الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Djilali BOUNAAMA Khemis Miliana
Faculté des Sciences et de la Technologie

جامعة الجيلالي بونعامة خميس مليانة
كلية العلوم والتكنولوجيا

Adresse : Rue Thniet El Had, Khemis Miliana, Ain Defla , Algérie. Tel :(213) 27556844

Intitulé du polycopié

Topologie et Analyse Fonctionnelle, Cours et Exercices Corrigés

Destiné aux étudiants

Niveau : Master 1

Spécialité : Analyse Mathématique et Applications

Auteur

Leila Slimane

Experts du polycopié	Grade	Établissement d'affiliation
Sadaoui Boualem	MCA	Université de Khemis-Miliana
Belgacem Rachid	MCA	Université de Chlef

Date de validation du polycopié par l'instance scientifique habilitée CSD et/ou CSF

CSD ....

CSF ....

Année universitaire : 2021/2022

República

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ DJILALI BOUNAAMA, KHEMIS MILIANA

FACULTÉ des SCIENCES et de la TECNOLOGIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES et INFORMATIQUE

Topologie et Analyse Fonctionnelle

Cours et Exercices Corrigés

Déstiné aux étudiants de

Master 1 Analyse Mathématique et Applications

Présenté par

Leila Slimane

Mars 2022

Table des matières

Avant-Propos

Ce polycopié est issu du cours de Topologie et Analyse Fonctionnelle présenté à l'Université de Djillali Bounaama - Khemis Miliana (premier semestre) ces trois dernières annés. Les sujets couverts dans ce cours sont principalement : topologie générale, les grands théorèmes de l'analyse fonctionnelle, la topologie faible et faible étoile, ainsi que les espaces réflexifs, séparables et uniformément convexes. Le contenu est conforme au Canva de Master 1 Mathématique, spécialité Analyse Mathématique et Applications. Ce document comporte cours, des exercices corrigés et des sujets d'examens donnés dans la période 2019-2022. Le présent polycopié est destiné principalement aux étudiants de Master 1 (Analyse Mathématique et Applications), il pourra aussi rendre service aux étudiants de Master 2 (comme pas mal de sujets de mémoires nécessitent des préliminaires d'analyse fonctionnelle et de la topologie), aux candidats pour le concours de doctorat en Mathématiques, ainsi qu'à toute personne s'intéressant à l'analyse fonctionnelle. On espère que ce polycopié constituera un support utile pour nos étudiants.

Introduction

L'analyse fonctionnelle, qui est maintenant à la base de pratiquement toute l'analyse et d'autres branches des mathématiques y font largement appel, est une discipline des mathématiques qui étudie les espaces fonctionnels, c'est-à-dire les espaces dont ses éléments sont des fonctions. Elle étudie et présente des outils indispensables pour l'analyse de ces espaces. Ces derniers sont nécessaires pour l'étude et la résolution de certains problèmes qui apparaissent dans plusieurs domaines comme les équations aux dérivées partielles, les équations intégrales, optimisation…etc. L'objectif principal de ce document est de familiariser l'étudiant avec les concepts de base, les principes et les méthodes de l'analyse fonctionnelle.

Ce polycopié est composé de cinq chapitres. À la fin de chaque chapitre des exercices corrigés sont donnés. Le premier chapitre porte sur la topologie générale. On présente la définition des espaces topologiques et leurs propriétés. Les notions de la convergence des suites, la continuité des applications ainsi que la compacité sont présentées dans le cadre d'un espace topologique.

Le deuxième chapitre est consacré aux espaces métriques et les espaces normés. Après avoir défini ces types d'espaces, les concepts vus dans le cadre d'un espace topologique sont reformulés en utilisant les distances et les normes. On a mis plus d'accent sur la compacité. De plus une nouvelle notion est étudiée qui est la complétude. Cette notion nous permet de définir les espaces de Banach, qui sont le cadre fonctionnel naturel dans lequel se fait la grande partie de l'analyse fonctionnelle. Les applications linéaires sont étudiées dans la dernière section de ce chapitre.

Ces deux chapitres sont destinés à rappeler et approfondir quelques notions et résultats déjà vus en Licence. En fait, on a essayé de préparer les outils nécessaires qu'on aura besoin dans les chapitres suivants. Ces deux chapitres vont fortement aider les étudiants, principalement ceux qui ont repris leurs études après des années de leur graduation en Licence.

Le troisième chapitre est dédié aux grands théorèmes de l'analyse fonctionnelle : le théorème de Baire, le théorème de Banach-Steinhaus, le théorème de l'application ouverte, le théorème du graphe fermé et finalement le théorème de Hahn-Banach avec ses deux versions géométrique et analytique. Ces théorèmes jouent un rôle très important dans le domaine de l'analyse fonctionnelle, ils interviennent dans la démonstration de pas mal de résultats. On présente aussi des conséquences et des applications de ces théorèmes.

L'étude de la topologie faible et la topologie faible étoile fait l'objet du quatrième chapitre. Ces deux topologies contiennent moins d'ouverts par rapport à la topologie forte (topologie normé) et par la suite plus de compacts et plus de suites convergentes. Les compacts jouent un rôle très important dans le domaine des équations aux dérivées partielles et l'optimisation.

Dans le dernier chapitre on étudie les espaces réflexifs et les espaces séparables. On présente leur définition et leurs propriétés, ainsi que des résultats de compacité. Les espaces uniformément convexes sont brièvement étudiés. Ce type d'espaces donne une caractéristique explicite des espaces réflexifs.

La plupart des résultats présentés dans ces trois derniers chapitres sont suivis par leur démonstration, lorsque celle-ci n'est pas trop difficile, très longue, très délicats, ou fait appel à des outils qui n'ont pas à notre porté dans ce cours.

On clôture ce polycopié avec quelques sujets d'examens des années précédentes, afin d'aider l'étudiant à mieux se prépare aux épreuves de la fin du semestre, et des références biographiques. Toute suggestion, avis ou remarque de la part des lecteurs (étudiants ou enseignants) qui concerne le font ou la forme de ce polycopié est la bienvenue; cela nous aidera à *l'améliorer*.

Chapitre 1

Topologie Générale

Dans ce chapitre nous présentons les notions de base de topologie générale, déjà vues en Licence, que nous aurons besoin tout au long de ce cours. Nous rappelons les notions d'espace topologique, de continuité, de topologie produit, de convergence des suites, et de compacité. Notons que l'objectif de la topologie générale est de généraliser les notions de limite, convergence, continuité et d'autres notions présentées dans l'espace $\mathbb{R}$ à un espace plus général X muni d'une certaine structure.

1.1 Espace topologique

Définition 1.1.1 *Soit X un ensemble. On appelle topologie sur X la donnée d'un ensemble $\mathcal{T}$ des parties de X vérifiant les conditions suivantes :*

1. *$\mathcal{T}$ contient X et $\emptyset$;*
2. *toute union (finie ou non) d'éléments de $\mathcal{T}$ est encore dans $\mathcal{T}$:*
   $\forall (U_i)_{i\in I}$ *une famille (finie ou infinie) d'éléments de $\mathcal{T}$ alors* $\underset{i\in I}{\cup} U_i \in \mathcal{T}$;
3. *toute intersection finie d'éléments de $\mathcal{T}$ est encore dans $\mathcal{T}$:*
   si $U_1, U_2, \cdots, U_n \in \mathcal{T}$ *alors* $\bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \mathcal{T}$.

Les éléments de $\mathcal{T}$ sont appelés ouverts de X et le couple $(X, \mathcal{T})$ est appelé espace topologique.

Si $(X, \mathcal{T})$ est un espace topologique, une partie A de X est dite un fermé de X si et seulement si son complémentaire $C_X A = X \backslash A$ est un ouvert. Comme :

$$X \backslash \bigcup_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} (X \backslash A_i) \quad \text{et} \quad X \backslash \bigcap_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} (X \backslash A_i),$$

on déduit de la définition précédente les propriétés suivantes sur les fermés :

1. X et l'ensemble vide $\emptyset$ sont des fermés ;
2. toute intersection (finie ou non) de fermés est un fermé ;
3. toute union finie de fermés est un fermé.

Exemples :

1. Soit X un ensemble. Alors $\{\emptyset, X\}$ est une topologie sur X, appelée la topologie grossière, c'est la plus petite topologie possible que l'on peut obtenir de X.
2. Soit $\mathcal{T} = P(X)$, l'ensemble de tout les parties de X. Alors $\mathcal{T}$ est une topologie appelée la topologie discrète, c'est la plus grande topologie possible que l'on peut obtenir de X.
3. Soit $X = \{a, b, c\}$ et $\mathcal{T} = \{\emptyset,\ X,\ \{a\},\ \{b\},\ \{a, b\}\}$. On peut vérifier que $\mathcal{T}$ est une topologie. Par contre $\mathcal{T}' = \{\emptyset,\ X,\ \{a\},\ \{b\},\ \{b, c\}\}$ n'est pas une topologie car $\{a\} \cup \{b\} = \{a, b\} \notin \mathcal{T}'$.
4. Sur $\mathbb{R}$ l'ensemble des réunions quelconques d'intervalles ouverts $]a, b[$ est une topologie. Sauf mention contraire on munit toujours $\mathbb{R}$ de cette topologie.

Définition 1.1.2 *Soit $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ deux topologies sur l'ensemble X. On dit que $\mathcal{T}_1$ est plus fine (ou plus forte) que $\mathcal{T}_2$ si $\mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_1$. C'est-à-dire tout ouvert de $\mathcal{T}_2$ est un ouvert de $\mathcal{T}_1$.*

Ainsi la topologie discrète est la plus fine et la topologie grossière est la moins fine de toutes les topologies. La topologie usuelle de $\mathbb{R}$ se situe entre les deux.

Définition 1.1.3 *Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique.*

– *On dit que V est un voisinage de x si V contient un ouvert de $\mathcal{T}$ contenant x.*

– *On note par $V(x)$ l'ensemble de tout les voisinages de x :*

$$V(x) = \{V \subset X;\ \exists O \in \mathcal{T} \text{ tel que } x \in O \subset V\}.$$

– *On dit que $B(x)$ est une base de voisinage de $x \in X$ si :*

$$\forall V \in V(x),\ \exists W \in B(x) \text{ tel que } W \subset V.$$

Proposition 1.1.1 *Une partie U de X est un ouvert si et seulement si elle est voisinage de chacun de ses points.*

Exemple : La famille $]r - \frac{1}{n}, r + \frac{1}{n}[$, $(r \in \mathbb{Q},\ n \in \mathbb{N}^*)$ constitue une base pour l'espace $\mathbb{R}$ muni de sa topologie usuelle.

Remarque 1.1.1 *Il n'y a pas en général unicité de base de voisinage pour une topologie.*

Définition 1.1.4 *Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique.*

1. *L'adhérence $\overline{A}$ d'une partie A de X est le plus petit fermé contenant A. On dit que A est dense dans X si $\overline{A} = X$.*

2. *Lintérieur $\overset{\circ}{A}$ d'une partie A de X est le plus grand ouvert contenu dans A.*

3. *On appelle frontière de A, que l'on note $Fr(A)$, l'ensemble $\overline{A} \backslash \overset{\circ}{A}$.*

On a les propriétés suivantes de l'adhérence et de l'intérieur :

Proposition 1.1.2 *Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et A et B deux parties de X.*

1. $\overline{A} = A \Leftrightarrow A$ est fermé.

2. $\overset{\circ}{A} = A \Leftrightarrow A$ est ouvert.

3. $A \subset \overline{A}, \qquad \overline{\overline{A}} = \overline{A}, \qquad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}, \quad \overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}.$

4. $C_X \overset{\circ}{A} = \overline{C_X A}, \qquad C_X \overline{A} = \overset{\circ}{\overbrace{C_X A}}.$

5. $\overset{\circ}{A} \subset A$, $\overset{\circ}{\overbrace{\overset{\circ}{A}}} = \overset{\circ}{A}$, $\overset{\circ}{\overbrace{A \cap B}} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$.

6. $FrA = \overline{A} \cap \overline{C_X A}$.

Proposition 1.1.3 *Soit A une partie d'un espace topologique $(X, \mathcal{T})$.*

1. *Un point x de X est dans $\overline{A}$ si et seulement si l'intersetion de tout voisinage de x avec A est non vide.*

2. *L'ensemble A est dense dans X si et seulement si A recontre tout ouvert non vide de X.*

Preuve. Montrons *1.*; pour l'implication directe supposons qu'il existe un ouvert Ω contenant x et disjoint de A alors $X \backslash \Omega$ est un fermé qui contient A, par la suite $\overline{A}$. Ceci signifie que $x \notin \overline{A}$.

Réciproquement, supposons que $x \notin \overline{A}$ alors x est dans l'ouvert $X \backslash \overline{A}$ qui est lui même un voisinage de x ne recontrant pas A.

Montrons maintenant *2*. Supposons que A est dense dans X et soit Ω un ouvert non vide de X et x un point de Ω. Alors Ω est un voisinage de $x \in X = \overline{A}$. D'après 1. on obtient que Ω recontre A.

Réciproquement, supposons que tout ouvert non vide de X recontre A. Soit $x \in X$ quelconque et V un voisinage de x (que l'on peut toujours supposer ouvert). Alors, d'après 1., V recontre A, par la suite $x \in \overline{A}$, c'est -à-dire $\overline{A} = X$. ∎

Définition 1.1.5 *Un espace topologique est séparé (ou de Hausdorff) si la propriété suivante est vérifiée : $\forall x, y \in X$ avec $x \neq y$, $\exists V \in V(x)$, $\exists W \in V(y)$ tels que $V \cap W = \emptyset$.*

Exemples :

1. L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ muni de sa topologie usuelle est un espace séparé.

2. Un ensemble muni de la topologie discrète est séparé car tout singleton est un voisinage du point qu'il contient.

3. Si l'ensemble X contient au moins deux éléments et il muni de la topologie grossière $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$ alors X n'est pas séparé.

Définition 1.1.6 *Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et A un sous-ensemble de X. On appelle la topologie induite par $\mathcal{T}$ sur A, notée $\mathcal{T}_A$, la topologie définie par :*

$$\mathcal{T}_A = \{O \cap A, \quad \forall O \in \mathcal{T}\}.$$

Sauf mention contraire les parties d'un espace topologique sont munies toujours de la topologie induite. De plus si A est un ouvert (resp. fermé) de X alors tout ouvert (rep. fermé) de A est un ouvert (resp. fermé) de X.

1.2 Continuité

Dans toute cette section $(X, \mathcal{T})$ et $(Y, \mathcal{T}')$ désignent deux espaces topologiques et $f : X \to Y$ une application.

Définition 1.2.1 *Soient $x_0 \in X$ et $y_0 \in Y$. On dit que $f(x)$ tend vers y_0 lorsque x tend vers x_0 (et on écrit $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y_0$) si :*

$$\forall W \in V(y_0),\ \exists V \in V(x_0) \text{ tel que } f(V) \subset W.$$

Grâce aux propriétés suivantes : $A \subset f^{-1}(f(A))$ et $f(f^{-1}(B)) \subset B$ (qui sont vraies pour toute application $f : X \to Y$, tout $A \subset X$ et tout $B \subset Y$) on obtient la définition équivalente suivante :

Définition 1.2.2 *Soient $x_0 \in X$ et $y_0 \in Y$. On dit que $f(x)$ tend vers y_0 lorsque x tend vers x_0 si : $\forall W \in V(y_0) : f^{-1}(W) \in V(x_0)$.*

On présente maintenant le concept de la continuité d'une application en un point.

Définition 1.2.3 *On dit que f est continue en $x_0 \in X$ si $f(x)$ tend vers $f(x_0)$ lorsque x tend vers x_0 c'est-à-dire :*

$$\forall W \in V(f(x_0)),\ \exists V \in V(x_0) \text{ tel que } f(V) \subset W;$$

ce qui est équivalent à : $\quad \forall W \in V(f(x_0) : \ f^{-1}(W) \in V(x_0).$

Définition 1.2.4 *On dit que l'application $f : X \to Y$ est continue sur X si elle est continue en tout point de X.*

Théorème 1.2.1 ***(fondamental)*** *Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *l'application f est continue sur X ;*
2. *l'image réciproque de tout ouvert de Y est un ouvert de X : $\forall O \in \mathcal{T}'$; $f^{-1}(O) \in \mathcal{T}$;*
3. *l'image réciproque de tout fermé de Y est un fermé de X.*

Preuve. Montrons uniquement que 1. et 2. sont équivalentes et déduisons 3. directement de :

$$f^{-1}(C_Y A) = C_X f^{-1}(A), \quad \forall A \subset Y.$$

1. $\Rightarrow$ 2. Supposons que f est continue sur X et considérons Ω' un ouvert de X'. Soit $x \in f^{-1}(\Omega')$ et posons $x' = f(x)$. L'ouvert Ω' est un voisinage de x'. La continuité de f en x implique l'existence d'un voisinage V de X tel que $f(V) \subset \Omega'$. Cela signifie que $V \subset f^{-1}(\Omega')$. Alors, $f^{-1}(\Omega')$ est bien un ouvert de X.

2. $\Rightarrow$ 1. Supposons que l'image réciproque de tout ouvert de Y est un ouvert de X. Soit x un point quelconque de X et V' un voisinage de $f(x)$ c'est-à-dire il existe un ouvert Ω' de X' tel que $f(x) \in \Omega' \subset V'$. On a donc $x \in f^{-1}(\Omega') \subset f^{-1}(V')$. Comme $f^{-1}(\Omega')$ est un ouvert de X, grâce à l'hypothèse faite sur f, on obtient que $f^{-1}(V')$ est un voisinage de x, i.e. f est continue en x. ■

Exemples :

1. L'application identité d'un espace topologique $Id : (X, \mathcal{T}_1) \to (X, \mathcal{T}_1)$ est continue.
2. L'application constante d'un espace vers un autre est continue.
3. L'application définie par : $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 1 & \text{si } x \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$

   est partout discontinue (n'est pas continue en aucun point de $\mathbb{R}$). En effet, soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On distingue deux cas :

i) Si $x_0 \in \mathbb{Q}$, on a $f(x_0) = 0$. Pour tout $\varepsilon \in \left]0, 1\right]$, $f^{-1}(]-\varepsilon, \varepsilon[) = \mathbb{Q}$ n'est pas un ouvert dans $\mathbb{R}$. Par la suite f n'est pas continue sur $\mathbb{Q}$.

ii) Si $x_0 \notin \mathbb{Q}$, on a $f(x_0) = 1$. Pour tout $\varepsilon \in \left]0, 1\right]$, $f^{-1}(]1-\varepsilon, 1+\varepsilon[) = C_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}$ n'est pas un ouvert dans $\mathbb{R}$. Donc f n'est pas continue sur $C_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}$.

On conclut que l'application f est discontinue sur $\mathbb{R}$.

Remarque 1.2.1 *La notion de continuité dépend aux topologies des ensembles de départ et d'arrivé. Tout changement de l'une ou l'autre des deux topologies peut rendre l'application continue ou non.*

Proposition 1.2.1 *Sur l'ensemble X la topologie $\mathcal{T}_1$ est plus fine que la topologie $\mathcal{T}_2$ si et seulement si l'application identité $Id : (X, \mathcal{T}_1) \to (X, \mathcal{T}_2)$ est continue.*

Définition 1.2.5 *L'application (resp. l'application linéaire) $f : X \to Y$ est appelée un homéomorphisme (resp. isomorphisme) si :*

1. *L'application f est une bijection continue de X vers Y.*
2. *L'application réciproque f^{-1} est continue.*

S'il existe un homéomorphisme (resp. isomorphisme) entre X et Y, X et Y sont dits homéomorphes (resp. isomorphes).

Théorème 1.2.2 ***(de composition)*** *Soit $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{T}')$ et $(Z, \mathcal{T}'')$ trois espaces topologiques et x un point de X. Soient aussi $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ deux applications telles que f est continue en x et g est continue en $f(x)$. Alors l'application composée $g \circ f : X \to Z$ est continue en x.*

Preuve. Soit V un voisinage de $g \circ f(x) = g(f(x))$. Comme g est continue en $f(x)$, on a $g^{-1}(V)$ est un voisinage de $f(x)$. Mais f est continue en x donc $f^{-1}(g^{-1}(V))$ est un voisinage de x. Donc $g \circ f$ est continue en x. ■

1.3 Topologie produit

Soit $(X_i, \mathcal{T}_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques, avec I un ensemble quelconque et les X_i sont non vides. On définit le produit de cette famille par :

$$\prod_{i\in I} X_i = \left\{(x_i)_{i\in I}\,,\ x_i \in X_i\right\}.$$

La notation $(x_i)_{i\in I}$ désigne donc une famille d'éléments, où x_i est un élément de X_i. Dans le cas d'une famille finie ou dénombrable $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ on peut noter les éléments du produit par $(x_1,\ x_2, \cdots,\ x_n, \cdots)$ avec $x_i \in X_i$. Dans le cas où I est un ensemble quelconque on ne peut pas utiliser une telle représentation car elle n'a pas de sens.

Afin de définir la topologie produit on donne la notion suivante.

Définition 1.3.1 *Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille d'ensembles. Pour tout $j \in I$ on définit la projection canonique par :*

$$P_j : \prod_{i\in I} X_i \to X_j, \qquad P_j\left((x_i)_{i\in I}\right) = x_j.$$

Définition 1.3.2 *La topologie produit est la topologie la moins fine sur $\prod\limits_{i\in I} X_i$ rendant continues toutes les projections canoniques.*

Notons que si A_j est une partie de X_j alors on a : $P_j^{-1}(A_j) = A_j \times \prod\limits_{i\in I, i\neq j} X_i$ et si J est une partie de I, on a donc $\bigcap\limits_{j\in J} P_j^{-1}(A_j) = \prod\limits_{j\in J} A_j \times \prod\limits_{j\in I-J} X_j$.

Définition 1.3.3 *On appelle les rectangles (ou ouverts) élémentaires de $\prod\limits_{i\in I} X_i$ les sous-ensembles définis par : $\prod\limits_{i\in J} \mathcal{O}_i \times \prod\limits_{i\in I-J} X_i$ où J est une partie finie de I et $\mathcal{O}_i$ ouvert de X_i pour tout $i \in J$. On appelle ouvert de $\prod\limits_{i\in I} X_i$ pour la topologie produit une réunion de rectangles (ou d'ouverts) élémentaires.*

Remarque 1.3.1 *Lorsque l'ensemble I est fini, tout produit d'ensembles ouverts est un ouvert pour la topologie produit. Par exemple, l'espace $\mathbb{R}^n, n \geq 1$ sera muni de la topologie produit de n droites réelles : une base de cette topologie est constituée de l'ensemble des* *ouverts élémentaires* $\prod_{i=1}^{n}]a_i, b_i[$ *où* $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, *ces ensembles sont appelés des pavés ouverts. Cette propriété est fausse dans le cas ou* I *est infini : un produit d'ensembles ouverts n'est un ensemble ouvert que dans les deux cas suivants : ou bien ce produit est vide, ou bien* $\mathcal{O}_i = X_i$ *sauf pour un nombre fini d'indices* i*. En effet, dans les autres cas un tel ensemble est non vide et ne contient aucun ouvert élémentaire non vide, il ne peut donc être une réunion d'ouverts élémentaires.*

Remarque 1.3.2 *Un système fondamental de voisinage d'un point de* x *est constitué par les produits* $\prod_{i \in I} \mathcal{V}_i$, *où* $\mathcal{V}_i$ *est un voisinage de* a_i *pour tout* $i \in I$, *mais où tout les* $\mathcal{V}_i = X_i$ *sauf pour un nombre fini de valeur de* i.

Contrairement à ce qui se passe pour les ouverts, on a le résultat suivant pour les fermés :

Proposition 1.3.1 *Un produit* $A = \prod_{i \in I} A_i$ *d'ensembles fermés* A_i *est toujours fermé pour la topologie produit.*

Preuve. Soit $X = \prod_{i \in I} X_i$ un produit des espaces X_i. Un point $(x_i)_{i \in I}$ appartient à $C_X A$ si et seulement si il existe un $i \in I$ tel que $x_i \in C_X A_i$; autremant dit $C_X A$ est la réunion des ensembles $C_X A_i \times \prod_{j \in I, j \neq i} X_j$, $i \in I$ qui sont tous des rectangles ouverts donc $C_X A$ est ouvert et par la suite A est fermé. ∎

On donne maintenant une propriété importante de la topologie produit.

Proposition 1.3.2 *Si tous les espaces topologiques* $(X_i, \mathcal{T}_i)_{i \in I}$ *sont séparés alors* $\prod_{i \in I} X_i$ *muni de la topologie produit est aussi séparé.*

Preuve. Considérons a et b deux éléments distincts de $\prod_{i \in I} X_i$. Ceci donne l'existence de i_0 tel que $a_{i_0} \neq b_{i_0}$. Puisque l'espace X_{i_0} est séparé, il existe donc deux ouverts disjoints U_{i_0} et V_{i_0} de X_{i_0} contenant respectivement a_{i_0} et b_{i_0}. Il est alors clair que :

$$U_{i_0} \times \prod_{i \neq i_0} X_i \qquad \text{et} \qquad V_{i_0} \times \prod_{i \neq i_0} X_i$$

sont deux voisinages ouverts disjoints de l'espace produit contenant a et b respectivement.

∎

1.4 Limite et valeurs d'adhérence d'une suite

Dans toute cette section $(X, \mathcal{T})$ désigne un espace topologique.

Définition 1.4.1 *Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de X et l un point de X. On dit que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l (et on écrit $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = l$) si :*

$$\forall V \in V(l), \ \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \text{ tel que } \forall n \geq n_0 \text{ alors } x_n \in V.$$

Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l on dit que l est la limite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Remarque 1.4.1 *Dans un espace topologique la limite d'une suite n'est pas nécessairement unique. Par exemple si $(X, \mathcal{T})$ est la topologie grossière alors tout élément de X est la limite de toute suite d'éléménts de X.*

Proposition 1.4.1 *Dans un espace topologique séparé, la limite de toute suite (si elle existe) est unique.*

Preuve. *Raisonons par l'absurde. Supposons qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'un espace topologique séparé $(X, \mathcal{T})$ qui possède deux limites distinctes l_1 et l_2 (l_1, $l_2 \in X$).*
Comme X est séparé et $l_1 \neq l_2$ alors il existe V_1 un voisinage de l_1 et V_2 un voisinage de l_2 tels que $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Mais l_1 est une limite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, donc il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq n_1 \Rightarrow x_n \in V_1.$$

De même l_2 est une limite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, donc il existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq n_2 \Rightarrow x_n \in V_2.$$

Par la suite, pour $n \in \mathbb{N}$ vérifiant $n > \max = (n_1, n_2)$, on obtient que $x_n \in V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$. Contradiction avec le fait que $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. ■

Proposition 1.4.2 *Soit F un fermé de $(X, \mathcal{T})$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente d'éléménts de F. Alors la limite de cette suite est encore dans F. On dit que F est séquentiellement fermé.*

Preuve. Raisonnons par l'absurde et supposons que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite l telle que $l \in X\backslash F$. Comme $X\backslash F$ est un voisinage de l (car $X\backslash F$ est un ouvert qui contient l), alors il doit contenir tout les termes de la suite à partir d'un certain rang. Ceci contredit le fait que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de F. ■

Nous donnons maintenant la notion de valeur d'adhérence d'une suite d'un espace topologique.

Définition 1.4.2 *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléménts de X. On dit que a est valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si :* $\forall V \in V(a),\ \forall n_0 \in \mathbb{N}, \exists n \geq n_0$ *tel que* $x_n \in V$.

Remarque 1.4.2 *La limite d'une suite (si elle existe) est toujours une valeur d'adhérence pour cette suite mais la réciproque est (généralement) fausse.*

Exemple : Dans $\mathbb{R}$ muni de sa topologie usuelle, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = (-1)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, possède -1 et 1 comme valeurs d'adhérence.

On note que si a est une valeur d'adhérence d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ alors il existe une suite extraite $(x_{n_k})_{n_k\in\mathbb{N}}$ qui converge vers a.

Proposition 1.4.3 *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléménts de X et A l'ensemble des valeurs d'adhérence de cette suite. Alors $A = \underset{n\in\mathbb{N}}{\cap} F_n$ où $F_n = \overline{\{x_n, x_{n+1}, \cdots\}}$.*

Preuve. Soit $l \in A$, $n \in \mathbb{N}$ et V un voisinage quelconque de l. Comme V coupe l'ensemble $\{x_n, x_{n+1}, \cdots\}$, on obtient que $l \in F_n$. Mais n est arbitraire, alors $l \in \underset{n\in\mathbb{N}}{\cap} F_n$ donc $A \subset \underset{n\in\mathbb{N}}{\cap} F_n$. On peut vérifier l'inculsion inverse d'une manière analogue. ■

Proposition 1.4.4 *Soient $(X, \mathcal{T})$ et $(Y, \mathcal{T}')$ deux espaces topologiques, $x \in X$ et $f : X \to X'$ continue en x. Alors pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléménts de X convergente vers x, on a :* $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x)$ *(appelée continuité séquentielle).*

Preuve. Supposons que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x et que l'application f est continue en x. Soit W un voisinage de $f(x)$. Comme f est continue en x, $f^{-1}(W)$ est un voisinage de x. Puisque la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x, il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$ on a $x_n \in f^{-1}(W)$. Ceci implique que pour tout $n \geq n_0$, $f(x_n) \in W$. On en déduit alors que $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge bien vers $f(x)$. ■

On note que la continuité séquentielle est plus faible que la continuité.

1.5 Compacité

La notion de compacité est d'une importance fondamentale. Elle permet sous certaines hypothèses de montrer que des suites possèdent des sous-suites convergentes. Dans cette section, nous présentons la notion de compacité et nous donnons ses propriétés les plus classiques dans le cadre des espaces topologiques.

Définition 1.5.1 *Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. On dit que $(X, \mathcal{T})$ satisfait la propriété de Borel-Lebesgue si : "de tout recouvrement d'ouverts de X on peut extraire un sous recouvrement fini", ou bien :*
$\forall (\Omega_i)_{i\in I}$ *une famille d'ouverts telle que* $\underset{i\in I}{\cup}\Omega_i = X$, $\exists J \subset I$, *avec J fini, tel que* $\underset{i\in J}{\cup}\Omega_i = X$.

