République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Djilali Bounaâma-Khemis Miliana

Faculté des Sciences de la Matière et de L'informatique

Département de Mathématiques et Informatique

Spécialité : Analyse Mathématique et Applications

MÈMOIRE

présenté en vue de l'obtention du

DIPLÔME DE MASTER EN MATHÉMATIQUES

par

ROUANE Nour el houda

Thème

Existencee et Mittag- Leffler stabilité des solutions d'un probléme fractionnaire du pantographe

Soutenue publiquement le 30/06/2024, devant le jury composé de

Président :	**Mr.Karras**	**Meslem**	**Univ. Khemis Miliana**
Examinateur 1 :	**Mr.Bezziou**	**Mohamed**	**Univ. Khemis Miliana**
Examinatrice 2 :	**Mme.Bourchi**	**Soumia**	**Univ. Khemis Miliana**
Encadrant :	**Mr.Houas**	**Mohamed**	**Univ. Khemis Miliana**

Année universitaire 2023/2024

Remerciements

Louange à Allah et à sa grâce, j'adresse mes sincères remerciements et ma profonde gratitude à tous ceux qui ont contribué à la réalisation de ce mémoire, ceux qui ont éclairé mon chemin par leur savoir, leur soutien et leur encouragement.

En premier lieu, je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à mon directeur de mémoire, le professeur **Mr HOUAS Mohamed** , qui s'est tenu à mes côtés dès le début de mon parcours dans ce mémoire. Il m'a prodigué des conseils précieux, a fait preuve de patience face aux aléas de la recherche et ne m'a pas ménagé son soutien constant jusqu'à ce que mes efforts soient couronnés de succès.

J'adresse mes sincères remerciements à tous les membres du jury d'honneur pour l'honneur qu'ils m'ont fait d'évaluer ce mémoire et pour leurs précieux commentaires qui m'aideront à développer mes recherches à l'avenir.

Je ne saurais oublier la contribution des professeurs du département de **Mathématiques et Informatique** de l'Université **Djilali Bounamna**, qui ont étanché ma soif de savoir avec leur source de connaissances et m'ont inculqué l'amour de la recherche et de la quête du savoir.

Un merci spécial à mes camarades de classe et à mes chères sœurs : **Asmaa**,**Fati** ,**Laila** , **Ikram**, **Hamida** , **Lilia**, **Chaima** ,**khaira**,, pour leur encouragement constant, leur soutien moral et le partage de leurs précieuses idées avec moi.

Je ne peux ignorer le soutien indéfectible de ma chère famille, qui a été mon pilier à chaque étape de ma vie, a cru en mes capacités et m'a soutenu avec tout l'amour et l'appréciation dont elle est capable.

Enfin, je remercie tous ceux qui, de près ou de loin, ont contribué à la réalisation de ce mémoire, ceux qui m'ont tendu la main ou m'ont soutenu par un mot gentil ou une prière sincère.

Ce mémoire est le fruit d'un travail acharné, d'une collaboration fructueuse et d'une gratitude infinie à tous ceux qui ont contribué à sa réalisation.

Dédicaces

Louange à **Allah** Tout-Puissant, qui m'a accordé la grâce de la science et de la connaissance, et qui a mis à mon service ceux qui m'ont aidé à accomplir ce travail.

Je dédie ce travail avec toute ma gratitude et mon appréciation à :

Mes chers **parents**, source de mon amour et de mon soutien inconditionnels, merci pour vos sacrifices incessants, pour votre foi inébranlable en moi, pour m'avoir appris le sens de la persévérance et du travail acharné, et pour avoir été la boussole qui a guidé mes pas dans le voyage de ma vie.

Mes chers **frères et sœurs** :**Lakhder**,**Azzadin** ,**Akila**, **Hadjer**, **Saida**, merci pour votre encouragement constant, pour votre présence bienveillante à chaque étape de mon parcours, et pour avoir été la source de mon bonheur et de ma joie en toutes circonstances.

Mes chers **professeurs** , tout au long de mon parcours universitaire en particulier et à tous **mes enseignants** tout au long de ma scolarité, merci pour votre savoir infini, pour votre patience avec moi, pour votre foi en mes capacités, pour m'avoir aidé à réaliser mon rêve, et pour avoir été la lumière qui a éclairé mon chemin vers la connaissance.

Mon **mari** et **mes merveilleux enfants** : **Abdelkader** , **Mohammed Yassine** , **Abd El Ouahab** , **Zakaria** et **Safaa** , merci du fond du cœur pour votre soutien constant, pour être ma source de force et d'inspiration, et pour partager avec moi la joie du succès et du bonheur.

TOUTE MA FAMILLE

aucun langage ne saurait exprimer mon respect et ma considération pour votre soutien et encouragements.

mes neveux et surtout à **Abd elrahman.**

Mes chers amis,**Asmaa**,**Fati** ,**Laila** , **Ikram**, **Hamida**,**Chaima**.**Lilia**.**Khaira**. merci d'être toujours présents dans ma vie, pour votre soutien sincère, et pour avoir été la source de mon énergie positive et mon soutien dans les moments difficiles.

Mes amies de l'école primaire à l'université, merci de votre soutien et de votre encouragement constants.

Tous ceux qui ont contribué à la réalisation de ce travail : merci du fond du cœur pour votre aide et votre soutien, et à tous ceux qui ont cru en moi et m'ont donné un coup de main dans mon parcours académique.

Enfin, je dédie ce travail à moi-même : à chaque instant d'effort et de fatigue, à chaque goutte de sueur versée, à chaque rêve réalisé, à chaque pas sur le chemin du succès. Ce travail est la preuve de ma persévérance et de ma détermination, et il marque le début d'un nouveau voyage rempli de réalisations et de succès, si Dieu le veut.

Résumé

Dans ce travail, on abordera la question d'existence des solutions d'un problème fractionnaire de pantographe par l'utilisation des différentes théorèmes de point fixe dans l'éspace de Banach, ainssi d'étudier la stabilité au sens de Mittag Liffler Ulam.
Mot clé : point fixe, problème de pantographe, Mittag Liffler Ulam stabilité.

Abstract

In this work, we address the question of the existence of solutions for fractional pantograph problem by using different fixed point theorems in Banach space, also to study the stability in the sense of Mittag-Liffler- Ulam.
Keyword : fixed point, pantograph problem, Mittag Liffler Ulam.

ملخص

نتناول في هذا العمل مسألة وجود حلول لمسألة المنساخ الكسري باستخدام نظريات النقطة الثابتة المختلفة في فضاء باناخ، وكذلك دراسة استقرار الحلول بمعنى ميتاج ليفلر أولام.
الكلمات المفتاحية : النقطة الثابتة، مشكلة المنساخ، الاستقرار بمعنى ميتاج ليفلر اولام.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

Les équations différentielles fractionnaires non linéaires sont parmi les outils les plus puissants des mathématiques modernes, car la plupart des phénomènes dans le monde réel ont une nature non linéaire . De plus, il existe un grand nombre de phénomènes physiques modélisés par différentes équations à dérivées d'ordre fractionnaire. L'une de ces équations est celle de type de pantographe. Voir [2]
Dans [3, 17] Le modèle type de pantographe est donné par la forme suivante :

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + Bx(\omega t), \\ x(0) = x_0, \\ 0 \leq t \leq T, 0 < \omega < 1. \end{cases}$$

l'auteur dans [8] a évalué la diculté suivante du type de pantographe

$$\begin{cases} {}^{c}D^{q}x(t) = f(t, x(t), y(\omega t)), \\ x(0) = x_0, \\ 0 \leq t \leq T, 0 < q < 1, 0 < \omega < 1. \end{cases}$$

Le présent travail traité est le problème fractionnaire non linéaire de type de pantographe suivant :

$$\begin{cases} {}^{RL}D^{\alpha}({}^{C}D^{\beta}({}^{C}D^{\gamma}x(t))) = Af(t, x(t), x(\omega t)) + BI^{\mu}\left[g(t, x(t), x(\varpi t))\right], \\ \\ x(0) = 0, \quad \lambda_1 x(1) - \lambda_2 x(\eta) = \varphi(x), \quad {}^{C}D^{\gamma}x(0) = 0, \quad 0 < \eta < 1, \quad \beta, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \\ \\ t \in [0,1], \quad 0 < \alpha, \beta, \gamma \leq 1, \quad \mu \geq 0, \quad 0 < \omega, \varpi < 1, \quad A, B \in \mathbb{R}, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2 \eta^{\alpha+\beta+\gamma-1}. \end{cases}$$

On commencera d'abord par présenter les notions de base relatives au calcul fractionnaire.Puis on donne quelques théorèmes de point fixe.
Dans le deuxième chapitre, on va étudier l'unicité de solution par le principe de contraction de Banach. Puis on étudier l'existence des solutions par le théorème de point fixe de Krasnoselski et L'alternative non linéare de Leary Schauder.
Enfin, dans le troisième chapitre, on donnera des conditions suffisantes pour assurer la stabilité au sens de Mittag-Liffler-Ulam de notre problème.

CHAPITRE 1

NOTIONS PRÉLIMINAIRES

Ce chapitre sera consacré aux définitions élémentaire et notions de base relatif au calcul fractionnaire tels que : l'intégration fractionnaire, la dérivation fractionnaire aux sens de Caputo et de Riemann-Liouville, définition de certaines fonctions, dont la fonction Gamma et Bêta qui jouent un rôle très important dans la théorie du calcul fractionnaire et ces applications.

1.1 Fonctions spécial

1.1.1 Fonction Gamma

Définition 1.1.1. [2] *on appelle fonction **Gamma**, la fonction définit par l'intégral suivant :*

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx, \qquad \alpha > 0.$$

Propriétés 1. *Pour tout $\alpha > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction **Gamma** satisfait les propriétés suivantes :*

1. $\Gamma(1) = 1$.
2. $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)$.
3. $\Gamma(\alpha + n) = \alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2)...(\alpha + n - 1)\Gamma(\alpha)$.
4. $\Gamma(n) = (n - 1)!$.

1.1.2 Fonction Bêta

Définition 1.1.2. [2] *La fonction **Bêta** est donnée par :*

$$\beta(m, n) = \int_0^1 x^{m-1}(1 - x)^{n-1} dx, \qquad \forall m, n \in \mathbb{R}^+.$$

Propriétés 2.

$$\beta(m, n) = \beta(n, m).$$

Preuve. Par définition on a :

$$\beta(m, n) = \int_0^1 x^{m-1}(1 - x)^{n-1} dx.$$

On pose : $x = 1 - t, \quad dx = -dt.$
Si $x = 0 \longrightarrow t = 1, \quad x = 1 \longrightarrow t = 0.$

Alors on aura :

$$\begin{aligned}\beta(m,n) &= -\int_1^0 (1-t)^{m-1} t^{n-1} dt \\ &= \int_0^1 t^{n-1}(1-t)^{\alpha-1} dt = \beta(n,m).\end{aligned}$$

1.1.3 Fonction Mittag - Leffler

La fonction exponentielle e^x joue un rôle très important dans la théorie des équations différentielles d'ordre entier. La généralisation de la fonction exponentielle à un seul paramètre a été introduite par G.M. Mittag-Leffler et désignée par la fonction suivante :

Définition 1.1.3. [8] *Pour $X \in \mathbb{C}$ et α est un nombre réelle stréctement positive, on définie la fonction Mittag - Leffler $E_\alpha(x)$ par le dévleppement en série suivant :*

$$E_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}.$$

Pour tout $\alpha > 0$ et $\beta > 0$, la fonction Mittag-Leffler généralisée $E_{\alpha,\beta}(x)$ peut être définie par deux paramétre α et β comme suit :

$$E_{\alpha,\beta}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \qquad \alpha > 0, \beta > 0.$$

Exemple

1.
$$E_{1,1}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x.$$
$$E_{1,2}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k+2)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{(k+1)!} = \frac{1}{x}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{1}{x}(e^x - 1).$$
$$E_{1,3}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k+3)} = \frac{1}{x^2}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{k+2}}{(k+2)!} = \frac{1}{x^2}(e^x - x - 1).$$
On générale
$$E_{1,m}(x) = \frac{1}{x^{m-1}}\left\{e^x - \sum_{k=0}^{m-2} \frac{x^k}{k!}\right\}.$$

2.
$$E_{2,1}(x^2) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \cosh(x).$$
$$E_{2,2}(x^2) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{\Gamma(2k+2)} = \frac{1}{x}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{\sinh(x)}{x}.$$

Remarque 1.1.1

Pour tout $\alpha > 0$ et $k \in \mathbb{N}$ on a :

$$E_{\alpha,1}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} = E_\alpha(x).$$

1.2 Intégrale fractionnaire

Définition 1.2.1. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, on appelle intégrale fractionnaire d'ordre $\alpha > 0$ de f, l'intégrale suivante :*

$$I_a^\alpha[f(x)] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt.$$

Propriétés 3. [2] *Soit $f \in C^0([a,b])$ et $\alpha, \beta > 0$. Alors :*

1. $I_a^\alpha[I_a^\beta f(x)] = I_a^{\alpha+\beta}[f(x)]$.

2. $\frac{d}{dx} I_a^\alpha[f(x)] = I_a^{\alpha-1}[f(x)], \qquad \alpha > 1.$

Exemple 1. *Soit $f(x) = x^\beta, \qquad \alpha > 0, \beta > 0.$*

Calculer $I_0^\alpha[f(x)]$.

$$\begin{aligned} I_0^\alpha[f(x)] &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} t^\beta dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x(1-\frac{t}{x}))^{\alpha-1} t^\beta ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x x^{\alpha-1}(1-\frac{t}{x})^{\alpha-1} t^\beta ds, \end{aligned}$$

en effectuant le changement de variable

$$y = \frac{t}{x} \implies t = xy,$$

$$\text{avec} \;\; dt = xdy,$$

donc on obtient

$$\begin{aligned} (I^\alpha f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-y)^{\alpha-1}(xy)^\beta x dy \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-y)^{\alpha-1} x^{\alpha+\beta} y^\beta dy \\ &= \frac{x^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 y^\beta (1-y)^{\alpha-1} dy \end{aligned}$$

$$= \frac{x^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \beta(\beta+1, \alpha)$$

$$= \frac{x^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\beta+\alpha+1)}$$

$$= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+\alpha+1)} x^{\alpha+\beta}.$$

1.3 Dérivées fractionnaires

1.3.1 Dérivée fractionnaire au sens de Caputo

Définition 1.3.1. *Soit $m-1 < \alpha < m$, $m \in \mathbb{N}^*$, et $f \in C^m([a,b])$, on appelle dérivée fractionnaire de f au sens de **Caputo**, la fonction définit par :*

$$\begin{aligned} {}^cD_a^\alpha[f(x)] &= I_a^{m-\alpha}[f^{(m)}(x)] \\ &= \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^x (x-s)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(s) ds. \end{aligned}$$

Propriétés 4.

1. *Soit $m-1 < \alpha < m$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.*

$$ {}^cD_a^\alpha[\lambda f(x) + \mu g(x)] = \lambda {}^cD_a^\alpha[f(x)] + \mu {}^cD_a^\alpha[g(x)].$$

2. ${}^cD_a^\alpha[I_a^\alpha[f(x)]] = f(x)$.

3. *En générale, on a pas :* $I_a^\alpha[{}^cD_a^\alpha[f(x)]] = f(x)$.

4. *Si $0 \leq \alpha \leq \beta \leq 1$, et $\alpha+\beta \leq 1$, et $f \in C^1$.*
Alors,

$$ {}^cD_a^\alpha[{}^cD_a^\beta[f(x)]] = {}^cD_a^{\alpha+\beta}[f(x)] = {}^cD_a^\beta[{}^cD_a^\alpha[f(x)]].$$

Exemple 2. *Soit $f(x) = (x-a)^\beta$.*
Calculer ${}^cD^\alpha[f(x)]$.

$$\begin{aligned} {}^cD^\alpha[f(x)] &= {}^cD^\alpha\left[(x-a)^\beta\right] \\ &= I^{m-\alpha}\left[(\frac{d}{dx})^m (x-a)^\beta\right] \\ &= I^{m-\alpha}\left[\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-m+1)}(x-a)^{\beta-m}\right] \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-m+1)} I^{m-\alpha}\left[(x-a)^{\beta-m}\right] \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-m+1)} \frac{\Gamma(\beta-m+1)}{\Gamma(\beta-m+m-\alpha+1)}(x-a)^{\beta-m+m-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(x-a)^{\beta-\alpha}. \end{aligned}$$

1.3.2 Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Définition 1.2.2
Soit $m-1 < \alpha < m$ avec $m \in \mathbb{N}^*$. On appelle dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'orde $\alpha > 0$ la fonction définie par

$$\begin{aligned} {}^{RL}D_a^{\alpha}(f(t)) &= (\frac{d}{dt})^m (I_a^{m-\alpha}(f(t)) \\ &= \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}(\frac{d}{dt})^m \int_a^t (t-s)^{m-\alpha-1} f(s)ds. \end{aligned}$$

Propriétés 5.

1. *Soit* $m-1 < \alpha < m$ *et* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
$${}^{RL}D_a^{\alpha}\left[\lambda f(x) + \mu g(x)\right] = \lambda {}^{RL}D_a^{\alpha}[f(x)] + \mu {}^{RL}D_a^{\alpha}[g(x)].$$
2. $\lim\limits_{\alpha \to m} {}^{RL}D_a^{\alpha} f = f^m$.
3. ${}^{RL}D_a^{\alpha} \circ I_a^{\alpha} = id$.

