

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de L'Enseignement Supérieur et de la
Recherche Scientifique

Université Djilali Bounâama Khemis Miliana

FACULTÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE
Département de Mathématiques et Informatique



Mémoire de fin d'étude

*En vue de l'obtention d'un diplôme de **Master Mathématiques***
Filière : Mathématiques
Spécialité : Analyse Mathématique et Applications

Thème

**Problèmes aux limites pour les équation
différentielles d'ordre arbitraire : Existence et
stabilité**

Présenté par : BOUYEKHF NADJET

Devant le jury composé de :

Examineur 1 :	Mr M. BOUDERBALA	Univ. Djilali Bounâama.
Examineur 2 :	Mr M. BEZZIOU	Univ. Djilali Bounâama.
Encadreur	Mr M. HOUASS	Univ. Djilali Bounâama.

Année Universitaire : 2020/2021

Dédicace

C'est avec plaisir que je présente mes meilleurs vœux et sentiments et à

toute mes **chers professeurs** et à

toute **ma famille**, en particulier

mes parents.

mon mari Sid Ahmed.

Je dédie ce travail à tous mes

chers amis

sans exception

Remerciement

En premier lieu, je remercie "ALLAH" le tout puissant qui m'a donné la force, la volonté et le courage pour accomplir ce modeste travail.

*Je remercie **Dr.Mohamed HOUASS**, ma encadrant de mémoire de fin d'étude, pour ses précieux conseils et son orientation ficelée tout au long de notre recherche.*

Je veux exprimer mes remerciements les plus dévoués aux membres de jury qui m'ont honorés en acceptant d'évaluer ce travail.

mes remerciements s'étendent également à tous mes enseignants durant les années des études.

A mes familles et mes amis qui par leurs prières et leur encouragements, on a pu surmonter tous les obstacles.

Je profite l'occasion ainsi à adresser mes remerciements à mes collègues de lissance.

Je remercie toute personne qui a participé et contribué de près ou de loin à l'exécution de ce modeste travail.

Merci

Résumé

L'étude des équations différentielles d'ordre fractionnaire joue un rôle important dans la modélisation de nombreux processus physiques, technologiques et biologiques. Depuis quelques années, une attention particulière a été focalisée à l'étude de l'existence et l'unicité de solutions des équations différentielles fractionnaires. De plus, une attention considérable a été accordée récemment à l'étude de la stabilité au sens de Ulam-Hyers. Dans ce mémoire, on traitera la question d'existence, d'unicité et la stabilité au sens de Ulam-Hyers de la solution d'une équation différentielle fractionnaire avec deux dérivées fractionnaires au sens de Caputo.

Notations Utilisées

Pour facilité la lecture, on commence par introduire les différentes notations utilisées tout au long de ce travail.

- ◇. \mathbb{N} : Ensemble des nombres entiers naturels.
 - ◇. \mathbb{R} : Ensemble des nombres réels.
 - ◇. \mathbb{C} : Ensemble des nombres complexes.
 - ◇. $C([0, T], \mathbb{R})$: Espace des fonctions continues sur $[0, T]$ à valeurs dans \mathbb{R} .
 - ◇. $Re(\alpha)$: La partie réels de nombre $\alpha \in \mathbb{C}$.
 - ◇. $\Gamma(\cdot)$: La fonction Gamma.
 - ◇. $\beta(\cdot, \cdot)$: La fonction Bêta.
 - ◇. B_r : La boule fermé de centre 0 et de rayon r .
 - ◇. $\| \cdot \|_{\infty}$: Norme infinie.
 - ◇. $\| \cdot \|_X$: Norme de l'espace X .
 - ◇. D^n (ou $\frac{d^n}{dt}$) : Dérivée d'ordre n .
 - ◇. $f^{(n)}$: Dérivée n-ième de f .
 - ◇. $I_a^\alpha f$: Intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha > 0$
 - ◇. ${}^c D_a^\alpha f$: Dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre $\alpha > 0$
- Dans le cas où $a = 0$, les opérateurs : $I_a^\alpha, {}^c D_a^\alpha$ sont notés : $I^\alpha, {}^c D^\alpha$.

Table des matières

Introduction	6
1 Préliminaires sur le calcul fractionnaire.	7
1 Calcul fractionnaire	7
1.1 Fonction de base	7
1.2 Intégration Fractionnaire	8
1.3 Dérivation Fractionnaire	9
1.4 Quelques théorèmes du point fixe	11
2 Problème fractionnaire avec deux dérivées fractionnaires au sens de Caputo	14
0.1 Lemmes auxiliaires :	15
0.2 Problème du Point fixe	17
0.3 Existence et unicité	18
0.4 Existence	23
0.5 Résulta d'existence via le théorème du point fixe de Krasnoselskii	23
3 Stabilité au sens de Ulam-Hyers	31
1 Stabilité d'une équation différentielles avec deux dérive fractionnaire au sens de Caputo.	31
1.1 Stabilité au sens de Ulam-Hyers généralisé	32
1.2 Stabilité au sens de Ulam-Hyers Rassias	32
1.3 Stabilité au sens de Ulam-Hyers Rassias généralisé	32
1.4 Étude de la Stabilité	33
Bibliographie	36

Introduction

La théorie des équations différentielles fractionnaires est l'un des plus importants champs d'applications de la théorie du calcul fractionnaire. Depuis quelques années, une attention considérable a été focalisée à l'étude de l'existence et l'unicité de solutions des équations différentielles d'ordre arbitraire. De plus, une attention particulière a été accordée récemment à l'étude de la stabilité au sens de Ulam-Hyers pour telles équations différentielles fractionnaires. Dans ce mémoire, on s'intéresse à l'étude de l'existence, l'unicité et la stabilité au sens de Ulam-Hyers de la solution d'une équation différentielle d'ordre fractionnaire avec deux dérivées fractionnaires au sens de Caputo. Ce mémoire se décompose en trois chapitres :

chapitre 1 :

C'est un rappel de quelques définitions, notions de base, résultats sur la dérivation fractionnaire et quelques théorèmes de point fixe utilisés dans ce travail.

chapitre 2 :

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'étude de l'existence et l'unicité des solutions pour le problème fractionnaire suivant :

$$\begin{cases} {}^c D^\alpha ({}^c D^\beta + \lambda)x(t) = f(t, x(t)), & t \in [0, 1], \\ x(0) = \int_0^1 g(x)x(s)ds, \\ I^p x(1) = I^p x(\eta), \end{cases} \quad (1)$$

L'idée est que transformer ce problème en un problème du point fixe et le point fixe déterminé est considéré soit comme une solution unique pour le problème, soit l'une de ses solutions. On donne deux résultats, le premier est un résultat d'unicité obtenu par utilisation du théorème de point fixe de Banach. Le deuxième est un résultat d'existence basé respectivement sur le théorème de Krasnoselskii. On terminera chaque résultat par un exemple illustratif.

chapitre 3 :

L'objet de ce chapitre est l'étude de la stabilité au sens de Ulam-Hyers du problème traité dans le chapitre 2.

On terminera par une conclusion qui rassemble tout ce qui était fait.

Préliminaires sur le calcul fractionnaire.

Dans ce chapitre, on introduit les notions nécessaires qu'on va utiliser dans ce travail.[5, 6, 9, 11, 12]

1 Calcul fractionnaire

1.1 Fonction de base

Fonction Gamma d'Euler

la fonction Gamma d'Euler est tout simplement la généralisation de la notion de factoriel d'un entier à tous les nombres réels ou complexes.

Définition 1. Pour tout nombre complexe α , de partie réelle positive, la fonction Gamma est définie par l'intégrale suivant :

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx. \quad (1.1)$$

Cette intégrale converge absolument sur le demi-plan complexe où la partie réelle est strictement positive.

Propriétés 1. On a la relation suivante :

$$\begin{aligned} -\Gamma(\alpha + 1) &= \alpha\Gamma(\alpha), \quad Re(\alpha) \geq 0. \\ -\Gamma(n + 1) &= n! \text{ et } \Gamma(1) = 1. \text{ Ceci est due à } \Gamma(.) \text{ est la généralisation de la factorielle.} \\ -\Gamma(\alpha + n + 1) &= \prod_{i=0}^n (\alpha + i)\Gamma(\alpha). \end{aligned}$$

Fonction Bêta d'Euler

Définition 2. On appelle fonction Bêta d'Euler la fonction donnée par :

$$\beta(p, q) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt, \quad Re(p) > 0, \quad Re(q) > 0. \quad (1.2)$$

La relation entre la fonction Gamma et Bêta

Définition 3. La fonction Bêta est liée à la fonction Gamma par la relation suivante :

$$\beta(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \quad \operatorname{Re}(p) > 0, \quad \operatorname{Re}(q) > 0. \quad (1.3)$$

1.2 Intégration Fractionnaire

Intégrale de Riemann-Liouville

Définition 4. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et intégrable, on appelle intégrale de Riemann-Liouville de f l'intégrale suivante :

$$(I_a^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad x \in [a, b], \quad \alpha > 0. \quad (1.4)$$

Où Γ est la fonction Gamma d'Euler.

Exemple 1 : On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = x^\beta, \quad x \in [a, b], \quad \beta \in \mathbb{R}. \quad (1.5)$$

On va calculer l'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville de f d'ordre α (α réel strictement positive).

$$I_a^\alpha(x^\beta) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} (t^\beta) dt.$$

Alors

$$\begin{aligned} I_a^\alpha x^\beta &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \left(x(1 - \frac{t}{x})\right)^{\alpha-1} \left(\frac{t}{x}\right)^\beta x^\beta dt. \\ &= \frac{x^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \left(1 - \frac{t}{x}\right)^{\alpha-1} \left(\frac{t}{x}\right)^\beta dt. \end{aligned}$$

à l'aide de changement de variable $y = \frac{t}{x}$ on obtient :

$$\begin{aligned} dy &= \frac{dt}{x} \Rightarrow dt = x dy. \\ t = 0 &\Rightarrow y = 0. \\ t = x &\Rightarrow y = 1. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} I^\alpha(x^\beta) &= \frac{x^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-y)^{\alpha-1} y^\beta dy. \\ &= \frac{x^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \beta(\alpha, \beta+1) \\ &= \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+\beta+1)} x^{\alpha+\beta} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} x^{\alpha+\beta} \end{aligned}$$

D'où

$$I^\alpha x^\beta = \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)} x^{\alpha+\beta} \quad (1.6)$$

Cas particulier où $\alpha = 1$ d'après (1.6) on déduit que :

$$I^\alpha x^\beta = \frac{1}{\beta + 1} x^{1+\beta}$$

Cas particulier où $\beta = 0$, on a dans ce cas :

$$(I^\alpha 1)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} x^\alpha.$$

Proposition 1. Soit $f \in C([a, b])$, pour α, β des nombres complexes, l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville possède la propriété de semi-groupe suivante :

$$I_a^\alpha (I_a^\beta f(x)) = I_a^{\alpha+\beta} f(x) \text{ pour } \alpha > 0, \quad \beta > 0. \quad (1.7)$$

Et pour $Re(\alpha) > 1$ on a :

$$\frac{d}{dx} I_a^\alpha f = I_a^{\alpha-1} f. \quad (1.8)$$

Linéarité : Soient f et g deux fonctions continues, définies sur $[a, b]$ dans \mathbb{R} .
 $\forall \lambda, \rho \in \mathbb{R}$, on a :

$$I_a^\alpha (\lambda f(t) + \rho g(t)) = \lambda I_a^\alpha f(t) + \rho I_a^\alpha g(t), \quad \alpha > 0.$$

1.3 Dérivation Fractionnaire

Dérivées fractionnaire au sens de Caputo

Définition 5. Soit $\alpha \in]m - 1, m[$, ($m \in \mathbb{N}^*$) et suppose que $f \in C^m([a, b], \mathbb{R})$, on appelle dérivée de f au sens de Caputo la fonction définie par :

$$({}^c D_a^\alpha f)(t) = (I_a^{m-\alpha} f^{(m)})(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(s) ds. \quad (1.9)$$

Exemple 2. Soit $f(x) = (x-a)^\beta$, $x \in [a, b]$, on a :

$$\begin{aligned} {}^c D_a^\alpha (x-a)^\beta &= I_a^{m-\alpha} \left[\left(\frac{d}{dx} \right)^m (x-a)^\beta \right] \\ &= I_a^{m-\alpha} \left(\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-m)} (x-a)^{\beta-m} \right) \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-m)} I_a^{m-\alpha} (x-a)^{\beta-m} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-m)} \frac{\Gamma(\beta+1-m)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)} (x-a)^{\beta-\alpha}. \end{aligned}$$

Alors

$${}^c D_a^\alpha (x-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)} (x-a)^{\beta-\alpha}. \quad (1.10)$$

Remarque 1. La dérivée d'ordre fractionnaire au sens de Caputo d'une constante est nulle .
D'après (1.9), on a :

$${}^c D_a^\alpha C = I_a^{m-\alpha}(0) = 0. \quad (1.11)$$

Quelques propriétés

* La dérivation fractionnaire au sens de Caputo est une opération linéaire,

$${}^c D^\alpha(\lambda f(t) + \mu g(t)) = \lambda {}^c D^\alpha f(t) + \mu {}^c D^\alpha g(t).$$

* ${}^c D^\alpha({}^c D^\beta f(t)) = {}^c D^{\alpha+\beta} f(t) = {}^c D^\beta({}^c D^\alpha f(t))$ où $f \in C^1([0, T], \mathbb{R})$, $0 < \alpha, \beta < 1$ et $0 < \alpha + \beta < 1$.