Définition 1.5.2 *On dit que $(X, \mathcal{T})$ est compact s'il est séparé et vérifie la propriété de Borel-Lebesgue. De plus, une partie A d'une topologie $(X, \mathcal{T})$ est compacte si munie de la topologie induite est un espace topologique compact.*

Par passage au complémentaire on obtient une proprtiété équivalente de celle de Borel-Lebesgue en utilisant les fermés donnée par la proposition suivante :

Proposition 1.5.1 *Un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ séparé est compact si et seulement si de toute famille de fermés d'intersection vide, on peut extraire une sous-famille d'intersection vide :*

$\forall (F_i)_{i\in I}$ *une famille de fermés telle que* $\underset{i\in I}{\cap}F_i = \emptyset$, $\exists J \subset I$ *avec J fini tel que* $\underset{i\in J}{\cap}F_i = \emptyset$.

La proposition suivante nous donne une caractérisation de la compacité d'une partie d'un espace topologique séparé sans faire appel à la topologie induite c'est-à-dire en travaillant directement avec les ouverts de X.

Proposition 1.5.2 *Une partie A d'un espace topologique $(X,\mathcal{T})$ séparé est compacte si et seulement si de toute famille d'ouverts $(\Omega_i)_{i\in I}$ de X telle que : $A \subset \underset{i\in I}{\cup}\Omega_i$, on peut extraire un nombre fini d'ouverts tels que : $A \subset \underset{i\in J}{\cup}\Omega_i$ ($J \subset I$ avec J fini).*

Un résultat équivalent à la proposition 1.5.2 en utilisant les fermés est donné par la proposition suivante :

Proposition 1.5.3 *Une partie A d'un espace topologique $(X,\mathcal{T})$ séparé est compacte si et seulement si de toute famille de fermés $(F_i)_{i\in I}$ de X d'intersection disjointe avec A : $(\underset{i\in I}{\cap}F_i)\cap A = \emptyset$, on peut extraire un nombre fini de fermés d'intersection disjointe avec A : $(\underset{i\in J}{\cap}F_i)\cap A = \emptyset$ ($J \subset I$ avec J fini).*

Exemples :

1. Si $(X,\mathcal{T})$ est un ensemble fini, muni de sa topologie discrète, alors $(X,\mathcal{T})$ est compact.
2. L'ensemble $\mathbb{R}$ muni de sa topologie usuelle n'est pas compact. En effet, à partir du recouvrement $(]-n,n[)_{n\in\mathbb{N}}$ on ne peut pas extraire un sous recouvrement fini de $\mathbb{R}$ mais l'intervalle $[a,\, b]$ est bien compact.
3. Dans un espace séparé l'ensemble constitué d'une suite convergente et sa limite est compact.

Théorème 1.5.1 *Soit $(X,\mathcal{T})$ un espace topologique séparé et A une partie de X.*

i) *Si A est compacte alors A est fermée.*

ii) *Réciproquement si X est compact alors toute partie fermée A est compacte.*

Preuve. Pour montrer **i)**, il suffit de montrer que $X\backslash A$ est un ouvert. Ce qui est équivalent à montrer que $X\backslash A$ est un voisinage de tout ses points. Soit $x \in X\backslash A$. Comme $x \notin A$ et la topologie est séparée, donc pour tout $a \in A$ il existe deux ouverts disjoints V_a et W_a

tels que $V_a \cap W_a = \emptyset$. Mais A est supposée compact et on a :

$$A \subset \underset{a \in A}{\cup} W_a,$$

alors d'après proposition 1.5.2, on peut extraire un sous recouverement fini $(W_{a_i})_{1 \leq i \leq n}$ tel que :

$$A \subset \underset{1 \leq i \leq n}{\cup} W_{a_i}.$$

Il est clair que $\underset{1 \leq i \leq n}{\cap} V_{a_i}$ est un voisinage ouvert de x ne recontrant pas A. Le point x étant arbitraire de $X \backslash A$, on déduit que $X \backslash A$ est un ouvert.
Afin de prouver **ii)** considérons une famille de fermés $(F_i)_{i \in I}$ de A d'intersection vide. Chaque F_i est aussi un fermé de X, car A est fermé. Comme X est compact, on peut extraire une sous-famille finie d'intersection vide (voir proposition 1.5.1). On en déduit que A est compacte. ■

Proposition 1.5.4 *Soit X un espace topologique séparé.*

i) *Toute réunion finie de parties compactes de X est un compact de X.*

ii) *Toute intersection de parties compactes de X est un compact de X.*

Preuve. Supposons que X est un espace topologique séparé.
i) Soit $(\Omega_i)_{i \in I}$ un recouvrement d'ouverts de l'union de compacts $\underset{1 \leq k \leq n}{\cup} K_k$ c'est-à-dire : $\underset{1 \leq k \leq n}{\cup} K_k \subset \underset{i \in I}{\cup} \Omega_i$. On a $\underset{i \in I}{\cup} \Omega_i$ est aussi un recouvrement de K_k pour chaque k, $k = 1, \cdots, n$. Donc pour tout $k = 1, \cdots, n$ il existe une partie finie J_k de I telle que $K_k \subset \underset{i \in J_k}{\cup} \Omega_i$. Si on pose $J = J_1 \cup \cdots \cup J_n$, $\underset{i \in J}{\cup} \Omega_i$ est un sous recouvrement fini de $\underset{1 \leq k \leq n}{\cup} K_k$.
ii) On a : $\underset{1 \leq k \leq n}{\cap} K_k \subset K_1$ Intersection des fermés est un fermé et tout fermé dans un compact est compact d'après théorème 1.5.1. ■

Proposition 1.5.5 *Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique compact et $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante de fermés non vides : $F_{n+1} \subset F_n$, $F_n \neq \emptyset$, alors $\underset{n \in \mathbb{N}}{\cap} F_n \neq \emptyset$.*

Preuve. Utilisons un raisonnement par l'absurde. Supposons que $\underset{n\in\mathbb{N}}{\cap} F_n = \emptyset$, alors comme X est compact, il existe $n_1, n_2, \cdots, n_N \in \mathbb{N}$ tels que :

$$F_{n_1} \cap F_{n_2} \cap \cdots \cap F_{n_N} = \emptyset.$$

Mais comme $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante on a :

$$F_{n_1} \cap F_{n_2} \cap \cdots \cap F_{n_N} = F_{\max(n_1, n_2, \cdots, n_N)}.$$

Donc : $F_{\max(n_1,n_2,\cdots,n_N)} = \emptyset$. Contradiction avec l'hypothèse. ■

Voici une conséquence importante de cette proposition.

Théorème 1.5.2 *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments d'un espace topologique compact X. Alors :*

i) *La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède au moins une valeur d'adhérence.*

ii) *Si la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une seule valeur d'adhérence l, alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l.*

Preuve. i) Posons $F_n = \overline{\{x_n, x_{n+1}, \cdots\}}$. D'après la proposition 1.4.3 l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est $A = \underset{n\in\mathbb{N}}{\cap} F_n$. La proposition 1.5.5 garantit que A est non vide.
ii) Supposons que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers l. Il existe un voisinage ouvert V de l et une suite extraite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ avec $x_{n_k} \in F = X \backslash V$ $(k = 1, 2, \cdots)$. D'après **i)** cette sous-suite possède elle même une valeur d'adhérence l', $l' \in A \cap F$, donc A contient deux éléments distincts l, l'. Contradiction avec l'hypothèse. ■

Théorème 1.5.3 *Soit $(X, \mathcal{T})$ et $(Y, \mathcal{T}')$ deux espaces topologiques séparés. L'image d'un compact par une application continue de X dans Y est compacte.*

Preuve. Soient $f : X \to Y$ une application continue et K un compact de X.
Considérons $\underset{i\in I}{\cup} \Omega'_i$ un recouverement d'ouverts de $f(K)$. Comme f est continue $\underset{i\in I}{\cup} f^{-1}(\Omega'_i)$ est un recouverement d'ouverts de K. Puisque K est compact, on peut extraire un sous-recouvrement fini, $K \subset \underset{i\in J}{\cup} f^{-1}(\Omega'_i)$ $(J \subset I$ avec J fini$)$. On obtient alors : $f(K) \subset \underset{i\in J}{\cup} \Omega'_i$ $(J \subset I$ avec J fini$)$. En conséquence $f(K)$ est compact. ■

On note que l'image réciproque d'un compact par une application continue n'est pas nécessairement un compact.

Corollaire 1.5.1 *Soient X un espace compact et Y un espace séparé, alors l'image d'une partie fermée par une application continue $f : X \to Y$ est fermée.*

Preuve. En effet toute partie fermée de X est compacte et l'image d'un compact par une application continue dans un espace séparé est compacte, donc elle est fermée. ■

Le théorème suivant donne un résultat de compacité dans le cas d'un espace produit.

Théorème 1.5.4 ***(Théorème de Tychonov)*** *Tout produit d'espaces compacts est encore compact.*

1.6 Exercices

Exercice 1.1 *Soit X un espace topologique et $f : X \to \mathbb{R}$ une application.*

1. *Montrer que f est continue si et seulement si pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, les ensembles $\{x \in X,\ f(x) < \lambda\}$ et $\{x \in X,\ f(x) > \lambda\}$ sont des ouverts dans X.*
2. *Montrer que si f est continue, alors pour tout ouvert U, $f^{-1}(U)$ est un ouvert et réunion dénombrable de fermés.*

Solution.

1. Implication directe ; si f est continue alors $\{x \in X,\ f(x) < \lambda\} = f^{-1}(] - \infty, \lambda[)$ est un ouvert comme image réciproque par une application continue de l'intervalle ouvert $] - \infty, \lambda[$. Pareil avec $]\lambda, +\infty[$.

   Réciproquement. Commençons par noter que tout intervalle ouvert $]a, b[$ (avec $a < b$) peut s'écrire :
   $$]a, b[=]-\infty, b[\cap]a, +\infty[.$$
   Donc :

$$f^{-1}(]a,b[) = f^{-1}(]-\infty,b[) \cap f^{-1}(]a,+\infty[)$$

est une intersection de deux ouverts donc un ouvert de X. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}$. Comme U peut s'écrire comme l'union dénombrable d'intervalles ouverts :

$$U = \bigcup_{i\in I}]a_i, b_i[\,.$$

Alors :

$$f^{-1}(U) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(]a_i, b_i[)$$

est une réunion d'ouverts donc un ouvert de X, *i.e.* f est continue.

2. Supposons que f est continue. Traitons le cas d'intervalle ouvert de type $]a,b[$. On a :

$$]a,b[= \bigcup_{j\in\mathbb{N}^*} \left[a+\tfrac{1}{j}, b-\tfrac{1}{j}\right].$$

Par la suite :

$$f^{-1}(]a,b[) = \bigcup_{j\in\mathbb{N}^*} f^{-1}(\left[a+\tfrac{1}{j}, b-\tfrac{1}{j}\right])$$

est une union dénombrable de fermés car f est continue. Comme la question précédente utilisons le fait que tout ouvert U de $\mathbb{R}$ s'écrit :

$$U = \bigcup_{i\in I}]a_i, b_i[\,,$$

avec I dénombrable. Donc on peut écrire :

$$f^{-1}(U) = \bigcup_{i\in I} \bigcup_{j\in\mathbb{N}^*} f^{-1}(\left[a_i+\tfrac{1}{j}, b_i-\tfrac{1}{j}\right]),$$

qui est union dénombrable de fermés. De plus, $f^{-1}(U)$ est un ouvert car f est continue.

Exercice 1.2 *Soit X et Y deux espaces topologiques. Une application $f : X \to Y$ est dite ouverte si l'image de tout ouvert de X par f est un ouvert de Y, fermée si l'image de tout fermé de X par f est un fermé de Y.*

1. *Montrer que f est continue si et seulement si $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ pour tout A dans X.*
2. *Montrer que f est fermée si et seulement si $\overline{f(A)} \subset f(\overline{A})$ et que f est ouverte si et seulement si $f(\overset{\circ}{A}) \subset \overset{\circ}{\overbrace{f(A)}}$.*

Solution.

1. Implication directe. Supposons que f est continue. Soit $y \in f(\overline{A})$. Il existe alors $x \in \overline{A}$ tel que $y = f(x)$. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de A qui converge vers x. Alors $y_n = f(x_n)$. Puisque f est continue alors y_n converge vers $f(x) = y$. Donc y est adhérent à $f(A)$. Ceci montre que $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

   Réciproquement. Soit F un fermé de Y. Posons : $A = f^{-1}(F)$. Donc $f(A) \subset F$ et la relation $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ devient $f(\overline{A}) \subset \overline{F} = F$, car l'ensemble F est fermé. Donc $\overline{A} \subset f^{-1}(F) = A$. Par la suite $\overline{A} = A$. Ce qui signifie que A est fermé. On déduit alors que l'image réciproque de tout fermé F est un fermé, donc f est continue.

2. Soit f une application fermée et $A \subset X$. On a $A \subset \overline{A}$ donc $f(A) \subset f(\overline{A})$. Comme $\overline{A}$ est un fermé et f est fermé alors $f(\overline{A})$ est un fermé contenant $f(A)$. Mais sachant que $\overline{f(A)}$ est le plus petit fermé contenant $f(A)$ on déduit que $\overline{f(A)} \subset f(\overline{A})$.

   Réciproquement. La relation pour un fermé F donne $\overline{f(F)} \subset f(\overline{F}) = f(F)$. Donc $\overline{f(F)} = f(F)$, ce qui signifie que $f(F)$ est fermé. On conclut alors que f est une application fermée.

   Par le même type de raisonnement on procède avec f ouverte :

   Soit f ouverte et soit $A \subset X$. On a $\mathring{A} \subset A$ donc $f(\mathring{A}) \subset f(A)$. Comme f est ouverte on a $f(\mathring{A})$ est ouvert. Mais $\overbrace{f(A)}^{\circ}$ est le plus grand ouvert contenu dans $f(A)$. On déduit alors : $f(\mathring{A}) \subset \overbrace{f(A)}^{\circ}$.

   Reciproquement. La relation pour un ouvert U donne : $f(\mathring{U}) = f(U) \subset \overbrace{f(U)}^{\circ}$, donc $f(U) = \overbrace{f(U)}^{\circ}$, ce qui montre que f est ouverte.

Exercice 1.3 *Soit X et Y deux espaces topologiques.*

1. *Montrer que l'application $(x, y) \in X \times Y \to \Pi(x, y) = x \in X$ est ouverte mais pas nécessairement fermée (considérer l'hyperbole équilatère de $\mathbb{R}^2$) (voir exercice 1.2 pour la définition d'une application ouverte ou fermée).*

2. *Montrer que toute fonction polynômiale de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est une application fermée .*

Solution.

1. Soit $\mathcal{O}$ un ouvert élémentaire de $X \times Y$; donc U est de la forme $\mathcal{O} = \mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2$ avec $\mathcal{O}_1, O_2$ des ouverts de X, Y respectivement. Donc $\Pi(\mathcal{O}) = \mathcal{O}_1$ est un ouvert de X. Comme un ouvert $\mathcal{U}$ de X est une réunion d'ouverts élémentaires : $\mathcal{U} = \bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{U}_\lambda$ et $\Pi(\mathcal{U}) = \bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} \Pi(\mathcal{U}_\lambda)$ ceci donne que $\Pi(\mathcal{U})$ est un ouvert et par la suite Π est une application ouverte.

   Soit $X = Y = \mathbb{R}$ et $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ xy = 1\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

   En effet $H = g^{-1}\{1\}$ où $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est la fonction continue définie par $g(x, y) = xy$. D'autre part $H = G(f)$ (le graphe de f) où $f : \mathbb{R} \backslash \{0\} \to \mathbb{R}$ avec $f(x) = 1/x$. Cependant si $\Pi(x, y) = x$ alors $\Pi(H) = \mathbb{R}^*$ n'est pas un fermé de $X = \mathbb{R}$, ce qui signifie que Π n′est pas fermée.

2. Soit P un polynôme et F un fermé de $\mathbb{R}$. Considérons $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $P(F)$ qui converge vers $y \in \mathbb{R}$. Il existe $x_n \in F$ tel que $y_n = P(x_n)$. Puisque $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente alors elle est bornée, par la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi bornée. Car un polynôme n'a une limite infini qu'en $\pm\infty$. Comme $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée de $\mathbb{R}$, il existe une sous-suite notée encore $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $x \in F$. Puisque F est fermé et P est continue (c'est un polynôme) on a :

   $$y_n = P(x_n) \to P(x) \in P(F).$$

   Mais $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers y. L'unicité de la limite donne que $y = P(x) \in P(F)$. Donc $P(F)$ est fermé.

Exercice 1.4 *Soit X et Y deux espaces topologiques et $f : X \to Y$ une bijection continue.*

1. *Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :*

   i) *f est ouverte.*

   ii) *f est fermée.*

iii) *f est un homéomorphisme.*

2. *Supposons maintenant que X est compact et Y est séparé. Montrer que f^{-1} est continue et que Y est compact.*

Solution.

1. **i) ⇒ii)** Soit F un fermé de X. On a $Y \backslash f(F) = f(X \backslash F)$ donc $Y \backslash f(F)$ est ouvert et par la suite $f(F)$ est fermé.

   ii)⇒iii) Posons $g = f^{-1}$ et soit F un fermé de X, $g^{-1}(F) = f(F)$ est fermé donc $g = f^{-1}$ est continue i.e. f est un homémorphisme.

   iii)⇒i) Soit U un ouvert de X. On a $f(U) = g^{-1}(U)$ est ouvert donc f est une application ouverte.

2. D'après le résultat de la question précédente, il suffit de montrer que f est fermée. Soit donc F un fermé de X. Comme X est compact, on déduit que F est compact. Ce qui implique que $f(F)$ est compact et par la suite fermé. (On a fait appel aux théorèmes 1.5.1 et 1.5.3). L'application f est bijective, donc $f(X) = Y$, il découle que Y est compact car X est compact.

Exercice 1.5 *Soit X un espace topologique séparé et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de X qui converge vers $x \in X$. Montrer que le sous-ensemble $A = \{x\} \cup \{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ est compact.*

Solution. Soit $(\Omega_i)_{i\in I}$ un recouvrement d'ouverts de A : $A \subset \underset{i\in I}{\cup}\Omega_i$. Il existe un indice i_0 tel que $x \in \Omega_{i_0}$. Mais, d'après la définition de la limite x, son voisinage Ω_{i_0} contient tous les éléments de la suite sauf peut être un nombre fini. Ces points sont contenus chacun dans un ouvert Ω_{i_α}, $\alpha = 1, 2, ..., p$. Il s'ensuit donc que $A \subset \overset{p}{\underset{\alpha=0}{\cup}}\Omega_i$. Alors A est compact.

Exercice 1.6 *Soient X et Y des espaces topologiques. Si $A \subset X$ et $B \subset Y$ sont fermés, alors leur produit $A \times B$ est fermé dans l'espace topologique $X \times Y$ muni de la topologie produit.*

Solution. Posons : $U = X \backslash A$ et $V = Y \backslash B$. Le complémentaire de $A \times B$ n'est pas en général $U \times V$. En effet le complémentaire de $A \times B$ est :

$$\{(x, y)\ ;\ x \notin A \text{ ou } y \notin B\} = (U \times Y) \cup (X \times V).$$

C'est la réunion de deux ouverts élémentaires, donc un ouvert de $X \times Y$.

Chapitre 2

Espaces Métriques et Espaces Normés

Dans ce chapitre on présente des résultats de base sur les espaces métriqus et les espaces normés. Une importance particulière est donnée aux notions de compacité et de complétude dans ces cas.

2.1 Espaces Métriques

Dans cette sections, on introduit la notion de distance et d'espace métrique. La continuité des applications, la convergence des suites, la compacité et la complétude sont traités dans le cadre des espaces métriques.

2.1.1 Notions et définitions

Nous commençons par présenter les notions de base de la métrique.

Définition 2.1.1 *Soit X un ensemble, on appelle distance sur X toute application d de $X \times X$ dans $\mathbb{R}^+$ telle que :*

i) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

ii) $\forall x, y \in X,\ \ d(x,y) = d(y,x)$ *(symétrie),*

iii) $\forall x, y, z \in X,\ d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ *(inégalité triangulaire).*

Le couple (X,d) est appelé un espace métrique.

Remarque 2.1.1 *Une distance d sur un ensemble vérifie : $\forall x, y \in X,\ \ d(x,y) \geq 0$.*

Exemples :

1. L'ensemble $\mathbb{R}$ muni de $d(x,y) = |x-y|$ est un espace métrique.

2. Tout ensemble non vide peut être muni de la distance triviale δ définie par :

$$\delta(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } \ x \neq y \\ 0 & \text{si } \ x = y \end{cases}.$$

3. L'ensemble $X = \mathbb{R}^N$ peut être muni par une de ces distances :

$$d_\infty(x,y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|\,, \quad d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|\,, \qquad d_2(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Définition 2.1.2 *Soit (X,d) un espace métrique et r un réel positif.*

– *On appelle une boule ouverte (resp. boule fermée) de centre $x \in X$ et de rayon r l'ensemble : $B(x,r) = \{y \in X,\ d(x,y) < r\}$ (resp. $\overline{B}(x,r) = \{y \in X,\ d(x,y) \leq r\}$).*

– *L'ensemble $S(x,r) = \{y \in X,\ d(x,y) = r\}$ est appelé sphère de centre x et de rayon r.*

Définition 2.1.3 *L'ensemble Ω de l'espace métrique (X,d) est dit ouvert si il est vide ou si $\forall x \in \Omega,\ \exists r > 0$ tel que $B(x,r) \subset \Omega$.*

Définition 2.1.4 *Soit (X,d) un espace métrique. On dit qu'une partie A de X est bornée, s'il existe une boule fermée telle que : $A \subset \overline{B}(x,r)$.*

Proposition 2.1.1 *Toute boule ouverte de (X,d) est un ouvert de X.*

Preuve. Soit $B(x_0,r) = \{y \in X,\ d(x_0,y) < r\}$ une boule ouverte. L'ensemble $B(x_0,r)$ est un ouvert de X si :

$$\forall x \in B(x_0, r),\ \exists \rho > 0 \text{ tel que } B(x, \rho) \subset B(x_0, r).$$

Soit $x \in B(x_0, r)$ donc $d(x_0, x) < r$. Si on pose $\rho = \frac{r-d(x_0,x)}{2}$ alors la boule $B(x, \rho)$ est incluse dans $B(x_0, r)$. En effet pour $y \in B(x, \rho)$ on a :

$$d(x_0, y) \leq d(x_0, x) + d(x, y) \leq d(x_0, x) + \frac{r - d(x_0, x)}{2} = \frac{r + d(x_0, x)}{2} < r.$$

■

Remarque 2.1.2 *Tout espace métrique est un espace topologique, en effet les boules ouvertes engendrent la topologie associée à un espace métrique. On note aussi que l'ensemble des boules ouvertes (ou fermées) ayant pour centre un point x donné constitue une base de voisinage de x.*

Exemple : La topologie usuelle de $\mathbb{R}$ est la topologie sur $\mathbb{R}$ associée à la distance usuelle $d(x, y) = |x - y|$. L'intervalle $]x - r, x + r[$ est la boule ouverte de centre x et de rayon r.

Définition 2.1.5 *Soit X un ensemble muni de deux distances d_1 et d_2. On dit que d_1 et d_2 sont équivalentes s'il existe $C_1 > 0$ et $C_2 > 0$ tels que :*

$$\forall x, y \in X, \qquad C_1 d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq C_2 d_1(x, y).$$

Remarque 2.1.3 *Deux distances équivalentes engendrent la même topologie.*

Proposition 2.1.2 *Tout espace métrique est un espace topologique séparé.*

Preuve. Soient x et y deux points distincts de X. Comme $d(x, y) \neq 0$, le réel $r := d(x, y)$ est strictement positif. Considérons maintenant les deux boules ouvertes $B(x, \frac{r}{2})$ et $B(y, \frac{r}{2})$ qui sont bien des voisinages de x et y respectivement. De plus ces deux boules sont disjointes. En effet, si il existe $z \in B(x, \frac{r}{2}) \cap B(y, \frac{r}{2})$, on obtient en utilisant l'inégalité triangulaire :

$$r = d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < r,$$

i.e. $r < r$ contradiction. Donc (X, d) est bien séparé. ■

Définition 2.1.6 *Soit X un ensemble. On munit X de deux distances d_1 et d_2. On dit que les deux distances sont topologiquement équivalentes si et seulement si l'application identité Id est continue de (X, d_1) dans (X, d_2) et de (X, d_2) dans (X, d_1).*

Remarque 2.1.4 *Dans un espace métrique un ensemble est fermé si et seulement si il est séquentiellement fermé.*

2.1.2 Limite et continuité dans les espaces métriques

On donne dans la suite la définition de la convergence des suites dans l'espace métrique.

Définition 2.1.7 *Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments d'un espace métrique (X, d) et l un point de X. On dit que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l si et seulement si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \textit{tel que } \forall n \geq n_0 \textit{ alors } d(x_n, l) < \varepsilon.$$

Définition 2.1.8 *Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments d'un espace métrique (X, d) et a un point de X. On dit que a est une valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \forall n_0 \in \mathbb{N},\ \exists n \geq n_0 \textit{ tel que } d(x_n, a) < \varepsilon.$$

Dans les espaces métriques, il existe une caractérisation des valeurs d'adhérence très utile.

Proposition 2.1.3 *Soit une suite d'éléments de l'espace métrique (X, d). Le point a est valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si et seulement si il existe une sous suite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers a.*

Preuve. Limplication réciproque vient de la définition de la valeur d'adhérence et reste vraie dans n'importe quel espace topologique.

Montrons l'implication directe. Supposons que a est valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Prenons comme voisinages de a la famille de boules ouvertes $B(a, 2^{-k})$ dans la définition de la valeur d'adhérence, on voit que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, \quad d(a, x_n) < 2^{-k}.$$

On construit alors une sous-suite qui converge vers a par récurrence : on pose $\varphi(0)$ comme étant le plus petit indice tel que $d(a, x_{\varphi(0)}) < 1$, puis $\varphi(1)$ comme le plus petit indice strictement supérieur à $\varphi(0)$ vérifiant $d(a, x_{\varphi(1)}) < 1/2$ et ainsi de suite. ■

Définition 2.1.9 *Soit (X, d) et (Y, d') deux espaces métriques et $f : X \to Y$ une application.*

– *On dit que f est continue en x_0 de X si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, c'est-à-dire si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } \forall x \in X : d(x, x_0) < \delta \Longrightarrow d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

– *On dit que f est continue sur X si elle est continue en tout point de X.*

– *On dit que f est uniformément continue sur X si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } \forall x,\ x' \in X : d(x, x') < \delta \Longrightarrow d'(f(x), f(x')) < \varepsilon.$$

– *Soit k un réel positif. On dit que f est lipschitzienne de rapport k si :*

$$\forall x, x' \in X : d'(f(x), f(x')) < kd(x, x').$$

De plus, si $0 \leq k < 1$ on dit que f est contractante.

Remarque 2.1.5 *C'est facile à voir que si $f : X \to Y$ est lipschitzienne alors elle est uniformément continue et si elle est uniformément continue alors elle est continue sur X.*

En revanche les réciproques de ces résultats ne sont pas toujours vraies. On note de plus, que les propriétés de continuité, d'uniforme continuité et lipschitzienne sont invariantes par changement de distances en une distance équivalente.

Exemple : Dans $\mathbb{R}^+$ muni de la valeur absolue, la fonction $f(x) = 5x+7$ est lipschitzienne de rapport 5, la fonction $g(x) = \sqrt{x}$ est uniformément continue mais pas lipschitzienne et la fonction $h(x) = x^2$ est continue mais elle est ni uniformément continue ni lipschitzienne.

Proposition 2.1.4 *Considérons trois espaces métriques (X, d), (Y, d') et (Z, d'') et soit $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ deux applications. Si f est uniformément continue sur X et g est uniformément continue sur Y alors $g \circ f$ est aussi uniformément continue sur X.*

Définition 2.1.10 *Soit (X, d) et (Y, d') deux espaces métriques et $f : X \to Y$ une application. On dit que f est une isométrie si :*

$$\forall x, x' \in X,\ d'(f(x), f(x')) = d(x, x').$$

Autrement dit, une isométrie est une application qui conserve les distances.

Remarque 2.1.6 *Toute isométrie est injective. De plus, la composée de deux isométries est une isométrie.*

2.1.3 Compacité dans les espaces métriques

Théorème 2.1.1 ***(Heine, Borel-Lebesgue)*** *Tout intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$, $[a, b]$, où $a, b \in \mathbb{R}$, est compact.*

Preuve. On suppose que l'epace $\mathbb{R}$ est muni de sa métrique usuelle. Soit $(\Omega_i)_{i\in I}$ un recouverement d'ouverts de $[a, b]$. Posons :

$A = \{x \in [a, b]$, tel que le segment $[a, x]$ puisse être recouvert par sous-recouvrement fini de $(\Omega_i)_{i\in I}\}$.

On souhaite établir que $b \in A$, ce qui montrera l'existence d'un sous-recouvrement fini de $[a, b]$. On note que $a \in A$, car le segment $[a, a]$ n'est que le singleton $\{a\}$. Comme $(\Omega_i)_{i \in I}$ est un recouvrement de $[a, b]$, il existe au moins un i_0 tel que $a \in \Omega_{i_0}$.

Posons maintenant $c = \sup A$. Comme $c \leq b$ donc c est en particulier fini. Supposons que $c \notin A$. Puisque $c \in [a, b]$, $\exists i_0 \in I$, tel que $c \in \Omega_{i_0}$. Mais Ω_{i_0} est ouvert, donc il existe un $r > 0$ tel que :

$$a < c - r < c \quad \text{et} \quad [c - r, c] \subset \Omega_{i_0}. \tag{2.1}$$

Mais $c = \sup A$ et $c \notin A$, on peut choisir alors r assez petit pour que $c - r \in A$. La définition de A implique l'existence d'une patie finie $J \subset I$ telle que :

$$[a, c - r] \subset \underset{i \in J}{\cup} \Omega_i.$$

En utilisant la relation (2.1), on trouve :

$$[a, c] = [a, c - r] \cup [c - r, c] \subset \underset{i \in J}{\cup} \Omega_i \cup \Omega_{i_0} = \underset{i \in J \cup \{i_0\}}{\cup} \Omega_i.$$

Puisque $J \cup \{i_0\}$ est fini on obtient bien un sous recouvrement fini de $[a, c]$, ce qui donne que $c \in A$. Contradiction et en conséquence $c \in A$.

