Université de Khemis Miliana - Djilali Bounaama
Faculté des Sciences et de la technologie
Département des Sciences de la matière

Cours
Mathématiques 2
ST-SM

Par

Dr. AYADI Souad

Pour

Première année licence

January 2023

Table des matières

Introduction

Ce cours polycopié correspond au programme de l'unité d'enseignement fondamental **UEF-1.2 "Mathématiques 2"**, du deuxième semestre, socle commun, du domaine sciences et technologies. Il permet d'acquérir le contenu de tout le second semestre qui a pour but d'amené les étudiants, pas à pas, vers la compréhension des mathématiques nécessaires pour leur cursus universitaire. Le manuscrit est destiné aux étudiants de la première année licence L.M.D sciences et techniques (ST) et sciences de la matière (SM), ainsi que toute autre personne ayant besoin d'outils de bases d'analyse et d'algèbre linéaire. Les notions abordées dans ce cours sont fondamentales et parmi les plus utilisées dans le domaine des sciences et technologie, elles constitues les notions de base qu'un étudiant de premi̇̀re année doit absolument connaitre.

Le cours contient une partie algèbre et une partie analyse et scindé en cinq chapitres qui sont programmés au module math 2, en respectant le contenu et l'ordre des chapitres suivant le canevas donné par le ministère. Les chapitres trois, quatre et cinq traitent les notions d'analyse et ceux qui restent sont consacrés à l'algèbre.

Le cours débute par un chapitre qui est ; en quelque sorte les mathématiques générales ; il concerne les matrices. Les notions de cette partie sont nouvelles pour l'étudiant c'est pourquoi nous les avons présenté d'une manière progressive. À la fin de se cours l'étudiant doit maitriser le calcule matricielle, en particulier les opérations entre les matrices.

Le deuxième chapitre, traite les systèmes d'équations linéaires en particulier les méthodes de résolution à savoir la méthode de Cramer et la méthode de la matrice inverse.
Le troisième chapitre concerne les intégrales indéfinies ainsi que définies. L'intégration des fonctions est omniprésente (fonctions : rationnelles, exponentielles, trigonométriques)et l'intégration des polynômes.

Le chapitre quatre est très important par la suite pour toutes les disciplines. Il donne les notions de base sur les équations différentielles d'ordre 1 et 2. En particulier, la résolution des équations différentielles linéaires du second ordre à coefficient constant.

On termine notre cours par des notions fondamentales sur les fonctions à plusieurs variables toute en insistant sur ceux à deux variables : les limites, la continuité, les dérivées partielles, la différentiabilité et on termine par quelques notions simples d'intégration double et triple. Ce dernier chapitre est une préparation de l'étudiant au cours de **"Mathématiques 3"**.

Ce manuscrit est le fruit d'un enseignement du cours Mathématiques 2 pendant plusieurs années consécutives. De plus, chaque chapitre est colturé par des exercices qui sont corrigés en détails.

Le manuscrit prend en considération le niveau de langue ; d'une certaine catégorie détudiants qui ne métrise pas bien le français ; c'est pourquoi il est écrit avec un francais simple et facile à comprendre.

Je souhaite que ce document servira bien les étudiants et répondera à leurs attentes et qu'il les aidera à maîtriser bien ce module.

Finalement, Je serais très reconnaissante à tous les lecteurs, étudiants et enseignants à me faire parvenir leurs remarques, commentaires et suggestions concernant le fond et la forme de ce manuscrit à mon adresse : souad.ayadi@univ-dbkm.dz

Chapitre 1

Matrices et déterminants

1.1 Les matrices

1.1.1 Généralités

Definition 1.1 *Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$. Une matrice A d'ordre $n \times p$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) est un tableau de n lignes et p colonnes de la forme*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$$

Notation 1.1
1. *Une matrice A qui possède n lignes et p colonnes est notée par $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}}$*
2. *Le coefficient a_{ij} dénote l'élément obtenu par l'intersection de la ligne i et la colonne j.*
3. *Par convention, dans la notation a_{ij} le i est résevé pour les lignes et le j pour les colonnes. Par suite, si $i \neq j$, alors a_{ij} et a_{ji} n'ont pas la même position.*
4. *La taille (la dimension, l'ordre) de la matrice $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}}$ est notée par $dimA$. Dans notre cas $dimA = n \times p$*

Remarques 1.1
1. *Attention ! ! ! Il faut être très prudent vis à vis les dimension. Lorsqu'on écrit le produit $n \times p$ nous n'avons pas à calculer le résultat de cette multiplication, on laisse l'écriture telle qu'elle est.*

   Exemple 1.1 *La matrice $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq 3 \\ 1\leq j\leq 5}}$ est de taille 3×5 et ce ci donne 15. la matrice $B = (b_{ij})_{\substack{1\leq i\leq 5 \\ 1\leq j\leq 3}}$ est de dimension 5×3 et ce ci donne aussi 15, mais les matrices sont différentes et n'ont pas la même taille. En effet*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} \\ b_{51} & b_{52} & b_{53} \end{pmatrix}$$

2. *Si $n = p$, la matrice A est dite carrée d'ordre n.*
3. *L'ensemble de toutes les matrices d'ordre $n \times p$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathbb{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. De plus si $n = p$ cet ensemble est noté $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$.*

   Exemple 1.2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 5 & -2 \\ 1 & 4 & -5 & 7 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{2,5}(\mathbb{R}), \quad B = \begin{pmatrix} \frac{i}{2} & \sqrt{3} & \frac{i+\sqrt{7}}{4} \\ 2+i & 6i & 0 \\ -1 & 8 & -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_3(\mathbb{C})$$

   A est une matrice rectangulaire de taille 2×5, et B une matrice carrée de taille 3×3.

4. *Si $A \in \mathbb{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors le produit $n \times p$ indique le nombre des coefficients de A. Dans l'exemple précédent, le nombre de coefficient de A est $2 \times 5 = 10$.*
5. *Si A est une matrice carrée d'ordre n alors les coefficients $(a_{ii})_{1 \leq i \leq n}$ forment la diagonale principale de la matrice A. Autrement dit, si $dim A = n \times n$ alors les coefficients de la diagonale principale sont $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \cdots, a_{nn}$. Dans l'exemple précédent, les coefficients de la diagonale principale de la matrice carrée B sont $b_{11} = \frac{i}{2}, b_{22} = 6i, b_{33} = -3$.*

Exercise 1.1 *Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq \leq i,j \leq 3}$ tel-que*
$a_{ij} = \begin{cases} i - 2j & si \ i \neq j \\ 2ij & si \ i = j \end{cases}$ *Calculer tous les coefficients de la matrice A.*

Solution 1.1 *Il est claire que A est une matrice carrée de taille 3×3, donc elle contient 9 coefficients $a_{11} = 2, a_{22} = 8, a_{33} = 18,\ a_{12} = -3, a_{13} = -5, a_{21} = 0, a_{23} = -4, a_{31} = 1$ $a_{32} = -1$ et donc : $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ 0 & 8 & -4 \\ 1 & -1 & 18 \end{pmatrix}$*

1.1.2 Matrices particulières

Matrice nulle

Definition 1.2 *Soit A une matrice de taille $n \times p$. Si tous les coefficients de A sont nuls, on dit que A est une matrice nulle et on écrit $A = 0_{n,p}$.*

Exemple 1.3 $A = 0_{2,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Matrice ligne

Definition 1.3 *Une matrice ligne ou vecteur ligne, est une matrice qui a une seule ligne et p colonnes. Elle est de taille $n \times 1$, donc elle s'écrit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1p} \end{pmatrix}$*

Exemple 1.4 $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & -5 & 4 \end{pmatrix}$ *est une matrice ligne de taille 1×5.*

Matrice colonne

Definition 1.4 *Une matrice colonne ou vecteur colonne, est une matrice qui a une seule colonne et n lignes. Elle est de taille $n \times 1$, donc elle s'écrit* $A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$

Exemple 1.5 $A = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$ *est une matrice colonne de taille* 4×1.

Matrice identité

Definition 1.5 *Une matrice identité (ou matrice unité) d'ordre* **n** *notée I_n est une* **matrice carrée** *de taille $n \times n$ et définie par :* $I_n = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ *tels-que* $\begin{cases} a_{ij} = 1 & si \;\; i = j \\ a_{ij} = 0 & si \;\; i \neq j \end{cases}$

Exemple 1.6 $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Matrice diagonale

Definition 1.6 *On appelle matrice diagonale A d'ordre* **n** *toute* **matrice carrée** *de taille $n \times n$ et définie par :* $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ *tels-que* $\begin{cases} a_{ij} \neq 0 & si \;\; i = j \\ a_{ij} = 0 & si \;\; i \neq j \end{cases}$

Exemple 1.7 $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Matrice triangulaire supérieure

Definition 1.7 *On appelle matrice triangulaire supérieure A d'ordre* **n** *toute* **matrice carrée** *de taille $n \times n$ et définie par :* $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ *tels-que* $\begin{cases} a_{ij} = 0 & si \;\; i > j \\ a_{ij} \neq 0 & si \;\; i \leq j \end{cases}$

Exemple 1.8 $A = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & \frac{1}{2} & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Matrice triangulaire inférieure

Definition 1.8 *On appelle matrice triangulaire inférieure A d'ordre* **n** *toute* **matrice carrée** *de taille $n \times n$ et définie par : $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ tels-que* $\begin{cases} a_{ij} = 0 & si \;\; i < j \\ a_{ij} \neq 0 & si \;\; i \geq j \end{cases}$

Exemple 1.9 $A = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -2 & 0 \\ 6 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

1.1.3 Opérations sur les matrices

Égalité de deux matrice

Soient $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ et $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ deux matrices de même taille. On dit que A et B sont égales si elles ont les même coefficients :

$$A = B \Longleftrightarrow a_{ij} = b_{ij}, \; \forall i = 1, 2, 3, \cdots, n, \; \forall j = 1, 2, 3, \cdots, p$$

Exemple 1.10 $A = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & -2 & 3 \\ \pi & \sqrt{\pi} & \pi^2 \\ 1 & 7 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & \frac{1}{2} & \pi & 1 \\ 1 & -2 & \sqrt{\pi} & 7 \\ -1 & 3 & \pi^2 & 0 \end{pmatrix}$
A et B ne peuvent pas être égales car : $dimA = 4 \times 3 \neq 3 \times 4 = dimB$

Exemple 1.11 *Trouver les réels x, y pour que $A = B$, où $A = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & x \\ \pi & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 2 \\ \sqrt{y} & 3 \end{pmatrix}$.*
Comme A et B ont la même dimension,donc pour qu'elles soient égales il faut que $x = 2$ et $\sqrt{y} = \pi$. Alors $x = 2, y = \pi^2$.

Addition de deux matrices

Soient A et B deux matrices de même taille $n \times p$. Alors la matrice $C = A + B$ existe et elle est de dimension $n \times p$ et elle est définie par $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \; \forall \, 1 \leq i \leq n, \forall \, 1 \leq j \leq p$.

Remarque 1.1 *On ne peut pas additionner deux matrices qui n'ont pas la même dimension.*

Exemple 1.12 $A = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & -2 & 3 \\ \pi & \sqrt{\pi} & \pi^2 \\ 1 & 7 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & \frac{1}{2} & \pi & 1 \\ 1 & -2 & \sqrt{\pi} & 7 \\ -1 & 3 & \pi^2 & 0 \end{pmatrix}$
$A + B$ n'existe pas car : $dimA = 4 \times 3 \neq 3 \times 4 = dimB$.

Exemple 1.13 $A = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 2 \\ \pi & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $A + B = \begin{pmatrix} \sqrt{5} + \sqrt{3} & 1 \\ 1 + \pi & 7 \end{pmatrix}$

Multiplication d'une matrice par un scalaire

Soient $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Le produit de la matrice A par le réel λ est la matrice λA de taille $n \times p$ telle-que $\lambda A = (\lambda a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$.

Exemple 1.14 $A = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 2 \\ \pi & -3 \end{pmatrix}$, $2A = \begin{pmatrix} 2\sqrt{5} & 4 \\ 2\pi & -6 \end{pmatrix}$, $-A = \begin{pmatrix} -\sqrt{5} & -2 \\ -\pi & 3 \end{pmatrix}$

Propriétés

Soient $A, B, C \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

1. $A + B = B + A$
2. $A - B = A + (-1)B$
3. $A - A = A + (-A) = (-A) + A = 0_{n,p}$ où $0_{n,p}$ est la matrice nulle
4. $A + 0_{n,p} = 0_{n,p} + A = A$
5. $(A + B) + C = A + (B + C)$
6. $(\lambda_1 + \lambda_2)A = \lambda_1 A + \lambda_2 A$
7. $\lambda_1(\lambda_2 A) = (\lambda_1 \lambda_2)A$
8. $\lambda_1(A + B) = \lambda_1 A + \lambda_1 B$

Produit de deux matrices

Soient $A \in M_{n,p}(\mathbb{K}), B \in M_{p,r}(\mathbb{K})$ deux matrice de tailles respectives $n \times p$ et $p \times r$. Le produit des matrice A et B est la matrice $A.B$ telle-que $A.B = (w_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq r}}$ avec :

$$\begin{aligned} w_{ij} &= a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} + \cdots + a_{1k}b_{k1} + \cdots + a_{1p}b_{p1} \\ &= \sum_{k=1}^{k=p} a_{ik}b_{kj}, \quad 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq r \end{aligned}$$

Remarques 1.2

1. *Pour calculer le produit $A.B$, il faut que le nombre de colonnes dans A soit égale au nombre de lignes dans B.*
2. *Le coefficient w_{ij} est le résultat de la multiplication de la ligne i de A avec la colonne j de B.*
3. *Pour calculer le produit $B.A$, il faut que le nombre des colonnes dans B soit égale au nombre de lignes dans A.*
4. *Il est possible que $A.B$ existe sans que $B.A$ le soit, et inversement.*
5. *Les produit $A.B$ et $B.A$ lorsqu'ils existent simultanément peuvent être différents.*
6. *Si A et B sont deux matrices carrées de même taille alors $A.B$ et $B.A$ existent simultanément.*

Exemple 1.15 *Calculer les produits A.B et B.A lorsqu'ils existent*

$A = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 2 & 0 \\ \pi & -3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & \frac{1}{3} & 0 \\ \sqrt{\pi+1} & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$,

$dimA = 2 \times 3$ et $dimB = 3 \times 4$, donc la matrice A.B existe et elle est de taille 2×4, mais le produit B.A n'existe pas car le nombre de colonnes de B qui est 4 est différent du nombre de lignes de A qui est 2.

$$A.B = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 2 & 0 \\ \pi & -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & \frac{1}{3} & 0 \\ \sqrt{\pi+1} & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2\sqrt{5} + 2\sqrt{\pi+1} + 0.2 & 4\sqrt{5} - 2 - 0.3 & \frac{1}{3}\sqrt{5} + 2.2 + 1.0 & 0.\sqrt{5} - 1.2 + 5.0 \\ 2\pi - 3\sqrt{\pi+1} + 2.1 & 4.\pi + 1.3 - 3.1 & \frac{1}{3}\pi - 2.3 + 1.1 & 0.\pi + 1.3 + 5.1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2\sqrt{5} + 2\sqrt{\pi+1} & 4\sqrt{5} - 2 & \frac{1}{3}\sqrt{5} + 4 & -2 \\ 2\pi - 3\sqrt{\pi+1} + 2 & \pi & \frac{1}{3}\pi - 5 & 8 \end{pmatrix}$$

Remarques 1.3

1. *Si $A.B = 0$ ceci ne veut pas dire que $A = 0$ ou $B = 0$. Autrement dit, le produit de deux matrices peut être nul sans que l'une d'entre elles soit nulle*

   Exemple 1.16 $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A.B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

2. *$A.B = A.C$ ceci ne veut pas dire que $B = C$*

   Exemple 1.17 $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $A.B = A.C = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

Propriétés

Soient A, B, C, trois matrices telles-que $A \in M_{n,p}(\mathbb{K}), B \in M_{p,r}(\mathbb{K}), C \in M_{r,m}(\mathbb{K})$ et λ_1, λ_2 deux scalaires. On a les propriétés suivantes :

1. $A.(B.C) = (A.B).C$
2. Si $B + C$ existe et si $A.(B + C)$ existe alors $A.(B + C) = A.B + A.C$
3. Si $A + B$ existe et si $(A + B).c$ existe alors $(A + B).c = A.C + B.C$
4. $(\lambda_1 A)(\lambda_2 B) = (\lambda_1 \lambda_2)(A.B)$
5. $A.I_P = I_n.A = A$
6. $A.0_{p,s} = 0_{n,s}$ et $0_{m,n}.A = 0_{m,p}$

Remarques 1.4 *Attention!!!!!, il faut être très prudent*

1. *$AC+BC = (A+B).C$, $C.A+C.B = C(A+B)$, mais $A.C+C.B$ ne se factorise pas car C n'est pas du même coté dans les deux produits*
2. *$A.B + A = A.(B + I)$ et $B.A + A = (B + I).A$*
3. *$A.B + \lambda A = A.(B + \lambda I)$ et $B.A + \lambda A = (B + \lambda I).A$, $\lambda \in \mathbb{R}$.*

Puissance d'une matrice

Definition 1.9 *Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée d'ordre n. Les puissances successives de A sont définies par*

$$A^0 = I_n,\ A^1 = A,\ A^{p+1} = A.A^p = A^p.A, \quad et\ A^p = \underbrace{A.A.A.A \cdots A}_{p\,fois},\ p \in \mathbb{N}$$

Exemple 1.18 $A^2 = A.A,\ A^3 = A^2.A$

Proposition 1.1 *Soient $A, B \in M_n(\mathbb{K})$. On a*

1. $(A+B)^2 = A^2 + A.B + B.A + B^2$
2. $(A+I_n)^2 = A^2 + 2A + I_n^2$

Exemple 1.19 $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A^2 = A.A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

1.1.4 Transposition de matrices

Definition 1.10 *Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ une matrice de taille $n \times p$. La matrice de taille $p \times n$ obtenue en écrivant les lignes de A en colonnes s'appelle la matrice transposée de A et elle est notée par A^t. On a alors l'équivalence suivante*

$$A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}} \Longleftrightarrow A^t = (a_{ji})_{\substack{1\leq j\leq p \\ 1\leq i\leq n}}$$

Exemple 1.20 $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ \pi & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$, $A^t = \begin{pmatrix} -1 & \pi \\ 2 & \frac{1}{2} \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

Exemple 1.21 $A = \begin{pmatrix} \pi^2 & \sqrt{2} \\ \pi & \frac{5}{3} \end{pmatrix}$, $A^t = \begin{pmatrix} \pi^2 & \pi \\ \sqrt{2} & \frac{5}{3} \end{pmatrix}$

Propriétés

Soient A et B deux matrices et λ un scalaire.

1. $(A^t)^t = A$
2. Si $(A+B)$ existe, alors $(A+B)^t = A^t + B^t$
3. $(\lambda A)^t = \lambda A^t$
4. Si $A.B$ existe, $(A.B)^{t=B^t.A^t}$

Definition 1.11 *Matrice symétrique-antisymétrique Soit A une matrice carrée d'ordre n et soit A^t sa transposée. on dit que A est symétrique et si $A^t = A$ et antisymétrique si $A^t = -A$*

Exemple 1.22 $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$
A est symétrique et B est antisymétrique.

Definition 1.12 *Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$. La somme de tous les coefficients de la diagonale principale de A s'appelle la trace de la matrice A et est notée $tr(A)$ telle-que*

$$tr(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$$

Exemple 1.23 $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$
$tr(A) = 5$ et $tr(B) = 0$.

Propriétés

Soient A, B deux matrices carrées d'ordre n. On a :

1. $tr(A^t) = tr(A)$
2. $tr(\lambda A) = \lambda tr(A)$
3. $tr(A + B) + tr(A) + tr(B)$
4. $tr(A.B) = tr(B.A)$
5. En générale $tr(A.B) \neq tr(A).tr(B)$

1.1.5 Matrice inversible

Definition 1.13 *Une matrice carrée A d'ordre n est dite inversible s'il existe une matrice B d'ordre n qui satisfait :*

$$A.B = B.A = I_n \tag{1.1}$$

La matrice B qui satisfait (1.1) s'appelle la matrice inverse de A et elle est notée A^{-1}

Remarque 1.2 *Si $A \in M_n(\mathbb{K})$ est inversible alors : $A^{-1}.A = A.A^{-1} = I_n$*

Exercise 1.2 *Soit A une matrice carrée d'ordre n telle-que $A^2 + \sqrt{5}A = I_n$.*
Montrer que A est inversible et donner l'expression de cet inverse.

Solution

$$\begin{aligned} A^2 + \sqrt{5}A = I_n &\iff A(A + \sqrt{5}I_n) = I_n \\ &\iff (A + \sqrt{5}I_n)A = I_n \end{aligned}$$

donc A est inversible d'inverse $A^{-1} = (A + \sqrt{5}I_n)$ car $(A + \sqrt{5}I_n)$ satisfait (1.1).

Exercise 1.3

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Étudier si A est inversible.

Solution
$dimA = 2 \times 2$ **donc** A **est inversible s'il existe une matrice** B **d'ordr** 2 **de sorte que**

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

$$A.B = B.A = I_2 \iff A.B = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

$$\begin{pmatrix} -4b_{21} & -4b_{22} \\ 4b_{11} + b_{21} & 4b_{12} + b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En utilisant l'égalité de deux matrices on trouve :

$$\begin{cases} -4b_{21} = 1 \\ -4b_{22} = 0 \\ 4b_{11} + b_{21} = 0 \\ 4b_{12} + b_{22} = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} b_{21} = -\dfrac{1}{4} \\ b_{22} = 0 \\ b_{11} + b_{21} = 0 \\ b_{12} = \dfrac{1}{4} \\ b_{11} = \dfrac{1}{16} \end{cases} \implies A^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{16} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}.$$

Proposition 1.2 ***La matrice inverse lorsqu'elle existe on a :***

1. ***Si*** A^{-1} ***existe alors*** $(A^{-1})^{-1} = A$
2. ***Si*** A^{-1} ***existe alors*** $(A^t)^{-1}$ ***existe aussi et on a*** $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$
3. ***Soient*** A, B, C ***trois matrices carrées d'ordres*** n.
   — ***Si*** A ***et*** B ***sont inversibles, alors*** AB ***est inversible et ona*** $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
   — ***Si*** A ***est inversible alors*** $(AB = AC \implies B = C)$.