* Si ${}^c D_0^\alpha f(x) = 0$ alors $f(x) = \sum_{j=0}^{m-1} c_j x^j$, $x \in [0, b]$.

* $I_0^\alpha [{}^c D_0^\alpha f] = f(x) - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(x)^j}{\Gamma(j+1)} f^{(j)}(0)$, $x \in [0, b]$.

* ${}^c D^\alpha(I^\alpha f(t)) = f(t)$.

1.4 Quelques théorèmes du point fixe

Les équations différentielles fractionnaires sont considérés comme des équations différentielles non-linéaires, alors plusieurs théorèmes ont été utilisés pour résoudre ce type d'équation. L'un des méthodes les plus utilisées : les théorèmes du point fixe. En effet, ces théorèmes accordent des conditions suffisantes pour assurer l'existence d'un point fixe pour une fonction donnée.

Dans le cas des EDPs, on transforme un problème donné en un problème du point fixe . Les point fixe du problème transformé sont ainsi les solution du problème donné.

Dans cette section , on étudie quelques théorèmes du point fixe de Banach, Schaefer, Leray-Schauder et Krasnoselskii.

Définitions

Définition 6. Soit E un espace vectoriel sur le corps des nombres réels \mathbb{R} ou sur le corps des nombres complexes \mathbb{C} . On appelle norme sur E une application de E dans \mathbb{R}_+ notée $x \rightarrow \|x\|$ satisfaisant les condition suivantes :

1. $\forall x \in E : \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0_E, \quad \forall x \in E.$

2. $\forall \lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C}) : \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| .$

3. $\forall x, y \in E : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| .$

Définition 7. Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés sur le même corps K , alors l'espace produit $E \times F = (x, y) / x \in E \quad \text{et} \quad y \in F$ est un espace vectoriel normé sur K par l'une des normes suivantes :

1. $\|(x, y)\|_1 = \|x\|_E + \|y\|_F .$

2. $\|(x, y)\|_p = (\|x\|_E^p + \|y\|_F^p)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p \leq \infty.$

3. $\|(x, y)\|_\infty = \max \{ \|x\|_E, \|y\|_F \} .$

Définition 8. On dit qu' un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|_E)$ est **complet** (ou que c'est un espace de Banach) si toute suite de Cauchy dans E est convergente.

Définition 9. On dit que A est une partie **compact** de $(E, \|\cdot\|_E)$ si de toute suite de points de A on peut extraire une sous-suite qui converge vers un élément de A .

Définition 10. Une partie A de $(E, \|\cdot\|_E)$ est dite **relativement compact** si son adhérence est compact.

Définition 11. Soient E et F deux espace de Banach, et $A : E \rightarrow F$ une application linéaire. On dit que A est **borné** si elle envoie les parties bornées de E sur des parties bornées de F .

Définition 12. Soit A un sous ensemble de $C([0, T], \mathbb{R})$, A est **uniformément borné**. i. e ; il existe une constante $K > 0$ tel que : $\|f(x)\| \leq K$, pour tout $x \in [0, T]$ et tout $f \in A$.

Définition 13. Soient E et F deux espaces de Banach et f une application définie de E à valeurs dans F . On dit que f est **complètement continue** si elle est continue et transforme tout **borné** de E en un ensemble **relativement compact** dans F . f est dite compact si $f(E)$ est relativement compact dans F .

Définition 14. Soit A un sous ensemble de $C([0, T], \mathbb{R})$, l'ensemble A est **equicontinue**. i.e; pour tout $\epsilon > 0$, pour tout $t_1, t_2 \in [0, T]$ et tout $f \in A$, il existe $\delta > 0$ tel que :

$$|t_1 - t_2| < \delta \Rightarrow \|f(t_1) - f(t_2)\| \leq \epsilon.$$

Définition 15. Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace vectorielle normé, une application $A : X \mapsto X$ est dite **contractante**, s'il existe un nombre positif $K \in]0, 1[$ tel que $\forall x, y \in X$, on a :

$$\|Ax - Ay\| \leq K \|x - y\|.$$

Définition 16. Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace vectorielle normé et $A : X \mapsto X$ une application. On appelle **point fixe** de A tout point $x \in X$ tel que : $Ax = x$.

Théorème d'Ascoli-Arzela

Théorème 1.[8] Soit A un sous ensemble de $C([0, T], \mathbb{R})$, A est relativement compact dans $C([0, T], \mathbb{R})$ si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :

1. L'ensemble A est uniformément borné. i.e il existe une constante $K > 0$ telle que :

$$\|f(x)\| \leq K \text{ pour tout } x \in j \text{ et tout } f \in A$$

2. L'ensemble A est equicontinue. i.e pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$|t_1 - t_2| < \delta \Rightarrow \|f(t_1) - f(t_2)\| \leq \epsilon \text{ pour tout } t_1, t_2 \in j \text{ et tout } f \in A.$$

3. Pour tout $x \in [0, T]$ l'ensemble $\{f(t), f \in A\} \subset E$ est relativement compact.

Théorème de point fixe de Banach

Théorème 2.[7] Soit X un espace de Banach, et $A : X \mapsto X$ un opérateur contractant. Alors A admet un point fixe unique. i.e; $\exists x \in X$ tel que $Ax = x$.

Théorème de point fixe de schauder

Théorème 3. Soit X un espace de Banach et M un convexe fermé borné de X et $A : M \mapsto M$ un opérateur continue et compact alors A admet au moins un point fixe.

L'alternative non linéaire de Leray-Schauder

Théorème 4. Soit E un espace de Banach, C un sous-ensemble convexe fermé de E , U un sous-ensemble ouvert de C et $0 \in U$. l'opérateur $\phi : \bar{U} \rightarrow C$ est continue et compact (c'est-à-dire que

$\phi(\overline{U})$ est un sous-ensemble relativement compact de C). Alors, ou bien

1. L'application ϕ admet un point fixe dans \overline{U} , sinon

2. Il existe $x \in \partial U$ et $\sigma \in [0, 1]$ avec, $x = \sigma T x$.

Théorème de point fixe de Krasnoselski

Théorème 5.[5] Soit X un espace de Banach et M un ensemble fermé borné et convexe de X . On suppose que A_1, A_2 sont deux opérateurs de X satisfaisants :

1. $A_1 x + A_2 y \in M, \quad \forall x, y \in M$.

2. A_1 est compacte et continue.

3. A_2 est contractante.

Alors il existe au moins un élément $z \in M$ tel que : $A_1 z + A_2 z = z$.

Théorème de point fixe de Schaefer

Théorème 6.[7, 8] Soit X un espace de Banach et $A : X \mapsto X$ un opérateur complètement continu si :

$$\Omega = \{x \in X : x = \lambda A x, \forall \lambda \in]0, 1[\}$$

est borné, alors A possède au moins un point fixe.

Remarque 1. Soit (x_n) une suite de E . Alors (x_n) converge vers x dans $(E, \| \cdot \|)$ si et seulement si :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \| x_n - x \|_E = 0.$$

Problème fractionnaire avec deux dérivées fractionnaires au sens de Caputo

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'étude de l'existence et l'unicité des solutions pour un problème fractionnaire avec dérivées fractionnaires au sens de Caputo.

Soit le problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} {}^c D^\alpha ({}^c D^\beta + \lambda)x(t) = f(t, x(t)), \quad t \in [0, 1], \\ x(0) = \int_0^1 g(x)x(s)ds, \\ I^p x(1) = I^p x(\eta), \end{array} \right. \quad (2.1)$$

Où $0 < \alpha, \beta < 1, 1 < \alpha + \beta \leq 2$, ${}^c D^\alpha$ et ${}^c D^\beta$ sont des dérivées fractionnaires au sens de Caputo d'ordre α et β respectivement, $\lambda \in \mathbb{R}$, $f : [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue et $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est aussi une fonction continue.

On va étudier l'existence et l'unicité de la solution à l'aide de principe de contraction de Banach. Puis, on montre l'existence de solutions pour le problème(2,1). est montre par utilisation du théorème de point fixe de Krasnoselskii.

L'existence et unicité d'une solution est établit par la transformation de ce problème à une équation intégrale équivalente, dont la solution est identifiée à un point fixe d'un opérateur .

0.1 Lemmes auxiliaires :

Lemme 1. [9] Si $\beta \geq \alpha > 0$ et la dérivée fractionnaire ${}^c D_a^{\beta-\alpha}$ existe, alors on a :

$${}^c D^\beta I^\beta f(t) = {}^c D^{\beta-\alpha} f(t), \quad t \in [0, T].$$

Pour $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ avec $\beta < \alpha$, on a :

$${}^c D^\beta I^\alpha f(t) = I^{\alpha-\beta} f(t), \quad t \in [0, T].$$

Lemme 2.[9] Soit $h \in C^m([0, T], \mathbb{R})$, $m \in \mathbb{N}^*$, pour $\alpha \in]m-1, m[$, la solution générale de l'équation différentielle ${}^c D^\alpha h(t) = 0$ est donnée par :

$$h(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \cdots + c_{m-1} t^{m-1}. \quad (2.2)$$

où $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \dots, m-1$, $m = [\alpha] + 1$.

Preuve. Soit $h \in C^m([0, T], \mathbb{R})$, $m \in \mathbb{N}^*$, pour $\alpha \in]m-1, m[$, on a par la définition de la dérivée fractionnaire de Caputo

$${}^c D^\alpha h(t) = 0 \Rightarrow I^{m-\alpha} D^m h(t) = 0.$$

En appliquant $D^{m-\alpha}$, on trouve :

$$D^m h(t) = 0.$$

Donc, h est un polynôme de degré $\leq m-1$:

$$\begin{aligned} h(t) &= \sum_{i=0}^{m-1} c_i t^i \\ &= c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \cdots + c_{m-1} t^{m-1}. \end{aligned}$$

Lemme 3.[9] Soit $h \in C^m([0, T], \mathbb{R})$, $m \in \mathbb{N}^*$, pour $\alpha \in]m-1, m[$, on a :

$$I^\alpha ({}^c D^\alpha h(t)) = h(t) + c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \cdots + c_{m-1} t^{m-1}. \quad (2.3)$$

Pour tout $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \dots, m-1$, $m = [\alpha] + 1$.

