الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DJILALI BOUNAAMA KHEMIS MILIANA

Faculté des Sciences de la matière et informatique

Département de Mathématiques

=-=-=-=-=-=-=-=-o ◯ o-=-=-=-=-=-=-=-=

Polycopié de cours

Calcul Fractionnaire

Enseigné aux étudiants de la

Première année master mathématiques

Présenté par:

Houas Mohamed

Année Universitaire: 2023-2024

Table des matières

Introduction

L'analyse fractionnaire est une branche de l'analyse mathématique qui étudie la possibilité de définir des puissances arbitraire des opérateurs de dérivation et d'intégration. Ces dérivées ou intégrations fractionnaires rentrent dans le cadre plus général des opérateurs pseudo-différentiels. Le calcul fractionnaire est une généralisation du calcul différentiel. Ce concept des opérateurs d'ordre fractionnaire a été défini aux 19 siècle par Riemann et Liouville, leur but était de prolonger la dérivation ou l'intégration d'ordre fractionnaire en employant non seulement un ordre entier mais également des ordres non entiers. Le calcul fractionnaire a de très nombreuses applications, on citera à titre d'exemple : la physique, l'ingénierie, l'électrochimie, la théorie du contrôle, le traitement du signal et de l'image, les biotechnologies et les applications biomédicales, le diagnostique et la détection des défauts dans les machines par la modélisation etc.

Ce polycopié couvre le programme de la matière calcul fractionnaire enseignée en première master. Il s'adresse aux étudiants de la première et deuxième année master.

Le présent manuscrit est composé de trois chapitres dont le premier chapitre est consacré à l'étude des fonctions principales pour le calcul fractionnaire. En effet, après avoir donné la fonction gamma, on présentera la fonction Bêta et on termine par la donné de la fonction Mittag-Leffler.

Les intégrales et dérivées fractionnaires on fait l'objet du deuxième chapitre dans lequel, une étude de l'intégrale fractionnaire a été faite, ensuite on étudié les dérivées fractionnaires, ainsi que les dérivées fractionnaires à gauche et à droite sont étudiées. Des exercices sont donnés à la fin de chapitre.

Le troisième chapitre est consacré à l'étude des opérations sur les dérivées fractionnaires. En effet, après avoir présente la composition des dérivées fractionnaires avec les dérivées d'ordre entièr, on présente la composition avec les dérivées fractionnaire. La règle de Leibniz pour les dérivées fractionnaires est aussi traitée. Des exercices sont présentés à la fin de ce chapitre.

Je serais très reconnaissant à tous ceux, parmi les enseignants et les étudiants qui voudraient bien me faire parvenir leurs suggestions et leurs critiques quand au fond ou à la forme de premier essai.

Chapitre 1

Fonctions spéciales

Dans ce chapitre, on présente trois fonctions principales pour le calcul fractionnaire. On définit la fonction Gamma et Bêta d'Euler, puis on introduit quelques propriétés liées à ces fonctions, on definit également la fonctions Mittag-Leffler ainsi leurs propriétés. Pour plus de détails voir $[2, 7, 9, 10, 11]$.

1.1 Définition des fonctions Gamma et Béta

1.1.1 Fonction Gamma

La fonction Gamma est simplement la généralisation de la factorielle, cette fonction est l'un des outils de base du calcul fractionnaire.

Fonction factorielle

On calcule les valeurs de certaines intégrales. Pour $\alpha > 0$, on a :

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt = \left[-\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha t} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{\alpha}. \tag{1.1}$$

On dérive les deux membres de (1.1) par rapport à α, on aura :

$$\int_0^{+\infty} -t e^{-\alpha t} dt = -\frac{1}{\alpha^2},$$

ce qui donne

$$\int_0^{+\infty} t e^{-\alpha t} dt = \frac{1}{\alpha^2}. \tag{1.2}$$

Maintenant, on dérive (1.2), on obtent :

$$\int_0^{+\infty} t^2 e^{-\alpha t} dt = \frac{2}{\alpha^3}.$$

Pour la dérivée d'ordre 3, on a :

$$\int_0^{+\infty} t^3 e^{-\alpha t} dt = \frac{2.3}{\alpha^4} = \frac{3!}{\alpha^4}.$$

En générale

$$\int_0^{+\infty} t^n e^{-\alpha t} dt = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}.$$

Pour $\alpha = 1$, on a :

$$\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt = n!.$$

Définition 1.1 *La fonction Gamma est définie par l'intégrale suivante :*

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt, \quad \alpha > 0. \tag{1.3}$$

Proposition 1.1 *La fonction Gamma est bien définie pour tout $\alpha > 0$.*

Preuve. On montre que l'integrale $\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt$ existe.

Soit $\alpha > 0$, on peut déstingue trois cas :

Si $\alpha = 1$, on a :

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1.$$

Si $\alpha > 1$, on a :

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt = \int_0^{C} t^{\alpha-1} e^{-t} dt + \int_C^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt.$$

La premiére integrale existe puisque la fonction $t^{\alpha-1}e^{-t}$ est continue sur $[0, C]$, alors

$$\lim_{x\to+\infty} t^2 t^{\alpha-1} e^{-t} = 0 \Rightarrow \forall\varepsilon > 0 \; \exists B(\varepsilon) > 0; \; t > B(\varepsilon) \Rightarrow t^2 t^{\alpha-1} e^{-t} < \varepsilon,$$

pour $\varepsilon = 1$; $\exists \; B(1) > 0$ tq : $\forall t > B(1)$, on a $t^{\alpha-1}e^{-t} < \dfrac{1}{t^2}$; comme $\int_c^{+\infty} \dfrac{1}{t^2} dt$ existe, il en résulte que l'integrale $\int_c^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt$ existe, d'où $\Gamma(\alpha)$ est bien définie.

Si $0 < \alpha < 1$ on a :

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt = \int_0^{c} t^{\alpha-1} e^{-t} dt + \int_c^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt,$$

l'integrale $\int_c^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt$ existe (même preuve que $\alpha > 1$) et pour l'intégrale $\int_0^c t^{\alpha-1} e^{-t} dt$ on a : $e^{-t} \sim 1$ au voisinage de 0, d'ou $t^{\alpha-1}e^{-t} \sim t^{\alpha-1}$, donc les intégrales $\int_0^c t^{\alpha-1} e^{-t} dt$ et $\int_0^c t^{\alpha-1} dt$ sont de même nature et comme

$$\int_0^c t^{\alpha-1} dt = \left[\frac{t^\alpha}{\alpha}\right]_0^c = \frac{c^\alpha}{\alpha},$$

on en déduit que : $\int_0^C t^{\alpha-1} e^{-t} dt$ existe, alors $\Gamma(\alpha)$ est définie pour tout $\alpha > 0$. ■

Exemple 1.1 *Calculer* $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$
Par définition, on a :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^{+\infty} t^{\frac{1}{2}-1}e^{-t}dt=\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{t}}e^{-t}dt.$$

On pose $t=x^2$ *alors*

$$dt=2xdx,$$

d'où

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^{+\infty}\frac{1}{x}e^{-x^2}2xdx=2\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx$$

Maintenant, on calcule $\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2$

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2=\left[2\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dy\right]^2=\left[2\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx\right]\left[2\int_0^{+\infty}e^{-y^2}dy\right]$$

$$=4\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}e^{-\left(y^2+x^2\right)}dydx.$$

On pose

$$\begin{cases} y=r\cos\theta \\ x=r\sin\theta \end{cases},\ r\in[0,+\infty[\ \ et\ \theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right],$$

alors

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2=4\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{r=0}^{+\infty}e^{-r^2}rdrd\theta=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[-\frac{e^{-r^2}}{2}\right]_0^{+\infty}d\theta$$

$$=4\left[-\frac{e^{-r^2}}{2}\right]_0^{+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta=4\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}=\pi,$$

ce qui implique que

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}.$$

Proporiétés de la fonction Gamma

Proposition 1.2 *Pour tout* $\alpha\in\mathbb{R}\backslash\{0,\ -1,\ -2,...\}$ *et* $n\in\mathbb{N}$*, la fonction Gamma satisfait les propriétés suivantes :*
(1) :

$$\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha).$$

(2) :

$$\Gamma(\alpha+n)=\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)...(\alpha+n-1)\Gamma(\alpha).$$

(3) :

$$\Gamma(n) = (n-1)!, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

(4) :

$$\Gamma(\alpha+n+1) = \Gamma(\alpha)\prod_{i=0}^{n}(\alpha+i), \forall n \in \mathbb{N}.$$

Preuve. Propriété (1) : La preuve de cette propriété se fait par une intégration par partie. On a :

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha) &= \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}\, e^{-t}dt \\ & \left[\frac{t^{\alpha}e^{-t}}{\alpha}\right]_0^{\infty} + \frac{1}{\alpha}\int_0^{+\infty} t^{\alpha}\, e^{-t}dt \\ &= \frac{1}{\alpha}\Gamma(\alpha+1).\end{aligned}$$

D'où la formule (1).

Propriété (2) : D'après (1), on a :

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha) &= \frac{1}{\alpha}\Gamma(\alpha+1) \\ &= \frac{1}{\alpha}\left[\frac{1}{\alpha+1}\Gamma(\alpha+2)\right] \\ &= \frac{1}{\alpha}\frac{1}{\alpha+1}\left[\frac{1}{\alpha+2}\Gamma(\alpha+3)\right] \\ &= \frac{1}{\alpha}\frac{1}{\alpha+1}\frac{1}{\alpha+2}\left[\frac{1}{\alpha+3}\Gamma(\alpha+4)\right] \\ &= \frac{1}{\alpha}\frac{1}{\alpha+1}\frac{1}{\alpha+2}\frac{1}{\alpha+3}\left[\frac{1}{\alpha+4}\Gamma(\alpha+5)\right].\end{aligned}$$

En répétant le processus n fois, on obteint la relation suivante :

$$\Gamma(\alpha) = \frac{1}{\alpha}\frac{1}{\alpha+1}\frac{1}{\alpha+2}\frac{1}{\alpha+3}....\frac{1}{\alpha+n-1}\Gamma(\alpha+n).$$

Ce qui achève la preuve de (2).

Propriété (3) : Pour démontrer que $\Gamma(n) = (n-1)!$, en utilisant la récurrence.

• : Pour $n = 1$, on a :

$$\Gamma(1) == \int_0^{+\infty} t^{1-1}\, e^{-t}dt = 1 = 0!.$$

•• : On suppose que $\Gamma(n) = (n-1)!$ et on montre que $\Gamma(n+1) = n!$. d'après la propriété (1), on a :

$$\begin{aligned}\Gamma(n+1) &= n\Gamma(n) \\ &= n(n-1)! = n!.\end{aligned}$$

Ainsi, la propriété est démontrée.

Propriété (4) : Montrons par récurrence.

• : Pour $n = 1$, on a :

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha).$$

•• : On suppose que

$$\Gamma(\alpha+n+1) = \Gamma(\alpha)\prod_{i=0}^{n}(\alpha+i)$$

et on montre que

$$\Gamma(\alpha+n+2) = \Gamma(\alpha)\prod_{i=0}^{n+1}(\alpha+i)$$

d'après la propriété (1), on a :

$$\begin{aligned}
\Gamma(\alpha+n+2) &= (\alpha+n+1)\Gamma(\alpha+n+1) \\
&= (\alpha+n+1)\Gamma(\alpha)\prod_{i=0}^{n}(\alpha+i) \\
&= \Gamma(\alpha)\prod_{i=0}^{n+1}(\alpha+i).
\end{aligned}$$

■

Quelque valeurs particulières de la fonction Gamma

On donne quelques valeurs particuliéres de la fonction Gamma :

1 : $\Gamma(1) = 0! = 1$.

2 : $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$.

3 : $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{4}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}$.

4 : $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \left(n-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right) = \left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)... - \frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.

$= \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}$.

1.1.2 Fonction Bêta

Définition 1.2 *La fonction Bêta est donnée par :*

$$B(\alpha,\beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}dt, \ \alpha > 0, \ \beta > 0. \tag{1.4}$$

Forme trigonométrique de la fonction Bêta

Pour obtenir la forme trigonométrique de la fonction Béta, on pose :

$$t = \sin^2\theta,\ \text{alors } dt = 2\sin\theta\cos\theta d\theta, \begin{cases} t = 1 \Longrightarrow \theta = \dfrac{\pi}{2}, \\ t = 0 \Longrightarrow \theta = 0, \end{cases}$$

et on a :

$$1 - t = 1 - \sin^2\theta = \cos^2\theta.$$

En remplacant dans (1.4) on obtient

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin^2\theta\right)^{\alpha-1} \left(\cos^2\theta\right)^{\beta-1} (2\sin\theta\cos\theta) d\theta$$

$$B(\alpha, \beta) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta)^{2(\alpha-1)} (\cos\theta)^{2(\beta-1)} (\sin\theta\cos\theta) d\theta,$$

d'où

$$B(\alpha, \beta) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta)^{2\alpha-1} (\cos\theta)^{2\beta-1} d\theta.$$

Proposition 1.3 *Pour tout $a, b \in \mathbb{R}^+$, on a :*

$$\int_a^b (b-t)^{\alpha-1} (t-a)^{\beta-1} dt = (b-a)^{\alpha+\beta-1} B(\beta, \alpha).$$

Preuve. On pose $y = \dfrac{t-a}{b-a}$, alors $(b-a)\, dy = dt$, on obtient

$$\begin{aligned} & \int_0^1 y^{\beta-1} (b-a)^{\beta-1} (b-a-(b-a)y)^{\alpha-1} (b-a)\, dy \\ = \ & (b-a)^{\alpha+\beta-1} \int_0^1 y^{\beta-1} (1-y)^{\alpha-1} dy = (b-a)^{\alpha+\beta-1} B(\beta, \alpha). \end{aligned}$$

■

Quelques propriétés de la fonction Bêta

Proposition 1.4 *La fonction Bêta est symétrique : $(B(\alpha, \beta) = B(\beta, \alpha))$.*

Preuve. On pose :

$$x = 1 - t \Rightarrow dx = -dt,$$

et

$$\int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx = -\int_1^0 (1-t)^{\alpha-1} t^{\beta-1} dt = \int_0^1 t^{\beta-1} (1-t)^{\alpha-1} dt,$$

d'où

$$B(\alpha, \beta) = B(\beta, \alpha).$$

■

Proposition 1.5 *La fonction Bêta est liée à la fonction Gamma par la relation suivante :*

$$B(\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

Preuve. On a :

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty}t^{\alpha-1}e^{-t}dt,$$

on pose : $t=y^2\Rightarrow dt=2ydy$, et

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha) &= \int_0^{+\infty}t^{\alpha-1}e^{-t}dt=2\int_0^{+\infty}y^{2(\alpha-1)}e^{-y^2}ydy\\ &= 2\int_0^{+\infty}y^{2\alpha-1}e^{-y^2}dy.\end{aligned}$$

Si on pose $y=x$, alors

$$\Gamma(\beta)=2\int_0^{+\infty}x^{2\beta-1}e^{-x^2}dx.$$

Maintenant, on multiple les deux membres de deux équations et on passe en coordonnées polaires

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) &= 4\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}y^{2\alpha-1}e^{-y^2}x^{2\beta-1}e^{-x^2}dxdy\\ &= 4\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}y^{2\alpha-1}x^{2\beta-1}e^{-\left(x^2+y^2\right)}dxdy\\ &= 4\int_0^{+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(r\cos\theta)^{2\beta-1}(r\sin\theta)^{2\alpha-1}e^{-r^2}rdrd\theta\\ &= 4\int_0^{+\infty}r^{2(\alpha+\beta)-1}e^{-r^2}dr\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta)^{2\beta-1}(\sin\theta)^{2\alpha-1}d\theta\\ &= 2\int_0^{+\infty}r^{2(\alpha+\beta)-1}e^{-r^2}dr2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta)^{2\beta-1}(\sin\theta)^{2\alpha-1}d\theta\\ &= \Gamma(\alpha+\beta)B(\alpha,\beta).\end{aligned}$$

Donc

$$\beta(\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}. \tag{1.5}$$

■

Exemple 1.2 *Calculer* $B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

On a :

$$\begin{aligned}\beta\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) &= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)} \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(1\right)} = \sqrt{\pi}\sqrt{\pi} = \pi.\end{aligned}$$

Proposition 1.6 *Pour tout* $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$, *on a :*

$$B(\alpha,\beta) = B(\alpha+1,\beta) + B(\alpha,\beta+1).$$

Preuve. En utilisant (1.5), on obtient :

$$\begin{aligned}B(\alpha,\beta+1) &= \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} = \frac{\Gamma(\alpha)\beta\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} \\ &= \frac{\beta\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha+\beta)} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}B(\alpha,\beta),\end{aligned}$$

ce qui implique

$$(\alpha+\beta)B(\alpha,\beta+1) = \beta B(\alpha,\beta),$$

alors

$$\begin{aligned}B(\alpha,\beta) &= \frac{\alpha}{\beta}B(\alpha,\beta+1) + B(\alpha,\beta+1) = \frac{\alpha\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+1)}{\beta\Gamma(\alpha+\beta+1)} + B(\alpha,\beta+1) \\ &= \frac{\beta\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta)}{\beta\Gamma(\alpha+\beta+1)} + B(\alpha,\beta+1) = B(\alpha+1,\beta) + B(\alpha,\beta+1).\end{aligned}$$

Donc

$$B(\alpha,\beta) = B(\alpha+1,\beta) + B(\alpha,\beta+1).$$

■

Proposition 1.7 *Pour tout* $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$, *on a :*

$$B(\alpha,\beta+1) = \frac{\beta}{\alpha}B(\alpha+1,\beta) = \frac{\beta}{\alpha+\beta}B(\alpha,\beta).$$

et

$$B(\alpha,\alpha) = 2^{1-2\alpha}B\left(\frac{1}{2},\alpha\right).$$

Preuve. On a :

$$\begin{aligned}B(\alpha,\beta+1) &= \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} = \frac{\beta\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} \\ &= \frac{\beta\alpha\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\alpha\Gamma(\alpha+\beta+1)} = \frac{\beta\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta)}{\alpha\Gamma(\alpha+\beta+1)} = \frac{\beta}{\alpha}B(\alpha+1,\beta).\end{aligned}$$

Donc

$$B(\alpha,\beta+1) = \frac{\beta}{\alpha}B(\alpha+1,\beta).$$

■

1.2 Fonction Mittag-Leffler

1.2.1 Fonction Mittag-Lefler à un seul paramétre

Définition 1.3 *La fonction Mittag-Lefler à un seul paramétre, est définie par :*

$$E_{\alpha}(t)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{t^{k}}{\Gamma(\alpha k+1)},\ \ \alpha>0. \tag{1.5}$$

Exemple 1.3 *Pour $\alpha=1$, on a :*

$$E_{\alpha=1}(t)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{t^{k}}{\Gamma(k+1)}=e^{t}.$$

1.2.2 Fonction Mittag-Lefler à un deux paramétres

Définition 1.4 *La fonction Mittag-Lefler à deux paramétres, est définie par :*

$$E_{\alpha,\beta}(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^{k}}{\Gamma(\alpha k+\beta)},\ \ \alpha>0,\ \ \beta>0. \tag{1.6}$$

Exemple 1.4 *Pour $\alpha=1$ et $\beta=2$, on a :*

$$\begin{aligned}
E_{1,1}(t) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^{k}}{\Gamma(k+1)}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^{k}}{k!}=e^{t}.\\
E_{1,2}(t) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^{k}}{\Gamma(k+2)}=\frac{1}{t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^{k+1}}{(k+1)!}=\frac{e^{t}-1}{t}\ \ t\neq 0.\\
E_{2,1}\left(t^{2}\right) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^{2k}}{\Gamma(2k+1)}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^{2k}}{2k!}=\cosh(t).
\end{aligned}$$

1.2.3 Généralisation de la fonction de Mittag-Leffler

Définition 1.5 *La fonction de Mittag-Leffler généralisée $E^{\delta}_{\alpha,\beta}$, est donnée par la formule suivante :*

$$E^{\delta}_{\alpha,\beta}(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\delta)_{k}\,t^{k}}{\Gamma(\alpha k+\beta)\,k!},\alpha>0,\beta>0,\delta>0, \tag{1.7}$$

avec $(\delta)_{k}=\delta(\delta+1)\ldots(\delta+n-1)=\dfrac{\Gamma(\delta+n)}{\Gamma(\delta)}$.

Pour $\delta=1$,la formule (1.7) est réduite à Mittag-Leffler à deux paramètres.

Cas particuliers

Dans la formule (1.7), en prenant $\beta=1$ et $\delta=1$, on obtient :

$$E^{1}_{\alpha,1}(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1)_{k}\,t^{k}}{\Gamma(\alpha k+1)\,k!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^{k}}{\Gamma(\alpha k+1)}=E_{\alpha}(t),$$

et si on prend $\delta = 1$, et α et β quelconques, on obtient :

$$E^{1}_{\alpha,\beta}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1)_k\, t^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)\, k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} = E_{\alpha,\beta}(t).$$

Proposition 1.8 *Soit $E_{\alpha,\beta}$ la fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres telle que $\alpha = 1$ et $\beta = \gamma \in \mathbb{N}$, alors :*

$$E_{1,\gamma}(t) = \frac{1}{t^{\gamma-1}} \left(e^t - \sum_{k=0}^{\gamma-2} \frac{t^k}{k!} \right).$$

Preuve. Par définition, on a :

$$E_{1,\gamma}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(k+\gamma)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{(k+\gamma-1)!},$$

alors

$$\begin{aligned} E_{1,\gamma}(t) &= \frac{1}{t^{\gamma-1}} \left(e^t - \frac{t^{\gamma-2}}{(\gamma-2)!} - \frac{t^{\gamma-3}}{(\gamma-3)!} - \ldots - 1 \right) \\ &= \frac{1}{t^{\gamma-1}} \left(e^t - \sum_{k=0}^{\gamma-2} \frac{t^k}{k!} \right). \end{aligned}$$

■

Proposition 1.9 *Soit Soit $m \in \mathbb{N}^*$, alors la dérivée à l'ordre m de $E_{\alpha,\beta}(t)$ est donnée par :*

$$E^{(m)}_{\alpha,\beta}(t) = E_{\alpha,\beta}(t) - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(m+k)!\,t^k}{\Gamma(\alpha m + \alpha k + \beta)\, k!}.$$

Preuve. Il suffit d'appliquer des dérivées successives de $E_{\alpha,\beta}(t)$ jusqu'à la dérivée d'ordre m. ■

1.2.4 Quelques propriétés

Comme conséquences des définitions (1.5) et (1.6), on démontre les résultats suivants :

Théorème 1.1 *Soit $E_{\alpha,\beta}$, la fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres. Alors, on a :*
1 : $E_{\alpha,\beta}(t) = tE_{\alpha,\alpha+\beta}(t) + \frac{1}{\Gamma(\beta)}$.
2 : $E_{\alpha,\beta}(t) = \beta E_{\alpha,\beta+1}(t) + \alpha t \frac{d}{dt} E_{\alpha,\beta+1}(t)$.
3 : $\left(\frac{d}{dt}\right)^m \left(t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(t^\alpha)\right) = t^{\beta-m-1} E_{\alpha,\beta-m}(t^\alpha)$, $\beta > m$, $m \in \mathbb{N}$.

Preuve. 1. On utilise la formule (1.6), on obtient :

$$\begin{aligned} E_{\alpha,\beta}(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} = \sum_{k=-1}^{\infty} \frac{t^{k+1}}{\Gamma(\alpha(k+1) + \beta)} \\ &= \sum_{k=-1}^{\infty} \frac{t^{k+1}}{\Gamma(\alpha k + (\alpha + \beta))} = \frac{1}{\Gamma(\beta)} + t \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(\alpha k + (\alpha+\beta))} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\beta)} + tE_{\alpha,\alpha+\beta}(t). \end{aligned}$$

2. Pour prouver 2, on procède comme suit :

$$\begin{aligned}
E_{\alpha,\beta}(t) &= \beta E_{\alpha,\beta+1}(t) + \alpha t \frac{d}{dt} E_{\alpha,\beta+1}(t) \\
&= \beta E_{\alpha,\beta+1}(t) + \alpha t \frac{d}{dt} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(\alpha k + \beta + 1)} \\
&= \beta E_{\alpha,\beta+1}(t) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha k t^k}{\Gamma(\alpha k + \beta + 1)} \\
&= \beta E_{\alpha,\beta+1}(t) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha k + \beta - \beta) t^k}{\Gamma(\alpha k + \beta + 1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}.
\end{aligned}$$

3. On applique, la dérivée $m^{éme}$, on obtient :

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^m \left(t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(t^\alpha)\right) = \left(\frac{d}{dt}\right)^m \left(t^{\beta-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k + \beta)}\right)$$

$$= \left(\frac{d}{dt}\right)^m \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{\alpha k+\beta-1}}{\Gamma(\alpha k + \beta)}\right) = \frac{\Gamma(\alpha k + \beta)}{\Gamma(\alpha k + \beta - m)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{\alpha k+\beta-m-1}}{\Gamma(\alpha k + \beta)}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{\alpha k+\beta-m-1}}{\Gamma(\alpha k + \beta - m)} = t^{\beta-m-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k + \beta - m)}.$$

■

Théorème 1.2 *Soit $E_{\alpha,\beta}$, la fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres. Alors pour tout $\gamma \in \mathbb{N}$, on a :*

$$t^\gamma E_{\alpha,\beta+\alpha\gamma}(t) = E_{\alpha,\beta}(t) - \sum_{k=0}^{\gamma-1} \frac{t^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}.$$

Preuve. Il suffit d'appliquer les propriétés de Mittag-Leffler. ■

1.3 Exercices

Exercice 1.1 *Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R} \backslash \{0, -1, -2, ...\}$ et $n \in \mathbb{N}$,on a :*

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha + n)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2).....(\alpha+n-1)}.$$

Exercice 1.2 *Montrer que si $\alpha > 0, \beta > 0$, alors*

$$1).\ \Gamma(\alpha + n + 1) = \prod_{i=0}^{n} \Gamma(\alpha)(\alpha + i), \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$2).\ B(\alpha, \beta + 1) = \frac{\beta}{\alpha} B(\alpha + 1, \beta) = \frac{\beta}{\alpha + \beta} B(\alpha, \beta).$$

Exercice 1.3 *Montrer que pour tout $x > 0, y > 0$, on a :*

1. $B(x,y) = \dfrac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = B(y,x)$.