Supposons maitenant que $c < b$. Comme $c \in A$,on peut trouver $J \subset I$ finie telle que $[a, c] \subset \underset{i \in J}{\cup} \Omega_i$, car $c \in A$. Soit $i_0 \in J$ tel que $c \in \Omega_{i_0}$, puisque Ω_{i_0} est ouvert il exitse $r > 0$ tel que :

$$c + r \leq b \quad \text{et} \quad [c, c + r] \subset \Omega_{i_0}.$$

Il s'en suit que on a le sous-recouvrement d'ouverts fini suivant :

$$[a, c + r] \subset \underset{i \in J}{\cup} \Omega_i,$$

et donc $c' = c + r \in A$. Ceci contredit le fait que $c = \sup A$ et donc le fait $c < b$. On conclut que $c = b$. Ce qui signfie que tout l'intervalle $[a, b]$ peut être recouvert par une sous-famille finie de $(\Omega_i)_{i \in I}$ *i.e.* $[a, b]$ est bien compact. ■

La compacité dans les espaces métriques peut se caractériser en utilisant les suites, comme le montre le théorème ci-dessous.

Théorème 2.1.2 ***(de Bolzano-Weierstrass)*** *Un espace métrique (X, d) est compact si et seulement si toute suite d'éléments de X admet une sous suite convergente.*

Preuve. L'implication directe s'obtient en utilisant théorème 1.5.2 qui dit que toute suite d'un compact admet une valeur d'adhérence et proposition 2.1.3 qui dit que dans un espace métrique il y'a une équivalence entre avoir des sous-suites convergentes et posséder des valeurs d'adhérence. Établissons maintenant l'implication réciproque. Supposons donc que X est un espace métrique pour lequel toute suite a une valeur d'adhérence. Soit $(\Omega_i)_{i\in I}$ un recouvrement de X par des ouverts. On cherche à extraire de cette famille un sous-recouvrement fini de X.

Première étape : On commence par montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que toute boule ouverte de rayon ε soit contenue dans un des Ω_i. Raisonnant par l'absurde en suposant qu'un tel ε n'existe pas. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe x_n tel que $B(x_n, 2^{-n})$ soit contenue dans aucun Ω_i. Cette suite possède une valeur d'adhérence x qui, évidement, appartient à un des Ω_i (car $(\Omega_i)_{i\in I}$ est un recouvrement de X). Notons i_x l'indice correspondant et $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset \Omega_{i_x}$. Puisque x est valeur d'adhérence de la suite, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $d(x, x_n) < r/2$ et $2^{-n} \leq r/2$. On a donc $B(x_n, 2^{-n}) \subset \Omega_{i_x}$, ce qui contredit la définition de x_n.

Deuxième étape : Montrons maintenant qu'on peut recouvrir X par un nombre fini de boules de même rayon ε. Pour cela, partons d'un point x_0 quelconque. Si $X \subset B(x_0, \varepsilon)$, il n'y a rien à faire, le but est atteint. Sinon, on choisit x_1 tel que $x_1 \notin B(x_0, \varepsilon)$. Si $X \subset B(x_0, \varepsilon) \cup B(x_1, \varepsilon)$ la construction est terminée, sinon on choisit un point x_2 tel que $x_2 \notin B(x_1, \varepsilon) \cup B(x_0, \varepsilon)$. Par récurrence, on obtient une famille $(x_0, x_1, \ldots, x_N)$ telle que $x_N \notin B(x_0, \varepsilon) \cup \ldots \cup B(x_{N-1}, \varepsilon)$. Le procédé de construction s'arrête nécessairement après un nombre fini d'étapes sinon on aurait une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $d(x_n, x_m) \geq \varepsilon$ pour $n \neq m$, une suite qui n'est pas de Cauchy ne pourra pas avoir une sous suite convergente.

Conclusion : D'après la première étape, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour chaque $x \in X$ il existe un indice $i_x \in I$ tel que $B(x, \varepsilon) \subset \Omega_{i_x}$. D'après la deuxième étape, il existe une famille finie $(x_0, x_1, \ldots, x_N)$ d'éléments de X telle que $X \subset \bigcup\limits_{k=1}^{N} B(x_k, \varepsilon)$. Par conséqent $X \subset \bigcup\limits_{k=1}^{N} \Omega_{i_{x_k}}$ ce qui signifie que X est compact. ■

Présentons maintenant des conséquences importantes du théorème de Bolzano-Weierstrass.

Définition 2.1.11 *Une partie A d'un espace topologique séparé $(X, \mathcal{T})$ est dite relativement compacte si son adhérence $\overline{A}$ est compacte.*

Corollaire 2.1.1 *Soit (X, d) un espace métrique. Une partie A de X est relativement compacte si et seulement si de toute suite d'éléments de A on peut extraire une sous-suite qui converge dans X.*

Preuve. Supposons A relativement compacte. Comme toute suite d'éléments de A est aussi une suite d'éléments du compact $\overline{A}$, elle admet au moins une valeur d'adhérence dans A et donc une sous-suite convergente dans X.
Réciproquement, supposons que de toute suite de A on puisse extraire une sous suite convergente. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\overline{A}$. En utilisant la définition de l'adhérence $\overline{A}$, on déduit l'existence d'une suite d'éléments de A telle que $d(x_n, y_n) \leq 2^{-n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. D'après l'hypothèse, cette suite admet une sous-suite $(y_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $y \in \overline{A}$. La suite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi et vers la même limite $y \in \overline{A}$. D'après le théorème de Bolzano-Weistrass, $\overline{A}$ est bien compacte, *i.e.* A est relativement compacte. ■

Corollaire 2.1.2 *Dans un espace métrique, toute partie relativement compacte est bornée et toute partie compacte est fermée bornée.*

Preuve. Pour prouver le premier résultat, raisonnons par contraposition. Supposons que A est une partie non bornée de l'espace métrique (X, d). Alors on peut construire (par récurrence) une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $d(x_n, x_m) \geq 1$ pour tout n, $m \in \mathbb{N}$ tel que $n \neq m$. Cette suite, qui n'est pas de Cauchy, ne peut avoir de sous-suite convergente donc A n'est pas relativement compacte.
Le deuxième résultat du corollaire devient alors facile à vérifier. En effet, tout compact est fermé donc relativement compact et donc d'après le premier résultat est borné. ■

Corollaire 2.1.3 *Le produit cartésien d'un nombre fini d'espaces métriques compacts est un espace métrique compact.*

Preuve. Afin de simplifier, nous nous limitons au produit de deux espaces métriques compacts (X, d) et (Y, d').
Considérons une suite $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de $X \times Y$ (muni de la métrique produit). La compacité de X, permet d'extraire une sous suite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $x \in X$. De même, la compacité de Y, permet d'extraire une sous-suite $(y_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $y \in Y$. Il est évident que la suite $(x_{\psi\circ\varphi(n)}, y_{\psi\circ\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers (x, y). Le théorème de Bolzano-Weistrass permet de déduire que $X \times Y$ est compact. ■

Corollaire 2.1.4 *Les compacts de $\mathbb{R}$ sont les fermés bornés.*

Preuve. Dans un espace métrique quelconque, on sait déjà que tout compact est fermé et borné. Considérons maintenant $K \subset \mathbb{R}$ un ensemble fermé et borné. La bornitude de K implique l'existence d'un $R > 0$ tel que $K \subset [-R, R]$. Le théorème de Heine, Borel-Lebesgue implique que $[-R, R]$ est un compact. Par hypothèse K est fermé dans $\mathbb{R}$ et par la suite aussi un fermé de $[-R, R]$ (car $K \subset [-R, R]$) donc K est bien compact. ■

Corollaire 2.1.5 *Toute fonction continue sur un espace compact à valeurs dans $\mathbb{R}$ est bornée et atteint ses bornes supérieure et inférieure.*

Preuve. Si $(X, \mathcal{T})$ est un espace topologique compact et $f : X \to \mathbb{R}$ une application continue alors d'après théorème 1.5.3 l'image $f(X)$ est un compact de $\mathbb{R}$. Par la suite $f(X)$ est bornée et fermée (corrolaire 2.1.4). La fonction f est donc bornée $\sup_{x\in X} f(x)$ et $\inf_{x\in X} f(x)$ sont bien définis (propriété de $\mathbb{R}$) et de plus $\sup_{x\in X} f(x) \in f(X)$ et $\inf_{x\in X} f(x) \in f(X)$. Autrement dit les bornes supérieure et inférieure sont atteintes. C'est-à-dire ce sont des maximum et minimum. ■

2.1.4 Complétude

Avant de définir les espaces complets, on donne la définition d'une suite de Cauchy.

Définition 2.1.12 *Soit (X,d) un espace métrique. On dit qu'une suite d'éléments de X est une suite de Cauchy si :*

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ *tel que* $\forall p \geq n_0$, $\forall q \geq n_0$ *alors* $d(x_p, x_q) < \varepsilon$.

On note que si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente vers l dans (X,d) alors elle est de Cauchy car : $d(x_p,x_q) \leq d(x_p,l) + d(l,x_q)$. En revanche la réciproque est fausse, c'est-à-dire il existe des suites de Cauchy qui ne convergent pas. Mais toute suite de Cauchy ayant une sous-suite convergente est convergente.

Définition 2.1.13 *Soit (X,d) un espace métrique. On dit que cet espace est complet si et seulement si toute suite de Cauchy d'éléments de X converge dans X.*

Exemple : Avec la distance usuelle, les espaces $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont complets, par contre $\mathbb{Q}$ ne l'est pas. Concernant l'espace $\mathbb{Q}$, considérons la suite définie par :

$$x_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad x_{n+1} = \frac{1}{1+x_n} \qquad \text{pour } n \geq 1.$$

Cette suite est de Cauchy dans $\mathbb{Q}$ (car elle converge dans $\mathbb{R}$ pour la même distance). Mais sa limite $\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$ est irrationnelle et donc cette suite ne converge pas dans $\mathbb{Q}$.

Proposition 2.1.5 *Le produit cartésien d'un nombre fini d'espaces métriques complets est un espace métrique complet.*

On déduit alors que l'espace $\mathbb{R}^N$ muni de l'une des distances d_1, d_2 ou d_∞ est un espace complet.

Définition 2.1.14 *Une partie A d'un espace métrique (X,d) est dite complète si munie de la distance induite est un espace métrique complet.*

Proposition 2.1.6 *On a les propriétés suivantes :*

i) *Toute partie complète est fermée.*

ii) *Toute partie fermée d'un espace métrique complet est complète.*

Preuve.

i) Soit A une partie complète d'un espace métrique (X, d). Considérons $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de A convergente. La convergence de cette suite implique que c'est une suite de Cauchy. Mais A est complète, alors la limite de cette suite est dans A. En conséquence A est fermée.

ii) Considérons A une partie fermée d'un espace métrique (X, d) et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de A. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi une suite de Cauchy de X donc elle est convergente dans X vers une limite. Comme A est fermée, la limite de cette suite est dans A. Ce qui signifie que A est complète.

■

Théorème 2.1.3 *Soit (X, d) et (Y, d') deux espaces métriques avec (Y, d') complet. Soit A une partie dense de X et $f : A \to Y$ une application uniformément continue. Alors il existe une unique application $\tilde{f} : X \to Y$ continue sur X qui prolonge f sur X (i.e. $\tilde{f}(x) = f(x)$, pour x dans A). De plus ce prolongement est uniformément continue.*

Preuve. Commençons par montrer l'unicité. Soit f_1 et f_2 deux prolongements continues de f et $x \in X$ arbitraire. Comme A est dense, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers x. Puisque chaque $x_n \in A$ on a $f_1(x_n) = f_2(x_n)$. Par passage à la limite, on obtient que $f_1(x) = f_2(x)$. Traitons maintenant l'existence du prolongement. Soit $x \in X$ quelconque et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de A qui converge vers x. Ceci implique que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans (X, d). Faisant appel à l'uniforme continuité de f, on vérifie que $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi de Cauchy dans l'espace métrique (Y, d'), donc converge vers une limite l. De plus la valeur de l ne dépend pas du choix de la suite qui converge vers x. Posons alors $\tilde{f}(x) = l$. Montrons que $\tilde{f}$ ainsi définie est uniformément continue. Soit

$\varepsilon > 0$, comme f est uniformément continue, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x, y \in A$, la condition $d(x, y) < \alpha$ implique $d'(f(x), f(y)) \leq \varepsilon$. Soit alors $x, y \in X$ tel que $d(x, y) < \alpha$; considérons deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de A qui convergent vers x et y respectivement. Alors la suite $(d'(f(x_n), f(y_n)))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $d'(\tilde{f}(x), \tilde{f}(y))$. Comme $(d(x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $d(x, y)$, il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq N$: $d(x_n, y_n) < \alpha$. On obtient de l'uniforme continuité de f que $d'(f(x_n), f(y_n)) \leq \varepsilon$. Il en résulte que $d'(\tilde{f}(x), \tilde{f}(y)) \leq \varepsilon$. ■

2.2 Espaces normés

Dans cette section, on présente quelques généralités sur les espaces normés abstrait, déjà vues dans des cours de Licence et on donne d'autres résultats approfondis qui seront fortement utiles dans les chapitres suivants. Dans ce qui suit, on désigne par $\mathbb{k}$ l'espace des scalaires $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

2.2.1 Notions et définitions

Définition 2.2.1 *Soit E un espace vectoriel réel ou complexe. Une norme sur E est une application : $\|.\| : E \to \mathbb{R}^+$ vérifiant :*

i) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$.

ii) $\forall \lambda \in \mathbb{k}$, $\forall x \in E$: $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$ *(homogénéité).*

iii) $\forall x, y \in E : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *(inégalité triangulaire).*

Le couple $(E, \|.\|)$ est alors appelé espace vectoriel normé.

Remarque 2.2.1 *Si on supprime la condition **i)** on dit que $\|.\|$ est une semi-norme. On note qu'on a toujours $\|0_E\| = 0$. Il est important de retenir l'inégalité suivante (appelée deuxième inégalité triangulaire), conséquence immédiate de l'inégalité triangulaire : si $\|.\|$ est une semi-norme sur E alors :*

$$\forall x, y \in E : |\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\| .$$

À partir d'une norme, on obtient une distance sur E en posant $d(x, y) = \|x - y\|$.

Définition 2.2.2 *Soit E un espace vectoriel muni de deux normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$.*

1. *On dit que $\|.\|_2$ est plus forte que $\|.\|_1$ s'il existe $c > 0$ telle que :*

$$\forall x \in E, \quad \|x\|_1 \leq c\,\|x\|_2 .$$

2. *On dit que $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ sont équivalentes s'ils existent $c_1 > 0$ et $c_2 > 0$ telles que :*

$$\forall x \in E, \quad c_1\,\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq c_2\,\|x\|_2 .$$

Il est évident que les distances associées à deux normes équivalentes sont équivalentes.

Remarque 2.2.2 *Les topologies engendrées par deux normes équivalentes sont les mêmes.*

Exemples :

1. On peut munir l'espace $\Bbbk^n$ des normes :

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty \qquad \text{et} \quad \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| .$$

   Ces norme sont toutes équivalentes**.**

2. On définit sur $C([0,1], \Bbbk)$, l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $\Bbbk$, et sur $F_b([0,1], \Bbbk)$, l'espace des fonctions bornées sur $[0,1]$ à valeurs dans $\Bbbk$, la norme :

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)| ,$$

   c'est la norme de la convergence uniforme.

3. Soit $p \in [1, \infty[$ l'espace vectoriel $l^p(\Bbbk)$ des suites de $\Bbbk$ de puissance p sommable peut être muni de la norme : $\|x\|_{l^p(\Bbbk)} = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$

   et l'espace $l^\infty(\Bbbk)$ des suites bornées peut être muni de la norme $\|x\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$.

4. Soit $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux espaces vectoriels normés. L'espace du produit cartésien $E \times F$ peut être muni d'une des normes du produit suivantes :

$$\|(u,v)\|_1 = \|u\|_E + \|v\|_F, \qquad \|(u,v)\|_2 = \sqrt{\|u\|_E^2 + \|v\|_F^2}, \quad \|(u,v)\|_\infty = \max(\|u\|_E, \|v\|_F).$$

   Ces normes sont équivalentes.

Remarque 2.2.3 *Un produit (topologique) d'un nombre fini d'espaces vectoriels normés est un espace vectoriel normé. Par contre, un produit infini d'espaces vectoriels normés muni de sa topologie produit n'est pas nécessairement un espace vectoriel normé.*

Proposition 2.2.1 *Soit E un espace vectoriel muni de deux normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$. Alors $\|.\|_2$ est plus forte que $\|.\|_1$ si et seulement si tout ouvert de E pour la topologie associée à $\|.\|_1$ est ouvert pour la topologie de $\|.\|_2$. Autrement dit, plus la norme est forte plus la topologie associée est fine.*

Si A est un ensemble de E, on note $d(x, A) = \inf_{y \in A} \|x - y\|$. De plus on a : $d(x, A) = 0$ si et seulement si $x \in \overline{A}$. En effet, ces deux conditions sont équivalentes à l'existence d'une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans A qui converge vers x.

Lemme 2.2.1 ***(lemme de Riesz)*** *Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé. Soit F un sous-espace vectoriel fermé de E, distinct de E. Alors pour tout $\varepsilon \in]0,1[$ il existe $x \in E$ tel que : $\|x\| = 1$ et $\inf_{y \in F} \|x - y\| \geq 1 - \varepsilon$.*

Ce lemme signifie que si F est un sous-espace strict d'un espace vectoriel normé E, alors pour tout $\varepsilon \in]0,1[$ il existe un élément dans la sphère unité $S_E(0,1)$ de E qui est à distance $\geq 1 - \varepsilon$ de F.

Preuve. Soit $z \notin F$. Comme F est fermé et $z \notin F$ on a $\alpha = d(z, F) > 0$. Pour tout, $\varepsilon \in]0,1[$ on a $1 < 1/(1-\varepsilon)$ et donc $\alpha < \alpha/(1-\varepsilon)$. La définition de α comme borne inférieure implique qu'il existe $y_\varepsilon \in F$ tel que $\|z - y_\varepsilon\| \leq \alpha/(1-\varepsilon)$. On vérifie, par un simple calcul que l'élément $x_\varepsilon = (z-y_\varepsilon)/\left\|z-y_\varepsilon\right\|$ vérifie : $\|x_\varepsilon\| = 1$ et que $\|x_\varepsilon - y\| \geq 1-\varepsilon$ pour tout $y \in F$. ■

Définition 2.2.3 *On appelle espace de Banach tout espace normé complet.*

Exemple : Les espaces $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont des Banach.

Remarque 2.2.4 *Le même espace vectoriel peut être un espace de Banach pour certaines normes mais pas pour d'autres.*

2.2.2 Espaces normés de dimension finie

Le résultat suivant est fondamental.

Théorème 2.2.1 *Dans un espace vectoriel normé de dimension finie, les compacts sont les fermés bornés et toutes les normes sont équivalentes.*

Preuve. On sait déjà qu'un compact est fermé borné (voir corollaire 2.1.2). Il suffit donc de montrer qu'en dimension finie tout fermé borné est compact et que toutes les normes sont équivalentes. Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie p et $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Posons :

$$\|x\|_E^\infty = \max_{1\leq i\leq p} |x_i| \quad \text{pour} \quad x = \sum_{i=1}^{p} x_i e_i.$$

Première étape : On commence par établir que dans $(E, \|\cdot\|_E^\infty)$ les fermés bornés sont compacts. Soit donc A une partie fermée bornée de $(E, \|\cdot\|_E^\infty)$. Afin de simplifier on suppose que $\mathbb{k} = \mathbb{R}$. Définissons l'application :

$$\begin{aligned} \varphi : \quad (\mathbb{R}^p, \|\cdot\|_\infty) &\to (E, \|\cdot\|_E^\infty) \\ (x_1, \ldots, x_p) &\mapsto \sum_{i=1}^{p} x_i e_i. \end{aligned}$$

L'application φ est isomorphisme isométrique de $(\mathbb{R}^p, \|\cdot\|_\infty)$ vers $(E, \|\cdot\|_E^\infty)$. En particulier, φ^{-1} est continue et donc $\varphi^{-1}(A)$ est un fermé borné de $(\mathbb{R}^p, \|\cdot\|_\infty)$. Soit $M \geq 0$ tel que $\varphi^{-1}(A) \subset [-M, M]^p$. L'ensemble $[-M, M]^p$ est compact car est un produit cartésien des compacts. Comme $\varphi^{-1}(A)$ est fermé, on conclut que $\varphi^{-1}(A)$ est compact, et par la suite $A = \varphi(\varphi^{-1}(A))$ est également compact.

Deuxième étape : Montrons maintenant l'équivalence des normes. Soit maintenant $\|\cdot\|_E$ une norme quelconque sur E. Définissons :

$$\begin{aligned} \psi: \quad (E, \|\cdot\|_E^\infty) &\to (\mathbb{R}, |\cdot|) \\ x &\mapsto \|x\|_E \,. \end{aligned}$$

Soit $(x, y) \in E^2$, en utilisant la deuxième inégalité triangulaire :

$$|\psi(x) - \psi(y)| \leq \|x - y\|_E \leq \left\| \sum_{i=1}^{p} (x_i - y_i) e_i \right\|_E \leq \left(\sum_{i=1}^{p} \|e_i\|_E \right) \|x - y\|_E^\infty .$$

En conséquence, l'application ψ est continue sur E. De plus, si on prend $y = 0_E$ dans le calcul précédent, on obtient que $\|\cdot\|_E^\infty$ est plus forte que $\|\cdot\|_E$.

D'après la première étape la sphère unité S de E pour la norme $\|\cdot\|_E^\infty$ (qui est fermée bornée) est compacte, on en déduit que ψ restreinte à S est bornée et atteint ses bornes. Cela signifie en particulier qu'il existe un x_0 tel que :

$$\|x_0\|_E^\infty = 1 \ \text{ et } \|x\|_E \geq \|x_0\|_E \quad \text{pour tout } x \in E \text{ tel que } \|x\|_E^\infty = 1.$$

Par homogéneité, on déduit que :

$$\|x\|_E \geq \|x_0\|_E \|x\|_E^\infty \quad \text{pour tout } x \in E.$$

Comme $x_0 \neq 0_E$, on a $\|x_0\|_E > 0$. En conséquence, la norme$\|\cdot\|_E$ est plus forte que $\|\cdot\|_E^\infty$. Donc les deux normes sont équivalentes.

Troisième étape : Sachant que toute norme de E est équivalente à $\|\cdot\|_E^\infty$ et que deux normes équivalentes donnent lieu à la même topologie. On conclut de la première étape que tout fermé borné de E est compact. ■

Corollaire 2.2.1 *Tous les espaces vectoriels normés de dimension finie sont complets.*

Preuve. Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie p. Comme toutes les normes sont équivalentes sur E, on suppose que E muni de la norme $\|\cdot\|_E^\infty$. C'est facile à voir qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $(E, \|\cdot\|_E^\infty)$ si et seulement si les suites de ses composantes $(x_n^i)_{n\in\mathbb{N}}$ pour $i = 1, \ldots, p$ sont de Cauchy dans $\Bbbk$. Mais $\Bbbk$ est complet, donc toute les suites de composantes convergent et par la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi. ∎

Lemme 2.2.2 *Dans un espace vectoriel normé, un sous espace vectoriel de dimension finie est fermé.*

Preuve. Soit F un sous espace vectoriel de dimension finie de l'espace normé E. Considérons $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de F qui converge vers $x \in E$. Comme $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente elle est bornée. Alors il existe $R > 0$ tel que $x_n \in B(0, R)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Mais $B(0, R)$ est une boule fermée de F, donc un compact car $\dim F < \infty$. Le théorème de Bolzano-Weistrass implique qu'il existe une sous-suite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge dans F. Par uncité, cette limite est égale à x, on conclut alors que $x \in F$. ∎

Théorème 2.2.2 ***(de Riesz)*** *Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé. Alors E est de dimension finie si et seulement si sa boule unité fermée $B(0,1)$ est compacte.*

Dans le cas de dimension finie le théorème 2.2.1 décrit toutes les parties compactes comme étant les parties fermées et bornées. Par conséquent, les boules fermées (qui sont aussi bornées) sont compactes. Alors pour prouver le théorème de Riesz il reste à montrer que si la boule unité fermée $B(0, 1)$ est compacte alors $\dim E < \infty$.

Preuve. Prouvons cette implication par contraposition : supposons que $\dim E = \infty$ et montrons que $B(0, 1)$ est non compacte. On commence par se donner un élément arbitraire $a_1 \in E$ tel que $\|a_1\| = 1$. Ensuite, on suppose construire $a_1, a_2, \ldots, a_n$ éléments de E tels que $\|a_k\| = 1$ et $\|a_l - a_k\| \geq 1/2$ pour tout $k \neq l$ dans $\{1, 2, \ldots, n\}$. Soit F_n le sous espace vectoriel engendré par les vecteurs $a_1, a_2, \ldots, a_n$, c'est un sous-espace de dimension finie de E donc il est fermé d'après le lemme précédent. Comme E est un espace de dimension infini $F_n \neq E$. En utilisant le lemme de Riesz pour $\varepsilon = 1/2$, on obtient un vecteur a_{n+1} tel que $\|a_{n+1}\| = 1$ et $d(a_{n+1}, F_n) \geq 1/2$. En particulier $\|a_{n+1} - a_k\| \geq 1/2$ pour $k = 1, \ldots, n$. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut admettre une sous-suite convergente car, par construction, aucune de ses sous-suites n'est de Cauchy. Par la suite le critère de Bolzano-Weistrass n'est pas vérifié et donc la boule unité fermée $B(0,1)$ n'est pas compacte. ■

Remarque 2.2.5 *Le théorème de Riesz affirme que dans un espace vectoriel normé de dimension infinie, les boules fermées de rayon non nul ne sont pas compactes. En particulier, en dimension infinie, les fermés bornés ne sont pas compacts.*

Exemple : Dans l'espace $(\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ la boule unité fermée n'est pas compacte. En effet, considérons la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par : $f_n(x) = x^n$.
La seule limite possible est la fonction :

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in [0,1[, \\ 1, & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

Mais cette fonction n'est pas continue. Donc il n'existe aucune sous-suite de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge dans $(\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$.

2.2.3 Applications linéaires

Soit E et F deux espaces vectoriels normés. L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $L(E,F)$.

Proposition 2.2.2 *Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *f est continue sur E.*
2. *f est continue à l'origine 0_E.*
3. $\exists M \geq 0, \forall x \in E : \|f(x)\|_F \leq M \|x\|_E$ *i.e. f est bornée.*

C'est facile à vérifier le résultat suivant :

Proposition 2.2.3 *Soit E un espace vectoriel muni de deux normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$. Ces deux normes sont équivalentes si et seulement si les applications d'identités :*

$Id_1 : (E, \|.\|_1) \to (E, \|.\|_2)$ *et* $Id_2 : (E, \|.\|_2) \to (E, \|.\|_1)$ *sont continues.*

Définition 2.2.4 *Soit* $\mathcal{L}(E,F)$ *l'ensemble des applications linéaires continues de* E *à* F*. Pour* $f \in \mathcal{L}(E,F)$ *on note* $\|f\|_{\mathcal{L}(E,F)}$ *la plus petite constante* M *telle que :*

$$\forall x \in E : \|f(x)\|_F \leq M \|x\|_E .$$

À partir de la définition de $\|f\|_{\mathcal{L}(E,F)}$ on a : $\|f(x)\|_F \leq \|f\|_{\mathcal{L}(E,F)} \|x\|_E$ et on peut vérifier que :

$$\|f\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \sup_{x \in E \setminus \{0_E\}} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{x \in E, \|x\|_E = 1} \|f(x)\|_F = \sup_{x \in E, \|x\|_E \leq 1} \|f(x)\|_F .$$

De plus, l'espace $(\mathcal{L}(E,F), \|\cdot\|_{\mathcal{L}(E,F)})$ est bien un espace vectoriel normé.

Remarque 2.2.6 *Si* $f \in L(E,F)$ *et* E *de dimension finie alors* f *est nécessairement continue i.e.* $L(E,F)$ *et* $\mathcal{L}(E,F)$ *coïncident.*

Proposition 2.2.4 *Si* $(F, \|.\|_F)$ *est un espace de Banach, alors* $(\mathcal{L}(E,F), \|\cdot\|_{\mathcal{L}(E,F)})$ *l'est aussi.*

Preuve. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $\mathcal{L}(E,F)$. Pour tout $x \in E$ et $p, q \in \mathbb{N}$ on a :

$$\|f_p(x) - f_q(x)\|_F \leq \|f_p - f_q\|_{\mathcal{L}(E,F)} \|x\|_E .$$

Comme $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, pour tout $x \in E$ on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_x \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq n_x : \|f_p - f_q\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq \varepsilon / \|x\|_E .$$

Ce qui implique que :

$$\forall x \in E, \forall \varepsilon > 0, \exists n_x \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq n_x : \|f_p(x) - f_q(x)\|_F \leq \varepsilon.$$

Ceci montre que pour tout $x \in E$, $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans F. Comme F est complet, on déduit que $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite que l'on note $f(x)$.
Vérifions maintenant par un simple passage à la limite que la fonction $f : E \to F$ définie par : $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)$ est linéaire.

Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{k}$ et $x, y \in E$ on a :

$$\begin{aligned} f(\lambda x + \mu y) &= \lim_{n\to+\infty} (f_n(\lambda x + \mu y)) \\ &= \lim_{n\to+\infty} (\lambda f_n(x) + \mu f_n(y)) \\ &= \lambda \lim_{n\to+\infty} f_n(x) + \mu \lim_{n\to+\infty} f_n(y) \\ &= \lambda f(x) + \mu f(y). \end{aligned}$$

Montrons maintenant que l'application f est continue. Puisque la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy donc elle est bornée dans $\mathcal{L}(E, F)$. Alors :

$$\exists M > 0,\ \ \forall\ x \in E, \forall n \in \mathbb{N} : \|f_n(x)\|_F \leq M \|x\|_E\,.$$

En faisant tendre n vers l'infini, on obtient que :

$$\exists M > 0,\ \ \forall\ x \in E \text{ tel que } \|f(x)\|_F \leq M \|x\|_E\,.$$

Ce qui est équivalent à f est continue et sa norme est majorée par M.