Prouve. Soit $h \in C^m([0, T], \mathbb{R})$, $m \in \mathbb{N}^*$, pour $\alpha \in]m - 1, m[$, on obtient ;

$$\begin{aligned}
I^\alpha({}^c D^\alpha h(t)) &= I^\alpha I^{m-\alpha} D^m h(t) \\
&= I^{\alpha+m-\alpha} D^m h(t) \\
&= I^m D^m h(t) \\
&= h(t) + \sum_{i=0}^{m-1} c_i t^i \\
&= h(t) + c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \cdots + c_{m-1} t^{m-1}.
\end{aligned}$$

Lemme 4.[3, 4] Soit $h \in C([0, 1], \mathbb{R})$, alors la solution du problème fractionnaire suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l}
{}^c D^\alpha({}^c D^\beta + \lambda)x(t) = h(t) \quad t = [0, 1], \quad 0 < \alpha, \quad \beta \leq 1 \\
x(0) = \int_0^1 g(x)x(s)ds \\
I^p x(1) = I^p x(\eta)
\end{array} \right. \quad (2.4)$$

est donné par :

$$\begin{aligned}
x(t) &= I^{\alpha+\beta} h(t) - \lambda I^\beta x(t) \\
&+ t^\beta \frac{\Gamma(\beta + p + 1)}{\Gamma(\beta + 1)(1 - \eta^{\beta+p})} I^{\alpha+\beta+p} \\
&- t^\beta \frac{\lambda \Gamma(\beta + p + 1)}{\Gamma(\beta + 1)(1 - \eta^{\beta+p})} I^{\beta+p} x(\eta) \\
&- t^\beta \frac{\Gamma(\beta + p + 1)}{\Gamma(\beta + 1)(1 - \eta^{\beta+p})} I^{\alpha+\beta+1} h(1) \\
&+ \frac{t^\beta \lambda \Gamma(\beta + p + 1)}{\Gamma(\beta + 1)(1 - \eta^{\beta+p})} I^{\beta+p} x(1) \\
&+ \left[\frac{t^\beta \Gamma(\beta + p + 1)(\eta^p - 1)}{(1 - \eta^{\beta+p})\Gamma(\beta + 1)\Gamma(p + 1)} + 1 \right] \int_0^1 g(s)x(s)ds.
\end{aligned} \quad (2.5)$$

Prouve. Soit l'équation :

$${}^c D^\alpha({}^c D^\beta + \lambda)x(t) = h(t). \quad (2.6)$$

En prenant l'intégrale de Riemann-Liouville fractionnaire d'ordre α pour (2.4), on obtient :

$$I^\alpha [{}^c D^\alpha({}^c D^\beta + \lambda)x(t)] = I^\alpha h(t).$$

Par lemme 3, on trouve :

$$({}^c D^\alpha + \lambda)x(t) + c_0 = I^\alpha h(t).$$

Alors :

$${}^c D^\beta x(t) = I^\alpha h(t) - \lambda x(t) + c_0 \quad (2.7)$$

En prenant l'intégrale de Riemann-Liouville fractionnaire d'ordre β pour (2.5), on obtient :

$$I^\beta ({}^c D^\beta)x(t) = I^\alpha + \beta h(t) - \lambda I^\beta x(t) + c_0 \frac{t^\beta}{\Gamma(\beta + 1)}$$

Par lemme 3, on trouve :

$$x(t) + c_1 = I^{\alpha+\beta} h(t) - \lambda I^\beta x(t) + c_0 \frac{t^\beta}{\Gamma(\beta + 1)}$$

Alors, la solution générale du problème (2.2) est exprimée sous la forme de l'équation intégrale suivante :

$$x(t) = I^{\alpha+\beta} h(t) - \lambda I^\beta x(t) + c_0 \frac{t^\beta}{\Gamma(\beta + 1)} + c_1. \quad (2.8)$$

où c_0 et c_1 sont des constants arbitraire. Maintenant, on cherche les constantes c_0 et c_1 . D'après la condition $x(0) = \int_0^1 g(s)x(s)ds$, on peut écrire :

$$x(0) = c_1 = \int_0^1 g(s)x(s)ds$$

Ce qui donne :

$$c_1 = \int_0^1 g(s)x(s)ds$$

Alors (2.6) devient :

$$x(t) = I^{\alpha+\beta} h(t) - \lambda I^\beta x(t) + c_0 \frac{t^\beta}{\Gamma(\beta + 1)} + \int_0^1 g(s)x(s)ds$$

On utilise la condition $I^p x(1) = I^p x(\eta)$, on trouve :

$$I^p x(t) = I^{\alpha+\beta+P} h(t) - \lambda I^{\beta+P} x(t) + c_0 \frac{t^{\beta+p}}{\Gamma(\beta + P + 1)} + c_1 \frac{t^p}{\Gamma(p + 1)}$$

Alors :

$$I^p x(1) = I^{\alpha+\beta+P} h(1) - \lambda I^{\beta+P} x(1) + \frac{c_0}{\Gamma(\beta + P + 1)} + \frac{c_1}{\Gamma(p + 1)}$$

Et

$$I^p x(\eta) = I^{\alpha+\beta+P} h(\eta) - \lambda I^{\beta+P} x(\eta) + c_0 \frac{\eta^{\beta+p}}{\Gamma(\beta + P + 1)} + c_1 \frac{\eta^p}{\Gamma(p + 1)}$$

Donc :

$$c_0 = \frac{\Gamma(\beta + p + 1)}{1 - \eta^{\beta+p}} \left[I^{\alpha+\beta+p} h(\eta) - \lambda I^{\beta+p} x(\eta) - I^{\alpha+\beta+1} h(1) + \lambda I^{\beta+p} x(1) + c_1 \frac{\eta^p - 1}{\Gamma(p + 1)} \right]$$

Substituant c_0 et c_1 en (2.6), on obtient la solution (2.3).

0.2 Problème du Point fixe

Avant tout, on introduit l'espace de Banach suivant :

$$X = \{x : x(t) \in C^1([0, 1], \mathbb{R})\}$$

Meni de la norme

$$\| x \| = \sup_{t \in [0,1]} \{ | x(t) |, t \in [0, 1] \}$$

Maintenant, on définit l'opérateur

$$\begin{aligned} A : X &\longrightarrow X. \\ x(t) &\longrightarrow Ax(t). \end{aligned}$$

Tell que $\forall t \in [0, 1]$, on a :

$$\begin{aligned} Ax(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha + \beta)} \int_0^t (t - s)^{\alpha + \beta - 1} f(s, x(s)) ds \\ &\quad - \frac{\lambda}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t - s)^{\beta - 1} x(s) ds \\ &\quad + t^\beta \frac{\Gamma(\beta + p + 1)}{\Gamma(\beta + 1)(1 - \eta^{\beta + p})\Gamma(\alpha + \beta + p)} \int_0^\eta (\eta - s)^{\alpha + \beta + p - 1} f(s, x(s)) ds \\ &\quad - t^\beta \frac{\lambda \Gamma(\beta + p + 1)}{\Gamma(\beta + 1)(1 - \eta^{\beta + p})\Gamma(\beta + p)} \int_0^\eta (\eta - s)^{\beta + p - 1} x(s) ds \\ &\quad - t^\beta \frac{\Gamma(\beta + p + 1)}{\Gamma(\beta + 1)(1 - \eta^{\beta + p})\Gamma(\alpha + \beta + 1)} \int_0^1 (1 - s)^{\alpha + \beta} f(s, x(s)) ds \\ &\quad + t^\beta \frac{\lambda \Gamma(\beta + p + 1)}{\Gamma(\beta + 1)(1 - \eta^{\beta + p})\Gamma(\beta + p)} \int_0^1 (1 - s)^{\beta + p - 1} x(s) ds \\ &\quad + \left[t^\beta \frac{\Gamma(\beta + p + 1)(\eta^p - 1)}{(1 - \eta^{\beta + p})\Gamma(\beta + 1)\Gamma(p + 1)} + 1 \right] \int_0^1 g(s) x(s) ds. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Il convient de noter que le problème (2.1) a des solution si et seulement si l'opérateur A a des points fixes.

0.3 Existence et unicité

On va donner l'unicité de la solution du problème fractionnaire (2.1), en utilisant le théorème de contraction de Banach.

Théorème 7 : [3, 4] Soit $f : [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue. On suppose que :

(H1) : Il existe une constante $k > 0$ telle que :

$$| f(t, x) - f(t, y) | \leq k | x - y |,$$

pour tout $t \in [0, 1]$, et $x, y \in \mathbb{R}$

(H2) : La fonction g est continue sur $[0, 1]$ et $| g(t) | \leq M_g$.

(H3) : $M < 1$, où M définies par :

$$\begin{aligned} M &= \frac{K}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)} + \frac{|\lambda|}{\Gamma(\beta + 1)} \\ &\quad + \frac{K\Gamma(\beta + p + 1)\eta^{\alpha + \beta + p}}{\Gamma(\beta + 1)(1 - \eta^{\beta + p})\Gamma(\alpha + \beta + p + 1)} + \frac{|\lambda| \eta^{\beta + p}}{\Gamma(\beta + 1)(1 - \eta^{\beta + p})} \\ &\quad + \frac{K\Gamma(\beta + p + 1)}{\Gamma(\beta + 1)(1 - \eta^{\beta + p})\Gamma(\alpha + \beta + 2)} + \frac{|\lambda|}{\Gamma(\beta + 1)(1 - \eta^{\beta + p})} \\ &\quad + \left[\frac{\Gamma(\beta + p + 1)(\eta^p - 1)}{(1 - \eta^{\beta + p})\Gamma(\beta + 1)\Gamma(p + 1)} + 1 \right] M_g. \end{aligned}$$

Alors, il existe une solution unique pour le problème (2.1).

Preuve. Le théorème de contraction de Banach appui sur le fait que si A est un opérateur contractant, alors il existe un point fixe pour A . De là vient l'idée de chercher l'existence d'une constante $M > 0$.

pour tout $x, y \in X$ et $t \in [0, 1]$, alors on montre qu'il existe M tel que :

$$\| A(x) - A(y) \| < M \| x - y \|_X \quad \text{avec } M < 1.$$

soient $x, y \in X$ Alors :