2. $B(x,y) = 2\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta)^{2x-1}(\cos\theta)^{2y-1}\,d\theta$.

Exercice 1.4 *Montrer que pour tout $\alpha > 0, \beta > 0$, on a :*

$$\beta E_{\alpha,\beta+1}(t) + \alpha t \frac{d}{dt} E_{\alpha,\beta+1}(t) = E_{\alpha,\beta}(t).$$

Exercice 1.5 1) : *Soit $E_{\alpha,\beta}$, la fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres. Montrer que pour tout $\gamma \in \mathbb{N}$, on a :*

$$E_{\alpha,\beta}(t) = t^{\gamma} E_{\alpha,\beta+\alpha\gamma}(t) + \sum_{k=0}^{\gamma-1} \frac{t^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}.$$

2) : *Soit $m \in \mathbb{N}^*$, montrer que la dérivée à l'ordre m de $E_{\alpha,\beta}(t)$ est donnée par :*

$$E_{\alpha,\beta}^{(m)}(t) = E_{\alpha,\beta}(t) - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(m+k)!t^k}{\Gamma(\alpha m+\alpha k+\beta)\,k!}.$$

Chapitre 2

Intégrales et dérivées fractionnaires

Ce chapitre rassemble les définitions et les propriétés essentielles correspondantes à la notion de l'intégration et la dérivation fractionnaire. Ces définitions et propriétés peuvent être retrouvées avec plus de détails dans les références suivantes : [3,5,6,13,14].

2.1 Intégrale d'ordre arbitraire

2.1.1 Formule de Cauchy pour l'intégration successive

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$, avec $-\infty < a < t < b < +\infty$.
Une primitive de f est donnée par :

$$I_a^1 [f(t)] = \int_a^t f(s)\, ds.$$

Pour une primitive seconde et d'aprés le théorème de Fubini, on aura :

$$\begin{aligned} I_a^2 [f(t)] &= \int_a^t I_a^1 [f(s)]\, ds = \int_a^t \left(\int_a^s f(\tau)\, d\tau \right) ds \\ &= \int_a^s f(\tau)\, d\tau \int_a^t ds = \int_a^t (t-s) f(s)\, ds, \end{aligned}$$

et pour une primitive triple, on aura :

$$\begin{aligned} I_a^3 [f(t)] &= \int_a^t ds_1 \int_a^{s_1} ds_2 \int_a^{s_2} f(s_3)\, ds_3 = \int_a^t ds_1 \int_a^{s_1} (s_1 - s_2) f(s_2)\, ds_2 \\ &= \frac{1}{(3-1)!} \frac{1}{2!} \int_a^t (t-s)^{3-1} f(s)\, ds = \frac{1}{2!} \int_a^t (t-s)^2 f(s)\, ds \\ &= \frac{1}{2} \int_a^t (t-s)^2 f(s)\, ds. \end{aligned}$$

Dans le cas général pour tout entier n et par récurrence, on btient la formule de Cauchy :

$$\begin{aligned} I_a^n [f(t)] &= \int_a^t ds_1 \int_a^{s_1} ds_2 \int_a^{s_2} ds_3 ... \int_a^{s_{n-1}} f(s_n)\, ds_n \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-s)^{n-1} f(s)\, ds, \ n \in \mathbb{N}^*. \end{aligned} \tag{2.1}$$

En généralisant la formule (2.1) à un ordre réel positif et en remplaçant la fonction factorielle par la fonction Gamma on aura la définition de l'intégral fractionnaire de Riemann-Liouville.

2.1.2 Intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville

Définition 2.1 *L'opérateur intégral fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha \geq 0$, pour une fonction continue $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est défini par :*

$$\begin{cases} {}_{R.L}I_a^\alpha [f(t)] = \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s)\, ds; \ t > a, \ \alpha > 0, \\ I_a^0 [f(t)] = f(t), \ \alpha = 0, \end{cases} \tag{2.2}$$

Remarque 2.1 *L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville peut notamment s'écrire sous forme de produit de convolution de la fonction puissance $\varphi_\alpha(t) = \dfrac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ et $f(t)$.*

$${}_{R.L}I_a^\alpha [f(t)] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s)\, ds = \varphi_\alpha(t) * f(t).$$

Exemple 2.1 *Calculer l'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville de la fonction suivante :*

$$f(t) = (t-a)^\beta, \ \beta > -1.$$

En utilisant la définition (2.2), on obtient :

$${}_{R.L}I_a^\alpha \left[(t-a)^\beta\right] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} (s-a)^\beta\, ds.$$

En effectuant le changement de variable $s = a + (t-a)\, y$ et en utilisant la fonction Bêta il *résulte que :*

$$\begin{aligned}
{}_{R.L}I_a^{\alpha}\left[(t-a)^{\beta}\right] &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-s)^{\alpha-1}(s-a)^{\beta}\,ds. \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (t-a-y(t-a))^{\alpha-1}(y(t-a))^{\beta}(t-a)\,dy \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(t-a)^{\beta+\alpha}\int_0^1 (1-y)^{\alpha-1}y^{\beta}dy \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(t-a)^{\beta+\alpha}B(\alpha,\beta+1) \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(t-a)^{\beta+\alpha}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}(t-a)^{\beta+\alpha},
\end{aligned}$$

donc

$${}_{R.L}I_a^{\alpha}\left[(t-a)^{\beta}\right] = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}(t-a)^{\alpha+\beta}.$$

Pour $\alpha = 1$ *et* $\beta = 1$, *on a :*

$${}_{R.L}I_a^{1}[(t-a)] = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(3)}(t-a)^2 = \frac{1}{2}(t-a)^2,$$

et pour $\alpha = \frac{1}{2}$, *on a :*

$${}_{R.L}I_a^{\frac{1}{2}}\left[(t-a)^{\beta}\right] = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma\left(\beta+\frac{1}{2}+1\right)}(t-a)^{\beta+\frac{1}{2}} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma\left(\beta+\frac{3}{2}\right)}(t-a)^{\beta+\frac{1}{2}}.$$

Si $f(x) = c$, *alors*

$${}_{R.L}I_a^{\alpha}[f(t)] = I^{\alpha}[c] = \frac{c}{\Gamma(\alpha+1)}(t-a)^{\alpha}.$$

Exemple 2.2 *Calculer l'intégrale fractionnaire de Riemann Liouville d'ordre* $\alpha = \frac{1}{2}$ *de la fonction :* $f(t) = \ln t, t > 0$.

On a :

$$I_0^{\frac{1}{2}}[\ln t] = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}}\ln s ds = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{\ln s}{\sqrt{t-s}}ds.$$

On pose $\sqrt{t-s} = x$, *alors* $ds = -2xdx$,

$$\begin{aligned}
I_0^{\frac{1}{2}}[\ln t] &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\sqrt{t}}^0 \frac{-2x\ln(t-x^2)}{x}dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\sqrt{t}}^0 -2\ln\left(t-x^2\right)dx \\
&= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\sqrt{t}}^0 \left(\ln\left(\sqrt{t}+x\right)+\ln\left(\sqrt{t}-x\right)\right)dx.
\end{aligned}$$

On sait que :

$$\int \ln\left(\sqrt{t}+x\right)dx = \left(\sqrt{t}+x\right)\ln\left(\sqrt{t}+x\right)-x+cte,$$

$$\int \ln\left(\sqrt{t}-x\right)dx = \left(-\sqrt{t}+x\right)\ln\left(\sqrt{t}-x\right)-x+cte,$$

d'où :

$$\begin{aligned} I_0^{\frac{1}{2}}[\ln t] &= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[\left(\sqrt{t}+x\right)\ln\left(\sqrt{t}+x\right)-x\right]_0^{\sqrt{t}} \\ &\quad +\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[\left(-\sqrt{t}+x\right)\ln\left(\sqrt{t}-x\right)-x\right]_0^{\sqrt{t}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[2\sqrt{t}\ln 2\sqrt{t}-\sqrt{t}-\sqrt{t}\ln\sqrt{t}\right]+\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[-\sqrt{t}+\sqrt{t}\ln\sqrt{t}\right] \\ &= \frac{4}{\sqrt{\pi}}\left[\sqrt{t}\ln 2\sqrt{t}-\sqrt{t}\right]=\frac{-4+4\ln 2}{\sqrt{\pi}}+\frac{4}{\sqrt{\pi}}\sqrt{t}\ln\sqrt{t}. \end{aligned}$$

Exemple 2.3 *Calculer l'intégrale fractionnaire de Riemann Liouville de la fonction :* $f(t)=e^t$.

On a :

$$_{R.L}I_0^{\alpha}[f(t)] = {}_{R.L}I_0^{\alpha}\left[e^t\right]=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}e^s ds,$$

Si on pose, $x=t-s$, *on aura :*

$$_{R.L}I_a^{\alpha}\left[e^t\right]=\frac{et}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t x^{\alpha-1}e^{-x}dx,$$

Maintenant, on intégre par parties, on obtient :

$$_{R.L}I_0^{\alpha}\left[e^t\right]=\frac{t^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{t^{\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+2)}+\frac{t^{\alpha+3}}{\Gamma(\alpha+3)}+....=\sum_{n\geq 0}\frac{t^{\alpha+n}}{\Gamma(\alpha+n+1)}.$$

Proposition 2.1 *soient* $f\in C([a,b])$ *et* $\alpha>0$. *Alors*

$$\lim_{t\overset{>}{\to}a} {}_{R.L}I_a^{\alpha}[f(t)]=0. \tag{2.3}$$

Preuve. Par (2.2), on a :

$$_{R.L}I_a^{\alpha}[f(t)]=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-s)^{\alpha-1}f(s)\,ds,$$

alors

$$\begin{aligned} \left|{}_{R.L}I_a^{\alpha}[f(t)]\right| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-s)^{\alpha-1}|f(s)|\,ds \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-s)^{\alpha-1}\|f\|_{\infty}\,ds \\ &\quad \frac{\|f\|_{\infty}}{\Gamma(\alpha+1)}(t-a)^{\alpha}, \end{aligned}$$

le second membre de l'inégalité précédente tend vers 0 lorsque t tend vers a.

Donc on peut déduire que

$$\lim_{t \overset{>}{\to} a} {}_{R.L}I_a^\alpha \left[f\left(t\right) \right] = 0.$$

■

Proposition 2.2 *Pour l'existence de l'opérateur* ${}_{R.L}I_a^\alpha$ *on doit avoir* $\alpha > 0$. *De plus, sous certaines hypotèses raisonnables*

$$\lim_{t \to 0^+} {}_{R.L}I_a^\alpha \left[f\left(t\right) \right] = f\left(t\right). \tag{2.4}$$

Preuve. Pour $f \in C^1\left([a,b)\right)$ et par une intégration par parties, on trouve :

$${}_{R.L}I_a^\alpha \left[f\left(t\right) \right] = \frac{\left(t-a\right)^\alpha f\left(a\right)}{\Gamma\left(\alpha+1\right)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_a^t (t-x)^\alpha f'(x) dx,$$

alors

$$\lim_{\alpha \longrightarrow 0^+} {}_{R.L}I_a^\alpha \left[f\left(t\right) \right] = f\left(a\right) + \int_a^t f'(x) dx$$

$$= f(a) + f\left(t\right) - f\left(a\right) = f\left(t\right).$$

Si $f \in C^0\left([a,b)\right)$, on transforme ${}_{R.L}I_a^\alpha \left[f\left(t\right) \right]$ sous la forme suivante :

$${}_{R.L}I_a^\alpha \left[f\left(t\right) \right] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-x)^{\alpha-1} \left[f(x) - f\left(t\right) + f\left(t\right) \right] dx$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-x)^{\alpha-1} \left(f(x) - f\left(t\right) \right) dx + \frac{f\left(t\right)}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-x)^{\alpha-1} dx$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{t-\delta} (t-x)^{\alpha-1} \left(f(x) - f\left(t\right) \right) dx$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t-\delta}^t (t-x)^{\alpha-1} \left(f(x) - f\left(t\right) \right) dx + \frac{f\left(t\right)}{\Gamma(\alpha+1)} (t-x)^\alpha.$$

Alors

$$\left| {}_{R.L}I_a^\alpha \left[f\left(t\right) \right] - \frac{f\left(t\right)}{\Gamma(\alpha+1)} (t-x)^\alpha \right|$$

$$\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{t-\delta} (t-x)^{\alpha-1} \left| \left(f(x) - f\left(t\right) \right) \right| dx$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t-\delta}^t (t-x)^{\alpha-1} \left(f(x) - f\left(t\right) \right) dx.$$

On pose

$$I_1 = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{t-\delta} (t-x)^{\alpha-1} \left(f(x) - f\left(t\right)\right) dx,$$

et

$$I_2 = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x-\delta}^{t} (t-x)^{\alpha-1} \left(f(x) - f\left(t\right)\right) dx,$$

et on considère l'intégrale I_2. puisque f est continue :

$$\forall x, t \in [a, b), \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \, |x - t| < \delta \Longrightarrow |f(t) - f(t)| < \varepsilon,$$

ce qui entraine :

$$\begin{aligned} |I_2| &= \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x-\delta}^{t} (t-x)^{\alpha-1} \left(f(x) - f\left(t\right)\right) dx \right| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{\Gamma(\alpha)} \int_{t-\delta}^{t} (t-x)^{\alpha-1} dx \leq \varepsilon \frac{\delta^a}{\Gamma(\alpha+1)}. \end{aligned}$$

Pour tout $\alpha \geq 0$ et $\delta > 0$ fixé, on obtient :

$$\begin{aligned} |I_1| &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{t-\delta} (t-x)^{\alpha-1} \left|\left(f(x) - f\left(t\right)\right)\right| dx \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{t-\delta} (t-x)^{\alpha-1} \left(|f(x)| + |f(t)|\right) dx \\ &\leq \frac{2 \sup_{y \in [a,t]} |f(y)|}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{t-\delta} (t-x)^{\alpha-1} dx \leq \frac{2M}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{t-\delta} (t-x)^{\alpha-1} dx \\ &< \frac{2M}{\Gamma(\alpha+1)} \left(\delta^\alpha - (t-a)^\alpha\right). \end{aligned}$$

où $M = \sup_{y \in [a,t]} |f(y)|$. Maintenant, on considère

$$\left| {}_{R.L}I_a^\alpha \left[f(t)\right] - \frac{(t-x)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} f(t) \right| \leq |I_1| + |I_2|,$$

ce qui implique

$$\left| {}_{R.L}I_a^\alpha \left[f(t)\right] - \frac{(t-x)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} f(t) \right| \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \left(\varepsilon \delta^a + 2M \left(\delta^\alpha - (t-a)^\alpha\right)\right),$$

en faisant tendre vers 0^+, on obtient :

$$\left| {}_{R.L}I_a^\alpha \left[f(t)\right] - \frac{(t-x)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} f(t) \right| \leq \varepsilon,$$

autrement dit :

$$\lim_{\alpha \longrightarrow 0^+} \left| {}_{R.L}I_a^\alpha \left[f(t)\right] - f(t) \right| \leq \varepsilon,$$

ce qui implique

$$\lim_{\alpha \longrightarrow 0^+} I_a^\alpha f(t) = f(t).$$

■

Proposition 2.3 *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors, pour tout $\alpha > 0$, $\beta > 0$, on a :*

$$
\begin{aligned}
(1).\ I_a^{\alpha}\left[I_a^{\beta}\left[f(t)\right]\right] &= I_a^{\alpha+\beta}\left[f(t)\right], \qquad (2.5)\\
(2).\ I_a^{\alpha}\left[I_a^{\beta}\left[f(t)\right]\right] &= I_a^{\beta}\left[I_a^{\alpha}\left[f(t)\right]\right],
\end{aligned}
$$

Preuve. En effet :

$$
I_a^{\alpha}\left[I^{\beta} f(t)\right] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} I^{\beta} f(\tau)\, d\tau
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t \left[(t-\tau)^{\alpha-1} \int_a^{\tau} (\tau-x)^{\beta-1} f(x)\, dx\right] d\tau\\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t \int_a^{\tau} \left[(t-\tau)^{\alpha-1} (\tau-x)^{\beta-1} f(x)\right] dx d\tau\\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t \left[f(x) \int_t^{x} (t-\tau)^{\alpha-1} (\tau-x)^{\beta-1} d\tau\right] dx,
\end{aligned}
$$

si on pose : $\tau = x + (t-x)\,y$, alors

$$
\int_t^x (t-\tau)^{\alpha-1} (\tau-x)^{\alpha-1} d\tau
$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^1 (t-x-(t-x)\,y)^{\alpha-1} (x+(t-x)\,y-x)^{\beta-1} (t-x)\, dy\\
&= (t-x)^{\alpha+\beta-1} \int_0^1 (1-y)^{\alpha-1} y^{\beta-1} dy = B(\alpha,\beta)\,(t-x)^{\alpha+\beta-1},
\end{aligned}
$$

donc

$$
\begin{aligned}
{}_{R.L}I_a^{\alpha}\left[I_a^{\beta} f(t)\right] &= \frac{B(\alpha,\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t (t-x)^{\alpha+\beta-1} f(x)\, dx\\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^t (t-x)^{\alpha+\beta-1} f(x)\, dx = {}_{R.L}I^{\alpha+\beta} f(t).
\end{aligned}
$$

Maintenant pour démonterer (2), en utilisant la propriété précédente (1). Alors :

$$
I_a^{\alpha}\left[I_a^{\beta}\left[f(t)\right]\right] = I_a^{\alpha+\beta}\left[f(t)\right] = I_a^{\beta+\alpha}\left[f(t)\right] = I_a^{\beta}\left[I_a^{\alpha}\left[f(t)\right]\right].
$$

■

Exemple 2.4 *1. Si on prend : $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ et $f(t) = t$, on trouve :*

$$
{}_{R.L}I_0^{\alpha}\left[I_0^{\beta}\left[f(t)\right]\right]
$$

$$
\begin{aligned}
&= {}_{R.L}I_0^{\alpha}\left[\frac{\Gamma(2)}{\Gamma(\beta+2)} t^{\beta+1}\right] = {}_{R.L}I_0^{\alpha}\left[\frac{1}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right)} t^{\frac{3}{2}}\right]\\
&= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right)} \left[\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right)}{\Gamma(\alpha+2)} t^{\alpha+\frac{3}{2}}\right] = \frac{1}{2} t^2.
\end{aligned}
$$

D'autre part, on a :

$$ {}_{R.L}I_0^{\alpha+\beta} f(t) = {}_{R.L}I_0^1 f(t) = \int_0^t t dt = \frac{1}{2}t^2. $$

Proposition 2.4 *Pour toute fonction continue f, on a :*

$$ \frac{dt}{t}\left({}_{R.L}I_a^{\alpha}[f(t)]\right) = {}_{R.L}I^{\alpha-1}[f(t)],\ \alpha > 1. \tag{2.6} $$

Preuve. On a :

$$ \begin{aligned} \frac{dt}{t}\left({}_{R.L}I_a^{\alpha}[f(t)]\right) &= \frac{dt}{t}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s)\,ds\right) \\ & \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{dt}{t}\left(\int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s)\,ds\right), \end{aligned} $$

puisque $(t-s)^{\alpha-1}$ et $f(s)$ sont continues, alors $s \to (t-s)^{\alpha-1} f(s)$ est continue, et on a :

$$ \begin{aligned} \frac{dt}{t}\left({}_{R.L}I_a^{\alpha}[f(t)]\right) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t \frac{dt}{t}(t-s)^{\alpha-1} f(s)\,ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (\alpha-1)(t-s)^{(\alpha-1)-1} f(s)\,ds \\ &= \frac{(\alpha-1)}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-s)^{(\alpha-1)-1} f(s)\,ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}\int_a^t (t-s)^{(\alpha-1)-1} f(s)\,ds \\ &= {}_{R.L}I_a^{\alpha-1}[f(t)]. \end{aligned} $$

En générale, on a :

$$ \frac{dt}{t}\left({}_{R.L}I_a^{\alpha}[f(t)]\right) \neq {}_{R.L}I_a^{\alpha}\left[\frac{dt}{t}(f(t))\right]. $$

■

Théorème 2.1 *Soient f une fonction continue sur $I = [0, b)$ et $\alpha > 0$. Si $\frac{dt}{t}(f(t))$ est continue alors pour tout $t > 0$, on a :*

$$ \frac{dt}{t}\left({}_{R.L}I_a^{\alpha}[f(t)]\right) = {}_{R.L}I_a^{\alpha}\left[\frac{dt}{t}(f(t))\right] + \frac{f(0)}{\Gamma(\alpha)}t^{\alpha-1}. \tag{2.7} $$

Preuve. Par la relation (2.2), on a :

$$ {}_{R.L}I_a^{\alpha}[f(t)] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s)\,ds, $$

en faisant le changement de variable : $s = t - x^{\beta}$ avec $\beta = \frac{1}{\alpha}$, ce qui implique

$$ds = -\beta x^{\beta} dx,$$

alors

$$_{R.L}I_a^{\alpha}\left[f\left(t\right)\right] = -\frac{\beta}{\Gamma\left(\alpha\right)}\int_{x^{\beta}}^{0}\left(x^{\beta}\right)^{\alpha-1} f\left(t-x^{\beta}\right) x^{\beta} dx,$$

qui se réduit à

$$\begin{aligned} _{R.L}I_a^{\alpha}\left[f\left(t\right)\right] &= -\frac{1}{\alpha\Gamma\left(\alpha\right)}\int_{t^{\alpha}}^{0} f\left(t-x^{\beta}\right) dx \\ &= \frac{1}{\Gamma\left(\alpha+1\right)}\int_{0}^{t^{\alpha}} f\left(t-x^{\beta}\right) dx, \end{aligned}$$

Maintenant en utilisant la règle de Leibniz :

$$\frac{ds}{s}\left(\int_0^{a(s)} f\left(s,t\right) dt\right) = f\left(s, a\left(s\right)\right) a^{'}\left(s\right) + \int_0^{a(s)} \frac{ds}{s} f\left(s,t\right) dt.$$

Alors

$$\frac{dt}{t}\left({}_{R.L}I_a^{\alpha}\left[f\left(t\right)\right]\right) = \frac{1}{\Gamma\left(\alpha+1\right)}\left(f\left(0\right)\alpha t^{\alpha-1} + \int_0^{t^{\alpha}} \frac{dt}{t} f\left(t-x^{\beta}\right) dx\right).$$

Maintenant, on remplace dx par $-\frac{1}{\beta}x^{1-\beta}ds$, on trouve :

$$\frac{dt}{t}\left({}_{R.L}I_a^{\alpha}\left[f\left(t\right)\right]\right) = \frac{f\left(0\right)}{\alpha\Gamma\left(\alpha\right)}\alpha t^{\alpha-1} - \int_t^{0} \frac{dt}{t} f\left(s\right)\frac{1}{\beta}x^{1-\beta} ds.$$

Cela voudra dire que

$$\frac{dt}{t}\left({}_{R.L}I_a^{\alpha}\left[f\left(t\right)\right]\right) = \frac{f\left(0\right)}{\alpha\Gamma\left(\alpha\right)}\alpha t^{\alpha-1} + \int_0^{t}\left(t-s\right)^{\alpha-1}\frac{dt}{t} f\left(s\right) ds,$$

ce qui implique donne

$$\frac{dt}{t}\left({}_{R.L}I_a^{\alpha}\left[f\left(t\right)\right]\right) = {}_{R.L}I_a^{\alpha}\left[\frac{dt}{t}\left(f\left(t\right)\right)\right] + \frac{f\left(0\right)}{\Gamma\left(\alpha\right)} t^{\alpha-1}.$$

■

2.1.3 Intégrale fractionnaire au sens de Hadamard

L'intégrale fractionnaire de Hadamard est basée sur la généralisation de la nième intégrale suivant :

$$I_a^{n}\left[f\left(t\right)\right] = \int_a^{t}\frac{dx_1}{x_1}\int_a^{x_1}\frac{dx_2}{x_2}...\int_a^{x_{n-1}} f\left(x_n\right)\frac{dx_n}{x_n}.$$

Définition 2.2 *Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ avec $0 < a \leq b \leq \infty$ et $\alpha > 0$. l'intégrale fractionnaire de Hadamard de f définie par :*

$$_{H}I_a^{\alpha}\left[f\left(t\right)\right] = \frac{1}{\Gamma\left(\alpha\right)}\int_a^{t}\left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1}\frac{f\left(s\right)}{s} ds, \; a < t < b. \tag{2.8}$$

Exemple 2.5 *Calculer l'intégrale fractionnaire de Hadamard d'ordre* α *de la fonction :* $f(t) = \left(\log \dfrac{t}{a}\right)^{\beta}$.

