-\gamma_{H}I^{\beta}y(t)+\frac{c_2(\log t)^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}+c_3\mid &\leq\frac{\varepsilon}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}(\log t)^{\alpha+(17)} \\ &\leq\frac{\varepsilon}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}(\log T)^{\alpha+\beta}, \end{aligned} \tag{3.4}$$

d'autre part , si $x(1)=y(1), x(T)=y(T)$, on trouve $c_0=c_2$ et $c_2=c_3$.

Pour tout $t \in [1, T]$, on a :

$$\begin{aligned} y(t) - x(t) =& y(t) - {}_H I^{\alpha+\beta} h_x(t) - \gamma_H I^{\beta} x(t) - \frac{c_2 (\log t)^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)} - c_3 \\ &+ {}_H I^{\alpha+\beta} \left(h_y(t) - h_x(t)\right) - \gamma_H I^{\beta} (y(t) - y(t)) \end{aligned},$$

avec,

$$h_x(t) = f(t, x(t), x(\lambda t)) \text{ and } h_y(t) = f(t, y(t), y(\lambda t)),$$

et

$${}_H I^{\alpha+\beta} \left(h_y(t) - h_x(t)\right) = {}_H I^{\alpha} [f(s, y(s), y(\lambda t)) - f(s, x(s), x(\lambda t))].$$

On utilise (H_1), on trouve :

$$\begin{aligned} |y(t) - x(t)| \leq & \left| y(t) - {}_H I^{\alpha+\beta} h_x(t) - \gamma_H I^{\beta} y(t) - \frac{c_2 (\log t)^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)} - c_3 \right| \\ &+ \frac{2k}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\alpha+\beta-1} \|y(s) - x(s)\| \frac{ds}{s} \\ &+ \frac{|\gamma|}{\Gamma(\beta)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\beta-1} \|y(s) - x(s)\| \frac{ds}{s}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Par (3.4), on obtient :

$$|y(t) - x(t)| \leq \frac{\varepsilon (\log T)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} + \left(\frac{2k (\log T)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} + \frac{|\gamma| (\log T)^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)} \right) \|y(s) - x(s)\|.$$

Ce qui implique :

$$\|y(s) - x(s)\| \left(1 - \left[\frac{2k (\log T)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} + \frac{|\gamma| (\log T)^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)} \right] \right) \leq \frac{\varepsilon (\log T)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}.$$

Pour chaque $t \in [1, e]$, on obtient :

$$|y(t) - x(t)| \leq \frac{(\log T)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1) \left(1 - \left[\frac{2k (\log T)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} + \frac{|\gamma| (\log T)^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)} \right] \right)} \varepsilon = c_f \varepsilon$$

Donc,le problème fractionnaire(2.1) est stable au sens Ulam-Hyers.

En mettant $\varphi(\varepsilon) = \gamma\varepsilon, \varphi(0) = 0$.

Alors le problème (2.1) est stable Ulam-Hyers généralisé. $\square$

3.3 Exemple

Exemple 3.1. *On Considère l'équation du pantographe :*

$$\begin{cases} C_H D^{\frac{1}{2}}\left({}_H^C D^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{15}\right) x(t) = \frac{2}{13e^{2t+3}} x(t) + \frac{2}{13e^{2t+3}} x\left(\frac{3}{4}t\right) + \frac{2}{9}, t \in [1, e] \\ \\ x(1) = \frac{1}{5}, \quad x(e) = \sqrt{3} \end{cases} \tag{3.6}$$

Avec : $\alpha = \frac{1}{2}, \beta = \frac{1}{3}, \gamma = \frac{1}{15}, \lambda = \frac{3}{4}$ *et* $T = e$. *D'autre part on a :*

$$f(t, x, y) = \frac{2}{13e^{2t+3}} x + \frac{2}{13e^{2t+3}} y + \frac{2}{9}.$$

Pour $t \in [1, e]$ *et* $(y_1, x_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, *on a :*

$$|f(t, x_1, y_1) - f(t, x_2, y_2)| \leq \frac{2}{13e^3} (|x_1 - y_2| + |y_1 - y_2|).$$

par conséquent,le condition (H_1) *tiennent avec* $k = \frac{2}{13e^3}$. *Ces conditions*

$$\frac{4k}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} (\log T)^{\alpha+\beta} \simeq 3.2571 \times 10^{-2} < 1 - \frac{2|\gamma|}{\Gamma(\beta+1)} (\log T)^{\beta} \simeq 0.85069,$$

et

$$\frac{2k}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} (\log T)^{\alpha+\beta} + \frac{|\gamma|}{\Gamma(\beta+1)} (\log T)^{\beta} \simeq 9.0942 \times 10^{-2} < 1,$$

sont satisfait.