1.2 Déterminants

Á toute matrice carrée A **d'ordre** n **correspond une valeur appelée déterminant de** A **que l'on note** $det(A)$ **ou** $|A|$.

1.2.1 Calcul du déterminant

1. **Cas d'une matrice d'ordre** 1
   Soit $A = a_{11}$, **on a** $det(A) = a_{11}$
2. **Cas d'une matrice d'ordre** 2
   Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ **le déterminant de** A **est le nombre réel calculer comme suit :**
   $det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$

Exemple 1.24 $\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -4 - 6 = -10$

3. **Cas d'une matrice d'ordre** 3
   Règle de Sarrus
   La règle de Sarrus est valable pour le calcule des déterminants des la matrices d'ordre 3 **uniquement. On considère la matrice** $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$
   La règle de Sarrus est décrite comme suit : pour calculer $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$
   (a) **on réécrit les deux première colonne de la matrice** A
   $$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$
   (b) **on trace une ligne droite joignant** a_{11}, a_{22}, a_{33} **et puis deux autres lignes droites parallèle à celle ci joignant les autres coefficients**
   (c) **on reprend la même technique avec** a_{31}, a_{22}, a_{13}
   (d) **on calcule le produit des coefficients qui se trouvent sur une même ligne**
   (e) **on calcule les sommes** S_1 **et** S_2 **telles-que :** $S_1 = a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{12}.a_{23}.a_{31} + a_{13}, a_{21}, a_{23}$ **et** $S_2 = a_{31}.a_{22}.a_{13} + a_{32}.a_{23}.a_{11} + a_{33}.a_{21}.a_{12}$
   (f) $det(A) = S_1 - S_2$

   Exemple 1.25 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

   $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = (-10) - (6) = -16$

   $$\begin{matrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 1 & 4 \end{matrix}$$

   $S_1 = 2 + 0 - 12 = -10, \quad S_2 = 6 + 0 + 0 = 6$

4. **La méthode générale**
   La méthode générale pour calculer le déterminant d'une matrice carrée $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ **est la suivante :**
   — A_{ij} **désigne la matrice obtenue quand on supprime la** $i^{\text{ème}}$ **ligne et la** $j^{\text{ème}}$ **colonne simultanément. En développant selon une ligne** i **quelconque le déterminant est le nombre deonné par la relation suivante :**

$$det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \, a_{ij} \, det(A_{ij}), \quad 1 \leq i \leq n$$

De la même la manière on peut développer suivant une colonne j et on :

$$det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j}\, a_{ij}\, det(A_{ij}), \;\; 1 \leq j \leq n$$

— **Le nombre $det(A_{ij})$ s'appelle le mineur d'ordre $(n-1)$ de la matrice A**

— $(-1)^{i+j} det(A_{ij})$ **s'appelle le cofacteur de A relatif au coefficient a_{ij}.**

Exemple 1.26 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$

$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$ ***sont les mineurs de A***

$+\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, +\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$

sont les cofacteurs de A relatifs aux coefficients respectifs a_{11}, a_{12}, a_{13}.

— **Application**

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = (1) \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - (2) \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + (3) \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = (45-48) - 2(36-42) + (32-35) = 6$$

5. **Cas particuliers**

   Proposition 1.3 ***Le déterminant d'une matrice A d'ordre n, diagonale ou triangulaire supérieure ou triangulaire inférieure est le produit des éléments de la diagonale principale. Autrement dit,*** $det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} \cdots a_{nn}$

   Exemple 1.27 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (1)(2)(-2) = -4$

6. **On en déduit immédiatement que :** $det(I_n) = 1, det(0_n) = 0.$

Propriétés du déterminant

Theoreme 1.1 ***Soient A, B deux matrice d'ordre n et λ un scalaire.***

— $det(AB) = det(A)det(B)$

— $det(\lambda A) = \lambda^n det(A)$

— $det(A^t) = det(A)$

— $det(A) = 0$ ***si A possède une colonne ou une ligne nulle***

— $det(A) = 0$ ***si A possède deux colonnes ou deux lignes égales***

— $det(A) = 0$ ***si dans A, une ligne (ou une colonne) est une combinaison linéaire des autres ligne(les autres colonnes)***

— $det(A)$ ***ne change pas de valeur si on ajoute à une ligne (ou à une colonne) une combinaison linéaire des autres lignes (ou des autres colonnes)***

— $det(A)$ ***change de signe lorsqu'on éfectue un nombre impaire (par exemple, on permute deux lignes uniquement ou deux colonnes uniquement)***

Exemples 1.1

$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$, ***car la colonne*** $C_2 = 2C_3 - C_1$ ***une colonne est une combinaison linéaire des autres colonnes***

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$ ***la multiplication par*** -1 ***vient de la permutation entre deux colonnes : nombre impair de permutations***

1.2.2 Application du déterminant pour le calcul des matrices inverses

Theoreme 1.2 ***Une matrice carrée*** A ***d'ordre*** n ***est inversible si et seulement si*** $det(A) \neq 0$.

Remarque 1.3 ***La matrice identité*** I_n ***est inversible et son inverse*** $I_n^{-1} = I_n$.
La matrice nulle 0_n ***n'est pas inversible.***

Exemple 1.28 ***Trouver la valeur du réel*** α ***pour que*** $A = \begin{pmatrix} \pi & 3 \\ -1 & 2\alpha \end{pmatrix}$ ***soit inversible.***

$det(A) = \begin{vmatrix} \pi & 3 \\ -1 & 2\alpha \end{vmatrix} = 2\alpha\pi + 3$

$$\begin{aligned} A \textbf{\textit{ est inversible}} \quad &\Longleftrightarrow \quad 2\alpha\pi + 3 \neq 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \alpha \neq \frac{-3}{2\pi} \\ &\Longleftrightarrow \quad \alpha \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{-3}{2\pi} \right\} \end{aligned}$$

Proposition 1.4 ***Soit*** A ***une matrice carrée d'ordre*** n. ***Si*** A ***est inversible alors***

$$det\left[(A)^{-1}\right] = \frac{1}{det(A)}$$

Definition 1.14 ***Soit*** A ***une matrice carrée d'ordre*** n. ***On appelle matrice des cofacteurs de*** A ***ou comatrice de*** A ***la matrice*** $com(A) = C = (c_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$, ***où***

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} det(A_{ij}).$$

On rappelle que A_{ij} est la matrice obtenue quand on supprime la ligne i et la colonne j. La comatrice de A est un outil principal pour déterminer la matrice inverse de A lorsque elle existe.

Theoreme 1.3 ***Soit*** A ***une matrice carré d'ordre*** n. ***Si*** A ***est inversible alors***

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} (com(A))^t$$

Exemple 1.29 ***Montrer que*** $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ***est inversible et déterminer sa matrice inverse.***

$det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ ***donc*** A ***est inversible et on a :***

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)}(com(A))^t = -(com(A))^t.$$

On calcule la comatrice de A.

$com(A) = C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{31} & c_{33} \end{pmatrix}$

..........................la première ligne..

$c_{11} = (-1)^{1+1} det(A_{11}) = + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -3,$

$c_{12} = (-1)^{1+2} det(A_{12}) = - \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 6,$

$c_{13} = (-1)^{1+3} det(A_{13}) = + \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5,$

..........................la deuxième ligne ....

$c_{21} = (-1)^{2+1} det(A_{21}) = - \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1,$

$c_{22} = (-1)^{2+2} det(A_{22}) = + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2,$

$c_{23} = (-1)^{2+3} det(A_{23}) = - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2,$

..........................la troisième ligne ....

$c_{31} = (-1)^{3+1} det(A_{31}) = + \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 2,$

$c_{32} = (-1)^{3+2} det(A_{32}) = - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -5,$

$c_{33} = (-1)^{3+3} det(A_{33}) = + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4,$

...................la matrice inverse ....

$C = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -5 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & -5 & 4 \end{pmatrix}$ ***donc*** $C^t = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & -5 \\ -5 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ ***et*** $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -6 & -2 & 5 \\ 5 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

1.3 Exercices corrigés

Exercise 1.4 ***Soit*** $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. ***Calculer*** $2A - A^2$
2. ***En déduire*** A^{-1}

Solution :
1) On calcule $-A^2$
$A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} -3 & -4 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, **et alors** $-A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ -4 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
on calcule $2A$
$2A = 2 \times A = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 0 \\ 4 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
par suite : $2A - A^2 = 2A + (-A^2) = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 0 \\ 4 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ -4 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$
2) De la première question on a :

$$\begin{aligned} 2A - A^2 = I_3 &\iff A(2I_3 - A) = I_3 \\ &\iff (2I_3 - A)A = I_3 \end{aligned}$$

ce qui signifie qu'il existe une matrice $B = 2I_3 - A = 2I_3 + (-A)$ **telle-que** $AB = BA = I_3$, **donc** A **est inversible et son inverse** $A^{-1} = B$
$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercise 1.5 ***Soit*** $A = \begin{pmatrix} 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$

1. ***Montrer que*** A ***est inversible pour toutes les valeurs de*** α.
2. ***Calculer*** A^t ***et*** AA^t, A^tA.
3. ***En déduire*** A^{-1}.

Solution :
A **est inversible** $\iff det(A) \neq 0$
$det(A) = \begin{vmatrix} 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ 0 & 0 \end{vmatrix} - \cos\alpha \begin{vmatrix} 0 & \cos\alpha \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + (-\sin\alpha) \begin{vmatrix} 0 & \sin\alpha \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$
$det(A) = (\cos\alpha)^2 + (\sin\alpha)^2 = 1 \neq 0, \forall \alpha \in \mathbb{R}$.
Donc A **est inversible pour toutes les valeurs de** α.

2) $A^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \end{pmatrix}$

$$AA^t = \begin{pmatrix} 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

$$A^tA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

3) $AA^t = A^tA = I_3 \Longleftrightarrow A^{-1} = A^t.$

Exercise 1.6 ***On considère les matrices*** $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$

On pose $A = I - M, \quad B = I + M + M^2.$

1. ***Calculer A,B, AB, BA.***
2. ***En déduire que*** A ***est inversible et donner son inverse.***
3. ***Calculer l'inverse de*** A ***par la méthode des cofacteurs.***

Chapitre 2

Systèmes d'équations linéaires

2.1 Généralités sur les syst'emes linéaires

2.1.1 Définitions

Definition 2.1 ***Soit*** $p \geq 1$ ***un entier naturel et*** $a_i,\ 1 \leq i \leq p$ ***des scalaires dans un corps*** $\mathbb{K}$. ***On appelle équation linéaire à*** p ***inconnues toute équation de la forme*** $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_px_p = \lambda$ ***où*** $a_1, a_2, a_2, \cdots, a_p$, ***non tous nuls ; sont les coefficients de l'équation et*** $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_p$ ***sont les inconnues de l'équation,*** λ ***est le second membre de léquation.***

Exemple 2.1 ***L'équation*** $-x + \sqrt{2}y - \frac{3}{2}z = \frac{7}{8}$ ***est une équation linéaire à trois inconnues*** x, y, z ***et*** $-1, \sqrt{2}, -\frac{3}{2}$ ***sont les coefficients,*** $\frac{7}{8}$ ***le second membre.***

Supposons qu'on a n équations linaires à p inconnues,($n \in \mathbb{N}$). On a la définition suivante :

Definition 2.2 ***Soient*** n, p ***deux entiers naturels supérieurs aux egaux à*** 1. ***On appelle système linéaire*** (S) ***à*** n ***équations et*** p ***inconnues*** $x_1, x_2, \cdots, x_p$ ***tout système de la forme :***

$$(S) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1p}x_p = \lambda_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2p}x_p = \lambda_2 \\ \vdots \quad + \quad \vdots \quad + \quad \vdots \qquad \cdots + \vdots \quad = \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{np}x_p = \lambda_n \end{cases}$$

où les $(a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}}$; ***non tous nuls ; sont les coefficients du système et les*** $(\lambda_i)_{1\leq i\leq n}$ ***représente le second membre du système. Les*** a_{ij} ***et*** λ_i ***sont des éléments fixés dans le corps*** $\mathbb{K}(\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C})$. ***Autrement dit, le système*** (S) ***c'est la donnée de*** n ***équations linéaires ayant toutes les mêmes inconnues*** $x_1, x_2, \cdots, x_p$.

Definition 2.3 ***Le système homogène associé au système precédent*** (S) ***est le système*** (S_0) ***obtenu quand tous les*** $(\lambda_i)_{1\leq i\leq n}$ ***sont tous nuls.***

$$(S_0)\quad\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+\cdots+a_{1p}x_p=0\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+\cdots+a_{2p}x_p=0\\ \vdots\quad+\quad\vdots\quad+\quad\vdots\qquad\cdots+\vdots\quad=\vdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+a_{n3}x_3+\cdots+a_{np}x_p=0\end{cases}$$

Exemple 2.2 ***Soit*** (S) ***le système de trois équations à trois inconnues telles-que***

$$(S)\quad\begin{cases}x+y+z=\pi^2\\ x-2y+3z=1\\ \pi x+\sqrt{2}y-z=-2\end{cases}$$

Le système

$$(S_0)\quad\begin{cases}x+y+z=0\\ x-2y+3z=0\\ \pi x+\sqrt{2}y-z=0\end{cases}$$

est le système homogène associé à (S).

Definition 2.4 ***Soit*** (S) ***un système de*** n ***équations à*** p ***inconnues*** $x_1, x_2, \cdots, x_p$. ***Une solution du système*** (S) ***est un*** $p-$***uplet*** $(x_1, x_2, \cdots, x_p)$ ***de nombres de*** $\mathbb{K}$ ***qui satisfont simultanément les*** n ***equations du système. Résoudre le système, c'est déterminer l'ensemble de toutes les solutions possibles. Deux systèmes linéaires sont dits équivalents s'ils possedent les mêmes solutions.***

Exemple 2.3 $X=\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$ ***est une solution du système*** (S) $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=2\\ 2x_1+3x_2+x_3=3\\ x_1-x_2-2x_3=-6\end{cases}$

car $\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$ ***vérifie les trois équations simultanément :*** $\begin{cases}(-1)+(1)+(2)=2\\ 2(-1)+3(1)+(2)=3\\ (-1)-(1)-2(2)=-6\end{cases}$

Proposition 2.1 ***(Solutions d'un système d'équations linéaires)***
Tout système d'équations linéaires (S)

- ***Soit qu'il n'a aucune solution***
- ***Soit qu'il a une infinité de solution***
- ***Soit qu'il a une solution unique***

2.1.2 Représentation matricielle d'un système linéaire

On considère le système

$$(S)\quad\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+\cdots+a_{1p}x_p=\lambda_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+\cdots+a_{2p}x_p=\lambda_2\\ \vdots\quad+\quad\vdots\quad+\quad\vdots\qquad\cdots+\vdots\quad=\vdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+a_{n3}x_3+\cdots+a_{np}x_p=\lambda_n\end{cases}$$

1. **On introduit les tableaux de nombres suivants :**
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$
   - A **est une matrice à** n **ligne et** p **colonne, à coefficients dans** $\mathbb{K}$.
   - X **est une matrice colonne à** p **lignes.**
   - B **est une matrice colonne à** n **lignes**
2. **On définit le produit matricielle** $AX = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1p}x_p \\ \vdots + \vdots + \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{np}x_p \end{pmatrix}$,
   résoudre le système (S) **revient à résoudre l'équation matricielle** $AX = B$ **d'inconnue** X, **les matrices** A, B **étant fixées.**

Exemple 2.4 ***On considère le système*** (S) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 - 3x_3 + x_4 = -1 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$
L'écriture matricielle de ce système est $AX = B$ ***telle-que***
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & +1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2.2 Méthodes de resolution

Dans cette section on s'intèresse au cas $n = p$, **et on considère le système suivant :**
$$(S) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1p}x_n = \lambda_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2p}x_n = \lambda_2 \\ \vdots \quad + \quad \vdots \quad + \quad \vdots \qquad \cdots + \vdots \quad = \quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{np}x_n = \lambda_n \end{cases}$$
L'écriture matricielle de ce système est $AX = B$ **avec** A **une matrice carrée. L'existence de solutions pour les système** (S) **dépend de la valeur de** $det(A)$.

Theoreme 2.1 ***Le système*** (S) ***admet une solution unique si, et seulement si*** $det(A) \neq 0$.

Remarque 2.1 ***Si*** $det(A) = 0$, ***on dit que le système*** (S) ***soit qu'il n'a pas de solutions ou qu'il a une infinité de solutions.***

Exemples 2.1 ***1. On considère le système*** (S) $\begin{cases} x - y = 2 \\ 2x + 3y = -1 \end{cases}$

La forme matricielle de ce système est $AX = B$ ***où***
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$det(A) = 3 + 2 = 5 \neq 0$, ***donc le système*** (S) ***admet une solution unique***

2. ***On considère le système*** (S) $\begin{cases} 5x + 2y = 2 \\ 10x + 4y = -1 \end{cases}$

La forme matricielle de ce système est $AX = B$, ***où***

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 10 & 4 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$det(A) = 20 - 20 = 0$, ***donc le système*** (S) ***soit qu'il n'admet pas de solution soit qu' il a une infinités de solutions.***

2.2.1 Méthode de la matrice inverse

Soit (S) **un système de** n **équations à** n **inconnues** $x_1, x_2, \cdots, x_n$ **dont l'écriture matricielle est** $AX = B$, **où** A **est une matrice carrée d'ordre** n.
Si $det(A) \neq 0$ **alors le système** (S) **admet une solution unique** X **qui satisfait l'équation matricielle** $AX = B$. **D'autre part, si** $det(A) \neq 0$ **la matrice** A **est inversible et son inverse** A^{-1} **vérifie** $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$. **Par suite on a :**

$$\begin{aligned} AX = B &\iff A^{-1}AX = A^{-1}B \\ &\iff I_nX = A^{-1}B \\ &\iff X = A^{-1}B \end{aligned}$$

Exemple 2.5 ***Utiliser la méthode de la matrice inverse pour calculer la solution (lorsqu'elle existe) du système suivant :*** (S) $\begin{cases} x + y = 2 \\ y + z = -1 \\ x + z = 1 \end{cases}$

La forme matricielle de ce système est $AX = B$, ***où***

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, ***donc le système*** (S) ***admet une solution unique*** X ***telle-que*** $X = A^{-1}B$ ***avec*** $A^{-1} = \dfrac{1}{det(A)}(com(A))^t = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

donc $X = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

L'ensemble des solution est $\mathbb{S} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$, ***autremnt dit,*** $x = 2, y = 0, z = -1$.

2.2.2 Méthode de Cramer

Soit A une matrice carrée d'ordre n.

Theoreme 2.2 ***(Formule de Cramer) Si*** $det(A) \neq 0$ ***alors l'unique solution de l'équation*** $AX = B$ ***est donnée par*** $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$***, où***

$$x_i = \frac{det(A_i)}{det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{det(A)}, \qquad \textbf{\textit{pour}} \ 1 \leq i \leq n.$$

La matrice A_i est obtenue en remplaçant la $i^{\text{ème}}$ colonne de A par la matrice colonne B qui représente le second membre de l'équation $AX = B$.

Exemple 2.6 ***Résoudre par la méthode de Cramer le système suivant :***

$$(S) \begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 7 \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 3 \\ 3x_1 - 4x_2 - 6x_3 = 5 \end{cases}$$

Écriture matricielle $AX = B$ ***avec***

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 2 \\ 1 & 2 & -4 \\ 3 & -4 & -6 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix},$$

$det(A) = -46 \neq 0$, ***donc le système*** (S) ***admet une solution unique*** $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ ***telles-que :***

$$x_1 = \frac{det(A_{x_1})}{det(A)} = -\frac{1}{46} \begin{vmatrix} 7 & -5 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \\ 5 & -4 & -6 \end{vmatrix} = 5$$

$$x_2 = \frac{det(A_{x_2})}{det(A)} = -\frac{1}{46} \begin{vmatrix} 2 & 7 & 2 \\ 1 & 3 & -4 \\ 3 & 5 & -6 \end{vmatrix} = 1$$

$$x_3 = \frac{det(A_{x_3})}{det(A)} = -\frac{1}{46} \begin{vmatrix} 2 & -5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & -4 & 5 \end{vmatrix} = 1$$

l'ensemble des solutions $\mathbb{S} = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

2.3 Exercices corrigés

Exercise 2.1 ***Déterminer si le système suivant admet des solutions***

$$(S)\begin{cases} 3x+y-z=1 \\ x-2y+2z=m, \quad m\in\mathbb{R} \\ x+y-z=1 \end{cases},$$

Solution :
1) **Écriture matricielle du système**

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & +2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 1 \\ m \\ 1 \end{pmatrix},$$

2) **Calcule du déterminant**
$det(A)=0$, **donc le système** (S) **soit qu'il n'a pas de solutions soit il admet une infinité de solutions.**

Exercise 2.2 ***Résoudre le système*** $(S)\begin{cases} x+2y+az=6a+4 \\ x+ay+2z=b \\ ax+2y+z=b \end{cases}, \ (a,b)\in\mathbb{R}^2.$

Solution :
1) Écriture matricielle du système

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & a & 2 \\ a & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 6a+4 \\ b \\ b \end{pmatrix},$$

2) Calcule du déterminant
$det(A)=\begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & a & 2 \\ a & 2 & 1 \end{vmatrix}=7a-a^3+6,$
L'existence de solutions pour le système (S) **dépend du déterminant de la matrice** A **s'il est nul ou non nul. Pour cela on cherche les racines du** $7a-a^3+6$.