$$\begin{aligned} | Ax(t) - Ay(t) | &= \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha + \beta)} \int_0^t (t - s)^{\alpha + \beta - 1} f(s, x(s)) ds \right. \\ &\quad - \frac{\lambda}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t - s)^{\beta - 1} x(s) ds \\ &\quad + t^\beta \frac{\Gamma(\beta + p + 1)}{\Gamma(\beta + 1)(1 - \eta^{\beta + p})\Gamma(\alpha + \beta + p)} \int_0^\eta (\eta - s)^{\alpha + \beta + p - 1} f(s, x(s)) ds \\ &\quad - t^\beta \frac{\lambda \Gamma(\beta + p + 1)}{\Gamma(\beta + 1)(1 - \eta^{\beta + p})\Gamma(\beta + p)} \int_0^\eta (\eta - s)^{\beta + p - 1} x(s) ds \\ &\quad - t^\beta \frac{\Gamma(\beta + p + 1)}{\Gamma(\beta + 1)(1 - \eta^{\beta + p})\Gamma(\alpha + \beta + 1)} \int_0^1 (1 - s)^{\alpha + \beta} f(s, x(s)) ds \\ &\quad + t^\beta \frac{\lambda \Gamma(\beta + p + 1)}{\Gamma(\beta + 1)(1 - \eta^{\beta + p})\Gamma(\beta + p)} \int_0^1 (1 - s)^{\beta + p - 1} x(s) ds \\ &\quad + \left[t^\beta \frac{\Gamma(\beta + p + 1)(\eta^p - 1)}{(1 - \eta^{\beta + p})\Gamma(\beta + 1)\Gamma(p + 1)} + 1 \right] \int_0^1 g(s) x(s) ds \\ &\quad - \frac{1}{\Gamma(\alpha + \beta)} \int_0^t (t - s)^{\alpha + \beta - 1} f(s, y(s)) ds \\ &\quad + \frac{\lambda}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t - s)^{\beta - 1} y(s) ds + t^\beta \frac{\lambda \Gamma(\beta + p + 1)}{\Gamma(\beta + 1)(1 - \eta^{\beta + p})} \frac{1}{\Gamma(\beta + p)} \int_0^\eta (\eta - s)^{\beta + p - 1} y(s) ds \\ &\quad + t^\beta \frac{\Gamma(\beta + p + 1)}{\Gamma(\beta + 1)(1 - \eta^{\beta + p})} \frac{1}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)} \int_0^1 (1 - s)^{\alpha + \beta} f(s, y(s)) ds \\ &\quad - t^\beta \frac{\lambda \Gamma(\beta + p + 1)}{\Gamma(\beta + 1)(1 - \eta^{\beta + p})\Gamma(\beta + p)} \int_0^1 (1 - s)^{\beta + p - 1} y(s) ds \\ &\quad - \left[t^\beta \frac{\Gamma(\beta + p + 1)(\eta^p - 1)}{(1 - \eta^{\beta + p})\Gamma(\beta + 1)\Gamma(p + 1)} + 1 \right] \int_0^1 g(s) y(s) ds \Big|. \end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned}
|Ax(t) - Ay(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha + \beta)} \int_0^t (t-s)^{\alpha+\beta-1} |f(s, x(s)) - f(s, y(s))| ds \\
&+ \frac{|\lambda|}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} |x(s) - y(s)| ds \\
&+ t^\beta \frac{\Gamma(\beta + p + 1)}{\Gamma(\beta + 1)(1 - \eta^{\beta+p})\Gamma(\alpha + \beta + p)} \int_0^\eta (\eta - s)^{\alpha+\beta+p-1} |f(s, x(s)) - f(s, y(s))| ds \\
&+ t^\beta \frac{|\lambda| \Gamma(\beta + p + 1)}{\Gamma(\beta + 1)(1 - \eta^{\beta+p})\Gamma(\beta + p)} \int_0^\eta (\eta - s)^{\beta+p-1} |x(s) - y(s)| ds \\
&+ t^\beta \frac{\Gamma(\beta + p + 1)}{\Gamma(\beta + 1)(1 - \eta^{\beta+p})\Gamma(\alpha + \beta + 1)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha+\beta} |f(s, x(s)) - f(s, y(s))| ds \\
&+ t^\beta \frac{|\lambda| \Gamma(\beta + p + 1)}{\Gamma(\beta + 1)(1 - \eta^{\beta+p})\Gamma(\beta + p)} \int_0^1 (1-s)^{\beta+p-1} |x(s) - y(s)| ds \\
&+ \left[t^\beta \frac{\Gamma(\beta + p + 1)(\eta^p - 1)}{(1 - \eta^{\beta+p})\Gamma(\beta + 1)\Gamma(p + 1)} + 1 \right] \int_0^1 g(s) |x(s) - y(s)| ds.
\end{aligned}$$

En utilisant les hypothèses **(H1)** et **(H2)**, on obtient :

$$\begin{aligned}
|Ax(t) - Ay(t)| &\leq \frac{K}{\Gamma(\alpha + \beta)} \sup_{t \in [0,1]} |x(t) - y(t)| \int_0^t (t-s)^{\alpha+\beta-1} ds \\
&+ \frac{|\lambda|}{\Gamma(\beta)} \sup_{t \in [0,1]} |x(s) - y(s)| \int_0^t (t-s)^{\beta-1} ds \\
&+ t^\beta \frac{K\Gamma(\beta + p + 1)}{\Gamma(\beta + 1)(1 - \eta^{\beta+p})\Gamma(\alpha + \beta + p)} \sup_{t \in [0,1]} |x(t) - y(t)| \int_0^\eta (\eta - s)^{\alpha+\beta+p-1} ds \\
&+ t^\beta \frac{|\lambda| \Gamma(\beta + p + 1)}{\Gamma(\beta + 1)(1 - \eta^{\beta+p})\Gamma(\beta + p)} \sup_{t \in [0,1]} |x(s) - y(s)| \int_0^\eta (\eta - s)^{\beta+p-1} ds \\
&+ t^\beta \frac{K\Gamma(\beta + p + 1)}{\Gamma(\beta + 1)(1 - \eta^{\beta+p})\Gamma(\alpha + \beta + 1)} \sup_{t \in [0,1]} |x(t) - y(t)| \int_0^1 (1-s)^{\alpha+\beta} ds \\
&+ t^\beta \frac{|\lambda| \Gamma(\beta + p + 1)}{\Gamma(\beta + 1)(1 - \eta^{\beta+p})\Gamma(\beta + p)} \sup_{t \in [0,1]} |x(s) - y(s)| \int_0^1 (1-s)^{\beta+p-1} ds \\
&+ \left[t^\beta \frac{\Gamma(\beta + p + 1)(\eta^p - 1)}{(1 - \eta^{\beta+p})\Gamma(\beta + 1)\Gamma(p + 1)} + 1 \right] \sup_{t \in [0,1]} |x(s) - y(s)| \int_0^1 |g(s)| ds.
\end{aligned}$$

Par calcul simple, on trouve que :

$$\begin{aligned}
|Ax(t) - Ay(t)| &\leq \frac{Kt^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)} \sup_{t \in [0,1]} |x(t) - y(t)| \\
&+ \frac{t^\beta |\lambda|}{\Gamma(\beta + 1)} \sup_{t \in [0,1]} |x(s) - y(s)| \\
&+ t^\beta \frac{K\Gamma(\beta + p + 1)\eta^{\alpha+\beta+p}}{\Gamma(\beta + 1)(1 - \eta^{\beta+p})} \sup_{t \in [0,1]} |x(t) - y(t)| \\
&+ t^\beta \frac{|\lambda| \eta^{\beta+p}}{\Gamma(\beta + 1)(1 - \eta^{\beta+p})\Gamma(\beta + p)} \sup_{t \in [0,1]} |x(s) - y(s)| \\
&+ t^\beta \frac{K\Gamma(\beta + p + 1)}{\Gamma(\beta + 1)(1 - \eta^{\beta+p})\Gamma(\alpha + \beta + 2)} \sup_{t \in [0,1]} |x(s) - y(s)| \\
&+ t^\beta \frac{|\lambda|}{\Gamma(\beta + 1)(1 - \eta^{\beta+p})} \sup_{t \in [0,1]} |x(s) - y(s)| \\
&+ \left[t^\beta \frac{\Gamma(\beta + p + 1)(\eta^p - 1)}{(1 - \eta^{\beta+p})\Gamma(\beta + 1)\Gamma(p + 1)} + 1 \right] \sup_{t \in [0,1]} |x(s) - y(s)| M_g.
\end{aligned}$$

En passant à la norme, on trouve :

$$\begin{aligned}
\|Ax - Ay\| &\leq \frac{Kt^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)} \|x - y\| \\
&+ \frac{t^\beta |\lambda|}{\Gamma(\beta + 1)} \|x - y\| \\
&+ t^\beta \frac{K\Gamma(\beta + p + 1)\eta^{\alpha+\beta+p}}{\Gamma(\beta + 1)(1 - \eta^{\beta+p})\Gamma(\alpha + \beta + p + 1)} \|x - y\| \\
&+ t^\beta \frac{|\lambda| \eta^{\beta+p}}{\Gamma(\beta + 1)(1 - \eta^{\beta+p})} \|x - y\| \\
&+ t^\beta \frac{K\Gamma(\beta + p + 1)}{\Gamma(\beta + 1)(1 - \eta^{\beta+p})\Gamma(\alpha + \beta + 2)} \|x - y\| + t^\beta \frac{|\lambda|}{\Gamma(\beta + 1)(1 - \eta^{\beta+p})} \|x - y\| \\
&+ \left[t^\beta \frac{\Gamma(\beta + p + 1)(\eta^p - 1)}{(1 - \eta^{\beta+p})\Gamma(\beta + 1)\Gamma(p + 1)} + 1 \right] M_g \|x - y\|.
\end{aligned}$$

Donc comme $t \in [0, 1]$ on à :

$$\begin{aligned}
\|Ax - Ay\| &\leq \left[\frac{K}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)} \right. \\
&+ \frac{|\lambda|}{\Gamma(\beta + 1)} + \frac{K\Gamma(\beta + p + 1)\eta^{\alpha+\beta+p}}{\Gamma(\beta + 1)(1 - \eta^{\beta+p})\Gamma(\alpha + \beta + p + 1)} \\
&+ \frac{|\lambda| \eta^{\beta+p}}{\Gamma(\beta + 1)(1 - \eta^{\beta+p})} + \frac{K\Gamma(\beta + p + 1)}{\Gamma(\beta + 1)(1 - \eta^{\beta+p})\Gamma(\alpha + \beta + 2)} + \frac{|\lambda|}{\Gamma(\beta + 1)(1 - \eta^{\beta+p})} \\
&\left. + \left[\frac{\Gamma(\beta + p + 1)(\eta^p - 1)}{(1 - \eta^{\beta+p})\Gamma(\beta + 1)\Gamma(p + 1)} + 1 \right] M_g \right] \|x - y\|_X.
\end{aligned}$$

D'où :

$$\|Ax - Ay\| \leq M \|x - y\| \tag{2.10}$$

tel que :

$$\begin{aligned}
M &= \frac{K}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)} + \frac{|\lambda|}{\Gamma(\beta + 1)} \\
&+ \frac{K\Gamma(\beta + p + 1)\eta^{\alpha+\beta+p}}{\Gamma(\beta + 1)(1 - \eta^{\beta+p})\Gamma(\alpha + \beta + p + 1)} + \frac{|\lambda| \eta^{\beta+p}}{\Gamma(\beta + 1)(1 - \eta^{\beta+p})} \\
&+ \frac{K\Gamma(\beta + p + 1)}{\Gamma(\beta + 1)(1 - \eta^{\beta+p})\Gamma(\alpha + \beta + 2)} + \frac{|\lambda|}{\Gamma(\beta + 1)(1 - \eta^{\beta+p})} \\
&+ \left[\frac{\Gamma(\beta + p + 1)(\eta^p - 1)}{(1 - \eta^{\beta+p})\Gamma(\beta + 1)\Gamma(p + 1)} + 1 \right] M_g.
\end{aligned}$$

D'après **(H3)** l'opérateur A est contractante, par conséquent le problème (2.1) admet une seule solution.

Exemple.

On considère le problème suivante :

$$\begin{cases}
{}^c D^{\frac{3}{4}} ({}^c D^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{10})x(t) = f(t, x(t)), & t = [0, 1], \\
x(0) = \int_0^1 \frac{1}{19+2t} x(s) ds, \\
I^p x(1) = 1,
\end{cases} \quad (2.11)$$

où :

$$f(t, x(t)) = \frac{x(t)}{\sqrt{t + 100}} + cost$$

on a :

$$\begin{aligned}
|f(t, x(t)) - f(t, y(t))| &\leq \frac{1}{\sqrt{t + 100}} |x(t) - y(t)| \\
&\leq \frac{1}{10} |x(t) - y(t)|
\end{aligned}$$

Donc **(H₁)** est satisfaite avec $K = \frac{1}{10}$

Aussi on a :

$$\left| \frac{1}{19+2t} \right| \leq \frac{1}{20}$$

Donc **(H₂)** est satisfaite avec $M_g = \frac{1}{20}$.

Par suite :

$$\begin{aligned}
M &= \frac{0,5}{\Gamma(0,75 + 0,5 + 1)} + \frac{|0,1|}{\Gamma(0,5 + 1)} \\
&+ \frac{0,1\Gamma(0,5 + 0,5 + 1)(0,6)^{0,75+0,5+0,5}}{\Gamma(0,5 + 1)(1 - (0,6)^{0,5+0,1})\Gamma(0,75 + 0,5 + 0,5 + 1)} + \frac{|0,1| (0,6)^{0,5+0,5}}{\Gamma(0,5 + 1)(1 - 0,6^{0,5+0,5})} \\
&+ \frac{0,1\Gamma(0,5 + 0,1 + 1)}{\Gamma(0,5 + 1)(1 - 0,6^{0,5+0,1})\Gamma(0,75 + 0,5 + 2)} + \frac{|0,1|}{\Gamma(0,5 + 1)(1 - 0,6^{0,5+0,1})} \\
&+ \left[\frac{\Gamma(0,5 + 0,5 + 1)(0,6^{0,5} - 1)}{(1 - 0,6^{0,5+0,5})\Gamma(0,5 + 1)\Gamma(0,5 + 1)} + 1 \right] 0,05 \approx 0,2321.
\end{aligned}$$

Ainsi toutes les hypothèses du Théorème 7 sont satisfaites, par conséquent le problème (2.11) possède une unique solution.