Alors, le problème fractionnaire du pantographe (3.6) est stable au sens Ulam-Hyers .

3.4 Stabilité au sens Ulam-Hyers-Rassias

Définition 3.3. *[9]*

On dit que le problème fractionnaire (2.1) est stable au sens Ulam-Hyers-Rassias avec respecte $\varphi \in X$ si il existe un nombre réale $C_f > 0$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout solution $y \in X$ qui satisfait :

$$\left|{}_{H}^{C}D^{\alpha}\left({}_{H}^{C}D^{\beta}+\gamma\right)y(t)-f(t,y(t),y(\lambda t))\right| \leq \varepsilon\varphi(t), t\in[1,T] \tag{3.7}$$

il existe une solution $x \in X$ de problème fractionnaire (2.1) qui satisfait :

$$|y(t)-x(t)| \leq c_f\varepsilon\varphi(t), t\in[1,T]$$

Définition 3.4.

On dit que le problème fractionnaire (2.1) est stable au sens Ulam-Hyers-Rassias généralisée avec respecte $\varphi \in X$ si il existe un nombre réale $C_{f,\varphi} > 0$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout solution $y \in X$ qui satisfait :

$$\left|{}_{H}^{C}D^{\alpha}\left({}_{H}^{C}D^{\beta}+\gamma\right)y(t)-f(t,y(t),y(\lambda t))\right| \leq \varphi(t), t\in[1,T] \tag{3.8}$$

il existe une solution $x \in X$ de problème fractionnaire (2.1) qui satisfait :

$$|y(t)-x(t)| \leq c_{f,\varphi}\varphi(t), t\in[1,T]$$

Théorème 3.2. *[9] Soit $f : [1, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction contenue , on suppose que (H_1) et (3.2) qui satisfaits, alors ils existes une fonction $\varphi \in C([1, T], \mathbb{R}_+)$ et il existes $\eta_\varphi > 0$ tel que pour chaque $t \in [1, T]$:*

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\alpha+\beta-1} \varphi(s) \frac{ds}{s} \leq \eta_\varphi \varphi(t), \tag{3.9}$$

alors, le problème fractionnaire (2.1) est stable au sens Ulam-Hyers-Rassias .

Démonstration. Soit $v \in X$ est une solution qui satisfait(3.8), i.e.

$$\left| {}_H^C D^\alpha \left({}_H^C D^\beta x(t) + \gamma \right) - f(t, x(t), x(\lambda t)) \right| \leq \varepsilon \varphi(t), t \in [1, T]$$

et on note par $x \in X$ l'unique solution du problème (2.1)

$$\begin{cases} {}_H^C D^\alpha \left({}_H^C D^\beta x(t) + \gamma \right) = & f(t, x(t), x(\lambda t)), \gamma \in \mathbb{R}, t \in J, 0 < \alpha, \beta < 1, 0 < \lambda < 1 \\ x(1) = y(1), & x(T) = y(T) \end{cases}$$

Et donc :

$$x(t) = {}_H I^{\alpha+\beta} h_y(t) - \gamma {}_H I^\beta x(t) + \frac{c_0 (\log t)^\beta}{\Gamma(\beta+1)} + c_1$$

et par l'intégration de (3.1), on trouve :

$$\begin{aligned} & \left| y(t) - {}_H I^{\alpha+\beta} h_y(t) - \gamma {}_H I^\beta y(t) + \frac{c_2 (\log t)^\beta}{\Gamma(\beta+1)} + c_3 \right| \\ \leq & \frac{\varepsilon}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\alpha+\beta-1} \varphi(s) \frac{ds}{s} \leq \varepsilon \eta_\varphi \varphi(t). \end{aligned} \tag{3.10}$$

Par les conditions (3.5) et(3.10), on trouve :

$$\begin{aligned} |y(t) - x(t)| \leq & \varepsilon \eta_\varphi \varphi(t) + \frac{2k}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\alpha+\beta-1} |y(s) - x(s)| \frac{ds}{s} \\ & + \frac{|\gamma|}{\Gamma(\beta)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\beta-1} |y(s) - x(s)| \frac{ds}{s} \end{aligned}$$

par conséquent,

$$\|y(s)-x(s)\|\left(1-\frac{2\omega(\log T)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right)\leq\frac{\varepsilon\eta_{\varphi}}{1-\left[\frac{2k(\log T)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}+\frac{|\gamma|(\log T)^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}\right]}\varphi(t).$$