- $7a-a^3+6=(a-1)(a+3)(a+2)$
- **Si** $a=1$ **ou** $a=-3$ **ou** $a=2$, **le système** (S) **soit qu'il n'a pas de solutions soit il a une infinité de solutions**
- **Si** $a\in\mathbb{R}-\{1,-3,2\}$, **le système** (S) **admet une solution unique** $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$,

  telle-que

$$x=\frac{det(A_x)}{det(A)}=\frac{\begin{vmatrix} 6a+4 & 2 & a \\ b & a & 2 \\ b & 2 & 1 \end{vmatrix}}{(a-1)(a+3)(a+2)}=\frac{6a^2-20a+2b+2ab-a^2b}{(a-1)(a+3)(a+2)}$$

$$y = \frac{det(A_y)}{det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 6a+4 & a \\ 1 & b & 2 \\ a & b & 1 \end{vmatrix}}{(a-1)(a+3)(a+2)} = \frac{12a^2+2a-ab-4}{(a-1)(a+3)(a+2)}$$

$$z = \frac{det(A_z}{det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 6a+4 \\ 1 & a & b \\ a & 2 & b \end{vmatrix}}{(a-1)(a+3)(a+2)} = \frac{3ab-4b+12a+8-4a^2-6a^3}{(a-1)(a+3)(a+2)}$$

Exercise 2.3 ***Résoudre le système*** $(S)\begin{cases} 2x^2-3y^2=-67 \\ 4x^2y^2=11 \end{cases}$

Solution :

1) On pase $\alpha = x^2, \beta = y^2$ **et on obtient le système** $(S)\begin{cases} 2\alpha-3\beta=-67 \\ 4\alpha-\beta=11 \end{cases}$

2) Écriture matricielle du système

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -67 \\ 11 \end{pmatrix}$$

3) Calcule du déterminant

$det(A) = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -2+12 = 10 \neq 0$, **donc le système** (S) **admet une solution unique** $X = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$,

4) Calcul de la solution

$\alpha = \dfrac{det(A_\alpha)}{det(A)} = \dfrac{\begin{vmatrix} -67 & -3 \\ 11 & -1 \end{vmatrix}}{10} = \dfrac{100}{10} = 10,$

$\beta = \dfrac{det(A_\beta)}{det(A)} = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & -67 \\ 4 & 11 \end{vmatrix}}{10} = \dfrac{290}{10} = 29,$

5) On cherche les solutions du système (S).

$\alpha = 10 \Longleftrightarrow x = \pm\sqrt{10}$, **et** $\beta = 29 \Longleftrightarrow y = \pm\sqrt{10}$. **Donc les solution de** (S) **sont :**

$$\mathbb{S} = \left\{(\sqrt{10}, \sqrt{29}), (\sqrt{10}, -\sqrt{29}), (-\sqrt{10}, \sqrt{29}), (-\sqrt{10}, -\sqrt{29})\right\}$$

Chapitre 3

Intégrales

3.1 Intégrale indéfinie

3.1.1 Primitive d'une fonction continue

Exemple 3.1 ***(Exemple introductif)***
On considère les fonctions f, F ***définies sur*** $]0\ +\infty[$ ***par*** $F(x) = \ln(x) + \frac{1}{2}x^2$ ***et*** $f(x) = \frac{1}{x} + x$. ***On peut facilement voir que les deux fonctions sont continues. D'autre part,*** F ***est dérivable sur*** $]0\ +\infty[$ ***et*** $\forall x \in]0\ +\infty[\,, F'(x) = f(x)$. ***Une telle fonction*** F ***s'appelle primitive de*** f ***sur*** I.

Definition 3.1 ***Soient*** $f, F : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, ***deux fonctions continues sur*** I. ***On dit que*** F ***est une primitive de*** f ***si*** F ***est dérivable sur*** I ***et si l'on a*** $F'(x) = f(x)$ ***pour tout*** $x \in I$.

Exemple 3.2 ***La fonction*** $F:\ x \longmapsto F(x) = \frac{1}{2}e^{2x+1}$ ***est une primitive de la fonction*** $f : x \longmapsto f(x) = e^{2x+1}$ ***car*** $F'(x) = e^{2x+1}$.

Proposition 3.1 ***Soit*** f ***une fonction continue sur*** $I \subset \mathbb{R}$.

1. ***Si*** F ***est une primitive de*** f ***alors*** $F + k$ ***est une primitive de*** f ***où*** k ***est une fonction constante sur*** I.
2. ***Si*** F, G ***sont deux primitives de*** f ***alors*** $F - G$ ***est constante. Autrement dit, si*** F ***est une primitive de*** f ***alors toute autre primitive*** G ***de*** f ***est de la forme*** $G = F + k$ ***où*** k ***est constante.***
3. ***Si*** F ***est une primitive de*** f ***et*** $x_0 \in I$ ***alors il existe une unique primitive*** G ***de*** f ***qui satisfait*** $G(x_0) = k$

Definition 3.2 ***L'ensemble de toutes les primitives d'une fonction continue*** f ***sur un intervalle*** I ***de*** $\mathbb{R}$ ***s'appelle intégrale indéfinie de*** f ***sur*** I. ***On note cet ensemble*** $\int f(x)\,dx$

Remarques 3.1 1. ***En général, si*** $F'(x) = f(x)$ ***alors*** $\int f(x)\,dx = F(x) + k, \quad k \in \mathbb{R}$.

2. ***Le rôle du** dx **est d'indiquer qu'on cherche les primitives d'une fonction de la variable** x. **Si on cherche les primitives de la fonction** h **de la variable** t **on écrit** $\int h(t)\,dt$.*
3. ***L'intégration ou bien la recherche des primitives de** f **est en faite l'opération inverse de la dérivation.***

Exemple 3.3 ***D'après les exemples précédents on a***

$$\int e^{2x+1}\,dx = \frac{1}{2}e^{2x+1} + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln(|x|) + k, \qquad k \in \mathbb{R}.$$

3.1.2 Quelques intégrales indéfinies immédiates

$\int 0\,dx = k, \quad k \in \mathbb{R}$	$\int \frac{1}{\cos^2(x)}\,dx = \tan(x) + k$
$\int a\,dx = ax + k, \quad k \in \mathbb{R}$	$\int \frac{1}{\sin^2(x)}\,dx = -\cot(x) + k$
$\int x^m\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + k, \quad k \in \mathbb{R}, m \neq -1$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin(x) + k$
$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln(\|x\|) + k, \quad k \in \mathbb{R}$	$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arccos(x) + k$
$\int e^x\,dx = e^x + k, \quad k \in \mathbb{R}$	$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan(x) + k$
$\int \sin(x)\,dx = -\cos(x) + k, \quad k \in \mathbb{R}$	$\int \frac{-1}{1+x^2}\,dx = \mathbf{arccotan}(x) + k$
$\int \cos(x)\,dx = \sin(x) + k, \quad k \in \mathbb{R}$	$k \in \mathbb{R}$

propriétés des intégrales indéfinies

Soient f, g **deux fonctions continues sur un intervalle** I **et soit** F, G **des primitives de** f, **et** g **respectivement.**

— $\int (\lambda f(x))\,dx = \lambda \int f(x)\,dx, \quad \lambda \in \mathbb{R}$

Exemple 3.4 $\int (-5x^2)\,dx = -5\int x^2\,dx$

— $\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

Exemple 3.5 $\int (-5x^2 + \frac{1}{x})\,dx = \int -5x^2\,dx + \int \frac{1}{x}\,dx$

Remarque 3.1 ***Dans le cas général***

$$\int (f(x) \times g(x))\,dx \neq \int f(x)\,dx \times \int g(x)\,dx$$

La question qu'on se pose est : comment calculer une primitive d'un produit de deux fonctions ?

3.1.3 Intégration par parties

C'est une technique qui provient de la dérivation d'un produit de deux fonctions. Elle est utilisée pour calculer les primitives de certaines fonctions qui sont écrites sous forme de produit de fonctions.

Proposition 3.2 *Soient f, g deux fonctions continues et dérivables sur un intervalles I de $\mathbb{R}$ et telles-que $f^{'}$ et $g^{'}$soient continues sur I. Alors*

$$\int \left(f(x) \times g^{'}(x)\right)\, dx = (f(x)g(x)) - \int \left(f^{'}(x) \times g(x)\right)\, dx$$

Exemple 3.6 *Calculer* $\int xe^{x}\, dx$
En utilisant l'intégration par partie on a :
On pose $u = x$, *ce qui implique que* $u'(x) = 1$,
et on pose $v^{'}(x) = e^{x}$, *ce qui implique que* $v(x) = e^{x}$ *(on prend la primitive de* $x \to e^{x}$ *pour* $k = 0$*)*
$\int xe^{x}\, dx = (xe^{x}) - \int e^{x}\, dx = xe^{x} - e^{x} + k = (x-1)\, e^{x} + k, \quad k \in \mathbb{R}.$

Bien que l'intégration par partie est un outil important pour calculer les primitives de produit de fonctions, mais il ne permet pas de calculer tous les types de produit de fonction. Une autre technique d'intégration très répondue c'est l'inégration par changement de la variable d'intégration.

3.1.4 Intégration par changement de variable(substitution)

Les formules d'intégration suivante découle immédiatement des règles de dérivation en utilisant un changement de variable simple.
On pose $y = f(x)$ il en découle que $\dfrac{dy}{dx} = f^{'}(x)$, d'ou $f^{'}(x)\, dx = dy$.

$$\boxed{\begin{array}{l}
\int (f(x))^{n+1} f^{'}(x)\, dx = \dfrac{(f(x))^{n+1}}{n+1} + k, \quad k \in \mathbb{R}. \\
\int f^{'}(x) e^{f(x)} dx = e^{f(x)} + k, \quad k \in \mathbb{R}. \\
\int \dfrac{f^{'}(x)}{f(x)} = \ln|f(x)| + k, \quad k \in \mathbb{R}. \\
\int f^{'}(x) \sin(f(x))\, dx = -\cos(f(x)) + k, \quad k \in \mathbb{R}. \\
\int f^{'}(x) \cos(f(x))\, dx = -\sin(f(x)) + k, \quad k \in \mathbb{R}. \\
\int \dfrac{f^{'}(x)}{1 + f^{2}(x)} = \arctan(f(x)) + k, \quad k \in \mathbb{R}. \\
\int \dfrac{f^{'}(x)}{\sqrt{1 - f^{2}(x)}} = \arcsin(f(x)) + k, \quad k \in \mathbb{R}. \\
\int \dfrac{-f^{'}(x)}{\sqrt{1 - f^{2}(x)}} = \arccos(f(x)) + k, \quad k \in \mathbb{R}.
\end{array}}$$

Exercise 3.1 *Prouver les résultats du tableau ci dessus.*

Exemples 3.1 ***1)*** $\int (2x+5)^3\,dx = \frac{1}{2}\int 2(2x+5)^3\,dx = \frac{1}{8}(2x+5)^4 + k, \quad k \in \mathbb{R}.$

2) $\int e^{3x+1}\,dx = \frac{1}{3}\int 3e^{3x+1}\,dx = \frac{1}{3}e^{3x+1} + k, \quad k \in \mathbb{R}.$

3) $\int \frac{2x}{1+(x)^2} = \arctan(x^2) + k, \quad k \in \mathbb{R}.$

4) $\int \frac{2x}{\sqrt{1-(x)^2}} = \arcsin(x^2) + k, \quad k \in \mathbb{R}.$

On peut généraliser ce résultat de la manière suivante

Proposition 3.3 ***Soit g une fonction continue sur $I \subset \mathbb{R}$ et G sa primitive sur I. et soit f une fonction dérivable sur I et f' sa dérivée.***

$$\int f'(x)g(f(x)) = G(f(x)) + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Preuve. On pose $u = f(x)$ donc $\frac{du}{dx} = f'(x)$, ce qui donne $du = f'(x)dx$.
Il en résulte que

$$\int f'(x)g(f(x))\,dx = \int g(u)\,du = G(u) + k = G(f(x)) + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

■

Exemple 3.7 ***Calculer***

$$\int x.(3x+4)^5\,dx$$

On pose $u = 3x+4$ ***donc*** $\frac{du}{dx} = 3$ ***par suite*** $dx = \frac{1}{2}du.$
D'autre part, $x = \frac{u-4}{3} = \frac{1}{3}u - \frac{4}{3}.$
Alors, on obtient

$$\begin{aligned} \int x.(3x+4)^5\,dx &= \frac{1}{3}\int (\frac{1}{3}u - \frac{4}{3})u^5\,du \\ &= \frac{1}{9}u^6 - \frac{4}{9}u^5 + k, \quad k \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Malheureusement, les règles précédentes ne sont pas toujours applicables directement. Dans certains cas on doit simplifier la fonction avant de calculer sa primitive. C'est le cas par exemple des fonctions rationnelles.

3.1.5 Intégration de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{ax^2+bx+c}$

On cherche à calculer les primitives de la fonction $x \mapsto \frac{1}{ax^2+bx+c}$, $a, b, c \in \mathbb{R}.$
Premier cas : Si $a = 0, b \neq 0, c \in \mathbb{R}$.

$$\int \frac{1}{bx+c}\,dx = \frac{1}{b}\int \frac{b}{bx+c}\,dx = \frac{1}{b}\ln|bx+c| + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Exemple 3.8 $\displaystyle\int \frac{1}{2x+1}\,dx = \frac{1}{2}\ln|2x+1| + k, \quad k \in \mathbb{R}.$

Deuxième cas : Si $a \neq 0, b, c \in \mathbb{R}$
$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\right].$
L'integrale à calculer dépend de Δ**, et on distingue trois situations.**

1. **Si** $\Delta < 0$ **on pose** $\Delta = -\rho,\ \rho > 0.$ **On aura donc :**

$$ax^2 + bx + c = \frac{\rho}{4a}\left[\left(\frac{2a}{\sqrt{\rho}}x + \frac{b}{\sqrt{\rho}}\right)^2 + 1\right]$$

d'ou

$$\frac{1}{ax^2 + bx + c} = \frac{4a}{\rho}\frac{1}{\left(\dfrac{2a}{\sqrt{\rho}}x + \dfrac{b}{\sqrt{\rho}}\right)^2 + 1}.$$

En utilisant le changement de variable $u = \dfrac{2a}{\sqrt{\rho}}x + \dfrac{b}{\sqrt{\rho}},$

on a, $dx = \dfrac{\sqrt{\rho}}{2a}\,du.$ **Par suite,**

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,dx &= \frac{2}{\sqrt{\rho}}\int \frac{1}{u^2+1}\,du\\ &= \frac{2}{\sqrt{\rho}}\arctan(u) + k, \quad k \in \mathbb{R},\\ &= \frac{2}{\sqrt{\rho}}\arctan\left(\frac{2a}{\sqrt{\rho}}x + \frac{b}{\sqrt{\rho}}\right) + k, \quad k \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Exemple 3.9 ***Calculer*** $\displaystyle\int \frac{1}{2x^2+x+5}\,dx.$
$\Delta = -39, \rho = 39, a = 2, u = \dfrac{4}{\sqrt{39}}x + \dfrac{1}{\sqrt{39}}$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{2x^2+x+5}\,dx &= \frac{2}{\sqrt{39}}\int \frac{1}{u^2+1}\,du,\\ &= \frac{2}{\sqrt{39}}\arctan(u) + k, \quad k \in \mathbb{R},\\ &= \frac{2}{\sqrt{39}}\arctan\left(\frac{4}{\sqrt{39}}x + \frac{1}{\sqrt{39}}\right) + k, \quad k \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

2. **Si** $\Delta = 0$, **on a,** $ax^2 + bx + c = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2.$

En utilisant le changement de variable $u = x + \frac{b}{2a}$, $du = dx$, **on aura**

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,dx &= \int \frac{1}{a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}\,dx, \\
&= \frac{1}{a}\int \frac{1}{u^2}\,du, \\
&= \frac{1}{a}\int u^{-2} \\
&= \frac{1}{a}\frac{u^{-2+1}}{-2+1} + k, \quad k \in \mathbb{R}, \\
&= -\frac{1}{a}\frac{1}{u} + k, \quad k \in \mathbb{R}, \\
&= -\frac{1}{a}\frac{1}{x+\frac{b}{2a}} + k, \quad k \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Exemple 3.10

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{3x^2+6x+3}\,dx &= \int \frac{1}{3\,(x-1)^2}\,dx, \\
&= \frac{1}{3}\int \frac{1}{u^2}\,du, \\
&= \frac{1}{3}\left(\frac{u^{-1}}{-1}\right) + k, \quad k \in \mathbb{R}, \\
&= \frac{-1}{3\,(x-1)} + k, \quad k \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

3. **Si** $\Delta > 0$, **on a,** $ax^2+bx+c = a\,(x-x_1)\,(x-x_2)\,.$
   On décompose la fraction $\frac{1}{ax^2+bx+c}$ **sous la forme**

$$\frac{1}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a}\left[\frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2}\right],$$

   où A, B **sont des réels qu'on déterminera après réduction au même dénominateur et identification.**

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,dx &= \int \frac{1}{a}\left[\frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2}\right]dx \\
&= \frac{1}{a}\left[\int \frac{A}{x-x_1}\,dx + \int \frac{B}{x-x_2}\,dx\right], \\
&= \frac{A}{a}\ln|x-x_1| + \frac{B}{a}\ln|x-x_2| + k, \quad k \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Exemple 3.11 ***Calculer*** $\int \frac{1}{x^2-5x+6}\,dx$
$x^2-5x+6 = (x-2)\,(x-3)\,.$ ***On en déduit que***

$$\int \frac{1}{x^2-5x+6}\,dx = A\ln|x-2| + B\ln|x-3| + k,$$

où** A **et** B **vérifient

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(x-2)(x-3)} &= \frac{A}{(x-2)}+\frac{B}{(x-3)}, \\
&= \frac{Ax-3A+Bx-2B}{x^2-5x+6}, \\
&= \frac{(A+B)x-3A-2B}{x^2-5x+6}, \\
&\Longrightarrow [(A+B)=0]\wedge[-3A-2B=1], \\
&\Longrightarrow [A=-B]\wedge[-3A-2B=1], \\
&\Longrightarrow [(A=-1)\wedge(B=1)],
\end{aligned}$$

$$\int \frac{1}{x^2-5x+6}\,dx = -\ln|x-2|+\ln|x-3|+k = \ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right|+k, \quad k\in\mathbb{R}.$$

3.1.6 Intégration de la fonction $x \longmapsto \dfrac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$, $a\neq 0, A\neq 0$

On commence par simplifier la fraction $\dfrac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$ **en faisant apparaitre la dérivée du dénominateur. On a :**

$$\begin{aligned}
Ax+B &= Ax+B+\frac{Ab}{2a}-\frac{Ab}{2a} \\
&= \left(Ax+\frac{Ab}{2a}\right)+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right) \\
&= \frac{A}{2a}(2ax+b)+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} &= \frac{\frac{A}{2a}(2ax+b)+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)}{ax^2+bx+c} \\
&= \frac{A}{2a}\frac{(2ax+b)}{ax^2+bx+c}+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\frac{1}{ax^2+bx+c}
\end{aligned}$$

$$\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}\,dx = \frac{A}{2a}\int\frac{(2ax+b)}{ax^2+bx+c}\,dx+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int\frac{1}{ax^2+bx+c}\,dx$$

En utilisant une intégration par partie et on posant,

$$I_1 = \int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,dx,$$

on a

$$\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}\,dx = \frac{A}{2a}\ln\left|ax^2+bx+c\right|+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)I_1+k, \quad k\in\mathbb{R}.$$

Remarque 3.2 ***On rappelle que I_1 se calcule par l'une des méthodes de la sous section précédente***

Exemple 3.12

$$\int \frac{3x+4}{2x^2-5x+6} = \frac{3}{4}\ln\left|2x^2-5x+6\right| + \frac{31}{4}\int \frac{1}{2x^2-5x+6}\,dx + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

3.1.7 Intégration de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, $a \neq 0$

1. **Si** $a > 0$ **et** $\Delta = 0$, **alors** $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}\left|x + \dfrac{b}{2a}\right|$,
   et on a alors :
   $$\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{a}}\int \frac{1}{\left|x+\frac{b}{2a}\right|}\,dx$$

2. **Si** $a > 0$ **et** $\Delta < 0$, **alors** $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}\sqrt{\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 + m^2}$, **où** $m^2 = \dfrac{-\Delta}{4a^2}$

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx &= \int \frac{1}{\sqrt{a}\sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+m^2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{a}}\int \frac{1}{\sqrt{u^2+m^2}}\,du \\
&= \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|u+\sqrt{u^2+m^2}\right| + k, \quad k \in \mathbb{R} \\
&= \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|\left(x+\frac{b}{2a}\right) + \sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}}\right| + k, \quad k \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

   Un calcul simple montre que la dérivée de la fonction $u \longmapsto \ln\left|u+\sqrt{u^2+m^2}\right|$ **est la fonction** $u \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{u^2+m^2}}$

   Exemple 3.13 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{5x^2+1}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|x+\sqrt{x^2+\frac{1}{5}}\right| + k, \quad k \in \mathbb{R}.$

3. **Si** $a > 0$ **et** $\Delta > 0$, **alors** $ax^2+bx+c > 0$ **sur** $]-\infty\, x_1[\bigcup]x_2\ +\infty[$, **et on a**

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}\sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - m^2}, \quad \textbf{où} \quad m^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx &= \int \frac{1}{\sqrt{a}\sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - m^2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{a}}\int \frac{1}{\sqrt{u^2-m^2}}\,du \\
&= \frac{1}{\sqrt{a}} \ln\left|u+\sqrt{u^2-m^2}\right| + k, \quad k\in\mathbb{R} \\
&= \frac{1}{\sqrt{a}} \ln\left|\left(x+\frac{b}{2a}\right) + \sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}}\right| + k, \quad k\in\mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Un calcul simple montre que la dérivée de la fonction $u \longmapsto \ln\left|u+\sqrt{u^2-m^2}\right|$ **est la fonction** $u \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{u^2-m^2}}$

Exemple 3.14 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{4x^2-1}}\,dx = \frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-\frac{1}{4}}\right| + k, \quad k\in\mathbb{R}.$

4. **Si** $a<0$ **et** $\Delta<0$ **alors** $\sqrt{ax^2+bx+c}$ **n'est pas définie.**
5. **Si** $a<0$ **et** $\Delta=0$ **alors** $\sqrt{ax^2+bx+c}$ **n'est pas définie sur** $\mathbb{R}-\left\{-\dfrac{b}{2a}\right\}$.
6. **Si** $a<0$ **et** $\Delta>0$ **alors** $\sqrt{ax^2+bx+c}$ **est définie sur** $]x_1\ x_2[$.
   D'autre part,

$$ax^2+bx+c = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right].$$

Dans ce cas on pose $a=-a^{'}$, $a^{'}>0$ **et on obtient**

$$\begin{aligned}
ax^2+bx+c &= -a^{'}\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] \\
&= a^{'}\left[-\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{\Delta}{4a^2}\right] \\
&= \frac{\Delta}{4a^{'}}\left[1-\left(\frac{2a^{'}}{\sqrt{\Delta}}x - \frac{b}{\sqrt{\Delta}}\right)^2\right].
\end{aligned}$$

En posant $u = \left(\frac{2a'}{\sqrt{\Delta}}x - \frac{b}{\sqrt{\Delta}}\right)$, **on a :** $dx = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a'}\,du$ **et par suite**

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx &= \frac{1}{\sqrt{a'}}\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du \\ &= \frac{1}{\sqrt{a'}}\arcsin(u) + k, \quad k \in \mathbb{R} \\ &= \frac{1}{\sqrt{a'}}\arcsin\left(\frac{2a'}{\sqrt{\Delta}}x - \frac{b}{\sqrt{\Delta}}\right) + k, \quad k \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Exemple 3.15 $\int \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx = \frac{1}{2}\arcsin(2x) + k, \quad k \in \mathbb{R}$

3.1.8 Techniques de décomposition d'une fraction en éléments simples

Dans ce qui suit, on cherche à intégrer une fraction de la forme $\frac{P(x)}{Q(x)}$, **où** $P(x)$ **et** $Q(x)$ **sont des polynômes de degrés respectives** n **et** $m\,(n,m \in \mathbb{N})$, **avec** $Q(x)$ **un polynôme factorisable. Pour cela on commence d'abord par simplifier la fraction** $\frac{P(x)}{Q(x)}$, **suivant les valeurs de** m **et** n. **On distingue trois cas :** $n < m, n = m$ **et** $n > m$.