Exemple sur la dérivée fractionnaire au sens de RL :
On prend la fonction $f(t) = (t-a)^{\beta}$.

$$\begin{aligned} ({}^{RL}D_a^{\alpha} f)(t) &= D_a^{\alpha}(t-a)^{\beta} = (\frac{d}{dt})^m [I_a^{m-\alpha}(t-a)^{\beta}] \\ &= (\frac{d}{dt})^m [\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+m-\alpha)}(t-a)^{\beta+m-\alpha}] \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+m-\alpha)}(\frac{d}{dt})^m (t-a)^{\beta+m-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+m-\alpha)} \frac{\Gamma(\beta+m-\alpha+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(t-a)^{\beta-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(t-a)^{\beta-\alpha}. \end{aligned}$$

1.4 Lemmes fondamentaux

Lemme 1.4.1. *Si $\beta \geq \alpha > 0$ et la dérivée fractionnaire ${}^cD_a^{\beta-\alpha}$ existe, alors on a :*

$$^cD^\beta I^\alpha f(t) =^c D^{\beta-\alpha} f(t), t \in [0,T].$$

Pour $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ avec $\beta < \alpha$, on a :

$$^cD^\beta I^\alpha f(t) = I^{\beta-\alpha} f(t), t \in [0,T],$$

Lemme 1.4.2. *Soit $h \in C^m([0,T],\mathbb{R}), m \in \mathbb{N}^*$, pour $\alpha \in]m-1,m[$, la solution générale de l'équation différentielle ${}^{RL}D^\alpha h(t) = 0$ est donnée par :*

$$I_a^\alpha[{}^{RL}D_a^\alpha[f(x)]] = f(x) + \sum_{i=1}^{m} c_i x^{\alpha-i}.$$

où $c_i \in \mathbb{R}, i = 0,1,...m-1, m = [\alpha]+1$.

Lemme 1.4.3. *Soit $h \in C^m([0,T],\mathbb{R}), m \in \mathbb{N}^*$, pour $\beta \in]m-1,m[$, la solution générale de l'équation différentielle ${}^cD^\beta h(t) = 0$ est donnée par :*

$$I_a^\beta[{}^cD_a^\beta[f(x)]] = f(x) + \sum_{i=0}^{m-1} c_i x^i,$$

où $c_i \in \mathbb{R}, i = 0,1,...m-1, m = [\beta]+1$.

1.5 Notations et définitions

Dans cette sections, nous présentons les notations et définitions et quelques propriétés préliminaires qui sont utilisées dans ce mémoire.
Soit $I = [0,T], T > 0$, notons $C(I,R)$ l'espace de Banach des fonctions continues définies de I dans $\mathbb{R}$, muni de la norme

$$\| x \|_\infty = \{\sup |x(t)| \quad /t \in I\},$$

où $|.|$ est une norme sur $\mathbb{R}$.

Définition 1.5.1. [1] *Un espace $(X, \| . \|)$ est dite espace vectoriel normé sur le corps $\mathbb{K}$ s'il est muni d'une application $\| . \|: X \to \mathbb{R}_+$ qui vérifie :*

1. $\forall x \in X : \| x \| = 0 \iff x = 0_X$,
2. $\forall \lambda \in \mathbb{K}, x \in X : \| \lambda x \| = |\lambda| \, \| x \|$,
3. $\forall x, y \in X : \| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$.

Définition 1.5.2. [5] *Une partie A de $(X, \| . \|_X)$ est dite **relativement compact** si son adhérence est compact.*

Définition 1.5.3. *Soient X et Y deux espaces de Banach, et $\Phi : X \longrightarrow Y$ une application linéaire. On dit que Φ est **borné** si elle envoie les parties bornées de X sur des parties bornées de Y.*

Définition 1.5.4. [5] *Soit A un sous ensemble de $C(I,\mathbb{R})$, A est **uniformément borné**. i,e ; il existe une constante $k > 0$ telle que : $\| f(x) \| \leqslant k$, pour tout $x \in I$ et tout $f \in A$.*

Définition 1.5.5. [5] *Soient X et Y deux espaces de Banach. on appelle opérateur **borné** toute application linéaire continue de X dans Y.*

Définition 1.5.6. [5] *Soient X et Y deux espaces de Banach et f une application définie de X à valeurs dans Y. On dit que f est **complètement continue** si elle est continue et transforme tout borné de X en une ensemble relativement compact dans Y. f est dite compact si $f(X)$ est relativement compact dans Y.*

Définition 1.5.7. [2] *Soit A un sous ensemble de $C(I,\mathbb{R})$, L'ensemble A est **équicontinue**. i.e ;*
pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout $t_1, t_2 \in I$ et tout $f \in A$, il existe $\delta > 0$ telque

$$|t_1 - t_2| < \delta \Rightarrow \| f(t_1) - f(t_2) \| \leqslant \varepsilon.$$

Définition 1.5.8. [1] *Soit $(X, \| \, . \, \|)$ un espace vectorielle normé, une application $A : X \to X$ est dite **contractante**, s'il existe un nombre positif $k \in [0.1]$ telle que $\forall x, y \in X$, on a :*

$$\| Ax - Ay \| \leqslant k \| x - y \| \, .$$

Définition 1.5.9. [1] *Soit $(X, \| \, . \, \|)$ un espace vectorielle normé et $A : X \to X$ une application. On appelle **point fixe** de A tout point $x \in X$ tell que : $Ax = x$.*

1.6 Quelques théorèmes du point fixe

Les équations différentielles fractionnaires sont considérées comme des équations différentielles non-linéaires, alors plusieurs théorèmes ont été utilisés pour résoudre ce type d'équation. L'un des méthodes les plus utilisées : les théorèmes du point fixe. En effet, ces théorèmes accordent des conditions suffisantes pour assurer l'existence d'un point fixe pour une fonctions donnée.
Dans le cas des EDFs, on transforme un problème donné en un problème du point fixe. Les points fixes du problème transformé sont ainsi les solutions du problème donné.
Dans cette section, on reppel le théorème du point fixe de Banach, Leray-Schauder et krasnoselskii.

1.6.1 Théorème de point fixe de Banach

Théorème 1.6.1. [5] *Soit X un espace de Banach, et $A : X \longrightarrow X$ un opérateur contractant. Alors A admet un point fixe unique.i.e ; $\exists ! x \in X$ tel que $Ax = x$.*

1.6.2 Théorème de point fixe de Krasnosselskii

Théorème 1.6.2. [11] *Soit X un espace de Banach et M un sous ensemble fermé borné et convexe de X. On suppose que A_1, A_2 sont deux opérateurs de X dans X satisfaisants :*

1. *$A_1x + A_2y \in M, \forall x, y \in M$,*
2. *A_1 est complètement continue ,*
3. *A_2 est contractant.*
   Alors il existe au moins un élément $z \in M$ tel que :

$$A_1z + A_2z = z.$$

1.6.3 L'alternative non linéaire de Leray-Schauder

Théorème 1.6.3. [1] *Soit E un espace de Banach, C un sous-ensemble convexe fermé de E, U un sous-ensemble ouvert de C et $0 \in U$. l'opérateur $A : \bar{U} \to C$ est continue et compact (c'est-à-dire que $A(\bar{U})$ est un sous ensemble relativement compact de C). Alors*

1. *L'application A admet un point fixe dans $\bar{U}$, sinon*
2. *Il existe $x \in \partial U$ et $\sigma \in [0,1]$ avec, $x = \sigma A x$.*

1.6.4 Théorème de point fixe de Arzela-Ascoli

Théorème 1.6.4. [1] *Soit A un sous ensemble de $C(I,\mathbb{R})$, A est relativement compact dans $C(I,\mathbb{R})$, si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :*

1. *L'ensemble A est uniformément borné.*
2. *L'ensemble A est équicontinue.*
3. *Pour tout $x \in I$ l'ensemble $\{f(x), f \in A\} \subset X$, est relativement compact.*

CHAPITRE 2

EXISTENCE ET UNICITÉ DE SOLUTION DU PROBLÈME DE PANTOGRAPHE

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'étude de l'existence et l'unicité des solutions pour un problème fractionnaire de pantographe. [13]
On considère alors le problème suivant :

$$\begin{cases} {}^{RL}D^{\alpha}({}^{C}D^{\beta}({}^{C}D^{\gamma}x(t))) = Af(t, x(t), x(\omega t)) + BI^{\mu}\left[g(t, x(t), x(\varpi t))\right], \\ x(0) = 0, \quad \lambda_1 x(1) - \lambda_2 x(\eta) = \varphi(x), \quad {}^{C}D^{\gamma}x(0) = 0, \quad 0 < \eta < 1, \quad \beta, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \\ t \in [0,1], \quad 0 < \alpha, \beta, \gamma \leq 1, \quad \mu \geq 0, \quad 0 < \omega, \varpi < 1, \quad A, B \in \mathbb{R}, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2 \eta^{\alpha+\beta+\gamma-1}. \end{cases} \tag{2.1}$$

Où
${}^{RL}D^{\alpha}, {}^{C}D^{p}, p \in \{\beta, \gamma\}$ sont les dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville (RL) et Caputo $f, g : [0,1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\varphi : C([0,1], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues .
On prouvera l'unicité de la solution par le théorème de point fix de Banach. Puis on va aborder la question de l'existence d'une solution au moins pour le problème (2.1) par l'utilisation du théorème de point fixe de Krasnoselskii, aussi par L'alternative non linéaire de Leray-Schauder. L'existence et l'unicité d'une solution est établit par la transformation de ce problème à une équation intégrale équivalente, dont la solution est identifiée à un point fixe d'un opérateur (sous certaines hypothèses suffisantes sur la fonction f) dans un espace fonctionnel convenablement choisi.

2.1 Solution intégrale

Lemme 2.1.1. *Soit $h \in C([0,1], \mathbb{R})$, alors la solution du problème fractionnaire suivant :*

$$\begin{cases} {}^{RL}D^{\alpha}({}^{C}D^{\beta}({}^{C}D^{\gamma}x(t))) = h(t), \\ x(0) = 0, \quad \lambda_1 x(1) - \lambda_2 x(\eta) = \varphi(x), \quad {}^{C}D^{\gamma}x(0) = 0, \quad 0 < \eta < 1, \quad \beta, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \\ t \in [0,1], \quad 0 < \alpha, \beta, \gamma \leq 1, \quad \mu \geq 0, \quad 0 < \omega, \varpi < 1, \quad A, B \in \mathbb{R}, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2 \eta^{\alpha+\beta+\gamma-1}. \end{cases}$$

est donné par :

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)}\int_0^t (t-s)^{\alpha+\beta+\gamma-1}h(s)ds \\
&+\frac{t^{\alpha+\beta+\gamma-1}}{\lambda_1-\lambda_2\eta^{\alpha+\beta+\gamma-1}}[\frac{\lambda_2}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)}\int_0^\eta (\eta-s)^{\alpha+\beta+\gamma-1}h(s)ds] \\
&-\frac{\lambda_1}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha+\beta+\gamma-1}h(s)ds] \\
&+\frac{t^{\alpha+\beta+\gamma-1}}{\lambda_1-\lambda_2\eta^{\alpha+\beta+\Gamma-1}}\varphi(x).
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

Preuve :
Soit l'équation :

$$ {}^{RL}D^{\alpha}({}^{C}D^{\beta}({}^{C}D^{\gamma}x(t))) = h(t), \tag{2.3}$$

En prenant l'intégrale de Riemann-Liouville fractionnaire d'ordre α pour (2.3), on obtient :

$$ I^{\alpha}[{}^{RL}D^{\alpha}({}^{C}D^{\beta}({}^{C}D^{\gamma}x(t)))] = I^{\alpha}[h(t)], $$

par (1.4.2), on trouve :

$$ {}^{C}D^{\beta}({}^{C}D^{\gamma}x(t)) = I^{\alpha}[h(t)] + c_1 t^{\alpha-1}, \tag{2.4}$$

on utilise l'intégrale de Riemann-Liouville fractionnaire d'ordre β pour (2.4), on obtient :

$$ I^{\beta}[{}^{C}D^{\beta}({}^{C}D^{\gamma}x(t))] = I^{\alpha+\beta}[h(t)] + I^{\beta}[c_1 t^{\alpha-1}]. $$

Par (1.4.3), on trouve :

$$ {}^{C}D^{\gamma}x(t) = I^{\alpha+\beta}[h(t)] + I^{\beta}[c_1 t^{\alpha-1}] + c_2, \tag{2.5}$$

en appliquant l'intégrale de Riemann-Liouville fractionnaire d'ordre γ pour (2.5), on obtient :

$$ I^{\gamma}[{}^{C}D^{\gamma}x(t)] = I^{\alpha+\beta+\gamma}[h(t)] + I^{\beta+\gamma}[c_1 t^{\alpha-1}] + I^{\gamma}[c_2]. $$

Par (1.4.3), on trouve :

$$ x(t) = I^{\alpha+\beta+\gamma}[h(t)] + I^{\beta+\gamma}[c_1 t^{\alpha-1}] + I^{\gamma}[c_2] + c_3, \tag{2.6}$$

où c_0, c_1 et c_2 sont des constantes arbitraire.

Maintenant, on cherche les constantes c_0, c_1 et c_2 .
D'après la condition $x(0) = 0$, on peut écrire :

$$ x(0) = c_3 = 0. $$

On utilise la condition ${}^{C}D^{\gamma}x(0) = 0$, on trouve :

$$
\begin{aligned}
{}^{C}D^{\gamma}[x(t)] &={}^{C} D^{\gamma}[I^{\alpha+\beta+\gamma}h(t)] +{}^{C} D^{\gamma}[I^{\beta+\gamma}c_1 t^{\alpha-1}] +{}^{C} D^{\gamma}[I^{\gamma}c_2], \\
{}^{C}D^{\gamma}[x(0)] &= I^{\alpha+\beta}h(0) + I^{\beta}c_1 0^{\alpha-1} + c_2,
\end{aligned}
$$

donc

$$ c_2 = 0. $$

On utilise la condition $\lambda_1 x(1) - \lambda_2 x(\eta) = \varphi(x)$, on calcule $x(1)$ et $x(\eta)$, on trouve :

$$\begin{aligned} x(1) &= I^{\alpha+\beta+\gamma}h(1) + I^{\beta+\gamma}c_1, \\ x(\eta) &= I^{\alpha+\beta+\gamma}h(\eta) + c_1 I^{\beta+\gamma}\eta^{\alpha+\beta+\gamma-1}. \end{aligned}$$

Donc on obtient,

$$\begin{aligned} \lambda_1(I^{\alpha+\beta+\gamma}h(1) + c_1\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)}) - \lambda_2(I^{\alpha+\beta+\gamma}h(\eta) + c_1\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)}\eta^{\alpha+\beta+\gamma-1}) &= \varphi(x), \\ \lambda_1 I^{\alpha+\beta+\gamma}h(1) + \lambda_1 c_1\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)} - \lambda_2 I^{\alpha+\beta+\gamma}h(\eta) + \lambda_2 c_1\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)}\eta^{\alpha+\beta+\gamma-1} &= \varphi(x), \end{aligned}$$

alors

$$c_1\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)}(\lambda_1 - \lambda_2\eta^{\alpha+\beta+\gamma-1}) = \varphi(x) + \lambda_2 I^{\alpha+\beta+\gamma}h(\eta) - \lambda_1 I^{\alpha+\beta+\gamma}h(1),$$

donc

$$c_1 = \frac{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)}{\Gamma(\alpha)(\lambda_1 - \lambda_2\eta^{\alpha+\beta+\gamma-1})}(\varphi(x) + \lambda_2 I^{\alpha+\beta+\gamma}h(\eta) - \lambda_1 I^{\alpha+\beta+\gamma}h(1)).$$

Substituant c_0, c_1 et c_3 dans (2.9) on obtient la solution (2.2).

2.2 Problème du Point fixe

Avant tout, on introduit l'espace de Banach suivant :

$$X = \{x, x \in \mathbb{C}([0,1], \mathbb{R})\},$$

muni de la norme :

$$\| x \| = \sup_{t\in[0,1]} |x(t)|.$$

D'aprés (2.2), on défini l'opérateur :

$$\begin{aligned} A : X &\to X \\ x(t) &\longmapsto Ax(t), \end{aligned}$$

tel que, $\forall t \in [0,1]$, on a :

$$\begin{aligned} Ax(t) = &\frac{A}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)}\int_0^t (t-s)^{\alpha+\beta+\gamma-1} f(s, x(s), x(\omega s))ds \\ &+ \frac{B}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\mu)}\int_0^t (t-s)^{\alpha+\beta+\gamma+\mu-1} g(s, x(s), x(\varpi s))ds \\ &+ \frac{t^{\alpha+\beta+\gamma-1}}{\lambda_1 - \lambda_2\eta^{\alpha+\beta+\gamma-1}}[\frac{\lambda_2 A}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)}\int_0^\eta (\eta-s)^{\alpha+\beta+\gamma-1} f((s, x(s), x(\omega s))ds \end{aligned}$$

$$+\frac{\lambda_2 B}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\mu)}\int_0^\eta (\eta-s)^{\alpha+\beta+\gamma+\mu-1} g(s,x(s),x(\varpi s))ds$$

$$-\frac{\lambda_1 A}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha+\beta+\gamma-1} f(s,x(s),x(\omega s))ds$$

$$+\frac{\lambda_1 B}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\mu)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha+\beta+\gamma+\mu-1} g(s,x(s),x(\varpi s))ds]$$

$$+\frac{t^{\alpha+\beta+\gamma-1}}{\lambda_1-\lambda_2\eta^{\alpha+\beta+\gamma-1}}\varphi(x).$$

Il convient de noter que le problème (2.1) a des solutions si et seulement si l'opérateur A a des points fixes.

2.2.1 Unicité de la solution

Afin d'établier l'unicité de solutions, on va montrer que l'opérateur A admet un point fix unique. Pour ce faire, on utilise le théoréme du point fixe de Banach.