0.4 Existence

0.5 Résultat d'existence via le théorème du point fixe de Krasnoselskii

Théorème 8.[3, 4] Soit $f : [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, on suppose que **(H1)**, **(H2)** et les hypothèses suivantes sont satisfaites :

(H4) : Il existe une constante $M > 0$ telle que $|f(t, x(t))| \leq M$, pour tout $t \in [0, 1]$ et $x \in \mathbb{R}$

(H5) : $S < 1$, où :

$$S = \frac{K\Gamma(\beta + p + 1)\eta^{\alpha+\beta+p}}{\Gamma(\beta + 1)(1 - \eta^{\beta+p})\Gamma(\alpha + \beta + p + 1)} + \frac{|\lambda| \eta^{\beta+p}}{\Gamma(\beta + 1)(1 - \eta^{\beta+p})} \\ + \frac{K\Gamma(\beta + p + 1)}{\Gamma(\beta + 1)(1 - \eta^{\beta+p})\Gamma(\alpha + \beta + 2)} + \frac{|\lambda| \Gamma(\beta + p + 1)}{\Gamma(\beta + 1)(1 - \eta^{\beta+p})\Gamma(\beta + p + 1)} \\ + \left[\frac{\Gamma(\beta + p + 1)(\eta^p - 1)}{(1 - \eta^{\beta+p})\Gamma(\beta + 1)\Gamma(p + 1)} + 1 \right] M_g.$$

Alors, le problème admet au moins une solution.

Preuve : Pour montrer l'existence de la solution du (2.1), il suffit de vérifier les conditions du théorème du point fixe de Krasnoselskii (théorème 5).

On fixe $r \geq L$, où :

$$L = \frac{M}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)} + \frac{|\lambda| r}{\Gamma(\beta + 1)} + \frac{\Gamma(\beta + p + 1)M\eta^{\alpha+\beta+p}}{\Gamma(\beta + 1)(1 - \eta^{\beta+p})\Gamma(\alpha + \beta + p + 1)} \\ + \frac{|\lambda| \eta^{\beta+p}r}{\Gamma(\beta + 1)(1 - \eta^{\beta+p})\Gamma(\beta + p)} + \frac{\Gamma(\beta + p + 1)r}{\Gamma(\beta + 1)(1 - \eta^{\beta+p})(\alpha + \beta)\Gamma(\alpha + \beta + 1)} \\ + \frac{|\lambda| r}{\Gamma(\beta + 1)(1 - \eta^{\beta+p})} + \left[\frac{\Gamma(\beta + p + 1)(\eta^p - 1)}{(1 - \eta^{\beta+p})\Gamma(\beta + 1)\Gamma(p + 1)} + 1 \right] rM_g.$$

On considère l'ensemble suivant :

$$B_r = \{x \in X : \|x\|_X \leq r\}$$

On définit deux opérateurs A_1 et A_2 sur B_r comme suite

$$A_1x(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha + \beta)} \int_0^t (t - s)^{\alpha+\beta-1} f(s, x(s)) ds - \frac{\lambda}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t - s)^{\beta-1} x(s) ds.$$

Et :

$$\begin{aligned}
A_2x(t) &= t^\beta \frac{\Gamma(\beta + p + 1)}{\Gamma(\beta + 1)(1 - \eta^{\beta+p})\Gamma(\alpha + \beta + p)} \int_0^\eta (\eta - s)^{\alpha+\beta+p-1} f(s, x(s)) ds \\
&\quad - t^\beta \frac{\lambda \Gamma(\beta + p + 1)}{\Gamma(\beta + 1)(1 - \eta^{\beta+p})\Gamma(\beta + p)} \int_0^\eta (\eta - s)^{\beta+p-1} x(s) dS \\
&\quad - t^\beta \frac{\Gamma(\beta + p + 1)}{\Gamma(\beta + 1)(1 - \eta^{\beta+p})\Gamma(\alpha + \beta + 1)} \int_0^1 (1 - s)^{\alpha+\beta} f(s, x(s)) ds \\
&\quad + t^\beta \frac{\lambda \Gamma(\beta + p + 1)}{\Gamma(\beta + 1)(1 - \eta^{\beta+p})\Gamma(\beta + p)} \int_0^1 (1 - s)^{\beta+p-1} x(s) ds \\
&\quad + \left[t^\beta \frac{\Gamma(\beta + p + 1)(\eta^p - 1)}{(1 - \eta^{\beta+p})\Gamma(\beta + 1)\Gamma(p + 1)} + 1 \right] \int_0^1 g(s)x(s) ds.
\end{aligned}$$

Etape 1 :

On montrer que si $x, y \in B_r \Rightarrow A_1x(t) + A_2y(t) \in B_r$, c'est a dire :

$$\| A_1x + A_2y \|_X \leq r.$$

Soit $x, y \in B_r$ et $t \in [0, 1]$, on a :

$$\begin{aligned}
| A_1x(t) + A_2y(t) | &= \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha + \beta)} \int_0^t (t - s)^{\alpha+\beta-1} f(s, x(s)) ds - \frac{\lambda}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t - s)^{\beta-1} x(s) ds \right. \\
&\quad + t^\beta \frac{\Gamma(\beta + p + 1)}{\Gamma(\beta + 1)(1 - \eta^{\beta+p})\Gamma(\alpha + \beta + p)} \int_0^\eta (\eta - s)^{\alpha+\beta+p-1} f(s, y(s)) ds \\
&\quad - t^\beta \frac{\lambda \Gamma(\beta + p + 1)}{\Gamma(\beta + 1)(1 - \eta^{\beta+p})\Gamma(\beta + p)} \int_0^\eta (\eta - s)^{\beta+p-1} y(s) dS \\
&\quad - t^\beta \frac{\Gamma(\beta + p + 1)}{\Gamma(\beta + 1)(1 - \eta^{\beta+p})\Gamma(\alpha + \beta + 1)} \int_0^1 (1 - s)^{\alpha+\beta} f(s, y(s)) ds \\
&\quad + t^\beta \frac{\lambda \Gamma(\beta + p + 1)}{\Gamma(\beta + 1)(1 - \eta^{\beta+p})\Gamma(\beta + p)} \int_0^1 (1 - s)^{\beta+p-1} y(s) ds \\
&\quad \left. + \left[t^\beta \frac{\Gamma(\beta + p + 1)(\eta^p - 1)}{(1 - \eta^{\beta+p})\Gamma(\beta + 1)\Gamma(p + 1)} + 1 \right] \int_0^1 g(s)y(s) ds. \right.
\end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned}
| A_1x(t) + A_2y(t) | &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha + \beta)} \int_0^t (t - s)^{\alpha+\beta-1} | f(s, x(s)) | ds + \frac{|\lambda|}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t - s)^{\beta-1} | x(s) | ds \\
&\quad + t^\beta \frac{\Gamma(\beta + p + 1)}{\Gamma(\beta + 1)(1 - \eta^{\beta+p})\Gamma(\alpha + \beta + p)} \int_0^\eta (\eta - s)^{\alpha+\beta+p-1} | f(s, y(s)) | ds \\
&\quad + t^\beta \frac{|\lambda| \Gamma(\beta + p + 1)}{\Gamma(\beta + 1)(1 - \eta^{\beta+p})\Gamma(\beta + p)} \int_0^\eta (\eta - s)^{\beta+p-1} | y(s) | dS \\
&\quad + t^\beta \frac{\Gamma(\beta + p + 1)}{\Gamma(\beta + 1)(1 - \eta^{\beta+p})\Gamma(\alpha + \beta + 1)} \int_0^1 (1 - s)^{\alpha+\beta} | f(s, y(s)) | ds \\
&\quad + t^\beta \frac{|\lambda| \Gamma(\beta + p + 1)}{\Gamma(\beta + 1)(1 - \eta^{\beta+p})\Gamma(\beta + p)} \int_0^1 (1 - s)^{\beta+p-1} | y(s) | ds \\
&\quad + \left[t^\beta \frac{\Gamma(\beta + p + 1)(\eta^p - 1)}{(1 - \eta^{\beta+p})\Gamma(\beta + 1)\Gamma(p + 1)} + 1 \right] \int_0^1 | g(s) | | y(s) | ds.
\end{aligned}$$

En appliquant les hypothèses **(H2)** et **(H4)**, on trouve :

$$\begin{aligned}
|A_1x(t) + A_2y(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha + \beta)} \sup_{t \in [0,1]} |f(s, x(s))| \int_0^t (t-s)^{\alpha+\beta-1} ds \\
&+ \frac{|\lambda|}{\Gamma(\beta)} \sup_{t \in [0,1]} |x(s)| \int_0^t (t-s)^{\beta-1} ds \\
&+ t^\beta \frac{\Gamma(\beta + p + 1)}{\Gamma(\beta + 1)(1 - \eta^{\beta+p})\Gamma(\alpha + \beta + p)} \sup_{t \in [0,1]} |f(s, y(s))| \int_0^\eta (\eta - s)^{\alpha+\beta+p-1} ds \\
&+ t^\beta \frac{|\lambda| \Gamma(\beta + p + 1)}{\Gamma(\beta + 1)(1 - \eta^{\beta+p})\Gamma(\beta + p)} \sup_{t \in [0,1]} |y(s)| \int_0^\eta (\eta - s)^{\beta+p-1} ds \\
&+ t^\beta \frac{\Gamma(\beta + p + 1)}{\Gamma(\beta + 1)(1 - \eta^{\beta+p})\Gamma(\alpha + \beta + 1)} \sup_{t \in [0,1]} |f(s, y(s))| \int_0^1 (1-s)^{\alpha+\beta} ds \\
&+ t^\beta \frac{|\lambda| \Gamma(\beta + p + 1)}{\Gamma(\beta + 1)(1 - \eta^{\beta+p})\Gamma(\beta + p)} \sup_{t \in [0,1]} |y(s)| \int_0^1 (1-s)^{\beta+p-1} ds \\
&+ \left[t^\beta \frac{\Gamma(\beta + p + 1)(\eta^p - 1)}{(1 - \eta^{\beta+p})\Gamma(\beta + 1)\Gamma(p + 1)} + 1 \right] \sup_{t \in [0,1]} |y(s)| \int_0^1 |g(s)| ds.
\end{aligned}$$

Par suite :

$$\begin{aligned}
\|A_1x + A_2y\| &\leq \frac{MT^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)} + \frac{|\lambda| T^\beta r}{\Gamma(\beta + 1)} + T^\beta \frac{\Gamma(\beta + p + 1)M\eta^{\alpha+\beta+p}}{\Gamma(\beta + 1)(1 - \eta^{\beta+p})\Gamma(\alpha + \beta + p + 1)} \\
&+ T^\beta \frac{|\lambda| \eta^{\beta+p}r}{\Gamma(\beta + 1)(1 - \eta^{\beta+p})\Gamma(\beta + p)} + T^\beta \frac{\Gamma(\beta + p + 1)r}{\Gamma(\beta + 1)(1 - \eta^{\beta+p})(\alpha + \beta)\Gamma(\alpha + \beta + 1)} \\
&+ T^\beta \frac{|\lambda| r}{\Gamma(\beta + 1)(1 - \eta^{\beta+p})} + \left[T^\beta \frac{\Gamma(\beta + p + 1)(\eta^p - 1)}{(1 - \eta^{\beta+p})\Gamma(\beta + 1)\Gamma(p + 1)} + 1 \right] rM_g.
\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\|A_1x + A_2y\| &\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)} + \frac{|\lambda| r}{\Gamma(\beta + 1)} + \frac{\Gamma(\beta + p + 1)M\eta^{\alpha+\beta+p}}{\Gamma(\beta + 1)(1 - \eta^{\beta+p})\Gamma(\alpha + \beta + p + 1)} \\
&+ \frac{|\lambda| \eta^{\beta+p}r}{\Gamma(\beta + 1)(1 - \eta^{\beta+p})\Gamma(\beta + p)} + \frac{\Gamma(\beta + p + 1)r}{\Gamma(\beta + 1)(1 - \eta^{\beta+p})(\alpha + \beta)\Gamma(\alpha + \beta + 1)} \\
&+ \frac{|\lambda| r}{\Gamma(\beta + 1)(1 - \eta^{\beta+p})} + \left[\frac{\Gamma(\beta + p + 1)(\eta^p - 1)}{(1 - \eta^{\beta+p})\Gamma(\beta + 1)\Gamma(p + 1)} + 1 \right] rM_g := L.
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Alors pour tout $x, y \in [0, 1]$, on trouve $A_1x(t) + A_2y(t) \in B_r$.