En appliquant la définition (2.3), *on trouve :*

$$ {}_{H}I_{a}^{\alpha}\left[\left(\log \frac{t}{a}\right)^{\beta}\right] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{a}^{t} \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} \left(\log \frac{s}{a}\right)^{\beta} \frac{ds}{s}. $$

En effectuant le changement de variable $y = \dfrac{\log \frac{s}{a}}{\log \dfrac{t}{a}}$,

$$ \begin{aligned} & {}_{H}I_{a}^{\alpha}\left[\left(\log \frac{t}{a}\right)^{\beta}\right] \\ = \;& \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{0}^{1} \left(\log \frac{t}{a}\right)^{\alpha-1} (1-y)^{\alpha-1} \left(\log \frac{t}{a}\right)^{\beta} y^{\beta} \left(\log \frac{t}{a}\right) dy \\ = \;& \frac{\left(\log \frac{t}{a}\right)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_{0}^{1} (1-y)^{\alpha-1} y^{\beta} dy = \frac{\left(\log \frac{t}{a}\right)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} B(\alpha, \beta+1) \\ = \;& \frac{\left(\log \frac{t}{a}\right)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} = \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} \left(\log \frac{t}{a}\right)^{\alpha+\beta}. \end{aligned} $$

1. *Si* $\alpha = \frac{1}{2}$, *alors la relation devient :*

$$ {}_{H}I_{a}^{\frac{1}{2}}\left[\left(\log \frac{t}{a}\right)^{\beta}\right] = \frac{1}{\Gamma\left(\beta+\frac{3}{2}\right)} \left(\log \frac{t}{a}\right)^{\alpha+\frac{1}{2}}. $$

2. *Pour* $\alpha = \frac{1}{2}$ *et* $\beta = 1$, *on a :*

$$ {}_{H}I_{a}^{\frac{1}{2}}\left[\left(\log \frac{t}{a}\right)^{1}\right] = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+2\right)} \left(\log \frac{t}{a}\right)^{\frac{1}{2}+1} = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \left(\log \frac{t}{a}\right)^{\frac{3}{2}}. $$

3. *Si* $\alpha = \frac{3}{2}$ *et* $\beta = \frac{1}{2}$, *alors :*

$$ {}_{H}I_{a}^{\frac{3}{2}}\left[\left(\log \frac{t}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\right] = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}+1\right)} \left(\log \frac{t}{a}\right)^{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left(\log \frac{t}{a}\right)^{2}. $$

Quelques propriétés

Proposition 2.5 *Soient* f *et* g *deux fonctions continues sur* $[a, b]$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}$, *pour* $\theta_i > 0, i = 1, 2$ *et* $\alpha > 0$, *on a :*

$$ {}_{H}I_{a}^{\alpha}\left[\theta_1 f(t) + \theta_2 g(t)\right] = \theta_{1H} I_{a}^{\alpha}\left[f(t)\right] + \theta_{2H} I_{a}^{\alpha}\left[g(t)\right]. \tag{2.9} $$

Preuve. Il suffit d'utiliser la linéarité de l'intégrale classique. ■

Proposition 2.6 *Soit* $\alpha > 0, \beta > 0$ *et* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue. Alors pour* $f \in L^p([a,b])$, *on a :*

$$\begin{aligned} {}_HI_a^{\alpha}\left[{}_HI_a^{\beta}\left[f(t)\right]\right] &= {}_HI_a^{\alpha+\beta}\left[f(t)\right], \qquad (2.10)\\ &\textit{et}\\ {}_HI_a^{\alpha}\left[{}_HI_a^{\beta}\left[f(t)\right]\right] &= {}_HI_a^{\beta}\left[{}_HI_a^{\alpha}\left[f(t)\right]\right]. \end{aligned}$$

Preuve. Soit $\alpha > 0, \beta > 0$, alors

$$\begin{aligned} &{}_HI_a^{\alpha}\left[{}_HI_a^{\beta}\left[f(t)\right]\right]\\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t \left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1}\left({}_HI_a^{\beta}\left[f(s)\right]\right)\frac{ds}{s}\\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t\int_a^s \left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1}\left(\log\frac{s}{x}\right)^{\beta-1} f(x)\frac{dxds}{xs}\\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t f(x)\int_x^t \left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1}\left(\log\frac{s}{x}\right)^{\beta-1}\frac{dsdx}{sx}, \end{aligned}$$

on pose le changement de variable suivant :

$$y = \frac{\log\frac{s}{x}}{\log\frac{t}{x}}.$$

On obtient :

$$\begin{aligned} &\int_x^t \left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1}\left(\log\frac{s}{x}\right)^{\beta-1}\frac{ds}{s} = \left(\log\frac{t}{x}\right)^{\alpha+\beta-1}\int_0^1 (1-y)^{\alpha-1}y^{\beta-1}dy\\ &= \left(\log\frac{t}{x}\right)^{\alpha+\beta-1} B(\alpha,\beta) = \left(\log\frac{t}{x}\right)^{\alpha+\beta-1}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}. \end{aligned}$$

En substituant la dernière formule dans (2.4), on aura :

$$\begin{aligned} &{}_HI_a^{\alpha}\left[{}_HI_a^{\beta}\left[f(t)\right]\right]\\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\left(\log\frac{t}{x}\right)^{\alpha+\beta-1} f(x)\frac{dx}{x}\\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_a^t \left(\log\frac{t}{x}\right)^{\alpha+\beta-1} f(x)\frac{dx}{x} = {}_HI_a^{\alpha+\beta}\left[f(t)\right]. \end{aligned}$$

En utilisant la propriété précédente, on a :

$${}_HI_a^{\alpha}\left[{}_HI_a^{\beta}\left[f(t)\right]\right] = {}_HI_a^{\alpha+\beta}\left[f(t)\right] = {}_HI_a^{\beta+\alpha}\left[f(t)\right] = {}_HI_a^{\beta}\left[{}_HI_a^{\alpha}\left[f(t)\right]\right].$$

■

2.1.4 Intégrale fractionnaire de $k-$Riemann-Liouville et $(k,s)-$Riemann-Liouville

Dans ce qui suit, on présente l'intégrale fractionnaire $k-$Riemann-Liouville et $(k,s)-$Riemann-Liouville qui généralisent l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville. Pour plus de détails voir

Fonction $k-$Gamma

Définition 2.3 *Pour $k>0$, la fonction $k-$Gamma est donnée par :*

$$\Gamma_k(\alpha)=\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-\frac{t^k}{k}}\,dt,\ \ \alpha>0.$$

Proposition 2.7 *La fonction $k-$Gamma vérifie les propriétés suivantes :*

1. $$\Gamma_k(\alpha+k)=\alpha\Gamma_k(\alpha).$$
2. $$\Gamma_k(k)=1.$$
3. $$\Gamma_k(\alpha)=a^{\frac{\alpha}{k}}\int_0^{\infty} t^{\alpha-1}e^{-\frac{t^k}{k}a}dt,\ \ a\in\mathbb{R}.$$
4. $$\Gamma(\alpha)=\lim_{k\to 1}\Gamma_k(\alpha).$$
5. $$\Gamma_k(\alpha)=K^{\frac{\alpha}{k}-1}\Gamma(\frac{\alpha}{k}).$$

Fonction $k-$Bêta

Définition 2.4 *La fonction $k-$Bêta est donnée par la formule*

$$B_k(\alpha,\beta)=\frac{1}{k}\int_0^1 t^{\frac{\alpha}{k}-1}(1-t)^{\frac{\beta}{k}-1}dt.$$

Proposition 2.8 *La fonction $k-$Bêta satisfait les identités suivantes :*

1. $$B_k(\alpha,\beta)=\int_0^{\infty} t^{\alpha-1}(1+t^k)^{-\frac{\alpha+\beta}{k}}dt.$$
2. $$B_k(\alpha,\beta)=\frac{\Gamma_k(\alpha)\Gamma_k(\beta)}{\Gamma_k(\alpha+\beta)},\ \ \alpha>0,\ \ \beta>0.$$

3.
$$B_k(\alpha,\beta)=\frac{1}{k}B(\frac{\alpha}{k},\frac{\beta}{k}).$$

4.
$$B_k(\alpha,\beta)=\frac{(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}\Pi_{n=0}^{\infty}\frac{nk(nk+\alpha+\beta)}{(nk+\alpha)(nk+\beta)}.$$

Intégrale fractionnaire $k-$Riemann-Liouville

Définition 2.5 *Soit f une fonction continue sur un intervalle reél $[a,b]$, alors l'intégrale fractionnaire $k-$Riemann-Liouville d'ordre $\alpha\geq 0$ de f est définie par :*

$$_kI_a^{\alpha}[f(x)]=\frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^x(x-t)^{\frac{\alpha}{k}-1}f(t)dt,\ x>a,\ k>0. \tag{2.11}$$

Si $k=1$, on obtient intégrale fractionnaire Rieman-Liouville.

Théorème 2.2 *Soit $f\in L_1[a,b]$, $a>0$. Alors $_kI_a^{\alpha}[f(x)]$ existe presque partout sur $[a,b]$ et $_kI_a^{\alpha}[f(x)]\in L_1[a,b]$.*
Preuve. *On définit $p:\Delta:=[a,b]\times[a,b]\to\mathbb{R}$ par :*

$$\begin{aligned}p(x,t) &= |(x-t)^{\frac{\alpha}{k}-1}|\\ &= \begin{cases}(x-t)^{\frac{\alpha}{k}-1}, & a\leq t\leq x\leq b,\\ 0, & a\leq x\leq t\leq b.\end{cases}\end{aligned}$$

Ainsi étant donné que p est mesurable sur Δ, on obtient

$$\begin{aligned}\int_a^b p(x,t)dt &= \int_a^x p(x,t)dt+\int_x^b p(x,t)dt\\ &= \int_a^x (x-t)^{\frac{\alpha}{k}-1}dt=\frac{k}{\alpha}(x-a)^{\frac{\alpha}{k}}.\end{aligned}$$

En utilisant le répétee l'intégral, on obtient

$$\begin{aligned}&\int_a^b\left(\int_a^b p(x,t)|f(x)|dt\right)dx\\ =\ &\int_a^b|f(x)|\left(\int_a^b p(x,t)dt\right)dx\\ =\ &\frac{k}{\alpha}\int_a^b(x-a)^{\frac{\alpha}{k}}|f(x)|dx\leq\frac{k}{\alpha}(b-a)^{\frac{\alpha}{k}}\int_a^b|f(x)|dx\\ =\ &\frac{k}{\alpha}(b-a)^{\frac{\alpha}{k}}\left\|f(x)\right\|_{L_1[a,b]}<\infty.\end{aligned}$$

Par conséquent, la fonction $\varrho : \Delta \to \mathbb{R}$ *tel que* $\varrho(x,t) = p(x,t)f(x)$ *est intégrable sur* Δ *par le théoréme de Fubini* $\int_a^b p(x,t)f(x)dx$ *est intégrable sur* $[a,b]$, *en fonction de* $t \in [a,b]$. *Autrement dit* ${}_kI_a^{\alpha}[f(x)]$ *est integrable sur* $[a,b]$. ■

Maintenant on donne les propriétés de semi-groupe de l'intégrale fractionnaire $k-$Riemann-Liouville.

Théorème 2.3 *Soit* f *une fonction continue sur* $[0,\infty)$, *et soient* $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $a > 0$. *Alors pour tout* x, *on a :*

$$ {}_kI_a^{\alpha}[{}_kI_a^{\beta}f(x)] = {}_kI_a^{\alpha+\beta}[f(x)] = {}_kI_a^{\beta}[{}_kI_a^{\alpha}f(x)],\ k > 0. $$

Preuve. On utilise l'intégrale farctionnaire $k-$Riemann-Liouville, on obtient :

$$ \begin{aligned} {}_kI_a^{\alpha}[{}_kI_a^{\beta}f(x)] &= \frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\frac{\alpha}{k}-1}\ {}_kI_a^{\beta}f(t)dt \\ &= \frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\frac{\alpha}{k}-1}\left[\frac{1}{k\Gamma_k(\beta)}\int_a^t (t-\tau)^{\frac{\beta}{k}-1}f(\tau)d\tau\right]dt \\ &= \frac{1}{k^2\Gamma_k(\alpha)\Gamma_k(\beta)}\int_a^x f(\tau)\left[\int_\tau^x (x-t)^{\frac{\alpha}{k}-1}(t-\tau)^{\frac{\beta}{k}-1}dt\right]d\tau. \end{aligned} $$

En effectuant le changement de variable : $y = (t-\tau)/(x-\tau)$, et en utilisant la fonction $k-$Bêta, on aura :

$$ \begin{aligned} & \int_\tau^x (x-t)^{\frac{\alpha}{k}-1}(t-\tau)^{\frac{\beta}{k}-1}dt \\ = \ & (x-\tau)^{\frac{\alpha+\beta}{k}-1}\int_0^1 (1-y)^{\frac{\alpha}{k}-1}y^{\frac{\beta}{k}-1}dy \\ = \ & (x-\tau)^{\frac{\alpha+\beta}{k}-1}kB_k(\alpha,\beta) = \frac{1}{k\Gamma_k(\alpha+\beta)}\int_a^x (x-\tau)^{\frac{\alpha+\beta}{k}-1}f(\tau)d\tau \\ = \ & {}_kI_a^{\alpha+\beta}[f(x)]. \end{aligned} $$

■

Théorème 2.4 *Soient* $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $a > 0$. *Alors, on a :*

$$ {}_kI_a^{\alpha}[(x-a)^{\frac{\beta}{k}-1}] = \frac{\Gamma_k(\beta)}{\Gamma_k(\alpha+\beta)}(x-a)^{\frac{\alpha+\beta}{k}-1},\ k > 0. \tag{2.12} $$

Preuve. Par définition de l'intégrale farctionnaire k$-$Riemann-Liouville et par le changement de variable $y = (x-t)/(x-a)$, on a :

$$ \begin{aligned} {}_kI_a^{\alpha}[(x-a)^{\frac{\beta}{k}-1}] &= \frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\frac{\alpha}{k}-1}(t-a)^{\frac{\beta}{k}-1}dt \\ &= \frac{(x-a)^{\frac{\alpha+\beta}{k}-1}}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_0^1 (1-y)^{\frac{\alpha}{k}-1}y^{\frac{\beta}{k}-1}dy \\ &= \frac{(x-a)^{\frac{\alpha+\beta}{k}-1}}{\Gamma_k(\alpha)}B_k(\alpha,\beta). \end{aligned} $$

■

Remarque 2.2 *Pour $k = 1$ dans (2.12), on obtient :*

$$ {}_kI_a^\alpha[(x-a)^{\beta-1}] = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}(x-a)^{\alpha+\beta-1}. $$

Corollaire 2.1 *Soient $\alpha > 0$, $\beta > 0$, Alors on a :*

$$ {}_kI_a^\alpha[1] = \frac{1}{\Gamma_k(\alpha+k)}(x-a)^{\frac{\alpha}{k}-2}. \tag{2.13} $$

Remarque 2.3 *Pour $k = 1$ dans (2.13), on touve :*

$$ I_a^\alpha[1] = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}(x-a)^{\alpha-2}. $$

Intégrale fractionnaire $(k,s)-$Riemann-Liouville

Définition 2.6 *Soit f une fonction continue sur un intervalle reél $[a,b]$, alors l'intégrale fractionnaire $(k,s)-$Riemann-Liouville d'ordre $\alpha > 0$ de f est définie par :*

$$ {}_k^sI_a^\alpha[f(x)] \tag{2.14} $$

$$ = \frac{(s+1)^{1-\frac{\alpha}{k}}}{k\Gamma_k(\alpha)} \int_a^x (x^{s+1} - t^{s+1})^{\frac{\alpha}{k}-1} t^s f(t)dt, \;\; x \in [a,b], k > 0, \;\; s \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}. $$

Maintenant, on prouve la commutativite et les propriétés de semi-groupe de l'intégrale fractionnaire $(k,s)-$Riemann-Liouville.

Théorème 2.5 *Soit f une fonction continue sur $[a,b]$, $k > 0$ et $s \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$. Alors*

$$ {}_k^sI_a^\alpha\left[I_a^\beta f(x)\right] = {}_k^sI_a^{\alpha+\beta}[f(x)] = {}_k^sI_a^\beta\left[{}_k^sI_a^\alpha f(x)\right], \;\; \alpha > 0, \;\; \beta > 0, \;\; x \in [a,b]. $$

Preuve. Par la formule de dirichlet, on a :

$$ \begin{aligned} & {}_k^sI_a^\alpha\left[{}_k^sI_a^\beta f(x)\right] \\ = & \frac{(s+1)^{1-\frac{\alpha}{k}}}{k\Gamma_k(\alpha)} \int_a^x (x^{s+1} - t^{s+1})^{\frac{\alpha}{k}-1} t^s \, {}_k^sI_a^\beta f(t)dt \\ = & \frac{(s+1)^{1-\frac{\alpha}{k}}}{k\Gamma_k(\alpha)} \int_a^x (x^{s+1} - t^{s+1})^{\frac{\alpha}{k}-1} t^s \left[\frac{(s+1)^{1-\frac{\beta}{k}}}{k\Gamma_k(\beta)} \int_a^t (t^{s+1} - \tau^{s+1})^{\frac{\beta}{k}-1} \tau^s f(\tau)d\tau\right] dt \\ = & \frac{(s+1)^{2-\frac{\alpha+\beta}{k}}}{k^2\Gamma_k(\alpha)\Gamma_k(\beta)} \int_a^x \tau^s f(\tau) \left[\int_\tau^x (x^{s+1} - t^{s+1})^{\frac{\alpha}{k}-1} t^s (t^{s+1} - \tau^{s+1})^{\frac{\beta}{k}-1} dt\right] d\tau \end{aligned} $$

En utilisant le changement de variable $y = (t^{s+1} - \tau^{s+1})/(x^{s+1} - \tau^{s+1})$, on peut écrire

$$ \int_\tau^x (x^{s+1} - t^{s+1})^{\frac{\alpha}{k}-1} (t^{s+1} - \tau^{s+1})^{\frac{\beta}{k}-1} t^s dt \tag{2.15} $$

$$ = \frac{(x^{s+1} - \tau^{s+1})^{\frac{\alpha+\beta}{k}-1}}{s+1} \int_0^1 (1-y)^{\frac{\alpha}{k}-1} y^{\frac{\beta}{k}-1} dy $$

$$ = \frac{(x^{s+1} - \tau^{s+1})^{\frac{\alpha+\beta}{k}-1}}{s+1} kB_k(\alpha,\beta). $$

En utilisant la fonction $k-$Bêta et l'égalité (2.7), on trouve :

$$\begin{aligned} {}_k^sI_a^\alpha\left[\,{}_k^sI_a^\beta f(x)\right] &= \frac{(s+1)^{1-\frac{\alpha+\beta}{k}}}{k\Gamma_k(\alpha+\beta)}\int_a^x (x^{s+1}-\tau^{s+1})^{\frac{\alpha+\beta}{k}-1}\tau^s f(\tau)d\tau \\ &= {}_k^sI_a^{\alpha+\beta}[f(x)]. \end{aligned}$$

■

Théorème 2.6 *Soient* $\alpha>0,\ \beta>0,\ k>0$ *et* $s\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. *Alors*

$$ {}_k^sI_a^\alpha\left[(x^{s+1}-a^{s+1})^{\frac{\beta}{k}-1}\right] = \frac{\Gamma_k(\beta)}{(s+1)^{\frac{\alpha}{k}}\Gamma_k(\alpha+\beta)}(x^{s+1}-a^{s+1})^{\frac{\alpha+\beta}{k}-1}. \tag{2.16}$$

Preuve. En utilisant (2.14) et le changement de variable $y=(x^{s+1}-t^{s+1})/(x^{s+1}-a^{s+1})$, $x\in]a,b]$, on obtient :

$$\begin{aligned} &{}_k^sI_a^\alpha\left[(x^{s+1}-a^{s+1})^{\frac{\beta}{k}-1}\right] \\ &= \frac{(s+1)^{1-\frac{\alpha}{k}}}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^x (x^{s+1}-t^{s+1})^{\frac{\alpha}{k}-1}t^s(t^{s+1}-a^{s+1})^{\frac{\alpha+\beta}{k}-1}dt \\ &= \frac{(s+1)^{1-\frac{\alpha}{k}}(x^{s+1}-a^{s+1})^{\frac{\alpha+\beta}{k}-1}}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_0^1 (1-y)^{\frac{\alpha}{k}-1}y^{\frac{\beta}{k}-1}dy \\ &= \frac{(x^{s+1}-a^{s+1})^{\frac{\alpha+\beta}{k}-1}}{(s+1)^{\frac{\alpha}{k}}\Gamma_k(\alpha)}B_k(\alpha,\beta). \end{aligned}$$

■

Remarque 2.4 *Prenant* $s=0,\ k>0$ *dans* (2.16), *on obtient :*

$$ {}_kI_a^\alpha\left[(x-a)^{\frac{\beta}{k}-1}\right] = \frac{\Gamma_k(\beta)}{\Gamma_k(\alpha+\beta)}(x-a)^{\frac{\alpha+\beta}{k}-1}, \tag{2.17}$$

si l'on prend $s=0$ *et* $k=1$, *alors*

$$ I_a^\alpha[(x-a)^{\beta-1}] = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}(x-a)^{\alpha+\beta-1}.$$

Corollaire 2.2 *Soient* $k>0$ *et* $s\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, *alors on a la formule suivante :*

$$ {}_k^sI_a^\alpha[1] = \frac{1}{(s+1)^{\frac{\alpha}{k}}\Gamma_k(\alpha+k)}(x^{s+1}-a^{s+1})^{\frac{\alpha}{k}-2}, \alpha>0. \tag{2.18}$$

Remarque 2.5 *Pour* $s=0,\ k>0$ *dans* (2.18), *on a :*

$$ {}_kI_a^\alpha[1] = \frac{1}{\Gamma_k(\alpha+k)}(x-a)^{\frac{\alpha}{k}-2}.$$

Si on pose $s=0,\ k=0$, *alors*

$$ I_a^\alpha[1] = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}(x-a)^{\alpha-2}.$$

2.2 Dérivées d'ordre arbitraire

La notion de dérivée d'ordre arbitraire (non entier) est une généralisation du concept de la diférentiation d'ordre entier. Il y a beaucoup d'approches pour la dérivation fractionnaire. Dans cette section, on s'intéresse aux quatres approches de dérivation les plus utilisées : la dérivée de Grünwald-Letnikov, la dérivée deRiemann-Liouville, la dérivée de Caputo et celle de Hadamard. Pour plus de détails voir : [3,5,6].

2.2.1 Dérivée fractionnaire au sens Grünwald-Letnikov

L'idée de cette approche est de généraliser la définition classique de la dérivation d'ordre entièr d'une fonction à des ordres de dérivée arbitraires.

Pour une fonction f donnée, la dérivée première $(D^1 f)$ de la fonction f est définie par :

$$D^1 f(x) = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{h\longrightarrow 0} \frac{f(x) - f(x-h)}{h} = f^{(1)}(x).$$

Aussi, on peut définir la dérivée deuxième comme suit :

$$D^2 f(t) = \frac{d^2 f(t)}{dt^2} = \lim_{h\longrightarrow 0} \frac{f^{(1)}(t) - f^{(1)}(t-h)}{h}$$

$$= \lim_{h\longrightarrow 0} \frac{1}{h}\left(\frac{f(t)-f(t-h)}{h} - \frac{f(t-h)-f(t-2h)}{h}\right) = \lim_{h\longrightarrow 0} \frac{f(t) - 2f(t-h) + f(t-2h)}{h^2}.$$

La troisième dérivée de f est donneé par :

$$D^3 f(t) = \frac{d^3 f(t)}{dt^3} = \lim_{h\longrightarrow 0} \frac{f(t) - 3f(t-h) + 3f(t-2h) - f(t-3h)}{h^3}.$$

Par récurrence, la dérivée d'ordre n de f est donnée par la formule suivante :

$$D^n f(t) = \frac{d^n f(t)}{dt^n} = \lim_{h\longrightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{i=0}^{n} (-1)^i C_n^i f(t - ih), \tag{2.19}$$

avec

$$C_n^i = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(i+1)\Gamma(n-i+1)} = \frac{n(n-1)\ldots.(n-i+1)}{i!}.$$

On peut généraliser la formule (2.19) pour α d'ordre non entier $(n- < \alpha < n)$.

On remarquant que :

$$\begin{aligned}(-1)^i C_n^i &= (-1)^i \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(i+1)\Gamma(n-i+1)} = (-1)^i \frac{n(n-1)\ldots.(n-i+1)}{i!} \\ &= (-1)^i \frac{n(n-1)\ldots.(n-i+1)(\alpha-i)!}{i!(\alpha-i)!} = \frac{-n(-n+1)\ldots.(i-n+1)}{\Gamma(i+1)}\end{aligned}$$

$$\frac{\Gamma(i-\alpha)}{\Gamma(i+1)\Gamma(-\alpha)}.$$

Alors, on peut définir la dérivée d'ordre α.