Théorème
Soient $f, g : [0,1]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sont des fonctions continues. On suppose que :
(H_1) : $\exists M_i > 0, i = 1,2$ telle que :

$$|f(t,x_1,y_1)-f(t,x_2,y_2)| \leq M_1(|x_1-x_2|+|y_1-y_2|),$$

$$|g(t,x_1,y_1)-g(t,x_2,y_2)| \leq M_2(|x_1-x_2|+|y_1-y_2|),$$

pour tout $t\in[0,1], x_1,y_1,x_2,y_2\in\mathbb{R}$.

(H_2) : φ : $\mathbb{C}([0;1];\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est une fonction continue avec $\varphi(0) = 0$ et $\exists$ un constant $k > 0$. On suppose que

$$|\varphi(x)-\varphi(y)| \leq k\,|x-y|\,, \qquad \forall x,y\in\mathbb{C}([0,1],\mathbb{R}).$$

(H_3) :

$$(2M(L_1+L_2)+L_3) < 1.$$

Alors le problème (2.2) admet une solution unique sur [0,1].

2.3 Preuve

On preuve que $AB_r \subset B_r$ tel que $B_r = \{x\in\mathbb{Z} : \|x\| \leq r\}$,
avec

$$\frac{V(L_1+L_2)}{1-(2M(L_1+L_2)+\frac{k}{\left|\lambda_1-\lambda_2\eta^{\alpha+\beta+\gamma-1}\right|})} \leq r,$$

pour $x \in B_r$, on a :

$$|f(t,x(t),x(\omega t))| \leq |f(t,x(t),x(\omega t)) - f(t,0,0)| + |f(t,0,0)|,$$

d'après (H_1) on trouve :

$$|f(t,x(t),x(\omega t))| \leq M_1(|x(t)-0| + \|x(\omega t)-0|) + |f(t,0,0)|,$$

$$|f(t,x(t),x(\omega t))\| \leq M_1\|x(t)\| + M_1\|x(\omega t)\| + |f(t,0,0)|,$$

$$|f(t,x(t),x(\omega t))| \leq 2M\|x(t)\| + V_1 \leq 2M_1 r + V_1,$$

tel que :

$$V_1 = \sup|f(t,0,0)|,$$

$$|g(t,x(t),x(\varpi t))| \leq |g(t,x(t),x(\varpi t) - g(t,0,0)| + |g(t,0,0)|,$$

d'après (H_1) on trouve :

$$\begin{aligned}
|g(t,x(t),x(\varpi t))| &\leq M_2|x(t)-0| + |x(\varpi t)-0| + |g(t,0,0)|,\\
|g(t,x(t),x(\varpi t))| &\leq M_2|x(t)| + M_2|x(\varpi t)| + |g(t,0,0)|,\\
|g(t,x(t),x(\varpi t))| &\leq 2M_2\|x(t)\| + V_2 \leq 2M_2 r + V_2,
\end{aligned}$$

tel que :

$$V_2 = \sup|g(t,0,0)|,$$

et

$$|\varphi(x)| \leq k\|x(t)\| \leq kr,$$

$$\begin{aligned}
\|Ax\| &= ||\frac{A}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)}\int_0^t (t-s)^{\alpha+\beta+\gamma-1} f(s,x(s),x(\omega s))ds\\
&+\frac{B}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\mu)}\int_0^t (t-s)^{\alpha+\beta+\gamma+\mu-1} g(s,x(s),x(\varpi s))ds\\
&+\frac{t^{\alpha+\beta+\gamma-1}}{\lambda_1-\lambda_2\eta^{\alpha+\beta+\gamma-1}}[\frac{\lambda_2 A}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)}\int_0^\eta (\eta-s)^{\alpha+\beta+\gamma-1} f((s,x(s),x(\omega s))ds\\
&+\frac{\lambda_2 B}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\mu)}\int_0^\eta (\eta-s)^{\alpha+\beta+\gamma+\mu-1} g(s,x(s),x(\varpi s))ds\\
&\quad -\frac{\lambda_1 A}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha+\beta+\gamma-1} f(s,x(s),x(\omega s))ds\\
&\quad +\frac{\lambda_1 B}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\mu)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha+\beta+\gamma+\mu-1} g(s,x(s),x(\varpi s))ds]\\
&\quad +\frac{t^{\alpha+\beta+\gamma-1}}{\lambda_1-\lambda_2\eta^{\alpha+\beta+\gamma-1}}\varphi(x)||,
\end{aligned}$$

alors :

$$\begin{aligned}
\|Ax\| &\leq \frac{|A|}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)} \sup_{t\in[0,1]} |f(t,x(t),x(\omega t))| \int_0^1 (1-s)^{\alpha+\beta+\gamma-1} ds \\
&+\frac{|B|}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\mu)} \sup_{t\in[0,1]} |g(t,x(t),x(\varpi t))| \int_0^1 (1-s)^{\alpha+\beta+\gamma+\mu-1} ds \\
&+\frac{1}{|\lambda_1-\lambda_2\eta^{\alpha+\beta+\gamma-1}|}[\frac{|\lambda_2 A|}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)} \sup_{t\in[0,1]} |f((t,x(t),x(\omega t))| \int_0^\eta (\eta-s)^{\alpha+\beta+\gamma-1} ds \\
&+\frac{|\lambda_2 B|}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\mu)} \sup_{t\in[0,1]} |g(t,x(t),x(\varpi t))| \int_0^\eta (\eta-s)^{\alpha+\beta+\gamma+\mu-1} ds \\
&-\frac{|\lambda_1 A|}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)} \sup_{t\in[0,1]} |f(t,x(t),x(\omega t))| \int_0^1 (1-s)^{\alpha+\beta+\gamma-1} ds \\
&+\frac{|\lambda_1 B|}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\mu)} \sup_{t\in[0,1]} |g(t,x(t),x(\varpi t))| \int_0^1 (1-s)^{\alpha+\beta+\gamma+\mu-1} ds] \\
&+\frac{1}{|\lambda_1-\lambda_2\eta^{\alpha+\beta+\gamma-1}|} \sup_{t\in[0,1]} |\varphi(x)|.
\end{aligned}$$

Par calcule simple, on trouve que :

$$\begin{aligned}
\|Ax\| &\leq (2Mr+V)\frac{|A|}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+1)} \\
&[1+\frac{1}{|\lambda_1-\lambda_2\eta^{\alpha+\beta+\gamma-1}|}[|\lambda_2|\,\eta^{\alpha+\beta+\gamma}+|\lambda_1|]] \\
&+(2Mr+V)\frac{|B|}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\mu+1)} \\
&[\left[1+\frac{1}{|\lambda_1-\lambda_2\eta^{\alpha+\beta+\gamma-1}|}[|\lambda_2|\,\eta^{\alpha+\beta+\gamma+\mu}+|\lambda_1|\right]] \\
&+kr\frac{1}{|\lambda_1-\lambda_2\eta^{\alpha+\beta+\gamma-1}|},
\end{aligned}$$

tel que $V=\sup(V_1,V_2)$ et $M=\sup(M_1,M_2)$,
donc

$$\|Ax\| \leq (2M(L_1+L_2)+\frac{k}{|\lambda_1-\lambda_2\eta^{\alpha+\beta+\gamma-1}|})r+V(L_1+L_2)\leq r,$$

d'où $AB_r \subset B_r$.

Pour $x, y \in X$ ona :

$$|Ax(t)-Ay(t)|=\Bigg|\frac{A}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)}\int_0^t(t-s)^{\alpha+\beta+\gamma-1}f(s,x(s),x(\omega s))ds$$

$$+\frac{B}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\mu)}\int_0^t(t-s)^{\alpha+\beta+\gamma+\mu-1}g(s,x(s),x(\varpi s))ds$$

$$+\frac{t^{\alpha+\beta+\gamma-1}}{\lambda_1-\lambda_2\eta^{\alpha+\beta+\gamma-1}}[\frac{\lambda_2 A}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)}\int_0^\eta(\eta-s)^{\alpha+\beta+\gamma-1}f((s,x(s),x(\omega s))ds$$

$$+\frac{\lambda_2 B}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\mu)}\int_0^\eta(\eta-s)^{\alpha+\beta+\gamma+\mu-1}g(s,x(s),x(\varpi s))ds$$

$$-\frac{\lambda_1 A}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)}\int_0^1(1-s)^{\alpha+\beta+\gamma-1}f(s,x(s),x(\omega s))ds$$

$$+\frac{\lambda_1 B}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\mu)}\int_0^1(1-s)^{\alpha+\beta+\gamma+\mu-1}g(s,x(s),x(\varpi s))ds]$$

$$+\frac{t^{\alpha+\beta+\gamma-1}}{\lambda_1-\lambda_2\eta^{\alpha+\beta+\gamma-1}}\varphi(x)$$

$$-\frac{A}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)}\int_0^t(t-s)^{\alpha+\beta+\gamma-1}f(s,y(s),y(\omega s))ds$$

$$-\frac{B}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\mu)}\int_0^t(t-s)^{\alpha+\beta+\gamma+\mu-1}g(s,y(s),y(\varpi s))ds$$

$$-\frac{t^{\alpha+\beta+\gamma-1}}{\lambda_1-\lambda_2\eta^{\alpha+\beta+\gamma-1}}[\frac{\lambda_2 A}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)}\int_0^\eta(\eta-s)^{\alpha+\beta+\gamma-1}f((s,y(s),y(\omega s))ds$$

$$-\frac{\lambda_2 B}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\mu)}\int_0^\eta(\eta-s)^{\alpha+\beta+\gamma+\mu-1}g(s,y(s),y(\varpi s))ds$$

$$+\frac{\lambda_1 A}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)}\int_0^1(1-s)^{\alpha+\beta+\gamma-1}f(s,y(s)y(\omega s))ds$$

$$-\frac{\lambda_1 B}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\mu)}\int_0^1(1-s)^{\alpha+\beta+\gamma+\mu-1}g(s,y(s),y(\varpi s))ds]$$

$$-\frac{t^{\alpha+\beta+\gamma-1}}{\lambda_1-\lambda_2\eta^{\alpha+\beta+\gamma-1}}\varphi(y)\Bigg|$$

$$\leq \frac{|A|}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)}\int_0^t (t-s)^{\alpha+\beta+\gamma-1}|f(s,x(s),x(\omega s))-f(s,y(s),y(\omega s))|ds$$

$$+\frac{|B|}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\mu)}\int_0^t (t-s)^{\alpha+\beta+\gamma+\mu-1}|g(s,x(s),x(\varpi s))-g(s,y(s),y(\varpi s))|ds$$

$$+\frac{|t^{\alpha+\beta+\gamma-1}|}{|\lambda_1-\lambda_2\eta^{\alpha+\beta+\gamma-1}|}[\frac{|\lambda_2 A|}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)}\int_0^\eta (\eta-s)^{\alpha+\beta+\gamma-1}|f(s,x(s),x(\omega s))-f(s,y(s),y(\omega s))|ds$$

$$+\frac{|\lambda_2 B|}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\mu)}\int_0^\eta (\eta-s)^{\alpha+\beta+\gamma+\mu-1}|g(s,x(s),x(\varpi s))-g(s,y(s),y(\varpi s))|ds$$

$$+\frac{|\lambda_1 A|}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha+\beta+\gamma-1}|f(s,x(s),x(\omega s))-f(s,y(s),y(\omega s))|ds$$

$$+\frac{|\lambda_1 B|}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\mu)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha+\beta+\gamma+\mu-1}|g(s,x(s),x(\varpi s))-g(s,y(s),y(\varpi s))|ds]$$

$$+\frac{t^{\alpha+\beta+\gamma-1}}{|\lambda_1-\lambda_2\eta^{\alpha+\beta+\gamma-1}|}|\varphi(x)-\varphi(y)|$$

$$\leq \sup_{t\in[0,1]}\Bigg\{\frac{|A|}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)}\int_0^t (t-s)^{\alpha+\beta+\gamma-1}|f(s,x(s),x(\omega s))-f(s,y(s),y(\omega s))|ds$$

$$+\frac{|B|}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\mu)}\int_0^t (t-s)^{\alpha+\beta+\gamma+\mu-1}|g(s,x(s),x(\varpi s))-g(s,y(s),y(\varpi s))|ds$$

$$+\frac{t^{\alpha+\beta+\gamma-1}}{|\lambda_1-\lambda_2\eta^{\alpha+\beta+\gamma-1}|}[\frac{|\lambda_2 A|}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)}\int_0^\eta (\eta-s)^{\alpha+\beta+\gamma-1}|f(s,x(s),x(\omega s))-f(s,y(s),y(\omega s)ds)|ds$$

$$+\frac{|\lambda_2 B|}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\mu)}\int_0^\eta (\eta-s)^{\alpha+\beta+\gamma+\mu-1}|g(s,x(s),x(\varpi s))-g(s,y(s),y(\varpi s))|ds$$

$$+\frac{|\lambda_1 A|}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha+\beta+\gamma-1}|f(s,x(s),x(\omega s))-f(s,y(s),y(\omega s))|ds$$
$$+\frac{|\lambda_1 B|}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\mu)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha+\beta+\gamma+\mu-1}|g(s,x(s),x(\varpi s))-g(s,y(s),y(\varpi s))|ds]$$
$$+\frac{t^{\alpha+\beta+\gamma-1}}{|\lambda_1-\lambda_2\eta^{\alpha+\beta+\gamma-1}|}|\varphi(x)-\varphi(y)|\Bigg\}.$$

En utilisant les hypothèses (H_1) et (H_2), on obtient :

$$|Ax(t)-Ay(t)|\leq \frac{|A|\,M_1}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)}\left[|x(t)-y(t)|+|x(\omega t)-y(\omega t)|\right]\int_0^1(1-s)^{\alpha+\beta+\gamma-1}ds$$

$$+\frac{|B|\,M_2}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\mu)}\left[|x(t)-y(t)|+|x(\varpi t)-y(\varpi t)|\right]\int_0^1(1-s)^{\alpha+\beta+\gamma+\mu-1}ds$$

$$+\frac{1}{|\lambda_1-\lambda_2\eta^{\alpha+\beta+\gamma-1}|}\Big[\frac{|\lambda_2|\,|A|\,M_1}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)}\left[|x(t)-y(t)|+|x(\omega t)-y(\omega t)|\right]\int_0^\eta(\eta-s)^{\alpha+\beta+\gamma-1}ds$$

$$+\frac{|\lambda_2|\,|B|\,M_2}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\mu)}\left[|x(t)-y(t)|+|x(\varpi t)-y(\varpi t)|\right]\int_0^\eta(\eta-s)^{\alpha+\beta+\gamma+\mu-1}ds$$

$$+\frac{|\lambda_1|\,|A|\,M_1}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)}\left[|x(t)-y(t)|+|x(\omega t)-y(\omega t)|\right]\int_0^1(1-s)^{\alpha+\beta+\gamma-1}ds$$

$$+\frac{|\lambda_1|\,|B|\,M_2}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\mu)}\left[|x(t)-y(t)|+|x(\varpi t)-y(\varpi t)|\right]\int_0^1(1-s)^{\alpha+\beta+\gamma+\mu-1}ds\Big]$$

$$+\frac{k}{|\lambda_1-\lambda_2\eta^{\alpha+\beta+\gamma-1}|}\,|x-y|\,.$$

Par calcule simple, on trouve que :

$$\begin{aligned}|Ax(t)-Ay(t)|\leq{}& M_1\left[|x(t)-y(t)|+|x(\omega t)-y(\omega t)|\right]\frac{|A|}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+1)}\\ &\Big[1+\frac{1}{|\lambda_1-\lambda_2\eta^{\alpha+\beta+\gamma-1}|}\big[|\lambda_2|\,\eta^{\alpha+\beta+\gamma}+|\lambda_1|\big]\Big]\\ &+M_2(|x(t)-y(t)|+|x(\varpi t)-y(\varpi t)|)\frac{|B|}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\mu+1)}\\ &\left[1+\frac{1}{|\lambda_1-\lambda_2\eta^{\alpha+\beta+\gamma-1}|}\big[|\lambda_2|\,\eta^{\alpha+\beta+\gamma+\mu}+|\lambda_1|\right]\\ &+\frac{k}{|\lambda_1-\lambda_2\eta^{\alpha+\beta+\gamma-1}|}\,|x-y|\,.\end{aligned}$$

En passant à la norme, on trouve :

$$\begin{aligned}\|Ax-Ay\| &\leq 2M_1L_1\|x-y\|+2M_2L_2\|x-y\|+L_3\|x-y\|\\ &\leq(2M_1L_1+2M_2L_2+L_3)\|x-y\|\\ &\leq(2M(L_1+L_2)+L_3)\|x-y\|,\end{aligned}$$

tel que

$$\begin{aligned}
L_1 &= \frac{|A|}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+1)}\left[1+\frac{1}{|\lambda_1-\lambda_2\eta^{\alpha+\beta+\gamma-1}|}(|\lambda_2|\,\eta^{\alpha+\beta+\gamma}+|\lambda_1|)\right],\\
L_2 &= \frac{|B|}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\mu+1)}\left[1+\frac{1}{|\lambda_1-\lambda_2\eta^{\alpha+\beta+\gamma-1}|}(|\lambda_2|\,\eta^{\alpha+\beta+\gamma+\mu}+|\lambda_1|)\right],\\
L_3 &= \frac{k}{|\lambda_1-\lambda_2\eta^{\alpha+\beta+\gamma-1}|}.
\end{aligned}$$

Et $\qquad (M=\sup(M_i, i=1,2))$.

D'après (H_3) l'opérateur A est contractant, par conséquent le problème (2.1) admet une seule solution.