Etape 2 :

1. On montre que A_1 est continue.

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ une suite telle que : $x_n \rightarrow x$ dans X . Alors pour tout $t \in [0, 1]$, on a :

$$\begin{aligned}
|A_1(x_n(t) - A_1(x)(t))| &= \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha + \beta)} \int_0^t (t-s)^{\alpha+\beta-1} f(s, x_n(s)) ds \right. \\
&- \frac{\lambda}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} x_n(s) ds - \frac{1}{\Gamma(\alpha + \beta)} \int_0^t (t-s)^{\alpha+\beta-1} f(s, x(s)) ds \\
&\left. + \frac{\lambda}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} x(s) ds \right|
\end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned} |A_1(x)_n(t) - A_1(x)(t)| &= \frac{1}{\Gamma(\alpha + \beta)} \int_0^t (t-s)^{\alpha+\beta-1} |f(s, x_n(s)) - f(s, x(s))| ds \\ &\quad - \frac{\lambda}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} |x_n(s) - x(s)| ds. \end{aligned}$$

Comme f est une fonction continue, alors :

$$\|A_1(x_n) - A_1(x)\|_{\infty} \rightarrow 0 \quad \text{quand } n \rightarrow \infty \quad (2.13)$$

D'où, A_1 est continue sur X

2. On montre que A_1 est compact.

Pour établir la compacité de l'opérateur A_1 , il suffit de prouver que $A_1(B_r)$ est relativement compacte en utilisant le théorème d'Ascoli-Arzelà.

a) $A_1(B_r)$ est borné.

Il suffit de montrer que pour tout $r > 0$, il existe une constante positive ρ tel que pour tout $t \in [0, 1]$ et $x \in B_r$, avec $B_r = \{x \in X : \|x\|_x \leq r\}$, on trouve : $\|A_1(x)\|_x \leq \rho$.

On a :

$$\begin{aligned} |A_1x(t)| &= \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha + \beta)} \int_0^t (t-s)^{\alpha+\beta-1} f(s, x(s)) ds \right. \\ &\quad \left. - \frac{\lambda}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} x(s) ds \right| \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha + \beta)} \int_0^t (t-s)^{\alpha+\beta-1} |f(s, x(s))| ds \\ &\quad + \frac{|\lambda|}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} |x(s)| ds. \end{aligned}$$

En appliquant l'hypothèse (H4), on trouve :

$$|A_1x(t)| \leq \frac{M}{\Gamma(\alpha + \beta)} \int_0^t (t-s)^{\alpha+\beta-1} ds + \frac{|\lambda|}{\Gamma(\beta)} \sup_{t \in [0,1]} |x(t)| \int_0^t (t-s)^{\beta-1} ds.$$

Par suite :

$$\|A_1x\| = \frac{Mt^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)} + \frac{r|\lambda|t^\beta}{\Gamma(\beta + 1)} := \rho \quad (2.14)$$

De (2.11), on a :

$$\|A_1x\| \leq \rho$$

Donc $A_1(B_r)$ est uniformément borné.

b) $A_1(B_r)$ est équicontinue.

Soit $x \in B_r$, pour tout $t_1, t_2 \in [0, 1], t_1 < t_2$:

$$\begin{aligned} |A_1(x)(t_2) - A_1(x)(t_1)| &= \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha + \beta)} \int_0^{t_2} (t_2-s)^{\alpha+\beta-1} f(s, x(s)) ds \right. \\ &\quad - \frac{\lambda}{\Gamma(\beta)} \int_0^{t_2} (t_2-s)^{\beta-1} x(s) ds \\ &\quad - \frac{1}{\Gamma(\alpha + \beta)} \int_0^{t_1} (t_1-s)^{\alpha+\beta-1} f(s, x(s)) ds \\ &\quad \left. + \frac{\lambda}{\Gamma(\beta)} \int_0^{t_1} (t_1-s)^{\beta-1} x(s) ds \right|. \end{aligned}$$

Par suite :

$$\begin{aligned}
|A_1(x)(t_2) - A_1(x)(t_1)| &= \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha + \beta)} \left[\int_0^{t_1} (t_2 - s)^{\alpha+\beta-1} f(s, x(s)) ds + \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha+\beta-1} f(s, x(s)) ds \right] \right. \\
&\quad - \frac{\lambda}{\Gamma(\beta)} \left[\int_0^{t_1} (t_2 - s)^{\beta-1} x(s) ds + \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\beta-1} x(s) ds \right] \\
&\quad - \frac{1}{\Gamma(\alpha + \beta)} \int_0^{t_1} (t_1 - s)^{\alpha+\beta-1} f(s, x(s)) \\
&\quad \left. + \frac{\lambda}{\Gamma(\beta)} \int_0^{t_1} (t_1 - s)^{\beta-1} x(s) ds \right|.
\end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned}
|A_1(x)(t_2) - A_1(x)(t_1)| &= \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha + \beta)} \left[\int_0^{t_1} (t_2 - s)^{\alpha+\beta-1} - (t_1 - s)^{\alpha+\beta-1} \right] f(s, x(s)) ds \right. \\
&\quad + \frac{\lambda}{\Gamma(\beta)} \left[\int_0^{t_1} (t_1 - s)^{\beta-1} - (t_2 - s)^{\beta-1} x(s) \right] ds \\
&\quad - \frac{\lambda}{\Gamma(\beta)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\beta-1} x(s) ds \\
&\quad \left. + \frac{1}{\Gamma(\alpha + \beta)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha+\beta-1} f(s, x(s)) ds \right|.
\end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned}
|A_1(x)(t_2) - A_1(x)(t_1)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha + \beta)} \int_0^{t_1} [(t_2 - s)^{\alpha+\beta-1} - (t_1 - s)^{\alpha+\beta-1}] |f(s, x(s))| ds \\
&\quad + \frac{|\lambda|}{\Gamma(\beta)} \left[\int_0^{t_1} (t_1 - s)^{\beta-1} - (t_2 - s)^{\beta-1} \right] |x(s)| ds \\
&\quad - \frac{|\lambda|}{\Gamma(\beta)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\beta-1} |x(s)| ds \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha + \beta)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha+\beta-1} |f(s, x(s))| ds.
\end{aligned}$$

On appliquant l'hypothèse **(H4)**, on trouve :

$$\begin{aligned}
|A_1(x)(t_2) - A_1(x)(t_1)| &\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha + \beta)} \int_0^{t_1} [(t_2 - s)^{\alpha+\beta-1} - (t_1 - s)^{\alpha+\beta-1}] ds \\
&\quad + \frac{r|\lambda|}{\Gamma(\beta)} \int_0^{t_1} [(t_1 - s)^{\beta-1} - (t_2 - s)^{\beta-1}] \\
&\quad - \frac{r|\lambda|}{\Gamma(\beta)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\beta-1} ds \\
&\quad + \frac{M}{\Gamma(\alpha + \beta)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha+\beta-1} ds.
\end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t_1} (t_2 - s)^{\alpha+\beta-1} ds &= -\frac{(t_2 - t_1)^{\alpha+\beta}}{\alpha + \beta} + \frac{t_2^{\alpha+\beta}}{\alpha + \beta}. \\
\int_{t_0}^{t_1} (t_1 - s)^{\alpha+\beta-1} ds &= \frac{t_1^{\alpha+\beta}}{\alpha + \beta}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t_1} (t_1 - s)^{\beta-1} ds &= \frac{t_1^\beta}{\beta} \\
\int_{t_0}^{t_1} (t_2 - s)^{\beta-1} ds &= -\frac{(t_2 - t_1)^\beta}{\beta} + \frac{t_2^\beta}{\beta} \\
\int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\beta-1} ds &= \frac{(t_2 - t_1)^\beta}{\beta} \\
\int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha+\beta-1} ds &= \frac{(t_2 - t_1)^{\alpha+\beta}}{\alpha + \beta}
\end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned}
\| A_1(x)(t_2) - A_1(x)(t_1) \| &\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)} \left[-(t_2 - t_1)^{\alpha+\beta} + t_2^{\alpha+\beta} - t_1^{\alpha+\beta} \right] \\
&+ \frac{r |\lambda|}{\Gamma(\beta + 1)} \left[t_1^\beta - t_2^\beta - (t_2 - t_1)^\beta \right] \\
&- \frac{r |\lambda|}{\Gamma(\beta)} \left[(t_2 - t_1)^\beta \right] \\
&+ \frac{M}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)} \left[(t_2 - t_1)^{\alpha+\beta} \right].
\end{aligned}$$

Par suite :

$$\begin{aligned}
\| A_1(x)(t_2) - A_1(x)(t_1) \|_\infty &\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)} \left[t_2^{\alpha+\beta} - t_1^{\alpha+\beta} + (t_2 - t_1)^{\alpha+\beta} \right] \\
&+ \frac{r |\lambda|}{\Gamma(\beta + 1)} \left[t_1^\beta - t_2^\beta - (t_2 - t_1)^\beta \right] \\
&- \frac{r |\lambda|}{\Gamma(\beta)} \left[(t_2 - t_1)^\beta \right].
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Alors pour $t_1 \rightarrow t_2$, on va avoir :

$$\| A_1(x)(t_2) - A_1(x)(t_1) \|_\infty \rightarrow 0. \tag{2.16}$$

Donc, $A_1(B_r)$ est équicontinue.

D'où d'après (a) et (b) et le théorème d'Ascoli- Arzelà, A_1 est relativement compact sur B_r .

Etape 3 :

On montre que A_2 est contractante.