Définition 2.7 *Soit $f \in C^0([a,b])$, la dérivée fractionnaire d'ordre α $(\alpha \in]n-1,n[)$ au sens de Grünwald-Letnikov de la fonction f est donneé par :*

$$_{GL}D_a^{\alpha}[f(t)] = \lim_{h\longrightarrow 0} h^{-\alpha} \sum_{i=0}^{n} \frac{\Gamma(i-\alpha)}{\Gamma(i+1)\Gamma(-\alpha)} f(t-ih). \tag{2.20}$$

Si f est de classe C^n, alors en utilisant une intégration par parties, on obtient :

$$_{GL}D_a^{\alpha}[f(t)] = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)(t-a)^{i-\alpha}}{\Gamma(i-\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s)\, ds. \tag{2.21}$$

Pour $a = 0$, on obtien :

$$_{GL}D_a^{\alpha}[f(t)] = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(0)t^{i-\alpha}}{\Gamma(i-\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s)\, ds.$$

Exemple 2.6 *Calculer l'intégrale fractionnaire de Grünwald-Letnikov d'ordre α de la fonction suivante :*

$$f(t) = (t-a)^{\beta}.$$

Soit α est un nombre non entier positif tel que $n-1 < \alpha < n$ avec $\beta > n-1$, alors

$$f^{(m)}(a) = 0, \ m = 0, 1, 2, ..., n-1,$$

et

$$f^{(n)}(t) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-n+1)} (t-a)^{\beta-n},$$

d'où

$$_{GL}D_a^{\alpha}[f(t)] = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} (s-a)^{\beta-n}\, ds,$$

En faisant le changement de variable $s = a + y(t-a)$ on trouve :

$$\begin{aligned}
_{GL}D_a^{\alpha}[f(t)] &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} (s-a)^{\beta-n}\, ds \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)} \int_0^1 (1-y)^{n-\alpha-1} (t-a)^{\beta-\alpha} y^{\beta-n} dy \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)} (t-a)^{\beta-\alpha} \int_0^1 (1-y)^{n-\alpha-1} y^{\beta-n} dy \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)\beta(n-\alpha, \beta-n+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)} (t-a)^{\beta-\alpha} \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)\Gamma(\beta-\alpha+1)} (t-a)^{\beta-\alpha} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} (t-a)^{\beta-\alpha}.
\end{aligned}$$

Pour $\alpha = \frac{1}{2}$ et $\beta = 1$, on a :

$$_{GL}D_a^{\frac{1}{2}}[(t-a)] = \frac{\Gamma(2)}{\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} (t-a)^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{(t-a)}.$$

Remarque 2.6 *En générale la dérivée fractionnaire d'une fonction constante au sens de Grünwald-Letnikov n'est pas nulle ni constante.*

Si $f(t) = c$ et α non entier positif, alors :

$$f^{(m)}(a) = 0,\ \ m = 0, 1, 2, ..., n.$$

On utilise la formule (2.21), on obtient :

$$\begin{aligned} {}_{GL}D_a^{\alpha}[f(t)] &= \frac{c}{\Gamma(1-\alpha)}(x-a)^{-\alpha} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{f^{(i)}(a)(t-a)^{i-\alpha}}{\Gamma(i-\alpha+1)} \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s)\, ds \\ &= \frac{c}{\Gamma(1-\alpha)}(x-a)^{-\alpha}. \end{aligned}$$

2.2.2 Intégrale fractionnaire au sens Grünwald-Letnikov

L'intégrale fractionnaire au sens Grünwald-Letnikov se traduit par l'expression suivante :

$$ {}_{GL}I_a^{\alpha}[f(t)] = {}_{GL}D_a^{-\alpha}[f(t)] = \lim_{h\longrightarrow 0} h^{\alpha} \sum_{i=0}^{n} \frac{\Gamma(i+\alpha)}{\Gamma(i+1)\Gamma(\alpha)} f(t-ih). \qquad (2.22)$$

Cas particuliers :

Pour $\alpha = 1,$ on a :

$$ {}_{GL}I_a^{1}[f(t)] = \lim_{h\longrightarrow 0} h \sum_{i=0}^{n} \frac{\Gamma(i+1)}{\Gamma(i+1)\Gamma(1)} f(t-ih) = \lim_{h\longrightarrow 0} h \sum_{i=0}^{n} f(t-ih)$$

en tenant compte que $t - a = nh$ et que f est continue, alors

$$ {}_{GL}I_a^{1}[f(t)] = \lim_{h\longrightarrow 0} h \sum_{j=0}^{n} f(t-ih) = \int_0^{t-a} f(t-s)ds = \int_a^t f(x)dx \qquad (2.23)$$

Pour $\alpha = 2,$ on a :

$$\begin{aligned} {}_{GL}I_a^{2}[f(t)] &= \lim_{h\longrightarrow 0} h \sum_{i=0}^{n} \frac{\Gamma(i+2)}{\Gamma(i+1)\Gamma(2)} f(x-ih) \\ &= \lim_{h\longrightarrow 0} h \sum_{j=0}^{n} (i+1)\, h\, f(t-ih) \end{aligned}$$

En faisant le changement de variable $t - h = s$, on déduit que :

$$ {}_{GL}I_a^{2}[f(t)] = \lim_{h\longrightarrow 0} h \sum_{i=1}^{n+1} (i\,h)\ f(s-ih) = \int_0^{t-a} sf(t-s)ds = \int_a^t (t-x)f(x)dx \qquad (2.24)$$

Aussi pour $\alpha = 3,$ on a :

$$_{GL}I_a^3\left[f(t)\right]) = \lim_{h\longrightarrow 0}\frac{h}{2!}\sum_{i=0}^{n}(i+2)(i+1)\,h^2\,f(t-ih).$$

On pose le changement de variable $t+h=y$, on obtient :

$$_{GL}I^3\left[f(t)\right]) = \lim_{h\longrightarrow 0}\frac{h}{2!}\sum_{j=1}^{n+1}i(i+1)\,h^2\,f(y-ih), \tag{2.25}$$

La relation (2.25), peut s'écrire sous la forme :

$$_{GL}I_a^3\left[f(t)\right]) = \lim_{h\longrightarrow 0}\left(\frac{h}{2!}\sum_{i=1}^{n+1}(ih)^2\,f(y-ih) + \frac{h^2}{2!}\sum_{j=1}^{n+1}ih\;\,f(y-ih)\right),$$

puisque

$$\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{h^2}{2!}\sum_{i=1}^{n+1}ih\;\,f(y-ih) = \lim_{h\longrightarrow 0}h\int_a^t(t-x)f(x)dx = 0,$$

et lorsque $h\to 0$, on trouve :

$$\begin{aligned} _{GL}I_a^3\left[f(t)\right]) &= \lim_{h\longrightarrow 0}\frac{h}{2!}\sum_{i=1}^{n+1}(ih)^2\,f(y-ih) = \frac{1}{2!}\int_0^{t-a}s^2f(t-s)ds \\ &= \frac{1}{2!}\int_a^t(t-x)^2f(x)dx. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Les formules (2.23)-(2.26) suggèrent l'expression générale suivante :

$$\begin{aligned} _{GL}I_a^\alpha\left[f(t)\right]) &= \lim_{h\longrightarrow 0}h^\alpha\sum_{i=0}^{n}\frac{\Gamma\left(i+\alpha\right)}{\Gamma\left(i+1\right)\Gamma\left(\alpha\right)}f\left(t-ih\right) \qquad (2.27) \\ &= \frac{1}{(\alpha-1)!}\int_a^t(t-x)^{\alpha-1}f(x)dx. \end{aligned}$$

Maintenant, on montre que (2.27) est une représentation d'une intégrale répétée α fois.

En effet,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(_{GL}I_a^\alpha\left[f(t)\right]\right)) &= \frac{1}{(\alpha-1)!}\int_a^t\frac{d}{dt}(t-x)^{\alpha-1}f(x)dx \\ &= \frac{1}{(\alpha-2)!}\int_a^t(t-x)^{\alpha-2}f(x)dx = \;_{GL}I_a^{\alpha-1}\left[f(t)\right]. \end{aligned} \tag{2.28}$$

On intègre sur (a,t), la relation (2.28), on obtient

$$_{GL}I_a^\alpha\left[f(t)\right] = \int_a^t\left(_{GL}I_a^{\alpha-1}\left[f(x)\right]\right)dx,$$

et

$$_{GL}I_a^{\alpha-1}[f(t)] = \int_a^t \left({}_{GL}I_a^{\alpha-2}[f(x)]\right)dx$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned} {}_{GL}I_a^{\alpha}[f(t)] &= \int_a^t dx \int_a^t \left({}_{GL}I_a^{\alpha-2}[f(x)]\right)dx \\ &= \int_a^t dx \int_a^t dx \int_a^t \left({}_{GL}I_a^{\alpha-3}[f(x)]\right)dx \\ & \int_a^t dx \int_a^t dx ... \int_a^t f(x)dx. \end{aligned}$$

Définition 2.8 *L'intégrale fractionnaire au sens Grünwald-Letnikov d'ordre $\alpha, \alpha > 0$ de la fonction f est définie par :*

$$\begin{aligned} {}_{GL}I_a^{\alpha}[f(t)]) &= \lim_{h\longrightarrow 0} h^{\alpha}\sum_{i=0}^{n}\frac{\Gamma(i+\alpha)}{\Gamma(i+1)\Gamma(\alpha)}f(t-ih) \qquad (2.29) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-x)^{\alpha-1}f(x)dx. \end{aligned}$$

où $0 < n-1 < \alpha < n$.

Proposition 2.9 *Si la fonction f est de classe C^n, alors :*

$$_{GL}I_a^{\alpha}[f(t)] = \sum_{i=0}^{n-1}\frac{f^{(i)}(a)(x-a)^{i-\alpha}}{\Gamma(i+\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(n+\alpha)}\int_a^t (t-x)^{n+\alpha-1}f^{(n)}(x)dx. \qquad (2.30)$$

Preuve. D'après (2.29), on a :

$$_{GL}I_a^{\alpha}[f(t)] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-x)^{\alpha-1}f(x)dx.$$

Maintenant en utilisant l'intégration par parties, on obtient

$$_{GL}I_a^{\alpha}[f(t)] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left\{\left[-\frac{(t-x)^{\alpha}}{\alpha}f(x)\right]_a^t - \int_a^t -\frac{(t-x)^{\alpha}}{\alpha}f^{(1)}(x)\,dx\right\}$$

$$= \frac{f(a)(t-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\int_a^t (t-x)^{\alpha}f^{(1)}(x)\,dx$$

Après une autre intégration par parties

$$
\begin{aligned}
{}_{GL}I_a^{\alpha}[f(t)] &= \frac{f(a)}{\Gamma(\alpha+1)}(t-a)^{\alpha} \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\left[\frac{-(t-x)^{\alpha+1}f^{(1)}(x)}{\alpha+1}\right]_a^t + \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\int_a^t \frac{(t-x)^{\alpha+1}}{\alpha+1}f^{(2)}(x)\,dx \\
&= \frac{f(a)(t-a)^{\alpha+0}}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{f^{(1)}(a)(t-a)^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha+2)}\int_a^t (t-x)^{\alpha+1}f^{(2)}(x)\,dx \\
&= \sum_{i=0}^{1}\frac{f(a)(t-a)^{\alpha+i}}{\Gamma(\alpha+i+1)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha+2)}\int_a^t (t-x)^{\alpha+1}f^{(2)}(x)\,dx.
\end{aligned}
$$

Après n intégration par parties, on obtient :

$$
{}_{GL}I_a^{\alpha}[f(t)] = \sum_{i=0}^{n-1}\frac{f^{(i)}(a)(t-a)^{i-\alpha}}{\Gamma(i+\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(n+\alpha)}\int_a^t (t-x)^{n+\alpha-1}f^{(n)}(x)dx.
$$

■

2.2.3 Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Définition 2.9 *On définit la dérivée fractionnaire d'ordre $\alpha > 0$ au sens de Riemann-Liouville d'une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ par :*

$$
{}_{RL}D_a^{\alpha}[f(t)] = \begin{cases} \dfrac{d^m}{dt^m}\left[\dfrac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\int_a^t (t-s)^{m-\alpha-1}f(s)\,ds\right], m-1<\alpha<m, m\in\mathbb{N}^*, \\ \dfrac{d^m}{dt^m}f(t), \qquad \alpha = m. \end{cases} \tag{2.31}
$$

On peut écrire la relation (2.31) sous la forme équivalente suivante :

$$
{}_{RL}D_a^{\alpha}[f(t)] = \begin{cases} \dfrac{d^m}{dt^m}\left[I_a^{m-\alpha}f(t)\right], m-1<\alpha<m, m\in\mathbb{N}^*, \\ \dfrac{d^m}{dx^m}f(t), \quad \alpha = m. \end{cases} \tag{2.32}
$$

Exemple 2.7 *Calculer la dérivée fractionnaire d'ordre $\alpha = \dfrac{1}{2}$ au sens de Riemann Liouville de la fonction $f(t) = t-a$.*

On a :

$$
\begin{aligned}
{}_{RL}D_a^{\alpha}\left[f\left(t\right)\right] &= {}_{RL}D_a^{\alpha}\left[\left(t-a\right)\right] \\
&= \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{\Gamma\left(1-\frac{1}{2}\right)}\int_a^t \left(t-s\right)^{1-\dfrac{1}{2}-1}\left(s-a\right)ds\right] \\
&= \frac{d}{dt}\left[I_a^{\dfrac{1}{2}}\left(t-a\right)\right] = \frac{d}{dt}\left[\frac{\Gamma\left(2\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}\left(t-a\right)^{\dfrac{3}{2}}\right] \\
&= \frac{3}{2}\frac{\Gamma\left(2\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}\left(t-a\right)^{\dfrac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

Exemple 2.8 *On calcule la dérivée fractionnaire d'ordre α au sens de Riemann-Liouville de $f(x) = (t-a)^{\beta}$.*

On a :

$$
{}_{RL}D_a^{\alpha}\left[(t-a)^{\beta}\right] = \left(\frac{d}{dx}\right)^n I^{n-\alpha}\left(\left[(t-a)^{\beta}\right]\right).
$$

En utilisant le (2.32), on peut écrire :

$$
{}_{RL}I_a^{n-\alpha}\left[(t-a)^{\beta}\right] = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+n-\alpha)}(t-a)^{\beta+n-\alpha},
$$

alors

$$
{}_{RL}D_a^{\alpha}\left[(t-a)^{\beta}\right] = \left(\frac{d}{dt}\right)^n\left(\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+n-\alpha)}(t-a)^{\beta+n-\alpha}\right)
$$

$$
= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+n-\alpha)}\left(\frac{d}{dt}\right)^n (t-a)^{\beta+n-\alpha}
$$

En utilisant la relation de dérivation classique :

$$
\left(\frac{d}{dt}\right)^n (t-a)^{\beta+n-\alpha} \tag{2.33}
$$

$$
= (\beta+n-\alpha)(\beta+n-\alpha-1))...(\beta-\alpha+1))(t-a)^{\beta-\alpha}
$$

$$
= \frac{\Gamma(\beta+1+n-\alpha)}{(\beta-\alpha+1)}(t-a)^{\beta-\alpha}.
$$

Ce qui permet d'avoir :

$$
{}_{RL}D_a^{\alpha}\left[(t-a)^{\beta}\right] = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(t-a)^{\beta-\alpha}.
$$

Si $\alpha = \frac{1}{2}$ *et* $\beta = \frac{3}{2}$, *alors*

$$\begin{aligned} {}_{RL}D_a^{\frac{1}{2}}\left[(x-a)^{\frac{3}{2}}\right] &= \frac{\Gamma(\frac{3}{2}+1)}{\Gamma(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}+1)}(x-a)^{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{\frac{3}{2}\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(2)}(x-a) = \frac{3\pi}{4}(x-a), \end{aligned}$$

et pour $\alpha > 0$ *et* $\beta = 0$, *on aura le résultat suivant :*

$$\begin{aligned} {}_{RL}D_a^{\alpha}\left[(x-a)^{0}\right] &= \frac{\Gamma(0+1)}{\Gamma(0-\alpha+1)}(x-a)^{0-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}(x-a)^{-\alpha}. \end{aligned}$$

Remarque 2.7 *La dérivée fractionnaire d'une fonction constante au sens de Riemann-Liouville n'est pas nulle :*

$${}_{RL}D_a^{\alpha}[c] = \frac{c}{\Gamma(1-\alpha)}(t-a)^{-\alpha}.$$

En effet, on a :

$$\begin{aligned} {}_{RL}D_a^{\alpha}[c] &= \frac{d^n}{dt^n}\left(\frac{c}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1}\,d\tau\right) \\ &= \frac{c}{\Gamma(1-\alpha)}(t-a)^{-\alpha}. \end{aligned}$$

On présente maintenant quelques propriétés de l'opérateur de dérivation au sens de Riemann-Liouville.

Proposition 2.10 *L'opérateur de dérivation de Riemann-Liouville possède les popriétés suivantes :*

(1) : *Pour tout* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ *et pour deux fonctions quelconques* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *et* $g : [a,b] \to \mathbb{R}$, *on a :*

$${}_{RL}D_a^{\alpha}[\lambda f(t) + \mu g(t)] = \lambda\ {}_{RL}D_a^{\alpha}[f(t)] + \mu\ {}_{RL}D_a^{\alpha} g[(t)].$$

(2) : *En général, la propriété de semi groupe n'est pas vérifiée, on n'a pas toujours :*

$${}_{RL}D_a^{\alpha}\left[{}_{RL}D_a^{\beta}[f(t)]\right] = {}_{RL}D_a^{\alpha+\beta}[f(t)].$$

(3) : *Il en est de même de la propriété de commutativité :* $\exists\alpha > 0, \beta > 0$, f *continue sur* $[a,b] \subset \mathbb{R}$, *tels que :*

$${}_{RL}D_a^{\alpha}\left[{}_{RL}D_a^{\beta}[f(t)]\right] \neq {}_{RL}D_a^{\alpha}\left[{}_{RL}D_a^{\beta}[f(t)]\right].$$

Preuve. Pour (1), on a :

$$_{RL}D_a^{\alpha}\left[\lambda f(t)+\mu g(t)\right]$$

$$=\left(\frac{d}{dt}\right)^n\left(_{RL}I_a^{n-\alpha}\left[\lambda f(t)+\mu g(t)\right]\right)$$

$$=\left(\frac{d}{dt}\right)^m\left[\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^t(t-x)^{n-\alpha-1}(\lambda f(x)+\mu g(x))dx\right]$$

$$=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dt}\right)^n\left[\lambda\int_a^t(t-x)^{n-\alpha-1}f(x)dx+\mu\int_a^t(t-x)^{m-\alpha-1}g(x)dx\right]$$

$$=\lambda\left(\frac{d}{dt}\right)^n\left[\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^t(t-x)^{n-\alpha-1}f(x)dx\right]+\mu\left(\frac{d}{dt}\right)^n\left[\int_a^t(t-x)^{n-\alpha-1}g(x)dx\right]$$

$$=\lambda^{RL}D_a^{\alpha}f(t)+\mu\ ^{RL}D_a^{\alpha}g(t).$$

Pour (2), on pose $f(t)=t^{\frac{-1}{2}}$ et $\alpha=\beta=\frac{1}{2}$, alors on a :

$$_{RL}D_0^{\frac{1}{2}}\left[f(t)\right]=\ _{RL}D^{\frac{1}{2}}\left[f(t)\right]=\ _{RL}D^{\frac{1}{2}}\left[t^{\frac{-1}{2}}\right]=0,$$

et

$$_{RL}D_0^{\frac{1}{2}}\left[_{RL}D_0^{\frac{1}{2}}\left[f(t)\right]\right]=\ _{RL}D_0^{\frac{1}{2}}\left[_{RL}D_0^{\frac{1}{2}}\left[t^{\frac{-1}{2}}\right]\right]=0,$$

on remarque aussi que :

$$D_0^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}\left[f(t)\right]=\ D_0^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}\left[f(t)\right]\left[t^{\frac{-1}{2}}\right]=\frac{-1}{2}t^{-\frac{3}{2}},$$

Dans (2), on prend $f(t)=t^{\frac{1}{2}},\alpha=\frac{1}{2}$ et $\beta=\frac{3}{2}$, alors

$$_{RL}D_0^{\frac{1}{2}}\left[f(t)\right]=\ _{RL}D_0^{\frac{1}{2}}\left[t^{\frac{1}{2}}\right]=\frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

et

$$_{RL}D_0^{\frac{1}{2}}\left[f(t)\right]=\ _{RL}D_0^{\frac{3}{2}}\left[t^{\frac{1}{2}}\right]=0,$$

tandis que

$$_{RL}D_0^{\frac{1}{2}}\left[_{RL}D_0^{\frac{3}{2}}\left[f(t)\right]\right]=\ _{RL}D_0^{\frac{1}{2}}\left[_{RL}D_0^{\frac{3}{2}}\left[t^{\frac{1}{2}}\right]\right]=0,$$

et

$$_{RL}D_0^{\frac{3}{2}}\left[_{RL}D_0^{\frac{1}{2}}\left[f(t)\right]\right]=\ _{RL}D_0^{\frac{3}{2}}\left[_{RL}D_0^{\frac{1}{2}}\left[t^{\frac{1}{2}}\right]\right]=\ _{RL}D_0^{\frac{3}{2}}\left[\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right]=\frac{1}{4}t^{\frac{3}{2}}.$$

■

Lemme 2.1 *Soit f une fonction définie sur $[a,b]$ vérifiant ${}_{RL}D_a^\alpha[f(t)] = 0$, avec $\alpha \in]n-1, n[$, $n \in \mathbb{N}^\bullet$, alors :*

$$f(t) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i \frac{\Gamma(i+1)}{\Gamma(i+1+\alpha-n)} (t-a)^{i+\alpha-n}, \tag{2.34}$$

où les $c_i\,(i = 0, 1, ..., n-1)$ sont des constantes arbitraires.

Preuve. D'après la formule (2.32), on a :

$${}_{RL}D_a^\alpha[f(t)] = \left(\frac{d}{dx}\right)^n {}_{RL}I_a^{n-\alpha}[f(t)] = 0,$$

ce qui implique que

$${}_{RL}I_a^{n-\alpha}[f(t)] = c_0 + c_1(x-a) + ... + c_{n-1}(x-a)^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} c_i (x-a)^i.$$

Puisque $g^{(n)}(x) = 0 \Longrightarrow g$ est un polynome de degré $\leq n-1$. En appliquant l'operateur ${}_{RL}I_a^\alpha$, on peut écrire :

$${}_{RL}I_a^\alpha\left[{}_{RL}I_a^{n-\alpha}[f(t)]\right] = {}_{RL}I_a^\alpha\left[\sum_{i=0}^{n-1} c_i(t-a)^i\right],$$

ce qui revient à :

$${}_{RL}I_a^n[f(t)] = \sum_{i=0}^{n-1} c_i \frac{\Gamma(i+1)}{\Gamma(i+\alpha+1)}(t-a)^{i+\alpha}.$$

Une dérivation d'ordre n, donne

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d}{dt}\right)^n \left({}_{RL}I_a^n[f(t)]\right) &= \sum_{i=0}^{n-1} c_i \frac{\Gamma(i+1)}{\Gamma(i+\alpha+1)} \left(\frac{d}{dt}\right)^n (t-a)^{i+\alpha} \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} c_i \frac{\Gamma(i+1)}{\Gamma(i+\alpha+1)} \frac{\Gamma(i+\alpha+1)}{(i+\alpha-n+1)} (t-a)^{i+\alpha-n} \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} c_i \frac{\Gamma(i+1)}{(i+\alpha-n+1)} (t-a)^{i+\alpha-n}.
\end{aligned}$$

Donc,

$$f(t) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i \frac{\Gamma(i+1)}{(i+\alpha-n+1)} (t-a)^{i+\alpha-n}.$$

■

Proposition 2.11 *Soient $f \in C([a,b))$, et $n- < \alpha < n, n \in \mathbb{N}$. Alors, l'opérateur de dérivation de Riemann-Liouville ${}_{RL}D_a^{\alpha}$ possède les propriétés suivantes :*

1.
$$ {}_{RL}D_a^{\alpha}\left[{}_{RL}I_a^{\alpha}\left[f\left(t\right)\right]\right] = f\left(t\right). \tag{2.35}$$

2.
$$\lim_{\substack{\alpha \longrightarrow n \\ <}} {}_{RL}D_a^{\alpha}\left[f\left(t\right)\right] = f^{(n)}\left(t\right). \tag{2.36}$$

Preuve. En se basant sur la propriété classique :

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n \left(I_a^n\left[f\left(t\right)\right]\right) = f\left(t\right),$$

on obtient :

$${}_{RL}D_a^{\alpha}\left[{}_{RL}I_a^{\alpha}\left[f\left(t\right)\right]\right] = \left(\frac{d}{dx}\right)^n \left(I_a^{n-\alpha}\left[{}_{RL}I_a^{\alpha}\left[f\left(t\right)\right]\right]\right)$$

$$= \left(\frac{d}{dx}\right)^n \left(I_a^{n-\alpha+\alpha}\left[f\left(t\right)\right]\right) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n \left(I_a^n\left[f\left(t\right)\right]\right) = f(t).$$

2. On suppose que f est de classe C^n, alors

$$f\left(t\right) = I_a^n\left[f^{(n)}\right]\left(t\right) + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i)}\left(a\right)}{\Gamma\left(i+1\right)}\left(t-a\right)^i.$$

Maintenant, on applique $I_a^{n-\alpha}$, on trouve :

$$I_a^{n-\alpha}\left[f\left(t\right)\right] = I_a^{n-\alpha}\left[I_a^n\left[f^{(n)}\left(t\right)\right]\right] + I_a^{n-\alpha}\left[\sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i)}\left(a\right)}{\Gamma\left(i+1\right)}\left(t-a\right)^i\right]$$

$$= I_a^{n-\alpha}\left[I_a^n\left[f^{(n)}\left(t\right)\right]\right] + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i)}\left(a\right)}{\Gamma\left(i+1\right)} I_a^{n-\alpha}\left[\left(t-a\right)^i\right]$$

$$= I_a^{2n-\alpha}\left[f^{(n)}\left(t\right)\right] + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i)}\left(a\right)\Gamma\left(i+1\right)}{\Gamma\left(i+1\right)\Gamma(n-\alpha+i+1}\left(t-a\right)^{n-\alpha+i}$$

$$= I_a^{2n-\alpha}\left[f^{(n)}\left(t\right)\right] + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i)}\left(a\right)}{\Gamma(n-\alpha+i+1)}\left(t-a\right)^{n-\alpha+i},$$

Ensuite, on utilise la formule (2.32)

$$
\begin{aligned}
{}_{RL}D_a^{\alpha}\left[f(t)\right] &= \left(\frac{d}{dx}\right)^n \left(I_a^{n-\alpha}\left[f(t)\right]\right) \\
&= \left(\frac{d}{dx}\right)^n I_a^{2n-\alpha}\left[f^{(n)}(t)\right] + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i)}(a)}{\Gamma(n-\alpha+i+1)}(t-a)^{n-\alpha+i} \\
&= I_a^{n-\alpha}\left[f^{(n)}(t)\right] + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i)}(a)}{\Gamma(i-\alpha+1)}(t-a)^{n-\alpha+i-n} \\
&= I_a^{n-\alpha}\left[f^{(n)}(t)\right] + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i)}(a)}{\Gamma(i-\alpha+1)}(t-a)^{i-\alpha}.
\end{aligned}
$$

En faisant tendre vers n^+, on obtient :

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\substack{\alpha \longrightarrow n \\ <}} {}_{RL}D_a^{\alpha}\left[f(t)\right] \\
&= \lim_{\substack{\alpha \longrightarrow n \\ <}} I_a^{n-\alpha}\left[f^{(n)}(t)\right] + \lim_{\substack{\alpha \longrightarrow n \\ <}} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i)}(a)}{\Gamma(i-\alpha+1)}(t-a)^{i-\alpha} \\
&= I_a^{0}\left[f^{(n)}(t)\right] + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i)}(a)}{\Gamma(i-n+1)}(t-a)^{i-n} = f^{(n)}(t).
\end{aligned}
$$

D'où

$$
\lim_{\substack{\alpha \longrightarrow n \\ <}} {}_{RL}D_a^{\alpha}\left[f(t)\right] = f^{(n)}(t).
$$

■

2.2.4 Dérivée fractionnaire au sens de Caputo

La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha, n-1 < \alpha < n$, $n \in \mathbb{N}^*$ s'obtient par une application de $I_a^{n-\alpha}$ suivie d'une dérivation classique d'ordre n : Tandis que la dérivée au sens de Caputo est le résultat de la permutation de ces deux opérations.