Exemple 3. *On Considère le problème suivant :*

$$\begin{cases}
{}^{RL}D^{\frac{1}{3}}({}^{C}D^{\frac{2}{5}}({}^{C}D^{\frac{3}{7}}x(t))) = \frac{7}{20}\left(\frac{x(t)}{\sqrt{t+144}}+\frac{e^{-t}x(\frac{3}{4}t)}{12+e^t}+arcsint\right)\\
\qquad\qquad +\frac{2}{15}I^{\frac{1}{7}}\left[\frac{2e^t x(t)}{4t+20e^{3t}}+\frac{x(\frac{5}{8})}{10+t}+\frac{2}{7}\right], t\in[0,1],\\
x(0)=0,\quad \frac{4}{5}(x(1))-\frac{7}{11}x(\frac{3}{5})=\frac{1}{16}x(t),\quad {}^{C}D^{\frac{3}{7}}x(0)=0,
\end{cases} \tag{2.7}$$

où

$$f(t,x(t),x(\omega t)) = \frac{x(t)}{\sqrt{t+144}}+\frac{e^{-t}x(\frac{3}{4}t)}{12+e^t}+arcsint,$$
$$g(t,x(t),x(\varpi t)) = \frac{2e^t x(t)}{4t+20e^{3t}}+\frac{x(\frac{5}{8})}{10+t}+\frac{2}{7},$$
$$\varphi(x)=\frac{1}{16}x(t).$$

Et

$$\alpha=\frac{1}{3},\quad \beta=\frac{2}{5},\quad \gamma=\frac{3}{7},\quad \mu=\frac{1}{7},$$

$$A=\frac{7}{20},\quad B=\frac{2}{15},\quad \eta=\frac{3}{5},$$
$$\omega=\frac{3}{4},\quad \varpi=\frac{5}{8},$$

$$\lambda_1=\frac{4}{5},\quad \lambda_2=\frac{7}{11},\quad \lambda_1\neq\lambda_2\eta^{\alpha+\beta+\gamma-1}.$$

Soient $x, y \in \mathbb{R}$ *et* $t \in [0,1]$

$$|f(t,x(t),x(\frac{3}{4}t)) - f(t,y(t),y(\frac{3}{4}t))| = \left| \frac{x(t)}{\sqrt{t+144}} + \frac{e^{-t}x(\frac{3}{4}t)}{12+e^t} - \frac{y(t)}{\sqrt{t+144}} - \frac{e^{-t}(y\frac{3}{4}t)}{12+e^t} \right|$$

$$\leq \frac{7}{240}(|x(t)-y(t)|+|x(\frac{3}{4}t)-y(\frac{3}{4}t)|),$$

$$|g(t,x(t),x(\frac{5}{8}t)) - g(t,y(t),y(\frac{5}{8}t))| = \left| \frac{2e^t x(t)}{4t+20e^{3t}} + \frac{x(\frac{5}{8})}{10+t} + \frac{2}{7} - \frac{2e^t y(t)}{4t+20e^{3t}} - \frac{y(\frac{5}{8})}{10+t} - \frac{2}{7} \right|$$

$$\leq \frac{1}{10}(|x(t)-y(t)|+|x(\frac{5}{8}t)-y(\frac{5}{8}t)|),$$

$$|\varphi(x)-\varphi(y)| = |\frac{1}{16}x(t) - \frac{1}{16}y(t)| \leq \frac{1}{16}|x-y|.$$

Par conséquent, les conditions $(H1)$ *et* $(H2)$ *sont valables avec*

$$M_1 = \frac{7}{240}, \quad M_2 = \frac{1}{10},$$

et $k = \frac{1}{16}$ *respectivement.*

Avec :

$$M = max(M_1, M_2) = \frac{1}{10} \quad , \quad \lambda_1 - \lambda_2\eta^{\alpha+\beta+\gamma-1} = 0,21414,$$
$$L_1 = 1,852, \quad L_2 = 0,50612.$$

Ainsi condition

$$(2M(L_1+L_2)+L_3) = 0,9544 < 1.$$

Ainsi toutes les hypothèses sont satisfaites, par conséquent le problème (2.7) possède une unique solution.

2.4 Existence d'une Solution

Dans cette section on étudier l'existence d'une solution par l'utilisation de théorème du point fixe de Krasnosselskii, puis par L'alternative Non Linéaire de Leray-Shauder.

2.4.1 Existence via le théorème du point fixe de Krasnoselskii

Théorème
Soient $f, g : [0,T] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $\phi : \mathbb{C}([0,1], \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des fonctions continues, on suppose que (H_1) et (H_2) et les hypothèses suivantes sont satisfaites :
(H_4) : Ils existent trois constantes $U_1, U_2, p > 0$, telle que :

$$|f(t,x(t),y(t))| \leq U_1, \qquad \forall x, y \in \mathbb{R},\ t \in [0,1],$$

$$|g(t,x(t),y(t))| \leq U_2, \qquad \forall x, y \in \mathbb{R},\ t \in [0,1],$$

$$|\phi(x)| \leq p, \qquad \forall x \in \mathbb{R},$$

(H_5) :

$$S_1 = \frac{2M\,|A|}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+1)}(|\lambda_2|\,\eta^{\alpha+\beta+\gamma} + |\lambda_1|),$$

$$S_2 = \frac{2M\,|B|}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\mu+1)}(|\lambda_2|\,\eta^{\alpha+\beta+\gamma+\mu} + |\lambda_1|),$$

$$\frac{1}{|\lambda_1 - \lambda_2\eta^{\alpha+\beta+\gamma-1}|}[S_1 + S_2 + k] \leq 1,$$

alors, le problème (2.1) admet au moins une solution.

Preuve :

Pour montrer l'existence de la solution du (2.1), il suffit de vérifier les conditions du théorème du point fixe de krasnosselski.
On considère l'ensemble suivant :

$$B_r = \{x \in X : \|x\|_X \leq r\}.$$

On a

$$\left(\frac{U_1\,|A|}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+1)} + \frac{U_2\,|B|}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\mu+1)}\right) \leq r,$$

et

$$U(L_1 + L_2) + \frac{p}{k}L_3 \leq r.$$

On définit deux opérateur A_1 et A_2 sur B_r comme suite :

$$A_1x(t) = \frac{A}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)}\int_0^t (t-s)^{\alpha+\beta+\gamma-1} f(s, x(s), x(\omega s))ds$$

$$+\frac{B}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\mu)}\int_0^t (t-s)^{\alpha+\beta+\gamma+\mu-1} g(s, x(s), x(\varpi s))ds.$$

$$A_2x(t)= \frac{t^{\alpha+\beta+\gamma-1}}{\lambda_1-\lambda_2\eta^{\alpha+\beta+\gamma-1}}[\frac{\lambda_2 A}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)}\int_0^\eta(\eta-s)^{\alpha+\beta+\gamma-1}f((s,x(s),x(\omega s))ds$$

$$+\frac{\lambda_2 B}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\mu)}\int_0^\eta(\eta-s)^{\alpha+\beta+\gamma+\mu-1}g(s,x(s),x(\varpi s))ds$$

$$-\frac{\lambda_1 A}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)}\int_0^1(1-s)^{\alpha+\beta+\gamma-1}f(s,x(s),x(\omega s))ds$$

$$+\frac{\lambda_1 B}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\mu)}\int_0^1(1-s)^{\alpha+\beta+\gamma+\mu-1}g(s,x(s),x(\varpi s))ds]$$

$$+\frac{t^{\alpha+\beta+\gamma-1}}{\lambda_1-\lambda_2\eta^{\alpha+\beta+\gamma-1}}\varphi(x).$$

Étape 1 :

On montre que si $x, y \in B_r$,alors $A_1x(t)+A_2y(t)\in B_r$, c'est a dire

$$\|A_1x(t)+A_2y(t)\|\leq r.$$

Soit $x, y \in B_r$ et $t\in[0,1]$, on a :

$$|A_1x(t)+A_2y(t)|= \Bigg|\frac{A}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)}\int_0^t(t-s)^{\alpha+\beta+\gamma-1}f(s,x(s),x(\omega s))ds$$

$$+\frac{B}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\mu)}\int_0^t(t-s)^{\alpha+\beta+\gamma+\mu-1}g(s,x(s),x(\varpi s))ds$$

$$+\frac{t^{\alpha+\beta+\gamma-1}}{\lambda_1-\lambda_2\eta^{\alpha+\beta+\gamma-1}}[\frac{\lambda_2 A}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)}\int_0^\eta(\eta-s)^{\alpha+\beta+\gamma-1}f((s,y(s),y(\omega s))ds$$

$$+\frac{\lambda_2 B}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\mu)}\int_0^\eta(\eta-s)^{\alpha+\beta+\gamma+\mu-1}g(s,y(s),y(\varpi s))ds$$

$$-\frac{\lambda_1 A}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)}\int_0^1(1-s)^{\alpha+\beta+\gamma-1}f(s,y(s),y(\omega s))ds$$
$$+\frac{\lambda_1 B}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\mu)}\int_0^1(1-s)^{\alpha+\beta+\gamma+\mu-1}g(s,y(s),y(\varpi s))ds]$$

$$+\frac{t^{\alpha+\beta+\gamma-1}}{\lambda_1-\lambda_2\eta^{\alpha+\beta+\gamma-1}}\varphi(y)\Bigg|$$

$$\leq \frac{|A|}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha+\beta+\gamma-1} |f(s,x(s),x(\omega s))|\, ds$$

$$+\frac{|B|}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\mu)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha+\beta+\gamma+\mu-1} |g(s,x(s),x(\varpi s))|\, ds$$

$$+\frac{1}{|\lambda_1-\lambda_2\eta^{\alpha+\beta+\gamma-1}|}[\frac{|\lambda_2 A|}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)} \int_0^\eta (\eta-s)^{\alpha+\beta+\gamma-1} |f((s,y(s),y(\omega s))|\, ds$$

$$+\frac{|\lambda_2 B|}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\mu)} \int_0^\eta (\eta-s)^{\alpha+\beta+\gamma+\mu-1} |g(s,y(s),y(\varpi s))|\, ds$$

$$+\frac{|\lambda_1 A|}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha+\beta+\gamma-1} |f(s,y(s),y(\omega s))|\, ds$$

$$+\frac{|\lambda_1 B|}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\mu)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha+\beta+\gamma+\mu-1} |g(s,y(s),y(\varpi s))|\, ds]$$

$$+\frac{1}{|\lambda_1-\lambda_2\eta^{\alpha+\beta+\gamma-1}|}\, |\varphi(y)|,$$

d'aprés (H_4) on a :

$$|A_1x(t)+A_2y(t)| \leq \frac{|A|\, U_1}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha+\beta+\gamma-1} ds$$

$$+\frac{|B|\, U_2}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\mu)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha+\beta+\gamma+\mu-1} ds$$

$$+\frac{1}{|\lambda_1-\lambda_2\eta^{\alpha+\beta+\gamma-1}|}[\frac{|\lambda_2 A|\, U_1}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)} \int_0^\eta (\eta-s)^{\alpha+\beta+\gamma-1} ds$$

$$+\frac{|\lambda_2 B|\, U_2}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\mu)} \int_0^\eta (\eta-s)^{\alpha+\beta+\gamma+\mu-1} ds$$

$$+\frac{|\lambda_1 A|\, U_1}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha+\beta+\gamma-1} ds$$

$$+\frac{|\lambda_1 B|\, U_2}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\mu)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha+\beta+\gamma+\mu-1} ds]$$

$$+\frac{p}{|\lambda_1-\lambda_2\eta^{\alpha+\beta+\gamma-1}|}$$

$$\leq \frac{|A|\,U_1}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+1)} + \frac{|B|\,U_2}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\mu+1)}$$

$$+\frac{1}{|\lambda_1-\lambda_2\eta^{\alpha+\beta+\gamma-1}|}[\frac{|\lambda_2 A|\,U_1\eta^{\alpha+\beta+\gamma}}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+1)} + \frac{|\lambda_2 B|\,U_2\eta^{\alpha+\beta+\gamma+\mu}}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\mu+1)}$$

$$+\frac{|\lambda_1 A|\,U_1}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+1)} + \frac{|\lambda_1 B|\,U_2}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\mu+1)}] + \frac{p}{|\lambda_1-\lambda_2\eta^{\alpha+\beta+\gamma-1}|}$$

$$\leq \frac{|A|\,U_1}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+1)}\left[1+\frac{1}{|\lambda_1-\lambda_2\eta^{\alpha+\beta+\gamma-1}|}\,|\lambda_2|\,\eta^{\alpha+\beta+\gamma}+|\lambda_1|\right]$$

$$+\frac{|B|\,U_2}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\mu+1)}\left[1+\frac{1}{|\lambda_1-\lambda_2\eta^{\alpha+\beta+\gamma-1}|}\,|\lambda_2|\,\eta^{\alpha+\beta+\gamma}+|\lambda_1|\right]$$

$$+\frac{p}{|\lambda_1-\lambda_2\eta^{\alpha+\beta+\gamma-1}|},$$

d'aprés (H_5) on a

$$|A_1x(t)+A_2y(t)| \leq U_1L_1+U_2L_2+\frac{p}{k}L_3 = U(L_1+L_2)+\frac{p}{k}L_3 \leq r,$$

Et

$$U=\sup\{U_1,U_2\},$$

alors pour tout $x,y\in B_r$ et $t\in[0,1]$, on trouve $A_1x(t)+A_2y(t)\in B_r$.

Étape 2 :

1. On montre que A_1 est continue.

Soit $(x_n)_{n\in N}\subset X$ une suite telle que : $x_n\subset x$ dans X. Pour tout $t\in[0,1]$, on a :

$$|A_1x_n(t)-A_1x(t)| = \left|\frac{A}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)}\int_0^t (t-s)^{\alpha+\beta+\gamma-1} f(s,x_n(s),x_n(\omega s))ds\right.$$

$$+\frac{B}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\mu)}\int_0^t (t-s)^{\alpha+\beta+\gamma+\mu-1} g(s,x_n(s),x_n(\varpi s))ds$$

$$-\frac{A}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)}\int_0^t (t-s)^{\alpha+\beta+\gamma-1} f(s,x(s),x(\omega s))ds$$

$$\left.-\frac{B}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\mu)}\int_0^t (t-s)^{\alpha+\beta+\gamma+\mu-1} g(s,x(s),(\varpi s))ds\right|$$

$$\leq \frac{|A|}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)} \int_0^t (t-s)^{\alpha+\beta+\gamma-1} |f(s, x_n(s), x_n(\omega s)) - f(s, x(s), x(\omega s))| ds$$

$$+ \frac{|B|}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\mu)} \int_0^t (t-s)^{\alpha+\beta+\gamma+\mu-1} |g(s, x_n(s), x_n(\varpi s)) - g(s, x(s), x(\varpi s))| ds$$

$$\leq \sup_{t\in[0,1]} \{ \frac{|A|}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)} \int_0^t (t-s)^{\alpha+\beta+\gamma-1} |f(s, x_n(s), x_n(\omega s)) - f(s, x(s), x(\omega s))| ds$$

$$+ \frac{|B|}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\mu)} \int_0^t (t-s)^{\alpha+\beta+\gamma+\mu-1} |g(s, x_n(s), x_n(\varpi s)) - g(s, x(s), x(\varpi s))| ds \}$$

$$\leq \frac{|A|}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha+\beta+\gamma-1} |f(s, x_n(s), x_n(\omega s)) - f(s, x(s), x(\omega s))| \, ds$$

$$+ \frac{|B|}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\mu)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha+\beta+\gamma+\mu-1} |g(s, x_n(s), x_n(\varpi s)) - g(s, x(s), x(\varpi s))| \, ds,$$

par calcule simple, on trouve :

$$|A_1 x_n(t) - A_1 x(t)| \leq \frac{|A|}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+1)} |f(t, x_n(t), x_n(\omega t)) - f(t, x(t), x(\omega t))|$$

$$+ \frac{|B|}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\mu+1)} |g(t, x_n(t), x_n(\varpi t)) - g(t, x(t), x(\varpi t))|.$$

Comme f est une fonction continue, alors :

$$\|A_1 x_n - A_1 x\| \to 0 \text{ quand } n \to +\infty.$$

D'où, A_1 est continue sur X.
2. On montre que A_1 est compact.
Pour établir la compacité de l'opérateur A_1, il suffit de prouver que $A_1(B_r)$ est relativement compact .

a) $A_1(B_r)$ est borné .
Il suffit de montrer que pour tout $r > 0$, il existe une constante positive r tel que pour tout $t \in [0,1]$ et $x \in B_r$ avec

$$B_r = \{x \in X : \|x\|_X \leq r\},$$

on trouve :

$$\|A_1(x)\|_X \leq r.$$

On a :

$$|A_1(x)(t)| = \left| \frac{A}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)} \int_0^t (t-s)^{\alpha+\beta+\gamma-1} f(s,x(s),x(\omega s))ds \right.$$

$$\left. + \frac{B}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\mu)} \int_0^t (t-s)^{\alpha+\beta+\gamma+\mu-1} g(s,x(s),x(\varpi s))ds \right|$$

$$\leq \frac{|A|}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha+\beta+\gamma-1} |f(s,x(s),x(\omega s))| \, ds$$

$$+ \frac{|B|}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\mu)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha+\beta+\gamma+\mu-1} |g(s,x(s),x(\varpi s))| \, ds.$$

En appliquant l'hypothèse (H_4) , on obtient :

$$|A_1(x)(t)| \leq (\frac{U_1 |A|}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+1)} + \frac{U_2 |B|}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\mu+1)})$$

on a :

$$\|A_1(x)\|_X \leq r.$$

D'où, $A_1(B_r)$ est uniformément borné.