1. Si $n < m$

— $Q(x) = (a_1x+b_1)(a_2x+b_2)\cdots(a_mx+b_m)$. **Alors**

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(a_1x+b_1)} + \frac{A_2}{(a_2x+b_2)} + \cdots \frac{A_m}{(a_mx+b_m)}.$$

$A_1, A_2, \cdots, A_m$ **sont des réels qu'on détermine par identification.**

Exemple 3.16 ***Simplifier la fraction*** $\frac{x}{x^2-1}$.

On a $degr(x) = 1 < (x^2-1) = 2,$ ***et*** $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ ***Donc***

$$\begin{aligned}\frac{x}{x^2-1} &= \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x+1} \\ &= \frac{A_1(x+1)}{x^2-1} + \frac{A_2(x-1)}{x^2-1} \\ &= \frac{(A_1+A_2)x + (A_1-A_2)}{x^2-1},\end{aligned}$$

par identification on a

$$x = (A_1+A_2)x + (A_1-A_2)$$

ce qui donne $\begin{cases} A_1 + A_2 = 1 \\ A_1 - A_2 = 0 \end{cases}$ ***par suite*** $A_1 = A_2 = \frac{1}{2}$ ***et***

$$\frac{x}{x^2-1} = \frac{\frac{1}{2}}{x-1} + \frac{\frac{1}{2}}{x+1}$$

Application

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{x^2-1}\,dx &= \int \frac{\frac{1}{2}}{x-1}\,dx + \int \frac{\frac{1}{2}}{x+1}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x+1| + k, \quad k \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

— **Si $Q(x)$ contient au moins un terme avec une puissance**
Exemple 3.17

$$\frac{x+1}{x(x-2)^2(x-1)^3} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{(x-2)} + \frac{A_3}{(x-2)^2} + \frac{A_4}{(x-1)} + \frac{A_5}{(x-1)^2} + \frac{A_6}{(x-1)^3}$$

— **Si $Q(x)$ contient un terme de la forme ax^2+bx+c, avec $\Delta < 0$.**
Exemple 3.18

$$\begin{aligned}\frac{x^3+x^2+1}{x(x-2)^2(x^2+1)^3(x^2+x+2)} &= \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{(x-2)} + \frac{A_3}{(x-2)^2} + \frac{A_4x+A_5}{(x^2+1)} + \\ &\quad \frac{A_6x+A_7}{(x^2+1)^2} + \frac{A_8x+A_9}{(x^2+1)^2} + \frac{B_1x+B_2}{(x^2+x+2)}\end{aligned}$$

2. Si $n=m$. Dans ce cas

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = A + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

où $R(x)$ est un polynôme tel-que $degr(R(x)) < degr(Q(x))$ et $A \in \mathbb{R}$ sont déterminés par division Euclidiènne ou par identification. On décompose $\frac{R(x)}{Q(x)}$ comme dans le cas 1.

Exemple 3.19 $\dfrac{x^2+4}{3x^2+x+1} = \dfrac{1}{3} + \dfrac{\frac{1}{3}(-x+11)}{3x^2+x+1}$

3. Si $n>m$. Dans ce cas

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = K(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

où $K(x), R(x)$ sont respectivement le quotient et le reste de la division Euclidiènne de $P(x)$ par $Q(x)$. Il est claire que $degr(R(x)) < degr(Q(x))$ et par suite pour simplifier la fraction $\frac{R(x)}{Q(x)}$ on recient au cas 1

3.1.9 Règles de Bioche

Dans cette partie on s'intéresse au calcule des intégrales des fractions rationnelles en *sinus* et en *cosinus*. Les règles de Bioche permettent de simplifier des fractions de la forme $\frac{P(\sin(x),\cos(x))}{Q(\sin(x),\cos(x))}$, en les ramenant à des intégrales de fractions rationnelles simples. On se propose de calculer l'intégrale suivante

$$I = \int \frac{P(\sin(x),\cos(x))}{Q(\sin(x),\cos(x))}\,dx. \tag{3.1}$$

On pose

$$f(x) = \frac{P\left(\sin(x), \cos(x)\right)}{Q\left(\sin(x), \cos(x)\right)}\, dx.$$

Les règles de Bioche suivantes permettent de calculer le type d'intégrale (3.1)**.**

1. **Si** $f(-x) = f(x)$ **on pose** $t = \cos(x)$
2. **Si** $f(\pi - x) = f(x)$ **on pose** $t = \sin(x)$
3. **Si** $f(\pi + x) = f(x)$ **on pose** $t = \tan(x)$
4. **Si aucune des trois conditions précédentes n'est satisfaite, alors on pose** $t = tan(\frac{x}{2})$ **et dans ce cas on a :** $\sin(x) = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos(x) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $\tan(x) = \dfrac{2t}{1-t^2}$, **et** $dx = \dfrac{2}{1+t^2}\, dt$.

Exemple 3.20 ***Calculer*** $I = \displaystyle\int \frac{\sin^3(x)}{1+\cos^2(x)}\, dx$

Solution 3.1 ***On pose*** $f(x) = -\dfrac{\sin^3(x)}{1+\cos^2(x)}\, dx$, ***on a***

$$f(-x) = \frac{-\sin^3(x)}{1+\cos^2(x)}\, d(-x) = f(x)$$

donc, on utilise le changement de variable $\begin{cases} t = \cos(x), \\ \dfrac{dt}{dx} = -\sin(x), \\ dt = -\sin(x) dx, \end{cases}$

pour avoir l'intégrale I.

$$\begin{aligned} I = \int \frac{\sin^3(x)}{1+\cos^2(x)}\, dx &= \int \frac{\sin(x)\sin^2(x)}{1+\cos^2(x)}\, dx \\ &= -\int \frac{1-\cos^2(x)}{1+\cos^2(x)}\, dt \\ &= \int \frac{t^2-1}{1+t^2}\, dt \\ &= \int dt - 2\int \frac{1}{1+t^2}\, dt \\ &= t - 2\arctan(t) + k, \quad k \in \mathbb{R} \\ &= \cos(x) - 2\arctan(\cos(x)) + k, \quad k \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

3.2 Intégrales définies

Definition 3.3 ***Soit*** f ***une fonction continue sur*** $[a\ b]$, ***et*** F ***une primitive de*** f ***sur cet intervalle. L'intégrale définie de*** f ***entre*** a ***et*** b ***est le nombre réel défini par***

$$\int_a^b f(x)\, dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Remarques 3.2 ***1. Il faut faire la différence entre*** $\int_a^b f(x)\,dx$ ***qui donne un nombre, et*** $\int f(x)\,dx$ ***qui donne toutes les fonctions dont la dérrivée est*** $f(x)$.

2. $\int_a^x f(t)\,dt$: ***c'est une fonction en*** x ***et qui vaut zéro pour*** $x = a$.

Exemples 3.2 ***1.*** $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln(x) + k, \quad k \in \mathbb{R}$.

2. $\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx = [\ln(x)]_1^2 = \ln(2) - \ln(1) = \ln(2)$.

3. $\int_1^x \frac{1}{t}\,dt = [\ln(t)]_1^x = \ln(x) - \ln(1) = \ln(x)$.

3.2.1 Propriétés

Soient f **et** g **deux fonctions définies et continues sur** $[a\,b]$ **et** $\lambda \in \mathbb{R}$. **Toutes les propriétés des intégrales indéfinies restent valables pour les intégrales définies, de plus on a :**

1. $\int_a^a f(x)\,dx = 0$
2. $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$
3. $\int_a^\lambda f(x)\,dx + \int_\lambda^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$
4. $\int_a^b dx = (b-a)\,.$
5. **Si** $f(x) = 0$ **sur** $[a\,b]$, **alors** $\int_a^b f(x)\,dx = 0$ **(Attention la réciproque n'est pas toujours vraie).**
6. **Si** $f(x)$ **est positive sur** $[a\,b]$, **alors** $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0.$
7. **Si** $f(x) - g(x) \geq 0$ **sur** $[a\,b]$, **alors** $\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx.$
8. **S'il existe deux réels** α, β **tels-que pour tout** $x \in [a\,b]$, $\alpha \leq f(x) \leq \beta$, **alors** $\alpha\,(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \beta\,(b-a)\,.$
9. **Si** f **est une fonction continue et paire sur** $[-a\ a]$, **alors** $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx.$
10. **Si** f **est une fonction continue et impaire sur** $[-a\ a]$, **alors** $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0.$
11. **Si** f **est une fonction périodique de période** T **alors** $\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_a^T f(x)\,dx.$

3.3 Exercices corrigés

On rappelle que pour calculer une intégrale définie d'une fonction continue, il faut d'abord calculer une primitive de cette fonction puis prendre cette primitive entre les bornes de cette intégrale.

Exercise 3.2 ***(Calcul direct)***
Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\,dx, \quad \int_0^1 \frac{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt{x}+1}{x^4}\,dx, \quad \int_{-1}^1 \left(3x^2-x+1\right)\,dx.$$

Solution :
1) **On calcule toutes les primitives de la fonction** $x \longmapsto \cos(x)$, **qui sont données par l'intégrale indéfinie suivante,**

$$\int \cos(x)\,dx = \sin(x)+k, \quad k\in\mathbb{R},$$

On prend ces primitives entre les bornes de l'intégrales, et on a

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\,dx = [\sin(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin(\frac{\pi}{2})-\sin(0)=1.$$

2) **On suit la même procédure précédente.**

$$\begin{aligned}
\int \left(3x^2-x+1\right)\,dx &= \int 3x^2 - \int x\,dx + \int\,dx\\
\int_{-1}^1 \left(3x^2-x+1\right)\,dx &= \int_{-1}^1 3x^2 - \int_{-1}^1 x\,dx + \int_{-1}^1\,dx\\
&= 3\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^1 - \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^1 + [x]_{-1}^1\\
&= \left[3\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x\right]_{-1}^1\\
&= \left[(1)^3-\frac{(1)^2}{2}+(1)\right]-\left[(-1)^3-\frac{(-1)^2}{2}+(-1)\right]\\
&= 4.
\end{aligned}$$

3)
$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt{x}+1}{x^4}\,dx &= \int \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x^4}\,dx + 2\int\frac{\sqrt{x}}{x^4}\,dx + \int\frac{1}{x^4}\,dx\\
&= \int x^{\frac{-10}{3}}\,dx + 2\int x^{\frac{-11}{3}}\,dx + \int x^{-4}\,dx\\
&= \frac{-3}{7}x^{\frac{-7}{3}} - \frac{6}{8}x^{\frac{-8}{3}} - \frac{1}{3}x^{-3}+k, \quad k\in\mathbb{R}\\
\int_0^1 \frac{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt{x}+1}{x^4}\,dx &= \left[\frac{-3}{7}x^{\frac{-7}{3}} - \frac{6}{8}x^{\frac{-8}{3}} - \frac{1}{3}x^{-3}\right]_0^1\\
&= \frac{-3}{7}(1)^{\frac{-7}{3}} - \frac{6}{8}(1)^{\frac{-8}{3}} - \frac{1}{3}(1)^{-3} - 0\\
&= -\frac{127}{84}.
\end{aligned}$$

Exercise 3.3 ***(Intégration par changement de variable)***
Calculer $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$

Solution :
On pose $u = 1 - x^2$, **donc** $\frac{du}{dx} = -2x$, **par suite** $x\,dx = -\frac{1}{2}du.$

$$\begin{aligned}
\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx &= -\frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u}} \\
&= -\frac{1}{2}\int u^{\frac{-1}{2}}\,du \\
&= -\frac{1}{2}\left[\frac{u^{\frac{-1}{2}+1}}{\frac{-1}{2}+1}\right] \\
&= -\sqrt{u} + k, \quad k \in \mathbb{R} \\
&= -\sqrt{1-x^2} + k, \quad k \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Exercise 3.4 ***(Intégration par changement de variable)***
Calculer $\int \arccos(x)\,dx.$

Solution :
D'abord, on commence par écrire la fonction à intégrer sous forme d'un produit de deux fonctions. Donc, on calcule $\int 1 \times \arccos(x)\,dx$, **on a**

$$\begin{cases} u^{'} = 1 \Longrightarrow u = x \\ v = \arccos(x) \Longrightarrow v^{'} = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}. \end{cases}$$

Le principe d'intégration par partie donne

$$\begin{aligned}
\int 1 \times \arccos(x)\,dx &= [x\arccos(x)] - \int \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \\
&= [x\arccos(x)] - \sqrt{1-x^2} + k, \quad k \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Exercise 3.5 ***(Utilisation de la décomposition)***
Calculer les intégrales suivantes

$$I_1 = \int \frac{-x+1}{x^2+2x+5}\,dx, \quad I_2 = \int \frac{\ln\left(x^2+2x+5\right)}{(x-1)^2}\,dx.$$

Solution :
1) **On peut facilement voir que**

$$\int \frac{-x+1}{x^2+2x+5}\,dx = \int \frac{-x+1}{(x+1)^2+4}\,dx,$$

on utilise le changement de variable $u = x+1$, **il vient que** $\frac{du}{dt} = 1$ **et** $x = u - 1$.
L'intégrale I_1 **s'écrit**

$$I_1 = \int \frac{-u+2}{u^2+4}\,du = \int \frac{2}{u^2+4}\,du - \int \frac{u}{u^2+4}\,dx$$

$$\int \frac{2}{u^2+4}\,du = \int \frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{u}{2}\right)^2+1}\,du = \arctan\left(\frac{u}{2}\right)+k_1,$$

$$\int \frac{u}{u^2+4}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2u}{u^2+4}\,dx = \ln\left|u^2+4\right|+k_2,$$

Donc

$$I_1 = \arctan\left(\frac{u}{2}\right) - \frac{1}{2}\ln\left|u^2+4\right| + k = \arctan\left(\frac{x+1}{2}\right) - \frac{1}{2}\ln\left|(x+1)^2+4\right| + k, \quad k\in\mathbb{R}$$

$$\int \frac{-x+1}{x^2+2x+5}\,dx = \arctan\left(\frac{x+1}{2}\right) - \frac{1}{2}\ln\left|\left(x^2+2x+5\right)\right| + k, \quad k\in\mathbb{R}.$$

2) **Pour calculer I_2, on pense à une intégration par partie.**

$$I_2 = \int \frac{\ln\left(x^2+2x+5\right)}{(x-1)^2}\,dx = \int \frac{1}{(x-1)^2}\ln\left(x^2+2x+5\right)\,dx.$$

$$\begin{cases} u' = \dfrac{1}{(x-1)^2} \Longrightarrow u = \displaystyle\int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx = \frac{-1}{x-1} \\ v = \ln\left(x^2+2x+5\right) \Longrightarrow v' = \dfrac{2x+2}{x^2+2x+5} \end{cases}$$

Le principe de l'intégration par partie nous donne

$$\int \frac{\ln\left(x^2+2x+5\right)}{(x-1)^2}\,dx = \left[\frac{-1}{x-1}\ln\left(x^2+2x+5\right)\right] - \int \frac{-1}{x-1}\frac{2x+2}{x^2+2x+5}\,dx$$

$$I_2 = \frac{-\ln\left(x^2+2x+5\right)}{x-1} + \int \frac{2x+2}{(x-1)\left(x^2+2x+5\right)}\,dx.$$

On décompose la fraction $\dfrac{2x+2}{(x-1)\left(x^2+2x+5\right)}$.

$$\begin{aligned} \frac{2x+2}{(x-1)\left(x^2+2x+5\right)} &= \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2x+A_3}{x^2+2x+5}, \\ &= \frac{A_1\left(x^2+2x+5\right) + (A_2x+A_3)(x-1)}{(x-1)\left(x^2+2x+5\right)}. \end{aligned}$$

Après simplification et identification on trouve $A_1 = \dfrac{1}{2},\ A_2 = -\dfrac{1}{2},\ A_3 = \dfrac{1}{2}$.

En décomposant la fraction $\dfrac{-x+1}{x^2+2x+5}$, **on trouve**

$$\begin{aligned} \int \frac{2x+2}{(x-1)\left(x^2+2x+5\right)}\,dx &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{-x+1}{x^2+2x+5}\,dx, \\ &= \frac{1}{2}\ln\left|x-1\right| + \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right) - \frac{1}{4}\ln\left|\left(x^2+2x+5\right)\right| + k, \quad k\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

$$I_2 = \frac{-\ln\left(x^2+2x+5\right)}{x-1} + \frac{1}{2}\ln\left|x-1\right| + \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right) - \frac{1}{4}\ln\left|\left(x^2+2x+5\right)\right| + k, \quad k\in\mathbb{R}.$$

Exercise 3.6 ***(Règles de Bioche)***
Calculer $\int \frac{1}{\sin(2x)}\,dx$, ***et en déduire*** $\int \frac{1}{\sin(x)}\,dx.$

Solution :
On pose

$$f(x) = \frac{1}{\sin(2x)}\,dx,$$

on a

$$f\left(x+\pi\right) = \frac{1}{\sin 2\left(x+\pi\right)}\,d\left(x+\pi\right) = \frac{1}{\sin(2x)}\,dx = f(x).$$

D'après les règles de Bioche, on utilise le changement de variable $u = \tan(x)$. **On aura alors** $\frac{du}{dx} = \frac{1}{\cos^2(x)}$ **et** $u = \frac{1}{\cos^2(x)}\,dx$. **D'autre part,**

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sin(2x)} = \frac{1}{2\sin(x)\cos(x)} &= \frac{1}{2}\frac{\cos(x)}{\sin(x)\cos^2(x)}\\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{\tan(x)}\frac{1}{\cos^2(x)},\end{aligned}$$

par suite :

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sin(2x)}\,dx &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{\tan(x)}\frac{1}{\cos^2(x)}\,dx\\ &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\,du\\ &= \frac{1}{2}\ln|u| + k, \quad k \in \mathbb{R}\\ &= \frac{1}{2}\ln\Big|\tan(x)\Big| + k \quad k \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Pour calculer $\int \frac{1}{\sin(x)}\,dx$, **on utilise la changement de variable** $x = 2u$, **ce qui donne** $u = \frac{x}{2}$ **et** $dx = 2\,du$.

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sin(x)}\,dx &= 2\int \frac{1}{\sin(2u)}\,du\\ &= \ln\Big|\tan(u)\Big| + k, \quad k \in \mathbb{R}\\ &= \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right| + k, \quad k \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Chapitre 4

Équations différentielles

4.1 Équations différentielles ordinaires

4.1.1 Généralités

Definition 4.1 ***Une équation différentielle est une équation dont l'inconnue est une fonction et dans laquelle apparaissent certaines dérivées de la fonction inconnue.***

Exemple 4.1 ***Soit*** u ***une fonction, les équations suivantes sont des équations différentielles.***

1. $u^{'} = 2u$

2. $u^{''} - 3u^{'} + 1 = 0$

3. $u^{(3)} = u$

Definition 4.2 ***Soit*** u ***une fonction inconnue qui dépend de la variable*** x. ***On appelle équation différentielle d'ordre*** $n (n \in \mathbb{N})$ ***toute équation de la forme***

$$F\left(x, u, u', u'', \cdots, u^{(n)}\right) = 0, \tag{4.1}$$

où $u^{'}, u^{''}, \cdots, u^{(n)}$ ***sont les dérivées de*** u ***d'ordres respectives*** $1, 2, \cdots, n$.

Remarques 4.1 ***1. L'équation*** (4.1) ***comporte*** $(n+2)$ ***variables.***

2. La fonction inconnue peut etre notée par : $y, t, \cdots$

3. Dans une équation différentielle lorsqu'on écrit $u, u^{'}, u^{''}, \cdots, u^{(n)}$, ***on sous entend*** $u(x), u^{'}(x), u^{''}(x), \cdots, u^{(n)}(x)$.

Definition 4.3 ***Une solution de l'équation*** (4.1) ***sur l'intervalle*** I ***est une fonction*** n ***fois dérivable sur*** I, ***et qui satisfait*** (4.1).