Alors, pour chaque $t\in[1,T]$

$$|y(t)-x(t)|\leq\frac{\varepsilon\eta_{\varphi}}{1-\left[\frac{2k(\log T)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}+\frac{|\gamma|(\log T)^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}\right]}\varphi(t)$$

Donc, le problème fractionnaire (2.1) est stable au sens Ulam-Hyers-Rassias. □

3.5 Exemple

Exemple 3.2. *On considérer l'équation de pantographe fractionnaire*

$$\begin{cases} {}^{C}_{H}D^{\frac{3}{4}}\left({}^{C}_{H}D^{\frac{2}{5}}+\frac{1}{10}\right)x(t)=\frac{1}{15}\sin(t)x(t)+\frac{1}{15}x\left(\frac{3}{4}t\right)+\frac{3}{7}, t\in[1,e], \\ \\ x(1)=2, \quad x(e)=3 \end{cases} \tag{3.11}$$

On a : $\alpha=\frac{3}{4},\beta=\frac{2}{5},\gamma=\frac{1}{10},\lambda=\frac{3}{4}$ *et* $f(t,x,y)=\frac{1}{15}\sin(t)x+\frac{1}{15}y+\frac{3}{7}$ *Pour* $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2$ *et* $t\in[1,e]$, *on a*

$$\begin{aligned}|f(t,x_1,y_1)-f(t,x_2,y_2)|&\leq\frac{1}{15}|\sin(t)|\,|x_1-x_2|+\frac{1}{15}|y_1-y_2|\\&\leq\frac{1}{15}(|x_1-x_2|+|y_1-y_2|)\end{aligned}$$

par conséquent, les hypothèses (H_1) *est satisfait avec* $k=\frac{1}{15}$.

$$\frac{4k}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}(\log T)^{\alpha+\beta}+\frac{2|\gamma|}{\Gamma(\beta+1)}(\log T)^{\beta}\simeq 0.47394<1$$

Soit $\varphi(t) = t^3$. *Alors :*

$$\frac{1}{\Gamma\left(\frac{3}{4}+\frac{2}{5}+1\right)}\int_1^t \left(\log\frac{t}{s}\right)^{\frac{3}{4}+\frac{2}{5}-1}\varphi(s)\frac{ds}{s} \leq \frac{6}{\Gamma\left(\frac{43}{20}\right)}t^3 = \eta_\varphi\varphi(t)$$

ces hypothèses (H_3) *est satisfait avec* $\varphi(t) = t^3$ $\eta_\varphi = \frac{6}{\Gamma(\frac{43}{20})}$.

Donc le problème fractionnaire ((3.11)) a un unique solution on $[1, e]$, *et d'aprés le Théorème président,le problème ((3.11)) est stable au sens Ulam-Hyers-Rassias .*

Bibliographie

[1] W. W. Z. Y. Guangning Wu, Guoqiang Gao, The Electrical Contact of the Pantograph-Catenary System, 1st ed. Springer Singapore, 2019.

[2] M. A. Darwish and K. Sadarangani, Existence of solutions for hybrid fractional pantograph equations, Appl. Anal. Discrete Math., 9 (2015), 150-167.

[3] A. Granas, J. Dugundji, Fixed point theory, New York. Springer-Verlag., 2003 .

[4] M. Houas and M. Bezziou, Existence and stability results for fractional differential equations with two Caputo fractional derivatives, Facta Univ. Ser. Math. Inform., $34(2)(2019), 341-357$.

[5] M. Houas, Existence and stability of fractional pantograph differential equations with Caputo-Hadamard type derivative, (submitted).

[6] D. H. Hyers, On the stability of the linear functional equation, Proc. Nat. Acad. Sci., 27 (1941), 222-224.

[7] A, Y. Liu, On pantograph integro-differential equations, *J.* Integral Equations Appl., 6 (1994), 213-237.

[8] F. Jarad, T. Abdeljawad,D. Baleanu, Caputo-type modification of the Hadamard fractional derivatives, Adv. Differ. Equ., $2012, 142(2012), 1-8$.

[9] S. M. Jung, Hyers-Ulam-Rassias stability of functional equations in nonlinear analysis, Springer, New York., 2011 .

[10] A.A.Kilbas, H.M. Srivastava, J.J.Trujillo, Theory and applications of fractional differential equations, North-Holland Mathematics Studies., 204. Elsevier Science B. V. Amsterdam. (2006).

[11] N. Lungu, D. Popa, Hyers-Ulam stability of a first order partial differential equation, J. Math. Anal. Appl., 385 (2012), 86-91.

[12] K. Shah, D. Vivek and K. Kanagarajan, Dynamics and stability of ψ -fractional pantograph equations with boundary conditions. Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática.22, (2018), 1-13.