Pour terminer, il reste à vérifier que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f dans $\mathcal{L}(E, F)$, c'est-à-dire $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_{\mathcal{L}(E,F)} = 0$. Comme la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq n_0 : \|f_p - f_q\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq \varepsilon.$$

Donc pour tout $x \in E$: $\quad \|f_p(x) - f_q(x)\|_F \leq \varepsilon \|x\|_E\,.$

En faisant tendre q vers l'infini on obtient :

$$\|f_p(x) - f(x)\|_F \leq \varepsilon \|x\|_E\,,$$

D'où : $\qquad \|f_p - f\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq \varepsilon.$ ■

Remarque 2.2.7 *La définition de $\mathcal{L}(E, F)$ dépend du choix des normes sur E et F cependant, modifier les normes sur E et F par des normes équivalentes ne modifie pas $\mathcal{L}(E, F)$ et change $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(E,F)}$ en une norme équivalente.*

Théorème 2.2.3 *Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace vectoriel normé, $(F, \|\cdot\|_F)$ un espace de Banach* *et G un sous espace vectoriel dense de E. Soit $L \in \mathcal{L}(G,F)$. Il existe une unique application $\tilde{L} \in \mathcal{L}(E,F)$ qui prolonge L sur E. De plus on a :* $\left\|\tilde{L}\right\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \|L\|_{\mathcal{L}(G,F)}$.

Preuve. Comme toute application linéaire continue est en fait lipschitzienne et par la suite uniformément continue, le théorème 2.1.3 garantit l'existence et l'unicité d'un prolongement continue $\tilde{L}$, définie sur E, de L. Vérifions maintenant la linéarité de $\tilde{L}$. Soit $\lambda, \mu \in \Bbbk$ et $x, y \in E$. Considérons les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de G qui convergent vers x et y respectivement. Par passage à la limite dans l'égalité :

$$L(\lambda x_n + \mu y_n) = \lambda L(x_n) + \mu L(y_n),$$

on en déduit que :

$$\tilde{L}(\lambda x + \mu y) = \lambda \tilde{L}(x) + \mu \tilde{L}(y).$$

Finalement, sachant que $\tilde{L}(x) = L(x)$ pour $x \in G$, on obtient :

$$\left\|\tilde{L}\right\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \sup_{x\in E\setminus\{0_E\}} \frac{\left\|\tilde{L}(x)\right\|_F}{\|x\|_E} \geq \sup_{x\in G\setminus\{0_E\}} \frac{\|L(x)\|_F}{\|x\|_E} = \|L\|_{\mathcal{L}(G,F)}.$$

D'autre part, si $x \in E$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de G qui converge vers x, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ \|L(x_n)\|_F \leq \|L\|_{\mathcal{L}(G,F)} \|x_n\|_E,$$

donc :

$$\left\|\tilde{L}(x)\right\|_F \leq \|L\|_{\mathcal{L}(G,F)} \|x\|_E.$$

Ceci implique que :

$$\left\|\tilde{L}\right\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq \|L\|_{\mathcal{L}(G,F)}. \quad \blacksquare$$

Définition 2.2.5 *On appelle dual topologique de E et on le note $E' = \mathcal{L}(E,\Bbbk)$ l'espace des formes linéaires continues sur E.*

Comme le corps $\Bbbk$ est complet on déduit de la proposition 2.2.4 le résultat suivant.

Corollaire 2.2.2 *Le dual topologique $E' = \mathcal{L}(E,\Bbbk)$ de E est complet.*

Théorème 2.2.4 *Soit f une forme linéaire non nulle sur $(E, \|.\|_E)$. Alors, f est continue si et seulement si son noyau $Kerf = \{x \in E,\ f(x) = 0\}$ est fermé.*

Preuve. Pour établir l'implication directe supposons que f est continue. Le noyau de f n'est que l'image réciproque du fermé $\{0\}$, donc il est fermé.

Réciproquement, supposons que $Kerf$ est fermé. Comme f n'est pas une application nulle, il existe $u \in E$ tel que $T(u) = 1$. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E qui tend vers 0_E. On cherche à vérifier que $f(x_n)$ tend vers 0. Supposons que ce n'est pas le cas. Il existe alors une sous-suite, notée encore une fois $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, telle que pour un certain $\varepsilon > 0$ on a $|f(x_n)| \geq \varepsilon$ pour tout n. Posons maintenant $y_n = u - \frac{1}{f(x_n)}x_n$. Comme $f(u) = 1$, nous avons $f(y_n) = 0$, pour tout n, $y_n \in Kerf$ et par construction nous avons :

$$\|y_n - u\|_E = \frac{\|x_n\|_E}{|f(x_n)|} \leq \frac{1}{\varepsilon}\|x_n\|_E \to 0 \text{ quand } n \to +\infty.$$

Ce qui montre que y_n converge vers u. Mais, par hypothèse $Kerf$ est fermé et donc u appartient à $Kerf$, c'est-à-dire $f(u) = 0$. Contradiction avec le choix de u. Par la suite f doit être continue. ■

2.3 Exercices

Exercice 2.1 *Soit f une forme linéaire sur $(E, \|.\|_E)$. Montrer que si f n'est pas continue alors son noyau $Kerf$ est dense dans E.*

Solution. On utilise théorème 2.2.4 et on montre que si $Kerf$ n'est pas fermé alors il est dense dans E. Supposons que $Kerf$ n'est pas fermé. Il existe alors un $u \in \overline{Kerf}$ mais $u \notin Kerf$. Quitte à diviser u par $f(u)$, on peut supposer que $f(u) = 1$. Soit maintenant $x \in E$, quelconque. On peut écrire :

$$x = (x - f(x)u) + f(x)u.$$

On a $x - f(x)u \in Kerf$ et $f(x)u \in \overline{Kerf}$ par construction. Donc x appartient à $\overline{Kerf}$ ce qui montre que $Kerf$ est dense dans E.

Exercice 2.2 *Soit l'espace $X = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,dt$.*

1. *Montrer que la forme linéaire $f \in X \mapsto f(0) \in \mathbb{R}$ n'est pas continue.*

2. *Que-peut on en conclure pour le sous-espace des fonctions de X nulles en 0 ?*

Solution.

1. Posons $L : X \to \mathbb{R}$ l'application linéaire définie par $L(f) = f(0)$. Si L est continue, il existe $M > 0$ tel que $\forall f \in X,\ |L(f)| \leq M \|f\|_1$. Prenons f_n définie par : $f_n(t) = 2n(1 - nt)$ pour $t \in \left[0, \frac{1}{n}\right]$ et $f(t) = 0$ si $t \in \left]\frac{1}{n}, 1\right]$. On a : $\|f_n\|_1 = 1$ et $L(f_n) = 2n$. Alors $2n \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Contradiction, donc L n'est pas continue.

2. Si $H = \{f \in X;\ \ f(0) = 0\}$ alors $H = KerL$. D'après le théorème 2.2.4 on déduit que H n'est pas fermé car L n'est pas continue.

Exercice 2.3 *Soit E et F deux espaces vectoriels normés et T une application linéaire de E vers F. On appelle graphe de T, noté $G(T)$, le sous-ensemble de $E \times F$ suivant :*

$$G(T) = \{(x, y) \in E \times F,\ y = T(x)\}.$$

1. *Montrer que si T est continue alors $G(T)$ est fermé.*
2. *Montrer que $\|\cdot\|_T$ définie par $\|x\|_T = \|x\|_E + \|Tx\|_F$ est une norme sur E.*
3. *Supposons que E et F sont des espaces de Banach. Montrer que si $G(T)$ est fermé alors E muni de la norme $\|\cdot\|_T$ est un espace de Banach.*

Solution.

1. Soit $(x_n, Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $G(T)$ qui converge dans $E\times F$ vers $(x, y) \in E \times F$. Comme T est continue et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x alors $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers Tx. Mais $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers y, l'unicité de la limite nous donne que $Tx = y$. Donc $(x, y) \in G(T)$ *i.e.* $G(T)$ est fermé.

2. Montrons que $\|\cdot\|_T$ est une norme :

   i) $\|x\|_T = \|x\|_E + \|Tx\|_F = 0 \Leftrightarrow \|x\|_E = 0$ et $\|Tx\|_F = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$.

ii) Pour tout $x, x' \in E$ on a :

$$\begin{aligned}\|x+x'\|_T = & \ \|x+x'\|_E + \|T(x+x')\|_F \\ & = \|x+x'\|_E + \|T(x)+T(x')\|_F \\ & \leq \|x\|_E + \|x'\|_E + \|T(x)\|_F + \|T(x')\|_F = \|x\|_T + \|x'\|_T \,.\end{aligned}$$

iii) Pour tout scalaire λ et pour tout $x \in E$ on a :

$$\|\lambda x\|_T = \|\lambda x\|_E + \|\lambda T x\|_F = |\lambda| \, \|x\|_E + |\lambda| \, \|Tx\|_F = |\lambda| \, \|x\|_T \,.$$

3. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de E par raport à la norme $\|\cdot\|_T$. En utilisant la définition de la norme $\|\cdot\|_T$, on vérifie facilement que la suite $(x_n, Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi de Cauchy dans $E \times F$ qui est complet (produit d'espaces complets) donc la suite $(x_n, Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $E \times F$ vers $(x, y) \in E \times F$. Mais $(x_n, Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de $G(T)$, qui est supposé fermé, alors $y = Tx$. Par la suite :

$$\|x_n - x\|_T = \|x_n - x\|_E + \|Tx_n - Tx\|_F \to 0.$$

Donc $(E, \|\cdot\|_T)$ est un espace de Banach.

Exercice 2.4 *Soit E et F deux espaces vectoriels normés. Montrer que si l'application linéaire $f : E \to F$ est continue si et seulement si la semi-norme $q(x) = \|f(x)\|$ est continue sur E.*

Solution. Supposons que f est continue, alors :

$$\exists M > 0, \forall \ x \in E : \|f(x)\| \leq M \|x\| \,.$$

Soit $x, y \in E$. En utilisant le fait que q est une semi-norme, on obtient grâce à la deuxième inégalité triangulaire :

$$|q(x) - q(y)| \leq q(x-y) = \|f(x-y)\| \leq M \|x-y\| \,.$$

Ceci implique que q est lipschitzienne et par la suite continue.

Réciproquement, si q est continue pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $\|x\| < \delta$ alors $\|f(x)\| = q(x) \leq \varepsilon$. Comme $f(0) = 0$, on conclut que f est continue en 0 et donc continue sur E.

Exercice 2.5 *Soit $E = C([0,1], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On munit E de la norme : $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$, pour $f \in E$. Considérons les applications linéaires S et T de E vers E définies par :*

$$S(f)(x) = x \int_0^1 f(t)dt, \quad T(f)(x) = xf(x), \qquad \forall f \in E, \quad \forall x \in [0,1].$$

1. *Déterminer si l'égalité $S \circ T = T \circ S$ a lieu.*
2. *Montrer que $S \circ T$ et $S \circ T$ sont continues et calculer $\|S \circ T\|$ et $\|T \circ S\|$.*

Solution.

1. Soit $f \in E$ et $x \in [0,1]$ on a :

   $$T \circ S(f)(x) = T(S(f))(x) = x^2 \int_0^1 f(t)dt$$

   et $$S \circ T(f)(x) = S(T(f))(x) = x \int_0^1 tf(t)dt.$$

   On constate que $S \circ T$ et $T \circ S$ n'ont pas la même expression. Afin de s'assurer que $S \circ T \neq T \circ S$, prenons $f_0 \equiv 1$. On trouve que :

   $$T \circ S(f_0)(x) = x^2 \text{ et } S \circ T(f_0)(x) = \tfrac{x}{2} \text{ pour } x \in [0,1].$$

   On conclut que $S \circ T \neq T \circ S$.

2. Notons que $T \circ S$ et $S \circ T$ sont des applications linéaires puisque S et T sont linéaires. On a :

   $$|S \circ T(f)(x)| = \left| x \int_0^1 tf(t)dt \right| \leq \|x\| \, \|f\|_\infty \int_0^1 tdt \leq \frac{1}{2} \|f\|_\infty, \quad \forall x \in [0,1].$$

   Par la suite : $\|S \circ T(f)\|_\infty \leq \frac{1}{2} \|f\|_\infty$. Ceci montre que $S \circ T$ est continue et que $\|S \circ T\| \leq \frac{1}{2}$.

Prenons $f_0 \equiv 1$ on obtient que $\|f_0\|_\infty = 1$ et $\|S \circ T(f_0)\|_\infty = \frac{1}{2}$. Donc :

$$\|S \circ T\| = \sup_{\|f\|_\infty = 1} \|S \circ T(f)\|_\infty \geq \|S \circ T(f_0)\|_\infty = \frac{1}{2}.$$

On conclut que $\|S \circ T\| = \frac{1}{2}$.

Par la même méthode on peut montrer que $\|T \circ S\| = 1$.

En remarque que $\|T \circ S\| \neq \|S \circ T\|$ ce qui affirme le résultat de la première question.

Chapitre 3

Les Grands Théorèmes de l'Analyse Fonctionnelle

Dans ce chapitre, on présente les théorèmes fondamentaux de l'analyse fonctionnelle. On commence par le théorème de Baire qui joue un rôle très important dans la démonstration de certains grands théorèmes notamment : le théorème de l'application ouverte et le théorème de Banach-Steinhaus.

3.1 Théorème de Baire

Théorème 3.1.1 ***(de Baire)*** *Soit (X, d) un espace métrique complet et $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fermés de X d'intérieur vide. Alors $\underset{n\in\mathbb{N}}{\cup} F_n$ est d'intérieur vide.*

Ce théorème annonce que dans un espace métrique complet la réunion d'une famille dénombrable de fermés d'intérieur vide est encore d'intérieur vide. Autrement dit :
soit (X, d) un espace métrique complet et $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fermés de X, alors si $A = \underset{n\in\mathbb{N}}{\cup} F_n$ admet un point d'intérieur *i.e.* $\overset{\circ}{A} \neq \emptyset$ alors il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $\overset{\circ}{F_m} \neq \emptyset$.
Ce théorème est souvent utilisé lorsque $X = \underset{n\in\mathbb{N}}{\cup} F_n$.

On note que dans le théorème de Baire :

– $\underset{n\in\mathbb{N}}{\cup} F_n$ n'est pas forcément fermé.
– L'ensemble des indices doit être dénombrable.

Afin de présenter l'énoncé équivalent du théorème de Baire en utilisant les ouverts, rappelons que : $\overline{C_X A} = C_X \overset{\circ}{A}$. Donc un ensemble est dense si et seulement si son complémentaire est d'intérieur vide : $\overline{A} = X \Leftrightarrow \overset{\circ}{\overline{C_X A}} = \emptyset$.

Théorème 3.1.2 ***(de Baire-deuxième version)*** *Soit (X, d) un espace métrique complet et $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'ouverts denses de X. Alors, $\underset{n\in\mathbb{N}}{\cap} \Omega_n$ est dense dans X.*

Cette version du théorème de Baire dit que dans un espace métrique complet, une intersection dénombrable d'ouverts denses est encore dense dans X. Avant de donner la preuve de ce théorème, présentons le lemme suivant :

Lemme 3.1.1 *Un espace métrique (X, d) est complet si et seulement si l'intersection de toute suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante de parties fermées non vides de X dont les diamètres tendent vers 0 n'est pas vide.*

Preuve. (du théorème de Baire) Considérons $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'ouverts denses de X et V un ouvert non vide de X. On doit montrer que :

$$V \cap \left(\underset{n\in\mathbb{N}}{\cap} \Omega_n \right) \neq \emptyset.$$

Puisque Ω_0 est dense et V un ouvert on a $V \cap \Omega_0 \neq \emptyset$ *i.e.* il existe $x_0 \in V \cap \Omega_0$. Mais comme $V \cap \Omega_0$ est un ouvert, il existe une boule ouverte $B(x_0, r) \subset V \cap \Omega_0$. Par la suite :

$$\exists r_0 = \inf(\frac{r}{2}, 1) telque B_0 = \overline{B(x_0, r_0)} \subset V \cap \Omega_0.$$

Par récurrence sur n, on va construire une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X et une suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels strictement positifs tels que $r_n \leq \frac{1}{2^n}$ et que pour tout $n \geq 1$, la boule fermée B_n de centre x_n et de rayon r_n soit contenue dans $\overset{\circ}{B}_{n-1} \cap \Omega_n$.
En effet on a déjà construit x_0 et r_0. Suposons maintenant qu'on a construit x_n et r_n. L'ouvert Ω_{n+1} est dense dans X, donc il existe $x_{n+1} \in \overset{\circ}{B}_n \cap \Omega_{n+1}$ et comme $\overset{\circ}{B}_n \cap \Omega_{n+1}$ est

un ouvert non-vide, alors :

$$\exists r_{n+1} > 0 \text{ telque } r_{n+1} \leq \frac{1}{2^{n+1}} \text{ et } B_{n+1} = \overline{B(x_{n+1}, r_{n+1})} \subset \overset{\circ}{B}_n \cap \Omega_{n+1}.$$

Par construction $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de fermés non vides de E dont les diamètres tendent vers 0. Comme E est complet, le lemme 3.1.1 assure que : $\underset{n\in\mathbb{N}}{\cap} B_n \neq \emptyset$. Puisque $B_0 \subset V$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $B_n \subset \Omega_n$, on obtient que :

$$\underset{n\in\mathbb{N}}{\cap} B_n \subset V \cap \left(\underset{n\in\mathbb{N}}{\cap} \Omega_n \right).$$

Ce qui donne que $V \cap \left(\underset{n\in\mathbb{N}}{\cap} \Omega_n \right) \neq \emptyset$. ■

Notons que dans le théorème de Baire $\underset{n\in\mathbb{N}}{\cap} \Omega_n$ n'est pas nécessairement ouvert comme le montre l'exemple suivant :

Exemple : Considérons l'espace métrique complet $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. Puisque $\mathbb{Q}$ est dénombrable : $\mathbb{Q} = \{r_n,\ n \in \mathbb{N}\}$. Posons : $V_n = \mathbb{R}\backslash\{r_n\}$. L'ensemble V_n est bien ouvert et dense dans $\mathbb{R}$. Le théorème de Baire assure que :

$$\underset{n\in\mathbb{N}}{\cap} V_n = \underset{n\in\mathbb{N}}{\cap} (\mathbb{R}\backslash\{r_n\}) = \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$$

est bien dense dans $\mathbb{R}$. Mais $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ n'est ni ouvert ni fermé dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

Définition 3.1.1 *On dit q'un espace topologique séparé $(X, \mathcal{T})$ a la propriété de Baire ou est un espace de Baire si pour tout suite $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'ouverts denses de X, leur intersection $\underset{n\in\mathbb{N}}{\cap} \Omega_n$ est dense dans X.*

Remarque 3.1.1 *Le théorème de Baire garanti que tout espace de Banach est un espace de Baire. En revanche, ils existent des espaces vectoriels normés non complets qui ne sont pas de Baire comme par exemple l'espace $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\, dt$. Un autre exemple évident d'un espace qui n'est pas de Baire est un espace dénombrable séparé X, où une partie réduite à un point n'est jamais ouverte (par exemple le sous espace $\mathbb{Q}$ de $\mathbb{R}$) car : $X = \underset{n\in\mathbb{N}}{\cup} \{a_n\}$, et $\{a_n\}$ est un fermé avec $\overset{\circ}{\overline{\{a_n\}}} = \emptyset$. De plus, le produit d'un tel espace X avec n'importe quel espace topologique séparé Y n'est pas de Baire. Car chaque $\{a_n\} \times Y$ est fermé d'intérieur vide et $X \times Y = \underset{n\in\mathbb{N}}{\cup} \{a_n\} \times Y$.*

Proposition 3.1.1 *Soit X un espace de Baire et $\mathcal{O}$ un ouvert de X. Alors $\mathcal{O}$ muni de la topologie induite par X est encore un espace de Baire.*

Preuve. Soit $(\mathcal{O}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'ouverts de $\mathcal{O}$ et denses dans $\mathcal{O}$. On cherche à montrer que $\underset{n\in\mathbb{N}}{\cap}\mathcal{O}_n$ est aussi dense dans $\mathcal{O}$. Soit V un ouvert non-vide de $\mathcal{O}$. Notons que les $\mathcal{O}_n$ et V sont aussi ouverts dans X car $\mathcal{O}$ est un ouvert de X. Posons : $\mathcal{U}_n = \mathcal{O}_n \cup C_X\overline{\mathcal{O}}$.

On constate que $\mathcal{U}_n$ est un ouvert de X, de plus il est dense dans X, car :

$$X = \overline{\mathcal{O}} \cup C_X\overline{\mathcal{O}} = \overline{\mathcal{O}_n} \cup C_X\overline{\mathcal{O}} \subset \overline{\mathcal{U}_n} \Rightarrow \overline{\mathcal{U}_n} = X.$$

Comme X est un espace de Baire, on obtient que $\underset{n\in\mathbb{N}}{\cap}\mathcal{U}_n$ est aussi dense dans X, donc : $(\underset{n\in\mathbb{N}}{\cap}\mathcal{U}_n) \cap V \neq \emptyset$ car V est un ouvert non-vide de X. D'autre part, on a : $V \subset \mathcal{O} \Rightarrow \mathcal{O}_n \cap V = \mathcal{U}_n \cap V$ pour tout n. Alors on trouve que $(\underset{n\in\mathbb{N}}{\cap}\mathcal{O}_n) \cap V \neq \emptyset$. Ceci montre que $\underset{n\in\mathbb{N}}{\cap}\mathcal{O}_n$ est dense dans $\mathcal{O}$. Par la suite, le théorème de Baire est aussi vrai pour $\mathcal{O}$. ∎

En revanche cette propriété n'est pas vraie pour les fermés, il existe des fermés d'un espace de Baire qui ne sont pas de Baire.

Remarque 3.1.2 *On note que si Ω est un ouvert d'un espace métrique complet (X,d) alors (Ω,d) n'est pas nécessairement complet.*

Proposition 3.1.2 *Un espace topologique séparé $(X,\mathcal{T})$ est un espace de Baire si tout point admet un voisinage qui est un espace de Baire.*

Preuve. Soit $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille d'ouverts denses de X et soit V un voisinage d'un point $x \in X$. Il s'agit de montrer que V recontre $A = \underset{n\in\mathbb{N}}{\cap}\Omega_n$. D'après l'hypothèse il existe un voisinage V_0 de x qui est un espace de Baire et qu'on peut supposer ouvert d'après proposition 3.1.1. L'ensemble $\Omega_n \cap V_0$ est alors un ouvert de V_0 dense dans V_0, donc $A \cap V_0$ est aussi dense dans V_0. On déduit que $V \cap V_0$, qui est un voisinage de x dans V_0, recontre $A \cap V$ soit $A \cap V \cap V_0 \neq \emptyset$ et par la suite $A \cap V \neq \emptyset$, ce qui prouve le résultat voulu. ∎

3.1.1 Quelques applications du théorème de Baire.

Théorème 3.1.3 *Soit X un espace topologique de Baire et $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fermés de X telle que $X = \underset{n\in\mathbb{N}}{\cup} F_n$. Alors $\underset{n\in\mathbb{N}}{\cup} \overset{\circ}{F_n}$ est dense dans X.*

Preuve. Soit Ω un ouvert non vide de X. L'ensemble $\underset{n\in\mathbb{N}}{\cup} \overset{\circ}{F_n}$ est dense si et seulement si $(\underset{n\in\mathbb{N}}{\cup} \overset{\circ}{F_n}) \cap \Omega$ est non vide. Puisque X est un espace de Baire, alors Ω aussi d'après proposition 3.1.1. D'autre part, chaque ensemble $F_n \cap \Omega$ est un fermé de Ω pour la topologie induite. Raisonnons par l'absurde et supposons que $(\underset{n\in\mathbb{N}}{\cup} \overset{\circ}{F_n}) \cap \Omega$ est vide. Comme :

$$(\underset{n\in\mathbb{N}}{\cup} \overset{\circ}{F_n}) \cap \Omega = \underset{n\in\mathbb{N}}{\cup} (\overset{\circ}{F_n} \cap \Omega) = \underset{n\in\mathbb{N}}{\cup} (\overset{\circ}{\overbrace{F_n \cap \Omega}}),$$

on obtient que $\overset{\circ}{\overbrace{F_n \cap \Omega}} = \emptyset$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Ceci implique que la suite $(F_n \cap \Omega)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fermés d'intérieur vide dans l'espace Ω muni de la topologie induite. Comme Ω est de Baire, alors $\underset{n\in\mathbb{N}}{\cup} (F_n \cap \Omega)$ est d'intérieur vide. Contradiction car $\underset{n\in\mathbb{N}}{\cup} (F_n \cap \Omega) = (\underset{n\in\mathbb{N}}{\cup} F_n) \cap \Omega = X \cap \Omega = \Omega$ qui est non vide. ■

On utilise le théorème de Baire souvent sous la forme de ce théorème.

Proposition 3.1.3 *L'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels ne peut s'écrire comme intersection dénombrable d'ouverts de $\mathbb{R}$.*

Preuve. On raisonnne par l'absurde en supposant que $\mathbb{Q} = \underset{n\in\mathbb{N}}{\cap} \Omega_n$, avec $\Omega_n \subset \mathbb{R}$ ouvert non vide. Passons au complémentaire on obtient : $\mathbb{Q}^c = \underset{n\in\mathbb{N}}{\cup} \Omega_n^c$. D'autre part comme $\mathbb{Q}$ est constitué de tout les singletons d'éléments de $\mathbb{Q}$, c'est-à-dire $\mathbb{Q}$ est lui même réunion dénombrable de fermés $\mathbb{Q} = \underset{n\in\mathbb{N}}{\cup} F_n$. On en déduit que : $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^c = (\underset{n\in\mathbb{N}}{\cup} F_n) \cup (\underset{n\in\mathbb{N}}{\cup} \Omega_n^c)$. Mais l'espace $\mathbb{R}$ est complet et d'intérieur non vide. En appliquant le théorème de Baire on obtient qu'au moins l'un des fermés $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(\Omega_n^c)_{n\in\mathbb{N}}$ est d'intérieur non vide. Ça ne peut pas être l'un des singletons F_n. Alors $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\Omega_{n_0}^c$ est d'intérieur non vide, ce qui signife qu'il existe un intervalle $]a, b[$ avec $a < b$ contenu dans $\Omega_{n_0}^c$, donc $]a, b[\cap \Omega_{n_0} = \emptyset$. Mais $\mathbb{Q}$ est l'intersection de touts les $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$, c'est-à-dire $\mathbb{Q} \subset \Omega_{n_0}$. Par conséquent $]a, b[\cap \mathbb{Q} = \emptyset$, ce qui veut dire que l'intervalle $]a, b[$ ne contient aucun rationnel ce qui est faux et constitue la contradiction recherchée. ■

Proposition 3.1.4 *Soit E un espace de Banach. Considérons $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de sous-espaces fermés de E. Si $E = \underset{n\in\mathbb{N}}{\cup} E_n$, alors il existe n_0 tel que $E = E_{n_0}$.*

Preuve. Comme les E_n sont fermés, il découle du théorème 3.1.3 que $\underset{n\in\mathbb{N}}{\cup} \overset{\circ}{E}_n$ est dense. En appliquant le théorème de Baire, on obtient qu'il existe n_0 tel que $\overset{\circ}{E}_{n_0} \neq \emptyset$. Donc il existe une boule ouverte $B(x_0, \alpha)$ avec $\alpha > 0$ tel que $B(x_0, \alpha) \subset E_{n_0}$. Soit alors $x \in E$; posons $y = \frac{\alpha}{1+\|x\|} x$. Comme $\|y\| < \alpha$, il s'ensuit que $x_0 + y \in B(x_0, \alpha) \subset E_{n_0}$ et par la suite l'élément $y = (x_0 + y) - x_0$ appartient à E_{n_0}. Ceci donne que $x = \alpha^{-1}(1 + \|x\|)y$ appartient aussi à E_{n_0}. Ce qui donne que $E = E_{n_0}$. ■

Proposition 3.1.5 *Soit E un espace vectoriel normé de dimension infinie dénombrable (i.e. il existe une base algébrique dénombrable de E). Alors E n'est pas complet.*

Ce résultat affirme qu'il n'existe aucun Banach de dimension infinie dénombrable.

Preuve. Raisonons par l'absurde. Supposons que E est complet et soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base algébrique dénombrable de E. Pout tout $n \geq 1$, posons :

$$F_n = vect(e_1, \cdots, e_n).$$

On note que tout les sous-espaces F_n sont fermés dans E. De plus, ils sont d'intérieur vide. En effet, si ce n'est pas le cas il existe alors une boule ouverte $B(a, r)$ non réduite à un point contenue dans F_n. Puisque F_n est un espace vectoriel, on a également :

$$B(0, r) = B(a, r) - a \subset F_n.$$

Pour la même raison, on obtient aussi que :

$$\forall t > 0, \;\; B(0, tr) = tB(0, r) \subset F_n.$$

Ceci est vrai pour tout $t > 0$, ces inclusions impliquent alors que $E \subset F_n$ ce qui n'est pas possible car E est de dimension infinie.

Comme $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fermés de E d'intérieur vide et l'espace E est supposé complet, le théorème de Baire implique que $A = \underset{n\in\mathbb{N}}{\cup} F_n$ est un ensemble d'intérieur vide.

Mais par construction, A est l'ensemble des combinaisons linéaires finies d'éléments de $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, donc $E = A$. Ceci donne que E est d'intérieur vide, contradiction. ■

3.2 Théorème de Banach-Steinhaus

Définition 3.2.1 *Soit E et F deux espaces vectoriels normés et soit $(T_i)_{i\in I}$ une famille d'applications de $\mathcal{L}(E,F)$ (I ensemble d'indices quelconques).*

- *$(T_i)_{i\in I}$ est dite simplement bornée, si $\forall x \in E$, $\exists C_x > 0 : C_x = \sup\limits_{i\in I} \|T_i(x)\|_F < +\infty$.*
- *$(T_i)_{i\in I}$ est dite uniformément bornée, si $\exists M > 0$ tel que $\forall i \in I$, $\|T_i\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq M$ (ou $\sup\limits_{i\in I} \|T_i\|_F < +\infty$).*

On voit bien que si $(T_i)_{i\in I}$ est uniformément bornée alors $(T_i)_{i\in I}$ est automatiquement simplement bornée. En revanche, la réciproque n'est pas vraie en général. Le théorème suivant affirme que la réciproque est vraie, *i.e.* on aura une équivalence, dans le cas où E est de Banach.