Exemple 4.2 ***On peut facilement vérifier que la fonction*** $u(x) = ce^{4x}, \ c \in \mathbb{R}$ ***est une solution de l'équation différentielle*** $u' = 4u$. ***En effet, il est claire que si*** $u(x) = ce^{4x}$ ***alors*** $u'(x) = 4ce^{4x} = 4u(x)$

Definition 4.4 ***Une équation différentielle de type $u^{'}f(u) = g(x)$ est dite une équation à variable séparées.***

Exemple 4.3 ***L'équation $u^{'} = \dfrac{e^{-u}}{x^2}$ peut être écrite sous la forme $u^{'}e^{u} = \dfrac{1}{x^2}$. On peut facilement trouver les solutions de cette équation. En intégrant les deux cotés de l'équation, on trouve $e^u = -\dfrac{1}{x} + k, \quad k \in \mathbb{R}$. Ce qui nous donne***

$$u(x) = \ln\left| -\frac{1}{x} + k\right|, \quad \textbf{\textit{tel-que}} \ k, \in \mathbb{R}.$$

Definition 4.5 ***L'ordre d'une équation différentielle est l'ordre de la plus haute dérivée apparaissant dans l'équation.***

Exemple 4.4
1. $2xu^{'} + u = 0$ ***est une équation différentielle du premier ordre.***
2. $u^{''} + u^{'} - 3u = ln(x)$ ***est une équation différentielle du second ordre.***

Definitions 4.1
1. ***Une équation différentielle d'ordre n est dite linéaire si elle de la forme***
$$f_0(x)u + f_1(x)u^{'} + f_2(x)u^{''} + \cdots + f_n(x)u^{(n)} = f(x) \tag{4.2}$$
où $f_0, f_1, f_2, \cdots, f_n, f$ sont des fonctions réelles continues sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.
2. ***Si $f(x) = 0$ pour tout $x \in I$, alors l'équation (4.2) est dite homogène, et elle est de la forme $f_0(x)u + f_1(x)u^{'} + f_2(x)u^{''} + \cdots + f_n(x)u^{(n)} = 0$***
3. ***L'équation (4.2) est dite à coefficients constants si les fonctions $f_0, f_1, f_2, \cdots, f_n$ sont constantes sur I. Autrement dit, l'équation (4.2) s'écrit sous la forme $a_0u + a_1u^{'} + a_2u^{''} + \cdots + a_nu^{(n)} = f(x)$, avec $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$ des constantes réelles.***

Remarque 4.1 ***Dans une équation différentielle linéaire il n'y-a pas d'exposant pour les termes $u, u^{'}, u^{''}, \cdots, u^{(n)}$.***

Exemple 4.5
1. $e^x u + x^{\frac{1}{2}}u^{''} = x^2 + 1$ ***c'est une équation différentielle linéaire et $e^x u + x^{\frac{1}{2}}u^{''} = 0$ c'est l'équation homogène qui lui est associée.***
2. $2u^{'} - 3u^{''} + \dfrac{1}{5}u^{(3)} = x$ ***est une équation différentielle linéaire à coefficients constants.***
3. ***L'équation $\left(u^{'}\right)^2 + u^{''} + 3u = 0$ n'est pas une équation différentielle linéaire.***

Proposition 4.1 ***Si u_1, u_2 sont deux solutions de l'équation linéaire homogène***
$$f_0(x)u + f_1(x)u^{'} + f_2(x)u^{''} + \cdots + f_n(x)u^{(n)} = 0, \tag{4.3}$$
alors $\alpha u_1 + \beta u_2$ est aussi une solution de (4.3).

On considère l'équation différentielle linéaire (4.2) et l'équation homogène (4.3) qui lui est associée. La proposition suivante permet de trouver la solution générale de l'équation (4.2).

Proposition 4.2 ***Si u_0 est une solution particulière de (4.2) et u_1 est une solution de l'équation homogène (4.3) alors $u = u_1 + u_0$ est une solution générale de l'équation (4.2).***

Remarque 4.2 ***On rappelle qu'une solution particulière de l'équation (4.2) c'est la donnée d'une fonction n fois dérivable et qui satisfait (4.2).***

4.2 Équation différentielle du premier ordre

4.2.1 Équation différentielle linéaire du premier ordre sans second membre

On considère l'équation

$$a_1(x)u' + a_0(x)u = 0 \textbf{ tel-que } a_1(x) \neq 0, \tag{4.4}$$

qui est équivalente à l'équation à variable séparées,

$$u' + a(x)u = 0 \quad \textbf{tel-que } a(x) = \frac{a_0(x)}{a_1(x)}. \tag{4.5}$$

Pour résoudre l'équation (4.5)**, on suit la méthode suivante :**

$$\begin{aligned}
u' + a(x)u = 0 &\iff u' = -a(x)u,\\
&\iff \frac{du}{dx} = -a(x)u,\\
&\iff \frac{du}{u} = -a(x)\,dx\\
&\iff \int \frac{du}{u}\,dx = -\int a(x)\,dx\\
&\iff \ln|u| = -A(x) + k\\
&\iff |u| = e^{(-A(x)+k)}\\
&\iff u = Ke^{-A(x)},
\end{aligned}$$

où $A(x)$ **est une primitive de** $a(x)$ **et** $K = \pm e^k,\ k \in \mathbb{R}$.

Exemple 4.6 ***La solution de léquation***

$$u' - \sqrt{x}u = 0, \quad x > 0$$

est donnée par

$$u(x) = Ke^{-A(x)}$$

avec $K = \pm e^k$ ***et*** $-A(x) = \int \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$.

4.2.2 Équation différentielle linéaire du premier ordre avec second membre

On considère l'équation

$$a_1(x)u' + a_0(x)u = f_1(x) \quad \textbf{tel-que} \quad a_1(x) \neq 0, \tag{4.6}$$

qui est équivalente à l'équation

$$u' + a(x)u = f(x) \quad \textbf{tels-que } a(x) = \frac{a_0(x)}{a_1(x)} \textbf{ et } f(x) = \frac{f_1(x)}{a_1(x)}. \tag{4.7}$$

D'après la Proposition 4.2, la solution de l'équation (4.7) **est de la forme** $u(x) = u_0(x) + u_1(x)$, **où** $u_1(x) = Ke^{-A(x)}$ **est la solution de l'équation homogène associée à** (4.7)**, et** u_0 **est la solution particulière de l'équation** (4.7)**.**

Exemple 4.7 ***On considère l'équation***

$$u^{'} - \sqrt{x}u = 1 - x\sqrt{x}, \quad x > 0. \tag{4.8}$$

Dáprès l'exemple précédent $u_1(x) = Ke^{\frac{2}{3}\sqrt{x^3}}$, ***est une solution de l'équation homogène associée à l'équation*** (4.8)***. D'autre part, on peut facilement vérifier que*** $u_0(x) = x$ ***est une solution particulière de l'équation*** (4.8)***. Donc la solution générale de l'équation*** (4.8) ***est***

$$u(x) = x + Ke^{\frac{2}{3}\sqrt{x^3}} = x + Ke^{\frac{2}{3}x\sqrt{x}}, \quad K \in \mathbb{R}.$$

La question qu'on se pose est : comment trouver une solution particulière ?

4.2.3 Recherche d'une solution particulère : Méthode de variation de la constante

On sait que la solution de l'équation homogène associée à (4.7) **est de la forme** $u_1(x) = Ke^{-A(x)}$, $K \in \mathbb{R}$. **La Méthode de variation de la constante consiste à chercher une solution particulère de l'équation** (4.7) **sous la forme** $u_0(x) = K(x)e^{-A(x)}$, **où** $K(x)$ **est une fonction de la variable** x **au lieu d'une constante. Dire que** $u_0(x) = K(x)e^{-A(x)}$ **est une solution de** (4.7) **signifie que**

$$u_0^{'}(x) + a(x)u_0(x) = f(x), \quad \textbf{avec } A^{'}(x) = a(x). \tag{4.9}$$

$$\begin{aligned}
u_0^{'}(x) + a(x)u_0(x) = f(x) &\iff \left(K(x)e^{-A(x)}\right)^{'} + a(x)K(x)e^{-A(x)} = f(x)\\
&\iff K^{'}(x)e^{-A(x)} - K(x)A^{'}(x)e^{-A(x)} + a(x)K(x)e^{-A(x)} = f(x)\\
&\iff K^{'}(x)e^{-A(x)} - K(x)a(x)e^{-A(x)} + a(x)K(x)e^{-A(x)} = f(x)\\
&\iff K^{'}(x)e^{-A(x)} = f(x)\\
&\iff K^{'}(x) = f(x)e^{A(x)}\\
&\iff K(x) = \int f(x)e^{A(x)}\,dx.
\end{aligned}$$

Ainsi la solution particulière de (4.7) **s'écrit sous la forme**

$$u_0(x) = \left(\int f(x)e^{A(x)}\,dx\right)e^{-A(x)}$$

Exercise 4.1 ***Trouver les solutions de l'équation***

$$u^{'} - 2u = e^{3x+1} \tag{4.10}$$

Preuve. La recherche de la solution de l'équation homogène :
La solution de l'équation homogène $u^{'} = 2u$ associée à l'équation (4.10) est donnée par

$$\begin{aligned} u^{'} = 2u &\iff \frac{du}{dx} = 2u \\ &\iff \frac{du}{u} = 2dx \\ &\iff \ln|u| = 2x + k, \quad k \in \mathbb{R} \\ &\iff u = Ke^{2x}, \ K = \pm e^{k}. \end{aligned}$$

Donc

$$u_1(x) = Ke^{2x}$$

La recherche de la solution particulière :
On cherche $K(x)$ telle-que la solution particulière de l'équation (4.10) soit sous la forme $u_0(x) = K(x)e^{2x}$.

$$\begin{aligned} u_0^{'}(x) - 2u_0(x) = e^{3x+1} &\iff \left(K(x)e^{2x}\right)^{'} - 2K(x)e^{2x} = e^{3x+1} \\ &\iff K^{'}(x)e^{2x} + 2K(x)e^{2x} - 2K(x)e^{2x} = e^{3x+1} \\ &\iff K^{'}(x)e^{2x} = e^{3x+1} \\ &\iff K^{'}(x) = e^{3x+1}e^{-2x} \\ &\iff K(x) = \int e^{x+1}\, dx \\ &\implies K(x) = e\int e^{x}\, dx \\ &\implies K(x) = e^{x+1}. \end{aligned}$$

La solution de l'équation (4.10) est sous la forme

$$u(x) = e^{x+1}e^{2x} + Ke^{2x} = \left(e^{x+1} + K\right)e^{2x}, \quad K \in \mathbb{R}.$$

■

4.2.4 Équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants

On considère les équations de la forme

$$a_1u^{'} + a_0u = f_1(x). \tag{4.11}$$

C'est un cas particulier des équations (4.6). On résout l'équation (4.11) de la même manière que (4.6).

4.2.5 Équation différentielle de Bernoulli

Definition 4.6 ***Toute équation de la forme***

$$u^{'} + a(x)u + b(x)u^{n} = 0 \tag{4.12}$$

***s'appelle une équation de* Bernoulli.**

Résolution de l'équation de Bernoulli

1. **Si** $n = 0$, **léquation** (4.12) **devient de la forme** (4.7).
2. **Si** $n = 1$, **l'équation** (4.12) **devient de la forme** (4.5)
3. **Si** $n \neq 0$ **et** $n \neq 1$, **on cherche à transformer l'équation** (4.12) **en une équation différentielle linéaire du premier ordre. Pour cela, on suit la méthode suivante : on divise par** u^n **et l'équation** (4.12) **devient**

$$u^{-n}u^{'} + a(x)u^{1-n} + b(x) = 0 \tag{4.13}$$

on pose, $y = u^{1-n}$ **donc** $\frac{1}{1-n}y^{'} = u^{-n}u^{'}$. **Par suite L'équation** (4.13) **devient**

$$\frac{1}{1-n}y^{'} + a(x)y + b(x) = 0. \tag{4.14}$$

L'équation (4.14) **est de la forme** (4.6).

Exemple 4.8 ***Résoudre l'équation suivante***

$$u^{'} + e^x u + e^x u^3 = 0. \tag{4.15}$$

Preuve. On divise par u^3 **on aura**

$$u^{-3}u^{'} + e^x u^{-2} = -e^x. \tag{4.16}$$

En faisant le changement de variable $y = u^{-2}$ **et en dérivant les deux membres, on obtient** $y^{'} = -2u^{'}u^{-3}$. **Autrement dit,** $u^{'}u^{-3} = -\frac{1}{2}y$. **Ce changement de variable permet d'écrire l'éqution** (4.16) **sous la forme**

$$-\frac{1}{2}y + e^x y = -e^x \tag{4.17}$$

c'est une équation linéaire du premier ordre avec second terme dont la résolution passe par les étapes précédentes. ■

4.2.6 Équation différentielle homogène

Soit H **une fonction numérique définie et continue sur un domaine** $D \subset \mathbb{R}$.

Definition 4.7 ***On appelle équation différentielle homogène toute équation différentielle de la forme*** $F\left(x, u, u^{'}\right) = 0$ ***et qui reste inchangée lorsqu'on remplace*** x ***par*** αx ***et*** u ***par*** αu ***et on laisse*** $u^{'}$ ***tel-qu-il est. Ces équations sont de la forme***

$$u^{'} = H\left(\frac{u}{x}\right). \tag{4.18}$$

La résolution de l'équation (4.18) **se ramène généralement à la résolution d'une équation simple en utilisant le changement de variable** $t = \frac{u}{x}$, **avec** $tx = u$ **et** $u^{'} = t^{'}x + t$. **Les solutions sont sous forme** (x, u).

Exemple 4.9 ***Résoudre l'équation*** $2xuu^{'} = u^2 - x^2$.

Preuve. Quand on remplace x par αx et u par αu et on laisse $u^{'}$ invariant, on obtient :

$$2\alpha^2 xuu^{'} = \alpha^2 \left(u^2 - x^2\right)$$

qui est exactement

$$2xuu^{'} = u^2 - x^2.$$

Donc l'équation est homogène. On utilise le changement de variable $t = \dfrac{u}{x}$, avec $tx = u$ et $u^{'} = t^{'}x + t$. l'équation donnée devient

$$\begin{aligned}
2xuu^{'} = u^2 - x^2 &\iff 2uu^{'} = \frac{u^2}{x} - x \\
&\iff 2tx\left(t^{'}x + t\right) = \left(\frac{u}{x}\right)u - x \\
&\iff 2x^2tt^{'} + 2t^2x = t^2x - x \\
&\iff 2x^2tt^{'} = -\left(t^2 + 1\right) \\
&\iff \frac{2t}{t^2+1}\,dt = -\frac{1}{x}\,dx \\
&\iff \ln\left(t^2+1\right) = -\ln|x| + k, \quad k \in \mathbb{R} \\
&\iff \ln\left(t^2+1\right)|x| = k \\
&\iff x = \frac{K}{t^2+1},\ u = \frac{Kt}{t^2+1},\ K = \pm e^k.
\end{aligned}$$

■

4.3 Équations différentielles du second ordre

On considère les équations de la forme

$$F\left(x, u, u^{'}, u^{''}\right) = 0$$

Pour résoudre ces équations on distingue plusieurs cas.

4.3.1 Équations de la forme $F\left(x, u^{'}, u^{''}\right) = 0$

Dans ce type d'équation la fonction u n'apparait pas dans l'équation. Une technique de résolution consiste à utiliser le changement de variable $y = u^{'}$ et l'équation devient de la forme $F\left(x, y, y^{'}\right) = 0$.

Exemple 4.10 ***Donner les solutions de l'équation différentielle*** $xu^{''} - u^{'} = 2$

Preuve. En utilisant le changement de variable $y = u^{'}$, l'équation précédente devient $xy^{'} = 1 + y$. On a alors :

$$\begin{aligned} xy^{'} = 1 + y &\iff x\frac{dy}{dx} = (1+y) \\ &\iff \frac{dy}{1+y} = \frac{1}{x}dx \\ &\iff 1 + y = kx, \quad k \in \mathbb{R} \\ &\iff u^{'} = kx - 1 \\ &\iff u = \frac{k}{2}x^2 - x + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

■

4.3.2 Équations de la forme $F\left(x, u^{''}\right) = 0$

Dans cette équation le u, et $u^{'}$ n'apparaissent pas tous les deux dans l'équation. On a une relation qui lie le x et le $u^{''}$. La technique de résolution est d'intégrer le $u^{''}$ pour trouver $u^{'}$ puis intégrer le $u^{'}$ pour trouver le u.

Exemple 4.11 ***résoudre l'équation*** $(1 + x^2)\, u^{''} = 1$.

Preuve.

$$\begin{aligned} \left(1 + x^2\right) u^{''} = 1 &\iff u^{''} = \frac{1}{1+x^2} \\ &\iff u^{'} = \arctan(x) + k, \\ &\iff u = \int \arctan(x)\, dx + kx + c, \end{aligned}$$

On utilise une intégration par partie pour calculer $\int \arctan(x)\, dx$. ■

4.3.3 Équations de la forme $F\left(u, u^{'}, u^{''}\right) = 0$

La variable x n'apparait pas dans ces équations de la forme $F\left(u, u^{'}, u^{''}\right) = 0$. La technique de résolution est l'utilisation du changement de variable $u^{'} = y$ et on se ramène à une équation du premier ordre. En posant $u^{'} = y$ on a,

$$u^{''} = \frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(u^{'}\right) = \frac{dy}{dx} = \frac{dudy}{dudx} = \frac{du}{dx}\frac{dy}{du} = y\frac{dy}{du}.$$

Exemple 4.12 ***Résoudre l'équation***

$$2uu^{''} - (u^{'})^2 = 1$$

Preuve. En utilisant le changement de variable, $y = u^{'}$, on a $u^{''} = y\dfrac{dy}{du}$. Il en résulte que

$$\begin{aligned} 2uu^{''} - (u^{'})^2 = 1 &\iff 2uy\frac{dy}{du} = 1 + y^2 \\ &\iff \frac{2y}{1+y^2}dy = \frac{1}{u}du \\ &\iff u = k\left(1 + y^2\right), \end{aligned}$$

d'autre part on a $y = u^{'}$, donc

$$\begin{aligned} y &= \frac{du}{dx} \\ &= \frac{d}{dx}\left(k + ky^2\right) \\ &= 2k\frac{dy}{dx}y, \end{aligned}$$

on en déduit que

$$\begin{aligned} 2k\frac{dy}{dx} = 1 &\iff 2kdy = dx \\ &\iff y = \frac{x}{2k} + k^{'} \\ &\iff u = k\left(1 + \left(\frac{x}{2k} + k^{'}\right)^2\right), \quad k, k^{'} \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

■

4.3.4 Équations différentielles linéaires du second ordre

I/ Le cas où les coefficients sont non constants

On considère l'équation

$$a_2(x)u^{''} + a_1(x)u^{'} + a_0(x)u = f_1(x) \tag{4.19}$$

Il existe deux techniques pour résoudre l'équation (4.19) **:**

(i) Si on connait une solution particulière de l'équation (4.19) **alors la solution de cette équation est de la forme $u = u_0 + u_1$, où u_0 est la solution particulière et u_1 la solution de l'équation homogène associée à** (4.19)**.**

(ii) Si on ne connait pas une solution particulière de l'équation (4.19)**, on utilise la méthode de variation des constantes lorsqu'on a deux solutions linéairement indépendantes g_1, g_2 de l'equation homogène associée à** (4.19)**.**

Comme nous venons de le voir, pour trouver une solution de l'équation (4.19)**, on doit d'abord résoudre l'équation homogène**

$$a_2(x)u^{''} + a_1(x)u^{'} + a_0(x)u = 0$$

qui peut s'écrire sous la forme

$$u^{''} + b_1(x)u^{'} + b_0(x)u = 0 \tag{4.20}$$

où b_1, b_0, f sont des fonctions continues sur un domaine $D \subset \mathbb{R}$.

(a) Recherche des solutions de l'équation homogène $u^{''} + b_1(x)u^{'} + b_0(x)u = 0$
La règle générale est la suivante :

Lemme 4.1 ***Si*** g_1 ***et*** g_2 ***sont deux solutions linéairement indépendantes de*** (4.20)***, alors la solution générale de*** (4.20) ***est*** $u_1 = \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2$, ***où*** λ_1, λ_2 ***sont des constantes réelles arbitraires.***

Remarque 4.3 g_1 ***et*** g_2 ***sont linéairement indépendantes signifie qu'elles ne sont pas proportionnelle. Autrement dit, il n'existe aucun réel*** λ ***tel-que*** $g_1 = \lambda g_2$.

On distingue plusieurs cas possibles :
Premier cas : On connait g_1 ***et*** g_2
Si g_1 **et** g_2 **sont deux solutions particulières de** (4.20)**, alors la solution générale de** (4.20) **est** $u_1 = \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

Deuxième cas : On connait une seule solution particulière de l'équation homogène
S'il existe une fonction g **non nulle sur** D **telle-que**

$$g^{''} + b_1(x)g^{'} + b_0(x)g = 0, \tag{4.21}$$

alors on peut ramener la résolution de (4.20) **à la résolution d'une équation du premier ordre en posant** $u = gy$. **En effet, lorsqu'on pose** $u = gy$ **on a** $u^{'} = g^{'}y + y^{'}g$ **et** $u^{''} = g^{''}y + y^{'}g^{'} + y^{''}g + g^{'}y^{'}$, **et donc l'équation** (4.20) **s'écrit**

$$gy^{''} + \left(2g^{'} + b_1(x)g\right)y^{'} + \left(g^{''} + b_1(x)g^{'} + b_0(x)g\right)y = 0,$$

en utilisant (4.21)**, on trouve**

$$gy^{''} + \left(2g^{'} + b_1(x)g\right)y^{'} = 0,$$

qui est bien une équation différentielle du premier ordre qu'on peut facilement résoudre.

$$gy^{''} + \left(2g^{'} + b_1(x)g\right)y^{'} = 0 \Longleftrightarrow \frac{y^{''}}{y^{'}} = -2\frac{g^{'}}{g} - b_1(x)$$

Un autre changement de variable est nécessaire, on pose $v = y^{'}$, **et donc** $\dfrac{dv}{dx} = y^{''}$. **Il en résulte que**

$$\frac{dv}{v} = -2\frac{g^{'}}{g}\,dx - b_1(x)\,dx.$$

L'intégration des deux membres de l'équation nous donne

$$\ln|v| = -2\ln|g| - B(x) + k.$$

Ainsi,

$$v = Ke^{-2\ln|g| - B(x)},$$

où $B(x)$ est une primitive de $b_1(x)$. Si $G(x)$ est une primitive de $e^{-2\ln|g|-B(x)}$, alors $v = y^{'} = Ke^{-2\ln|g|-B(x)} \Longrightarrow y = KG(x) + \eta$. Maintenant, il suffit juste de remplaçer y pour trouver

$$u = gy = KgG(x) + \eta g.$$

La solution générale de (4.20) est $u_1 = \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. avec $g_1 = g$ et $g_2 = u = gy = KgG(x) + \eta g$.