Définition 2.10 *Soit $f \in C^n([a,b])$, $n \in \mathbb{N}^*$. On définit la dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre $\alpha \geq 0$ de la fonction f comme suit :*

$$
{}_{C}D_a^{\alpha}\left[f(t)\right] = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s)\,ds, & n-1 < \alpha < n,\ n \in \mathbb{N}^*, \\ \left(\dfrac{d}{dt}\right)^n f(t), & \alpha = n. \end{cases} \tag{2.37}
$$

On peut écrire la relation (2.37) sous la forme équivalente suivante :

$$
{}_{C}D_{a}^{\alpha}\left[f(t)\right]=\begin{cases} {}_{RL}I_{a}^{n-\alpha}\left[\left(\dfrac{d}{dt}\right)^{n} f(t)\right], & n-1<\alpha<n,\ n\in\mathbb{N}^{*}, \\ \left(\dfrac{d}{dt}\right)^{n} f(t), & \alpha=n. \end{cases} \tag{2.38}
$$

Exemple 2.9 *Soit* $f(t)=(t-a)^{\beta}$, $\beta>-1$. *Pour* $\alpha>0$, *on a :*

$$
{}_{C}D_{a}^{\alpha}\left[f(t)\right]={}_{RL}I_{a}^{n-\alpha}\left(\left[f(t)\right]\right)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_{a}^{t}(t-s)^{n-\alpha-1}f^{(n)}(s)\,ds.
$$

Et comme

$$
f^{(n)}(t)=\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-n+1)}(t-a)^{\beta-n},
$$

alors

$$
\begin{aligned}
{}_{C}D_{a}^{\alpha}\left[f(t)\right] &= {}_{RL}I_{a}^{n-\alpha}\left[\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-n+1)}(t-a)^{\beta-n}\right] \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-n+1)}\,{}_{RL}I_{a}^{n-\alpha}\left[(t-a)^{\beta-n}\right] \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)}\int_{a}^{t}(t-s)^{n-\alpha-1}(s-a)^{\beta-n}\,d\tau.
\end{aligned}
$$

En effectuant le changement de variable $s=a+x(t-a)$, on aura :

$$
\begin{aligned}
&{}_{C}D_{a}^{\alpha}\left[f(t)\right] \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)}\int_{0}^{1}(t-a-x(t-a))^{n-\alpha-1}(x(t-a))^{\beta-n}(t-a)\,dx \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)}(t-a)^{\beta-\alpha}\int_{0}^{1}(1-x)^{n-\alpha-1}x^{\beta-n}dx \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)}(t-a)^{\beta-\alpha}\int_{0}^{1}(1-x)^{n-\alpha-1}x^{\beta-n}dx \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)B(n-\alpha,\beta-n+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)}(t-a)^{\beta-\alpha} \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)\Gamma(\beta-\alpha+1)}(t-a)^{\beta-\alpha} \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(t-a)^{\beta-\alpha}.
\end{aligned}
$$

Si l'on prend $\beta = 1$ et $\alpha = \frac{1}{2}$, alors

$$\begin{aligned} D_a^{\alpha}[f(t)] &= {}_{RL}I_a^{n-\alpha}\left[\left(\frac{d}{dt}\right)^n (f(t))\right] = {}_{RL}I_a^{\frac{1}{2}}\left[\frac{d}{dt}(t-a)\right] \\ &= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}(t-a)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Si $\beta = 0$ et $\alpha > 0$, alors

$$D_a^{\alpha}[f(t)] = {}_{RL}I_a^{n-\alpha}\left[\left(\frac{d}{dt}\right)^n (f(t))\right] = {}_{RL}I_a^{\frac{1}{2}}[0] = 0.$$

Remarque 2.8 *Si $f = c$, alors*

$$\begin{aligned} {}_{C}D_a^{\alpha}[f(t)] &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s)\, ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^t \left((t-s)^{n-\alpha-1}\times 0\right) ds = 0 = {}_{C}D_a^{\alpha}[c]. \end{aligned}$$

C'est-à-dire que la dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'une fonction constante est nulle.

Exemple 2.10 *On reprend la fonction $f(t) = (t-a)^{\frac{5}{2}}$ et on calcule a dérivée fractionnaire ${}_{C}D_a^{\frac{3}{2}}[f(t)]$. Alors :*

$$\begin{aligned} {}_{C}D_a^{\frac{3}{2}}[f(t)] &= {}_{C}D_a^{\frac{3}{2}}\left[(t-a)^{\frac{5}{2}}\right] = {}_{RL}I_a^{2-\frac{3}{2}}\left[\left(\frac{d}{dt}\right)^2\left((t-a)^{\frac{5}{2}}\right)\right] \\ &= {}_{RL}I_a^{\frac{1}{2}}\left[\left(\frac{d}{dt}\right)^2\left((t-a)^{\frac{5}{2}}\right)\right]. \end{aligned}$$

En tenant compte de la relation (2.32), on aura :

$$\begin{aligned} {}_{C}D_a^{\frac{3}{2}}\left[(t-a)^{\frac{5}{2}}\right] &= {}_{RL}I_a^{\frac{1}{2}}\left[\frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}-2+1\right)}(t-a)^{\frac{5}{2}-2}\right] \\ &= {}_{RL}I_a^{\frac{1}{2}}\left[\frac{\frac{5}{2}\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}(t-a)^{\frac{5}{2}-2}\right] = \frac{15}{4}\,{}_{RL}I_a^{\frac{1}{2}}\left[(t-a)^{\frac{1}{2}}\right] \\ &= \frac{15}{4}\left[\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+1\right)}(t-a)^{\frac{1}{2}}\right] = \frac{15\sqrt{\pi}}{8}(t-a). \end{aligned}$$

Proposition 2.12 *Soit $n-1 < \alpha < n$, $n \in \mathbb{N}^*, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et soient les deux fonctions $f(t)$ et $g(t)$ telles que ${}_{C}D_a^{\alpha}[f(t)]$ et ${}_{C}D_a^{\alpha}[g(t)]$ existent. Alors la dérivation fractinnaire de Caputo est un opérateur lineaire :*

$$ {}_{C}D_a^{\alpha}[\lambda f(t) + \mu g(t)] = \lambda\, {}_{C}D_a^{\alpha}[f(t)] + \mu\, {}_{C}D_a^{\alpha}[g(t)]. \tag{2.39}$$

Preuve. On a :
$$_{C}D_a^{\alpha}\left[f(t)\right]=\left(\frac{d}{dt}\right)^{n}\ _{RL}I_a^{n-\alpha}\left(\left[f(t)\right]\right),$$
alors
$$_{C}D_a^{\alpha}\left[\lambda f(t)+\mu g(t)\right]=\left(\frac{d}{dt}\right)^{n}\left(_{RL}I_a^{n-\alpha}\left(\left[\lambda f(t)+\mu g(t)\right]\right)\right).$$
Comme la dérivée n-ème et l'intégrale sont linéaires, alors
$$\begin{aligned}&_{C}D_a^{\alpha}\left[\lambda f(t)+\mu g(t)\right]\\ =&\ \lambda\left(\frac{d}{dt}\right)^{n}\ _{RL}I_a^{n-\alpha}\left(\left[f(t)\right]\right)+\mu\left(\frac{d}{dt}\right)^{n}\ _{RL}I_a^{n-\alpha}\left(\left[g(t)\right]\right)\\ =&\ \lambda_{C}D_a^{\alpha}\left[f(t)\right]+\mu_{C}D_a^{\alpha}\left[g(t)\right].\end{aligned}$$

■

Proposition 2.13 *Soient $f\in C^{n}([a,b))$, et $n-1<\alpha<n, n\in N^{*}$. Alors, l'opérateur de dérivation de Caputo $_{C}D_a^{\alpha}$ a possède les propriété suivante :*
$$\text{Si } _{C}D_a^{\alpha}\left[f(t)\right]=0,\ \text{alors } f(t)=\sum_{i=0}^{n-1}c_i\left(t-a\right)^{i}. \tag{2.40}$$

Preuve. Soit $f\in C^{n}([a,b))$, alors
$$_{C}D_a^{\alpha}\left[f(t)\right]=0\Rightarrow I^{n-\alpha}\left[\left(\frac{d}{dt}\right)^{n}f(t)\right]=0.$$
En appliquant $D^{n-\alpha}$, on trouve :
$$\left(\frac{d}{dt}\right)^{n}f(t)=0,$$
donc
$$f(t)=\sum_{i=0}^{n-1}c_i\left(t-a\right)^{i}.$$

■

Lien entre la dérivée de Caputo et celle de Riemann-Liouville

Pour f est de classe C^{n} et $n-1<\alpha<n$, la relation reliant la dérivée au sens de Riemann-Liouville à celle de Caputo est donnée par :
$$_{R.L}D_a^{\alpha}\left[f(t)\right]=\ _{C}D_a^{\alpha}\left[f(t)\right]+\sum_{i=0}^{n-1}\frac{f^{(i)}(a)}{\Gamma\left(i-\alpha+1\right)}\left(t-a\right)^{i-\alpha}. \tag{2.41}$$

La relation (2.41) peut aussi s'écrire :

$$\begin{aligned} {}_{C}D_a^{\alpha}\left[f(t)\right] &= {}_{R.L}D_a^{\alpha}\left[f(t)\right] - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i)}(a)}{\Gamma(i-\alpha+1)}(t-a)^{i-\alpha} \\ &= {}_{R.L}D_a^{\alpha}\left[f(t) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(t-a)^{i}\right]. \end{aligned} \tag{2.42}$$

A partir de (2.41) et (2.42), on déduit que la dérivée fractionnaire d'ordre α de f au sens de Riemann-Liouville coïncide avec celle de Caputo si a est un point zéro d'ordre n de f.

Plus précisément, on a :

$$\left(f^{(i)}(a) = 0, i = 1, 2, ..., n-1\right) \Rightarrow \left({}_{C}D_a^{\alpha}\left[f(t)\right] = {}_{R.L}D_a^{\alpha}\left[f(t)\right]\right).$$

Preuve. On part de l'hypothèse que f est de classe C^n, alors on peut écrire :

$$f(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(t-a)^{i} + {}_{RL}I_a^{n}\left[\left(\frac{d}{dt}\right)^{n}\left[f(t)\right]\right]. \tag{2.43}$$

En appliquant ${}_{RL}I_a^{n-\alpha}$ à l'identité (2.43), on obtient :

$$\begin{aligned} {}_{RL}I_a^{n-\alpha}\left[f(t)\right] &= {}_{RL}I_a^{n-\alpha}\left[\sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(t-a)^{i} + {}_{RL}I_a^{n}\left[\left(\frac{d}{dt}\right)^{n}\left[f(t)\right]\right]\right] \\ &= {}_{RL}I_a^{n-\alpha}\left[\sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(t-a)^{i}\right] + {}_{RL}I_a^{n-\alpha}\left[{}_{RL}I_a^{n}\left[\left(\frac{d}{dt}\right)^{n}\left[f(t)\right]\right]\right] \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i)}(a)}{\Gamma(n-\alpha+i+1)}(t-a)^{n-\alpha+i} + {}_{RL}I_a^{2n-\alpha}\left[\left(\frac{d}{dt}\right)^{n}\left[f(t)\right]\right]. \end{aligned}$$

Ensuite on applique $\left(\frac{d}{dt}\right)^n$ à la relation obtenue, on aura :

$$\begin{aligned} &\left(\frac{d}{dt}\right)^{n}\left(\left[{}_{RL}I_a^{n-\alpha}\left[f(t)\right]\right]\right) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i)}(a)}{\Gamma(n-\alpha+i+1)}\left(\frac{d}{dt}\right)^{n}\left((t-a)^{n-\alpha+i}\right) + \left(\frac{d}{dt}\right)^{n}\left({}_{RL}I_a^{2n-\alpha}\left[\left(\frac{d}{dt}\right)^{n}\left[f(t)\right]\right]\right) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i)}(a)}{\Gamma(n-\alpha+i+1)}\left(\frac{\Gamma(n-\alpha+i+1)}{\Gamma(n-\alpha+i+1-n)}(t-a)^{n-\alpha+i-n}\right) \\ &\quad + \left(\frac{d}{dt}\right)^{n}\left({}_{RL}I_a^{n}\left[I_a^{n-\alpha}\left[\left(\frac{d}{dt}\right)^{n}\left[f(t)\right]\right]\right]\right) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i)}(a)}{\Gamma(i-\alpha+1)}(t-a)^{n-\alpha+i-n} + I_a^{n-\alpha}\left[\left(\frac{d}{dt}\right)^{n}\left[f(t)\right]\right]. \end{aligned}$$

Maintenant, en utilisant le fait que :

$$ {}_{C}D_{a}^{\alpha}\left[f(t)\right]=\left[{}_{RL}I_{a}^{n-\alpha}\left[\left(\frac{d}{dt}\right)^{n}f(t)\right]\right] \text{ et } {}_{R.L}D_{a}^{\alpha}\left[f(t)\right]=\left(\frac{d}{dt}\right)^{n}\left(\left[{}_{RL}I_{a}^{n-\alpha}\left[f(t)\right]\right]\right), $$

on obtient :

$$ {}_{R.L}D_{a}^{\alpha}\left[f(t)\right]={}_{C}D_{a}^{\alpha}\left[f(t)\right]+\sum_{i=0}^{n-1}\frac{f^{(i)}\left(a\right)}{\Gamma\left(i-\alpha+1\right)}\left(t-a\right)^{i-\alpha}. $$

■

2.2.5 Dérivée fractionnaire au sens d'Hadamard

Dans cette sous-section on donne la définition et quelques propriétés de la dérivée fractionnaire au sens de Hadamard, on donne aussi quelques exemples. Soit $[a,b]$ une intervalle de $\mathbb{R}$,et on a la fonction $f:[a,b]\rightarrow\mathbb{R}$et $\delta=t\frac{d}{dt}$ et

$$ AC_{\delta}^{n}[a,b]=\left\{f:[a,b]\rightarrow C:\delta^{n-1}f(t)\in AC[a,b],\delta=t\frac{d}{dt}\right\}. $$

Définition 2.11 *Soient $f\in AC_{\delta}^{n}\left[a,b\right],\alpha>0$ et $\delta=t\frac{d}{dt}$ La dérivation fractionnaire au sens de Hadamard de la fonction f est définie par :*

$$ \begin{aligned} {}_{H}D_{a}^{\alpha}\left[f(t)\right] &= \left(t\frac{d}{dt}\right)^{n}{}_{H}I_{a}^{n-\alpha}\left[f(t)\right]=\delta^{n}{}_{H}I_{a}^{n-\alpha}\left[f(t)\right] \qquad (2.44)\\ &= \frac{1}{\Gamma\left(n-\alpha\right)}\left(t\frac{d}{dt}\right)^{n}\int_{a}^{t}\left(\log\frac{t}{s}\right)^{n-\alpha-1}f\left(s\right)\frac{ds}{s}\\ &= \frac{1}{\Gamma\left(n-\alpha\right)}\delta^{n}\int_{a}^{t}\left(\log\frac{t}{s}\right)^{n-\alpha-1}f\left(s\right)\frac{ds}{s}, \end{aligned} $$

où $n-1<\alpha<n$, $n=[\alpha]+1$.

Exemple 2.11 *On calcule la dérivation fractionnaire au sens de Hadamard de la fonction suivante :*

$$ f(t)=\left(\log\frac{t}{a}\right)^{\theta}. $$

On a :

$$ \begin{aligned} {}_{H}D_{a}^{\alpha}\left[f(t)\right] &= {}_{H}D_{a}^{\alpha}\left[\left(\log\frac{t}{a}\right)^{\theta}\right]=\delta^{n}{}_{H}I_{a}^{n-\alpha}\left[\left(\log\frac{t}{a}\right)^{\theta}\right]\\ &= \frac{1}{\Gamma\left(n-\alpha\right)}\delta^{n}\int_{a}^{t}\left(\log\frac{t}{s}\right)^{n-\alpha-1}\left(\log\frac{s}{a}\right)^{\theta}\frac{ds}{s}\\ &= \frac{1}{\Gamma\left(n-\alpha\right)}\delta^{n}\int_{a}^{t}\left(\log\frac{t}{s}\right)^{n-\alpha-1}\left(\log\frac{s}{a}\right)^{\theta}\frac{ds}{s}. \end{aligned} $$

En effectuant le changement de variable : $y = \dfrac{\log \frac{s}{a}}{\log \frac{t}{a}}$, *on obtient*

$$\begin{aligned} {}_HD_a^{\alpha}\left[\left(\log\frac{t}{a}\right)^{\theta}\right] &= \frac{\delta^n\left(\log\frac{t}{a}\right)^{n-\alpha+\theta}}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^1 y^{\theta}(1-y)^{n-\alpha-1}dy \\ &= \frac{\Gamma(\theta+1)}{\Gamma(n-\alpha+\theta+1)}\delta^n\left(\log\frac{t}{a}\right)^{n-\alpha+\theta}. \end{aligned}$$

Pour $\alpha = \frac{1}{2}$ *et* $\theta = \frac{5}{2}$, *on a :*

$$\begin{aligned} {}_HD_a^{\frac{1}{2}}\left[\left(\log\frac{t}{a}\right)^{\frac{5}{2}}\right] &= \frac{\frac{5}{2}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma(4)}\delta^1\left(\log\frac{t}{a}\right)^3 \\ &= \frac{\frac{5}{2}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma(4)}\left(t\frac{d}{dt}\right)\left(\log\frac{t}{a}\right)^3 = \frac{15\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{64}\left(\log\frac{t}{a}\right)^2. \end{aligned}$$

Pour $\alpha = \frac{1}{2}$ *et* $\theta = 0$, *on a :*

$${}_HD_a^{\frac{1}{2}}\left[\left(\log\frac{t}{a}\right)^{0}\right] = \frac{1}{\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\delta^1\left(\log\frac{t}{a}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\left(\log\frac{t}{a}\right)^{\frac{1}{2}}},$$

alors la dérivée fractionnaire de Hadamard d'une constante n'est pas nulle :

$${}_HD_a^{\alpha}[c] = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)\left(\log\frac{t}{a}\right)^{\alpha}},$$

si $a = 1$, *alors*

$${}_HD_1^{\alpha}[c] = {}_HD^{\alpha}[c] = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)(\log t)^{\alpha}}.$$

Exemple 2.12 *On calcule l'intégrale au sens de Hadamard d'ordre* $\alpha > 0$ *de la fonction* $f(t) = \left(\log\frac{t}{a}\right)^{\theta-1}, \theta > 1$.

Alors,

$$\begin{aligned} {}_HD_a^{\alpha}\left[\left(\log\frac{t}{a}\right)^{\theta-1}\right] &= \delta^n{}_HI_a^{n-\alpha}\left[\left(\log\frac{t}{a}\right)^{\theta-1}\right] \\ & \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\delta^n\int_a^t\left(\log\frac{t}{s}\right)^{n-\alpha-1}\left(\log\frac{s}{a}\right)^{\theta-1}\frac{ds}{s} \\ &= \frac{\Gamma(\theta)}{\Gamma(n-\alpha+\theta)}\delta^n\left(\log\frac{t}{a}\right)^{n-\alpha+\theta-1}, \end{aligned}$$

donc

$${}_HD_a^{\alpha}\left[\left(\log\frac{t}{a}\right)^{\theta-1}\right] = \frac{\Gamma(\theta)}{\Gamma(n-\alpha+\theta)}\delta^n\left(\log\frac{t}{a}\right)^{n-\alpha+\theta-1}.$$

si $a = 1$, *alors*

$${}_HD^{\alpha}\left[(\log t)^{\theta-1}\right] = \frac{\Gamma(\theta)}{\Gamma(n-\alpha+\theta)}\delta^n(\log t)^{n-\alpha+\theta-1}.$$

Proposition 2.14 *Soit $\alpha > 0$ et $f \in C[a,\infty) \cap L^1[a,\infty)$. Alors l'équation ${}_H D_a^\alpha [f(t)] = 0$ admet une solution générale donnée par :*

$$\begin{aligned} f(t) &= c_1 (\log t)^{\alpha-1} + c_2 (\log t)^{\alpha-2} + \dots + c_n (\log t)^{\alpha-n} \\ &= \sum_{i=1}^{n} c_i \left(\log \frac{t}{a}\right)^{\alpha-i}, \end{aligned} \tag{2.45}$$

où $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 0,1,2,\dots,n$, $n = [\alpha]+1$.

Lemme 2.2 *soit $h : (a,b) \to \mathbb{R}$ une fonction, alors $\delta^n h(t) = 0$ si seulement si*

$$h(t) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i \left(\log \frac{t}{a}\right)^{i}, \tag{2.46}$$

où les $c_i \in \mathbb{R}, i = 0,1,2,\dots,n-1$ sont des constantes réelles.

Preuve. On a :

$${}_H D_a^\alpha [f(t)] = 0.$$

Ce qui implique :

$$\delta^n \ {}_H I_a^{n-\alpha} [f(t)] = 0.$$

D'après le lemme 2.3, on a :

$${}_H I_a^{n-\alpha} [f(t)] = \sum_{i=0}^{n-1} c_i \left(\log \frac{t}{a}\right)^{i}, \ c_i \in \mathbb{R}, i = 0,1,2,\dots,n-1.$$

Maintenant, on applique l'intégrale fractionnaire ${}_H I_a^\alpha$ aux deux membres, on obtient

$$\begin{aligned} {}_H I_a^\alpha \left[{}_H I_a^{n-\alpha} [f(t)] \right] &= {}_H I_a^{n} [f(t)] = {}_H I_a^\alpha \left[\sum_{i=0}^{n-1} c_i \left(\log \frac{t}{a}\right)^{i} \right] \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} c_i \ {}_H I_a^\alpha \left[\left(\log \frac{t}{a}\right)^{i} \right] \end{aligned}$$

En suite,

$$\begin{aligned} \delta^n \ {}_H I_a^{n} [f(t)] &= f(t) = \delta^n \left(\sum_{i=0}^{n-1} c_i \frac{\Gamma(i+1)}{\Gamma(i+\alpha+1)} \left(\log \frac{t}{a}\right)^{i+\alpha} \right) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} c_i \frac{\Gamma(i+1)}{\Gamma(i+\alpha+1)} \delta^n \left(\log \frac{t}{a}\right)^{i+\alpha} \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} c_i \frac{\Gamma(i+1)\Gamma(i+\alpha+1)}{\Gamma(i+\alpha+1)\Gamma(i+\alpha-n+1)} \left(\log \frac{t}{a}\right)^{i+\alpha-n} \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} c_i \frac{\Gamma(i+1)}{\Gamma(i+\alpha-n+1)} \left(\log \frac{t}{a}\right)^{i+\alpha-n}. \end{aligned}$$

Si on pose $k = n - i$, on obtient

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{k=0}^{n} c_{n-k} \frac{\Gamma(n-k+1)}{\Gamma(\alpha-k+1)} \left(\log \frac{t}{a}\right)^{\alpha-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} c_i \left(\log \frac{t}{a}\right)^{\alpha-i}, \;\; c_i = c_{n-k} \frac{\Gamma(n-k+1)}{\Gamma(\alpha-k+1)}. \end{aligned}$$

Réciproquement, si

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n} c_i \left(\log \frac{t}{a}\right)^{\alpha-i},$$

alors, on applique l'opérateur ${}_{H}D_a^{\alpha}$ aux deux membres de l'équation précédente, on obtient

$$\begin{aligned} {}_{H}D_a^{\alpha}[f(t)] &= {}_{H}D_a^{\alpha}\left[\sum_{k=0}^{n} c_i \left(\log \frac{t}{a}\right)^{\alpha-i}\right] \\ &= \sum_{k=0}^{n} c_i \left[{}_{H}D_a^{\alpha}\left(\log \frac{t}{a}\right)^{\alpha-i}\right] = 0. \end{aligned}$$

■

Proposition 2.15 *Soit* $\alpha > 0$ *et* $f \in C[a,\infty) \cap L^1[a,\infty)$, *on a :*

$$\begin{aligned} {}_{H}I_a^{\alpha}[\,{}_{H}D_a^{\alpha}[f(t)]] &= f(t) + c_1(\log t)^{\alpha-1} + c_2(\log t)^{\alpha-2} + ... + c_n(\log t)^{\alpha-n} \quad (2.47) \\ &= f(t) + \sum_{i=0}^{n-1} c_i \left(\log \frac{t}{a}\right)^{i}, \end{aligned}$$

où les $c_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, 2, ..., n-1$ *sont des constantes réelles.*

Preuve. Exercice ■

Dans la suite, on donne une relation reliant la dérivée de Caputo a celle de Hadamard.