Théorème 3.2.1 ***(de Banach-Steinhaus)*** *Soit E un espace de Banach et F un espace normé et soit $(T_i)_{i\in I}$ une famille d'applications de $\mathcal{L}(E,F)$ (I ensemble d'indices quelconques). On suppose que pour tout $x \in E$, l'ensemble $\{T_i(x),\ i \in I\}$ est borné dans F : $\forall x \in E$, $\exists C_x > 0 : C_x = \sup\limits_{i\in I} \|T_i(x)\|_F < +\infty$. Alors :*

$$\exists M > 0 \text{ tel que } \forall i \in I, \quad \|T_i\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq M.$$

Ce théorème veut dire que s'il existe, pour chaque $x \in E$, un nombre positif $M_x < +\infty$ tel que :

$$\|T_i(x)\|_F \leq M_x \|x\|_E, \quad \forall i \in I,$$

alors il existe un nombre positif M tel que :

$$\|T_i(x)\|_F \leq M \|x\|_E, \quad \forall x \in E,\ \forall i \in I.$$

Preuve. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $A_n = \{x \in E \text{ tel que } \|T_i(x)\| \leq n, \ \ \forall i \in I \}$. L'ensemble A_n est fermé de E car A_n n'est que l'intersection des fermés :

$\{x \in E; \ \|T_i(x)\|_F \leq n\} = T_i^{-1}\left(\overline{B_F}(0,n)\right), \ \ i \in I$, où $\overline{B_F}(0,n) = \{z \in F, \ \ \|z\|_F \leq n\}$.

(l'image réciproque d'un fermé par une application continue est un fermé).

De plus $\underset{n\in\mathbb{N}}{\cup} A_n = E$. En effet, l'inclusion $\underset{n\in\mathbb{N}}{\cup} A_n \subset E$ est évidente. Maintenant soit $x \in E$. Par l'hypothèse $C_x = \sup\limits_{i\in I} \|T_i(x)\|_F < +\infty$, on obtient que $\forall i \in I$, $\|T_i(x)\|_F \leq C_x$. Donc :

$$\exists m \in \mathbb{N}, \forall i \in I, \ \ \|T_i(x)\|_F \leq C_x \leq m.$$

Alors il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $x \in A_m$, ce qui veut dire que $E \subset \underset{n\in\mathbb{N}}{\cup} A_n$.

Comme E est complet et l'intérieur de E n'est pas vide, le théorème de Baire, assure l'existence d'un n_0 tel que l'intérieur de A_{n_0} n'est pas vide. Par la suite il exisite $x_0 \in A_{n_0}$ et $r_0 > 0$ tels que $\overline{B_E}(x_0, r_0) \subset A_{n_0}$. Ceci est équivalent à :

$$\forall i \in I, \forall y \in \overline{B_E}(0,1) : \quad \|T_i(x_0 + r_0 y)\|_F \leq n_0.$$

La linéarité de T_i donne :

$$\forall i \in I, \forall y \in \overline{B_E}(0,1) : \quad \|T_i(x_0) + r_0 T_i(y)\|_F \leq n_0.$$

En utilisant la deuxième inégalité triangulaire on obtient que :

$$\begin{aligned} r_0 \|T_i(y)\|_F - \|T_i(x_0)\|_F &= \|r_0 T_i(y)\|_F - \|-T_i(x_0)\|_F \\ &\leq \|r_0 T_i(y) - (-T_i(x_0))\|_F . \end{aligned}$$

On déduit alors que :

$$\sup_{y\in\overline{B_E}(0,1)} \|T_i(y)\|_F \leq r_0^{-1}(n_0 + \|T_i(x_0)\|_F).$$

Le résultat recherché est obtenu avec $M = r_0^{-1}(n_0 + \|T_i(x_0)\|_F)$. ■

Présentons maintenant le corollaire suivant :

Corollaire 3.2.1 *Soit E un espace de Banach et F un espace normé et soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille d'applications de $\mathcal{L}(E,F)$ telle que : $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n x = Tx$ existe $\forall x \in E$. Alors la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, $T \in \mathcal{L}(E,F)$ et de plus : $\|T\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq \lim\limits_{n\to+\infty} \inf \|T_n\|_{\mathcal{L}(E,F)}$.*

Preuve. Les applications T_n sont linéaires, alors on obtient facilement que T est linéaire aussi. La suite $(T_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, car elle est convergente, donc le théorème de Banach-Steinhaus assure que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée :

$$\exists M \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in E : \quad \|T_n(x)\|_F \leq M \|x\|_E .$$

Passons à la limite on obtient que :

$$\exists M \geq 0, \forall x \in E : \quad \|T(x)\|_F \leq M \|x\|_E ,$$

ce qui veut dire que T est continue et que $\|T\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq M$.

De plus comme :

$$\|T_n(x)\|_F \leq \|T_n\|_{\mathcal{L}(E,F)} \|x\|_E ,$$

on déduit que :

$$\|T(x)\|_F = \lim_{n\to+\infty} \|T_n(x)\|_F \leq \lim_{n\to+\infty} \inf \|T_n\|_{\mathcal{L}(E,F)} \|x\|_E ,$$

d'où :

$$\|T\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq \lim_{n\to+\infty} \inf \|T_n\|_{\mathcal{L}(E,F)} . \quad ■$$

Remarque 3.2.1 *Ce corollaire annonce que toute limite simple d'applications linéaires et continues est continue. Mais ne dit rien sur la convergence uniforme de T_n vers T. autrement dit, nous n'avons pas en général $\lim\limits_{n\to+\infty} \|T_n - T\|_{\mathcal{L}(E,F)} = 0$.*

La condition de complétude de l'espace E est primordiale comme l'illustre l'exemple suivant.

Exemple : Soit E l'espace des fonctions polynômes sur l'intervalle $[0,1]$ avec la norme de la convergence uniforme : $\|p\|_\infty = \sup |p(t)|$, $t \in [0,1]$ et pour $n \geq 1$, posons : $T_n(p) = n(p(\frac{1}{n}) - p(0))$. Notons que l'espace E n'est pas de Banach. Les formes linéaires T_n sont continues, *i.e.* $T_n \in E'$, car on a : $|T_n(p)| \leq 2n \|p\|_\infty$. La suite $(T_n(p))_{n\geq 1}$ converge vers $p'(0)$ la dérivée de p en 0. Ainsi la suite $(T_n)_{n\geq 1}$ converge simplement vers la forme linéaire $T : p \to p'(0)$. Mais cette forme linéaire n'est pas continue. En effet, considérons la suite $p_k(x) = kx(1-x)^k$; on a :

$$p'_k(x) = k(1-x)^{k-1}(1-x-kx).$$

Le polynôme p_k admet un maximum quand $x = (1+k)^{-1}$ d'où :

Exemple 3.2.1
$$0 \leq p_k(x) \leq \left(\tfrac{k}{k+1}\right)^{k+1} \leq 1.$$

Ceci montre que $\|p_k\|_\infty \leq 1$. Mais $p'_k(0) = k$, ceci implique qu'il ne peut exister de constante $c \geq 0$ telle que $|p'_k(0)| \leq c \|p_k\|_\infty$, pour tout $k \geq 0$. On conclut que la forme linéaire T n'est pas continue.

3.3 Théorème de l'application ouverte

Définition 3.3.1 *Considérons $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{T}')$ deux espaces toplogiques. L'application $f : X \to Y$ est appelée application ouverte si l'image de tout ouvert de X par f est un ouvert de Y.*

Proposition 3.3.1 *Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques. Pour tout $j \in I$, la projection canonique définie par :*

$$P_j : \prod_{i\in I} X_i \to X_j, \qquad P_j\left((x_i)_{i\in I}\right) = x_j$$

est une application ouverte.

Preuve. Si $\mathcal{O} = \prod_{i \in I} \mathcal{O}_i$ est un ouvert élémentaire, on a $P_j(\mathcal{O}) = \mathcal{O}_i$. Comme un ouvert $\mathcal{U}$ de X est une réunion d'ouverts élémentaires : $\mathcal{U} = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{U}_\lambda$ et $P_j(\mathcal{U}) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} P_j(\mathcal{U}_\lambda)$ ceci donne que $P_j(\mathcal{U})$ est un ouvert et par la suite P_j est une application ouverte.

Remarque 3.3.1 *Quand f est une fonction continue de X sur Y, l'image réciproque de tout ouvert de Y est un ouvert de X, mais on sait rien apriori sur la nature topologique de l'image directe d'un ouvert par f.*

Exemples :

1. Toute application constante sur un espace métrique est continue mais elle n'est pas ouverte. Prenons comme exemple : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = c$, alors $f(]a,b[) = \{c\}$, le singleton $\{c\}$ n'est pas ouvert dans $\mathbb{R}$.
2. L'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^4$ est continue mais elle n'est pas ouverte car par exemple $f(]-1,1[) = [0,1[$ n'est pas ouvert.

Remarque 3.3.2 *La composition de deux applications ouvertes est une application ouverte.*

Énonçons maintenant le théorème de l'application ouverte qui est aussi appellé théorème de Banach-Schauder.

Théorème 3.3.1 ***(de l'application ouverte)*** *Soit E et F deux espaces de Banach et $T \in \mathcal{L}(E,F)$ surjective. Alors :*

$$\exists c > 0 : \; B_F(0,c) \subset T\left(B_E(0,1)\right), \tag{3.1}$$

i.e. T est une application ouverte.

Preuve. La preuve se fait en deux étapes.

Première étape : on montre que : $\exists \rho > 0 : B_F(0,\rho) \subset \overline{T\left(B_E(0,1)\right)}$.

Le fait que T est surjective implique que :

$$F = \underset{n\geq 1}{\cup} \overline{T\left(B_E(0,n)\right)}.$$

L'espace F étant complet, le théorème de Baire assure l'existence d'un $n_0 \geq 1$ tel que l'intérieur de $\overline{T\left(B_E(0,n_0)\right)}$ est non vide. Il existe donc $a \in F$ et $r > 0$ tels qe :

$$B_F(a,r) \subset \overline{T\left(B_E(0,n_0)\right)}.$$

Comme $\overline{T\left(B_E(0,n_0)\right)}$ est symétrique par rapport à 0 on obtient également :

$$B_F(-a,r) \subset \overline{T\left(B_E(0,n_0)\right)}.$$

Puisque l'ensemble $T\left(B_E(0,n_0)\right)$ est convexe, car T est linéaire, on déduit que :

$$B_F(0,\frac{r}{2}) \subset \frac{1}{2}B_F(a,r) + \frac{1}{2}B_F(-a,r) \subset \overline{T\left(B_E(0,n_0)\right)}.$$

Finalement, posons $\rho = \frac{r}{2n_0}$, nous obtenons grâce à la linéarité de T que :

$$B_F(0,\rho) \subset \overline{T\left(B_E(0,1)\right)}. \tag{3.2}$$

Deuxième étape : on va montrer que $c = \frac{\rho}{2}$ vérifie bien (3.1).

Soit $y \in B_F(0,\frac{\rho}{2})$. De (3.2), on a donc $y \in \overline{T\left(B_E(0,\frac{1}{2})\right)}$. Par la suite, il existe $x_1 \in B_E(0,\frac{1}{2})$ tel que :

$$\|y - Tx_1\|_F \leq \frac{\rho}{4}.$$

Nous répétons ainsi l'argument en remplaçant y par $y - Tx_1$. On construit donc une suite $(x_n)_{n\geq 1}$ telle que :

$$x_n \in B_E(0,2^{-n}) \quad \text{et} \quad \left\|y - T(\sum_{k=1}^{n} x_k)\right\|_F \leq \rho 2^{-n-1}.$$

La suite $(x_n)_{n\geq 1}$ vérifie par construction :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|_E < \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = 1.$$

Alors la série est absolument convergente dans E. De plus, comme E est complet, elle converge vers un élément $x \in E$. La dernière estimation donne que $x \in B_E(0,1)$.

D'autre part, comme :
$$\left\| y - T(\sum_{k=1}^{n} x_k) \right\|_F \leq \rho 2^{-n-1},$$
en passant à la limite et en utilisant la continuité de T on obtient :
$$y = Tx \in T\left(B_E(0,1)\right).$$
Donc : $B_F(0,c) \subset T\left(B_E(0,1)\right)$. ■

1. Il est important que les deux espaces E et F dans ce théorème soient complets.

2. Ce théorème s'utilise de la façon suivante :
$$\forall y \in F, \ \exists x \in E \text{ tel que } y = Tx \quad \text{et} \quad \|x\|_E \leq \frac{1}{c}\|y\|_F. \tag{3.3}$$

3. La relation (3.1) induit que l'application est ouverte : en effet, soit Ω un ouvert non vide de E et soit $y_0 \in T(\Omega)$; comme T est surjective il existe $x_0 \in \Omega$ tel que : $y_0 = Tx_0$. Soit $r > 0$ tel que $B_E(x_0, r) \subset \Omega$, alors :
$$y_0 + T(B_E(0,r)) = T(B_E(x_0,r)) \subset T(\Omega),$$
d'où par (3.1) :
$$B_F(y_0, rc) = y_0 + rB_F(0,c) \subset y_0 + rT(B_E(0,1)) = T(B_E(x_0,r)) \subset T(\Omega).$$
Donc $T(\Omega)$ est bien un ouvert de F.

Présentons maintenant deux conséquences très importantes de ce théorème.

Théorème 3.3.2 ***(d'isomorphisme de Banach)*** *Soit E et F deux espaces de Banach et $T : E \to F$ une application linéaire continue et bijective. Alors T^{-1} est continue. L'application T est donc un isomorphisme.*

Preuve. Soit Ω un ouvert de E. Comme T est bijective, on a : $\left(T^{-1}\right)^{-1}(\Omega) = T(\Omega)$, mais $T(\Omega)$ est un ouvert grâce au théorème de l'application ouverte. On conclut donc que l'image réciproque de tout ouvert de E par T^{-1} est un ouvert de F. Ce qui veut dire que T^{-1} est continue. ■

Corollaire 3.3.1 *Soit E un espace vectoriel normé que l'on munit de deux normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$. Supposons de plus que $(E, \|\cdot\|_1)$ et $(E, \|\cdot\|_2)$ sont complets et qu'il existe $c > 0$ tel que :*

$$\forall x \in E : \|x\|_1 \leq c \|x\|_2.$$

Alors les deux normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ sont équivalentes.

Preuve. L'inégalité $\|x\|_1 \leq c \|x\|_2$ signifie que l'application identité $Id : (E, \|\cdot\|_2) \to (E, \|\cdot\|_1)$, qui est linéaire et bijective, est continue. Donc Id^{-1} est continue, d'après le théorème d'isomorphisme de Banach. Par la suite :

$$\exists c' > 0, \quad \forall x \in E : \|x\|_2 \leq c' \|x\|_1 ,$$

d'où l'équivalence des deux normes. ■

Corollaire 3.3.2 *Soit E et F deux espaces de Banach et $f : E \to F$ une application linéaire continue. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) *L'application f est injective et son image est fermée.*

ii) *Il existe $k > 0$ tel que pour tout $x \in E$ on a $\|f(x)\|_F \geq k \|x\|_E$.*

Preuve. Supposons **i)** est satisfaite. Notons F_1 l'image de f. L'ensemble F_1 est un sous-espace fermé de F, donc un espace de Banach et f induit une application linéaire continue bijective de E sur F_1. Par le théorème d'isomorphisme de Banach, f^{-1} est continue d'où **ii)** *i.e.* il existe $k > 0$ tel que pour tout $x \in E$ on ait :

$$\|x\|_E = \left\|f^{-1}(y)\right\|_E \leq \frac{1}{k} \|y\|_E = \frac{1}{k} \|f(x)\|_F .$$

Supposons maintenant que **ii)** est vérifiée. Soit $x \in \ker f$; alors $0 = \|f(x)\|_F \geq k \|x\|_E$, donc $x = 0_E$. Cela montre que f est injective. Pour montrer que F_1 l'image de f est fermée il suffit de montrer qu'elle est complète. Considérons $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans F_1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit x_n tel que $f(x_n) = y_n$. Pour $p, q \in \mathbb{N}$, on a :

$$k \left\| x_p - x_q \right\|_E \leq \left\| f(x_p) - f(x_q) \right\|_F = \left\| y_p - y_q \right\|_F .$$

Puisque la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy aussi, donc convergente vers un point $x \in E$ puisque E est complet. Alors, f étant continue, la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}} = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x) \in F_1$. On conclut que F_1 est complet. ■

3.4 Théorème du graphe fermé

Définition 3.4.1 *Soit E et F deux espaces vectoriels normés et T une application de E vers F. Le graphe de T (noté $G(T)$) est le sous ensemble de $E \times F$ défini par :*

$$G(T) = \{(x, Tx) \in E \times F; \quad x \in E\}.$$

On peut vérifier que si T est continue alors $G(T)$ est fermé au sens de la topologie produit de $E \times F$.

Proposition 3.4.1 *Soit E et F deux espaces vectoriels normés et T une application de E vers F. Si T est continue alors $G(T)$ est fermé au sens de la topologie produit de $E \times F$.*

Preuve. Soit $(x_n, Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $G(T)$ qui converge vers $(x, y) \in E \times F$ *i.e.* $x_n \to x$ et $Tx_n \to y$. Mais l'application T et continue, donc on obtient que $Tx_n \to Tx$. De l'unicité de la limite on déduit que $y = T(x)$, ce qui signifie que $(x, y) \in G(T)$. ■

La réciproque de ce résultat n'est pas toujours vraie en cas général.

Théorème 3.4.1 ***(du graphe fermé)*** *Soit E et F deux espaces de Banach et $T : E \to F$ une application linéaire. Alors T est continue si et seulement si le graphe de T, $G(T)$, est fermé.*

Preuve. L'implication directe est assurée par proposition 3.4.1. Montrons l'implication réciproque.

Première méthode. Supposons que $G(T)$ est fermé et montrons que T est automatiquement continue. Munissons E d'une seconde norme, appelée norme du graphe, définie par :

$$\|x\|_T = \|x\|_E + \|Tx\|_F\,, \quad \forall x \in E.$$

Comme $G(T)$ est fermé dans l'espace complet $E \times F$, on déduit que $(E, \|\cdot\|_T)$ est un espace complet *i.e.* de Banach *(voir exercice 2.3)*.

D'autre part on a :

$$\|x\|_E \leq \|x\|_T.$$

Corollaire 3.3.1 entraine que ces deux normes sont équivalentes :

$$\exists C > 0, \quad \forall x \in E : \|x\|_T \leq C\,\|x\|_E\,.$$

Par la suite :

$$\forall x \in E : \|Tx\|_F \leq C\,\|x\|_E\,,$$

ce qui veut dire que T est continue.

Deuxième méthode. Comme l'espace produit $E \times F$ est de Banach et $G(T)$ est supposé fermé, on obtient que $G(T)$ est aussi un espace de Banach. Notons $p : G(T) \to E$ et $q : G(T) \to F$ tels que $p(x, y) = x$ et $q(x, y) = y$ (les restrictions à $G(T)$ des projections canoniques). Comme $G(T)$ est le graphe de T, l'application p est bijective et on a $T = q \circ p^{-1}$. Les projections étant continues, leurs restrictions p et q sont continues. Le théorème d'isomorphisme de Hahn-Banach, implique que p^{-1} est continue, donc T est continue. ■

Pour que ce théorème soit vrai, il faut absolument que les deux espaces soient complets. En effet, si on considère $X = C([0, 1], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues sur $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et on prend les deux espaces normés $E = (X, \|.\|_1)$ (qui n'est pas complet) et $E = (E, \|.\|_\infty)$ où :

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\, dt \qquad \|f\|_\infty = \sup |f(t)|\,,\ t \in [0,1].$$

L'application identité de E vers F n'est pas continue (voir exercice 3.9) malgré que son graphe est fermé. De plus l'application doit être linéaire comme l'illustre l'exemple suivant.

Exemple : Considérons la fonction réelle $f : (\mathbb{R}, |\cdot|) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{x-1} & \text{si } x \neq 1, \\ 5 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

Le graphe de f est bien fermé dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. En effet :

$$G(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ (x-1)y = 3\} \cup \{(1,5)\}$$

est réunion de deux fermés ($\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ (x-1)y = 3\}$ est l'image réciproque du fermé $\{3\}$ par la fonction continue $(x,y) \to (x-1)y$). D'autre part f est discontinue en 1. Le théorème du graphe fermé ne fonctionne pas pour cet exemple car f n'est pas une application linéaire

Remarque 3.4.1 *Soit E et F deux Banach et T une application linéaire de E vers F. Pour démontrer la continuité de T, il suffit donc de vérifier que pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E telle que $(x_n, Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers (x,y), on a $y = T(x)$.*
De plus, on peut supposer $x = 0_E$ d'après la linéarité de T. Le graphe de T est fermé est équivalent à : pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E telle que $(x_n, Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $(0_E, y)$, on a $y = 0_F$.

Proposition 3.4.2 *Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace vectoriel normé et F un sous espace vectoriel de E que l'on munit d'une autre norme $\|\cdot\|_F$. Suposons que $(F, \|\cdot\|_F)$ est complet et que l'injection canonique de $(F, \|\cdot\|_F)$ vers $(E, \|\cdot\|_E)$ est continue. Si $T : E \to E$ est une application linéaire continue telle que $T(F) \subset F$, alors $T : F \to F$ est aussi continue.*

Preuve. On va faire appel au théorème du graphe fermé dans F. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de F telle que $(x_n, Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers (x,y) dans $F \times F$. Comme l'injection canonique de

F vers E est supposée continue, on obtient que $(x_n, Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi dans $E \times E$. Mais $T : E \to E$ est continue, donc on déduit que $Tx_n \to Tx$ et grâce à l'unicité de la limite on obtient que $y = T(x)$. Ce qui montre que le graphe de T est fermé dans $F \times F$. Par conséquent $T : F \to F$ est continue. ■

Proposition 3.4.3 *Soit E et F des espaces de Banach et T une application linéaire de E vers F. Supposons que pour toute forme linéaire $l \in F'$, la forme linéaire $l \circ T : E \to \mathbb{R}$ est continue. Alors l'application T est aussi continue.*

Preuve. Grâce au théorème du graphe fermé, il suffit de montrer que le graphe de T est fermé. Commençons par vérifier que le graphe de T :

$$G(T) = \{(x, T(x)), \quad x \in E\}$$

est égale à l'ensemble H défini par :

$$H = \{(x, y) \in E \times F, \quad \forall l \in F' : l(y) = l \circ T(x)\}.$$

Comme $T(x) = y$ implique que $l \circ T(x) = l(y)$, on obtient que $(x, T(x)) \in H$. Donc $G(T) \subset H$. D'autre part, soit $x \in E$, $y \in F$ tel que $y \neq T(x)$ (*i.e.* $(x, y) \notin G(T)$). D'après corollaire 3.5.2, (qu'on va le présenter dans la section suivante) on sait qu'il existe $l \in F'$ tel que $l(y - T(x)) \neq 0$, c'est-à-dire $l(y) \neq l \circ T(x)$ et par la suite $(x, y) \notin H$. Donc $H \subset G(T)$ d'où l'égalité $G(T) = H$. Comme $l \circ T$ est continue, on a pour tout $l \in F'$, l'application $(x, y) \to l(y) - l \circ T(x)$ est continue donc son noyau est fermé dans $E \times F$. En conséquence H, qui est l'intersection de ces noyaux, est fermé, *i.e.* $G(T)$ est fermé. On conclut alors que T est continue. ■

3.5 Théorème de Hahn-Banach et ses conséquences

C'est un théorème fondamental de l'ananlyse fonctionnelle. Il possède deux formes. La première dite analytique, donne un résultat de prologement avec conservation de la norme d'une forme linéaire continue définie sur un sous-espace vectoriel. La deuxième forme, dite géométrique, permet la séparation stricte d'un ensemble convexe fermé d'un ensemble compact fermé avec un hyperplan fermé.

3.5.1 La forme analytique du théorème de Hahn-Banach

Au chapitre précédent, nous avons présenté un résultat de prolongement qui annonce que toute application linéaire continue définie sur un sous-espace vectoriel dense F d'un espace vectoriel normé E vers un espace de Banach possédait un unique prolongement continu sur E tout entier et que ce prolongement avait de plus la même norme.

Dans cette section, on va présenter le théorème de Hahn-Banach (forme analytique). L'une de multiples conséquences de ce théorème est le théorème de prolongement de Hahn-Banach qui annonce que toute forme linéaire continue sur F, sans l'hypothèse de la densité, admet un prolongement continu sur E.

Théorème 3.5.1 ***(de Hahn-Banach, forme analytique)*** *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $p : E \to \mathbb{R}$ une application vérifiant :*

1. $p(\lambda x) = \lambda p(x), \ \ \forall x \in E, \forall \lambda > 0.$
2. $p(x + y) \leq p(x) + p(y), \ \ \forall x, y \in E.$

Soit G un sous espace vectoriel de E et $g : G \to \mathbb{R}$ une apllication linéaire satisfaisant : $g(x) \leq p(x), \ \ \forall x \in G$. Alors il existe une forme linéaire $f : E \to \mathbb{R}$ qui prolonge g i.e. $g(x) = f(x), \ \ \forall x \in G$, et qui satisfait : $f(x) \leq p(x), \ \ \forall x \in E$.

La démonstration de ce théorème fait appel au célèbre lemme de Zorn (qui est équivalent à l'axiome du choix) dont nous rappelons l'énoncé. On commence par introduire quelques notions.

Définition 3.5.1 *Soit A un ensemble. La relation $\leq$ est une relation d'ordre sur A si :*

i) $\forall x, y, z \in A$, $(x \leq y$ *et* $y \leq z) \Rightarrow x \leq z$.

ii) $\forall x, y \in A$, $x \leq y \Rightarrow x = y$.

iii) $\forall x \in A$, $x \leq x$.

On dit que l'ordre est total si de plus pour tout $x, y \in A$, *on a* $x \leq y$ *ou* $y \leq x$. *Si* $\leq$ *est une relation d'ordre sur* A *alors* $(A, \leq)$ *est appelé un ensemble ordonné.*

Définition 3.5.2 *Soit* $(A, \leq)$ *un ensemble ordonné et* B *une partie de* A.

i) *On dit que* x *est majorant de* B *si :* $\forall y \in B, \ \ y \leq x$.

ii) *On dit que* x *est un élément maximal de* B *si* $\forall y \in A, \ \ x \leq y \Rightarrow y = x$.

iii) *On dit que l'ensemble ordonné* $(A, \leq)$ *est inductif si toute partie totalement ordonnée de* A *admet un majorant.*

Lemme 3.5.1 ***(lemme de Zorn)*** *Toute ensemble non vide inductif admet un élément maximal.*

Preuve. (**du théorème de Hahn-Banach**) On désigne par A l'ensemble des couples (V, φ) où V est un sous espace vectoriel de E contenant G, φ une forme linéaire sur V vérifiant $\varphi(x) \leq p(x)$ pour tout $x \in V$ et $\varphi = g$ sur G. Définissant sur A la relation d'ordre $\leq$ suivante :

$$(V_1, \varphi_1) \leq (V_2, \varphi_2) \Leftrightarrow V_1 \subset V_2 \text{ et } \varphi_1 = \varphi_2 \text{ sur } V.$$

L'ensemble $(A, \leq)$ est un ensemble ordonné par construction et non vide car il contient g. Montrons que A est inductif. Soit $\{(V_i, \varphi_i), \ i \in I\}$ une partie totalement ordonné de A. On définit $M = \underset{i \in I}{\cup} V_i$, M est un sous espace vectoriel contenant G, et l'application u défini sur M par $u(x) = \varphi_i(x)$ si $x \in V_i$. L'application u est bien définie et $u \in A$ et de plus (M, u) est bien un majorant de la partie $\{(V_i, \varphi_i), \ i \in I\}$. D'après le lemme de Zorn, A admet donc un élément maximal (V, f).

Afin d'achever la preuve, il suffit de montrer que $V = E$. Supposons par l'absurde que ce n'est pas le cas, donc il existe au moins x non nul tel que $x \in E \backslash V$. Pour a réel donné, on définit alors une forme linéaire f_a sur $V \oplus \mathbb{R}x$ par :$f_a(y) = f(y)$ si $y \in V$ et $f_a(x) = a$.

On cherche à fixer la constante a de tel façon d'avoir $f_a \in A$, c'est-à-dire :

$$f_a(y + tx) = f(y) + ta \leq p(y + tx), \qquad \forall y \in V, \forall t \in \mathbb{R}. \tag{3.4}$$

On constate que (3.4) est vérifiée pour tout $y \in V$ si $t = 0$. D'autre part, comme p est une semi-norme on a $p(tx) = tp(x)$ si $t > 0$, l'inégalité (3.4) restreinte aux $t > 0$ est équivalente à :

$$f(y) + a \leq p(y + x), \qquad \forall y \in V,$$

alors pour $t < 0$, elle est équivalente à :

$$f(y) - a \leq p(y - x), \qquad \forall y \in V$$

Finalement (3.4) est donc satisfaite si et seulement si la constante a est choisi de tel façon que :

$$\sup_{z \in V} (f(z) - p(z - x)) \leq a \leq \inf_{y \in V} (p(y + x) - f(y))$$

Un tel choix de a est possible comme pour tout $y, z \in V$, on a :

$$f(y) + f(z) \leq p(y + z) \leq p(y + x) + p(z - x).$$

On a donc $(V, f) \leq (V \oplus \mathbb{R}x, f_a)$. Comme $x \notin V$, cela contredit la maximalité de (V, f).

■

Dans la suite, on présente quelques conséquences très importantes du théorème de Hahn-Banach, lorsque E est un espace vectoriel **normé** de norme $\|\cdot\|$.