b) $A_1(B_r)$ est équicontinue .
Soit $x \in B_r$, pour tout $t_1, t_2 \in [0,1], t_1 < t_2$:

$$|A_1(x)(t_2) - A_1(x)(t_1)| = \left| \frac{A}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)} \int_0^{t_2} (t_2-s)^{\alpha+\beta+\gamma-1} f(s,x(s),x(\omega s))ds \right.$$

$$+ \frac{B}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\mu)} \int_0^{t_2} (t_2-s)^{\alpha+\beta+\gamma+\mu-1} g(s,x(s),x(\varpi s))ds$$

$$- \frac{A}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)} \int_0^{t_1} (t_1-s)^{\alpha+\beta+\gamma-1} f(s,x(s),x(\omega s))ds$$

$$\left. - \frac{B}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\mu)} \int_0^{t_1} (t_1-s)^{\alpha+\beta+\gamma+\mu-1} g(s,x(s),x(\varpi s))ds \right|$$

$$|A_1(x)(t_2) - A_1(x)(t_1)| = \left| \frac{A}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)} \int_0^{t_1} (t_2-s)^{\alpha+\beta+\gamma-1} f(s,x(s),x(\omega s))ds \right.$$

$$+ \frac{B}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\mu)} \int_0^{t_1} (t_2-s)^{\alpha+\beta+\gamma+\mu-1} g(s,x(s),x(\varpi s))ds$$

$$+\frac{A}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)}\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{\alpha+\beta+\gamma-1}f(s,x(s),x(\omega s))ds$$

$$+\frac{B}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\mu)}\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{\alpha+\beta+\gamma+\mu-1}g(s,x(s),x(\varpi s))ds$$

$$-\frac{A}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)}\int_{0}^{t_1}(t_1-s)^{\alpha+\beta+\gamma-1}f(s,x(s),x(\omega s))ds$$

$$-\frac{B}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\mu)}\int_{0}^{t_1}(t_1-s)^{\alpha+\beta+\gamma+\mu-1}g(s,x(s),x(\varpi s))ds\Bigg|$$

$$|A_1(x)(t_2)-A_1(x)(t_1)|\leq \frac{|A|}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)}\int_{0}^{t_1}\left[(t_2-s)^{\alpha+\beta+\gamma-1}-(t_1-s)^{\alpha+\beta+\gamma-1}\right]|f(s,x(s),x(\omega s))|ds$$

$$+\frac{|B|}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\mu)}\int_{0}^{t_1}[(t_2-s)^{\alpha+\beta+\gamma+\mu-1}-(t_1-s)^{\alpha+\beta+\gamma+\mu-1}]|g(s,x(s),x(\varpi s))|ds$$

$$+\frac{|A|}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)}\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{\alpha+\beta+\gamma-1}|f(s,x(s),x(\omega s))|ds$$

$$+\frac{|B|}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\mu)}\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{\alpha+\beta+\gamma+\mu-1}|g(s,x(s),x(\varpi s))|ds.$$

En appliquant (H_4) on obtient :

$$|A_1(x)(t_2)-A_1(x)(t_1)|\leq \frac{|A|U_1}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)}\int_{0}^{t_1}\left[(t_2-s)^{\alpha+\beta+\gamma-1}-(t_1-s)^{\alpha+\beta+\gamma-1}\right]ds$$

$$+\frac{|B|U_2}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\mu)}\int_{0}^{t_1}[(t_2-s)^{\alpha+\beta+\gamma+\mu-1}-(t_1-s)^{\alpha+\beta+\gamma+\mu-1}]ds$$

$$+\frac{|A|U_1}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)}\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{\alpha+\beta+\gamma-1}ds$$

$$+\frac{|B|U_2}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\mu)}\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{\alpha+\beta+\gamma+\mu-1}ds$$

$$\leq \frac{|A|\,U_1}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+1)}[t_2^{\alpha+\beta+\gamma}-t_1^{\alpha+\beta+\gamma}-(t_2-t_1)^{\alpha+\beta+\gamma}]$$

$$+\frac{|B|\,U_2}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\mu+1)}[t_2^{\alpha+\beta+\gamma+\mu}-t_1^{\alpha+\beta+\gamma+\mu}-(t_2-t_1)^{\alpha+\beta+\gamma+\mu}]$$

$$+|\frac{|A|\,U_1}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+1)}[(t_2-t_1)^{\alpha+\beta+\gamma}]$$

$$+\frac{|B|\,U_2}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\mu+1)}[(t_2-t_1)^{\alpha+\beta+\gamma+\mu}]$$

$$\leq \frac{|A|\,U_1}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+1)}[t_2^{\alpha+\beta+\gamma}-t_1^{\alpha+\beta+\gamma}]$$

$$+\frac{|B|\,U_2}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\mu+1)}[t_2^{\alpha+\beta+\gamma+\mu}-t_1^{\alpha+\beta+\gamma+\mu}],$$

si $t_1 \to t_2$, on va avoir :

$$|A_1x(t_2)-A_1x(t_1)|_X \to 0.$$

Donc $A_1(B_r)$ est équicontinue.
D'aprés (a) et (b), $A_1(B_r)$ est relativement compact, et d'aprés le théorème d'Arzela-Ascoli. A_1 est compact sur B_r.

Étape 3 :

On montre que A_2 est contractante. Soient $x, y \in B_r,\ t \in [0,1]$, on a :

$$|A_2x(t)-A_2y(t)| = \Bigg|\,|\frac{t^{\alpha+\beta+\gamma-1}}{\lambda_1-\lambda_2\eta^{\alpha+\beta+\gamma-1}}[\frac{\lambda_2 A}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)}\int_0^{\eta}(\eta-s)^{\alpha+\beta+\gamma-1}f(s,x(s),x(\omega s))ds$$

$$+\frac{\lambda_2 B}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\mu)}\int_0^{\eta}(\eta-s)^{\alpha+\beta+\gamma+\mu-1}g(s,x(s),x(\varpi s))ds$$

$$-\frac{\lambda_1 A}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)}\int_0^{1}(1-s)^{\alpha+\beta+\gamma-1}f(s,x(s),x(\omega s))ds$$

$$+\frac{\lambda_1 B}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\mu)}\int_0^{1}(1-s)^{\alpha+\beta+\gamma+\mu-1}g(s,x(s),x(\varpi s))ds]$$

$$+\frac{t^{\alpha+\beta+\gamma-1}}{\lambda_1-\lambda_2\eta^{\alpha+\beta+\gamma-1}}\varphi(x)$$

$$-\frac{t^{\alpha+\beta+\gamma-1}}{\lambda_1-\lambda_2\eta^{\alpha+\beta+\gamma-1}}[\frac{\lambda_2 A}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)}\int_0^{\eta}(\eta-s)^{\alpha+\beta+\gamma-1}f((s,y(s)),y(\omega s))ds$$

$$-\frac{\lambda_2 B}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\mu)}\int_0^{\eta}(\eta-s)^{\alpha+\beta+\gamma+\mu-1}g(s,y(s),y(\varpi s))ds$$

$$+\frac{\lambda_1 A}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha+\beta+\gamma-1} f(s,y(s),y(\omega s))ds$$

$$-\frac{\lambda_1 B}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\mu)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha+\beta+\gamma+\mu-1} g(s,y(s),y(\varpi s))ds]$$

$$\left.-\frac{t^{\alpha+\beta+\gamma-1}}{\lambda_1-\lambda_2\eta^{\alpha+\beta+\gamma-1}}\varphi(y)\right|$$

$$\leq \frac{t^{\alpha+\beta+\gamma-1}}{|\lambda_1-\lambda_2\eta^{\alpha+\beta+\gamma-1}|}[\frac{|\lambda_2 A|}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)}$$

$$\int_0^\eta (\eta-s)^{\alpha+\beta+\gamma-1}|f(s,x(s),x(\omega s))-f(s,y(s),y(\omega s))|ds$$

$$+\frac{|\lambda_2 B|}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\mu)}$$

$$\int_0^\eta (\eta-s)^{\alpha+\beta+\gamma+\mu-1}|g(s,x(s),x(\varpi s))ds-g(s,y(s),y(\varpi s))|ds$$

$$+\frac{|\lambda_1 A|}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha+\beta+\gamma-1}|f(s,x(s),x(\omega s))-f(s,y(s),y(\omega s))|ds$$

$$+\frac{|\lambda_1 B|}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\mu)}$$

$$\int_0^1 (1-s)^{\alpha+\beta+\gamma+\mu-1}|g(s,x(s),x(\varpi s))ds-g(s,y(s),y(\varpi s))ds|]$$

$$+\frac{t^{\alpha+\beta+\gamma-1}}{|\lambda_1-\lambda_2\eta^{\alpha+\beta+\gamma-1}|}|\varphi(x)-\varphi(y)|.$$

En utilisant les hypothèses (H_1) et (H_2) , on obtient :

$$\begin{aligned}|A_2x(t)-A_2y(t)| &\leq \frac{1}{|\lambda_1-\lambda_2\eta^{\alpha+\beta+\gamma-1}|}[\frac{|\lambda_2|\,|A|\,M_1}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)}(|x(t)-y(t)|+|x(\omega t)-y(\omega t)|)\\ &\int_0^\eta (\eta-s)^{\alpha+\beta+\gamma-1}ds\\ &+\frac{|\lambda_2|\,|B|\,M_2}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\mu)}(|x(t)-y(t)|+|x(\varpi t)-y(\varpi t)|)\int_0^\eta (\eta-s)^{\alpha+\beta+\gamma+\mu-1}ds\\ &+\frac{|\lambda_1|\,|A|\,M_1}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)}(|x(t)-y(t)|+|x(\omega t)-y(\omega t)|)\int_0^1 (1-s)^{\alpha+\beta+\gamma-1}ds\end{aligned}$$

$$+\frac{|\lambda_1| |B| M_2}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\mu)}(|x(t)-y(t)|+|x(\varpi t)-y(\varpi t)|)\int_0^1 (1-s)^{\alpha+\beta+\gamma+\mu-1}ds]$$

$$+\frac{k}{|\lambda_1-\lambda_2\eta^{\alpha+\beta+\gamma-1}|}|x-y|,$$

par calcule simple, on trouve :

$$\begin{aligned}
|A_2x(t)-A_2y(t)| &\leq \frac{1}{|\lambda_1-\lambda_2\eta^{\alpha+\beta+\gamma-1}|}[\frac{|\lambda_2| |A| M_1}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+1)}(|x(t)-y(t)|+|x(\omega t)-y(\omega t)|)\eta^{\alpha+\beta+\gamma} \\
&+\frac{|\lambda_2| |B| M_2}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\mu+1)}(|x(t)-y(t)|+|x(\varpi t)-y(\varpi t)|)\eta^{\alpha+\beta+\gamma+\mu} \\
&+\frac{|\lambda_1| |A| M_1}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+1)}(|x(t)-y(t)|+|x(\omega t)-y(\omega t)|) \\
&+\frac{|\lambda_1| |B| M_2}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\mu+1)}(|x(t)-y(t)|+|x(\varpi t)-y(\varpi t)|)] \\
&+\frac{k}{|\lambda_1-\lambda_2\eta^{\alpha+\beta+\gamma-1}|}|x-y|.
\end{aligned}$$

En passant à la norme, on trouve :

$$\begin{aligned}
\|A_2x-A_2y\| &\leq \frac{1}{|\lambda_1-\lambda_2\eta^{\alpha+\beta+\gamma-1}|}[\frac{2|\lambda_2| |A| M_1}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+1)}\eta^{\alpha+\beta+\gamma} \\
&+\frac{2|\lambda_2| |B| M_2}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\mu+1)}\eta^{\alpha+\beta+\gamma+\mu}+\frac{|2\lambda_1| |A| M_1}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+1)} \\
&+\frac{2|\lambda_1| |B| M_2}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\mu+1)}+k]\|x-y\|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{|\lambda_1-\lambda_2\eta^{\alpha+\beta+\gamma-1}|}[\frac{2M|A|}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+1)}(|\lambda_2|\eta^{\alpha+\beta+\gamma}+|\lambda_1|) \\
&+\frac{2M|B|}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\mu+1)}(|\lambda_2|\eta^{\alpha+\beta+\gamma+\mu}+|\lambda_1|)+k]\|x-y\|.
\end{aligned}$$

Et

$$(M=\sup(M_i, i=1,2)),$$

donc, d'après (H_3) l'opérateur A est contractante.
Grâces aux étapes (1), (2), (3), et d'après le théorème du point fixe de krasnosselski, on déduit que le problème (2.1) admet au moins une solution.

Exemple 4. *On Considère le problème suivant :*

$$\begin{cases} {}^{RL}D^{\frac{3}{4}}({}^{C}D^{\frac{2}{5}}({}^{C}D^{\frac{2}{3}}x(t))) = \frac{e^{-3}}{45}(\frac{2e^t}{24+3t}sinx(t) + \frac{1}{\sqrt{140+4e^t}}cosx(\frac{3}{8}t) + \frac{sint}{12}) \\ \qquad + \frac{1}{47e^6}I^{\frac{1}{4}}\left[\frac{e^{2t}}{2t+20}cosx(t) + \frac{7t+1}{15+5t}sin(x(\frac{2}{9}t)) + \frac{1}{20}cost\right], t \in [0,1], \\ \\ x(0) = 0, \quad \frac{5}{13}(x(1)) - \frac{3}{10}x(\frac{1}{8}) = \frac{1}{25}x(t), \quad {}^{C}D^{\frac{2}{3}}x(0) = 0, \end{cases} \tag{2.8}$$

où

$$f(t,x(t),x(\omega t)) = \frac{2e^t}{24+3t}sinx(t) + \frac{1}{\sqrt{140+4e^t}}cosx(\frac{3}{8}t) + \frac{sint}{12},$$
$$g(t,x(t),x(\varpi t)) = \frac{e^{2t}}{2t+20}cosx(t) + \frac{7t+1}{15+5t}sin(x(\frac{2}{9}t)) + \frac{1}{20}cost,$$
$$\varphi(x) = \frac{1}{25}x(t).$$

Et

$$\alpha = \frac{3}{4}, \quad \beta = \frac{2}{5}, \quad \gamma = \frac{2}{3}, \quad \mu = \frac{1}{4},$$

$$A = \frac{e^{-3}}{45}, \quad B = \frac{1}{47e^6}, \quad \eta = \frac{1}{8},$$
$$\omega = \frac{3}{8}, \quad \varpi = \frac{2}{9},$$

$$\lambda_1 = \frac{5}{13}, \quad \lambda_2 = \frac{3}{10}, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2\eta^{\alpha+\beta+\gamma-1}.$$

Soient $x, y \in \mathbb{R}$ *et* $t \in [0,1]$

$$\begin{aligned} |f(t,x(t),x(\frac{3}{8}t)) - f(t,y(t),y(\frac{3}{8}t))| &= \left| \frac{2e^t}{24+3t}sinx(t) + \frac{1}{\sqrt{140+4e^t}}cosx(\frac{3}{8}t) + \frac{sint}{12} \right. \\ &\quad \left. \frac{2e^t}{24+3t}sinx(t) - \frac{1}{\sqrt{140+4e^t}}cosx(\frac{3}{8}t) - \frac{sint}{12} \right| \\ &\leq \frac{1}{12}(|x(t)-y(t)| + |x(\frac{3}{8}t) - y(\frac{3}{8}t)|), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |g(t,x(t),x(\frac{2}{9}t)) - g(t,y(t),y(\frac{2}{9}t))| &= \left| \frac{e^{2t}}{2t+20}cosx(t) + \frac{7t+1}{15+5t}sin(x(\frac{2}{9}t)) + \frac{1}{20}cost \right. \\ &\quad \left. - \frac{e^{2t}}{2t+20}cosx(t) - \frac{7t+1}{15+5t}sin(x(\frac{2}{9}t)) - \frac{1}{20}cost \right| \\ &\leq \frac{1}{20}(|x(t)-y(t)| + |x(\frac{2}{9}t) - y(\frac{2}{9}t))|, \end{aligned}$$

$$|\varphi(x)-\varphi(y)|=|\frac{1}{25}x(t)-\frac{1}{25}y(t)|\leq \frac{1}{25}|x-y|.$$

En utilisant les hypothèses (H_4) *, on obtient :*

$$\begin{aligned}|f(t,x(t),x(\omega t))| &= \left|\frac{e^{-3}}{45}(\frac{2e^t}{24+3t}sinx(t)+\frac{1}{\sqrt{140+4e^t}}cosx(\frac{3}{8}t)+\frac{sint}{12})\right| \\ &\leq |\frac{2e^t}{24+3t}sinx(t)|+|\frac{1}{\sqrt{140+4e^t}}cosx(\frac{3}{8}t)|+|\frac{sint}{12})|\leq \frac{3}{12},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|g(t,x(t),x(\varpi t))| &= \left|\frac{e^{2t}}{2t+20}cosx(t)+\frac{7t+1}{15+5t}sin(x(\frac{2}{9}t))+\frac{1}{20}cost\right| \\ &\leq |\frac{e^{2t}}{2t+20}cosx(t)|+|\frac{7t+1}{15+5t}sin(x(\frac{2}{9}t))|+|\frac{1}{20}cost|\leq \frac{3}{20},\end{aligned}$$

$$|\varphi(x)|=|\frac{1}{25}x(t)|\leq \frac{1}{25}.$$

par conséquent, les conditions $(H1)$ *et* $(H2)$ *sont valables avec* $M_1=\frac{1}{12}$ *,* $M_2=\frac{1}{20}$ *et* $k=\frac{1}{25}$ *respectivement.*
Avec :

$$M=max(M_1,M_2)=\frac{1}{12},\quad \lambda_1-\lambda_2\eta^{\alpha+\beta+\gamma-1}=0,376795.$$

Ainsi condition

$$S_1=\frac{2M\,|A|}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+1)}(|\lambda_2|\,\eta^{\alpha+\beta+\gamma}+|\lambda_1|)=0,0000425,$$

$$S_2=\frac{2M\,|B|}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\mu+1)}(|\lambda_2|\,\eta^{\alpha+\beta+\gamma+\mu}+|\lambda_1|)=0,000001953,$$

$$\frac{1}{|\lambda_1-\lambda_2\eta^{\alpha+\beta+\gamma-1}|}[S_1+S_2+k]=0,091161\leq 1.$$

Ainsi toutes les hypothèses du Théorème (2.4.1) sont satisfaites, par conséquent le problème (2.8) possède au moins une solution .