Lien entre la dérivée de Caputo et celle de Hadamard

Soient $\alpha > 0$, $n = [\alpha] + 1$ et $f \in AC_{\delta}^{n}[a,b]$. Alors

$${}_{C}D_a^{\alpha}[f(t)] = {}_{H}D_a^{\alpha}\left[f(t) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\delta^i f(a)}{i!}\left(\log \frac{t}{a}\right)\right]. \quad (2.48)$$

Si $0 < \alpha < 1$, on a :

$${}_{C}D_a^{\alpha}[f(t)] = {}_{H}D_a^{\alpha}[f(t) - f(a)].$$

2.3 Dérivées fractionnaires à gauche et à droite

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a,b]$, avec $-\infty < a < t < b < +\infty$ et

$$I_{a^+}^{1}[f(t)] = \int_a^t f(x)\,dx \text{ et } I_{b^-}^{1}[f(t)] = \int_t^b f(x)\,dx.$$

Pour une primitive seconde on aura :

$$I_{a^+}^2 [f(t)] = \int_a^t \left(\int_a^x f(s)\, ds \right) dx \text{ et } I_{b^-}^2 [f(t)] = \int_t^b \left(\int_x^b f(s)\, ds \right) dx.$$

D'après le théorème de Fubini, on peut écrire :

$$I_{a^+}^2 [f(t)] = \int_a^t f(s)\, ds \int_s^t dx = \frac{1}{1!} \int_a^t (t-s) f(s)\, ds,$$

et

$$I_{b^-}^2 [f(t)] = \int_t^b f(s)\, ds \int_t^s dx = \frac{1}{1!} \int_t^b (t-s) f(s)\, ds.$$

Dans le cas général, on a :

$$I_{a^+}^n [f(t)] = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-s)^{n-1} f(s)\, ds,$$

et

$$I_{b^-}^n [f(t)] = \frac{1}{(n-1)!} \int_t^b (t-s)^{n-1} f(s)\, ds.$$

Donc

$$I_{a^+}^n [f(t)] = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^t (t-s)^{n-1} f(s)\, ds,$$

et

$$I_{b^-}^n [f(t)] = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_t^b (t-s)^{n-1} f(s)\, ds.$$

Définition 2.12 *Les intégrales fractionnaires de Riemann-Liouville ${}_{R.L}I_{a^+}^{\alpha} [f(t)]$ et ${}_{R.L}I_{b^-}^{\alpha} [f(t)]$ d'ordre α sont définis comme suit [1] :*

$${}_{R.L}I_{a^+}^{\alpha} [f(t)] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s)\, ds, t > a, \alpha > 0, \tag{2.49}$$

et

$${}_{R.L}I_{b^-}^{\alpha} [f(t)] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b (t-s)^{\alpha-1} f(s)\, ds, t < b, \alpha > 0. \tag{2.50}$$

Exemple 2.13 *Calculer les intégrales ${}_{R.L}I_{a^+}^{\alpha} [f(t)]$ et ${}_{R.L}I_{b^-}^{\alpha} [f(t)]$ de la fonction suivante :*

$$f(t) = (t-a)^{\beta}, \beta > -1.$$

En utilisant les définitions (2.49) et (2.50), on obtient :

$${}_{R.L}I_{a^+}^{\alpha} \left[(t-a)^{\beta} \right] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} (s-a)^{\beta} ds = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} (t-a)^{\alpha+\beta},$$

et

$${}_{R.L}I_{b^-}^{\alpha} \left[(t-a)^{\beta} \right] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b (t-s)^{\alpha-1} (s-a)^{\beta} ds = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} (b-t)^{\alpha+\beta}.$$

Pour $\beta = 0$, on a :

$$_{R.L}I_{a^+}^{\alpha}[1] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} ds = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} (t-a)^{\alpha},$$

et

$$_{R.L}I_{b^-}^{\alpha}[1] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b (t-s)^{\alpha-1} ds = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} (b-t)^{\alpha}.$$

Pour $f(t) = C$, on a :

$$_{R.L}I_{a^+}^{\alpha}[C] = \frac{C}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} ds = \frac{C}{\Gamma(\alpha+1)} (t-a)^{\alpha},$$

et

$$_{R.L}I_{b^-}^{\alpha}[C] = \frac{C}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b (t-s)^{\alpha-1} ds = \frac{C}{\Gamma(\alpha+1)} (b-t)^{\alpha}.$$

Remarque 2.9 *Lorsque $\alpha = n \in N$, les définitions (2.49) et (2.50) oïncident avec les nième intégrales de la forme [1] :*

$$\begin{aligned} I_{a^+}^{n}[f(t)] &= \int_a^t ds_1 \int_a^{s_1} ds_2 \int_a^{s_2} ds_3 ... \int_a^{s_{n-1}} f(s_n)\, ds_n \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-s)^{n-1} f(s)\, ds, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} I_{b^-}^{n}[f(t)] &= \int_t^b ds_1 \int_{s_1}^{b} ds_2 \int_{s_2}^{b} ds_3 ... \int_{s_{n-1}}^{b} f(s_n)\, ds_n \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_t^b (t-s)^{n-1} f(s)\, ds. \end{aligned}$$

2.3.1 Dérivée-Riemann-Liouville à gauche et à droite

Les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville $_{RL}D_{a^+}^{\alpha}[f(t)]$ et $_{RL}D_{b^-}^{\alpha}[f(t)]$ d'ordre α sont définies comme suit [1] :

$$\begin{aligned} _{RL}D_{a^+}^{\alpha}[f(t)] &= \frac{d^m}{dt^m}\left[I_{a^+}^{m-\alpha} f(t)\right] \\ &= \frac{d^m}{dt^m}\left[\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f(s)\, ds\right], t > a, m-1 < \alpha < m, m \in \mathbb{N}^*, \end{aligned} \tag{2.51}$$

et

$$\begin{aligned} _{RL}D_{b^-}^{\alpha}[f(t)] &= \left(-\frac{d}{dt}\right)^m \left[I_{b^-}^{m-\alpha} f(t)\right] \\ &= \left(-\frac{d}{dt}\right)^m \left[\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f(s)\, ds\right], t < b, m-1 < \alpha < m, m \in \mathbb{N}^*. \end{aligned} \tag{2.52}$$

Si l'on prend $\alpha = m$, alors

$$_{RL}D^{0}_{a^+}\left[f\left(t\right)\right] = \ _{RL}D^{0}_{b^-}\left[f\left(t\right)\right] = f\left(t\right)$$

et

$$_{RL}D^{n}_{a^+}\left[f\left(t\right)\right] = f^{(n)}\left(t\right), \ _{RL}D^{n}_{b^-}\left[f\left(t\right)\right] = \left(-1\right)^{n} f^{(n)}\left(t\right),$$

où $f^{(n)}(t)$ est la dérivée usuelle de $f(t)$ d'ordre n.

Exemple 2.14 *Calculer les dérivées* $_{R.L}D^{\alpha}_{a^+}\left[f\left(t\right)\right]$ *et* $_{R.L}D^{\alpha}_{b^-}\left[f\left(t\right)\right]$ *de la fonction suivante :*

$$f\left(t\right) = \left(t-a\right)^{\beta}, \beta > -1.$$

Par définition, on a :

$$_{RL}D^{\alpha}_{a^+}\left[f\left(t\right)\right] = \ _{RL}D^{\alpha}_{a^+}\left[\left(t-a\right)^{\beta}\right] = \frac{\Gamma\left(\beta+1\right)}{\Gamma\left(\beta-\alpha+1\right)}\left(t-a\right)^{\beta-\alpha},$$

et

$$_{RL}D^{\alpha}_{b^-}\left[f\left(t\right)\right] = \ _{RL}D^{\alpha}_{b^-}\left[f\left(t\right)\right] = \frac{\Gamma\left(\beta+1\right)}{\Gamma\left(\beta-\alpha+1\right)}\left(b-t\right)^{\beta-\alpha}.$$

Pour $\beta = 0$, on a :

$$_{R.L}D^{\alpha}_{a^+}\left[1\right] = \frac{1}{\Gamma\left(1-\alpha\right)}\left(t-a\right)^{-\alpha},$$

et

$$_{R.L}D^{\alpha}_{b^-}\left[1\right] = \frac{1}{\Gamma\left(1-\alpha\right)}\left(b-t\right)^{-\alpha}.$$

iS $f(t) = C$, alors :

$$_{R.L}I^{\alpha}_{a^+}\left[C\right] = \frac{C}{\Gamma\left(1-\alpha\right)}\left(t-a\right)^{-\alpha},$$

et

$$_{R.L}I^{\alpha}_{b^-}\left[C\right] = \frac{C}{\Gamma\left(1-\alpha\right)}\left(b-t\right)^{-\alpha}.$$

2.3.2 Dérivée-Caputo à gauche et à droite

Les définitions de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo à gauche et à droite sont donnée par :

Définition 2.13 *Soit* $\alpha > 0$ *et* $n = [\alpha] + 1$. *Les dérivées fractionnaires de Caputo à gauche et à droite* $_{C}D^{\alpha}_{a^+}\left[f\left(t\right)\right]$ *et* $_{C}D^{\alpha}_{b^-}\left[f\left(t\right)\right]$ *sont définie par [1] :*

$$_{C}D^{\alpha}_{a^+}\left[f\left(t\right)\right] = \ _{R.L}D^{\alpha}_{a^+}\left[f\left(t\right) - \sum_{j=0}^{n-1}\frac{f^{(j)}\left(0\right)}{j!}\left(t-a\right)^{j}\right], \tag{2.53}$$

et

$$_{C}D^{\alpha}_{b^-}\left[f\left(t\right)\right] = \ _{R.L}D^{\alpha}_{b^-}\left[f\left(t\right) - \sum_{j=0}^{n-1}\frac{f^{(j)}\left(0\right)}{j!}\left(b-t\right)^{j}\right]. \tag{2.54}$$

Pour $0 < \alpha < 1$, *on a :*

$$_{C}D_{a^{+}}^{\alpha}\left[f\left(t\right)\right]= \ _{R.L}D_{a^{+}}^{\alpha}f\left(t\right)-\frac{f\left(a\right)}{\Gamma\left(1-\alpha\right)}\left(t-a\right)^{-\alpha},$$

et

$$_{C}D_{b^{-}}^{\alpha}\left[f\left(t\right)\right]= \ _{R.L}D_{b^{-}}^{\alpha}f\left(t\right)-\frac{f\left(b\right)}{\Gamma\left(1-\alpha\right)}\left(b-t\right)^{-\alpha}.$$

Exemple 2.15 *Trouver les dérivées* $_{C}D_{a^{+}}^{\alpha}\left[f\left(t\right)\right]$ *et* $_{C}D_{b^{-}}^{\alpha}\left[f\left(t\right)\right]$ *de la fonction :* $f\left(t\right)=\left(t-a\right)^{\beta},\beta>-1$.

On a :

$$_{C}D_{a^{+}}^{\alpha}\left[f\left(t\right)\right]= \ _{C}D_{a^{+}}^{\alpha}\left[\left(t-a\right)^{\beta}\right]=\frac{\Gamma\left(\beta+1\right)}{\Gamma\left(\beta-\alpha+1\right)}\left(t-a\right)^{\beta-\alpha},$$

et

$$_{C}D_{b^{-}}^{\alpha}\left[f\left(t\right)\right]=_{C}D_{b^{-}}^{\alpha}\left[\left(t-a\right)^{\beta}\right]=\frac{\Gamma\left(\beta+1\right)}{\Gamma\left(\beta-\alpha+1\right)}\left(b-t\right)^{\beta-\alpha},$$

Pour $\beta=0$, on a :

$$_{R.L}D_{a^{+}}^{\alpha}\left[1\right]= \ _{R.L}D_{b^{-}}^{\alpha}\left[1\right]=0,$$

Si $f\left(t\right)=C$, alors :

$$_{R.L}I_{a^{+}}^{\alpha}\left[C\right]= \ _{R.L}D_{b^{-}}^{\alpha}\left[C\right]=0.$$

2.3.3 Dérivée-Hadamard à gauche et à droite

Soit une fonction $f\in C([a,b)$. On considère les intégrales de gauche et de droite d'ordre fractionnaire α, défineis par [4] :

$$_{H}I_{a^{+}}^{\alpha}\left[f\left(t\right)\right]=\frac{1}{\Gamma\left(\alpha\right)}\int_{a}^{t}\left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1}\frac{f\left(s\right)}{s}ds,\ t>a, \tag{2.55}$$

et

$$_{H}I_{b^{-}}^{\alpha}\left[f\left(t\right)\right]=\frac{1}{\Gamma\left(\alpha\right)}\int_{t}^{b}\left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1}\frac{f\left(s\right)}{s}ds,\ t<b. \tag{2.56}$$

Définition 2.14 *Soit* $\alpha>0$ *et* $n=[\alpha]+1$. *Les dérives fractionnaires de Hadamard à gauche et à droite d'ordre de f sont définies par :*

$$\begin{aligned}
_{H}D_{a^{+}}^{\alpha}\left[f(t)\right] &= \left(t\frac{d}{dt}\right)^{n} {}_{H}I_{a^{+}}^{n-\alpha}\left[f(t)\right]=\delta^{n}{}_{H}I_{a^{+}}^{n-\alpha}\left[f(t)\right]\\
&= \left(t\frac{d}{dt}\right)^{n}\frac{1}{\Gamma\left(n-\alpha\right)}\int_{a}^{t}\left(\log\frac{t}{s}\right)^{n-\alpha-1}f\left(s\right)\frac{ds}{s}\\
&= \frac{1}{\Gamma\left(n-\alpha\right)}\delta^{n}\int_{a}^{t}\left(\log\frac{t}{s}\right)^{n-\alpha-1}f\left(s\right)\frac{ds}{s},t>a,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
{}_HD^{\alpha}_{b-}\left[f(t)\right] &= \left(-t\frac{d}{dt}\right)^n {}_HI^{n-\alpha}_{b-}\left[f(t)\right] = (-\delta)^n\, {}_HI^{n-\alpha}_{b-}\left[f(t)\right] \\
&= \left(-t\frac{d}{dt}\right)^n \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_t^b \left(\log\frac{t}{s}\right)^{n-\alpha-1} f(s)\frac{ds}{s} \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}(-\delta)^n \int_t^b \left(\log\frac{t}{s}\right)^{n-\alpha-1} f(s)\frac{ds}{s}, t<b,
\end{aligned}$$

Proposition 2.16 *Si $\alpha > 0$ et $\beta > 0$. Alors*

$${}_HD^{\alpha}_{a+}\left[\left(log\frac{t}{a}\right)^{\beta-1}\right] = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}\left(log\frac{t}{a}\right)^{\beta-\alpha-1}, \beta>\alpha,$$

et

$${}_HD^{\alpha}_{b-}\left[\left(log\frac{b}{t}\right)^{\beta-1}\right] = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}\left(log\frac{b}{t}\right)^{\beta-\alpha-1}, \beta>\alpha.$$

En particulaire, si $\beta = 1$, on a :

$${}_HD^{\alpha}_{a+}[1] = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left(log\frac{t}{a}\right)^{-\alpha},$$

et

$${}_HD^{\alpha}_{b-}[1] = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left(log\frac{b}{t}\right)^{-\alpha}.$$

2.4 Exercices

Exercice 2.1 1) : *Soit $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ et $\alpha = \frac{1}{2}, \beta = \frac{3}{2}$. Calculer ${}^{R.L}D^{\alpha}\left[{}^{R.L}D^{\beta}f(x)\right]$ et ${}^{R.L}D^{\beta}\left[{}^{R.L}D^{\alpha}f(x)\right]$.*

2) : Calculer la dérivée fractionnaire d'ordre $\frac{1}{2}$ au sens de Riemann Liouville de la fonction $f(x) = (1+x)^{-1}, x > 0$.

Exercice 2.2 1) : *Soit $f \in C([a,b])$. Montrer que si $\alpha > 0$, alors $\lim_{t \to \overset{>}{a}} I^{\alpha}[f(t)] = 0$.*

2) : Calculer les intégrales fractionnaires $I^{\alpha}_{-\infty}[f(x)], f(x) = \sin x$ et $I^{\alpha}_{-\infty}[f(x)], f(x) = \cos x$.

3) : Montrer que $I^{\alpha}_a x^{\beta} = \dfrac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}(x-a)^{\alpha+\beta}$ et $I^{\alpha}_0 e^x = \sum_{k\geq 0}\dfrac{x^{\alpha+k}}{\Gamma(\alpha+k+1)}$.

Exercice 2.3 1) : *Soit* $m-1 < \alpha < m$, $m \in \mathbb{N}^*$ *et* f *une fonction définie sur* $[a,b]$. *Résoudre l'équation suivante :*

$$^{RL}D_a^{\alpha}\left[f(t)\right] = 0.$$

2) : *Montrer que pour* $n-1 < \alpha < n, n \in \mathbb{N}^*$,*et* $f \in C^n$, *on a :*

$$^{C}D_a^{\alpha}\left[f(x)\right] = \ ^{RL}D_a^{\alpha}\left[f(x) - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{f^{(j)}(a)}{j!}(x-a)^j\right].$$

Exercice 2.4 1) : *Soit* $\alpha > 0$ *et* $f \in C[a,\infty) \cap L^1[a,\infty)$. *Montrer que si* ${}_HD_a^{\alpha}\left[f(t)\right] = 0$, *alors*

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i \left(\log \frac{t}{a}\right)^{\alpha - i}, c_i \in \mathbb{R}, i = 0,1,2,...,n,\ \ n = [\alpha] + 1.$$

2) : *Montrer que si*$\alpha > 0$ *et* $f \in C[a,\infty) \cap L^1[a,\infty)$, *alors on a :*

$${}_HI_a^{\alpha}\left[\ {}_HD_a^{\alpha}\left[f(t)\right]\right] = f(t) + \sum_{i=0}^{n-1} c_i \left(\log \frac{t}{a}\right)^{i},\ \ c_i \in \mathbb{R}, i = 0,1,2,...,n-1.$$

Exercice 2.5 1) : *Soient* $\alpha > 0$, $n = [\alpha] + 1$ *et* $f \in AC_{\delta}^{n}[a,b]$. *Montrer que*

$${}_CD_a^{\alpha}\left[f(t)\right] = \ {}_HD_a^{\alpha}\left[f(t) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\delta^i f(a)}{i!}\left(\log \frac{t}{a}\right)\right].$$

2) : *Montrer que si* $0 < \alpha < 1$, *alors, on a :*

$${}_CD_a^{\alpha}\left[f(t)\right] = \ {}_HD_a^{\alpha}\left[f(t) - f(a)\right].$$

Chapitre 3

Opérations sur les dérivées fractionnaires

Dans ce chapitre, on présente quelques opérations sur les dérivées fractionnaires. Pour plus de détail, on cite [1,4,12].

3.1 Composition avec les dérivées d'ordre entièr

3.1.1 Dérivée-Grünwald-Letnikov

Proposition 3.1 *Soient m un entier strictement positif et $n-1<\alpha<n$, alors*

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^{m}\left({}_{GL}D_{a}^{\alpha}\left[f(t)\right]\right)= {}_{GL}D_{a}^{\alpha+m}\left[f(t)\right], \tag{3.1}$$

et

$${}_{GL}D_{a}^{\alpha}\left[\left(\frac{d}{dx}\right)^{m}f(t)\right]= {}_{GL}D_{a}^{\alpha+m}\left[f(t)\right]-\sum_{j=0}^{m-1}\frac{f^{(j)}(a)(t-a)^{j-\alpha-m}}{\Gamma(j-\alpha-m+1)}. \tag{3.2}$$

Preuve. Pour $n-1<\alpha<n$, on a :

$${}_{GL}D_{a}^{\alpha}\left[f(t)\right]=\sum_{j=0}^{n+m-1}\frac{f^{(j)}(a)}{\Gamma(j-\alpha+1)}(t-a)^{j-\alpha}+\frac{1}{\Gamma(n+m-\alpha)}\int_{a}^{t}(t-s)^{n+m-\alpha}f^{(n+m)}(s)ds.$$

Alors

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^m {}_{GL}D_a^\alpha\left[f(t)\right] = \left(\frac{d}{dx}\right)^m \left[\sum_{j=0}^{n+m-1} \frac{f^{(j)}(a)}{\Gamma(j-\alpha+1)}(t-a)^{j-\alpha}\right.$$

$$\begin{aligned}
&\left.+\frac{1}{\Gamma(n+m-\alpha)}\int_a^t (t-s)^{n+m-\alpha} f^{(n+m)}(s)ds\right] \\
&= \sum_{j=0}^{n+m-1} \frac{f^{(j)}(a)}{\Gamma(j-\alpha+1)}\left(\frac{d}{dx}\right)^m (t-a)^{j-\alpha} \\
&+ \frac{1}{\Gamma(n+m-\alpha)}\int_a^t \left(\frac{d}{dt}\right)^m (t-s)^{n+m-\alpha} f^{(n+m)}(s)ds \\
&= \sum_{j=0}^{s} \frac{f^{(j)}(a)}{\Gamma(j-\alpha+1)}\left[\frac{\Gamma(j-\alpha+1)}{\Gamma(j-\alpha-m+1)}(t-a)^{j-\alpha-m}\right] \\
&+ \frac{1}{\Gamma(n+m+1-\alpha)}\int_a^t \frac{\Gamma(n+m-\alpha+1)}{\Gamma(n+m-\alpha+1-m)}(t-s)^{n+m-\alpha-m} f^{(n+m)}(s)ds \\
&= \sum_{j=0}^{s} \frac{f^{(j)}(a)}{\Gamma(j-\alpha+1-m)}(t-a)^{j-\alpha-m} \\
&+ \frac{1}{\Gamma(n-\alpha+1)}\int_a^t (t-s)^{n-\alpha} f^{(n+m+1)}(s)ds \\
&= \sum_{j=0}^{n+m} \frac{f^{(j)}(a)}{\Gamma(j-\alpha-m+1)}(t-a)^{j-(\alpha+m)} \\
&+ \frac{1}{\Gamma(n+1-\alpha)}\int_a^t (t-s)^{n-\alpha} f^{(n+m+1)}(s)ds = {}_{GL}D_a^{\alpha+m}\left[f(t)\right].
\end{aligned}$$

Donc

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^m \left({}_{GL}D_a^\alpha\left[f(t)\right]\right) = {}_{GL}D_a^{\alpha+m}\left[f(t)\right].$$

Aussi on a :

$$\begin{aligned}
{}_{GL}D_a^\alpha\left[\left(\frac{d}{dx}\right)^m f(t)\right] &= {}_{GL}D_a^\alpha\left[f^{(m)}(t)\right] \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j+m)}(a)}{\Gamma(j-\alpha+1)}(t-a)^{j-\alpha} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^t (t-s)^{n-1-\alpha} f^{(n+m)}(s)ds \\
&= \sum_{j=0}^{n+m-1} \frac{f^{(j)}(a)}{\Gamma(j-\alpha-m+1)}(t-a)^{j-\alpha-m} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x (t-s)^{n-1-\alpha} f^{(n+m)}(s)ds \\
&- \sum_{j=0}^{m-1} \frac{f^{(j)}(a)}{\Gamma(j-\alpha-m+1)}(t-a)^{j-\alpha-m} \\
&= {}_{GL}D_a^{\alpha+m}\left[f(t)\right] - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{f^{(j)}(a)(t-a)^{j-\alpha-m}}{\Gamma(j-\alpha-m+1)}.
\end{aligned}$$

Ce qui veut dire que $\left(\frac{d}{dt}\right)^m$ et ${}_{GL}D_a^\alpha$ ne commutent que si $f^{(j)}(a) = 0$ pour tout $j = 0, 1, 2, ..., m-1$. ■

3.1.2 Dérivée-Riemann-Liouville

Proposition 3.2 *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ et $m-1 < \alpha < m, n \in \mathbb{N}$. Alors*

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^n \left({}_{R.L}D_a^\alpha \left[f(t)\right]\right) = {}_{R.L}D_a^{\alpha+n} \left[f(t)\right]. \tag{3.3}$$

et

$${}_{R.L}D_a^\alpha \left[\left(\frac{d}{dt}\right)^n f(t)\right] = {}_{R.L}D_a^{\alpha+n} \left[f(t)\right] - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(t-a)^{j-\alpha-n}}{\Gamma(j-\alpha-n+1)} \tag{3.4}$$

Preuve. *D'après la formule (2.25), on a :*

$$\left({}_{R.L}D_a^\alpha \left[f(t)\right]\right) = \frac{d^m}{dt^m}\left(I_a^{m-\alpha}\left[f(t)\right]\right),$$

alors

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^m \left({}_{R.L}D_a^\alpha \left[f(t)\right]\right) = \left(\frac{d}{dt}\right)^n \left(\frac{d^m}{dt^m}\left(I_a^{m-\alpha}\left[f(t)\right]\right)\right)$$

$$= \left(\frac{d}{dt}\right)^{n+m} I_a^{m-\alpha+n-n}\left[f(t)\right] = \left(\frac{d}{dt}\right)^{n+m} I_a^{(m+n)-(\alpha+n)} f(x)$$

$$= {}_{R.L}D_a^{\alpha+n}\left[f(t)\right].$$

Donc

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^n \left({}_{R.L}D_a^\alpha \left[f(t)\right]\right) = {}_{R.L}D_a^{\alpha+n} \left[f(t)\right].$$

Pour prouver l'identité (3.4), on utilise la relation suivante :

$$I_a^n\left[f^{(n)}(t)\right] = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^t (t-s)^{n-1} f^{(n)}(s)\, ds \tag{3.5}$$

$$= f(t) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(a)}{\Gamma(j+1)}(t-a)^k,$$

et que

$${}_{R.L}D_a^\alpha\left[f(t)\right] = {}_{R.L}D_a^{\alpha+n}\left(I_a^n\left[f(t)\right]\right).$$

Maintenant en utilisant (3.5), on obtient

$$
\begin{aligned}
{}_{R.L}D_a^{\alpha}\left[\left(\frac{d}{dt}\right)^n f(t)\right] &= {}_{R.L}D_a^{\alpha+n}\left(I_a^n\left[f^{(n)}(t)\right]\right) \\
&= {}_{R.L}D_a^{\alpha+n}\left[f(t)-\sum_{j=0}^{n-1}\frac{f^{(j)}(a)}{\Gamma(j+1)}(t-a)^j\right] \\
&= {}_{R.L}D_a^{\alpha+n}f(t)-\sum_{j=0}^{n-1}\frac{f^{(j)}(a)}{\Gamma(j-\alpha-n+1)}(t-a)^{j-\alpha-n},
\end{aligned}
$$

donc

$$
{}_{R.L}D_a^{\alpha}\left[\left(\frac{d}{dt}\right)^n f(t)\right] = {}_{R.L}D_a^{\alpha+n}f(t)-\sum_{j=0}^{n-1}\frac{f^{(j)}(a)}{\Gamma(j-\alpha-n+1)}(t-a)^{j-\alpha-n}.
$$

Ce qui veut dire que $\left(\frac{d}{dt}\right)^m$ *et* ${}_{RL}D_a^{\alpha}$ *ne commutent que si* $f^{(j)}(a)=0$ *pour tout* $j = 0,1,2,...,m-1$. ■

3.2 Composition avec les dérivées fractionnaire

3.2.1 Composition de l'opérateur ${}_{GL}D^{\alpha}$ et ${}_{GL}D^{\beta}$

Proposition 3.3 a : *Si* $\beta<0$, *pour tout* $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}$, *alors on a :*

$$
{}_{GL}D_a^{\alpha}\left[{}_{GL}D_a^{\beta}\left[f(t)\right]\right] = {}_{GL}D_a^{\alpha+\beta}f\left[f(t)\right]. \tag{3.6}
$$

b : *Si* $0\leq m-1<\beta<m, \alpha<0$ *et* $f^{(j)}(a)=0$ *pour tout* $j=0,1,...,m-2$. *Alors :*

$$
{}_{GL}D_a^{\alpha}\left[{}_{GL}D_a^{\beta}\left[f(t)\right]\right] = {}_{GL}D_a^{\alpha+\beta}f\left[f(t)\right]. \tag{3.7}
$$

c : *Si* $0\leq m-1<\beta<m$ *et* $0\leq n-1<\alpha<n$ *et* $f^{(j)}(a)=0$ *pour tout* $j = 0,1,...,r-2$.*avec* $r=\max(m,n)$, *ALors :*

$$
{}_{GL}D_a^{\alpha}\left[{}_{GL}D_a^{\beta}\left[f(t)\right]\right] = {}_{GL}D_a^{\beta}\left[{}_{GL}D_a^{\alpha}\left[f(t)\right]\right] = {}_{GL}D_a^{\alpha+\beta}f\left[f(t)\right]. \tag{3.8}
$$

Preuve. Deux cas seront considérés séparement : $\beta<0$ et $\beta>0$:

$a.1$ Si $\beta < 0$. On prend d'abord $\alpha < 0$, alors on a :

$$\begin{aligned}
&{}_{GL}D_a^{\alpha}\left[{}_{GL}D_a^{\beta}\left[f(t)\right]\right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(-\alpha)}\int_a^t (t-s)^{-\alpha-1}\left({}_{GL}D_a^{\beta}\left[f(s)\right]\right)ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(-\alpha)}\int_a^t (t-s)^{-\alpha-1}\left[\frac{1}{\Gamma(-\beta)}\int_a^s (s-x)^{-\beta-1}f(x)dx\right]ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(-\beta)}\int_a^t f(x)dx\int_x^t (t-s)^{-\alpha-1}(s-x)^{-\beta-1}ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(-\alpha)}\frac{1}{\Gamma(-\beta)}\int_a^t \frac{\Gamma(-\alpha)\Gamma(-\beta)}{\Gamma(-\beta-\alpha)}(t-x)^{-\alpha-\beta-1}f(x)dx \\
&= \frac{1}{\Gamma(-(\alpha+\beta))}\int_a^t (t-x)^{-(\alpha+\beta)-1}f(x)dx,
\end{aligned}$$

donc si $\beta < 0$ et $\alpha < 0$, alors

$${}_{GL}D_a^{\alpha}\left[{}_{GL}D_a^{\beta}\left[f(t)\right]\right] = {}_{GL}D_a^{\alpha+\beta}f\left[f(t)\right].$$

$a.2$: Maintenant on suppose que $0 < n-1 < \alpha < n$, en remarquant que $\alpha = n + (\alpha - n$, alors

$${}_{GL}D_a^{\alpha}\left[{}_{GL}D_a^{\beta}\left[f(t)\right]\right] = {}_{GL}D^{n+\alpha-n}\left[{}^{GL}D^{\beta}\left[f(t)\right]\right].$$

D'après la relation (3.1), on a :

$${}_{GL}D^{n+\alpha-n}\left[f(t)\right] = \left(\frac{d}{dx}\right)^n\left({}_{GL}D^{\alpha-n}\left[f(t)\right]\right),$$

puisque $\alpha - n < 0$ et $\beta < 0$, on peut écrire

$$\begin{aligned}
{}_{GL}D_a^{\alpha}\left[{}_{GL}D_a^{\beta}\left[f(t)\right]\right] &= \left(\frac{d}{dx}\right)^n\left({}_{GL}D^{\alpha-n}\left[{}_{GL}D_a^{\beta}\left[f(t)\right]\right]\right) \\
&= \left(\frac{d}{dx}\right)^n\left({}_{GL}D^{\alpha-n+\beta}\left[f(t)\right]\right) = {}_{GL}D_a^{\alpha+\beta}\left[f(t)\right].
\end{aligned}$$

Donc si $\beta < 0$ et $\alpha > 0$, alors on a :

$${}_{GL}D_a^{\alpha}\left[{}_{GL}D_a^{\beta}\left[f(t)\right]\right] = {}_{GL}D_a^{\alpha+\beta}\left[f(t)\right].$$

Aussi si $\alpha = 0$, alors

$${}_{GL}D_a^{0}\left[{}_{GL}D_a^{\beta}\left[f(t)\right]\right] = {}_{GL}D_a^{0+\beta}\left[f(t)\right] = {}_{GL}D_a^{\beta}\left[f(t)\right].$$

b. Si $\beta > 0$, alors on suppose que $0 < m-1 < \beta < m$ et $\alpha < 0$, on a :

$$ {}_{GL}D_a^{\beta}\left[f\left(t\right)\right] = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{f^{(j)}(t)}{\Gamma(j-\beta+1)}(t-a)^{j-\beta} + \frac{1}{\Gamma(m-\beta)} \int_a^t (t-s)^{m-\beta-1} f^{(m)}(s)ds. $$

Maintenant, on applique l'intégrale fractionnaire d'ordre $-\alpha$ ($\alpha < 0$), on trouve

$$ \begin{aligned} {}_{GL}D_a^{\alpha}\left[{}_{GL}D_a^{\beta}\left[f\left(t\right)\right]\right] &= \sum_{j=0}^{m-1} \frac{f^{(j)}(t)}{\Gamma(j-\beta+1)}\ {}_{GL}D_a^{\alpha}(t-a)^{j-\beta} \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(m-\beta)} \int_a^t\ {}_{GL}D_a^{\alpha}(t-s)^{m-\beta-1} f^{(m)}(s)ds \end{aligned} $$

et ${}_{GL}D_a^{\alpha}(t-a)^{j-\beta}$ ont des singularités non intégrable, donc l'intégrale fractionnaire ${}_{GL}D_a^{\alpha}\left[{}_{GL}D_a^{\beta}\left[f\left(t\right)\right]\right]$ n'existe que si $f^{(j)}(a) = 0$ pour tout $j = 0, 1, ..., m-2$ et dans ce cas on a :

$$ {}_{GL}D_a^{\beta}\left[f\left(t\right)\right] = \frac{f^{(m-1)}(a)}{\Gamma(m-\beta)}(t-a)^{m-1-\beta} + {}_{GL}D_a^{\beta-m}\left[f^{(m)}\left(t\right)\right], $$

avec

$$ {}_{GL}D_a^{\beta-m}\left[f^{(m)}\left(t\right)\right] = \frac{1}{\Gamma(m-\beta)} \int_a^t (t-s)^{m-\beta-1} f^{(m)}(s)ds. $$

Alors

$$ \begin{aligned} & {}_{GL}D_a^{\alpha}\left[{}_{GL}D_a^{\beta}\left[f\left(t\right)\right]\right] \\ &= {}_{GL}D_a^{\alpha}\left[\frac{f^{(m-1)}(a)}{\Gamma(m-\beta)}(t-a)^{m-1-\beta} + {}_{GL}D_a^{\beta-m}\left[f^{(m)}\left(t\right)\right]\right] \\ &= {}_{GL}D_a^{\alpha}\left[\frac{f^{(m-1)}(a)}{\Gamma(m-\beta)}(t-a)^{m-1-\beta}\right] + {}_{GL}D_a^{\alpha}\left[{}_{GL}D_a^{\beta-m}\left[f^{(m)}\left(t\right)\right]\right] \\ &= \frac{f^{(m-1)}(a)}{\Gamma(m-\beta)}\ {}_{GL}D_a^{\alpha}(t-a)^{m-1-\beta} + {}_{GL}D_a^{\alpha+\beta-m} f^{(m)}\left[f^{(m)}\left(t\right)\right] \\ &= \frac{f^{(m-1)}(a)}{\Gamma(m-\beta)} \frac{\Gamma\left(m-\beta\right)}{\Gamma\left(m-\beta-\alpha\right)}(t-a)^{m-1-\beta-\alpha} + \frac{1}{\Gamma\left(-\alpha-\beta+m\right)} \int_a^t \left(t-s\right)^{-\alpha-\beta+m-1} f^{(m)}\left(s\right)ds \\ &= \frac{f^{(m-1)}(a)}{\Gamma\left(m-\beta-\alpha\right)}(t-a)^{m-1-\beta-\alpha} + \frac{1}{\Gamma\left(m-(\alpha+\beta)\right)} \int_a^t \left(t-s\right)^{m-(\alpha+\beta)-1} f^{(m)}\left(s\right)ds \\ &= {}_{GL}D_a^{a+\beta}\left[f\left(t\right)\right]. \end{aligned} $$

$\blacksquare$

c. Maintenant si $0 \leq m-1 < \beta < m, 0 \leq n-1 < \alpha < n$ et et la fonction $f(t)$ vérifie les conditions :

$$ f^{(j)}(a) = 0, \ \ j = 0, 1, ..., r-2. \text{ avec } r = \max(n, m), $$

alors

$$\begin{aligned} & {}_{GL}D_a^{\alpha}\left[{}_{GL}D_a^{\beta}\left[f\left(t\right)\right]\right] \\ = & {}_{GL}D_a^{n+\alpha-n}\left[{}_{GL}D_a^{\beta}\left[f\left(t\right)\right]\right] = \left(\frac{d}{dx}\right)^n \left({}_{GL}D_a^{\alpha-n}\left[{}_{GL}D_a^{\beta}\left[f\left(t\right)\right]\right]\right) \\ = & \left(\frac{d}{dx}\right)^n \left[{}_{GL}D_a^{\alpha-n+\beta}\left[f\left(t\right)\right]\right] = {}_{GL}D_a^{\alpha+\beta}\left[f\left(t\right)\right], \end{aligned}$$

donc ${}_{GL}D_a^{\alpha}$ et ${}_{GL}D_a^{\beta}$ commutent, ssi

$$f^{(j)}(a) = 0, \quad j = 0, 1, ..., r-2. \text{ avec } r = \max(n, m).$$

■

3.2.2 Composition de l'opérateur ${}_{RL}D^{\alpha}$ et ${}_{RL}I^{\alpha}$

On s'intéresse maintenant à la composition de la dérivée et l'integrale fractionnaires au sens de Riemann-Liouville :

Proposition 3.4 *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors*

$${}_{RL}D^{\alpha}\left[{}_{RL}I^{\alpha}\left[f\left(t\right)\right]\right] = D^m\left[{}_{RL}I^{m-\alpha}\left({}_{RL}I^{\alpha}\left[f\left(t\right)\right]\right)\right] = D^m\left[I^m\left[f\left(t\right)\right]\right] = f\left(t\right). \tag{3.9}$$

Preuve. En utilisant la définition (2.8), on obtient :

$$\begin{aligned} & {}_{RL}D^{\alpha}\left[{}_{RL}I^{\alpha}\left[f\left(t\right)\right]\right] \\ = & \frac{d^m}{dt^m}\left[\frac{1}{\Gamma\left(m-\alpha\right)}\int_a^t \left(t-s\right)^{m-\alpha-1} {}_{RL}I^{\alpha}\left[f\left(s\right)\right]ds\right] \\ = & \frac{d^m}{dt^m}\left[\frac{1}{\Gamma\left(m-\alpha\right)\Gamma\left(\alpha\right)}\int_a^t \left(t-s\right)^{m-\alpha-1}\left(\int_a^t \left(s-x\right)^{m-\alpha-1} f\left(x\right)dx\right)ds\right] \\ = & \frac{d^m}{dt^m}\left[\frac{1}{\Gamma\left(m-\alpha\right)\Gamma\left(\alpha\right)}\int_a^t f\left(x\right)dx\int_x^t \left(t-s\right)^{m-\alpha-1}\left(s-x\right)^{m-\alpha-1}ds\right]. \end{aligned}$$

On pose

$$I = \int_x^t \left(t-s\right)^{m-\alpha-1}\left(s-x\right)^{m-\alpha-1}ds,$$

et $s = t - y\left(t-x\right)$ ce qui donne $ds = -\left(t-x\right)dy$, alors

$$\begin{aligned} I &= \int_x^t \left(t-s\right)^{m-\alpha-1}\left(s-x\right)^{m-\alpha-1}ds \\ &= -\int_1^0 y^{m-\alpha-1}\left(t-s\right)^{m-\alpha-1}\left(1-y\right)^{\alpha-1}\left(t-x\right)^{\alpha-1}\left(t-x\right)dy \\ &= \left(t-s\right)^{m-1}\int_0^1 y^{m-\alpha-1}\left(1-y\right)^{\alpha-1}dy \\ &= \left(t-s\right)^{m-1}B\left(m-\alpha,\alpha\right) = \left(t-s\right)^{m-1}\frac{\Gamma\left(m-\alpha\right)\Gamma\left(\alpha\right)}{\Gamma\left(m+1\right)}, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} {}_{RL}D^{\alpha}\left[{}_{RL}I^{\alpha}\left[f\left(t\right)\right]\right] &= \frac{d^m}{dt^m}\left[\frac{1}{\Gamma\left(m\right)}\int_a^t \left(t-s\right)^{m-1} f\left(x\right)dx\right] \\ &= f\left(t\right) = {}_{RL}D^{m}\left[{}_{RL}I^{m}\left[f\left(t\right)\right]\right], \end{aligned}$$

et comme : ${}_{RL}I^{\alpha-m}\left({}_{RL}I^{\alpha}\left[f\left(t\right)\right]\right) = I^m\left[f\left(t\right)\right]$, alors

$${}_{RL}D^{\alpha}\left[{}_{RL}I^{\alpha}\left[f\left(t\right)\right]\right] = D^n\left[{}_{RL}I^{\alpha-m}\left({}_{RL}I^{\alpha}\left[f\left(t\right)\right]\right)\right] = D^m\left[I^m\left[f\left(t\right)\right]\right] = f\left(t\right).$$

■

Proposition 3.5 *Soient* $f \in C([a,b))$ *et* $n-1 < \alpha < n, n \in \mathbb{N}^*$. *Alors*

$${}_{RL}I_a^{\alpha}\left[{}_{RL}D_a^{\alpha} f\left(t\right)\right] = f\left(t\right) - \sum_{i=1}^{n} {}_{RL}D_a^{\alpha-i}\left[f\left(t\right)\right]_{t=a} \frac{\left(t-a\right)^{\alpha-i}}{\Gamma\left(\alpha-i+1\right)}. \tag{3.10}$$

Preuve. On a :

$$\begin{aligned} {}_{RL}I_a^{\alpha}\left[{}_{RL}D_a^{\alpha} f\left(t\right)\right] &= \frac{1}{\Gamma\left(\alpha\right)}\int_a^t \left(t-s\right)^{\alpha-1} {}_{RL}D_a^{\alpha}\left[f\left(s\right)\right]ds \\ &= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\Gamma\left(\alpha+1\right)}\int_a^t \left(t-s\right)^{\alpha} {}_{RL}D_a^{\alpha}\left[f\left(s\right)\right]ds\right), \end{aligned}$$

on pose

$$I = \frac{1}{\Gamma\left(\alpha+1\right)}\int_a^t \left(t-s\right)^{\alpha} {}_{RL}D_a^{\alpha}\left[f\left(s\right)\right]ds.$$

En faisant des intégration par parties répétées, on obtient

$$I = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_a^t (t-s)^\alpha \left(\frac{d}{dt}\right)^i \ {}_{RL}D_a^{-(i-\alpha)} f(s)\, ds$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha-k+1)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-k} \left\{ {}^{RL}D_a^{-(k-\alpha)} f(t) \right\} dt$$

$$- \sum_{j=1}^{k} \left[\left(\frac{d}{dx}\right)^{k-j} \left({}^{RL}D_a^{-(k-\alpha)} f(x) \right) \right]_{x=a} \frac{(x-a)^{\alpha-j+1}}{\Gamma(2+\alpha-j)}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha-k+1)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-k} \left\{ {}^{RL}D_a^{-(k-\alpha)} f(t) \right\} dt$$

$$- \sum_{j=1}^{k} \left[{}^{RL}D_a^{\alpha-j} f(x) \right]_{x=a} \frac{(x-a)^{\alpha-j+1}}{\Gamma(2+\alpha-j)}$$

$$= {}^{RL}D_a^{-(\alpha-k+1)} \left({}^{RL}D_a^{-(k-\alpha)} f(x) \right)$$

$$- \sum_{j=1}^{k} \left[{}^{RL}D_a^{\alpha-j} f(x) \right]_{x=a} \frac{(x-a)^{\alpha-j+1}}{\Gamma(2+\alpha-j)}$$

$$= {}^{RL}D_a^{-1} f(x) - \sum_{j=1}^{k} \left[{}^{RL}D_a^{\alpha-j} f(x) \right]_{x=a} \frac{(x-a)^{\alpha-j+1}}{\Gamma(2+\alpha-j)}$$

d'où

$${}_{RL}I_a^\alpha \left[{}_{RL}D_a^\alpha \left[f(t) \right] \right]$$

$$= \frac{d}{dx} \left({}_{RL}D_a^{-1} f(t) - \sum_{i=1}^{n} \ {}^{RL}D_a^{\alpha-i} \left[f(t) \right]_{t=a} \frac{(t-a)^{\alpha-i+1}}{\Gamma(2+\alpha-i)} \right)$$

$$= f(t) - \sum_{i=1}^{n} \ {}_{RL}D_a^{\alpha-i} \left[f(t) \right]_{t=a} \frac{(t-a)^{\alpha-i}}{\Gamma(\alpha-i+1)}.$$

■

3.2.3 Composition de l'opérateur ${}_{RL}D^\alpha$ et ${}_{RL}I^\beta$

Proposition 3.6 *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors :*

1. *Si $0 \leq \beta < \alpha$, alors la dérivée ${}_{RL}D_a^{\alpha-\beta}\left[f(t)\right]$ existe et*

$${}_{RL}D_a^\alpha \left[{}_{RL}I_a^\beta \left[f(t) \right] \right] = {}_{RL}D_a^{\alpha-\beta} \left[f(t) \right]. \tag{311}$$

2. *Si* $0 \leq \alpha < \beta$, *alors on a :*

$$_{RL}D_a^{\alpha}\left[_{RL}I_a^{\beta}\left[f(t)\right]\right] = \ _{RL}D_a^{\beta-\alpha}\left[f(t)\right]. \tag{3.12}$$

3. *Si* $m-1 < \beta < m$, *alors on a :*

$$_{RL}I_a^{\alpha}\left[_{RL}D_a^{\beta}\left[f(t)\right]\right] = \ _{RL}D_a^{\beta-\alpha}\left[f(t)\right] - \sum_{k=1}^{j}\left[_{RL}D_a^{\beta-k}f\left(t\right)\right]_{t=a}\frac{(t-a)^{\alpha-k}}{\Gamma\left(1+\alpha-k\right)}. \tag{3.13}$$

Preuve. 1 Si $0 \leq \beta < \alpha$, alors $< m-1 < \alpha < m, n-1 < \alpha-\beta < n$, et en utilise (2.3) et (2.25), on trouve :

$$_{RL}D_a^{\alpha}\left[_{RL}I_a^{\beta}\left[f(t)\right]\right] = \left(\frac{d}{dt}\right)^m \left(_{RL}I_a^{m-\alpha}\left[_{RL}I_a^{\beta}\left[f\left(t\right)\right]\right]\right)$$

$$= \left(\frac{d}{dx}\right)^m \left(_{RL}I_a^{m-(\alpha-\beta)}\left[f\left(t\right)\right]\right).$$

Puisque $m \geq n$, alors il existe un $j \in \mathbb{N}$ tq $m = n + j$, et on peut écrire

$$_{RL}D_a^{\alpha}\left[_{RL}I_a^{\beta}\left[f(t)\right]\right]$$

$$= \left(\frac{d}{dt}\right)^m \left(_{RL}I_a^{m-(\alpha-\beta)}\left[f\left(t\right)\right]\right) = \left(\frac{d}{dt}\right)^{j+n} \left(_{RL}I_a^{j+n-(\alpha-\beta)}\left[f\left(t\right)\right]\right)$$

$$= \left(\frac{d}{dt}\right)^n \left(\frac{d}{dt}\right)^j \left(_{RL}I_a^{j}\left[_{RL}I_a^{n-(\alpha-\beta)}\left[f\left(t\right)\right]\right]\right)$$

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^n \left(\frac{d}{dt}\right)^j \left(_{RL}I_a^{0}\left[_{RL}I_a^{n-(\alpha-\beta)}\left[f\left(t\right)\right]\right]\right)$$

$$= \left(\frac{d}{dt}\right)^n \left(_{RL}I_a^{n-(\alpha-\beta)}\left[f\left(t\right)\right]\right) = \ _{RL}D_a^{\alpha-\beta}\left[f\left(t\right)\right],$$

donc

$$_{RL}D_a^{\alpha}\left[_{RL}I_a^{\beta}\left[f(t)\right]\right] = \ _{RL}D_a^{\alpha-\beta}\left[f\left(t\right)\right].$$

2.Maintenant pour le cas $0 \leq \alpha < \beta$, on a

$$_{RL}D_a^{\alpha}\left[_{RL}I_a^{\beta}\left[f(t)\right]\right] = \ _{RL}D_a^{\alpha}\left[_{RL}I_a^{\alpha}\left[_{RL}I_a^{\beta-\alpha}\left[f(t)\right]\right]\right]$$

$$= \ _{RL}I_a^{\alpha-\alpha}\left[\left[_{RL}I_a^{\beta-\alpha}\left[f(t)\right]\right]\right] = \ _{RL}I_a^{0}\left[\left[_{RL}I_a^{\beta-\alpha}\left[f(t)\right]\right]\right]$$

$$= \ _{RL}I_a^{\beta-\alpha}\left[f(t)\right],$$

donc

$$_{RL}D_a^{\alpha}\left[_{RL}I_a^{\beta}\left[f(t)\right]\right] = \ _{RL}I_a^{\beta-\alpha}\left[f(t)\right].$$

3. Pour $m-1<\beta<m$, on a :

$$\begin{aligned}
{}_{RL}I_a^{\alpha}\left[{}_{RL}D_a^{\beta}\left[f(t)\right]\right] &= {}_{RL}D_a^{\beta-\alpha}\left[{}_{RL}I_a^{\beta}\left[{}_{RL}D_a^{\beta}\left[f(t)\right]\right]\right] \\
&= {}_{RL}D_a^{\beta-\alpha}\left\{f\left(t\right)-\sum_{k=1}^{j}\left[{}_{RL}D_a^{\beta-k}f\left(t\right)\right]_{t=a}\frac{\left(t-a\right)^{\beta-k}}{\Gamma\left(\beta-k+1\right)}\right\} \\
&= {}_{RL}D_a^{\beta-\alpha}f\left(t\right)-\sum_{k=1}^{j}\left[{}_{RL}D_a^{\beta-k}f\left(t\right)\right]_{t=a}\frac{{}_{RL}D_a^{\beta-\alpha}\left(t-a\right)^{\beta-k}}{\Gamma\left(\beta-k+1\right)} \\
&= {}_{RL}D_a^{\beta-\alpha}f\left(t\right)-\sum_{k=1}^{j}\left[{}_{RL}D_a^{\beta-k}f\left(t\right)\right]_{t=a}\frac{\left(t-a\right)^{\alpha-k}}{\Gamma\left(1+\alpha-k\right)},
\end{aligned}$$

d'où

$${}_{RL}I_a^{\alpha}\left[{}_{RL}D_a^{\beta}\left[f(t)\right]\right] = {}_{RL}D_a^{\beta-\alpha}f\left(t\right)-\sum_{k=1}^{j}\left[{}_{RL}D_a^{\beta-k}f\left(t\right)\right]_{t=a}\frac{\left(t-a\right)^{\alpha-k}}{\Gamma\left(1+\alpha-k\right)},$$

■

3.2.4 Composition de l'opérateur ${}_{RL}D_a^{\alpha}$ et ${}_{RL}D_a^{\beta}$

Maintenant on s'intéresse à la composition de deux dérivées d'ordre fractionnaires au sens de Riemann-Liouville :

Proposition 3.7 *Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction continue et $m-1<\alpha<m,\ n-1<\beta<n$, alors on a :*

$${}_{RL}D_a^{\alpha}\left[{}_{RL}D_a^{\beta}\left[f(t)\right]\right] = {}_{RL}D_a^{\alpha+\beta}f(t)-\sum_{j=1}^{n}\left[{}_{RL}D_a^{\beta-j}f(t)\right]_{t=a}\frac{\left(t-a\right)^{-\alpha-j}}{\Gamma\left(1-\alpha-j\right)}, \tag{3.14}$$

et

$${}_{RL}D_a^{\beta}\left[{}_{RL}D_a^{\alpha}\left[f(t)\right]\right] = {}_{RL}D_a^{\alpha+\beta}f(t)-\sum_{j=1}^{m}\left[{}_{RL}D_a^{\alpha-j}f(t)\right]_{t=a}\frac{\left(t-a\right)^{-\beta-j}}{\Gamma\left(1-\beta-j\right)}. \tag{3.15}$$

Preuve. En utilisant les relations (2.25). (3.3), et (3.13), on trouve :

$$
\begin{aligned}
& {}_{RL}D_a^{\alpha}\left[{}_{RL}D_a^{\beta}\left[f(t)\right]\right] \\
&= \left(\frac{d}{dt}\right)^m \left({}_{RL}I^{m-\alpha}\left[{}_{RL}D_a^{\beta}\left[f(t)\right]\right]\right) \\
&= \left(\frac{d}{dt}\right)^m \left({}_{RL}D_a^{\alpha+\beta-m}f(t) - \sum_{k=1}^{n}\left[{}_{RL}D_a^{\beta-k}f(t)\right]_{t=a}\frac{(t-a)^{m-\alpha-t}}{\Gamma(m-\alpha-t+1)}\right) \\
&= {}_{RL}D_a^{\alpha+\beta}f(t) - \sum_{k=1}^{n}\left[{}_{RL}D_a^{\beta-k}f(t)\right]_{t=a}\left(\frac{d}{dt}\right)^m\frac{(t-a)^{m-\alpha-k}}{\Gamma(m-\alpha-k+1)} \\
&= {}_{RL}D_a^{\alpha+\beta}f(t) - \sum_{k=1}^{n}\left[{}_{RL}D_a^{\beta-k}f(t)\right]_{t=a}\frac{(t-a)^{-\alpha-k}}{\Gamma(1-\alpha-k)},
\end{aligned}
$$

donc

$$
{}_{RL}D_a^{\alpha}\left[{}_{RL}D_a^{\beta}\left[f(t)\right]\right] = {}_{RL}D_a^{\alpha+\beta}f(t) - \sum_{j=1}^{n}\left[{}_{RL}D_a^{\beta-j}f(t)\right]_{t=a}\frac{(t-a)^{-\alpha-j}}{\Gamma(1-\alpha-j)}.
$$

Si on interchange α et β (aussi m et n), alors on trouve :

$$
{}_{RL}D_a^{\beta}\left[{}_{RL}D_a^{\alpha}\left[f(t)\right]\right] = {}_{RL}D_a^{\alpha+\beta}f(t) - \sum_{j=1}^{m}\left[{}_{RL}D_a^{\alpha-j}f(t)\right]_{t=a}\frac{(t-a)^{-\beta-j}}{\Gamma(1-\beta-j)}.
$$

■

3.2.5 Composition de l'opérateur ${}_{RL}I^{\alpha}$ et ${}_{C}D^{\alpha}$

Proposition 3.8 *Soit $\alpha \in]n-1,n[$ et $f \in C^n([a,b))$. Alors*

$$
{}_{R}I_a^{\alpha}\left[{}_{C}D_a^{\alpha}\left[f(t)\right]\right] = f(t) + \sum_{i=0}^{n-1}\frac{f^{(i)}(a)}{i!}(t-a)^i, \tag{3.16}
$$

où $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 0,1,2,...,n-1$, $n = [\alpha]+1$.