Théorème 3.5.2 ***(de prolongement de Hahn-Banach)*** *Considérons E un $\mathbb{R}$-un espace vectoriel normé et G un sous-espace vectoriel de E et soit $g : G \to \mathbb{R}$ une forme linéaire continue de norme $\|g\|_{G'} = \sup_{x \in G, \|x\| \leq 1} |g(x)|$. Alors il existe un prolongement $f \in E'$ de g tel que : $\|f\|_{E'} = \|g\|_{G'}$.*

Preuve. Comme l'application g est continue on a :

$$g(x) \leq |g(x)| \leq \|g\|_{G'} \|x\|, \qquad \forall x \in G.$$

Considérons la semi-norme $p : E \to \mathbb{R}$ avec $p(x) := \|g\|_{G'} \|x\|$. Le théorème précédent assure l'existence d'une forme linéaire $f : E \to \mathbb{R}$ qui prolonge g *i.e.* $g(x) = f(x), \ \forall x \in G$, et qui satisfait : $f(x) \leq p(x) = \|g\|_{G'} \|x\|, \ \forall x \in E.$

Par la suite :

$$-f(x) = f(-x) \leq \|g\|_{G'} \|-x\| = \|g\|_{G'} \|x\|,$$

donc :

$$|f(x)| \leq \|g\|_{G'} \|x\|, \qquad \forall x \in E.$$

Ceci montre que f est continue et que $\|f\|_{E'} \leq \|g\|_{G'}$. Mais :

$$\|g\|_{G'} = \sup_{x \in G, x \neq 0} \frac{|g(x)|}{\|x\|} = \sup_{x \in G, x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|} \leq \sup_{x \in E, x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \|f\|_{E'}.$$

Il en résulte que $\|f\|_{E'} = \|g\|_{G'}$. ■

On note que le prolongement f n'est pas unique comme le montre l'exemple suivant.

Exemple : Prenons la fonction $g : \mathbb{R} \times \{0\} \to \mathbb{R}$ avec $g(x, 0) = x$. L'application g est linéaire et continue et $\|g\| = 1$.

Soit $f_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ avec $f_1(x, y) = x - y$ et $f_2 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ avec $f_2(x, y) = x + y$.

On constate que f_1 et f_2 sont deux applications linéaires différentes qui prolongent g avec : $\|f_1\| = \|f_2\| = \|g\| = 1$ (on note que $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ est muni par la norme $\|(x, y)\|_1 = |x| + |y|$).

Corollaire 3.5.1 *Soient E un espace vectoriel normé et F un sous espace vectoriel de E et $a \in E$ un élément qui n'appartient pas à $\overline{F}$. Posons $d = d(a, F) > 0$, alors il existe une forme linéaire continue $f \in E'$ telle que :*

$$f = 0 \text{ sur } F, \ f(a) = 1 \text{ et } \|f\|_{E'} = 1/d.$$

Preuve. On pose $G = F \oplus \mathbb{R}a$ et on définit une forme linéaire $g : G \to \mathbb{R}$ en posant $g(x) = \lambda$ pour $x = y + \lambda a \in G$ avec $y \in F, \lambda \in \mathbb{R}$. On constate que g s'annule sur F et $g(a) = 1$. Vérifions maintenant que g est continue et calculons sa norme. On a $|g(x)| = |\lambda|$ et si $\lambda \in \mathbb{R}$ est non nul $x = \lambda(\frac{y}{\lambda} + a)$ donc $\|x\| = |\lambda| \left\| \frac{y}{\lambda} + a \right\| \geq |\lambda| \, d.$

Par la suite $|g(x)| \leq \frac{1}{d} \|x\|$, ce qui signifie que g est continue et que $\|g\|_{G'} \leq 1/d.$

Montrons que l'égalité est vérifiée. Il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de F telle que $d = \lim_{n\to+\infty} \|x_n - a\|$ (vient de la définition de la distance entre un élément et un ensemble). Posons $y_n = x_n - a$, on obtient alors que $1 = |g(y_n)| \leq \|g\|_{G'} \|y_n\|$. En passant à la limite on trouve : $1 \leq d \|g\|_{G'}$ d'où $\|g\|_{G'} = 1/d$. On conclut grâce au théorème de prolongement de Hahn-Banach. ■

Corollaire 3.5.2 *Soit E un espace vectoriel normé et $x_0 \in E \backslash \{0_E\}$. Alors il existe $f \in E'$ telle que $\|f\|_{E'} = 1$ et $f(x_0) = \|x_0\|$.*

Preuve. Soit $x_0 \in E$ et $x_0 \neq 0_E$. On applique le théorème 3.5.2 en choisissant : $G = \mathbb{R}x_0$ et $g(\lambda x_0) = \lambda \|x_0\|, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ de sorte que $\|f\|_{E'} = 1$. ■

Corollaire 3.5.3 *Soit E un e.v.n. Pour tout $x \in E$ on a :*

$$\|x\|_E = \sup_{L\in E', \|L\|_{E'}=1} |L(x)|,$$

i.e. le sup est atteint.

Preuve. Le résultat est évident lorsque $x = 0_E$. Supposons que $x \neq 0_E$. Soit $L \in E'$ tel que $\|L\|_{E'} = 1$. Alors comme : $|L(x)| \leq \|L\|_{E'} \|x\|_E$, on obtient $|L(x)| \leq \|x\|_E$. Donc

$$\sup_{L\in E', \|L\|_{E'}=1} |L(x)| \leq \|x\|_E.$$

Réciproquement le corollaire 3.5.2 assure l'exsitence de $\widetilde{L} \in E'$ tel que $\widetilde{L}(x) = \|x\|_E$ et $\left\|\widetilde{L}\right\|_{E'} = 1$. Donc :

$$\|x\|_E = \left|\widetilde{L}(x)\right| \leq \sup_{L\in E', \|L\|_{E'}=1} |L(x)|.$$

Alors, on déduit que :

$$\|x\|_E = \sup_{L\in E', \|L\|_{E'}=1} |L(x)|.$$

■

Corollaire 3.5.4 *Pour tout espace vectoriel normé E, le dual E' sépare les points de E i.e. pour tout $x_1,\ x_2 \in E$ tel que $x_1 \neq x_2$ il existe $f \in E'$ tel que $f(x_1) \neq f(x_2)$.*

Preuve. Si $x_1 \neq x_2$ alors posons $x = x_1 - x_2 \neq 0_E$, il existe d'après le corollaire 3.5.2 $f \in E'$ telle que $f(x) = \|x\| \neq 0$. Ceci implique que : $f(x_1) \neq f(x_2)$. ■

Remarque 3.5.1 *Cette propriété n'est pas vérifiée pour des espaces plus généraux.*

3.5.2 La forme géométrique du théorème de Hahn-Banach

Dans toute la suite E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé.

Définition 3.5.3 *On appelle hyperplan toute partie de E de la forme :*

$$H := \{x \in E;\ f(x) = \alpha\} = f^{-1}\{\alpha\}$$

où f est une forme linéaire sur E, non identiquement nulle et $\alpha \in \mathbb{R}$. On dit que H est l'hyperplan d'équation $[f = \alpha]$.

Proposition 3.5.1 *L'hyperplan d'équation $[f = \alpha]$ est fermé si et seulement f est continue.*

Preuve. L'implication directe est facile à constater. En effet $H = f^{-1}\{\alpha\}$ est l'image réciproque d'un fermé par une application continue donc est fermé.

Réciproquement, supposons que H est fermé, alors son complémetaire $C_E H$ dans E est ouvert est non vide (si $C_E H = \emptyset$ alors f est la fonction constante $f(x) = \alpha$, donc f est continue). Soit $x_0 \in C_E H$ et supposons sans perdre de généralité que $f(x_0) < \alpha$. Soit $r > 0$ tel que :

$$B(x_0, r) := \{x \in E,\ \|x - x_0\| < r\} \subset C_E H.$$

On a $f(x) < \alpha$, $\forall x \in B(x_0, r)$. En effet, supposons qu'il existe $x_1 \in B(x_0, r)$ tel que $f(x_1) > \alpha$. Comme la boule est un convexe, on obtient que :

$$\forall t \in [0,1] : \ (1-t)x_0 + tx_1 \in B(x_0, r).$$

Par la suite $f((1-t)x_0 + tx_1) \neq \alpha$ pour tout $t \in [0,1]$. Contradiction, car si on prend : $t_0 = \frac{\alpha - f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)} \in [0,1]$ on obtient que $f((1-t_0)x_0 + t_0 x_1) = \alpha$.
Ceci implique que $f(x_0 + rz) < \alpha$, pour tout $z \in B(0,1)$; donc $f(z) < \frac{1}{r}(\alpha - f(x_0))$. Il en résulte que f est continue et que $\|f\| \leq \frac{1}{r}(\alpha - f(x_0))$. ■

Définition 3.5.4 *Soit A et B deux parties de E.*

1. *On dit que l'hyperplan $[f = \alpha]$ sépare A et B au* ***sens large*** *si :*

$$f(a) \leq \alpha \leq f(b), \quad \forall a \in A,\ \forall b \in B.$$

2. *On dit que l'hyperplan $[f = \alpha]$ sépare A et B au* ***sens strict*** *si :*

$$f(a) < \alpha < f(b), \quad \forall a \in A,\ \forall b \in B.$$

(La séparation exprime géométriquement que A et B se situent de part et d'autre de l'hyperplan $[f = \alpha]$).

Les formes géométriques du théorème de Hahn-Banach sont des résultats de séparation des parties convexes disjointes. On admet le théorème suivant :

Théorème 3.5.3 ***(de Hahn-Banach, première forme géométrique)*** *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, A et B deux parties convexes de E, non vides et disjointes. Supposons que A est ouverte. Alors il existe un hyperplan fermé qui sépare A et B au* ***sens large****, c'est-à- dire : il existe f une forme linéaire continue sur E et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que :*

$$f(a) \leq \alpha \leq f(b), \quad \forall a \in A,\ \forall b \in B.$$

Théorème 3.5.4 ***(de Hahn-Banach, deuxième forme géométrique)*** *Soit A et B deux parties convexes de E, non vides et disjointes. Supposons que A est fermé et que B est compact. Alors il existe un hyperplan fermé qui sépare A et B au sens strict, c'est-à-dire il existe f une forme linéaire continue sur E et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que :*

$$f(a) < \alpha < f(b), \quad \forall a \in A, \ \forall b \in B.$$

Preuve. Soit A et B deux ensembles de E vérifiant les hypothèses du théorème ci-dessus. Pour $\varepsilon > 0$ on pose :

$$A_\varepsilon := A + B(0, \varepsilon) \quad \text{ et } \quad B_\varepsilon := B + B(0, \varepsilon).$$

Les ensembles A_ε et B_ε sont convexes, non vides et ouverts ($A_\varepsilon = \underset{a \in A}{\cup}(a + B(0, \varepsilon))$ et $x \mapsto a + x$ est un homémorphisme). De plus, il existe $\varepsilon > 0$ suffisament petit tel que $A_\varepsilon \cap B_\varepsilon = \emptyset$. Sinon, pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $a_n \in A$ et $b_n \in B$, $x_n, y_n \in B(0, \frac{1}{n})$ tels que $a_n + x_n = b_n + y_n$. On alors $\|a_n - b_n\| = \|x_n - y_n\| \leq 2/n$. La compacité de B implique l'existence d'une sous suite $(b_{n_k})_{n_k \in \mathbb{N}}$ qui converge vers un élément $b \in B$. Alors la suite $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} = (a_{n_k} - b_{n_k} + b_{n_k})_{n_k \in \mathbb{N}}$ converge aussi vers b, mais A est fermé donc $b \in A \cap B$; ce qui contredit le fait que A et B sont disjoints.

Fixons un tel ε. D'après le théorème de Hahn-Banach, première forme géométrique, il existe un hyperplan fermé d'équation $[f = \alpha]$ qui sépare A_ε et B_ε au sens large. On a donc :

$$f(x + \varepsilon z) \leq \alpha \leq f(y + \varepsilon z), \qquad \forall x \in A, \forall y \in B, \forall z \in B(0, 1).$$

Par conséquent :

$$f(x) + \varepsilon \|f\| \leq \alpha \leq f(y) - \varepsilon \|f\|, \quad \forall x \in A, \forall y \in B,$$

et l'hyperplan d'équation $[f = \alpha]$ sépare A et B au sens strict puisque $\|f\| \neq 0$. Ce qui termine la démonstration. ■

On déduit de ce dernier théorème le résultat fondamental suivant :

Proposition 3.5.2 *Soit E un espace vectoriel et $\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ des formes linéaires telles* *que :*

$$\varphi_i(v) = 0,\ \forall i = 1, \cdots, n \Rightarrow \varphi(v) = 0 \qquad i.e. \ \bigcap_{i=1}^{n} \ker \varphi_i \subset \ker \varphi.$$

Il existe alors des réels $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ *tels que* $\varphi = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi_i$.

Preuve. On définit $f : E \to \mathbb{R}^{n+1}$ avec $f(x) = (\varphi(x), \varphi_1(x), \cdots, \varphi_n(x))$. Posons $A = f(E)$ et $a = (1, 0, \cdots, 0)$. L'ensemble A est convexe fermé non vide (A est un sous-espace vectoriel de dimension finie) et par hypothèse $a \notin A$. En appliquant le théorème de Hahn-Banach 3.5.4, on peut séparer a et A au sens strict dans $\mathbb{R}^{n+1}$: il existe $(\mu, \mu_1, \cdots, \mu_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que :

$$\mu < \alpha < \mu\varphi(x) + \sum_{i=1}^{n} \mu_i \varphi_i(x), \quad \forall x \in X.$$

Par linéarité, on obtient que :

$$\mu\varphi(x) + \sum_{i=1}^{n} \mu_i \varphi_i(x) = 0, \quad \forall x \in X.$$

Par la suite $\mu < 0$ et on conclut en posant : $\lambda_i = -\mu_i/\mu$. ■

3.5.3 Critère de densité

Corollaire 3.5.5 *Soit F un sous-espace vectoriel de E non dense. Alors F est inclus dans un hyperplan fermé de E.*

Preuve. Soit $x_0 \in E \backslash \overline{F}$. On applique le théorème de Hahn-Banach 3.5.4 avec $A = \overline{F}$ (convexe fermé) et $B = \{x_0\}$ (convexe compact). Il existe donc $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f \in E'$ tels que : $\forall x \in \overline{F},\ \ f(x) < \alpha < f(x_0)$. Par la suite : $f(\lambda x) < \alpha$, $\forall x \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Donc $f(x) = 0, \forall x \in F$. Mais $f \neq 0_{E'}$ car $f(x_0) > f(x), \forall x \in F$. Donc F est inclus dans l'hyperplan $\ker f$ $\ i.e.\ F \subset \ker f$. ■

Remarque 3.5.2 *Corollaire 3.5.5 peut être donné sous la forme suivante :*
soit $F \subset E$ un sous-espace vectoriel tel que $\overline{F} \neq E$. Alors il existe $f \in E' \backslash \{0_{E'}\}$ tel que $f(x) = 0, \forall x \in F$.

Corollaire 3.5.6 *Soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors F est dense si et seulement :*

$$\forall f \in E'; \quad f(x) = 0, \ \forall x \in F \Rightarrow f(x) = 0, \ \forall x \in E \ ;$$

autrement dit : toute forme linéaire $f \in E'$ s'annulant sur F s'annule aussi sur E tout entier.

Preuve. L'implication directe est claire, car si une application continue f s'annule sur une partie dense de E est forcément nulle, en effet :
$\forall x \in E$, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans F telle que $x_n \to x$. Si f s'annule sur F, alors on obtient : $\quad 0 = f(x_n) \to f(x)$ *i.e.* $f(x) = 0$.
Montrons la réciproque par contraposition. Supposons que F est un sous-espace vectoriel non dense de E. Alors le corollaire 3.5.5 assure l'existence d'une forme linéaire continue non nulle f telle que $F \subset \ker f$ d'où le résultat. ■

3.6 Exercices

Exercice 3.1 *Soit (E, d) un espace métrique complet. Toute partie de E qui est ouverte, fermée, ou intersection d'un ouvert et d'un fermé est de Baire.*

Solution. On sait déjà d'après proposition 3.1.1 que tout ouvert d'un espace de Baire est de Baire. Soit $A = \Omega \cap F$ une intersection d'un ouvert Ω et d'un fermé F. La partie F, munie de la topologie induite, est aussi un espace métrique complet, donc de Baire. L'ensemble A est un ouvert dans F, qui est de Baire, donc A est de Baire.

Exercice 3.2 *Soit X un espace métrique complet et $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties fermées de X telle que $\underset{n\in\mathbb{N}}{\cup} F_n = X$. Alors $\underset{n\in\mathbb{N}}{\cup} \overset{\circ}{F_n}$ est dense dans X.*

Preuve. Le résultat de cet exercice est déjà donné par le théorème 3.1.3. Ici on présente une autre méthode de démonstration. Posons $U_n = C_X K_n$ (le complémentaire de K_n)

où $K_n = F_n \backslash \overset{\circ}{F_n}$. On remarque que l'intérieur de K_n est vide (car il est contenu dans $K_n \cap \overset{\circ}{F_n} = \emptyset$). On déduit donc que U_n est un ouvert dense dans X. Comme $F_n = K_n \cup \overset{\circ}{F_n}$, on obtient que :

$$X = \underset{n\in\mathbb{N}}{\cup} F_n = \left(\underset{n\in\mathbb{N}}{\cup} K_n\right) \cup \left(\underset{n\in\mathbb{N}}{\cup} \overset{\circ}{F_n}\right).$$

Par la suite $\underset{n\in\mathbb{N}}{\cup} \overset{\circ}{F_n}$ contient le complémentaire de $\underset{n\in\mathbb{N}}{\cup} K_n$, c'est-à-dire $\underset{n\in\mathbb{N}}{\cap} U_n$, qui est par le théorème de Baire dense. Donc $\underset{n\in\mathbb{N}}{\cup} \overset{\circ}{F_n}$ est dense dans X. ■

Exercice 3.3 *Montrer que* $\mathbb{R}$ *n'est pas dénombrable.*

Solution. Supposons que $\mathbb{R}$ est dénombrable. Alors $\mathbb{R} = \underset{x\in\mathbb{R}}{\cup} \{x\}$ est une réunion dénombrable des fermés d'intérieur vide pour la topologie usuelle associée à la distance usuelle $d(x,y) = |x-y|$. Comme $(\mathbb{R}, d)$ est complet, on déduit en appliquant le théorème de Baire que $\overset{\circ}{\overbrace{\underset{x\in\mathbb{R}}{\cup}\{x\}}} = \overset{\circ}{\mathbb{R}} = \emptyset$. Contradiction avec le fait que $\overset{\circ}{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$.

On peut montrer ce résultat en utilisant les ouverts $\mathbb{R}\backslash\{x\}$, avec $x \in \mathbb{R}$ qui sont denses dans $\mathbb{R}$ mais $\underset{x\in\mathbb{R}}{\cap} \mathbb{R}\backslash\{x\} = \emptyset$.

Exercice 3.4 *Soit* $(U_n)_{n\geq 0}$ *une suite d'ouverts denses dans* $(\mathbb{R}, |.|)$*. Montrer que* $U := \underset{n\geq 0}{\cap} U_n$ *n'est pas un ensemble dénombrable.*

Solution. Supposons que U est dénombrable infini (le cas où U est fini se traite de la même manière). Il existe alors une application bijective φ de $\mathbb{N}$ dans U..

Posons : $V_n = U_n - \{\varphi(n)\}$. Il est clair que V_n est encore un ouvert et dense dans $\mathbb{R}$. Le théorème de Baire nous assure que $\underset{n\geq 0}{\cap} V_n$ est aussi dense dans $\mathbb{R}$. Mais d'autre part on a :

$$\underset{n\geq 0}{\cap} V_n = \underset{n\geq 0}{\cap} (U_n - \{\varphi(n)\}) = \underset{n\geq 0}{\cap} U_n - \underset{n\geq 0}{\cup} \{\varphi(n)\} = U - U = \emptyset.$$

Contradiction.

Exercice 3.5 *Utiliser proposition 3.1.4 pour montrer que : si E est un Banach qui admet un système générateur dénombrable alors E est un espace de dimension finie. Que peut-on dire sur l'espace des fonctions polynômiales sur* $[0,1]$?

Solution. Soit $(v_n)_{n\geq 0}$ un système générateur de E. Posons E_n le sous espace vectoriel engendré par $\{v_k, \ \ k < n\}$. C'est un espace vectoriel de dimension fini, donc un sous-espace fermé de E (comme tout sous-espace de dimension finie est fermé). Puisque $(v_n)_{n\geq 0}$ est un système générateur de E, tout $x \in E$ s'écrit comme une somme finie $\sum\limits_k \lambda_k v_k$, où tous les scalaires λ_k, sauf un nombre fini, sont nuls, donc x appartient à un E_n. Ce qui signifie que E est réunion des E_n. La proposition 3.1.4 assure que E est donc égal à l'un des E_n, donc E est de dimension finie.

Comme l'espace des fonctions polynômiales sur $[0, 1]$ à valeurs réelles possède une base algébrique dénombrable (système générateur dénombrable), il ne peut donc être muni d'une norme qui le rend complet.

Exercice 3.6 *Soit E l'espace des fonctions polynômiales sur $[0, 1]$ à valeurs réelles, muni de la norme $\|P\|_\infty = \sup |P(t)|$, $t \in [0, 1]$. Posons $F_n = \{P \in E, \ \text{tel que } \deg P \leq n\}$.*

1. *Montrer que F_n est fermé dans E et d'intérieur vide.*
2. *Notons que $E = \underset{n\in\mathbb{N}}{\cup} F_n$, justifier pourquoi le théorème de Baire n'est pas applicable. Que peut-on en déduire ?*

Solution.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On remarque que F_n est un sous-espace vectoriel de dimension $n + 1$ de E, donc il est fermé (car tout sous-espace vectoriel de dimension finie est fermé). Supposons que F_n est d'intérieur non vide, alors :

   il existe P_0, il existe $r > 0$ tels que $B(P_0, r) \subset F_n$, en particulier $P_0 + \frac{r}{2}x^{n+1} \in F_n$ (car $\left\|(P_0 + \frac{r}{2}x^{n+1}) - P_0\right\|_\infty = \frac{r}{2}$). Contradiction. Donc $\overset{\circ}{F}_n = \emptyset$.
2. Si le théorème de Baire est applicable on aurait $E = \overset{\circ}{E} = \overset{\circ}{\overbrace{\underset{n\in\mathbb{N}}{\cup} F_n}} = \emptyset$. Contradiction. On en déduit que $(E, \|\cdot\|_\infty)$ n'est pas complet.

Exercice 3.7 *Soit G un espace de Banach et soit A une partie de G. Supposons que, pour tout $f \in G'$, l'ensemble $f(A) = \{f(x), \ \ x \in A\}$ est borné dans $\mathbb{R}$. Montrer que le sous-ensemble A est borné.*

Solution. On fait appel au théorème de Banach-Steinhaus avec $E = G'$, $F = \mathbb{R}$ et $I = A$. Considérons $(T_a)_{a \in A}$ une famille d'applications de $\mathcal{L}(G', \mathbb{R})$ où, pour chaque $a \in A$:

$$T_a(f) = f(a) \text{ pour tout } f \in G'.$$

L'hypothèse $f(A)$ est borné est équivalente à :

$$\forall f \in G' : \sup_{a \in A} |T_a(f)| = \sup_{a \in A} |f(a)| < +\infty.$$

Le théorème de Banach-Steinhaus implique que :

$$\exists C > 0, \ \forall f \in G', \forall a \in A, |T_a(f)| = |f(a)| \leq C \|f\|_{G'}.$$

Appliquons corollaire 3.5.3 on obtient :

$$\forall a \in A, \ \|a\| = \sup_{f \in G', \|f\|_{G'} \leq 1} |f(a)| \leq C.$$

Exercice 3.8 *Soient E, F et G trois espaces vectoriels normés. On suppose que E ou F est complet. Soit $T : E \times F \to G$ une application bilinéaire. Montrer que si T est séparément continue i.e. les applications :*

$$\forall x \in E, T_x : y \in F \to T(x, y) \in G$$

$$\forall y \in F, T_y : x \in E \to T(x, y) \in G$$

sont continues alors T est continue.

Solution.

Quitte à échanger E et F, supposons que F est complet. On considère maintenant la famille d'applications linéaires continues $(T_x)_{x \in B_E}$ indexé sur la boule unité fermée de E. On a alors :

- Pour tout $x \in B_E$, l'application T_x est dans $\mathcal{L}(F, G)$.
- Pour tout $y \in F$, l'application $x \in E \mapsto T_x(y) = T(x, y)$ est linéaire continue et par la suite elle est bornée sur la boule unitée B_E :

$$\forall y \in F, \ \sup_{x \in B_E} \|T_x(y)\|_G < +\infty.$$

Comme F est complet, le théorème de Banach-Steinhaus assure que :

$$\exists M \geq 0, \ \|T_x\|_{\mathcal{L}(F,G)} \leq M, \quad \forall x \in B_E.$$

Ceci signfie que :

$$\|T(x,y)\|_G \leq M\,\|y\|_F\,, \qquad \forall x \in B_E, \forall y \in F.$$

Par la suite on obtient :

$$\|T(x,y)\|_G \leq M\,\|x\|_E\,\|y\|_F\,, \qquad \forall x \in E, \forall y \in F,$$

ce qui donne la continuité de T.

Exercice 3.9 *Soit $E = C([0,1],\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Considérons les deux espaces normés $X = (E, \|.\|_\infty)$ et $Y = (E, \|.\|_1)$ où :*

$$\|f\|_\infty = \sup|f(t)|\,,\ t \in [0,1], \qquad \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,dt.$$

On note I l'application identité de X dans Y.

1. *Montrer que I est une application linéaire bijective et continue. Quelle est sa norme ?*
2. *Montrer que l'application I^{-1} n'est pas continue.*

   (indication : utiliser la suite $f_n(t) = t^n$).
3. *Sachant que X est un espace de Banach, déduire que l'espace normé Y n'est pas de Banach.*

Solution.

1. C'est évident que I est linéaire et bijective. De plus I est continue et $\|I\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \leq 1$, en effet :

   $$\|I(f)\|_1 = \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,dt \leq \int_0^1 \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|\,dt = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)| = \|f\|_\infty\,.$$

   Prenons maintenant f_0 définie par $f_0(t) = 1$ on obtient :

   $$\|I(f_0)\|_1 = \|f_0\|_1 = \|f_0\|_\infty = 1.$$

   Ceci montre que $\|I\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = 1$.

2. Comme I est bijective son inverse $I^{-1} : Y = (E, \|.\|_1) \to X = (E, \|.\|_\infty)$ est bien défini. Supposons que I^{-1} est continue. Donc il existe $C > 0$ tel que :

   $$\forall f \in E,\ \ \|f\|_\infty = \|I^{-1}(f)\|_\infty \leq C\,\|f\|_1\,.$$

   Considérons la suite de fonctions de E définie par $f_n(t) = t^n$. On a :

   $$\|f_n\|_\infty = 1 \leq C\,\|f\|_1 = C\tfrac{1}{n+1} \ \Rightarrow C \geq n+1, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

ce qui est impossible. On déduit de cette contradiction que I^{-1} n'est pas continue.

3. Comme X est un espace de Banach, si Y était de Banach aussi on pourrait appliquer le théorème d'isomorphisme de Banach et on aurait I^{-1} continue. Par la suite, Y n'est pas complet *i.e.* n'est pas de Banach.

Exercice 3.10 *Soit* $E = C([0,1], \mathbb{R})$ *l'espace des fonctions continues sur* $[0,1]$*, à valeurs réelles et* $\|.\|$ *une norme sur* E*, tels que* $(E, \|.\|)$ *soit un espace de Banach. On pose l'hypothèse suivante :*

"Si f_n*,* $f \in E$ *tels que* $\|f_n - f\| \to 0$*, alors* $f_n(t) \to f(t)$ *pour tout* $t \in [0,1]$*."*

Montrer que les deux normes $\|.\|$ *et* $\|.\|_\infty$ *sont équivalentes.*

Solution. Considérons l'application identité $I : E_1 = (E, \|.\|_\infty) \to E_2 = (E, \|.\|)$. Il est clair que I est linéaire et bijective. On va appliquer le théorème du graphe fermé pour montrer que I est continue. Considérons alors $(f_n, I(f_n))$ une suite du graphe de I convergente vers (f, g) dans $E_1 \times E_2$. Alors :

$$\|f_n - f\|_\infty \to 0 \text{ et } \|I(f_n) - g\| = \|f_n - g\| \to 0.$$

En utilisant la définition de $\|.\|_\infty$, on déduit de la première convergence que :

$$f_n(t) \to f(t), \ \ \forall t \in [0,1].$$

En utilisant l'hypothèse donnée dans l'énoncé, on obtient de la seconde convergence que :

$$f_n(t) \to g(t), \ \ \forall t \in [0,1].$$

L'unicité de la limite donne :

$$f(t) = g(t), \ \ \forall t \in [0,1], \text{ c'est-à-dire } f = g = I(f),$$

ce qui prouve que le graphe de I est fermé. En appliquant le théorème du graphe fermé, comme E_1 et E_2 sont des Banach, on déduit que I est continue. Alors :

$$\exists \alpha > 0, \ \forall f \in E \ : \quad \|f\| = \|I(f)\| \leq \alpha \|f\|_\infty .$$

D'autre part, comme I est bijective, le théorème d'isomorphisme de Banach assure que I^{-1} est continue. Donc :

$$\exists \beta > 0, \ \forall f \in E \ : \quad \|f\|_\infty = \|I^{-1}(f)\|_\infty \leq \beta \|f\| .$$

Par conséquence, les deux normes sont équivalentes.

Exercice 3.11 *Soit E et F deux espaces vectoriels topologiques et $f : E \to F$ une application linéaire. Prouver que f est ouverte si et seulement si elle ouverte en 0 (f est ouverte en a si $\forall V \in V_E(a)$, $f(V) \in V_F(f(a))$.*

Solution.

Montrons l'implication directe. Soit $V \in V_E(0)$ donc il existe un ouvert U de E tel que $0 \in U \subset V$. De plus on a $f(0) = 0 \in f(U) \subset f(V)$ et $f(U)$ est un ouvert de F car f est une application ouverte alors $f(V)$ est bien un voisinage de 0 dans F *i.e.* $f(V) \in V_F(f(0))$. Vérifions maintenant la réciproque. Soit U un ouvert de E et $y \in f(U)$. Donc il existe $x \in U$ tel que $y = f(x)$. Mais $U - x \in V_E(0)$, donc $f(U - x) \in V_F(0)$, d'après l'hypothèse, ce qui donne que $f(U)$ est un voisinage de y dans F. Comme y est élément quelconque de $f(U)$, on déduit que f est une application ouverte.