2.5 Existence via l'alternative non linéaire de Leray-Schauder

Théorème
Soient $f, g : [0,1] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues, on a :
(H_6) : $\pi_i, \Upsilon_i \geq 0, i = 1,2$ et $\pi_0, \Upsilon_0 > 0$,$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$,on a :

$$|f(t, x_1(t), x_2(t)| \leq \pi_0 + \pi_1 |x_1| + \pi_2 |x_2|,$$

et

$$|g(t, x_1(t), x_2(t)| \leq \Upsilon_0 + \Upsilon_1 |x_1| + \Upsilon_2 |x_2|.$$

(H_7) : $\phi : ([0,1], \mathbb{R})$ est une fonction continue avec $\phi(0) = 0$ et $\exists\ c > 0$ tell que

$$|\phi(x)| \leq c \|x\|, \qquad \forall x \in ([0,1], \mathbb{R}).$$

(H_8) :

$$(\pi_1 + \pi_2)L_1 + (\Upsilon_1 + \Upsilon_2)L_2 + \frac{c}{|\lambda_1 - \lambda_2 \eta^{\alpha+\beta+\gamma-1}|} < 1.$$

Alors le probléme (2.1) a au moins une solution.

Preuve :
Etape 1 : Montrons que l'opérateur A est complètement continue.
a) Puisque f, g et ϕ sont des fonctions continues alors, l'opérateur A est continu.
b)Montrons que A est uniformément borné :
Soit Ω bornée, pour tout $x \in \Omega$, on a :

$$\begin{aligned}
|Ax(t)| &= \Bigg| \frac{A}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)} \int_0^t (t-s)^{\alpha+\beta+\gamma-1} f(s, x(s), x(\omega s))ds \\
&+ \frac{B}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\mu)} \int_0^t (t-s)^{\alpha+\beta+\gamma+\mu-1} g(s, x(s), x(\varpi s))ds \\
&+ \frac{t^{\alpha+\beta+\gamma-1}}{\lambda_1 - \lambda_2 \eta^{\alpha+\beta+\gamma-1}} [\frac{\lambda_2 A}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)} \int_0^\eta (\eta-s)^{\alpha+\beta+\gamma-1} f((s, x(s), x(\omega s))ds \\
&+ \frac{\lambda_2 B}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\mu)} \int_0^\eta (\eta-s)^{\alpha+\beta+\gamma+\mu-1} g(s, x(s), x(\varpi s))ds \\
&- \frac{\lambda_1 A}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha+\beta+\gamma-1} f(s, x(s), x(\omega s))ds \\
&+ \frac{\lambda_1 B}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\mu)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha+\beta+\gamma+\mu-1} g(s, x(s), x(\varpi s))ds] \\
&+ \frac{t^{\alpha+\beta+\gamma-1}}{\lambda_1 - \lambda_2 \eta^{\alpha+\beta+\gamma-1}} \varphi(x)| \Bigg|
\end{aligned}$$

$$\leq \frac{|A|\,U_1}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha+\beta+\gamma-1}ds$$

$$+\frac{|B|\,U_2}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\mu)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha+\beta+\gamma+\mu-1}ds$$

$$+\frac{1}{|\lambda_1-\lambda_2\eta^{\alpha+\beta+\gamma-1}|}[\frac{|\lambda_2 A|\,U_1}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)}\int_0^\eta (\eta-s)^{\alpha+\beta+\gamma-1}ds$$

$$+\frac{|\lambda_2 B|\,U_2}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\mu)}\int_0^\eta (\eta-s)^{\alpha+\beta+\gamma+\mu-1}ds$$

$$-\frac{|\lambda_1 A|\,U_1}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha+\beta+\gamma-1}ds$$

$$+\frac{|\lambda_1 B|\,U_2}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\mu)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha+\beta+\gamma+\mu-1}ds]$$

$$+\frac{p}{|\lambda_1-\lambda_2\eta^{\alpha+\beta+\gamma-1}|}.$$

Par calcule simple, on trouve que :

$$\begin{aligned}
|Ax(t)| \;&\leq \frac{|A|\,U_1}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+1)}\\
&[1+\frac{1}{|\lambda_1-\lambda_2\eta^{\alpha+\beta+\gamma-1}|}[|\lambda_2|\,\eta^{\alpha+\beta+\gamma}+|\lambda_1|]]\\
&+\frac{|B|\,U_2}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\mu+1)}\\
&\left[1+\frac{1}{|\lambda_1-\lambda_2\eta^{\alpha+\beta+\gamma-1}|}[|\lambda_2|\,\eta^{\alpha+\beta+\gamma+\mu}+|\lambda_1|\right]\\
&+\frac{P}{|\lambda_1-\lambda_2\eta^{\alpha+\beta+\gamma-1}|},
\end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\|Ax\| \leq U_1L_1+U_2L_2+\frac{P}{|\lambda_1-\lambda_2\eta^{\alpha+\beta+\gamma-1}|}=c,$$

tel que $c>0$,
donc

$$\parallel A(x) \parallel \leq c.$$

D'où A est uniformément borné.

c)Montrons que A transforme un ensemble borné en un ensemble équicontinue :
Soit $x \in B_r$, pour tout $t_1, t_2 \in [0,1], t_1 < t_2$:

$$
\begin{aligned}
|Ax(t_2) - Ax(t_1)| \leq & \Bigg| \frac{A}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)} \int_0^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha+\beta+\gamma-1} f(s, x(s), x(\omega s)) ds \\
& + \frac{B}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\mu)} \int_0^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha+\beta+\gamma+\mu-1} g(s, x(s), x(\varpi s)) ds \\
& + \frac{t_2^{\alpha+\beta+\gamma-1}}{\lambda_1 - \lambda_2 \eta^{\alpha+\beta+\gamma-1}} [\frac{\lambda_2 A}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)} \int_0^{\eta} (\eta - s)^{\alpha+\beta+\gamma-1} f((s, x(s), x(\omega s)) ds \\
& + \frac{\lambda_2 B}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\mu)} \int_0^{\eta} (\eta - s)^{\alpha+\beta+\gamma+\mu-1} g(s, x(s), x(\varpi s)) ds \\
& - \frac{\lambda_1 A}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)} \int_0^{1} (1 - s)^{\alpha+\beta+\gamma-1} f(s, x(s), x(\omega s)) ds \\
& + \frac{\lambda_1 B}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\mu)} \int_0^{1} (1 - s)^{\alpha+\beta+\gamma+\mu-1} g(s, x(s), x(\varpi s)) ds] \\
& + \frac{t_2^{\alpha+\beta+\gamma-1}}{\lambda_1 - \lambda_2 \eta^{\alpha+\beta+\gamma-1}} \varphi(x) \\
& - \frac{A}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)} \int_0^{t_1} (t_1 - s)^{\alpha+\beta+\gamma-1} f(s, x(s), x(\omega s)) ds \\
& - \frac{B}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\mu)} \int_0^{t_1} (t_1 - s)^{\alpha+\beta+\gamma+\mu-1} g(s, x(s), x(\varpi s)) ds \\
& - \frac{t_1^{\alpha+\beta+\gamma-1}}{\lambda_1 - \lambda_2 \eta^{\alpha+\beta+\gamma-1}} [\frac{\lambda_2 A}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)} \int_0^{\eta} (\eta - s)^{\alpha+\beta+\gamma-1} f((s, x(s), x(\omega s)) ds \\
& - \frac{\lambda_2 B}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\mu)} \int_0^{\eta} (\eta - s)^{\alpha+\beta+\gamma+\mu-1} g(s, x(s), x(\varpi s)) ds \\
& + \frac{\lambda_1 A}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)} \int_0^{1} (1 - s)^{\alpha+\beta+\gamma-1} f(s, x(s), x(\omega s)) ds \\
& - \frac{\lambda_1 B}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\mu)} \int_0^{1} (1 - s)^{\alpha+\beta+\gamma+\mu-1} g(s, x(s), x(\varpi s)) ds] \\
& - \frac{t_1^{\alpha+\beta+\gamma-1}}{\lambda_1 - \lambda_2 \eta^{\alpha+\beta+\gamma-1}} \varphi(x) \Bigg| \\
\leq & \Bigg| \frac{A}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)} \int_0^{t_1} (t_2 - s)^{\alpha+\beta+\gamma-1} f(s, x(s), x(\omega s)) ds
\end{aligned}
$$

$$+\frac{A}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)}\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{\alpha+\beta+\gamma-1}f(s,x(s),x(\omega s))ds$$

$$+\frac{B}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\mu)}\int_{0}^{t_1}(t_2-s)^{\alpha+\beta+\gamma+\mu-1}g(s,x(s),x(\varpi s))ds$$

$$+\frac{B}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\mu)}\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{\alpha+\beta+\gamma+\mu-1}g(s,x(s),x(\varpi s))ds$$

$$+\frac{t_2^{\alpha+\beta+\gamma-1}}{\lambda_1-\lambda_2\eta^{\alpha+\beta+\gamma-1}}[\frac{\lambda_2 A}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)}\int_{0}^{\eta}(\eta-s)^{\alpha+\beta+\gamma-1}f((s,x(s),x(\omega s))ds$$

$$+\frac{\lambda_2 B}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\mu)}\int_{0}^{\eta}(\eta-s)^{\alpha+\beta+\gamma+\mu-1}g(s,x(s),x(\varpi s))ds$$

$$-\frac{\lambda_1 A}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)}\int_{0}^{1}(1-s)^{\alpha+\beta+\gamma-1}f(s,x(s),x(\omega s))ds$$

$$+\frac{\lambda_1 B}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\mu)}\int_{0}^{1}(1-s)^{\alpha+\beta+\gamma+\mu-1}g(s,x(s),x(\varpi s))ds]$$

$$+\frac{t_2^{\alpha+\beta+\gamma-1}}{\lambda_1-\lambda_2\eta^{\alpha+\beta+\gamma-1}}\varphi(x)$$

$$-\frac{A}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)}\int_{0}^{t_1}(t_1-s)^{\alpha+\beta+\gamma-1}f(s,x(s),x(\omega s))ds$$

$$-\frac{B}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\mu)}\int_{0}^{t_1}(t_1-s)^{\alpha+\beta+\gamma+\mu-1}g(s,x(s),x(\varpi s))ds$$

$$-\frac{t_1^{\alpha+\beta+\gamma-1}}{\lambda_1-\lambda_2\eta^{\alpha+\beta+\gamma-1}}[\frac{\lambda_2 A}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)}\int_{0}^{\eta}(\eta-s)^{\alpha+\beta+\gamma-1}f((s,x(s),x(\omega s))ds$$

$$-\frac{\lambda_2 B}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\mu)}\int_{0}^{\eta}(\eta-s)^{\alpha+\beta+\gamma+\mu-1}g(s,x(s),x(\varpi s))ds$$

$$+\frac{\lambda_1 A}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)}\int_{0}^{1}(1-s)^{\alpha+\beta+\gamma-1}f(s,x(s),x(\omega s))ds$$

$$-\frac{\lambda_1 B}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\mu)}\int_{0}^{1}(1-s)^{\alpha+\beta+\gamma+\mu-1}g(s,x(s),x(\varpi s))ds]$$

$$-\frac{t_1^{\alpha+\beta+\gamma-1}}{\lambda_1-\lambda_2\eta^{\alpha+\beta+\gamma-1}}\varphi(x)\Bigg|$$

$$\leq\frac{|A|}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)}\int_{0}^{t_1}[(t_2-s)^{\alpha+\beta+\gamma-1}-(t_1-s)^{\alpha+\beta+\gamma-1}]|f(s,x(s),x(\omega s))|ds$$

$$+\frac{|A|}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)}\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{\alpha+\beta+\gamma-1}|f(s,x(s),x(\omega s))|ds$$

$$+\frac{|B|}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\mu)}\int_0^{t_1}[(t_2-s)^{\alpha+\beta+\gamma+\mu-1}-(t_1-s)^{\alpha+\beta+\gamma+\mu-1}]|g(s,x(s),x(\varpi s))|ds$$

$$+\frac{|B|}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\mu)}\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{\alpha+\beta+\gamma+\mu-1}|g(s,x(s),x(\varpi s))|ds$$

$$+\frac{|t_2^{\alpha+\beta+\gamma-1}-t_1^{\alpha+\beta+\gamma-1}|}{|\lambda_1-\lambda_2\eta^{\alpha+\beta+\gamma-1}|}[\frac{|\lambda_2 A|}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)}\int_0^{\eta}(\eta-s)^{\alpha+\beta+\gamma-1}|f((s,x(s),x(\omega s))|ds$$

$$+\frac{|\lambda_2 B|}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\mu)}\int_0^{\eta}(\eta-s)^{\alpha+\beta+\gamma+\mu-1}|g(s,x(s),x(\varpi s))|ds$$

$$+\frac{|\lambda_1 A|}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)}\int_0^{1}(1-s)^{\alpha+\beta+\gamma-1}|f(s,x(s),x(\omega s))|ds$$

$$+\frac{|\lambda_1 B|}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\mu)}\int_0^{1}(1-s)^{\alpha+\beta+\gamma+\mu-1}|g(s,x(s),x(\varpi s))|ds]$$

$$+\frac{|t_2^{\alpha+\beta+\gamma-1}-t_1^{\alpha+\beta+\gamma-1}|}{|\lambda_1-\lambda_2\eta^{\alpha+\beta+\gamma-1}|}|\varphi(x)|$$

$$\leq |\frac{|A|U_1}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)}\int_0^{t_1}((t_2-s)^{\alpha+\beta+\gamma-1}-(t_1-s)^{\alpha+\beta+\gamma-1})ds$$

$$+\frac{|A|U_1}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)}\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{\alpha+\beta+\gamma-1}ds$$

$$+\frac{|B|U_2}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\mu)}\int_0^{t_1}[(t_2-s)^{\alpha+\beta+\gamma+\mu-1}-(t_1-s)^{\alpha+\beta+\gamma+\mu-1}]ds$$

$$+\frac{|B|U_2}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\mu)}\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{\alpha+\beta+\gamma+\mu-1}ds$$

$$+\frac{|t_2^{\alpha+\beta+\gamma-1}-t_1^{\alpha+\beta+\gamma-1}|}{|\lambda_1-\lambda_2\eta^{\alpha+\beta+\gamma-1}|}[\frac{|\lambda_2 A|U_1}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)}\int_0^{\eta}(\eta-s)^{\alpha+\beta+\gamma-1}ds$$

$$+\frac{|\lambda_2 B|U_2}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\mu)}\int_0^{\eta}(\eta-s)^{\alpha+\beta+\gamma+\mu-1}ds$$

$$+\frac{|\lambda_1 A|U_1}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)}\int_0^{1}(1-s)^{\alpha+\beta+\gamma-1}ds$$

$$+\frac{|\lambda_1 B|U_2}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\mu)}\int_0^{1}(1-s)^{\alpha+\beta+\gamma+\mu-1}ds]$$

$$+\frac{P|t_2^{\alpha+\beta+\gamma-1}-t_1^{\alpha+\beta+\gamma-1}|}{|\lambda_1-\lambda_2\eta^{\alpha+\beta+\gamma-1}|}$$

$$\leq \frac{|A|\, U_1}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+1)}\left[\left|t_2^{\alpha+\beta+\gamma}-t_1^{\alpha+\beta+\gamma}\right|\right]$$

$$+\frac{|B|\, U_2}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\mu+1)}\left[\left|t_2^{\alpha+\beta+\gamma+\mu}-t_1^{\alpha+\beta+\gamma+\mu}\right|\right]$$

$$+\frac{\left|t_2^{\alpha+\beta+\gamma-1}-t_1^{\alpha+\beta+\gamma-1}\right|}{|\lambda_1-\lambda_2\eta^{\alpha+\beta+\gamma-1}|}[\frac{|\lambda_2|\,|A|\, U_1}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+1)}\eta^{\alpha+\beta+\gamma}$$

$$+\frac{|\lambda_2|\,|B|\, U_2}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\mu+1)}\eta^{\alpha+\beta+\gamma+\mu}$$

$$-\frac{|\lambda_1|\,|A|\, U_1}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+1)}$$

$$+\frac{|\lambda_1|\,|B|\, U_2}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\mu)}P].$$