Troisième cas : On ne connait aucune solution particulière de l'équation homogène

Dans le cas où on ne connait aucune solution particulière de (4.20),

on cherche la solution générale u_1 sous la forme d'un produit de deux fonctions inconnues. On pose $u_1 = vg$, et on choisit $v(x)$ de sorte que le facteur de $g^{'}$ soit nul. En partant de ces conditions on a :
$u_1 = vg \Longrightarrow u_0^{'} = v^{'}g + g^{'}v$ et donc $u_0^{'} = v^{''}g + g^{''}v + 2v^{'}g^{'}$. Reportons ces résultats dans l'équation (4.20), on trouve :

$$g^{''}v + \Big(b_1(x)v + 2v^{'}\Big)\, g^{'} + \Big(v^{''} + b_1(x)v^{'} + b_0(x)v\Big)\, g = 0. \tag{4.22}$$

En choisissant

$$\Big(b_1(x)v + 2v^{'}\Big) = 0, \tag{4.23}$$

on a

$$g^{''}v + + \Big(v^{''} + b_1(x)v^{'} + b_0(x)v\Big) = 0. \tag{4.24}$$

La résolution de l'équation (4.23) donne v, et la résolution de (4.24) donne g. Ainsi la solution générale de (4.20) est bien déterminer.

Dernier cas : On se ramène à une équation homogène à coefficients constants

La technique est de faire un changement de variable convenable pour transformer l'équation (4.20) en une équation homogène à coefficients constants qui est plus simple à résoudre.

Exemple 4.13 ***On considère l'équation***

$$ax^2u^{''} + bxu^{'} + cu = 0 \tag{4.25}$$

***où** a, b, c **des constantes réelles et** $a \neq 0$.*
En effectue le changement de variable** $x = \alpha e^t$, **avec** $\alpha = 1$, **si** $x > 0$, **et** $\alpha = -1$, **si** $x < 0$. **Il en résulte que** $\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1}{\alpha e^t}$, **d'ou

$$u^{'} = \frac{du}{dx} = \frac{du}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\alpha e^t}\frac{du}{dt}$$

$$\begin{aligned} u^{''} &= \frac{d^2u}{dx^2} = \frac{du^{'}}{dx} = \frac{du^{'}}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\alpha e^t}\frac{du^{'}}{dt} \\ &= \frac{1}{\alpha e^t}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\alpha e^t}\frac{du}{dt}\right) \\ &= \frac{1}{\alpha^2 e^t}\left(-\frac{du}{dt} + \frac{d^2u}{dt^2}\right) \\ &= \frac{1}{e^t}\left(-\frac{du}{dt} + \frac{d^2u}{dt^2}\right). \end{aligned}$$

En reportant ces résultats dans* (4.25)*, cette équation devient

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \left(\frac{b}{a} - 1\right)\frac{du}{dt} + \frac{c}{a}u = 0,$$

c'est une équation différentielle linéaire homogène à coefficients constants.

(b) Recherche des solutions particulière de l'équation $u^{''} + b_1(x)u^{'} + b_0(x)u = f(x)$

Si g_1 et g_2 sont deux solutions non nulles et linéairement indépendantes de l'équation (4.20), la solution de l'équation (4.19) est sous la forme $u = g_1u_1 + g_2u_2$, où u_1, u_2 sont des fonctions inconnues qu'on peut déterminer si on ajoute certaines conditions supplémentaires. On utilise la methodes de variation des constantes. Un calcul simple nous donne,

$$u^{'} = g_1^{'}u_1 + g_1u_1^{'} + g_2^{'}u_2 + g_2u_2^{'},$$

et

$$u^{''} = g_1^{''}u_1 + g_1^{'}u_1^{'} + g_1^{'}u_1^{'} + g_1u_1^{''} + g_2^{''}u_2 + g_2^{'}u_2^{'} + g_2^{'}u_2^{'} + g_2u_2^{''}.$$

En prenant en consédération que g_1, g_2 sont des solutions de l'équation (4.20), et que $u = g_1u_1 + g_2u_2$, est une solution de l'équation (4.19), on trouve

$$2\left(g_1^{'}u_1^{'} + g_2^{'}u_2^{'}\right) + b_1(x)\left(g_1u_1^{'} + g_2u_2^{'}\right) + g_1u_1^{''} + g_2u_2^{''} = f(x). \qquad (4.26)$$

En posant la condition supplémentaire,

$$g_1u_1^{'} + g_2u_2^{'} = 0,$$

et en dérivant les deux membres de cette égalité on obtient,

$$g_1u_1^{''} + g_2u_2^{''} = -\left(g_1^{'}u_1^{'} + g_2^{'}u_2^{'}\right).$$

En remplaçant ce résultat dans l'équation (4.26), on obtient,

$$g_1^{'}u_1^{'} + g_2^{'}u_2^{'} = f(x).$$

En conclusion, pour trouver $u_1^{'}, u_2^{'}$, on résout le système

$$\begin{cases} g_1u_1^{'} + g_2u_2^{'} = 0, \\ g_1^{'}u_1^{'} + g_2^{'}u_2^{'} = f(x). \end{cases}$$

Dès qu'on a $u_1^{'}$ et $u_2^{'}$, on calcule leurs primitives pour avoir u_1, u_2.

II/ Le cas où les coefficients sont constants
On considère l'équation,

$$a_2u^{''} + a_1u^{'} + a_0u = f_1(x),$$

qu'on peut écrire sous la forme,

$$u^{''} + b_1u^{'} + b_0u = f(x), \tag{4.27}$$

où $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1,$ **sont des réels avec** $a_2 \neq 0$ **et** f_1, f **des fonctions continues sur un domaine** $D \subset \mathbb{R}$. **Soit**

$$u^{''} + b_1u^{'} + b_0u = 0, \tag{4.28}$$

l'équation homogène associée à (4.27). **Il est claire que les solutions de** (4.27) **sont de la forme** $u = u_0 + u_1$ **où** u_0 **est la solution générale de** (4.28) **et** u_1 **une solution particulière de** (4.27). **Donc, dans tout ce qui vient on va se concentrer sur la détermination de** u_0 **et** u_1.

1/ Calcul de la solution générale de l'équation homogène
Pour déterminer les solutions de l'équation homogène (4.28) **on définie l'équation carractéristique associée à** (4.28) **qui est donnée par**

$$r^2 + b_1r + b_0 = 0 \tag{4.29}$$

On sait que les solutions de l'équation (4.29) **dépendent du signe du discriminant** $\Delta = b_1^2 - 4b_0$. **En effet,**

- **Si** $\Delta > 0$, **l'équation** (4.29) **admet deux solutions réelles distinctes** $r_1 = \dfrac{-b_1 - \sqrt{\Delta}}{2}$, $r_1 = \dfrac{-b_1 + \sqrt{\Delta}}{2}$.
- **Si** $\Delta < 0$ **l'équation** (4.29) **admet deux solutions complexes** $r_1 = \dfrac{-b_1 - i\sqrt{\Delta^{'}}}{2} = \alpha - i\beta$, $r_2 = \dfrac{-b_1 + i\sqrt{\Delta^{'}}}{2} = \alpha + i\beta$, $\quad -\Delta^{'} = \Delta$, $i^2 = -1$,
- **Si** $\Delta = 0$, **l'équation** (4.29) **admet une solution double** $r_1 = r_2 = \dfrac{-b_1}{2}$.

Soient λ_1, λ_2 **deux réels arbitraires. Le tableau suivant résume les méthodes de calcul de la solution générale de l'équation homogène** (4.29)

$\Delta > 0$	$g_1(x) = e^{r_1x}, g_2(x) = e^{r_2x}$	$u_1 = \lambda_1 e^{r_1x} + \lambda_2 e^{r_2x}$
$\Delta < 0$	$g_1(x) = e^{\alpha x}\cos(\beta x), g_2(x) = e^{\alpha x}\sin(\beta x)$	$u_1 = \lambda_1 e^{\alpha x}\cos(\beta x) + \lambda_2 e^{\alpha x}\sin(\beta x)$
$\Delta = 0$	$g_1(x) = e^{r_1x}, g_2(x) = xe^{r_1x}$	$u_1 = (\lambda_1 + \lambda_2 x)\, e^{r_1x}$

2/ Calcul d'une solution particulière
Maintenant, on cherche à déterminer une solution particulière de l'équation (4.27). **Généralement, c'est la forme de** f **qui nous indique comment choisir la solution particulière** u_0. **Plusieurs situations sont possibles :**

- **Si** $f(x)$ **est un polynôme de degré** n, **on cherche** u_0 **sous forme d'un polynôme de degré** n **et qui satisfait** (4.27).

Exemple 4.14 ***Trouver une solution particulère de l'équation***

$$u^{''} - 3u^{'} - 1 = 4x^2 + 1 \tag{4.30}$$

On pose $u_0 = ax^2 + bx + c$ ***avec*** $a \neq 0$. ***On a,*** $u_0^{'} = 2ax + b, u_0^{''} = 2a$. ***En remplaçant ces résultats dans*** (4.30) ***et en éffectuant une identification on trouve les valeurs de*** a, b, c.

— **Si** $f(x) = h(x)e^{rx}$, **où** $h(x)$ **est un polynôme de degré** n **On cherche** $u_0 = k(x)e^{rx}$, **avec** $k(x)$ **un polynôme de degré** m **tel-que**
  — $m = n$ **si** $r^2 + b_1 r + b_0 \neq .0$
  — $m = n + 1$ **si** $r^2 + b_1 r + b_0 = 0$
  — $m = n + 2$ **si** r **est une racine double de** $r^2 + b_1 r + b_0$.

  Exemple 4.15 ***Trouver une solution particulière de***

$$u^{''} - 3u^{'} + 1 = 2e^{3x} \tag{4.31}$$

  $h(x) = 2, r = 3, n = 0, (3)^2 - 3(3) + 1 = 1 \neq 0$ ***donc*** $m = 0, k(x) = k, k \in \mathbb{R}, u_0 = ke^{3x}$. ***On calcule*** $u_0^{'} = 3ke^{3x}, u_0^{''} = 9ke^{3x}$. ***On porte ces résultats dans l'équation*** (4.31) ***et on identifie les deux membres pour trouver la valeur de*** k.

— **Si** $f(x) = a\cos(rx) + b\sin(rx)$, **on cherche** u_0 **sous l'une des formes suivantes :**
  — $u_0 = \alpha\cos(rx) + \beta\sin(rx)$,
  — $u_0 = x\,(\alpha\cos(rx) + \beta\sin(rx))$ **si** $\cos(rx)$ **est solution de l'équation homogène.**

  En utilisant la même technique précédente, on trouve a, b.

— **Si** $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_m(x)$ **où** $f_1, f_2, \cdots, f_m$ **prennent l'une des formes précédentes. Dans ce cas on cherche** $u_0 = v_1 + v_2 + \cdots + v_m$ **où** v_i **est une solution particulière de**

$$v_i^{''} + b_1 v_i^{'} + b_0 v_i = f_i(x), \quad 1 \leq i \leq m. \tag{4.32}$$

— **Si** $f(x)$ **ne s'écrit pas sous l'une des formes ci dessus. Dans ce cas on utilise la technique de variation des constantes. Si** $u_1 = \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2,\ (\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R})$ **est la solution générale de l'equation homogène** (4.28)**, on cherche la solution particulère de** (4.27) **sous la forme** $u_0 = \lambda_1(x)g_1 + \lambda_2(x)g_2,\ \lambda_1(x), \lambda_2(x)$ **des fonctions continues inconnues qu'on doit déterminer. On revient donc à la mèthode déjà vue dans le cas d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients non constants et avec second membre** (Ib).

4.4 Exercices corrigés

Exercise 4.2 ***Résoudre l'équation différentielle suivante :***

$$u^2 u^{'} + x^2 = 0,\ u \neq 0,\ u(0) = 4 \tag{4.33}$$

Solution :
C'est une équation différentielle du premier ordre homogène à variable séparées.

$$\begin{aligned}
u^2u^{'}+x^2=0 &\iff u^2u^{'}=-x^2\\
&\iff u^2\frac{du}{dx}=-x^2\\
&\iff u^2\,du=-x^2\,dx\\
&\Longrightarrow \int u^2\,du=-\int x^2\,dx\\
&\Longrightarrow \frac{1}{3}u^3=-\frac{1}{3}u^3+k,\quad k\in\mathbb{R},\\
&\Longrightarrow u=\sqrt[3]{-x^3+k},\quad k\in\mathbb{R}.
\end{aligned}$$

$$u(0)=4\iff\sqrt[3]{-(0)^3+k}=4$$
$$\sqrt[3]{+k}=4\Longrightarrow k=64.$$

Donc $u(x)=\sqrt[3]{-x^3+64}$.

Exercise 4.3 ***Résoudre l'équation différentielle suivante :***

$$xu^{''}+2u^{'}=0,\ u\neq0,\ u(1)=0,u(2)=1. \tag{4.34}$$

Solution :
C'est une équation homogène du second ordre, on la ramène à une equation du premier ordre en faisant le changement de variable $y=u^{'}$, **et l'équation devient**

$$xy^{'}+2y=0.$$

$$\begin{aligned}
xy^{'}+2y=0 &\iff xy^{'}=-2y\\
&\iff \frac{y^{'}}{y}=-\frac{2}{x}\\
&\iff \frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=-\frac{2}{x}\\
&\iff \frac{dy}{y}=-2\frac{dx}{x}\\
&\Longrightarrow \ln|y|=-2\ln|x|+k,k\in\mathbb{R}\\
&\Longrightarrow y=\pm e^{\frac{1}{x^2}+k}\\
&\Longrightarrow y=\frac{K}{x^2},K=\pm e^k.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y=u^{'} &\iff u^{'}=\frac{K}{x^2}\\
&\Longrightarrow u=-\frac{K}{x}+\tau,\ K,\tau\in\mathbb{R}
\end{aligned}$$

$$Entenantcomptelesconditionsinitialeona : u(1) = 0 \iff -K + \tau = 0 \Longrightarrow K = \tau,$$
$$u(2) = 1 \iff \frac{-K}{2} + \tau = 1 \Longrightarrow K = 2.$$

Donc la solution cherchée est

$$u(x) = 2\left(1 - \frac{1}{x}\right).$$

Exercise 4.4 ***Résoudre l'équation différentielle suivante :***

$$u^{''} + 3u^{'} + 2u = xe^{-x}. \tag{4.35}$$

Solution :

1 On cherche la solution générale de l'équation homogène

$$u^{''} + 3u^{'} + 2u = 0 \tag{4.36}$$

L'équation carractéristique associée à (4.36) **est**

$$r^2 + 3r + 2 = 0 \tag{4.37}$$

$\Delta = 9 - 8 = 1 \Longrightarrow r_1 = -2, r_2 = -1.$
La solution générale de (4.36) **est**

$$u_1 = \lambda_1 e^{-2x} + \lambda_2 e^{-x}$$

2 On cherche une solution particulière de l'équation (4.35)**.**
Comme le deuxième membre de l'équation (4.35) **est de la forme** $h(x)e^{-x}$ **avec** $h(x)$ **un polynôme de degré** $n = 1$, **et comme** $(-1)^2+3(-1)+2 = 0$ **alors on cherche la solution particulière sous la forme** $u_0 = k(x)e^{-x}$ **où** $k(x)$ **est un polynôme de degré** $m = n+1 = 2$. **On pose** $u_0 = (ax^2 + bx + c)\, e^{-x}$. **Un calcul simple nous donne**

$$u_0^{'} = e^{-x}\left(-ax^2 + (2a - b) + (b - c)\right)$$

et

$$u_0^{''} = e^{-x}\left(ax^2 + (b - 4a) + (2a - 2b + c)\right).$$

En remplaçant ces résultats dans (4.35) **et par identification on trouve,** $a = \frac{1}{2}, b = -1, c = 0$. **Donc,**

$$u_0 = \left(\frac{1}{2}x^2 - x\right)e^{-x}$$

3 La solution générale de l'équation (4.35) **est,**

$$u = \left(\frac{1}{2}x^2 - x\right)e^{-x} + \lambda_1 e^{-2x} + \lambda_2 e^{-x} = \left(\frac{1}{2}x^2 - x + \lambda_1\right)e^{-x} + \lambda_2 e^{-x}.$$

Exercise 4.5 ***Résoudre l'équation différentielle suivante :***

$$u^{''} + u^{'} + u = x^2 + 1,\ u(0) = 1, u^{'}(0) = 0. \tag{4.38}$$

Solution :

1. **On cherche la solution générale de l'équation homogène,**

$$u^{''}+u^{'}+u=0 \tag{4.39}$$

L'équation carractéristique associée à (4.36) **est,**

$$r^2+r+1=0 \tag{4.40}$$

$$\Delta=1-4=-3=3i^2,\ r^1=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2},\ r_2=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

La solution générale de l'équation homogène (4.40) **est,**

$$u_1=\lambda_1 e^{\frac{1}{2}x}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+\lambda_2 e^{\frac{1}{2}x}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right).$$

2. **On cherche une solution particulière de l'équation** (4.38)**.**
Comme le deuxième membre de l'équation (4.38) **est un polynôme de degré** $n=2$, **alors on cherche la solution particulière sous forme d'un polynôme de degré** 2. **On pose** $u_0=ax^2+bx+c$, **il s'en suit que** $u^{'}=2ax+b,\ u^{''}=2a$. **On reprend ces résultats dans l'équation** (4.38), **on obtient** $ax^2+(2a+b)\,x+2a+b+c=x^2+1$, **par identification on trouve** $a=1, b=-2, c=1$.
La solution particulière de (4.38) **est**

$$u_0=x^2-2x+1.$$

3. **La solution générale de** (4.38) **est**

$$u=x^2-2x+1+\lambda_1 e^{\frac{1}{2}x}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+\lambda_2 e^{\frac{1}{2}x}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

Les conditions suplémentaires permettent de calculer λ_1,λ_2.

$$u(0)=1\Longrightarrow\lambda_1=0,$$

$$u^{'}(0)=0\Longrightarrow\lambda_2=\frac{4}{\sqrt{3}}.$$

Donc la solution de l'équation (4.38) **est**

$$u=x^2-2x+1+\frac{4}{\sqrt{3}}e^{\frac{1}{2}x}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

Chapitre 5

Fonctions de plusieurs variables

5.1 Généralités

5.1.1 Notions fondamentales

Definition 5.1 ***Produit cartésien***
Soient E ***et*** F ***deux ensembles non vides. Le produit cartésien des deux ensembles qu'on note*** $E \times F$ ***est l'ensemble des couples*** (x, y) ***tels-que*** $x \in E$ ***et*** $y \in F$. ***On écrit,***

$$E \times F = \{(x, y)\,,\ x \in E,\ y \in F\}$$

Remarques 5.1 ***1/ Attention l'ordre du produit est important. Si*** $E \neq F$ ***alors*** $E \times F \neq F \times E$.

2/ Si $E = F$, ***alors*** $E \times E = E^2 = \{(x, y)\,,\ x \in E,\ y \in E\}$

3/ $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y)\,,\ x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}\}$

Definition 5.2 ***Produit cartésien "généralisation"***
Si $E_1, E_2, E_3, \cdots, E_n\,(n \in \mathbb{N})$ ***désignent*** n ***ensembles non vides, alors l'ensemble*** $E = E_1 \times E_2 \times E_3 \times \cdots \times E_n$ ***est le produit cartésien des ensembles*** $E_i,\ 1 \leq i \leq n$.
On écrit,

$$E = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n)\,,\ x_i \in E_i,\ 1 \leq i \leq n\}$$

En particulier,

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n)\,,\ x_i \in \mathbb{R},\ 1 \leq i \leq n\}$$

Remarque 5.1 $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}.}_{n fois}$

$\mathbb{R}^n$ est un espace vectoriel de dimension n. Quand on se donne un espace vectoriel, pour évaluer les éléments de cet espace les uns par rapport aux autres, on fait appelle à la notion de distance et normes.

Definition 5.3 ***(Distance)***
Soit $E \neq \emptyset$, ***un espace vectoriel sur*** $\mathbb{R}$ ***et*** d ***l'application définie par***

$$d : \left| \begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ (x, y) & \longmapsto & d\,(x, y)\,. \end{array} \right.$$

On dit que E ***est une distance sur*** E ***si elle satisfait les conditions suivantes :***

1. ***Séparation :*** $\forall x \in E, \forall y \in E, [d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y]$,

2. ***Symétrie :*** $\forall (x,y) \in E \times E, d(x,y) = d(y,x)$,
3. ***Inégalité triangulaire :*** $\forall (x,y,z) \in E^3, [d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)]$.