Soient $x, y \in B_r, t \in [0, 1]$, on a :

$$\begin{aligned}
| A_2x(t) - A_2y(t) | &= t^\beta \frac{\Gamma(\beta + p + 1)}{\Gamma(\beta + 1)(1 - \eta^{\beta+p})\Gamma(\alpha + \beta + p)} \int_0^\eta (\eta - s)^{\alpha+\beta+p-1} |f(s, x(s)) - f(s, y(s))| ds \\
&+ t^\beta \frac{|\lambda| \Gamma(\beta + p + 1)}{\Gamma(\beta + 1)(1 - \eta^{\beta+p})\Gamma(\beta + p)} \int_0^\eta (\eta - s)^{\beta+p-1} |x(s) - y(t)| ds \\
&+ t^\beta \frac{\Gamma(\beta + p + 1)}{\Gamma(\beta + 1)(1 - \eta^{\beta+p})\Gamma(\alpha + \beta + 1)} \int_0^1 (1 - s)^{\alpha+\beta} |f(s, x(s)) - f(s, y(s))| ds \\
&+ t^\beta \frac{|\lambda| \Gamma(\beta + p + 1)}{\Gamma(\beta + 1)(1 - \eta^{\beta+p})\Gamma(\beta + p)} \int_0^1 (1 - s)^{\beta+p-1} |x(s) - y(s)| ds \\
&+ \left[t^\beta \frac{\Gamma(\beta + p + 1)(\eta^p - 1)}{(1 - \eta^{\beta+p})\Gamma(\beta + 1)\Gamma(p + 1)} + 1 \right] \int_0^1 g(s) |x(s) - y(t)| ds.
\end{aligned}$$

En utilisant les hypothèses **(H1)** et **(H2)**, on obtient :

$$\begin{aligned}
|A_2x(t) - A_2y(t)| &\leq t^\beta \frac{K \|x - y\| \Gamma(\beta + p + 1)}{\Gamma(\beta + 1)(1 - \eta^{\beta+p})\Gamma(\alpha + \beta + p)} \int_0^\eta (\eta - s)^{\alpha+\beta+p-1} ds \\
&+ t^\beta \frac{\|x - y\| |\lambda| \Gamma(\beta + p + 1)}{\Gamma(\beta + 1)(1 - \eta^{\beta+p})\Gamma(\beta + p)} \int_0^\eta (\eta - s)^{\beta+p-1} ds \\
&+ t^\beta \frac{K \|x - y\| \Gamma(\beta + p + 1)}{\Gamma(\beta + 1)(1 - \eta^{\beta+p})\Gamma(\alpha + \beta + 1)} \int_0^1 (1 - s)^{\alpha+\beta} ds \\
&+ t^\beta \frac{\|x - y\| |\lambda| \Gamma(\beta + p + 1)}{\Gamma(\beta + 1)(1 - \eta^{\beta+p})\Gamma(\beta + p)} \int_0^1 (1 - s)^{\beta+p-1} ds \\
&+ \left[t^\beta \frac{\Gamma(\beta + p + 1)(\eta^p - 1)}{(1 - \eta^{\beta+p})\Gamma(\beta + 1)\Gamma(p + 1)} + 1 \right] M_g \|x - y\| \int_0^1 1 ds.
\end{aligned}$$

Par calcul simple, on trouve :

$$\begin{aligned}
|A_2x(t) - A_2y(t)| &\leq t^\beta \frac{K\Gamma(\beta + p + 1)\eta^{\alpha+\beta+p}}{\Gamma(\beta + 1)(1 - \eta^{\beta+p})\Gamma(\alpha + \beta + p + 1)} \|x - y\| \\
&+ t^\beta \frac{|\lambda| \eta^{\beta+p}}{\Gamma(\beta + 1)(1 - \eta^{\beta+p})} \|x - y\| \\
&+ t^\beta \frac{K\Gamma(\beta + p + 1)}{\Gamma(\beta + 1)(1 - \eta^{\beta+p})\Gamma(\alpha + \beta + 2)} \|x - y\| \\
&+ t^\beta \frac{|\lambda| \Gamma(\beta + p + 1)}{\Gamma(\beta + 1)(1 - \eta^{\beta+p})\Gamma(\beta + p + 1)} \|x - y\| \\
&+ \left[t^\beta \frac{\Gamma(\beta + p + 1)(\eta^p - 1)}{(1 - \eta^{\beta+p})\Gamma(\beta + 1)\Gamma(p + 1)} + 1 \right] M_g \|x - y\|.
\end{aligned}$$

Et comme $t \in [0, 1]$, on a :

$$\begin{aligned}
\|A_2x - A_2y\|_\infty &\leq \frac{K\Gamma(\beta + p + 1)\eta^{\alpha+\beta+p}}{\Gamma(\beta + 1)(1 - \eta^{\beta+p})\Gamma(\alpha + \beta + p + 1)} \|x - y\| \\
&+ \frac{|\lambda| \eta^{\beta+p}}{\Gamma(\beta + 1)(1 - \eta^{\beta+p})} \|x - y\| \\
&+ \frac{K\Gamma(\beta + p + 1)}{\Gamma(\beta + 1)(1 - \eta^{\beta+p})\Gamma(\alpha + \beta + 2)} \|x - y\| \\
&+ \frac{|\lambda| \Gamma(\beta + p + 1)}{\Gamma(\beta + 1)(1 - \eta^{\beta+p})\Gamma(\beta + p + 1)} \|x - y\| \\
&+ \left[\frac{\Gamma(\beta + p + 1)(\eta^p - 1)}{(1 - \eta^{\beta+p})\Gamma(\beta + 1)\Gamma(p + 1)} + 1 \right] M_g \|x - y\|.
\end{aligned}$$

D'où :

$$\|A_2x - A_2y\|_\infty \leq S \|x - y\|. \quad (2.17)$$

Tel que :

$$\begin{aligned}
S &= \frac{K\Gamma(\beta + p + 1)\eta^{\alpha+\beta+p}}{\Gamma(\beta + 1)(1 - \eta^{\beta+p})\Gamma(\alpha + \beta + p + 1)} + \frac{|\lambda| \eta^{\beta+p}}{\Gamma(\beta + 1)(1 - \eta^{\beta+p})} \\
&+ \frac{K\Gamma(\beta + p + 1)}{\Gamma(\beta + 1)(1 - \eta^{\beta+p})\Gamma(\alpha + \beta + 2)} + \frac{|\lambda| \Gamma(\beta + p + 1)}{\Gamma(\beta + 1)(1 - \eta^{\beta+p})\Gamma(\beta + p + 1)} \\
&+ \left[\frac{\Gamma(\beta + p + 1)(\eta^p - 1)}{(1 - \eta^{\beta+p})\Gamma(\beta + 1)\Gamma(p + 1)} + 1 \right] M_g.
\end{aligned}$$

Donc, l'opérateur A est contractante.

Graces aux étapes 1, 2, 3, et d'après le théorème du point fixe de krasnoselski, on déduit que le problème (2.1) admet au moins une solution.

Exemple.

Soit le problème fractionnaire suivante :

$$\begin{cases}
{}^c D^{\frac{7}{8}} ({}^c D^{\frac{5}{6}} + \frac{1}{14})x(t) = f(t, x(t), {}^c D^{\frac{1}{3}}x(t)), & t = [0, 1], \\
x(0) = \int_0^1 \frac{\cos(t)}{\sqrt{2t+144}}x(s)ds, \\
x(1) = \frac{1}{10},
\end{cases} \quad (2.18)$$

où :

$$f(t, x(t), {}^c D^{\frac{1}{2}}x(t)) = \frac{x(t)}{3e^t + 7} + \frac{{}^c D^{\frac{1}{2}}x(t)}{e^{2t} + 9} + \frac{\sin(t)}{10 + t^2}$$

on a :

$$\begin{aligned}
\left| f(t, x(t), {}^c D^{\frac{1}{2}}x(t)) - f(t, y(t), {}^c D^{\frac{1}{2}}y(t)) \right| &\leq \frac{1}{3e^t + 7} |x(t) - y(t)| + \frac{1}{e^{2t} + 9} |{}^c D^{\frac{1}{2}}x(t) - {}^c D^{\frac{1}{2}}y(t)| \\
&\leq \frac{1}{10} (|x(t) - y(t)| + |{}^c D^{\frac{1}{2}}x(t) - {}^c D^{\frac{1}{2}}y(t)|)
\end{aligned}$$

Donc (H_1) est satisfaite avec $K = \frac{1}{10}$

Aussi on a :

$$\left| \frac{\cos(t)}{\sqrt{2t+144}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{2t+144}} \leq \frac{1}{12}.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
S &= \frac{0, 1\Gamma(0, 83 + 0, 1 + 1)(0, 6)^{0,87+0,83+0,1}}{\Gamma(0, 83 + 1)(1 - (0, 6)^{0,83+0,1})\Gamma(0, 87 + 0, 83 + 0, 1 + 1)} + \frac{|0, 1| (0, 6)^{0,83+0,1}}{\Gamma(0, 83 + 1)(1 - (0, 6)^{0,83+0,1})} \\
&+ \frac{0, 1\Gamma(0, 83 + 0, 1 + 1)}{\Gamma(0, 83 + 1)(1 - (0, 6)^{0,83+0,1})\Gamma(0, 87 + 0, 83 + 2)} + \frac{|0, 1| \Gamma(0, 83 + 0, 1 + 1)}{\Gamma(0, 83 + 1)(1 - (0, 6)^{0,83+0,1})\Gamma(0, 83 + 0, 1 + 1)} \\
&+ \left[\frac{\Gamma(0, 83 + 0, 1 + 1)((0, 6)^{0,1} - 1)}{(1 - (0, 6)^{0,83+0,1})\Gamma(0, 83 + 1)\Gamma(0, 1 + 1)} + 1 \right] 0, 083 \approx 0, 65821.
\end{aligned}$$

Ainsi toutes les hypothèses du Théorème 8 sont satisfaites, par conséquent le problème (2.18) possède une unique solution.

Stabilité au sens de Ulam-Hyers

La stabilité des équations fonctionnelles a été soulevée par Ulam en 1940 dans un discours prononcé à l'Université du Wisconsin [16]. La première réponse au problème posé par Ulam a été donnée par Hyers en 1941 dans [17]. Par la suite, ce type de stabilité est appelée la stabilité au sens d'Ulam-Hyers. En 1978, Rassias [18] a fourni une généralisation remarquable de la stabilité au sens d'Ulam-Hyers. Une attention considérable a été accordée à l'étude de la stabilité au sens d'Ulam-Hyers et au sens d'Ulam-Hyers-Rassias d'équations différentielles, pour plus de détails, voir [?, ?]. Dans ce chapitre, on traite la stabilité du problème traité dans le chapitre 2. [1, 2]

1 Stabilité d'une équation différentielles avec deux dérive fractionnaire au sens de Caputo.

On considère le même problème traité dans le chapitre 2 :

$$\begin{cases} {}^c D^\alpha ({}^c D^\beta + \lambda)x(t) = f(t, x(t)), & t \in [0, 1], \\ x(0) = \int_0^1 g(x)x(s)ds, \\ I^p x(1) = I^p x(\eta), \end{cases} \quad (3.1)$$

Définition 2.1.5 On dit que l'équation (3.1) est stable au sens à Ulam-Hyers s'il existe une constante positive $d_\varphi > 0$ tel que quelque soit $\sigma > 0$ et pour toute solution $v \in W$ qui satisfait :

$$| {}^c D^\alpha ({}^c D^\beta + \lambda)v(t) - f(t, v(t)) | \leq \sigma, \quad t \in [0, 1], \quad 0 < \alpha < 1 \quad (3.2)$$

Il existe une solution $u \in W$ qui satisfait :

$$| v(t) - u(t) | \leq d_\varphi \sigma, \quad t \in [0, 1] \quad (3.3)$$

1.1 Stabilité au sens de Ulam-Hyers généralisé

Définition 2.1.6 On dit que l'équation (3.1) est stable au sens d'Ulam-Hyers généralisé s'il existe une fonction $h_\varphi \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ tel que quelque soit, $w_\varphi(0) = 0$ et pour tout solution $v \in W$ qui satisfait

$$|{}^c D^\alpha ({}^c D^\beta + \lambda)v(t) - f(t, v(t))| \leq \sigma, \quad t \in [0, 1], \quad 0 < \alpha < 1 \quad (3.4)$$

il existe une solution $u \in W$ qui satisfait

$$|v(t) - u(t)| \leq h_\varphi(\sigma), \quad t \in [0, 1] \quad (3.5)$$

1.2 Stabilité au sens de Ulam-Hyers Rassias

Définition 2.1.6 On dit que l'équation (3.1) est stable au sens Ulam-Hyers Rassias par rapport à $g \in W$ s'il existe un nombre réel $d_\varphi > 0$ tel que quelque soit $\sigma > 0$ et pour toute solution $v \in W$ qui satisfait :

$$|{}^c D^\alpha ({}^c D^\beta + \lambda)v(t) - f(t, v(t))| \leq \sigma g(t), \quad t \in [0, 1] \quad (3.6)$$

il existe une solution $u \in W$ qui satisfait

$$|v(t) - u(t)| \leq d_\varphi \sigma g(t), \quad t \in [0, 1] \quad (3.7)$$

1.3 Stabilité au sens de Ulam-Hyers Rassias généralisé

Définition 2.1.6

On dit que l'équation (3.1) est stable au sens d'Ulam-Hyers Rassias généralisé par rapport à $g \in W$ s'il existe un nombre réel $d_{\varphi, g} > 0$, tel que pour tout solution $v \in W$ qui satisfait :

$$|{}^c D^\alpha ({}^c D^\beta + \lambda)v(t) - f(t, v(t))| \leq g(t), \quad t \in [0, 1]. \quad (3.8)$$

Il existe une solution $u \in W$ qui satisfait :

$$|v(t) - u(t)| \leq d_{\varphi, g} g(t), \quad t \in [0, 1] \quad (3.9)$$

Remarque : Une fonction $v \in W$ est une solution de l'inégalité (3.2) si et seulement il existe une fonction : $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

(1) : $|v(t)| \leq \sigma, t \in [0, 1]$.