Alors pour $t_1 \to t_2$, on va avoir :

$$\|Ax(t_2)-Ax(t_1)\|_X \to 0.$$

D'où $A(B_r)$ est équicontinue.
Par conséquent, d'après le théorème d'Ascoli-Arzelá, l'opérateur A est complètement continue.
Étape 2 :
On vérifiera que l'ensemble

$$W=\{x\in X,\ |x(t)|=\sigma Ax(t),\quad 0<\lambda<1\},$$

est borné.
Soit $x\in W$, alors $x=\sigma A(x), 0\leq\sigma\leq 1$. Pour tout $t\in[0,1]$, on a :

$$|x(t)|=|\sigma Ax(t)|=\sigma\,|Ax(t)|\,,$$

$$|x(t)| \;\; = |\sigma A(x)(t)| = \left|\frac{\sigma A}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)}\int_0^t (t-s)^{\alpha+\beta+\gamma-1} f(s,x(s),x(\omega s))ds\right.$$

$$+\frac{\sigma B}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\mu)}\int_0^t (t-s)^{\alpha+\beta+\gamma+\mu-1} g(s,x(s),x(\varpi s))ds$$

$$+\frac{\sigma t^{\alpha+\beta+\gamma-1}}{\lambda_1-\lambda_2\eta^{\alpha+\beta+\gamma-1}}[\frac{\lambda_2 A}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)}\int_0^\eta (\eta-s)^{\alpha+\beta+\gamma-1} f((s,x(s),x(\omega s))ds$$

$$+\frac{\lambda_2 B}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\mu)}\int_0^\eta (\eta-s)^{\alpha+\beta+\gamma+\mu-1} g(s,x(s),x(\varpi s))ds$$

$$-\frac{\lambda_1 A}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha+\beta+\gamma-1} f(s,x(s),x(\omega s))ds$$

$$+\frac{\lambda_1 B}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\mu)}\int_0^1(1-s)^{\alpha+\beta+\gamma+\mu-1}g(s,x(s),x(\varpi s))ds]$$

$$+\left.\frac{\sigma t^{\alpha+\beta+\gamma-1}}{\lambda_1-\lambda_2\eta^{\alpha+\beta+\gamma-1}}\varphi(x)\right|$$

$$\leq \frac{|A|}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)}\int_0^1(1-s)^{\alpha+\beta+\gamma-1}\left|f(s,x(s),x(\omega s))\right|ds$$

$$+\frac{|B|}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\mu)}\int_0^1(1-s)^{\alpha+\beta+\gamma+\mu-1}\left|g(s,x(s),x(\varpi s))\right|ds$$

$$+\frac{1}{|\lambda_1-\lambda_2\eta^{\alpha+\beta+\gamma-1}|}[\frac{|\lambda_2 A|}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)}\int_0^\eta(\eta-s)^{\alpha+\beta+\gamma-1}\left|f((s,x(s),x(\omega s))\right|ds$$

$$+\frac{|\lambda_2 B|}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\mu)}\int_0^\eta(\eta-s)^{\alpha+\beta+\gamma+\mu-1}\left|g(s,x(s),x(\varpi s))\right|ds$$

$$-\frac{|\lambda_1 A|}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)}\int_0^1(1-s)^{\alpha+\beta+\gamma-1}\left|f(s,x(s),x(\omega s))\right|ds$$

$$+\frac{|\lambda_1 B|}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\mu)}\int_0^1(1-s)^{\alpha+\beta+\gamma+\mu-1}\left|g(s,x(s),x(\varpi s))\right|ds]$$

$$+\frac{1}{|\lambda_1-\lambda_2\eta^{\alpha+\beta+\gamma-1}|}\left|\varphi(x)\right|.$$

En appliquant les hypothèses (H_6) et (H_7), on trouve :

$$\begin{aligned}|x(t)| \leq\ & \frac{|A|\left(\pi_0+\pi_1\left|x(t)\right|+\pi_2\left|x(\omega t)\right|\right)}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)}\int_0^1(1-s)^{\alpha+\beta+\gamma-1}ds\\
&+\frac{|B|\left(\Upsilon_0+\Upsilon_1\left|x(t)\right|+\Upsilon_2\left|x(\varpi t)\right|\right)}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\mu)}\int_0^1(1-s)^{\alpha+\beta+\gamma+\mu-1}|ds\\
&+\frac{1}{|\lambda_1-\lambda_2\eta^{\alpha+\beta+\gamma-1}|}[\frac{|\lambda_2|\left|A\right|\left(\pi_0+\pi_1\left|x(t)\right|+\pi_2\left|x(\omega t)\right|\right)}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)}\int_0^\eta(\eta-s)^{\alpha+\beta+\gamma-1}ds\\
&+\frac{|\lambda_2 B|\left(\Upsilon_0+\Upsilon_1\left|x(t)\right|+\Upsilon_2\left|x(\varpi t)\right|\right)}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\mu)}\int_0^\eta(\eta-s)^{\alpha+\beta+\gamma+\mu-1}ds\\
&-\frac{|\lambda_1|\left|A\right|\left(\pi_0+\pi_1\left|x(t)\right|+\pi_2\left|x(\omega t)\right|\right)}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)}\int_0^1(1-s)^{\alpha+\beta+\gamma-1}ds\\
&+\frac{|\lambda_1 B|\left(\Upsilon_0+\Upsilon_1\left|x(t)\right|+\Upsilon_2\left|x(\varpi t)\right|\right)}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\mu)}\int_0^1(1-s)^{\alpha+\beta+\gamma+\mu-1}ds]\\
&+\frac{c}{|\lambda_1-\lambda_2\eta^{\alpha+\beta+\gamma-1}|}|x|,\end{aligned}$$

par suite, on a :

$$\begin{aligned}\parallel x \parallel \;\; &\leq \frac{(\pi_0 + (\pi_1+\pi_2)\,\|x\|)\,|A|}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+1)}[1+\frac{1}{|\lambda_1-\lambda_2\eta^{\alpha+\beta+\gamma-1}|}(|\lambda_2|\,\eta^{\alpha+\beta+\gamma}+|\lambda_1|)]\\ &\frac{(\Upsilon_0+(\Upsilon_1+\Upsilon_2)\parallel x \parallel)\,|B|}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\mu+1)}[1+\frac{1}{|\lambda_1-\lambda_2\eta^{\alpha+\beta+\gamma-1}|}(|\lambda_2|\,\eta^{\alpha+\beta+\gamma+\mu}+|\lambda_1|)]]\\ &+\frac{c}{|\lambda_1-\lambda_2\eta^{\alpha+\beta+\gamma-1}|}\,\|x\|,\end{aligned}$$

ce qui implique

$$\begin{aligned}\parallel x \parallel | \;\; &\leq L_1\pi_0 + L_1(\pi_1+\pi_2)\parallel x \parallel + L_2\Upsilon_0 + L_2(\Upsilon_1+\Upsilon_2)\parallel x \parallel + \tfrac{c}{|\lambda_1-\lambda_2\eta^{\alpha+\beta+\gamma-1}|}\,\|x\|\\ &\leq L_1\pi_0 + L_2\Upsilon_0 + \left[L_1(\pi_1+\pi_2)+L_2(\Upsilon_1+\Upsilon_2)+\frac{c}{|\lambda_1-\lambda_2\eta^{\alpha+\beta+\gamma-1}|}\right]\parallel x \parallel,\end{aligned}$$

par conséquent

$$\|x\| \leq \frac{[\pi_0 L_1 + \Upsilon_0 L_2]}{1-\left[\left(L_1(\pi_1+\pi_2)+L_2(\Upsilon_1+\Upsilon_2)+\frac{c}{|\lambda_1-\lambda_2\eta^{\alpha+\beta+\gamma-1}|}\right)\right]}.$$

L'ensemble W est borné.
D'où d'après l'alternative non linéaire de Leray-Schauder A admet au moins un point fixe .

Exemple 5. *On Considère le problème suivant :*

$$\begin{cases} {}^{RL}D^{\frac{1}{5}}({}^{C}D^{\frac{2}{3}}({}^{C}D^{\frac{1}{4}}x(t))) = \dfrac{5e^{-5}}{52+3t}(\dfrac{5t+1}{15\pi e^{t}}x(t)+\dfrac{3e^{t}}{66+9e^{t}}x(\dfrac{1}{7}t)+\ln 5)\\ \qquad\qquad + \dfrac{2t+1}{35e^{t}+\pi}I^{\frac{1}{6}}\left[\dfrac{2\pi+t}{5e^{5}}x(t)+\dfrac{e^{-}t}{5t+43}(x(\dfrac{2}{5}t))+\ln 3\right], t\in[0,1], \\ x(0)=0, \quad \dfrac{2}{45}(x(1))-\dfrac{5}{34}x(\dfrac{1}{9})=\dfrac{2}{95}x(t), \quad {}^{C}D^{\frac{1}{4}}x(0)=0, \end{cases} \tag{2.9}$$

où

$$f(t,x(t),x(\omega t)) = \frac{5t+1}{15\pi e^{t}}x(t)+\frac{3e^{t}}{66+9e^{t}}x(\frac{1}{7}t)+\ln 5,$$

$$g(t,x(t),x(\varpi t)) = \frac{2\pi+t}{5e^{5}}x(t)+\frac{e^{-}t}{5t+43}(x(\frac{2}{5}t))+\ln 3,$$
$$\varphi(x)=\frac{2}{95}x(t).$$

Et

$$\alpha=\frac{1}{5},\quad \beta=\frac{2}{3},\quad \gamma=\frac{1}{4},\quad \mu=\frac{1}{6},$$

$$A=\frac{5e^{-5}}{52+3t},\qquad B=\frac{2t+1}{35e^{t}+\pi},\qquad \eta=\frac{1}{9},$$

$$\omega = \frac{1}{7}, \quad \varpi = \frac{2}{5},$$

$$\lambda_1 = \frac{2}{45}, \quad \lambda_2 = \frac{5}{34}, \qquad \lambda_1 \neq \lambda_2 \eta^{\alpha+\beta+\gamma-1}.$$

Soient $x, y \in \mathbb{R}$ et $t \in [0,1]$

$$|f(t, x(t), x(\frac{1}{7}t))| = \left| \frac{5t+1}{15\pi e^t} x(t) + \frac{3e^t}{66+9e^t} x(\frac{1}{7}t) + \ln 5 \right|$$

$$\leq \ln 5 + \frac{1}{15\pi}|x(t)| + \frac{1}{25}|x(\frac{1}{7}t)|,$$

$$|g(t, x(t), x(\frac{2}{5}t))| = \left| \frac{2\pi+t}{5e^5} x(t) + \frac{e^-t}{5t+43}(x(\frac{2}{5}t)) + \ln 3 \right|$$

$$\leq \ln 3 + \frac{2\pi}{5e^5}|x(t)| + \frac{1}{43}|x(\frac{2}{5}t)|,$$

$$|\varphi(x)| = |\frac{2}{95}x(t)| \leq \frac{1}{95}|x|.$$

Par conséquent, les conditions (H_6) et (H_7) sont valables avec :

$$\lambda_1 - \lambda_2 \eta^{\alpha+\beta+\gamma-1} = 0,0355,$$

$$L_1 = 0,00061438, \quad L_2 = 0,000633470.$$

Ainsi condition

$$(\pi_1 + \pi_2)L_1 + (\Upsilon_1 + \Upsilon_2)L_2 + \frac{c}{|\lambda_1 - \lambda_2 \eta^{\alpha+\beta+\gamma-1}|} = 0,593089 < 1.$$

Ainsi toutes les hypothèses du Théorème (2.5) sont satisfaites, par conséquent le problème (2.9) possède au moins une solution .

CHAPITRE 3

STABILITÉ AU SENS DE MITTAG-LEFFLER-ULAM DU PROBLÈME DE PANTOGRAPHE

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'étude de Stabilité au sens de Mittag-Leffler-Ulam-Hyers et de Mittag-Leffler-Ulam-Hyers-Rassias pour un problème fractionnaire de pantographe [10]. Le MLUS du problème fractionnaire séquentiel (2.1) sera défini et étudié dans ce chapitre.

Théorème 3.0.1. [14] *Pour chaquet* $\in [0,1)$. *Si*

$$u(t) \leq p(t) + \sum_{i=1}^{n} K_i(t) \int_0^t (t-s)^{\epsilon_i - 1} u(s) ds,$$

où toutes les fonctions sont continues et non négatives. Les costants $\epsilon_i > 0, K_i(i = 1, 2, ..., n)$ *sont monotones croissantes et bornées sur* $[0,1)$, *alors*

$$u(t) \leq p(t) + \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{1',2',3',.....,j'=1}^{n} \frac{\prod_{i=1}^{j} [K_{i'}(t)\Gamma(\epsilon_{i'})]}{\Gamma(\sum_{i=1}^{j} \epsilon_{i'}} \int_0^t (t-s)^{\sum_{i=1}^{j} \epsilon_{i'} - 1} p(s) ds \right).$$

Remarque 3.0.1
Pour $n = 2$; si $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$;K_1; $K_2 \geq 0$; $p(t)$est localement intégrable et non négatif sur $[0;1)$et $u(t)$ est localement intégrable et non négatif sur $[0;1)$ avec

$$u(t) \leq p(t) + K_1 \int_0^t (t-s)^{\epsilon_i - 1} u(s) ds + K_2 \int_0^t (t-s)^{\epsilon_2 - 1} u(s) ds,$$

alors

$$u(t) \leq p(t) + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{(K_1\Gamma(\epsilon_1))^j}{\Gamma(j\epsilon_1)} \int_0^t (t-s)^{j\epsilon_1 - 1} p(s) ds + (\frac{(K_2\Gamma(\epsilon_2))^j}{\Gamma(j\epsilon_2)} \int_0^t (t-s)^{j\epsilon_2 - 1} p(s) ds \right).$$

Remarque 3.0.2
Soit $p(t)$ une fonction non décroissante sur $[0,1)$ selon les critères de la remarque 6. Ensuite, nous avoir

$$u(t) \leq p(t)(E_{\epsilon_1}[K_1\Gamma(\epsilon_1)t^{\epsilon_1}] + E_{\epsilon_2}[K_2\Gamma(\epsilon_2)t^{\epsilon_2}]),$$

où la fonction de Mittag-Leer, E_ϵ définie par :

$$E_\epsilon[x] = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x^\epsilon}{\Gamma(j\epsilon+1)} \quad , \quad x \in \mathbb{C}.$$

Le résultat auxiliaire ultérieur est également nécessaire.

3.1 Stabilité au sens de Mittag-Leffler-Ulam-Hyers

Définition 3.1.1. [13]*Le problème (2.1) est stable au sens de Mittag-Leffler-Ulam-Hyers, par rapport à $E_{\alpha+\beta+\gamma}$ s'il existe un nombre réel v, tel que pour chaque $K > 0$ et pour chaque solution $y \in X$ de l'inégalité*

$$|^{RL}D(^C D^\beta(^C D^\gamma x(t))) - Af(t, x(t), x(\omega t)) - BI^\mu\left[g(t, x(t), x(\varpi t))\right]| \leq K, \tag{3.1}$$

il existe une solution $x \in X$ de problème (2.1) avec :

$$|y(t) - x(t)| \leq vKE_{\alpha+\beta+\gamma}[t], \quad t \in [0, 1].$$

Remarque 3.1.1

Une fonction $y \in X$ est une solution de l'inégalité (3.1) si et seulement s'il existe une fonction $f \in \mathbb{C}([0, 1], \mathbb{R})$ tel que

$$|f(t)| \leq K \quad , \quad t \in [0, 1],$$

et

$$^{RL}D(^C D^\beta(^C D^\gamma))x(t) - Af(t, x(t), x(\omega t)) - BI^\mu\left[g(t, x(t), x(\varpi t))\right] = f(t) \quad , \quad t \in [0, 1].$$

Théorème 3.1.1. *Soient $f, g : [0, 1] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $\phi : \mathbb{C}([0, 1], \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues, si les hypothèses $(H_i), i = 1, 2$; sont satisfaites, alors le problème (2.1) est stable au sens de MLU-Hyers .*

Preuve. Soit $y \in X$ la solution de l'inégalité (3.1) et $x \in X$ représente la solution unique du problème suivant :

$$\begin{cases} ^{RL}D^\alpha(^C D^\beta(^C D^\gamma x(t))) = Af(t, x(t), x(\omega t)) + BI^\mu\left[g(t, x(t), x(\varpi t))\right], \\ \\ x(0) = y(0), \quad \lambda_1 x(1) - \lambda_2 x(\eta) = \lambda_1 y(1) - \lambda_2 y(\eta), \quad ^C D^\gamma x(0) =^C D^\gamma y(0), \quad 0 < \eta < 1, \quad \beta, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \\ \\ t \in [0, 1], \quad 0 < \alpha, \beta, \gamma \leq 1, \quad \mu \geq 0, \quad 0 < \omega, \varpi < 1, \quad A, B \in \mathbb{R}, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2 \eta^{\alpha+\beta+\gamma}, \end{cases} \tag{3.2}$$

Selon (2.1.1), nous avons

$$x(t) = I^{\alpha+\beta+\gamma}h_x(t) + \frac{\Gamma(\alpha)c_1 t^{\alpha+\beta+\gamma-1}}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)} + \frac{c_2 t^\gamma}{\Gamma(\gamma+1)} + c_3 \quad , \quad c_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, 3. \tag{3.3}$$

Aussi ona

$$y(t) = I^{\alpha+\beta+\gamma}h_y(t) + \frac{\Gamma(\alpha)b_1 t^{\alpha+\beta+\gamma-1}}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)} + \frac{b_2 t^\gamma}{\Gamma(\gamma+1)} + b_3 \quad , \quad b_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, 3. \tag{3.4}$$

tel que : $c_1 = b_1$, $c_2 = b_2$, $c_3 = b_3$.
En intégrant l'inégalité (3.1), on obtient

$$\begin{aligned} &|y(t) - I^{\alpha+\beta+\gamma}h_y(t) - \frac{\Gamma(\alpha)b_1t^{\alpha+\beta+\gamma-1}}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)} - \frac{b_2t^{\gamma}}{\Gamma(\gamma+1)} - b_3| \\ &\leq \frac{K}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+1)}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Pour chaque $t \in [0,1]$, ona

$$\begin{aligned} |y(t) - x(t)| &\leq |y(t) - I^{\alpha+\beta+\gamma}h_y(t) - \frac{\Gamma(\alpha)b_1t^{\alpha+\beta+\gamma-1}}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)} - \frac{b_2t^{\gamma}}{\Gamma(\gamma+1)} - b_3| \\ &+|I^{\alpha+\beta+\gamma}h_y(t) + \frac{\Gamma(\alpha)b_1t^{\alpha+\beta+\gamma-1}}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)} + \frac{b_2t^{\gamma}}{\Gamma(\gamma+1)} + b_3 \\ &-I^{\alpha+\beta+\gamma}h_x(t) - \frac{\Gamma(\alpha)c_1t^{\alpha+\beta+\gamma-1}}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)} - \frac{c_2t^{\gamma}}{\Gamma(\gamma+1)} - c_3| \\ &\leq |y(t) - I^{\alpha+\beta+\gamma}h_y(t) - \frac{\Gamma(\alpha)b_1t^{\alpha+\beta+\gamma-1}}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)} - \frac{b_2t^{\gamma}}{\Gamma(\gamma+1)} - b_3| \\ &+|I^{\alpha+\beta+\gamma}[h_y(t) - h_x(t)]|. \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} |I^{\alpha+\beta+\gamma}[h_y(t) - h_x(t)]| &\leq \frac{|A|}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)}\int_0^t (t-s)^{\alpha+\beta+\gamma-1}\left|(f(t,x(t),x(\omega t)) - f(t,y(t),y(\omega t))\right| ds \\ &+\frac{|B|}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\mu)}\int_0^t (t-s)^{\alpha+\beta+\gamma+\mu-1}\left|(g(t,x(t),x(\varpi t)) - g(t,y(t),y(\varpi t)))\right| .ds \end{aligned}$$