Si d ***est une distance sur*** E, ***le couple*** (E,d) ***s'appelle espace métrique.***

Exemples 5.1 1. ***La distance sur*** $E = \mathbb{R}$, ***est définie par***

$$d : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ (x,y) & \longmapsto & d(x,y) = \Big| x - y \Big|. \end{array} \right.$$

2. ***La distance de Manhattan est définie sur*** $E = \mathbb{R}^n$ ***par***

$$d_1 : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ (x,y) & \longmapsto & d_1(x,y) = \sum\limits_{i=1}^{n} \Big| x_i - y_i \Big|. \end{array} \right.$$

3. ***La distance Euclidienne est définie sur*** $E = \mathbb{R}^n$ ***par***

$$d_2 : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ (x,y) & \longmapsto & d_2(x,y) = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \Big| x_i - y_i \Big|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{array} \right.$$

En particulier, lorsque $E = \mathbb{R}^2$, ***on a***

$$d_2 : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ (x,y) & \longmapsto & d_2(x,y) = \left(\sum\limits_{i=1}^{2} \Big| x_i - y_i \Big|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{array} \right.$$

$$d_2(x,y) = \left(\sum\limits_{i=1}^{2} \Big| x_i - y_i \Big|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2},\ x = (x_1 - x_2),\ x = (y_1 - y_2).$$

4. ***La distance de Minkowski est définie sur*** $E = \mathbb{R}^n$ ***par***

$$d_p : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ (x,y) & \longmapsto & d_p(x,y) = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \Big| x_i - y_i \Big|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \end{array} \right.$$

5. ***La distance de Tchebychev ou distance infinie est définie sur*** $E = \mathbb{R}^n$ ***par***

$$d_\infty : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ (x,y) & \longmapsto & d_\infty(x,y) = \sup\limits_{1 \leq i \leq n} \Big| x_i - y_i \Big|. \end{array} \right.$$

Definition 5.4 ***(Norme)***

Soit $E \neq \emptyset$, ***un espace vectoriel sur*** $\mathbb{R}$ ***et*** N ***l'application définie par***

$$N : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & N(x) = \|x\|. \end{array} \right.$$

On dit que E ***est une norme sur*** E ***si elle satisfait les conditions suivantes :***

1. ***Séparation :*** $\forall x \in E, \|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0,$
2. ***Homogenéité positive :*** $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in E,\ \|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|,$
3. ***Inégalité triangulaire :*** $\forall (x, y, z) \in E^3, [\|x + y\| \leq \|x + z\| + \|xz + y\|]$.

Si N ***est une norme sur*** E, ***le couple*** (E, N) ***s'appelle espace vectoriel normé*** *e.v.n.*

Proposition 5.1 ***Soit*** E ***un e.v.n. L'application*** d ***définie par***

$$d : \left| \begin{array}{ccl} E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ (x, y) & \longmapsto & d(x, y) = \|x - y\| \end{array} \right.$$

est une distance sur E ***dite la distance sur*** E ***induite par la norme.***

Exemples 5.2 ***(Normes classiques sur*** $\mathbb{R}^n$***)***
Soient $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n, p \in \mathbb{R}, p \geq 1.$

1. ***Norme Manhattan :*** $\|x\|_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|.$
2. ***Norme Euclidienne :*** $\|x\|_2 = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$
3. ***Norme infinie :*** $\|x\|_\infty = \sup\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$
4. ***Norme*** p : $\|x\|_p = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$

5.1.2 Fonctions de plusieurs variables à valeur réelle

Soient n **un entiers naturel non-nul, et** E **une partie non vide de** $\mathbb{R}^n$.

Definition 5.5 ***On appelle fonction de*** n ***variables réelles à valeur réelle toute fonction*** f ***définie comme suit***

$$f : \left| \begin{array}{rcl} E \subset \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n) & \longmapsto & f(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n) = y \end{array} \right.$$

Exemples 5.3

1. f ***est une fonction de deux variables*** x ***et*** y

$$f : \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & f(x, y) = x^2 + y^2 \end{array} \right.$$

$f(1, 2) = 1^2 + 2^2 = 5.$

2. g ***est une fonction de trois variables réelles.***

$$f : \left| \begin{array}{ccl} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \longmapsto & f(x, y, z) = \dfrac{e^x + 2\sin(y)}{3z^2}. \end{array} \right.$$

Domaine de définition d'une fonction de deux variables réelles

Soit f une fonction de deux variables réelles x, y définie par

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & f(x,y). \end{array} \right.$$

Le domaine de définition de f qu'on note D est l'ensemble des couple $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ pour lesquels $f(x,y)$ existe.

Exemple 5.1

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & f(x,y) = \ln(x) + \sin(y). \end{array} \right.$$

Pour que f ait un sens, il faut que $\ln(x)$ et $\sin(x)$ soient toutes les deux définies à la fois. Il en résulte que $x > 0$ et $y \in \mathbb{R}$, donc

$$D = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}.$$

Représentation graphique d'une fonction de deux variables réelles

Soit f une fonction définie sur un domaine D de $\mathbb{R}^2$ telle-que

$$f : \left| \begin{array}{ccc} D \subset \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & f(x,y). \end{array} \right.$$

La représentation graphique de f est une surface S_f de $\mathbb{R}^3$ définie par

$$S_f = \Big\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ [z = f(x,y)] \wedge [(x,y) \in D] \Big\}.$$

Autrement dit, S_f est l'ensemble des points de l'espace de coordonnées $M(x, y, f(x,y))$ avec $(x,y) \in D$. À chaque point de coordonnées $(x,y) \in D$ correspond un point de l'espace situé sur la surface S_f.

5.2 Limites et continuité des fonctions à plusieurs variables

5.2.1 Limite d'une fonction à plusieurs variables

Soit D une partie non vide de $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, et $a = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in D$. f est une fonction de plusieurs variables définies sur D, sauf peut etre en a,

$$f : \left| \begin{array}{ccc} D \subset \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x = (x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n) & \longmapsto & f(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n) = y \end{array} \right.$$

Definition 5.6 ***1. On dit que f tend vers l quand x tend vers a et on écrit***

$$\lim_{x \to a} f(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n) = l$$

ssi

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in v(a), x \neq a : \|x - a\| \leq \eta \Longrightarrow \Big| f(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n) - l \Big| \leq \varepsilon$$

2.

$$\lim_{x\to a} f(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n) = +\infty$$

ssi

$$\forall M > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in v(a), x \neq a : \|x - a\| \leq \eta \Longrightarrow \Big| f(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n) - l \Big| > M.$$

3.

$$\lim_{x\to a} f(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n) = -\infty$$

ssi

$$\forall M > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in v(a), x \neq a : \|x - a\| \leq \eta \Longrightarrow \Big| f(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n) - l \Big| < -M.$$

Exemple 5.2 $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \dfrac{x^2}{y^2+1} = \dfrac{1}{5}.$

Remarque 5.2 $(x, y) \longrightarrow (1, 2) \Longleftrightarrow (x \longrightarrow 1$ ***et*** $y \longrightarrow 2)$.

Theoreme 5.1 ***Soit*** f ***une fonction définie sur*** $D \subset \mathbb{R}^n$ ***et*** $a \in D$, ***on suppose que*** f ***est définie au voisinage de*** a ***sauf peut être en*** a. ***Si*** f ***admet une limite finie*** l ***quand*** x ***tend vers*** a, ***alors cette limite est unique.***

Theoreme 5.2 ***(Encadrement) Soient*** f, g, h ***trois fonctions définies sur*** $D \subset \mathbb{R}^n$ ***vérifiant***

$$\forall x = (x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n) \in D, h(x) \leq f(x) \leq g(x).$$

Si $\lim\limits_{x\to a} h(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = l$, ***alors*** $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$.

Theoreme 5.3 ***Soit*** f ***une fonction définie sur*** $D \subset \mathbb{R}^n$ ***à valeur dans*** $\mathbb{R}$ ***et*** $a \in D$. ***On pose*** $x = (x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)$, $a = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in D$. ***S'il existe une fonction*** g ***telle-que,*** $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ ***et*** $|f(x) - l| \leq g(x)$ ***alors*** $\lim\limits_{x\to a} f(x) - l = 0$, ***c'est à dire*** $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$.

Exemple 5.3 $f(x, y) = \dfrac{x^3 + y^3}{x + y}$. ***Calculer*** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$.

On a $\left|\dfrac{x^3+y^3}{x+y}\right| \leq \left|\dfrac{x^3}{x+y}\right| + \left|\dfrac{y^3}{x+y}\right| \leq x^2 + y^2.$

On pose $g(x, y) = x^2 + y^2$, ***on a*** $\left|\dfrac{x^3+y^3}{x+y}\right| \leq g(x, y)$ ***avec*** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x, y) = 0$, ***donc***

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0.$$

En particulier, pour les fonctions à deux variables, l'utilisation des coordonnées polaires permet de calculer les limites.

Definition 5.7 ***Soit*** $M=(x,y)\in\mathbb{R}^2$, θ ***l'angle que fait la droite*** (OM) ***avec l'axe*** (OX) ***et*** $r=\|OM\|$. ***On a*** $(x,y)=(r\cos(\theta),r\sin(\theta))$, ***qu'on appelle les coordonnées polaires de*** M. ***Pour calculer la limite d'une fonction*** f ***au point*** (x_0,y_0), ***on utilise les coordonnées polaires centrés en ce point*** $(x,y)=(x_0+r\cos(\theta),y_0+r\sin(\theta))$. ***Le réel*** $r>0$, ***s'appelle le rayon et*** $\theta\in[0,2\pi]$ ***c'est l'angle polaire. Dire que*** $(x,y)\longrightarrow(x_0,y_0)$ ***revient à dire que*** $r\longrightarrow 0$. ***On dira que la limite existe quand*** $r\longrightarrow 0$, ***si le résultat de la limite est indépendant de*** θ. ***Dans le cas contraire, on dira que la limite n'existe pas.***

Exemple 5.4 ***Utiliser les coordonnées polaires pour calculer*** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$.
On pose

$$x=r\cos(\theta),y=r\sin(\theta),$$

on a

$$\frac{xy^2}{x^2+y^2}=\frac{(r\cos(\theta))\,(r\sin(\theta))^2}{(r\cos(\theta))^2+(r\sin(\theta))^2}=\frac{r^3\cos(\theta)\sin^2(\theta)}{r^2\left(\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)\right)}=r\cos(\theta)\sin^2(\theta)$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy^2}{x^2+y^2}=\lim_{r\to 0}r\cos(\theta)\sin^2(\theta)=0.$$

Exemple 5.5 ***Utiliser les coordonnées polaires pour calculer*** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$.
On pose

$$x=r\cos(\theta),y=r\sin(\theta),$$

on a

$$\frac{xy}{x^2+y^2}=\frac{(r\cos(\theta))\,(r\sin(\theta))}{(r\cos(\theta))^2+(r\sin(\theta))^2}=\frac{r^2\cos(\theta)\sin(\theta)}{r^2\left(\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)\right)}=\cos(\theta)\sin(\theta)$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{r\to 0}\cos(\theta)\sin(\theta).$$

Le résultat de la limite dépend du θ, ***donc la limite n'existe pas car pour chaque valeur de*** $\theta\in[0,2\pi]$, ***on a une limite, d'où la non- unicité de la limite.***

Remarque 5.3 ***Il ya une autre méthode pour montrer qu'une limite en*** (x_0,y_0) ***n'existe pas. On calcule la limite selon deux chemins differénts qui mènent au point*** (x_0,y_0). ***Par exemple pour savoir si la limite suivante*** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ ***existe ou non, on choisit deux chemins particuliers qui mènent au point*** $(0,0)$. ***Si on considère l'axe*** $y=0$, ***on a***

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2}{x^2}=1,$$

Si on considère l'axe $x=0$, ***on a***

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{-y^2}{y^2}=-1,$$

Les deux limites selon deux chemins différents ne sont pas identiques, donc la limite n'existe pas.

La technique souvent connue sous le nom d'arc paramétré consiste à écrire x et y comme fonctions qui dépendent d'un paramètre t et faire converger $(x(t), y(t))$ quand $t \to 0$, vers le point en lequel on veut calculer la limite.

Remarque 5.4 ***Il existe une technique très utile pour calculer la limite au point*** $(0,0)$. ***Il s'agit de faire le changement de variable*** $y = \lambda x$, ***où*** λ ***est un paramètre réel. Alors,*** $(x(t), y(t)) \longrightarrow (0,0)$ ***quand*** $x \to 0$. ***La limite si elle existe elle ne doit pas dépendre de*** λ.

Exemple 5.6 ***Calculer*** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$
On utilise le changement de variable $y = \lambda x$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(x)^2 - (\lambda x)^2}{(x)^2 + (\lambda x)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(x)^2\left[1 - \lambda^2\right]}{(x)^2\left[1 + \lambda^2\right]} = \frac{1 - \lambda^2}{1 + \lambda^2},$$

Le résultat dépend de λ, ***donc la limite n'existe pas.***

Les deux propositions suivantes sont très utiles en pratique.

Proposition 5.2 ***(Permutation des limites)***
Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ ***telle-que*** $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = l$ ***(existe). On suppose que, pour tout*** $x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ ***existe et pour tout*** $y \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$ ***existe. Alors***

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \lim_{x\to x_0}\left[\lim_{y\to y_0} f(x,y)\right] = \lim_{y\to y_0}\left[\lim_{x\to x_0} f(x,y)\right] = l.$$

Proposition 5.3 ***Soient*** f, g ***deux fonctions définies sur*** $D \subset \mathbb{R}^n$. ***On suppose que*** $x_0 \in D$ ***et que*** $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l_1$ ***et*** $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = l_2$. ***On a les résultats suivants***

1.
$$\lim_{x\to x_0}\Big(\alpha f(x) + \beta g(x)\Big) = \alpha l_1 + \beta l_2, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

2.
$$\lim_{x\to x_0} f(x) g(x) = l_1 l_2$$

3. Si $l_2 \neq 0$, ***on a***
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l_1}{l_2}$$

5.2.2 Continuité des fonctions de plusieurs variables

Definition 5.8 ***Soit*** $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, ***et*** $x_0 \in D$. ***On dit que*** f ***est continue en*** x_0 ***si, et seulement si*** $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. ***Autrement dit,***

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in v(x_0), x \neq x_0 : \Big\|x - x_0\Big\| \Longrightarrow \Big|f(x) - f(x_0)\Big| < \varepsilon$$

Definition 5.9 ***Une fonction*** $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, ***est dite continue sur*** D ***si, et seulement si elle est continue en tout point*** $x_0 \in D$.

Remarque 5.5 ***(Attention) Il faut éviter l'erreur fréquente suivante :***
si $f(x_0, y) \longrightarrow l$ ***et*** $f(x, y_0) \longrightarrow l$, ***cela ne signifie pas que*** f ***est continue en*** (x_0, y_0). ***Cependant, si*** $f(x_0, y) \longrightarrow l_1$ ***et*** $f(x, y_0) \longrightarrow l_2$, ***avec*** $l_1 \neq l_2$, ***alors*** f ***n'est pas continue au point*** (x_0, y_0). ***Cette remarque est souvent utilisée pour montrer qu'une fonction*** f ***n'est pas continue en un point*** (x_0, y_0).

Exemple 5.7

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \textbf{\textit{si}} \ (x,y) \neq (0,0), \\ \\ 0 \quad \textbf{\textit{si}} \ (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Étudier la continuité de f
f ***est continue sur*** $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ ***comme fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas. D'autre part, nous avons vu dans l'exemple*** (5.5) ***que*** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ ***n'existe pas et donc*** f ***n'est pas continue au point*** $(0,0)$. ***Mais,*** $f(x,0) \longrightarrow 0 = f(0,0)$ ***et*** $f(0,y) \longrightarrow 0 = f(0,0)$. ***Ce ci confirme la remarque précédente.***

Exemple 5.8 ***Étudier la continuité de la fonction*** f

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^3}{(x-1)^2+y^2} & \textbf{\textit{si}} \ (x,y) \neq (1,0), \\ \\ 0 \quad \textbf{\textit{si}} \ (x,y) = (1,0). \end{cases}$$

f ***est continue sur*** $\mathbb{R}^2 - \{(1,0)\}$ ***comme fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas. D'autre part***

$$(x-1)^2 + y^2 > y^2 \Longrightarrow \frac{1}{(x-1)^2+y^2} < \frac{1}{y^2}.$$

Il en résulte que,

$$0 < \left| \frac{y^3}{(x-1)^2+y^2} \right| < \left| \frac{y^3}{y^2} \right| = \left| y \right|,$$

avec,

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} |y| = 0.$$

Donc,

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{y^3}{(x-1)^2+y^2} = 0 = f(1,0).$$

Ce qui signifie que f ***est continue au point*** $(1,0)$. ***En conclusion,*** f ***est continue sur*** $\mathbb{R}^2$.

5.3 Dérivées partielles, Différentielles

5.3.1 Dérivées partielles du premier ordre

Dans cette section, on suppose que la notion de dérivée d'une fonction définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est connue et on souhaite donner sa généralisation pour les fonctions de plusieurs variables à valeur dans $\mathbb{R}$. Pour des raisons de simplicité on commence par les fonctions de deux variables réelles, le cas des fonctions de trois variables réelles ou plus s'en déduit facilement.

Definition 5.10 ***Soit*** $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$. ***On dit que*** f ***admet une dérivée première en*** $x_0 \in \mathbb{R}^2$ ***suivant le vecteur*** $u = (u_1, u_2)$ ***si, et seulement si*** $\psi_u : t \longmapsto f(x_0 + tu)$ ***est dérivable en*** 0. ***Dans ce cas*** $\psi_u^{'}(0)$ ***représente la dérivée de*** f ***au point*** x_0 ***dans la direction de*** u, ***qu'on la note par*** $D_u f(x_0)$, ***et on a***

$$D_u f(x_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + tu) - f(x_0)}{t}$$

Exemple 5.9 $f(x, y) = xy,\ x_0 = (0, 0),\ u = (1, 1)$. ***Calculer*** $D_u f(x_0)$.
On a $x_0 + tu = (t, t)$ ***et*** $f(t, t) = t^2$. ***donc***

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + tu) - f(x_0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{t^2}{t} = \lim_{t \to 0} t = 0.$$

Alors,

$$D_u f(x_0) = 0.$$

Definition 5.11 ***Les dérivées d'une fonction*** $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, ***suivant les vecteurs*** $\overrightarrow{i}(1, 0)$ ***et*** $\overrightarrow{j}(0, 1)$, ***si elles existent, correspondent respectivement aux dérivées partielles par rapport à*** x ***et*** y ***et qui sont notées par*** $\frac{\partial f}{\partial x}$ ***et*** $\frac{\partial f}{\partial y}$. ***On a alors***

$$D_{\overrightarrow{i}} f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \quad \textit{\textbf{et}} \quad D_{\overrightarrow{j}} f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y).$$

Maintenant, on généralise la notion de dérivées partielles aux fonctions définies sur $\mathbb{R}^n$.

Definition 5.12 ***Soit*** $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ ***et*** $a = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in D$. ***Pour*** $i = 1, 2, \cdots, n$, ***on appelle dérivées partielle de*** f ***en*** a ***par rapport à*** x_i ***et on note*** $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ ***la dérivées de la fonction partielle prise en*** a_i

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{x_i \to a_i} \frac{f(a_1, a_2, \cdots, x_i, \cdots, a_n) - f(a_1, a_2, \cdots, a_i, \cdots, a_n)}{x_i - a_i} = f_{x_i}^{'}(a),$$

on peut aussi écrire,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{h_i \to 0} \frac{f(a_1, a_2, \cdots, a_i + h_i, \cdots, a_n) - f(a_1, a_2, \cdots, a_i, \cdots, a_n)}{h_i} = f_{x_i}^{'}(a). \tag{5.1}$$

En particulier : Si $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ a = (a_1, a_2)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2) = \lim_{h_1 \to 0} \frac{f(a_1 + h_1, a_2) - f(a_1, a_2)}{h_1} = f_x^{'}(a_1, a_2), \tag{5.2}$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2) = \lim_{h_2 \to 0} \frac{f(a_1, a_2 + h_2) - f(a_1, a_2)}{h_2} = f_y^{'}(a_1, a_2). \tag{5.3}$$

Remarque 5.6 ***Il faut comprendre qu'on ne peut parler de dérivées partielles en*** $a = (a_1, a_2)$ ***que si les limites en*** (5.2)***,*** (5.3) ***ci dessus existent. Quand ces limites existent elles sont notées*** $\frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2)$***et*** $\frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2)$ ***respectivement. Cette remarque reste vraie pour des fonctions définies sur*** $\mathbb{R}^n$, ***où on exige que la limite en*** (5.1) ***existe.***

Lorsque les dérivées partielles existent, comment les calculer ?

Exemple 5.10

$$f(x, y) = 2x^3y^2, \quad a = (-1, 2)$$

1. ***On considère que*** y ***est comme une constante et on dérive par rapport à*** x. ***Alors,***
$$f_x^{'}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 6y^2x^2.$$
2. ***On considère que*** x ***est comme une constante et on dérive par rapport à*** y. ***Alors,***
$$f_y^{'}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 4yx^3.$$

Donc,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(-1, 2) = 6(-1)^2(2)^2 = 24,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(-1, 2) = 4(2)(-1)^3 = -8.$$

Remarque 5.7 ***l'existence des dérivées partielles au point*** $a = (a_1, a_2)$ ***ne signifie pas que*** f ***est continue en ce point.***

Exemple 5.11 ***On considère la fonction*** f ***définie par***

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \textbf{\textit{si}}\ (x, y) \neq (0, 0), \\ \\ 0 \quad \textbf{\textit{si}}\ (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Étudier l'existence des dérivées partielles au point $(0, 0)$.

$$\lim_{h_1 \to 0} \frac{f(h_1, 0) - f(0, 0)}{h_1} = \lim_{h_1 \to 0} \frac{0}{h_1} = 0 \Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0,$$
$$\lim_{h_2 \to 0} \frac{f(0, h_2) - f(0, 0)}{h_1} = \lim_{h_2 \to 0} \frac{0}{h_2} = 0 \Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0.$$

On voit bien que les dérivées partielles au point $(0, 0)$ ***existent, alors que nous avons déjà vu dans l'exemple 5.7 que*** f ***n'est pas continue en*** $(0, 0)$.

5.3.2 Dérivées partielles d'ordre supérieur

On donne la défintion pour une fonction f à deux variables, et elle reste vraie pour les fonctions à $n(n > 2)$ variables.