Exercice 3.12 *Soit E et F deux espaces vectoriels normés et T une application linéaire de E vers F. Notons par $G(T)$ le graphe de T.*

1. *Vérifier que si $G(T)$ est fermé alors $G(T)$ est un Banach.*
2. *Considérons $f : G(T) \to X$ l'application définie par : $f(x, Tx) = x$. Verifier que f est continue et déduire par la suite que T est continue.*

Solution.

1. Comme E et F sont des Banach alors leur produit $E \times F$ est aussi un espace de Banach. Mais $G(T)$ est un sous-espace fermé dans l'espace complet $E \times F$ alors on déduit d'après la proposition 2.1.6 que $G(T)$ est complet *i.e.* $G(T)$ est un Banach.
2. C'est claire que l'application f est linéaire et bijective. De plus, f est continue car :
$$\|f(x, Tx)\|_E = \|x\|_E \leq \|(x, Tx)\|_{G(T)} = \|(x, Tx)\|_{E\times F}.$$
Les hypothèses du théorème d'isomorphisme de Banach sont vérifiés, donc on déduit que : $f^{-1} : X \to G(T)$ est continue. Finalement on a :
$$\|Tx\|_F \leq \|x\|_E + \|Tx\|_F = \|(x, Tx)\|_{E\times F} = \left\|f^{-1}(x)\right\| \leq \left\|f^{-1}\right\| \|x\|_E.$$

Ce qui montre que T est bien continue.

Exercice 3.13 *Soit E et F deux espaces de Banach et T une application linéaire de E vers F. On suppose que :*

$$\forall f \in E', \forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ une suite de } E, \text{ telle que } x_n \to 0 \Rightarrow f(Tx_n) \to 0. \tag{3.5}$$

Montrer, en utilisant le théorème du graphe fermé, que T est continue.

Solution. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E telle que (x_n, Tx_n) converge vers $(x, y) \in X \times Y$. On doit montrer que $y = T(x)$.

On a : $x_n - x \to 0$. Il s'ensuit d'après l'hypothèse (3.5) que :

$$\forall f \in E',\ f(T(x_n - x)) \to 0.$$

Alors :

$$f(Tx_n) \to f(Tx),\ \ \forall f \in E'.$$

Comme f est continue, il s'ensuit que :

$$f(\lim_{n\to+\infty} Tx_n) = f(Tx),\ \ \forall f \in E'.$$

Sachant que $\lim\limits_{n\to+\infty} Tx_n = y$, on obtient que : $f(y) = f(Tx),\ \ \forall f \in E'$. On déduit alors, grâce au corollaire 3.5.4 que $y = Tx$. Le graphe de T est donc fermé. Comme E et F sont des Banach, le théorème du graphe fermé assure que T est continue.

Exercice 3.14 *Soit les espaces normés $X = (C^1([0,1],\mathbb{R}), \|.\|_\infty)$ et $Y = (C([0,1],\mathbb{R}), \|.\|_\infty)$ où $\|f\|_\infty = \sup |f(t)|,\ t \in [0,1]$. Considérons l'application linéaire $T : X \to Y$ définie par $T(f) = f'$, f' désigne la dérivée de f.*

1. *Montrer que le graphe de T est fermé.*
2. *Montrer que l'application T n'est pas continue.*
3. *Que peut-on déduire ?*

Solution.

1. Considérons $(f_n, f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $G(T)$ qui converge vers (f,g). Montrons que $g = f'$. On a :
$$f_n(t) - f_n(0) = \int_0^t f_n'(s)ds, \text{ donc } f(t) - f(0) = \int_0^t g(s)ds.$$
Ce qui signifie que $g = f'$. Alors $G(T)$, le graphe de T, est bien fermé.

2. Supposons que T est continue, alors il existe $C > 0$ tel que $\|Tf\|_\infty \leq C\|f\|_\infty$. Prenons $f(x) = x^n$. On obtient :
$$\|Tf\|_\infty = \|f'\|_\infty = \|nx^{n-1}\|_\infty = n \leq C\|f\|_\infty = C.$$
Contradiction. Donc T n'est pas continue.

Le théorème du graphe fermé n'est pas applicable, alors une de ses hypothèses n'est pas vérifiée. Comme Y est un Banach, alors c'est X qui n'est pas un espace de Banach.

Exercice 3.15 *Soit E et F deux espaces topologiques avec F séparé et $f : E \to F$ une application. Montrer que l'implication directe du théorème du graphe fermé reste vraie dans ce cas.*

Solution. Il s'agit de montrer que si f est continue alors son graphe $G(f)$ est fermé. Pour cela il suffit de montrer que $C_{E\times F}G(f)$ le complémentaire de $G(f)$ est un ouvert dans $E\times F$. Soit $(x_0,y_0) \notin G(f)$, ceci entraine que $y_0 \neq f(x_0)$. Comme F est séparé, il existe deux voisinages V et W de y_0 et $f(x_0)$ repectivement tels que $V\cap W = \emptyset$. D'autre part puisque f est continue en x_0, il existe un voisinage U de x_0 tel que $f(U)\subset W$. Par la suite $f(U)\cap V = \emptyset$ et donc $G(f)\cap(U\times V) = \emptyset$. Il en résulte que $U\times V$ est un voisinage de (x_0,y_0) dans $E\times F$ donc $C_{E\times F}G(f)$ est un ouvert.

Exercice 3.16 *Soit E un espace vectoriel normé et $x_0 \in E$. Montrer qu'il existe $f \in E'$ telle que $\|f\|_{E'} = \|x_0\|_E$ et $f(x_0) = \|x_0\|_E^2$.*

Solution. Le résultat est trivial si $x_0 = 0_E$. Quand $x_0 \neq 0_E$. Posons $F = \mathbb{R}x_0$ et définissons sur F l'application $L(\lambda x_0) = \lambda\|x_0\|_E^2$, $\forall\lambda\in\mathbb{R}$. L'ensemble F est un sous espace vectoriel de E et $L \in F'$. Le théorème de prolongement de Hahn-Banach assure l'existence de $f \in E'$ tel que $f_{|F} = L$ donc $f(x_0) = \|x_0\|_E^2$ et $\|f\|_{E'} = \|L\|_{F'}$. Mais $\|L\|_{F'} = \|x_0\|_E$ car :

$$\|L\|_{F'} = \sup_{y \in F, y \neq 0_E} \frac{|L(y)|}{\|y\|_F} = \sup_{\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0} \frac{|L(\lambda x_0)|}{\|\lambda x_0\|_E} = \sup_{\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0} \frac{|\lambda| \, \|x_0\|_E^2}{|\lambda| \, \|x_0\|_E} = \|x_0\|_E \, .$$

Donc $\|f\|_{E'} = \|x_0\|_E$.

Exercice 3.17 *Soit E un espace vectoriel normé et soit K une partie convexe de E avec $0 \in K$. On pose :*

$$K_1 = \{f \in E'; \;\; \forall x \in K, \;\; f(x) \leq 1\} \;\; \text{et}$$
$$K_2 = \{y \in E; \;\; \forall f \in K_1, \;\; f(y) \leq 1\} \, .$$

Montrer que $\overline{K} = K_2$.

Solution. En remarque que les ensembles K_1 et K_2 sont fermés comme intersection d'images réciproques de fermés par des applications continues. De plus $K \subset K_2$ alors $\overline{K} \subset K_2$. Si on suppose que $\overline{K} \neq K_2$, alors il existe $y_0 \in K_2 \backslash \overline{K}$. Appliquons le théorème de Hahn-Banach (forme géométrique) on obtient :

$$\exists f \in E', f \neq 0_{E'}, \exists \alpha \in \mathbb{R} \text{ tels que : } \quad f(x) < \alpha < f(y_0), \;\; \forall x \in K.$$

Comme $0 \in K$ on a $\alpha > 0$ et $\forall x \in K$, $\frac{1}{\alpha} f(x) < 1$ donc $\frac{1}{\alpha} f \in K_1$. Mais $y_0 \in K_2$ donc $\frac{1}{\alpha} f(y_0) \leq 1$. Contradiction, alors $\overline{K} = K_2$.

Exercice 3.18 *Soit E et F deux espaces vectoriels normés, et soit $\mathcal{L}(E, F)$ l'espace des applications linéaires et continues de E dans F.*

1. *Soit $x_0 \in E$ tel que $\|x_0\|_E = 1$. Montrer qu'il existe $f \in E'$ tel que $\|f\|_{E'} = 1$ et $f(x_0) = 1$.*

2. *On suppose que $\mathcal{L}(E, F)$ est complet. Considérons une suite de Chauchy $(z_n)_{n \geq 1}$ dans F, et définissons la suite d'applications $(T_n)_{n \geq 1}$ par :*

$$T_n(x) = f(x) z_n, \qquad x \in E, \, n \geq 1.$$

i) *Vérifier que $T_n \in \mathcal{L}(E, F)$, pour tout $n \geq 1$.*

ii) *Montrer que la suite* $(T_n)_{n\geq 1}$ *est de Cauchy dans* $\mathcal{L}(E,F)$.

iii) *Déduire que la suite* $(T_n)_{n\geq 1}$ *converge vers une application* $T \in \mathcal{L}(E,F)$.

3. Montrer que $(z_n)_{n\geq 1}$ *converge vers l'élément* Tx_0.

4. Que peut-on conclure ?

Solution.

1. Soit $x_0 \in E$ tel que $\|x_0\|_E = 1$. Le corollaire 3.5.2 assure l'existence de $f \in E'$ telle que $\|f\|_{E'} = 1$ et $f(x_0) = \|x_0\|$ *i.e.* $f(x_0) = 1$.

2. **i)** Pour tout $x, y \in E$, et tout $\lambda, \mu \in \mathbb{k}$:

$$\begin{aligned} T_n(\lambda x + \mu y) &= f(\lambda x + \mu y)z_n = (\lambda f(x) + \mu f(y))z_n \\ &= \lambda f(x)z_n + \mu f(y)z_n = \lambda T_n(x) + \mu T_n(y), \end{aligned}$$

car f est linéaire. Il en résulte que T_n est linéaire.

L'application T_n est continue et $\|T_n\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq \|z_n\|_F$. En effet, comme f est continue et $\|f\|_{E'} = 1$ on a pour tout $x \in E$ et tout $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} \|T_n(x)\|_F &= \|f(x)z_n\|_F = |f(x)|\,\|z_n\|_F \\ &\leq \|f\|_{E'}\,\|x\|_E\,\|z_n\|_F \leq \|z_n\|_F\,\|x\|_E\,. \end{aligned}$$

ii) Pour tout $n, m \geq 1$, $n \neq m$ on a :

$$\begin{aligned} \|T_n - T_m\|_{\mathcal{L}(E,F)} &= \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|f(x)(z_n - z_m)\|_F \\ &= \|z_n - z_m\|_F \sup_{\|x\|_E \leq 1} |f(x)| = \|z_n - z_m\|_F\,. \end{aligned}$$

Comme $(z_n)_{n\geq 1}$ est de Cauchy dans F, la suite $(T_n)_{n\geq 1}$ l'est également dans $\mathcal{L}(E,F)$.

iii) Il découle que la suite $(T_n)_{n\geq 1}$ est convergente vers une application $T \in \mathcal{L}(E,F)$ car $\mathcal{L}(E,F)$ est complet.

3. Posons : $Tx_0 = z$. Comme $f(x_0) = 1$, on alors :

$$\begin{aligned} \|z_n - z\|_F &= \|f(x_0)z_n - f(x_0)z\|_F = \|T_n x_0 - T(x_0)\|_F \\ &= \|(T_n - T)x_0\|_F \leq \|T_n - T\|_{\mathcal{L}(E,F)}\,\|x_0\|_E \to 0, \qquad n \to +\infty. \end{aligned}$$

On conclut que $(z_n)_{n\geq 1}$ est donc convergente dans F vers $z = Tx_0 \in F$. Par conséquent, l'espace F est complet.

Chapitre 4

La Topologie Faible et la Topologie Faible Étoile

Dans ce chapitre E désigne un $\mathbb{R}$-espace de Banach. Il est muni de la topologie engendrée par les boules ouvertes que l'on appellera la topologie forte. Cette topologie contient un grand nombre d'ouverts, ce qui donne moins de compacts dans le cas de dimension infinie. Pour surmonter ce problème, nous devrons définir une nouvelle topologie, plus faible, qui contiendra plus de compacts. Toutefois, Il ne faudra pas supprimer trop d'ouverts afin de ne pas perdre trop de fonctions continues. On note par E' le dual topologique de E *i.e.* l'espace des formes linéaires continues sur E.

4.1 La topologie faible

On définera la topologie faible comme étant la topologie la moins fine, *i.e.* celle avec le moins d'ouverts, rendant continues tous les éléments de E'. Autrement dit, la topologie faible sur E est la topologie la moins fine telle que toute forme linéaire continue, au sens de la norme, reste continue.

L'avantage de la topologie faible est qu'elle contient plus de compacts que la topologie forte dans le cas des espaces de dimension infinie. Les compacts jouent un rôle important quand on cherche à établir des théorèmes d'existence.

Définition 4.1.1 *La topologie faible sur E, notée $\sigma(E, E')$, est la topologie la moins fine pour laquelle toutes les formes linéaires continues $f \in E'$ restent continues.*

La topologie faible est construite de la manière suivante : en effet, celle ci doit au minimum contenir tous les ensembles de la forme $f^{-1}(U)$ où U est un ouvert de $\mathbb{R}$ et $f \in E'$. Si on choisit comme ouverts toutes les réunions quelconques d'intersections finies de tels ensembles, on construit une topologie. De plus cette topologie a le moins d'ouverts parmi les topologies ayant les ensembles $f^{-1}(U)$ comme ouverts.

Remarque 4.1.1 *Comme conséquence directe de la définition de la topologie faible on affirme que les formes linéaires sur un Banach E qui sont continues pour la topologie faible sont exactement les mêmes que celles qui sont continues en norme (i.e. pour la topologie forte) c'est-à-dire les éléments de E'.*

Proposition 4.1.1 *Soit X un espace topologique et φ une application de X vers $(E, \sigma(E, E'))$, alors φ est continue si et seulement si pour tout $f \in E'$, $f \circ \varphi$ est continue sur X.*

Preuve. Supposons que $\varphi : X \to (E, \sigma(E, E'))$ est continue. Par définition, tout $f \in E'$ est continue pour $(E, \sigma(E, E'))$ alors par composition pour tout $f \in E'$, $f \circ \varphi : X \to \mathbb{R}$ est continue.

Reciproquement, supposons que $f \circ \varphi : X \to \mathbb{R}$ soit continue pour tout $f \in E'$. Soit U un ouvert de E pour $\sigma(E, E')$. Comme U est de la forme : $U = \bigcup\limits_{j \in J} \bigcap\limits_{i \in I_j} f_i^{-1}(W_i)$ où chaque I_j est fini, $f_i \in E'$ et W_i est un ouvert de $\mathbb{R}$. On a alors :

$$\varphi^{-1}(U) = \bigcup_{j \in J} \bigcap_{i \in I_j} (f_i \circ \varphi)^{-1}(W_i),$$

qui est bien ouvert car $f_i \circ \varphi$ est continue. Donc $\varphi : X \to (E, \sigma(E, E'))$ est continue. ■

Proposition 4.1.2 *Une base de voisinages pour la topologie faible de $x_0 \in E$ est donnée par les ensembles de la forme :*

$$V = \{x \in E; \; |f_i(x) - f_i(x_0)| < \varepsilon, \; \forall i = 1, \cdots, n\},$$

avec $\varepsilon > 0$, $n \geq 1$ *et* $f_1, \cdots, f_n \in E'$ *arbitraires.*

Proposition 4.1.3 *La topologie faible est séparée.*

Preuve. Soit $x_1, x_2 \in E$ avec $x_1 \neq x_2$. On veut construire V_1 et V_2 ouverts pour la topologie faible tels que : $x_1 \in V_1$, $x_2 \in V_2$ et $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. D'après le théorème de Hahn-Banach (deuxième forme géométrique) ou directement d'après le corollaire 3.5.4 il existe $f \in E'$ telle que $f(x_1) \neq f(x_2)$. Posons :

$$\varepsilon = \frac{|f(x_1) - f(x_2)|}{4}, \; V_1 = f^{-1}(]f(x_1) - \varepsilon, \; f(x_1) + \varepsilon[) \;\text{ et }\; V_2 = f^{-1}(]f(x_2) - \varepsilon, \; f(x_2) + \varepsilon[).$$

C'est-à-dire :

$$V_1 = \{x \in E; \; |f(x) - f(x_1)| < \varepsilon\} \quad \text{et} \quad V_2 = \{x \in E; \; |f(x) - f(x_2)| < \varepsilon\}.$$

On constate que V_1 et V_2 sont des ouverts pour la topologie faible $\sigma(E, E')$ et de plus $x_1 \in V_1$, $x_2 \in V_2$ et $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. ■

L'espace E peut être muni de deux topologies séparées différentes :

1. La topologie forte associée à la norme de E.
2. La topologie "faible" notée $\sigma(E, E')$.

On rappelle que par construction, la topologie faible est moins fine que la topologie forte : tout ouvert (resp. fermé) pour la topologie faible est un ouvert (resp. fermé) pour la topologie forte.

Proposition 4.1.4 *En dimension finie, les deux topologies coïncident.*

Preuve. Suposons que E est de dimension finie. Comme tout ouvert de la topologie faible est un ouvert pour la topologie forte, il suffit de vérifier qu'un ouvert pour la topologie forte est aussi un ouvert dans $\sigma(E, E')$.

Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de E pour la topologie forte et $x_0 \in \mathcal{U}$. On cherche à construire un voisinage de x_0 pour la topologie faible inclus dans $\mathcal{U}$. Soit $\{e_1, \cdots, e_n\}$ une base de E et soient les formes linéaires (continues) définies par :

$$\varphi_j : \begin{array}{cc} E & \to \mathbb{R} \\ x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n & \mapsto x_j \end{array}.$$

Comme toute les normes sont équivalentes sur E, on munit E par la norme :

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j| = \max_{1 \leq j \leq n} |\varphi_j(x)|.$$

Fixons r_0 tel que la boule ouverte $B(x_0, r_0)$ au sens de $\|\cdot\|_\infty$ soit contenue dans $\mathcal{U}$. On a :

$$\begin{aligned} B(x_0, r_0) &= \{x \in E, \ \ \|x - x_0\|_\infty < r_0\} \\ &= \left\{x \in E, \ \max_{1 \leq j \leq n} \left|x_j - x_{0_j}\right| < r_0\right\} \\ &= \left\{x \in E, \ \max_{1 \leq j \leq n} |\varphi_j(x) - \varphi_j(x_0)| < r_0\right\} \\ &= \{x \in E, \ \ |\varphi_j(x) - \varphi_j(x_0)| < r_0, \ \ i = 1, \cdots, n\}. \end{aligned}$$

Alors $B(x_0, r_0)$ est bien un voisinage de x_0 pour la topologie faible inclus dans $\mathcal{U}$. On conclut alors que $\mathcal{U}$ est un ouvert pour la topologie faible. ■

On note que dans le cas de dimension infinie, la topologie faible est strictement plus faible que la topologie forte : il existe des ouverts (resp. des fermés) pour la topologie forte qui ne sont pas ouverts (resp. fermés) pour la topologie faible.

Proposition 4.1.5 *En dimension infinie, la boule unité ouverte $B(0,1)$ est d'intérieur vide pour la topologie faible.*

Preuve. Soit E un espace de Banach de dimension infinie. Supposons par l'absurde que l'intérieur de $B(0,1)$ pour la topologie faible n'est pas vide. Donc il existe $x_0 \in B(0,1)$ et $V \in \sigma(E, E')$ tels que : $x_0 \in V \subset B(0,1)$. On peut prendre V de la forme suivante :

$$V = \{x \in E \ ; \ |f_i(x) - f_i(x_0)| < \varepsilon, \ \ i = 1, \cdots, n\}, \ \text{où } f_i \in E' \text{ pour } i = 1, \cdots, n.$$

Considérons maintenant l'application :

$$\begin{aligned} \psi : \quad & E \to \mathbb{R}^n \\ & x \mapsto (f_1(x), \cdots, f_n(x)) \end{aligned},$$

qui est linéaire et non injective puisque E est de dimension infinie. Donc il existe $y_0 \in E \backslash \{0_E\}$ tel $\psi(y_0) = 0$. Par linéarité on déduit que $|f_i(x_0 + \lambda y_0) - f_i(x_0)| = 0 < \varepsilon$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. Donc $x_0 + \lambda y_0 \in V$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. Contradiction avec le fait que V est borné, car $V \subset B(0,1)$. Alors $B(0,1)$ est d'intérieur vide pour la topologie faible. ■

Cette proposition affirme que $B(0,1)$ n'est pas ouverte pour la topologie faible. Ce qui veut dire que la topologie forte contient plus d'ouverts que la topologie faible et que les ouverts de la topologie faible en dimension infinie ne sont pas bornés. De plus, par passage au complémentaire, on déduit qu'en dimension infinie la topologie forte contient aussi plus de fermés que la topologie faible.

Le résultat suivant annonce que les ensembles convexes qui sont fermés fortement restent fermés faiblement.

Proposition 4.1.6 *Soit C un ensemble convexe de E. Alors C est fermé pour la topologie faible $\sigma(E, E')$ si et seulement si il est fermé pour la topologie forte.*

Preuve. L'implication directe est triviale. Montrons l'implication réciproque. Supposons que C est un convexe fortement fermé et montrons que $E \backslash C$ est ouvert faiblement. Supposons que $C \neq E$, sinon le résultat est trivial. Soit $x_0 \in E \backslash C$. Comme C est un convexe fermé et $\{x_0\}$ est un convexe compact, le théorème de Hahn-Banach (forme géométrique, deuxième version) assure l'existence de $f \in E'$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall x \in C, \quad f(x) < \alpha < f(x_0).$$

L'ensemble $f^{-1}(]\alpha, +\infty[) = \{x \in E,\ f(x) > \alpha\}$ est un ouvert pour $\sigma(E, E')$ qui contient x_0 et il est contenu dans $E \backslash C$. Donc on déduit que $E \backslash C$ est un ouvert pour la topologie faible. ■

Proposition 4.1.7 *Soit E un Banach et M un sous-espace vectoriel fermé de E pour la topologie forte. La topologie faible $\sigma(M, M')$ coïncide avec la topologie induite par $\sigma(E, E')$ sur M.*

Preuve. Voir exercice 4.1. ■

On s'intéresse maintenant aux propriétés des suites convergentes au sens de la topologie faible.

Définition 4.1.2 *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E et $x \in E$.*

1. *On dit que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge fortement vers $x \in E$ (ou converge en norme) si :*

   $\|x_n - x\|_E \to 0$ *et on écrit $x_n \to x$. L'élément x est appelé la limite forte de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

2. *On dit que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers $x \in E$ si elle converge pour la topologie faible $\sigma(E, E')$ et on écrit $x_n \rightharpoonup x$. L'élément x est appelé la limite faible de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

En utilisant la définition des voisinages faibles on obtient le résultat suivant :

Proposition 4.1.8 *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E. Alors la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers x si et seulement si $f(x_n) \to f(x)$, $\forall f \in E'$.*

Preuve. Par construction de la topologie faible, $f \in E'$ signifie que f est continue pour la topologie faible.
L'implication directe découle de la continuité de f, il est clair que si $x_n \rightharpoonup x$ faiblement alors $f(x_n) \rightharpoonup f(x)$ qui est équivalent à $f(x_n) \to f(x)$ car $\mathbb{R}$ est de dimension finie.
Pour montrer la réciproque supposons que pour tout $f \in E'$, $f(x_n) \to f(x)$. Donc pour tout $\varepsilon > 0$ il existe N_f tel que pour tout $n > N_f$: $|f(x_n) - f(x)| < \varepsilon$.

Soit $\mathcal{U}$ un voisinage de x dans la topologie faible. Donc il existe $\varepsilon > 0$ et $f_1, f_2, ..., f_m$ tels que $V = \{y \in E \ ; |f_i(y) - f_i(x)| < \varepsilon, \quad i = 1, \cdots, m\}$ et $V \subset \mathcal{U}$ et $x \in V$.
Mais comme pour tout $f \in E'$, $f(x_n) \to f(x)$ forcément il existe un $N = \max N_{f_i}$, $i = 1, \cdots, m$ tel que pour tout $n > N$, $x_n \in V \subset \mathcal{U}$. Donc pour tout voisinage de x dans $\sigma(E, E')$ il existe un N tel que pour tout $n > N$, x_n est dans ce voisinage. Donc $x_n \rightharpoonup x$.

■

On constate que la convergence faible dans un espace de Banach nécessite l'identification de son dual.

Proposition 4.1.9 *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E'. On a :*

1. *Si $x_n \to x$ fortement alors $x_n \rightharpoonup x$ faiblement pour $\sigma(E, E')$.*
2. *Si $x_n \rightharpoonup x$ faiblement pour $\sigma(E, E')$ alors $\|x_n\|_E$ est bornée et $\|x\|_E \leq \liminf \|x_n\|_E$.*
3. *Si $x_n \rightharpoonup x$ faiblement pour $\sigma(E, E')$ et si $f_n \to f$ alors $f_n(x_n) \to f(x)$.*

Preuve.

1. Si $x_n \to x$ fortement alors $f(x_n) \to f(x)$ pour toute application f continue. En particulier $f(x_n) \to f(x)$ pour tout $f \in E'$. Par la suite $x_n \rightharpoonup x$ faiblement pour $\sigma(E, E')$ d'après proposition 4.1.8.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit l'application :
$$T_n : \quad \begin{array}{c} E' \to \mathbb{R} \\ f \mapsto f(x_n) \end{array}.$$
Il est clair que toutes les applications T_n sont linéaires, de plus elles sont continues, en effet : $$|T_n(f)| = |f(x_n)| \leq \|f\|_{E'} \|x_n\|_E.$$
Le théorème de Banach-Steinhaus assure que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée :
$$\exists C > 0, \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}, \ \ \forall f \in E', \ \ |T_n(f)| = |f(x_n)| \leq C \|f\|_{E'}.$$
D'après le corollaire 3.5.3 du théorème de Hahn-Banach, on a :

$$\|x_n\|_E = \sup_{f\in E', \|f\|_{E'}\leq 1} |f(x_n)|.$$

Ceci permet de conclure que :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \|x_n\|_E \leq C.$$

Passons à la limite dans l'inégalité $|f(x_n)| \leq \|f\|_{E'} \|x_n\|_E$ on obtient :

$$|f(x)| \leq \|f\|_{E'} \liminf \|x_n\|_E.$$

En appliquant encore une fois le corollaire 3.5.3, on trouve :

$$\|x\|_E = \sup_{f\in E', \|f\|_{E'}\leq 1} |f(x)| \leq \liminf \|x_n\|_E.$$

3. On écrit $f_n(x_n) - f(x)$ sous la forme suivante :

$$f_n(x_n) - f(x) = (f_n(x_n) - f(x_n)) + (f(x_n) - f(x)).$$

Comme $x_n \rightharpoonup x$ faiblement on a bien $\lim\limits_{n\to+\infty}(f(x_n) - f(x)) = 0$. De plus :

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| \leq \|x_n\|_E \|f_n - f\|_{E'}.$$

La propriété 2. donne que $\|x_n\|_E$ est bornée puisque $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement, on déduit alors que : $\lim\limits_{n\to+\infty}(f_n(x_n) - f(x_n)) = 0$ car $f_n \to f$. Donc on obtient que :

$$\lim_{n\to+\infty}(f_n(x_n) - f(x)) = 0.$$

■

Remarque 4.1.2 *Lorsque E est de dimension finie on a : $x_n \rightharpoonup x$ si et seulement si $x_n \to x$ i.e. la convergence faible est équivalente à la convergence forte.*

On note qu'il existe des espaces de Banach de dimension infinie où toute suite faiblement convergente est fortement convergente. Prenons comme exemple l'espace $l^1(\mathbb{R})$. Rappelons que $l^1(\mathbb{R})$ est l'ensemble des suites réelles sommables :

$$l^1(\mathbb{R}) = \left\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ tel que } \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n| < +\infty\right\}$$

et $l^\infty(\mathbb{R})$ l'ensembles des suites réelles bornées. Les espaces $l^1(\mathbb{R})$ et $l^\infty(\mathbb{R})$ munis respectivement de la norme $\|x\|_1 = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} |x_n|$ et $\|x\|_\infty = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$ sont des Banach ; de plus le dual topologique de $l^1(\mathbb{R})$ peut être identifier à $l^\infty(\mathbb{R})$. Par la suite la topologie faible $\sigma(l^1(\mathbb{R}), (l^1(\mathbb{R}))')$ se note par $\sigma(l^1(\mathbb{R}), l^\infty(\mathbb{R}))$.

Théorème 4.1.1 ***(de Schur)*** *Soit $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $l^1(\mathbb{R})$ est $x \in l^1(\mathbb{R})$. Alors la suite $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge fortement vers x si et seulement si $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers x.*

Cette équivalence est vraie bien que la topologie faible sur $l^1(\mathbb{R})$ possède strictement moins d'ouverts que la topologie forte, car on est en dimension infinie.

Proposition 4.1.10 *Soit E et F deux Banach et $T : E \to F$ une application linéaire. Alors T est continue de E vers F pour la topologie forte (des deux espaces) si et seulement si T est continue de $(E, \sigma(E, E'))$ dans $(F, \sigma(F, F'))$ (pour la topologie faible des deux espaces).*

Preuve. Commençons par montrer l'implication directe. Suposons que T est continue de E vers F pour la topologie forte. Soit Ω un ouvert de $(F, \sigma(F, F'))$ pour la topologie faible. On veut montrer que $T^{-1}(\Omega)$ est un ouvert de $(E, \sigma(E, E'))$ pour la topologie faible. Supposons que Ω est de la forme : $\Omega = \underset{i\in I}{\cap} \varphi_i^{-1}(\theta_i)$ où I est fini, $\varphi_i \in F'$ et θ_i est ouvert de $\mathbb{R}$. Alors :

$$T^{-1}(\Omega) = \underset{i\in I}{\cap} T^{-1}\varphi_i^{-1}(\theta_i) = \underset{i\in I}{\cap} (\varphi_i \circ T)^{-1}(\theta_i).$$

Mais $\varphi_i \circ T : E \to \mathbb{R}$ est linéaire et continue donc $\varphi_i \circ T \in E'$ et par la suite $T^{-1}(\Omega)$ est un ouvert de $(E, \sigma(E, E'))$ (pour la topologie faible). Donc T est continue pour la topologie faible.