En utilisant l'hypothèse (H_1) , on obtient :

$$\begin{aligned} |I^{\alpha+\beta+\gamma}[h_y(t) - h_x(t)]| &\leq \frac{2\,|A|\,M_1}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)}\int_0^t (t-s)^{\alpha+\beta+\gamma-1}(|y(t)-x(t)|)ds \\ &+\frac{2\,|B|\,M_2}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\mu)}\int_0^t (t-s)^{\alpha+\beta+\gamma+\mu-1}(|y(t)-x(t)|)ds. \end{aligned} \tag{3.6}$$

En utilisant 3.5 et 3.6, nous avons obtenu

$$\begin{aligned} |y(t) - x(t)| &\leq \frac{K}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+1)} + \frac{2\,|A|\,M_1}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)}\int_0^t (t-s)^{\alpha+\beta+\gamma-1}(|y(t)-x(t)|)ds \\ &+\frac{2\,|B|\,M_2}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\mu)}\int_0^t (t-s)^{\alpha+\beta+\gamma+\mu-1}(|y(t)-x(t)|)ds. \end{aligned} \tag{3.7}$$

D'après les remarques 6 et 7, nous avons

$$\begin{aligned} |y(t) - x(t)| &\leq \frac{K}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+1)}(E_{\alpha+\beta+\gamma}[2|A|M_1t^{\alpha+\beta+\gamma}] \\ &+ E_{\alpha+\beta+\gamma+\mu}[2|B|M_2t^{\alpha+\beta+\gamma+\mu}]) \\ &= vK(E_{\alpha+\beta+\gamma}[2|A|M_1t^{\alpha+\beta+\gamma}] + E_{\alpha+\beta+\gamma+\mu}[2|B|M_2t^{\alpha+\beta+\gamma+\mu}]). \end{aligned} \tag{3.8}$$

En conséquence, le problème 2.1 est stable au sens de MLU-Hyers .

3.2 Stabilité au sens de Mittag-Leffler-Ulam-Hyers-Rassias

Définition 3.2.1. [13] *Le problème (2.1) est stable au sens de MLU-Hyers-Rassias, par rapport à* $mE_{\alpha+\beta+\gamma}$ *s'il existe un nombre réel* $v_m > 0$*, tel que pour chaque* $K > 0$ *et pour chaque solution* $y \in X$ *de l'inégalité*

$$|^{RL}D(^{C}D^{\beta}(^{C}D^{\gamma}x(t))) - Af(t, x(t), x(\omega t)) - BI^{\mu}\left[g(t, x(t), x(\varpi t))\right]| \leq m(t)K, \qquad (3.9)$$

il existe une solution $x \in X$ *du problème (2.1) avec*

$$|y(t) - x(t)| \leq v_m K m(t) E_{\alpha+\beta+\gamma}[t], t \in [0, 1].$$

Théorème 3.2.1. *Soient* $f, g : [0, 1] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *et* $\phi : \mathbb{C}([0, 1], \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *sont des fonctions continues, si les hypothèses* $(H_i), i = 1, 2$ *sont satisfaites, . Supposons qu'il existe* $v_m > 0$ *tel que*

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)} \int_0^t (t-s)^{\alpha+\beta+\gamma-1} m(s)ds \leq v_m m(t) \quad , \quad t \in [0, 1], \qquad (3.10)$$

où $m \in \mathbb{C}([0, 1]; \mathbb{R}^+)$ *est croissante. Alors le problème (2.1) est stable au sens de Mittag-Leffler-Ulam-Hyers-Rassias par rapport à* $mE_{\alpha+\beta+\gamma}$*.*

Preuve Soit $y \in X$ une solution de l'inégalité (2.1), et soit $x \in X$ l'unique solution du problème suivant :

$$\begin{cases} ^{RL}D^{\alpha}(^{C}D^{\beta}(^{C}D^{\gamma}x(t))) = Af(t, x(t), x(\omega t)) + BI^{\mu}\left[g(t, x(t), x(\varpi t))\right] \;\; t, \in [0, 1], \\ \\ x(0) = y(0), \quad x(1) = y(1), x(\eta) = y(\eta), \quad ^{C}D^{\gamma}x(0) =^{C} D^{\gamma}y(0), \quad 0 < \eta < 1, \end{cases} \qquad (3.11)$$

Nous avons

$$x(t) = I^{\alpha+\beta+\gamma}h_x(t) + \frac{\Gamma(\alpha)c_1 t^{\alpha+\beta+\gamma-1}}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)} + \frac{c_2 t^{\gamma}}{\Gamma(\gamma+1)} + c_3 \quad , \quad c_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, 3. \qquad (3.12)$$

En intégrant l'inégalité (3.9), on trouve

$$\begin{aligned} &|y(t) - I^{\alpha+\beta+\gamma}h_y(t) - \frac{\Gamma(\alpha)b_1 t^{\alpha+\beta+\gamma-1}}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)} - \frac{b_2 t^{\gamma}}{\Gamma(\gamma+1)} - b_3| \\ &\leq \frac{K}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)} \int_0^t (t-s)^{\alpha+\beta+\gamma-1} m(s)ds, \end{aligned} \qquad (3.13)$$

alors

$$\begin{aligned} |y(t) - x(t)| \;\; &\leq \frac{K}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)} \int_0^t (t_s)^{\alpha+\beta+\gamma-1} m(s)ds \\ &+ \frac{2\,|A|\,M_1}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)} \int_0^t (t-s)^{\alpha+\beta+\gamma-1}(|y(t) - x(t)|) \\ &+ \frac{2\,|B|\,M_2}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\mu)} \int_0^t (t-s)^{\alpha+\beta+\gamma+\mu-1}(|y(t) - x(t)|)ds. \end{aligned} \qquad (3.14)$$

D'après (3.10), on trouve

$$\begin{aligned} |y(t)-x(t)| \quad &\leq Kv_m m(t) + \frac{2\,|A|\,M_1}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)}\int_0^t (t-s)^{\alpha+\beta+\gamma-1}(|y(t)-x(t)|) \\ &+\frac{2\,|B|\,M_2}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\mu)}\int_0^t (t-s)^{\alpha+\beta+\gamma+\mu-1}(|y(t)-x(t)|)ds. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Par la remarque 6 et 7, on obtient

$$\begin{aligned} |y(t)-x(t)| \quad &\leq Kv_m m(t)(E_{\alpha+\beta+\gamma}[2|A|M_1 t^{\alpha+\beta+\gamma}] \\ &+E_{\alpha+\beta+\gamma+\mu}[2|B|M_2 t^{\alpha+\beta+\gamma+\mu}]). \end{aligned}$$

Le problème (2.1) est donc stable au sens de MLU-Hyers-Rassia.

Exemple 6. *On Considère le problème suivant :*

$$\begin{cases} {}^{RL}D^{\frac{2}{3}}({}^{C}D^{\frac{3}{4}}({}^{C}D^{\frac{2}{5}}x(t))) = \dfrac{e^{-4}}{25}(\dfrac{2}{20+t}cosx(t) + \dfrac{\sqrt{4+t}}{13e^{2t}+7}sinx(\dfrac{5}{8}t) + sint) \\ \qquad\qquad + \dfrac{1}{35e^5}I^{\frac{1}{4}}\left[\dfrac{1}{35+4e^{3t}}sinx(t) + \dfrac{6t+2}{78}x(\dfrac{2}{7}t) + \dfrac{cost}{39}\right], t\in[0,1], \\ \\ x(0)=0, \quad \dfrac{4}{11}(x(1)) - \dfrac{7}{12}x(\dfrac{2}{9}) = \dfrac{3}{19}x(t), \quad {}^{C}D^{\frac{2}{5}}x(0)=0, \end{cases} \tag{3.16}$$

et les inégalités fractionnaires suivantes

$$|{}^{RL}D^{\frac{2}{3}}({}^{C}D^{\frac{3}{4}}({}^{C}D^{\frac{2}{5}}x(t))) - \frac{e^{-4}}{25}f(t,x(t),x(\frac{5}{8}t)) - \frac{1}{35e^5}I^{\frac{1}{4}}\left[g(t,x(t),x(\frac{2}{7}t))\right]| \leq K \tag{3.17}$$

$$|{}^{RL}D^{\frac{2}{3}}({}^{C}D^{\frac{3}{4}}({}^{C}D^{\frac{2}{5}}x(t))) - \frac{e^{-4}}{25}f(t,x(t),x(\frac{5}{8}t)), - \frac{1}{35e^5}I^{\frac{1}{4}}\left[g(t,x(t),x(\frac{2}{7}t))\right]| \leq Km(t), \tag{3.18}$$

où

$$\begin{aligned} f(t,x(t),x(\omega t)) &= \frac{2}{20+t}cosx(t) + \frac{\sqrt{4+t}}{13e^{2t}+7}sinx(\frac{5}{8}t) + sint, \\ g(t,x(t),x(\varpi t)) &= \frac{1}{35+4e^{3t}}sinx(t) + \frac{6t+2}{78}x(\frac{2}{7}t) + \frac{cost}{39}, \\ \varphi(x) &= \frac{3}{19}x(t). \end{aligned}$$

Et

$$\alpha = \frac{2}{3}, \quad \beta = \frac{3}{4}, \quad \gamma = \frac{2}{5}, \quad \mu = \frac{1}{4},$$

$$A = \frac{e^{-4}}{25}, \quad B = \frac{2}{35e^5}, \quad \eta = \frac{2}{9},$$

$$\omega = \frac{5}{8}, \quad \varpi = \frac{2}{7},$$

$$\lambda_1 = \frac{4}{11}, \quad \lambda_2 = \frac{7}{12}, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2\eta^{\alpha+\beta+\gamma-1}.$$

Soient $x, y \in \mathbb{R}$ et $t \in [0,1]$

$$|f(t,x(t),x(\frac{5}{8}t)) - f(t,y(t),y(\frac{5}{8}t))| = \Big| \frac{2}{20+t} cosx(t) + \frac{\sqrt{4+t}}{13e^{2t}+7} sinx(\frac{5}{8}t) + sint - \frac{2}{20+t} cosy(t) - \frac{\sqrt{4+t}}{13e^{2t}+7} siny(\frac{5}{8}t) - sint \Big|$$

$$\leq \frac{1}{10}|x(t) - y(t)| + |x(\frac{5}{8}t) - y(\frac{5}{8}t)|,$$

$$|g(t,x(t),x(\frac{2}{7}t)) - g(t,y(t),y(\frac{2}{7}t))| = \Big| \frac{1}{35+4e^{3t}} sinx(t) + \frac{6t+2}{78} x(\frac{2}{7}t) + \frac{cost}{39} - \frac{1}{35+4e^{3t}} siny(t) - \frac{6t+2}{78} y(\frac{2}{7}t) - \frac{cost}{39} \Big|$$

$$\leq \frac{1}{39}|x(t) - y(t)| + |x(\frac{5}{8}t) - y(\frac{5}{8}t)|,$$

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| = |\frac{3}{19}x(t) - \frac{3}{19}y(t)| \leq \frac{3}{19}|x-y|.$$

par conséquent, les conditions $(H1)$ et $(H2)$ sont valables avec $M_1 = \frac{1}{10}$, $M_2 = \frac{1}{39}$ et $k = \frac{3}{19}$ respectivement.
Avec les données données, on constate que

$$M = max(M_1, M_2) = \frac{1}{10}, \quad \lambda_1 - \lambda_2 \eta^{\alpha+\beta+\gamma-1} = 0,1928,$$

$$L_1 = 0,0013314, \quad L_2 = 0,000544978,$$

Ainsi condition

$$(2M(L_1 + L_2) + L_3) = 0,81916 < 1.$$

Ainsi les tout-petits les hypothèses sont satisfaites, par conséquent le problème 3.16 possède une unique solution. MLU-Hyers est-il stable avec

$$|y(t) - x(t)| \leq \frac{K}{\Gamma(\frac{169}{60})}(E_{\frac{109}{60}}[\frac{2e^{-4}}{250}t^{\frac{109}{60}}] + E_{\frac{31}{15}}[\frac{2}{1365e^5}t^{\frac{31}{15}}]) \quad , \quad t \in [0,1].$$

Soit $m(t) = t^2$, alors

$$I^{\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{2}{5}}m(t) = I^{\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{2}{5}}t^2 = \frac{2}{\Gamma(\frac{229}{60})}t^{2+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{2}{5}} \leq \frac{2}{\Gamma(\frac{229}{60})}t^2 = v_m m(t).$$

Ainsi, la condition (3.6) est satisfaite avec $m(t) = t^2$ et $v_m = \frac{2}{\Gamma(\frac{229}{60})}$ Ainsi, le théorème (3.2.1) démontre que problème (3.16) MLU-Hyers-Rassias est-il stable avec

$$|y(t) - x(t)| \leq \frac{2Kt^2}{\Gamma(\frac{229}{60})}(E_{\frac{109}{60}}[\frac{2e^{-4}}{250}t^{\frac{109}{60}}] + E_{\frac{31}{15}}[\frac{2}{1365e^5}t^{\frac{31}{15}}]) \quad , \quad t \in [0,1].$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Granas, J. Dugundji, Fixed point theory, New York : Springer-Verlag, 2003. https ://doi.org/10.1007/978-0-387-21593-8

[2] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo, Theory and applications of fractional differential equations, North-Holland Mathematics Studies, Vol. 204, Elsevier Science B.V. Amsterdam, 2006.

[3] A. Iserles, On the generalized pantograph functional-differential equation, Eur. J. Appl. Math., 4 (1993), 1–38. https ://doi.org/10.1017/S0956792500000966

[4] D. Vivek, K. Kanagarajan, S. Sivasundaram, Dynamics and stability of pantograph equations via Hilfer fractional derivative, Nonlinear Stud., 23 (2016), 685–698

[5] F. Jarad, T. Abdeljawad,D. Baleanu, Caputo-type modification of the Hadamard fractional derivatives, Adv. Differ. Equ., 2012, 142(2012).

[6] G. Ali, K. Shah, G. ur Rahman, Investigating a class of pantograph differential equations under multi-points boundary conditions with fractional order, Int. J. Appl. Comput. Math., 7 (2021), 2. https ://doi.org/10.1007/s40819-020-00932-0

[7] I. Ahmad, J. J. Nieto, G. U. Rahman, K. Shah, Existence and stability for fractional order pantograph equations with nonlocal conditions, Electron. J. Differ. Equ., 132 (2020), 1–16.

[8] J. Wang, Y. Zhang, Ulam-Hyers-Mittag-Leffler stability of fractional-order delay differential equations, Optimization, 63 (2014), 1181–1190. https ://doi.org/10.1080/02331934.2014.906597

[9] K. Balachandran, S. Kiruthika, J. J. Trujillo, Existence of solutions of nonlinear fractional pantograph equations, Acta Math. Sci., 33 (2013), 712–720. https ://doi.org/10.1016/S0252- 9602(13)60032-6

[10] M. Ahmad, J. Jiang, A. Zada, Z. Ali, Z. Fu, J. Xu, Hyers-Ulam-Mittag-Leffler stability for a system of fractional neutral differential equations, Discrete Dyn. Nat. Soc., 2020 (2020), 2786041. https ://doi.org/10.1155/2020/2786041

[11] M. Houas, M, Bezziou, Existence of solutions for neutral Caputo-type fractional integrodifferential equations with nonlocal boundary conditions, Commun. Optim. Theory, 2021 (2021), 10

[12] M. Houas, Z. Dahmani, On existence of solutions for fractional differential equations with nonlocal multi-point boundary conditions, Lobachevskii J. Math., 37 (2016), 120–127. https ://doi.org/10.1134/S1995080216020050

[13] M.Houas, K.Kaushik, A.Kumar, A.Khan, Thabet Abdeljawad ;Existence and stability results of pantograph equation with three sequential fractional derivatives ;AIMS Mathematics, 8(3) : 5216–5232.http ://www.aimspress.com/journal/Math.

[14] S. Y. Lin, Generalized Gronwall inequalities and their applications to fractional differential equations, J. Inequal. Appl., 2013 (2013), 549. https ://doi.org/10.1186/1029-242X-2013-549

[15] S. K. Ntouyas, A. Alsaedi, B. Ahmad, Existence theorems for mixed Riemann-Liouville and Caputo fractional differential equations and inclusions with nonlocal fractional integro-differential boundary conditions, Fractal Fract., 3 (2019), 21. https ://doi.org/10.3390/fractalfract3020021

[16] S. M. Hoseini, Optimal control of linear pantograph-type delay systems via composite Legendre method, J. Franklin Inst., 357 (2020), 5402–5427. https ://doi.org/10.1016/j.jfranklin.2020.02.051

[17] Z. H. Yu, Variational iteration method for solving the multi-pantograph delay equation, Phys. Lett. A, 372 (2008), 6475–6479. https ://doi.org/10.1016/j.physleta.2008.09.013