Definition 5.13 ***Si pour une fonction*** $f(x,y)$ ***définie sur*** $D \subset \mathbb{R}^2$, ***les dérivées partielles*** $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ ***et*** $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ ***existent et elles sont elles mêmes des fonctions en*** x ***et*** y, ***alors*** $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$ ***peuvent avoir des dérivées partielles telles-que :***

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) : \textit{ on dérive deux fois par rapport à } x.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) : \textit{ on dérive par rapport à } y \textit{ en premier lieu et après apr rapport à } x.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) : \textit{ on dérive par rapport à } x \textit{ en premier lieu et après apr rapport à } y.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) : \textit{ on dérive deux fois par rapport à } y.$$

Exemple 5.12 $f(x,y) = 3x^4 - 2xy^3$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 12x^3 - 2y^3, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -6xy^2.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 36x^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -12xy.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(12x^3 - 2y^3\right) = -6y^2.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-6xy^2\right) = -6y^2.$$

Dans l'exemple 5.12, on remarque que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$**, est ce que c'est une coïncidence ou bien c'est toujours le cas ? Le théorème suivant répond à cette question**

Theoreme 5.4 ***(Théorème de Schwarz)***
Soit $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ ***une fonction continue sur*** D. ***Si pour tout*** $i, j = 1, 2, \cdots, n$, ***les dérivés partielles*** $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}, \dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ ***existent et sont continues ainsi que*** $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_j}\right)$ ***existent et sont aussi continues, alors pour tout*** $a = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in D$, ***et pour*** $i, j = 1, 2, \cdots, n$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}.$$

Ce theorème dit que l'ordre de dérivation par rapport aux variables est sans importance dans le cas où les dérivées partielles existent et sont continues au voisinage d'un point.

5.3.3 Matrices Particulières

$$f : \left| \begin{array}{rcl} D \subset \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, \cdots, x_n) & \longmapsto & f(x_1, x_2, \cdots, x_n). \end{array} \right.$$

1. **Le gradient de f noté ∇f est la matrice colonne** $\nabla f = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$

2. **La matrice Hessienne de f est définie par :**

$$Hessf = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

3. **Si $n = 2$, la matrice Jacobienne du changement de variable**

$$x_1 = r\cos(\theta), \quad x_2 = r\sin(\theta)$$

est

$$J = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial r} & \dfrac{\partial x_1}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial r} & \dfrac{\partial x_2}{\partial \theta} \end{pmatrix}$$

4. **Si $n = 3$, la matrice Jacobienne du changement de variable**

$$x_1 = r\cos(\theta)\cos(\alpha), \quad x_2 = r\sin(\theta)\cos(\alpha), \quad x_3 = r\sin(\alpha)$$

est

$$J = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial r} & \dfrac{\partial x_1}{\partial \theta} & \dfrac{\partial x_1}{\partial \alpha} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial r} & \dfrac{\partial x_2}{\partial \theta} & \dfrac{\partial x_2}{\partial \alpha} \\ \dfrac{\partial x_3}{\partial r} & \dfrac{\partial x_3}{\partial \theta} & \dfrac{\partial x_3}{\partial \alpha} \end{pmatrix}$$

5.3.4 Différentielles

Rappel

On sait que si une fonction $f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est dérivable sur D alors sa dérivée $f^{'}$ vérifie

$$\forall x \in D : \; f^{'}(x) = \frac{df}{dx} \tag{5.4}$$

et

$$\forall x \in D : \; df = f^{'}(x)\, dx \tag{5.5}$$

df **est la diffŕentielle de** f. **On généralise ce résultat pour les fonctions à plusieurs variables.**

Definition 5.14 ***Soit*** $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. ***On dit que*** f ***est différentiable en*** $a \in D$ ***s'il existe une application linéaire*** $L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, ***telle-que au voisinage de*** a ***on ait***

$$f(a+h) = f(a) + lh + o(\|h\|).$$

Si une telle application existe, elle s'appelle différentielle de f ***au point*** a ***et on la note*** $df(a)$.

Nous admettrons la proposition suivante :

Proposition 5.4 ***si une fonction*** $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, ***est continue et possède des dérivées partielles qui sont toutes continues, alors*** f ***est différentiable sur*** D ***et on a :***

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n.$$

Exemple 5.13

$$f(x,y) = \sin(xy)$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = y\cos(xy)dx + x\cos(xy)dy.$$

5.4 Intégrales doubles et triples

5.4.1 Intégrales doubles

I/ Intégrale double sur un rectangle

Theoreme 5.5 ***(Théorème de Fubini)***
Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, ***continue sur*** $[a\ b] \times [c\ d]$. ***Alors***

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)\ dx\, dy = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\ dx\, dy.$$

Exemple 5.14 ***Calculer*** $\int_0^1 \int_{-2}^{-1} xy\, dx\, dy.$

$$\int_{-2}^{-1} xy\, dx = y \int_{-2}^{-1} x\, dx = y \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{-1} = -\frac{3}{2} y,$$

$$\int_0^1 -\frac{3}{2} y\, dy = -\frac{3}{2}\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1 = -\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{4}.$$

II/ Intégrale double d'une fonction à variable séparées

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, **continue sur** $[a\ b] \times [c\ d]$. **telle-que** $f(x,y) = h(x)g(y)$. **Alors**

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)\ dx\, dy = \left(\int_a^b h(x)\, dx\right)\left(\int_c^d g(y)\, dy\right)$$

Exemple 5.15

$$\int_a^b \int_c^d xe^y \, dx \, dy = \Big(\int_a^b x \, dx\Big)\Big(\int_c^d e^y \, dy\Big) = \Big[\frac{x^2}{2}\Big]_a^b . \Big[e^y\Big]_c^d = \Big(\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}\Big)\Big(e^d - e^c\Big).$$

III/ Intégrale double sur un domaine borné

$\int\int_D f(x,y) \; dx \, dy$ **tel-que** $D = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\; /a \leq x \leq b, \;\; \psi_1(x) \leq y \leq \psi_2(x) \;\; \Big\}$

est donnée par

$$\int\int_D f(x,y) \; dx \, dy = \int_a^b \int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x,y) \; dx \, dy.$$

$\int\int_D f(x,y) \; dx \, dy$ **tel-que** $D = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\; /a \leq y \leq b, \;\; \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y) \;\; \Big\}$

est donnée par

$$\int\int_D f(x,y) \; dx \, dy = \int_a^b \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y) \; dx \, dy.$$

Exemple 5.16 ***Calculer***

$$\int\int_D dx \, dy \;\; \textbf{\textit{tel-que}} \;\; D = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\; /0 \leq x \leq 1, \;\; x^2 \leq y \leq \sqrt{x}; \;\; \Big\}$$

$$\int\int_D dx \, dy = \int_0^1 \Big(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} dy\Big) \, dx = \int_0^1 \Big(\sqrt{x} - x^2\Big) \, dx = \Big[\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{3}x^3\Big]_0^1 = \frac{1}{15}.$$

IV/ Calculer une intégrale double par changement de variable

$$\int\int_D f(x,y) \; dx \, dy = \int\int_S g(u,v) \; detJ \, du \, dv,$$

où

$$\det J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

Exemple 5.17 ***(coordonées polaires)***

$$x = r\cos(\theta), \; y = r\sin(\theta), \; 0 \leq \theta \leq 2\pi, \;\; r > 0.$$

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos(\theta), \frac{\partial y}{\partial r} = \sin(\theta), \frac{\partial x}{\partial \theta} = -r\sin(\theta), \frac{\partial y}{\partial \theta} = r\cos(\theta),$$

$$\det J = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{vmatrix} = r\cos^2(\theta) + r\sin^2(\theta) = r\Big(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)\Big) = r,$$

par suite,

$$\int\int_D f(x,y) \; dx \, dy = \int\int_S g(r,\theta) \; r \, dr \, d\theta,$$

Exemple 5.18 ***(Application)***

$$\int\int_D \frac{1}{1+x^2+y^2} dx\, dy \ \ \textbf{\textit{tel-que}} \ \ D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / x^2+y^2 \leq 1\right\}.$$

$$\int\int_D \frac{1}{1+x^2+y^2}\, dx\, dy = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{1}{1+r^2}\, r\, dr\, d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{2r}{1+r^2}\, dr\, d\theta,$$

$$\int\int_D \frac{1}{1+x^2+y^2}\, dx\, dy = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 \frac{2r}{1+r^2}\, dr\right) d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[\ln\left(r^2+1\right)\right]_0^1 d\theta,$$

$$\int\int_D \frac{1}{1+x^2+y^2}\, dx\, dy = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \ln(2) d\theta = \frac{\ln(2)}{2}\left[\theta\right]_0^{2\pi} = \frac{\ln(2)}{2}(2\pi) = \pi \ln(2).$$

5.4.2 Intégrales triples

I/ Intégration par piles : On se ramène à une intégration double.

Exemple 5.19 ***Calculer***

$$I = \int\int\int_D dx\, dy\, dz, \quad D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ \ / x^2+y^2+z^2 \leq r^2\right\}.$$

$$I = \int\int_D \left(\int_{-\sqrt{r^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-x^2-y^2}} dz\right) dx\, dy = 2\int\int_{D'} \sqrt{r^2-x^2-y^2}\, dx\, dy,$$

$D^{'}$ ***est le disque de centre*** O ***et de rayon*** r. ***En utilisant le changement de variables***

$$x\rho\cos(\theta), \ y = \rho\sin(\theta),$$

on a,

$$x^2+y^2 = \rho^2,$$

et

$$I = 2\int\int_{D'} \sqrt{r^2-\rho^2}\rho\, d\rho\, d\theta = -\frac{4\pi}{3}\left[\left(r^2-\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^r = \frac{4\pi r^3}{3}.$$

II/ Intégration par changement de variables : coordonnées sphériques

$$x = \rho\cos(\theta)\cos(\alpha), \ \ y = \rho\sin(\theta)\cos(\alpha), \ \ z = \rho\sin(\alpha),$$

avec,

$$0 \leq \rho \leq r, \ \ \theta \in [0 \ \ 2\pi], \ \ \alpha\left[-\frac{\pi}{2} \ \ \frac{\pi}{2}\right].$$

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha)\cos(\theta) & -\rho\sin(\theta)\cos(\alpha) & -\rho\sin(\alpha)\cos(\theta) \\ \cos(\alpha)\sin(\theta) & \rho\cos(\alpha)\cos(\theta) & -\rho\sin(\alpha)\sin(\theta) \\ \sin(\alpha) & 0 & \rho\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

$$det J = \rho^2\cos(\alpha).$$

$$I = \int\int\int_B \rho^2\cos(\alpha)\, d\rho\, d\theta\, d\alpha = \left(\int_0^r \rho^2\, d\rho\right)\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(\alpha)\, d\alpha\right)\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right) = \frac{4\pi r^3}{3}.$$

5.5 Exercices corrigés

Exercise 5.1 ***Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par***

$$f(x,y)=\frac{x^4+y^4}{8-x^2y^2}.$$

Donner le domaine de défintion de f.

Solution :
f est bien définie ssi $8-x^2y^2\neq 0$

$$\begin{aligned}8-x^2y^2=0 &\iff x^2y^2=8,\\ &\iff (xy)^2=8,\\ &\iff |xy|=2\sqrt{2},\\ &\iff |x||y|=2\sqrt{2},\\ &\iff |y|=\frac{2\sqrt{2}}{|x|},\\ &\iff y=\pm\frac{2\sqrt{2}}{|x|}.\end{aligned}$$

Soit (C_1) et (C_2) les courbes représentatives des fonctions $y=\frac{2\sqrt{2}}{|x|}$ et $y=-\frac{2\sqrt{2}}{|x|}$ respectivement. Donc, le domaine de définition de f est le plan privé de $(C_1)\bigcup(C_2)$. Autrement dit,

$$D_f=\mathbb{R}^2-\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ /\ |xy|=2\sqrt{2}\right\}$$

Exercise 5.2 ***Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par***

$$f(x,y)=\begin{cases}e^{\frac{-1}{x^2+y^2}} & \textbf{\textit{si}}\ (x,y)\neq(0,0),\\ 0\ \textbf{\textit{si}}\ x=(x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Montrer que f est continue en $(0,0)$.

Solution :
En faisant le changement de variable $y=mx$ avec $x\to 0$,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}e^{\frac{-1}{x^2+y^2}}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{-1}{x^2+mx^2}}\lim_{x\to 0}e^{\frac{-1}{x^2[1+m^2]}}=0=f(0,0).$$

Donc, f est continue en $(0,0)$.

Exercise 5.3 ***Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par***

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{x^2+y^2};\ \textbf{\textit{si}}\ (x,y)\neq(0,0),\\ a\ \textbf{\textit{si}}\ x=(x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Trouver la valeur de a pour que f soit continue en $(0,0)$.

Solution :
On utilise le changement de variables $x = \rho\cos(\theta),\ \ y = \rho\sin(\theta).$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{\rho\to 0} \frac{1-\cos(\rho)}{\rho^2} \overset{R.H}{=} \lim_{\rho\to 0} \frac{\sin(\rho)}{2\rho} \overset{R.H}{=} \frac{\cos(\rho)}{2} = \frac{1}{2}.$$

Donc, pour que f **soit continue en** $(0,0)$, **il faut que** $a = \frac{1}{2}$.

Exercise 5.4 ***Soit*** f ***une fonction définie sur*** $\mathbb{R}^2$ ***par*** $f(x,y) = x - y^2$.
Calculer $\nabla f(1,2)$.

Solution :

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)^t = (1,-2y)^t,$$

donc,

$$\nabla f(1,2) = (1,-4)^t.$$

Exercise 5.5 ***Soit*** f ***une fonction définie sur*** $\mathbb{R}^2$ ***par***

$$f(x,y) = \begin{cases} y^2 \sin\left(\dfrac{x}{y}\right) & \textbf{\textit{si}}\ \ y \neq 0, \\ 0\ \ \textbf{\textit{si}}\ \ y = 0. \end{cases}$$

1. ***Déterminer le plus grand sous ensemble de*** $\mathbb{R}^2$ ***sur lequel*** f ***est de classe*** C^1.
2. ***Montrer que les dérivées croisées*** $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y), \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$ ***existent et elles sont différentes.***

Solution :
1) **Rappel :** f **est de classe** C^1 **sur** D, **ssi** f **est continue sur** D, **et les dérivées partielles de premier ordre existent et elles sont continues sur** D. f **est continue sur** $\mathbb{R}^2$. **En effet, pour** $y \neq 0$, f **est continue comme composée de fonctions continues. Si** $y = 0$, **On étudier la continuité de** f **en** $(0,0)$. **Comme,**

$$\forall y \neq 0, \quad \left|\sin\left(\frac{x}{y}\right)\right| \leq 1,$$

alors,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} y^2 \sin\left(\frac{x}{y}\right) = 0 = f(0,0).$$

Donc, f **est continue sur** $\mathbb{R}^2$, **et pour tout** $y \neq 0$, **on a**

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\cos\left(\frac{x}{y}\right), \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y\sin\left(\frac{x}{y}\right) - x\cos\left(\frac{x}{y}\right). \end{cases}$$

De plus, on a :

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,0)-f(x_0,0)}{h}=0,$$

c.a.d,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,0)=0,$$

alors, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ **existe et est définie sur** $\mathbb{R}^2$ **par**

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\begin{cases} y\cos\left(\frac{x}{y}\right) \ \textbf{ si } \ y\neq 0, \\ 0 \ \textbf{ si } \ y=0. \end{cases}$$

D'autre part,

$$\lim_{k\to 0}\frac{f(x,k)-f(x,0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{k^2\sin\left(\frac{x}{k}\right)-0}{k}=\lim_{k\to 0}k\sin\left(\frac{x}{k}\right)=0,$$

c.a.d,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)=0,$$

alors, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ **existe et est définie sur** $\mathbb{R}^2$ **par**

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\begin{cases} 2y\sin\left(\frac{x}{y}\right)-x\cos\left(\frac{x}{y}\right), \\ 0 \ \textbf{ si } \ y=0. \end{cases}$$

On vient de montrer que les dérivées patielles du premier ordre existent. Maintenant, on étudie leurs continuité. Quand $y\neq 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ **et** $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ **sont continues. Il reste à voir la continuité pour** $y=0$. **On distingue deux cas :** $(x\neq 0, y=0)$ **et** $(x=0,y=0)$. **Pour tout** $x_0\in\mathbb{R}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ **est continue au point** $(x_0,0)$. **En effet,**

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,0)}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\lim_{(x,y)\to(x_0,0)}y\cos\left(\frac{x}{y}\right)=0=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,0)$$

où nous avons utiliser le fait que $0\leq\left|y\cos\left(\frac{x}{y}\right)\right|\leq|y|\longrightarrow 0$.
On suppose que $x_0\neq 0$,

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,0)}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\lim_{(x,y)\to(x_0,0)}2y\sin\left(\frac{x}{y}\right)-x\cos\left(\frac{x}{y}\right),$$

on a, $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,0)}2y\sin\left(\frac{x}{y}\right)=0$, **mais** $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,0)}x\cos\left(\frac{x}{y}\right)$, **n'existe pas car** $x_0\neq 0$. **Donc, quand** $x_0\neq 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ **n'est pas continue en** $(x_0,0)$. **Cependant, pour** $x_0=0$, **on a,**

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\lim_{(x,y)\to(x_0,0)}2y\sin\left(\frac{x}{y}\right)-x\cos\left(\frac{x}{y}\right)=0=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0),$$

où nous avons utiliser le fait que $0 \leq \left|2y \sin\left(\frac{x}{y}\right) - x\cos\left(\frac{x}{y}\right)\right| \leq 2|y| + |x| \longrightarrow 0.$

Donc, $\frac{\partial f}{\partial y}$ **est continue en** $(0,0)$.

En conclusion, on a f **de classe** C^1 **sur** $\mathbb{R}^2 - \{(x,0)\,,\ \ x \in \mathbb{R}^*\}$.

2) **On applique le Théorème de Schwarz. On a**

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right),$$

et

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right),$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(h,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0-0}{h} = 0,$$

ce qui signifie que,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 0.$$

D'autre part,

$$\lim_{k \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,k) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{k} = \lim_{k \to 0} \frac{k\cos\left(\frac{0}{k}\right)}{k} = 1,$$

ce qui signifie que $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = 1$. **Donc,** $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$.

Exercise 5.6 ***Soit*** $F(f,g) = \sin(fg)$,

1. ***calculer*** dF.
2. ***On suppose que*** f, g ***sont des fonctions telles-que***

$$f(x,y) = x - 7y,\ g(x,y) = x + y.$$

   Calculer df, ***et*** dg.

3. ***On considère la fonction*** H ***telle-que***

$$H(x,y) = \sin\left[(x-7y)(x+y)\right].$$

   Calculer dH, ***et en déduire*** $\frac{\partial H}{\partial x}$.

Solution :

⁕ $\frac{\partial F}{\partial f} = g\cos(fg)$, $\frac{\partial F}{\partial g} = f\cos(fg)$, **on obtient :**

$$dF = \frac{\partial F}{\partial f}\,df + \frac{\partial F}{\partial g}\,dg = g\cos(fg)\,df + f\cos(fg)\,dg$$

$\divideontimes$ $\dfrac{\partial f}{\partial x}=1, \dfrac{\partial f}{\partial y}=-7,$ **et** $\dfrac{\partial g}{\partial x}=1, \dfrac{\partial g}{\partial y}=1.$

Il s'en suit que $df=dx-7y,$ **et** $dg=dx+dy.$

$\divideontimes$ **On remarque que** $H(x,y)=F(f(x,y),g(x,y))=\sin(f(x,y)\,g(x,y))\,.$

$$\begin{aligned}
dH &= \frac{\partial F}{\partial f}df+\frac{\partial F}{\partial g}dg,\\
&= g\cos(fg)\,df+f\cos(fg)\,dg,\\
&= (x+y)\cos[(x-7y)(x+y)](dx-7y)+(x-7y)\cos[(x-7y)(x+y)](dx+dy)\,,\\
\frac{\partial H}{\partial x}dx+\frac{\partial H}{\partial y}dy &= (2x-6y)\cos[(x-7y)(x+y)]\,dx+(-6x-14y)\cos[(x-7y)(x+y)]\,dy,
\end{aligned}$$

donc,

$$\frac{\partial H}{\partial x}=(2x-6y)\cos[(x-7y)(x+y)]\,,$$

et

$$\frac{\partial H}{\partial y}=(-6x-14y)\cos[(x-7y)(x+y)]\,.$$

Bibliographie

[1] C. Baba-Hamed et K. Benhabib : *Algèbre I, Rappel de cours et exercices avec solutions.* O.P.U.(1985).

[2] C. Baba-Hamed et K. Benhabib : *Analyse II, Rappel de cours et exercices avec solutions.* O.P.U.(1993).

[3] C. Baba-Hamed et K. Benhabib : *Analyse I, Rappel de cours et exercices avec solutions.* O.P.U.(1999).

[4] A. Boukerboub : *Analyse I, 1ère année d' Université, Cours et exercices corrigés.* 2008.

[5] J. Douchet et B. Zwahlen : *Calcul différentiel et intégral 2, Fonctions reélles de plusieures variables reélles.* Presses polytechniques romandes. (1986).

[6] J. Douchet et B. Zwahlen : *Calcul différentiel et intégral 2, Fonctions reélles de plusieures variables reélles.* Presses polytechniques romandes. (1986).

[7] J. Douchet et B. Zwahlen : *Calcul différentiel et intégral 2, Fonctions reélles de plusieures variables reélles.* Presses polytechniques romandes. (1986).

[8] S. Gourari : *Algèbre-linéaire, Cours et exercices résoulus.* O.P.U.(1987).

[9] D. E. Medjadi, M. Boukra, A. Djadane et B.K. Sadallaha : *Analyse Mathématiques, 1ère année d' université, Fonction de plusieures variables réelles.* Volume 2. O.P.U.(1994).

[10] D. E. Medjadi, M. Boukra, A. Djadane et B.K. Sadallaha : *Analyse Mathématiques, 1ère année d' université, Fonction de plusieures variables réelles.* Volume 1. O.P.U.(2001).

[11] M. Mehbali : *Mathématiques, 1ère année université.* Fonction d'une variable reélle, R*ésumés de cours-exercices corrigés.* O.P.U.(2003).

[12] M. Mehbali : *Mathématiques, 1ère année université.* Fonction d'une variable reélle, R*ésumés de cours-exercices corrigés.* O.P.U.(2003).

[13] M. Mehbali : *Mathématiques, 1ère année université.* Fonction d'une variable reélle, R*ésumés de cours-exercices corrigés.* O.P.U.(2003).

[14] N. Piskounov : *Calcul différentiel et intégral, Tome 1. 11^{e} édition. Edition.Mir.Moscou.* (1980).

[15] M. Houas :*Mathématiques 2, 1ère année université. Résumés de Cours et Exercices Résolus,* Faculté de Technologie, Université de Khemis Miliana. (2018).