Preuve. On montre la relation de dérivation classique :

$$
I_a^n\left[f^{(n)}(t)\right] = f(t) - \sum_{i=0}^{n-1}\frac{f^{(i)}(a)}{i!}(t-a)^i. \tag{3.17}
$$

Pour $n = 1$, on a :

$$
f(t) - \frac{f^{(0)}(a)}{0!}(t-a)^0 = f(t) - f(a) = I_a^1\left[f'(t)\right].
$$

Aussi, on montre qu'elle est vrai pour $n+1$, on pose $h=f'$, on aura :

$$I_a^{n+1}\left[f^{(n+1)}(t)\right]=I_a^1\left[I_a^n\left[h^{(n)}(t)\right]\right]=I_a^1\left[h(t)-\sum_{i=0}^{n-1}\frac{h^{(i)}(a)}{i!}(t-a)^i\right]$$

$$=\int_a^t h(s)\,ds-\sum_{j=0}^{n-1}\frac{h^{(i)}(a)}{(i+1)\,i!}(t-a)^{i+1}$$

$$=\int_a^t f'(s)\,ds-\sum_{i=0}^{n-1}\frac{f^{(i+1)}(a)}{(i+1)!}(t-a)^{i+1}$$

$$=f(t)-f(a)-\sum_{i=1}^{n}\frac{f^{(i)}(a)}{i!}(t-a)^i=f(t)-\sum_{i=0}^{n}\frac{f^{(i)}(a)}{i!}(t-a)^i.$$

En appliquant relation (2.30), on peut écrire :

$${}_RI_a^\alpha\left[{}_CD_a^\alpha\left[f(t)\right]\right]={}_RI_a^\alpha\left[{}_RI_a^{n-\alpha}\left[f^{(t)}(t)\right]\right]=I^n\left[f^{(n)}(t)\right].$$

Par la formule (2.32), on a :

$${}_RI_a^\alpha\left[{}_CD_a^\alpha\left[f(t)\right]\right]=f(t)+\sum_{i=0}^{n-1}\frac{f^{(i)}(a)}{i!}(t-a)^i.$$

■

Proposition 3.9 *Soient $f\in C^n([a,b))$, et $n-1<\alpha<n, n\in N^*$. Alors, on a :*

$${}_CD_a^\alpha\left[{}_{RL}I_a^\alpha\left[f(t)\right]\right]=f(t).$$

Preuve. En effet,

$${}_CD_a^\alpha\left[{}_RI_a^\alpha\left[f(t)\right]\right]={}_{RL}I_a^{m-\alpha}\left[\left(\frac{d}{dt}\right)^n\left({}_RI_a^\alpha\left[f(t)\right]\right)\right],$$

D'après la relation (2.2), on trouve :

$$
\begin{aligned}
{}_{C}D_a^{\alpha}\left[{}_{RL}I_a^{\alpha}\left[f(t)\right]\right] &= {}_{R}I_a^{m-\alpha}\left[\left(\frac{d}{dt}\right)^n\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-s)^{\alpha-1}f(s)ds\right)\right] \\
&= {}_{RL}I_a^{m-\alpha}\left[\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t \left(\frac{d}{dt}\right)^n (t-s)^{\alpha-1}f(s)ds\right)\right] \\
&= {}_{RL}I_a^{m-\alpha}\left[\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-n)}(t-s)^{\alpha-n-1}f(s)ds\right)\right] \\
&= {}_{RL}I_a^{m-\alpha}\left[\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha-n)}\int_a^t (t-s)^{\alpha-n-1}f(s)ds\right)\right] \\
&= I_a^{m-\alpha}\left[{}_{R}I_a^{\alpha-m}\left[f(t)\right]\right] = {}_{R}I_a^{0}\left[f(t)\right] = f(t),
\end{aligned}
$$

donc

$$
{}_{C}D_a^{\alpha}\left[{}_{R}I_a^{\alpha}\left[f(t)\right]\right] = f(t).
$$

■

3.2.6 Composition de l'opérateur ${}_{C}D_a^{\alpha}$ et ${}_{C}D_a^{\beta}$

Proposition 3.10 *Si* $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$ *avec* $\alpha + \beta \leq 1$ *et* f *de classe* C^1*. Alors*

$$
{}_{C}D_a^{\alpha}\left[{}_{C}D_a^{\beta}\left[f(t)\right]\right] = {}_{C}D_a^{\alpha+\beta}f(t) = {}_{C}D_a^{\beta}\left[{}_{C}D_a^{\alpha}\left[f(t)\right]\right]. \tag{3.18}
$$

Preuve. En utilisant la règle de composition des opérateurs ${}_{R}I_a^{\alpha}$ et ${}_{C}D_a^{\alpha}$, on peut écrire

$$
\begin{aligned}
{}_{C}D_a^{\alpha}\left[{}_{C}D_a^{\beta}\left[f(t)\right]\right] &= {}_{R}I_a^{1-\alpha}\left[{}_{C}D_a^{1}\left({}_{R}I_a^{1-\beta}\left({}_{C}D_a^{1}\left[f(t)\right]\right)\right)\right] \\
&= {}_{R}I_a^{1-\alpha-\beta}\left[{}_{R}I_a^{\beta}\left({}_{C}D_a^{1}\left[{}_{R}I_a^{1-\beta}\left({}_{C}D_a^{1}\left[f(t)\right]\right)\right]\right)\right] \\
&= {}_{R}I_a^{1-\alpha-\beta}\left[{}_{C}D_a^{1-\beta}\left({}_{R}I_a^{1-\beta}\left({}_{C}D_a^{1}\left[f(t)\right]\right)\right)\right] \\
&= {}_{R}I_a^{1-\alpha-\beta}\left[{}_{C}D_a^{1}\left[f(t)\right]\right] = {}_{C}D_a^{\alpha+\beta}\left[f(t)\right].
\end{aligned}
$$

Donc

$$
{}_{C}D_a^{\alpha}\left[{}_{C}D_a^{\beta}\left[f(t)\right]\right] = {}_{C}D_a^{\alpha+\beta}\left[f(t)\right]. \tag{3.19}
$$

En utilisant (3.19), on obtient :

$$
{}_{C}D_a^{\alpha}\left[{}_{C}D_a^{\beta}\left[f(t)\right]\right] = {}_{C}D_a^{\alpha+\beta}\left[f(t)\right] = {}_{C}D_a^{\beta+\alpha}\left[f(t)\right] = {}_{C}D_a^{\beta}\left[{}_{C}D_a^{\alpha}\left[f(t)\right]\right].
$$

■

3.2.7 Composition de l'opérateur ${}_{H}I^{\alpha}$ et ${}_{H}D^{\alpha}$

Proposition 3.11 *Soit $\alpha > 0$. Si $f \in C([a,b))$, alors :*

$$ {}_{H}D_a^{\alpha}\left[\ {}_{H}I_a^{\alpha}\left[f(t)\right]\right] = f(t). \tag{3.20}$$

Preuve. Par définition, on a :

$$ {}_{H}I_a^{\alpha}\left[f(t)\right] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t \left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1}\frac{f(s)}{s}ds.$$

En appliquant l'opérateur δ^n à ${}_{H}I_a^{\alpha}\left[f(t)\right]$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\delta^n\ I_a^{\alpha}\left[f(t)\right] &= \left(t\frac{d}{dt}\right)^n I_a^{\alpha}\left[f(t)\right] \\
&= \left(t\frac{d}{dt}\right)^n \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t \left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1}\frac{f(s)}{s}ds \\
&= \left(t\frac{d}{dt}\right)^{n-1} \frac{t}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t \frac{d}{dt}\left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1}\frac{f(s)}{s}ds \\
&= \left(t\frac{d}{dt}\right)^{n-1} \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t \frac{d}{dt}\left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha-2}\frac{f(s)}{s}ds \\
&= \delta^{n-1}\ I_a^{\alpha-1}\left[f(t)\right].
\end{aligned}$$

On répéte cette procédure i fois, on obtient :

$$\delta^n\ {}_{H}I_a^{\alpha}\left[f(t)\right] = \delta^{n-i}\ {}_{H}I_a^{\alpha-i}\left[f(t)\right].$$

Pour $i = n$, on obtient

$$\delta^n\ {}_{H}I_a^{n}\left[f(t)\right] = {}_{H}I_a^{\alpha-n}\left[f(t)\right],$$

de plus

$$\delta^n\ {}_{H}I_a^{n}\left[f(t)\right] = f(t).$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
{}_{H}D_a^{\alpha}\left[\ {}_{H}I_a^{\alpha}\left[f(t)\right]\right] &= \delta^n\ {}_{H}I_a^{n-\alpha}\ \left[{}_{H}I_a^{\alpha}\left[f(t)\right]\right] \\
&= \delta^n\ {}_{H}I_a^{n}\ \left[{}_{H}I_a^{0}\left[f(t)\right]\right] = f(t).
\end{aligned}$$

■

Proposition 3.12 *Soit $\alpha > \beta > 0$. Si $f \in C([a,b))$, alors*

$$ {}_{H}D_a^{\beta}\left[{}_{H}I_a^{\alpha}\left[f(t)\right]\right] = {}_{H}I_a^{\alpha-\beta}\left[f(t)\right].$$

Preuve. Soit $n-1<\beta<n, n\in\mathbb{N}$, $\beta=m$, alors

$$\delta^n f(t)=\left(t\frac{d}{dt}\right)^n f(t).$$

En appliquant δ^n à la fonction ${}_H I_a^\alpha [f(t)]$, on trouve :

$$\begin{aligned}\delta^n\ {}_H I_a^\alpha [f(t)] &= \left(t\frac{d}{dt}\right)^n \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t \left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1}\frac{f(s)}{s}ds\\ &\left(t\frac{d}{dt}\right)^{n-1} \frac{t}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t \frac{d}{dt}\left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1}\frac{f(s)}{s}ds\\ &\left(t\frac{d}{dt}\right)^{n-1} \frac{t}{\Gamma(\alpha-1)}\int_a^t \frac{d}{dt}\left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha-2}\frac{f(s)}{s}ds\\ &\delta^{n-1}\ {}_H I_a^{\alpha-1}[f(t)].\end{aligned}$$

On répète cette procédure j fois,$(1<j\leq n)$, on obtient

$$\delta^n\ {}_H I_a^\alpha [f(t)]=\delta^{n-j}\ {}_H I_a^{\alpha-j}[f(t)].$$

Pour $j=n$, on a

$$\delta^n\ {}_H I_a^\alpha [f(t)]=\ {}_H I_a^{\alpha-n}[f(t)].$$

De plus

$$\delta^n\ {}_H I_a^n [f(t)]=f(t).$$

Par conséquent,

$${}_H D_a^\beta [{}_H I_a^\alpha [f(t)]]=\delta^n\left({}_H I_a^{n-\beta}[f(t)]\ \ {}_H I_a^\alpha [f(t)]\right)=\ {}_H I_a^{\alpha-\beta}[f(t)].$$

■

Proposition 3.13 *Soit $f\in C[a,b]$ et pour tout $\alpha>0$, on a :*

$${}_H I_a^\alpha [{}_H D_a^\alpha [f(t)]]=f(t)+\sum_{j=1}^n c_j\left(\log\frac{t}{a}\right)^{\alpha-j}, \tag{3.21}$$

où $c_j\in\mathbb{R}$, $j=1,2,...,n$, $n=[\alpha]+1$.

Proposition 3.14 *Soit $f\in L[a,b]$, ${}_H I_a^{n-\alpha}[f(t)]\in AC_\delta^n[a,b]$ et pour tout $\alpha>0$, on a :*

$${}_H I_a^\alpha [{}_H D_a^\alpha [f(t)]]=f(t)-\sum_{j=1}^n \frac{\delta^{n-j}\ {}_H I_a^{n-\alpha}[f(a)]}{\Gamma[\alpha-j+1]}\left(\log\frac{t}{a}\right)^{\alpha-j}. \tag{3.22}$$

En particulier, si $\alpha=n$ et $f\in AC_\delta^n[a,b]$, alors on a :

$${}_H I_a^n [{}_H D_a^n [f(t)]]=f(t)-\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\left(\delta^j f\right)(a)}{j!}\left(\log\frac{t}{a}\right)^j. \tag{3,23}$$

Preuve. Exercice ■

3.3 Règle de Leibniz pour les dérivées fractionnaires

Pour n entier on a :

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^n (g(t) f(t)) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} g^{(j)}(t) f^{(n-j)}(t). \tag{3.24}$$

La généralisation de la formule (3.24) est donnée par :

Proposition 3.15 *Soit f une fonction continue dans $[a,b]$ et $g \in C^{n+1} (n \geq \alpha+1)$ dans $[a,b]$, alors la dérivée fractionnaire du produit $g.f$ est donnée par*

$$_{GL}D_a^{\alpha}[(g(t) f(t))] = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} g^{(k)}(t)_{GL} D_a^{\alpha-j} f(t) - R_n^{\alpha}(t), \tag{3.25}$$

où

$$R_n^{\alpha}(t) = \frac{1}{n!\Gamma(-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{-\alpha-1} f(t)\, dt \int_t^x g^{(n+1)}(\tau)(t-\tau)^n d\tau. \tag{3.26}$$

Preuve. *On a :*

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^n (g(t) f(t)) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} g^{(j)}(t) f^{(n-j)}(t).$$

On remplace n par α.ceci signifie que la dérivée d'ordre entier $f^{(n-k)}$ sera remplacer par la dérivée fractionnaire de Grünwald-Letnikov $_{GL}D_a^{\alpha-j}$, et on calculer cette somme suivante :

$$L_{\alpha}(t) = \sum_{j=0}^{n} C_J^{\alpha} g^{(j)}(t)_{GL} D_a^{\alpha-j}[f(t)].$$

$\cdot$ *On suppose $\alpha < 0$, si on prend $\delta = \alpha$, alors pour tout j $\alpha - j = \delta - j < 0$ et on a :*

$$_{GL}D_a^{\delta-j}[f(t)] = \frac{1}{\Gamma(-\delta+j)} \int_a^t (t-s)^{-\delta+j-1} f(s)\, ds.$$

Alors

$$\begin{aligned}
L_{\beta}(t) &= \sum_{j=0}^{n} C_J^{\alpha} g^{(j)}(t) \frac{1}{\Gamma(-\delta+j)} \int_a^t (t-s)^{-\delta+j-1} f(s)\, ds \\
&= \sum_{j=0}^{n} C_J^{\alpha} \frac{1}{\Gamma(-\delta+j)} \int_a^t (t-s)^{-\delta+j-1} g^{(j)}(t) f(s)\, ds \\
&= \int_a^t \left[\sum_{j=0}^{n} C_J^{\alpha} \frac{1}{\Gamma(-\delta+j)} g^{(j)}(t)(t-s)^j\right] \frac{f(s)}{(t-s)^{\delta+1}} ds,
\end{aligned}$$

En tenant compte de la ralation suivante : $\Gamma(\mu)\Gamma(1-\mu)=\dfrac{\pi}{\sin(\pi\mu)}$*, on peut écrire*

$$\begin{aligned}
L_{\beta}(t) &= \int_a^t \left[\sum_{j=0}^{n} \frac{\Gamma(\beta+1)}{k!\Gamma(\beta-k+1)\Gamma(-\beta+k)} g^{(j)}(t)(t-s)^j\right] \frac{f(s)}{(t-s)^{\delta+1}}ds \\
&= \int_a^t \left[\sum_{j=0}^{n} \frac{\Gamma(\beta+1)\sin((k-\beta)\pi)}{k!\pi} g^{(j)}(t)(t-s)^j\right] \frac{f(s)}{(t-s)^{\delta+1}}ds \\
&= \int_a^t \left[\sum_{j=0}^{n} \left((-1)^{j+1}\frac{\Gamma(\delta+1)}{j!}\frac{\sin(\delta\pi)}{\pi}\right) g^{(j)}(t)(t-s)^j\right] \frac{f(s)}{(t-s)^{\delta+1}}ds
\end{aligned}$$

Maintenant, en utilisant le théorème de Taylor, on obtient

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{j!} g^{(j)}(t)(t-s)^j &= g(t) + \frac{g'(t)}{1!}(t-s)^1 + \ldots + \frac{g^{(n)}(t)}{n!}(t-s)^n \\
&= g(t) + \frac{1}{n!}\int_a^t g^{(n+1)}(z)(s-z)^n dz,
\end{aligned}$$

on trouve

$$\begin{aligned}
&L_{\beta}(t) \\
&= -\frac{\sin(\delta\pi)}{\pi}\Gamma(\delta+1)\int_a^t \left[\sum_{j=0}^{n}\frac{(-1)^j}{j!}g^{(j)}(t)(t-s)^j\right]\frac{f(s)}{(t-s)^{\delta+1}}ds \\
&= -\frac{\sin(\delta\pi)}{\pi}\Gamma(\delta+1)\int_a^t \left[g(t)+\frac{1}{n!}\int_a^t g^{(n+1)}(z)(s-z)^n dz\right]\frac{f(s)}{(t-s)^{\delta+1}}ds \\
&= -\frac{\sin(\delta\pi)}{\pi}\Gamma(\delta+1)\int_a^t \left\{\frac{g(t)f(s)}{(t-s)^{\delta+1}} + \frac{f(s)}{(t-s)^{\delta+1}}\frac{1}{n!}\int_a^t g^{(n+1)}(z)(s-z)^n dz\right\}ds \\
&= -\frac{\sin(\delta\pi)}{\pi}\Gamma(\delta+1)\int_a^t (t-s)^{-\delta-1} g(s) f(s) ds \\
&- \frac{\sin(\delta\pi)}{\pi}\Gamma(\delta+1)\int_a^t (t-s)^{-\delta-1} f(s) ds \int_a^t g^{(n+1)}(z)(s-z)^n dz \\
&= \frac{1}{\Gamma(-\delta)}\int_a^t (t-t)^{-\delta-1} g(s) f(s) ds \\
&+ \frac{1}{n!\Gamma(-\delta)}\int_a^t (t-s)^{-\delta-1} f(s) ds \int_z^s \varphi^{(n+1)}(z)(s-z)^n dz \\
&= {}_{GL}D_a^{\delta}(g(t)f(t)) + R_n^{\delta}(t)
\end{aligned}$$

où

$$R_n^{\delta}(t) = \frac{1}{n!\Gamma(-\delta)}\int_a^t (t-s)^{-\delta-1} f(s) ds \int_s^z g^{(n+1)}(z)(s-z)^n dz.$$

Maintenant, on montre que : $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n^{\delta}(t) = 0$*. En utilisant le changemant de variable sui-*

vant : $z = s + x(t-s)$*, on obtient*

$$\begin{aligned}
& R_n^{\delta}(t) \\
&= \frac{1}{n!\Gamma(-\delta)} \int_a^t (t-s)^{-\delta-1} f(s)\, ds \int_0^1 g^{(n+1)}(s + x(t-s)) (-z(t-s))^n (t-s)\, dz \\
&= \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(-\delta)} \int_a^t (t-s)^{-\delta-1} (t-s)^{n+1} f(s)\, ds \int_0^1 g^{(n+1)}(s + x(t-s)) x^n dx \\
&= \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(-\delta)} \int_a^t (t-s)^{n-\delta} f(s)\, ds \int_0^1 g^{(n+1)}(s + x(t-s)) x^n dx
\end{aligned}$$

Maintenant, on considère le changement de variable : $x = b + y(t-b)$, *on trouve*

$$\begin{aligned}
& R_n^{\delta}(t) \\
&= \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(-\delta)} \int_0^1 \frac{f(b + y(t-a))}{[(t-a)(1-y)]^{-n+\delta}} (t-b)\, dy \int_0^1 g^{(n+1)}(b + (t-b)(y + x + -xy)) x^n dx \\
&= \frac{(-1)^n (t-b)^{n-\delta+1}}{n!\Gamma(-\delta)} \\
&\times \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^n}{(1-r)^{-n+\beta}} \left[f(b + y(t-a))\, g^{(n+1)}(b + (t-a)(y + x - xy)) \right] dydx
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
& \lim_{n \longrightarrow +\infty} R_n^{\delta}(t) \\
= & \lim_{n \longrightarrow +\infty} \left(\frac{(-1)^n (t-b)^{n-\delta+1}}{n!\Gamma(-\delta)} \right. \\
& \left. \times \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^n}{(1-r)^{-n+\beta}} \left[f(b + y(t-a))\, g^{(n+1)}(b + (t-a)(y + x - xy)) \right] dydx \right) \\
= & \ 0.
\end{aligned}$$

■

3.4 Exercices

Exercice 3.1 *Si* $0 \leq m - 1 < \beta < m$ *et* $0 \leq n - 1 < \alpha < n$ *et* $f^{(j)}(a) = 0$ *pour tout* $j = 0, 1, ..., r - 2.$*avec* $r = \max(m, n)$*, ALors :*

$${}_{GL}D_a^{\alpha}\left[{}_{GL}D_a^{\beta}[f(t)]\right] = {}_{GL}D_a^{\beta}\left[{}_{GL}D_a^{\alpha}[f(t)]\right] = {}_{GL}D_a^{\alpha+\beta} f[f(t)].$$

Exercice 3.2 1) : *Montrer que si* $\alpha > 0$ *et* f *une fonction continue, alors*

$${}^{RL}D_a^{\alpha} \circ I_a^{\alpha} = id.$$

2) : Montrer que si $0 \leq \alpha < \beta$ et f une fonction continue, alors

$${}^{R.L}D_a^{\alpha}\left[I_a^{\beta}[f(t)]\right] = I_a^{\beta-\alpha}[f(t)].$$

Exercice 3.3 *Soit f une fonction continue. Montrer que pour tout $m-1<\alpha<m$, $m\in\mathbb{N}^*$, on a :*

$$
\begin{aligned}
&{}^{RL}D_a^{\beta-\alpha}f(x)-I_a^{\alpha}\left[{}^{RL}D_a^{\beta}f(x)\right]\\
=&\frac{{}^{RL}D_a^{\beta-1}f(a)(x-a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}+\frac{{}^{RL}D_a^{\beta-2}f(a)(x-a)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)}+...+\frac{{}^{RL}D_a^{\beta-k}f(a)(x-a)^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha-k+1)}.
\end{aligned}
$$

Exercice 3.4 *Montrer que si $m-1<\alpha<m, m\in\mathbb{N}^*$ et $f\in C^m([a,b))$, alors*

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^m\left(I_a^{m-\alpha}[f(t)]\right)=\sum_{j=0}^{m-1}\frac{(x-a)^{j-\alpha}}{\Gamma(j-\alpha+1)}f^{(j)}(a)+I_a^{m-\alpha}\left[\left(\frac{d}{dx}\right)^m f(x)\right].$$

Exercice 3.5 *Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction continue, montrer que si $m-1<\alpha<m$ et $n-1<\beta<n$, alors on a :*

$${}_{RL}D_a^{\beta}\left[{}_{RL}D_a^{\alpha}[f(t)]\right]={}_{RL}D_a^{\alpha+\beta}f(t)-\sum_{j=1}^{m}\left[{}_{RL}D_a^{\alpha-j}f(t)\right]_{t=a}\frac{(t-a)^{-\beta-j}}{\Gamma(1-\beta-j)}.$$

Exercice 3.6 1) : *Soit $f\in L[a,b]$, ${}_HI_a^{n-\alpha}[f(t)]\in AC_\delta^n[a,b]$. Montrer que pour tout $\alpha>0$, on a :*

$${}_HI_a^{\alpha}\left[{}_HD_a^{\alpha}[f(t)]\right]=f(t)-\sum_{j=1}^{n}\frac{\delta^{n-j}\ {}_HI_a^{n-\alpha}[f(a)]}{\Gamma[\alpha-j+1]}\left(\log\frac{t}{a}\right)^{\alpha-j}.$$

2) : *Montrer que si $\alpha=n$ et $f\in AC_\delta^n[a,b]$, alors on a :*

$${}_HI_a^{n}\left[{}_HD_a^{n}[f(t)]\right]=f(t)-\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\left(\delta^j f\right)(a)}{j!}\left(\log\frac{t}{a}\right)^{j}.$$

Bibliographie

[1] **H. Dib :** Equations différentielles Fractionnaires, EDA-EDO (4ème Ecole). Tlemcen 23-27, mai 2009.

[2] **R. Goreno and F. Mainardi** : Fractional Calculus : integral and differential equations of fractional order, Springer Verlag, Wien. 1997, pp. 223-276.

[3] **J. Hadamard** : Essai sur l'études fonctions donnees par leur development de Taylor, J. Mat. Pure Appl. Ser. 8 (1892), 101-186.

[4] **A. A. Kilbas, H.M. Srivastava** and **J. J. Trujillo** : Theory and applications of fractional differential equations. Elsevier, Amsterdam, 2006.

[5] **A. A. Kilbas** and **S. A. Mazran** : Nonlinear differential equations with Caputo fractional derivative in the space of continuously differentiable functions. Differential Equations. 41(1), (2005), 84-89.

[6] **V. Lakshmikantham** and **A.S. Vatsala** : Basic theory of fractional differential equations. Nonlinear Anal. 69(8), (2008), 2677-2682.

[7] **J.L. Lavoie, T.J.Osler** and **R.Tremblay** : Fractional derivatives and special functions, SIAM Review. 18(2), (1976), 240-268.

[8] **K. S. Miller** and **B. Ross** : An introduction to the fractional calculus and diferential equations. Jhon Wiley, New York. 1993.

[9] **G. MittagLeffler** : Sur la nouvelle fonction, C. R. Académie des Sciences,137, (1903), 554-558.

[10] **K. B. Oldham** and **J. Spanier** : The Fractional Calculs. Acadimic Press, New York. 1974.

[11] **M.A.Özarslan** and **B. Yilmaz** : The extended Mittag-Leffer function and its properties. Journal of inequalities and applications. 2014, (2014) :85.

[12] **I. Podlubny** : Fractional-order systems and fractional-order controllers,UEF-03-94 Slovak Academy of Science, Kosice, 1994.

[13] **I. Podlubny** : Fractional differential equations. Academic Press, San Diego. 1999.

[14] **G. Samko, A. A. Kilbas** and **O. I. Marichev** : Fractional integral and derivative, Theory and Applications, Gordon and Breach, Yverdon, 1993.

[15] **M. Z. Sarikaya, A. Karaca** : On the k-Riemann-Liouville fractional integral and applications. International Journal of Statistics and Mathematics. 1(3), (2014), 033-043.

[16] **S. Mubeen, G. M. Habibullah**, k-Fractional Integrals and Application. Int. J. Contemp. Math. Sciences. 7(2), (2012), 89-94.

[17] **M. Z. Sarikaya, Z. Dahmani, M.E. Kiris and F. Ahmad**. (k, s)-Riemann-Liouville fractional integral and applications, Hacet J. Math. Stat. 45(1), (2016), 1-13.