(2) : ${}^c D^\alpha ({}^c D^\beta + \lambda)v(t) = f(t, v(t)) + g(t), \quad t \in [0, 1]$.

1.4 Étude de la Stabilité

Théorème. Supposons que : $\varphi : [0, 1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue satisfaisant (H_1) . Si

$$\frac{\omega T^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)} + |\lambda| \frac{T^\beta}{\Gamma(\beta + 1)} \leq 1. \quad (3.10)$$

Alors (3.1) est stable au sens Ulam-Hyers et par conséquent, est stable au sens Ulam-Hyers généralisé.

Prouve. Soit $\sigma > 0$ et soit $v \in W$ qui satisfait l'inégalité :

$$|{}^c D^\alpha ({}^c D^\beta + \lambda)v(t) - f(t, v(t))| \leq \sigma, \quad t \in [0, 1]. \quad (3.11)$$

Et notons $u \in W$ l'unique solution du problème

$$\begin{cases} {}^c D^\alpha ({}^c D^\beta + \lambda)x(t) = f(t, x(t)), & t \in [0, 1], \quad 0 < \alpha, \beta < 1 \\ u(0) = v(0), \\ I^p u(1) = I^p v(1), & I^p u(\eta) = I^p v(\eta), \end{cases}$$

En utilisant le Lemme 3, on a :

$$u(t) = I^{\alpha+\beta} h(t) - \lambda I^\beta x(t) + c_0 \frac{t^\beta}{\Gamma(\beta + 1)} + c_1.$$

Et par intégration de l'inégalité (3.2), on obtient

$$\begin{aligned} \left| v(t) - I^{\alpha+\beta} h_v(t) - \lambda I^\beta v(t) + b_0 \frac{t^\beta}{\Gamma(\beta + 1)} + b_1 \right| &\leq \frac{\sigma t^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)} \\ &\leq \frac{\sigma T^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)}. \end{aligned}$$

Par contre, si $U(0) = v(0)$ et $I^p U(1) = I^p v(1)$ et $I^p U(\eta) = I^p v(\eta)$, alors

$c_0 = b_0$ et $c_1 = b_1$.

Pour tout $t \in [0, 1]$, on a

$$\begin{aligned} v(t) - u(t) &= v(t) - I^{\alpha+\beta} h_u(t) - \lambda I^\beta u(t) + b_0 \frac{t^\beta}{\Gamma(\beta + 1)} + b_1 \\ &\quad + I^{\alpha+\beta} (h_v(t) - h_u(t)) - \lambda I^\beta (v(t) - u(t)). \end{aligned}$$

Tel que

$h_u(t) = f(t, u(t))$ et $h_v(t) = f(t, v(t))$

Alors

$$\begin{aligned} I^{\alpha+\beta} (h_v(t) - h_u(t)) &= I^{\alpha+\beta} [f(t, u(t)) - f(t, v(t))] \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha + \beta)} \int_0^t (t-s)^{\alpha+\beta-1} [f(s, u(s)) - f(s, v(s))] .ds \end{aligned}$$

En utilisant (H_1) , on obtient

$$\left| I^{\alpha+\beta}(h_v(t) - h_u(t)) \right| \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha + \beta)} \int_0^t (t-s)^{\alpha+\beta-1} \|u(s) - v(t)\|_W ds.$$

Cela donne

$$\begin{aligned} |v(t) - u(t)| &= \left| v(t) - I^{\alpha+\beta}h_u(t) - \lambda I^\beta u(t) + b_0 \frac{t^\beta}{\Gamma(\beta+1)} + b_1 \right| \\ &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha + \beta)} \int_0^t (t-s)^{\alpha+\beta-1} \|u(s) - v(t)\|_W ds. \\ &+ \frac{|\lambda|}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\alpha+\beta-1} \|u(s) - v(t)\|_W ds. \end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$|v(t) - u(t)| \leq \frac{\epsilon T^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)} + \left[\frac{\omega T^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)} + \frac{|\lambda| T^\beta}{\Gamma(\beta + 1)} \right] \|u(s) - v(t)\|_W.$$

Par conséquent

$$\|u(s) - v(t)\|_W \left(1 - \left[\frac{\omega T^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)} + \frac{|\lambda| T^\beta}{\Gamma(\beta + 1)} \right] \right) \leq \frac{\sigma T^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)}$$

Alors, pour chaque $t \in [0, 1]$

$$|v(t) - u(t)| \leq \frac{T^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha + \beta + 1) \left(1 - \left[\frac{\omega T^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} + \frac{|\lambda| T^\beta}{\Gamma(\beta+1)} \right] \right)} \sigma := d\sigma.$$

Par conséquent, le problème de la valeur limite fractionnaire (3.1) est stable à Ulam-Hyers. Par prendre $h(\sigma) = d\sigma$, $h(0) = 0$ donne que le problème de la valeur limite fractionnaire (3.1) stable Ulam-Hyers généralisée.

Théorème. Soit $\varphi : [0, 1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et supposons que (H_1) et (3.4) sont satisfaites. De plus, l'hypothèse suivante est satisfaite

(H_2) : Il existe une fonction $g \in C([0, 1], \mathbb{R}_+)$ et il existe $\eta_g > 0$ tel que pour tout $t \in [0, 1]$

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha + \beta)} \int_0^t (t-s)^{\alpha+\beta-1} g(s) ds \leq \eta_g g(t). \quad (3.12)$$

Alors le problème de la valeur limite fractionnaire (3.1) est Ulam-Hyers-Rassias stable.

Preuve

Soit $v \in W$ une solution de l'inégalité (3.5), i.e.

$$|{}^c D^\alpha ({}^c D^\beta + \lambda)v(t) - f(t, v(t))| \leq g(t), \quad t \in [0, 1]. \quad (3.13)$$

Soit $u \in W$ l'unique solution du problème

$$\begin{cases} {}^c D^\alpha ({}^c D^\beta + \lambda)u(t) = f(t, x(t)), & t = [0, 1], \quad 0 < \alpha, \beta < 1 \\ u(0) = v(0), \\ I^p u(1) = I^p v(1), & I^p u(\eta) = I^p v(\eta), \end{cases}$$

En utilisant le Lemme 3, on trouve

$$u(t) = I^{\alpha+\beta} h(t) - \lambda I^\beta x(t) + c_0 \frac{t^\beta}{\Gamma(\beta+1)} + c_1.$$

Et par intégration de l'inégalité (3.2), on obtient

$$\left| v(t) - I^{\alpha+\beta} h_v(t) - \lambda I^\beta v(t) + b_0 \frac{t^\beta}{\Gamma(\beta+1)} + b_1 \right| \leq \frac{\sigma}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^t (t-s)^{\alpha+\beta-1} g(s) ds \leq \sigma \eta_g g(t).$$

En utilisant (H1), on a

$$\begin{aligned} |v(t) - u(t)| &= \left| v(t) - I^{\alpha+\beta} h_u(t) - \lambda I^\beta u(t) + b_0 \frac{t^\beta}{\Gamma(\beta+1)} + b_1 \right| \\ &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^t (t-s)^{\alpha+\beta-1} \|u(s) - v(t)\|_W ds. \\ &+ \frac{|\lambda|}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\alpha+\beta-1} \|u(s) - v(t)\|_W ds. \end{aligned}$$

En utilisant (H2), on peut écrire

$$|v(t) - u(t)| \leq \left[\frac{\omega T^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} + \frac{|\lambda| T^\beta}{\Gamma(\beta+1)} \right] \|v(s) - u(t)\|_W.$$

Ce qui implique que

$$\|v(t) - u(t)\| \leq \left(- \left[\frac{\omega T^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} + \frac{|\lambda| T^\beta}{\Gamma(\beta+1)} \right] \right) \leq \sigma \eta_g g(t).$$

Pour tout $t \in [0, 1]$, on a

$$|v(t) - u(t)| \leq \left(\frac{\eta_g}{1 - \left[\frac{\omega T^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} + \frac{|\lambda| T^\beta}{\Gamma(\beta+1)} \right]} \right) \sigma_{g(t)} : d_\sigma g(t). \quad (3.14)$$

Ensuite, le problème de la valeur limite fractionnaire (3.1) est Ulam-Hyers-Rassias stable.

Bibliographie

- [1] **M. Benchohra, J. E. Lazreg**, Existence and Ulam stability for nonlinear implicit fractional differential equations with Hadamard derivative. *Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math.* 62 (1) (2017), 27-38.
- [2] **M. Feckan, J. Wang and Y. Zhou**. Ulam's type stability of impulsive ordinary differential equations. *J. Math. Anal. Appl.* 395, (2012), pp. 258– 264.
- [3] **M. Houas**, Existence of solutions for fractional differential equations involving two Riemann-Liouville fractional orders. *Anal. Theory Appl.* 34(3), (2018), 253 – 274.
- [4] **M. Houas, M. Bezziou** . Existence and stability results for fractional differential equations with two Caputo fractional derivatives. *Facta Univ. Ser. Math. Inform.* 34(2), (2019), 341 – 357.
- [5] **A.A., S.A. Marzan**. Nonlinear differential equation with the Caputo fraction derivative in the space of continuously differentiable functions. *Differ. Equ.* 41(1), (2005), pp. 84 – 89.
- [6] **A.A., O. Marichev, S.G. Samko**. Fractional integral and derivatives (Theory and Application). . Gordon and Breach, Switzerland 1993.
- [7] **A. Granas and J. Dugundji**, fixed point theory, Springer-Verlag, New York. 2003.
- [8] **J. K. Hale and S. V. Lunel**, Introduction to functional differential equation, Applied Mathematical Sciences, 99, Springer-Verlag, New York. 1993
- [9] **A. A Kilbas and S. A. Mazran**, Nonlinear differential equation with Caputo fractional derivative in the space of continuously differentiable function, *Differential Equations*. 4152005?84689;
- [10] **V. Lakshmikantham and A. S. Vatsala**, Basic theory of fractional differential equations, *Nonlinear Anal.* 69, (2008), no. 8, 2677 – 2682.
- [11] **F. Mainardi**, Fractional calculus : Some basic problems in continuum and statistical mechanics, in "Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics" (A. Carpinteri and F. Mainardi, Eds), Springer-Verlag, Wien. (1997), 291 – 348.
- [12] **K. B. Oldham and J. Spanier**, the Fractional Calculus, Academic Press, New York. 1974

- [13] **I. Podlubny**, Fractional differential equation, Academic Press, San Diego. 1999
- [14] **S. G. Samko, A. A. Kilbas and O. I. Marichev**, Fractional integrals and derivatives. Theory and Applications, Gordon and Breach, Yverdon. 1993.
- [15] **S.M. Ulam** : A Collection Of Mathematical Problems, Interscience Publishers., New York, (1968)
- .
- [16] **D.H. Hyers** : On The Stability Of The Linear Functional Equation, Proc. Nat. Acad, Sci.,27, (1941), *pp.*222.224.
- [17] **Th.M. Rassias** : On The Stability Of Linear Mappings In Banach Spaces, Proc. Amer. Math. Soc.,72, (1978), *pp.*297.300.
- [18] **D.H. Hyers, G. Isac and Th. M. Rassias** : Stability Of Functional Equations In Several Variables, Birkh Auser., Basel,(1998).
- [19] **S.M. Jung** : Hyers-Ulam-Rassias Stability of Functional Equations, In Nonlinear Analysis., Springer, New York, (2011).