Afin de montrer l'implication réciproque on va utiliser le théorème du graphe fermé. En effet il suffit de montrer que le graphe de T est fermé pour la topologie forte. Soit $(x_n, T(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge fortement vers $(x, y) \in E \times F$. En particulier $x_n \to x$ fortement alors $x_n \rightharpoonup x$ faiblement. Comme T est continue pour la topologie faible on a $T(x_n) \rightharpoonup T(x)$. Mais $T(x_n) \to y$, par la suite $T(x_n) \rightharpoonup y$. Comme la topologie faible est séparée, on déduit que la limite est unique donc $y = T(x)$. Par la suite le graphe de T est fermé d'où la continuité de T pour la topologie forte. ■

Remarque 4.1.3 *L'application T doit être linéaire. Une application non linéaire continue de E vers F pour la topologie forte (des deux espaces) n'est en générale pas continue de E vers F pour la topologie faible (des deux espaces).*

4.1.1 La convergence faible dans les espaces de Hilbert

Définition 4.1.3 *On dit que H est un espace de Hilbert si H est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ (une forme bilinéaire symétrique et définie positive) et complet pour la norme $\|\cdot\|_H := \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$ associée au produit scalaire.*

Définition 4.1.4 *Une famille $\{e_i, \quad i \in I\}$ d'éléments d'un espace de Hilbert H est dite orthonormée si :*

$$\forall i, j \in I, \qquad \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & si \quad i = j, \\ 0 & si \quad i \neq j. \end{cases}$$

Proposition 4.1.11 ***(Inégalité de Bessel)*** *Si $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une suite orthonormée d'un espace de Hilbert H alors :*

$$\forall x \in H, \quad \sum_{i \in \mathbb{N}} |\langle x, e_i \rangle|^2 \leq \|x\|_H .$$

Dans le cas où H est un espace de Hilbert, on peut identifier son dual topologique H' avec H lui même grâce au théorème suivant :

Théorème 4.1.2 ***(de représentation de Riesz-Fréchet)*** *Soit H un Hilbert. Alors pour tout $f \in H'$, il existe un unique $x \in H$ tel que :* $\qquad f(y) = \langle y, x \rangle , \quad \forall y \in H.$
De plus $\|x\|_H = \|f\|_{H'}$.

Ce théorème nous permet de simplifier la définition de la convergence faible dans le cas d'un espace de Hilbert.

Proposition 4.1.12 *Soient $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments d'un espace de Hilbert H et x un élément de H. On dit que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge faiblement vers x si :*

$$\langle y, x_n \rangle \to \langle y, x \rangle , \quad \forall y \in H.$$

On sait que la convergence forte implique la convergence faible. En revanche la réciproque n'est pas vraie comme le montre l'exemple suivant :

Exemple 4.1.1 *Prenons une suite orthonormée* $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. *Pour tout* $x \in H$, *l'inégalité de Bessel donne que :*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle x, e_n\rangle|^2 \leq \|x\|_H .$$

Donc la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle x, e_n\rangle|^2$ *converge, alors* $\langle x, e_n\rangle \to 0 = \langle x, 0\rangle$, *pour tout* $x \in H$. *Ce qui implique, d'après la proposition précédente que* $e_n \rightharpoonup 0$, *la suite* $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge faiblement vers* 0.

Si la suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge fortement, elle devrait converger vers* 0, *mais*

$$\|e_n - 0\|_H = \|e_n\|_H = 1 \nrightarrow 0.$$

Par conséquent, la suite ne converge pas fortement.

Proposition 4.1.13 *Soit* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites d'éléments d'un espace de Hilbert* H *et* x, y *deux éléments de* H. *On a alors :*

i) $(x_n \to x \text{ et } y_n \rightharpoonup y) \Rightarrow (x_n, y_n) \to (x, y)$.

ii) $(x_n \rightharpoonup x \text{ et } \|x_n\|_H \to \|x\|_H) \Rightarrow \|x_n - x\|_H = 0.$

Preuve. La propriété **i)** n'est qu'un résultat direct de la troisième propriété de la proposition 4.1.9 et la proposition 4.1.12 qui donne une définition équivalente de la convergence faible en utilisant le produit scalaire.

Afin d'établir le point **ii),** il suffit d'écrire que :

$$\|x_n - x\|_H^2 = \|x_n\|_H^2 - 2\langle x, x_n\rangle + \|x\|_H^2 .$$

Puisque $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers x on a :

$$\langle x, x_n\rangle \to \langle x, x\rangle = \|x\|_H^2 .$$

Cela donne **ii)**. ■

En dimension finie, toute suite bornée admet une sous-suite convergente grâce au theorème de Riesz (compacité). On admet le théorème suivant, très utile en EDP, qui assure que cette propriété reste vraie pour la convergence faible dans le cas d'un espace de Hilbert.

Théorème 4.1.3 ***(de compacité faible)*** *Toute suite bornée d'un espace de Hilbert admet une sous-suite qui converge faiblement.*

Remarque 4.1.4 *Les résultats présentés dans cette partie reste vrai c'est H est un espace de Hilbert complexe.*

4.2 La topologie faible étoile

Soit E un Banach. L'espace dual de E noté E' est aussi un Banach. On note E'' l'ensemble des formes linéaires continues sur E', qui est encore un espace de Banach. On l'appelle le bidual de E. On peut munir E' de deux topologies séparées :

i) la topologie forte associée à la norme de E',

ii) la topologie faible sur E', notée $\sigma(E', E'')$.

On a vu dans la section précédente que la deuxième topologie est en général moins fine que la première mais elle contient plus de compacts et de suites convergentes. On cherche à munir E' d'une troixième topologie séparée de telle façon que la boule unité fermée $B_{E'}(0,1)$ devienne compacte même si E est de dimension infinie.

Définissons l'application suivante : à tout $x \in E$ on associe une forme ξ_x linéaire sur E' en posant :

$$\xi_x : \quad \begin{array}{c} E' \to \mathbb{R} \\ f \mapsto f(x) \end{array} .$$

On a :

$$\forall (x, f) \in E \times E' : \ |\xi_x(f)| = |f(x)| \leq \|f\|_{E'} \|x\|_E .$$

Donc ξ_x est une forme linéaire continue sur E' avec $\|\xi_x\|_{E''} \leq \|x\|_E$. D'après le corollaire 3.5.3, qui est une conséquenc du théorème de Hahn-Banach, on a :

$$\|x\|_E = \sup_{L \in E', \|L\|_{E'}=1} |L(x)|,$$

ceci permet de déduire que $\|\xi_x\|_{E''} = \|x\|_E$.

On note J l'application définie par :

$$\begin{aligned} J: \quad E &\to E'' \\ x &\mapsto \xi_x \end{aligned}.$$

Il est clair que l'application J est linéaire. De plus J est une isométrie (J conserve la norme) i.e. $\|J(x)\|_{E''} = \|x\|_E$ pour tout $x \in E$ car $\|J(x)\|_{E''} = \|\xi_x\|_{E''} = \|x\|_E$ pour tout $x \in E$. Donc J est continue, *i.e.* $J \in \mathcal{L}(E, E'')$ et elle est bien injective, comme elle conserve la norme. Par contre, si E est de dimension infinie, J n'est pas nécessairement surjective. En général, $J(E)$ est un sous espace strict de E''. À l'aide de l'injection canonique J on peut identifier E à $J(E) \subset E''$.

Définition 4.2.1 *On appelle topologie faible étoile sur E', la topologie la moins fine pour laquelle toutes les applications ξ_x restent continues. La topologie faible étoile se note $*\sigma(E', E)$ (ou tout simplement $\sigma(E', E)$).*

Remarque 4.2.1 *Les formes linéaires sur E' qui sont continues pour la topologie faible étoile sont exactement les ξ_x pour $x \in E$.*

Notons que chaque ξ_x est continue comme forme linéaire sur E' (pour la topologie forte) par la suite $\xi_x \in E''$. Ainsi ξ_x est continue pour la topologie faible $\sigma(E', E'')$. Par définition de la topologie faible étoile, on déduit alors que la topologie faible étoile est moins forte que la topologie faible qui elle même est moins forte que la topologie forte. La raison d'appauvrir ainsi les topologies est : plus une topologie est faible, moins elle contient d'ouverts et plus elle possède de compacts.

Remarque 4.2.2 *Étant donné E un espace de Banach, E' peut être muni de trois topologies différentes (classées de la plus fine à la moins fine) :*

1. *la topologie forte associée à la norme de E',*
2. *la topologie faible sur E', notée $\sigma(E', E'')$,*
3. *la topologie faible étoile sur E', notée $*\sigma(E', E)$.*

Les ouverts de $*\sigma(E', E)$ sont du type : $\underset{quelconque}{\cup}\ \underset{finie}{\cap}\ \xi_{x_i}^{-1}(W_i)$ où les W_i sont des ouverts de $\mathbb{R}$ et les x_i des éléments de E. Ceci nous permet de déduire le résultat suivant sur les bases de voisinages pour la topologie faible étoile.

Proposition 4.2.1 *Soit f_0 un élément de E'. Tout voisinage de f_0 pour la topologie faible étoile contient un ouvert de la forme :*

$$V_{f_0} = \{f \in E', \ \ |f(x_i) - f_0(x_i)| < \varepsilon, \quad i = 1, \cdots, n\}$$

avec $\varepsilon > 0$ et $x_i \in E$.

Remarque 4.2.3 *Dans le cas où E est de dimension finie les trois topologies (forte, faible $\sigma(E', E'')$, et faible étoile $*\sigma(E', E)$) coïncident, en effet* $\dim E = \dim E' = \dim E''$ *et par la suite $\sigma(E', E'') = *\sigma(E', E)$.*

Proposition 4.2.2 *La topologie faible étoile $*\sigma(E', E)$ est séparée.*

Preuve. Soient f_1 et f_2 deux éléments de E' distincts. Il existe alors $x \in E$ tel que : $f_1(x) \neq f_2(x)$. Soit $\varepsilon = \frac{|f_1(x) - f_2(x)|}{4}$. Posons :

$$\mathcal{O}_i = \{f \in E', \quad |f(x) - f_i(x)| < \varepsilon\} = \xi_x^{-1}\left(]f_i(x) - \varepsilon, \ f_i(x) + \varepsilon[\right) \qquad i = 1, 2.$$

Il est clair que $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$ sont deux ouverts de E' pour la topologie faible étoile qui vérifient :

$$f_1 \in \mathcal{O}_1, \ f_2 \in \mathcal{O}_2 \text{ et } \mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 = \emptyset.$$

Donc la topologie faible étoile est bien séparée. ■

Notation : Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E' et $f \in E'$**.** On note :

– convergence forte (en norme) : $f_n \to f$,

– convergence faible : $f_n \rightharpoonup f$,

– convergence faible étoile : $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ ou $f_n \rightharpoonup f$ faible *.

Proposition 4.2.3 *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E' et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E. On a les propriétés suivantes :*

1. *$f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ pour $*\sigma(E',E)$ si et seulement si $f_n(x) \to f(x)$, $\forall x \in E$.*
2. *Si $f_n \to f$ fortement alors $f_n \rightharpoonup f$ faiblement pour $\sigma(E',E'')$ et si $f_n \rightharpoonup f$ faiblement alors $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ pour $*\sigma(E',E)$.*
3. *Si $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ pour $*\sigma(E',E)$ alors $\|f_n\|_{E'}$ est bornée et $\|f\|_{E'} \leq \liminf \|f_n\|_{E'}$.*
4. *Si $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ pour $*\sigma(E',E)$ et si $x_n \to x$ fortement alors $f_n(x_n) \to f(x)$ fortement.*

Preuve. La preuve se fait d'une manière analogue, avec quelques différences, à celles des propositions 4.1.8 et 4.1.9 (voir exercice 4.5). ■

Remarque 4.2.4 *Si $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ pour $*\sigma(E',E)$ (ou même si $f_n \rightharpoonup f$ faiblement pour $\sigma(E',E'')$) et si $x_n \rightharpoonup x$ pour $\sigma(E,E')$ on peut pas déduire que $f_n(x_n) \to f(x)$.*

Proposition 4.2.4 *Soit $\varphi : E' \to \mathbb{R}$ une application linéaire et continue pour la topologie $*\sigma(E',E)$. Alors, il existe $x \in E$ tel que : $\varphi(f) = f(x)$, $\forall f \in E'$.*

Théorème 4.2.1 *Soit H un hyperplan de E' fermé pour le topologie faible étoile $*\sigma(E',E)$. Alors il existe $x \in E\backslash\{0_E\}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que H est de la forme :*

$$H = \{f \in E'; \quad f(x) = \alpha\}.$$

Preuve. La définition d'un hyperplan de E' implique l'existence d'un $\varphi \in E''$ non nulle et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que :

$$H = \{f \in E'; \quad \varphi(f) = \alpha\}.$$

Fixons un f_0 dans $E'\backslash H$. L'ensemble $E'\backslash H$ est ouvert car H est fermé pour la topologie faible étoile $*\sigma(E',E)$. Il existe donc $x_1, x_2, \ldots, x_n \in E$ et $\varepsilon > 0$ tels que :

$$V := \{f \in E', \quad |f(x_i) - f_0(x_i)| < \varepsilon, \quad \forall i = 1, \ldots, n\} \subset E'\backslash H.$$

pour un $\varepsilon > 0$. Posons $W = V - f_0$, l'ensemble W n'est que :

$$W = \{g \in E', \quad |g(x_i)| < \varepsilon, \quad \forall i = 1, \dots, n\},$$

qui est convexe et symétrique autour 0. Puisque φ est une application linéaire, on en déduit que $\varphi(W)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ symétrique autour 0. De plus cet intervalle est borné sinon il contiendrait $\alpha - \varphi(f_0)$ et il existerait donc $h \in V$ tel $\varphi(h) = \alpha$, contradiction avec le fait que $V \subset E' \backslash H$.

Finalement il existe donc $C > 0$ tel que :

$$\forall g \in W, \quad |\varphi(g)| \leq C.$$

Fixons $\varepsilon' > 0$, l'inégalité précédente assure que :

$$\forall g \in \tfrac{\varepsilon'}{C} W, \quad |\varphi(g)| \leq \varepsilon'.$$

Donc φ est continue en 0 pour $*\sigma(E', E)$ et par la suite, comme il est linéaire, il est continue sur E' pour $*\sigma(E', E)$. La proposition 4.2.4 assure l'existence de $x \in E$ tel que $\varphi(f) = f(x)$ *i.e.* $\varphi = \xi_x$. ■

Remarque 4.2.5 *Dans le cas où J n'est pas surjective de E sur E'', la topologie $*\sigma(E', E)$ est strictement moins fine que la topologie $\sigma(E', E'')$. En effet, La topologie faible étoile contient strictement moins de fermés que la topologie faible. À titre d'exemple l'hyperplan $H = \{f \in E'; \quad \xi(f) = \alpha\}$ avec $\xi \in E'' \backslash J(E)$ est fermé pour $\sigma(E', E'')$ (par définition) mais n'est pas fermé pour $*\sigma(E', E)$ d'après le théorème précédent.*

Le théorème fondamental suivant annonce que la topologie faible étoile rend compact la boule unité fermée.

Théorème 4.2.2 ***(Banach-Alaoglu-Bourbaki)*** *La boule unité fermée de E' :*

$$B_{E'} = \{f \in E', \quad \|f\| \leq 1\}$$

est compacte pour la topologie faible étoile $*\sigma(E', E)$. En particulier elle est fermée pour $*\sigma(E', E)$.

Remarque 4.2.6 *L'importance de ce théorème et de la topologie faible étoile vient du fait* *que la boule unité fermée d'un espace normé de dimension infinie n'est jamais compacte pour la topologie forte.*

4.3 Exercices

Exercice 4.1 *Soit E un Banach et M un sous-espace vectoriel fermé de E pour la topologie forte. Montrer que la topologie faible $\sigma(M, M')$ coïncide avec la topologie induite par $\sigma(E, E')$ sur M.*

Solution : Le sous-espace vectoriel M est un fermé d'un Banach, donc M est un Banach aussi. Alors M peut être muni de la topologie faible $\sigma(M, M')$. Soit U un ouvert de la topologie $\sigma(M, M')$. On peut toujours supposer que U est de la forme :

$$U = \{x \in M, \quad |f_i(x - x_0)| < \varepsilon, \quad i = 1, \cdots, n\} \tag{4.1}$$

avec x_0 un élément de M, $\varepsilon > 0$, $f_i \in M'$ pour $i = 1, \cdots, n$. Le théorème de Hahn-Banach permet de prolonger les f_i en formes linéaires $\widetilde{f}_i$ continues sur E. Donc on obtient $U = M \cap V$ avec :

$$V = \left\{x \in E, \quad \left|\widetilde{f}_i(x - x_0)\right| < \varepsilon, \quad i = 1, \cdots, n\right\}.$$

Mais V est un ouvert de $\sigma(E, E')$, alors U est un ouvert pour la topologie induite par $\sigma(E, E')$ sur M.

Réciproquement, si V est un ouvert de $\sigma(E, E')$ qui contient x_0 un élément de M, on peut toujours supposer qu'il est de la forme :

$$V = \left\{x \in E, \quad \left|\widetilde{f}_i(x - x_0)\right| < \varepsilon, \quad i = 1, \cdots, n\right\}$$

avec $\varepsilon > 0$, $\widetilde{f}_i \in E'$ pour $i = 1, \cdots, n$. Posons f_i la restriction de $\widetilde{f}_i$ à M. On a bien $f_i \in M'$ et $V \cap M$ est donné par (4.1) donc $V \cap M$ est un ouvert de $\sigma(M, M')$.

Exercice 4.2 *Soit X et Y deux espaces de Banach et $T : X \to Y$ une application linéaire continue de X muni de la topologie faible dans Y muni de la topologie forte. Montrer qu'il existe $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n \in X'$ tels que :* $\bigcap\limits_{1 \le j \le n} \ker \varphi_j \subset \ker T$.

Solution : Comme la boule unité fermée B_Y de Y est un voisinage de 0_Y, son image réciproque par T est un voisinage de 0_X dans X pour la topologie faible (car $T(0_X) = 0_Y$). Alors il existe un $\varepsilon > 0$ et des formes linéaires continues $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n \in X'$ tels que $V_{\varepsilon,\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n}(0_X) \subset T^{-1}(B_Y)$. Notons que :

$$V_{\varepsilon,\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n}(0_X) = \{x \in X;\ |\varphi_j(x)| \le \varepsilon, \quad 1 \le j \le n\}$$

Puisque :

$$\bigcap_{1 \le j \le n} \ker \varphi_j \subset V_{\varepsilon,\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n}(0_X),$$

on obtient que :

$$\bigcap_{1 \le j \le n} \ker \varphi_j \subset T^{-1}(B_Y).$$

Mais comme $\bigcap\limits_{1 \le j \le n} \ker \varphi_j$ est un sous espace vectoriel de X, si $x \in \bigcap\limits_{1 \le j \le n} \ker \varphi_j$ on a nécessairement $tx \in \bigcap\limits_{1 \le j \le n} \ker \varphi_j$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On obtient alors :

$$|t|\,\|Tx\| = \|T(tx)\| \le 1, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Cela n'est possible que si $Tx = 0_Y$. Par conséquent $\bigcap\limits_{1 \le j \le n} \ker \varphi_j \subset \ker T$.

Exercice 4.3 *Sans utiliser le fait que la topologie faible est séparée, montrer que la limite faible d'une suite, si elle existe, est unique.*

Solution. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de E. Supposons que $x_n \rightharpoonup x$ et $x_n \rightharpoonup y$ avec $x \neq y$. Ceci est équivalent à $f(x_n) \to f(x)$ et $f(x_n) \to f(y)$ pour tout $f \in E'$. Mais $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite réelle qui converge dans $\mathbb{R}$. Donc la limite est unique, c'est-à-dire $f(x) = f(y)$ pour tout $f \in E'$. D'autre part le corollaire 3.5.4 assure l'existence d'un $f_0 \in E'$ tel que $f_0(x) \neq f_0(y)$ car $x \neq y$. Contradiction.

Exercice 4.4 *Montrer que si E est de dimension finie. Alors la convergence faible d'une suite est équivalente à la convergence forte (sans prendre en considération que la topologie faible et forte coïncident dans le cas de dimension finie).*

Solution. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E. Supposons que $x_n \rightharpoonup x$ faiblement dans E et que $\dim E = k$. Soit $\{e_1, e_2, \cdots, e_k\}$ une base quelconque de E. Alors $\exists \alpha_i^{(n)} \in \mathbb{R}$, $i = 1, \cdots, k$ et $\exists \alpha_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \cdots, k$ tels que :

$$x_n = \alpha_1^{(n)} e_1 + \alpha_2^{(n)} e_2 + \cdots + \alpha_k^{(n)} e_k \quad et \quad x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_k e_k.$$

Comme $f(x_n) \to f(x)$ pour tout $f \in E'$. On peut prendre en particuliers $f_1, f_2, \cdots, f_k$ définis par : $f_i(e_i) = 1$ et $f_i(e_m) = 0$ si $m \neq i$. Alors : $f_i(x_n) = \alpha_i^{(n)}$ et $f_i(x) = \alpha_i$. Le fait que $f_i(x_n) \to f_i(x)$ implique que $\alpha_i^{(n)} \to \alpha_i$ dans $\mathbb{R}$. Par la suite :

$$\|x_n - x\| = \left\| \sum_{i=1}^{k} \left(\alpha_i^{(n)} - \alpha_i \right) e_i \right\| \leq \sum_{i=1}^{k} \left| \alpha_i^{(n)} - \alpha_i \right| \|e_i\| .$$

Passons à la limite on obtient que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|x_n - x\| = 0$, ce qui veut dire que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge fortement.

Exercice 4.5 *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E' et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E. Sachant que $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ pour $*\sigma(E', E)$ si et seulement si $f_n(x) \to f(x)$, $\forall x \in E$. Montrer les propriétés suivantes :*

1. *Si $f_n \to f$ fortement alors $f_n \rightharpoonup f$ faiblement pour $\sigma(E', E'')$ et si $f_n \rightharpoonup f$ faiblement alors $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ pour $*\sigma(E', E)$.*
2. *Si $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ pour $*\sigma(E', E)$ alors $\|f_n\|_{E'}$ est bornée et $\|f\|_{E'} \leq \liminf \|f_n\|_{E'}$.*
3. *Si $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ pour $*\sigma(E', E)$ et si $x_n \to x$ fortement alors $f_n(x_n) \to f(x)$ fortement.*

Solution.

1. La première implication est déjà établie dans le cours. Maintenant, si $f_n \rightharpoonup f$ alors pour tout $\xi \in E''$ on a $\xi(f_n) \to \xi(f)$. Prenant $\xi = \xi_x$ avec $x \in E$, on trouve que $f_n(x) \to f(x)$ d'où $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$.

2. On suppose que $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ pour $*\sigma(E', E)$. Alors pour tout $x \in E$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc bornée. Le théorème de Banach-Steinhauss implique que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Puisque, pour tout $x \in E$, on a :
$$|f_n(x)| \leq \|f_n\|_{E'} \|x\|_E .$$
Passons à la limite inf, on trouve :
$$|f(x)| \leq (\liminf \|f_n\|_{E'}) \|x\|_E .$$
Utilisons la définition de la norme $\|\cdot\|_{E'}$ on obtient :
$$\|f\|_{E'} \leq \liminf \|f_n\|_{E'} .$$

3. On écrit :
$$f_n(x_n) - f(x) = (f_n - f)(x) + f_n(x_n - x).$$
Le premier terme tend vers 0 car $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$. Puisque la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et $\|x_n - x\|_E$ tend vers 0, le deuxième terme tend aussi vers 0 d'où le résultat.

Exercice 4.6 *Soient E un espace de Banach, E'son dual et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E. On suppose que pour tout $f \in E'$, $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.*

1. *Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.*

2. *Supposons de plus que, qu'il existe une sous suite $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge faiblement vers $y \in E$. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement dans E vers y.*

Solution.

1. Soit $f \in E$. La suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans l'espace complet $\mathbb{R}$ donc convergente. Ceci implique que la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée :
$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |f(x_n)| < +\infty.$$
Le théorème de Banach-Steinhauss implique que :

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\left(\sup_{f\in E',\|f\|\leq 1}|f(x_n)|\right) < +\infty.$$

Un des corollaires de Hahn-Banach nous donne que :

$$\sup_{f\in E',\|f\|\leq 1}|f(x_n)| = \|x_n\|.$$

La relation précédente devient donc :

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}(\|x_n\|) < +\infty.$$

2. La relation de la convergence faible $x_{\varphi(n)} \rightharpoonup y$ est équivalente à :

$$\forall f \in E', \quad f(x_{\varphi(n)}) \to f(y).$$

La suite numérique $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy et elle admet une sous suite convergente vers $f(y)$. On en conclut que :

$$\forall f \in E', \quad f(x_n) \to f(y)$$

ce qui signifie que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement dans E vers y.

Chapitre 5

Espaces Réflexifs et Espaces Séparables

Les espaces réflexifs et les espaces séparables constituent des classes importantes des espaces de Banach ; ils possèdent des propriétés bien utiles. En effet les espaces réflexifs ont une sorte de compacité. Cela permet de montrer l'existence d'une solution pour certains problèmes de minimisation.

5.1 Espaces réflexifs

On note J l'application définie par :

$$J: \begin{array}{rl} E \to E'' \\ x \mapsto \xi_x \end{array}, \text{ où } \quad \xi_x: \begin{array}{rl} E' \to \mathbb{R} \\ f \mapsto f(x) \end{array}.$$

On a vu dans le chapitre précédent que $J \in \mathcal{L}(E, E'')$ et qu'elle est injective. Par contre, si E est de dimension infinie, J n'est pas nécessairement surjective. En général, $J(E)$ est un sous espace strict de E''. À l'aide de l'injection canonique J on peut identifier E à $J(E) \subset E''$. Dans le cas où J est surjective on dit que E est réflexif.

Définition 5.1.1 *Soit E un espace de Banach et soit J l'injection canonique de E dans E''. On dit que E est réflexif si $J(E) = E''$ i.e. si J est surjective.*

Remarque 5.1.1 *C'est évident que les espaces de dimension finie sont réflexifs. En effet, on a $dim E = \dim E' = \dim E''$ et $\dim \ker J + \dim J(E) = \dim E$ mais J est injective donc automatiquement J est surjective.*

Exemples : On va voir dans ce chapitre que :

1. Tout espace de Hilbert est réflexif .
2. Pour $1 < p < +\infty$ l'espace $L^P(\Omega)$ est réflexif.

Lorsque E est réflexif, les espaces E et E'' sont identifiés implicitement à l'aide de l'isomotrie surjective (isomorphisme) J. On confond chaque $\varphi \in E''$ avec l'unique $x \in E$ tel que $\varphi = J(x) = \xi_x$. De plus, la topologie faible $\sigma(E', E'')$ et la topologie faible étoile $*\sigma(E', E)$ coïncident dans ce cas.

Remarque 5.1.2 *La définition de la réflexivité dépend de l'isomorphisme J. Si on trouve que E et E''sont identifiés par un autre isomorphisme différent de J, ça n'implique pas que E est réflexif.*

L'importance fondamentale de la réflexivité provient d'un résultat de compacité pour la topologie faible donné par Kakutani. Avant de présenter ce résultat et sa démonstration, nous aurons besoin des lemmes suivants, qu'on va les énoncés sans démonstration. Dans la suite, on note par B_E (resp. $B_{E''}$) la boule unité fermée de E (resp. de E'').

Lemme 5.1.1 *Le Banach E est réflexif si et seulement si $J(B_E) = B_{E''}$.*

Preuve. Voir exercice 5.1. ■

Lemme 5.1.2 ***(de Goldstine)*** *Soit E un espace de Banach. Alors $J(B_E)$ est dense dans $B_{E''}$ pour la topologie faible étoile $*\sigma(E'', E')$.*

On présente maintenant le théorème de Kakutani, qui donne une caractérisation importantes des espaces réflexifs.

Théorème 5.1.1 ***(de Kakutani)*** *Soit E un espace de Banach. Alors E est réflexif si et seulement si la boule unité fermée de E :*

$$B_E = \{x \in E; \ \ \|x\| \leq 1\}$$

est compacte pour la topologie faible $\sigma(E, E')$ (i.e. B_E est faiblement compacte).

Preuve. Montrons l'implication directe. Suposons que E est réflexif. D'après lemme 5.1.1 on a $J(B_E) = B_{E''}$ et il découle du théorème de Banach-Alaoglu que $B_{E''}$ est compacte pour la topologie faible étoile $*\sigma(E'', E')$. Mais J^{-1} est continue de $(E'', *\sigma(E'', E'))$ vers $(E, \sigma(E, E'))$ (voir exercice 5.2). Donc $B_E = J^{-1}(B_{E''})$ est compacte pour la topologie faible $\sigma(E, E')$.
Réciproquement, supposons que B_E est compacte pour la topologie faible $\sigma(E, E')$. Puisque $J : E \to E''$ est continue pour la topologie forte, elle est aussi continue de $(E, \sigma(E, E'))$ dans $(E'', \sigma(E'', E'''))$ (voir chapitre 3). Mais $(E'', *\sigma(E'', E'))$ est moins fine que $(E'', \sigma(E'', E'''))$, alors J est continue de $(E, \sigma(E, E'))$ dans $(E'', *\sigma(E'', E'))$. Il s'ensuit alors que $J(B_E)$ est compact pour $*\sigma(E'', E')$ donc fermé. Mais le lemme de Goldstine assure que $J(B_E)$ est dense dans $B_{E''}$ pour $*\sigma(E'', E')$. Donc $J(B_E) = B_{E''}$. Le lemme 5.1.1 assure que E est réflexif. ■

Présentons maintenant quelques propriétés des espaces réflexifs qui découlent du théorème de Kakutani.

Corollaire 5.1.1 *Soit E un espace de Banach réflexif et $M \subset E$ un sous espace vectoriel fermé de E. Alors M muni de la norme de E est aussi un Banach réflexif.*

Preuve. Le sous-espace vectoriel M est un Banach et $\sigma(M, M')$ n'est que la topologie induite par $\sigma(E, E')$ sur M (voir le chapitre précédent). De plus M est un convexe (car M est un sous espace vectoriel) fermé pour la topologie forte donc il est aussi fermé pour la topologie faible $\sigma(E, E')$. La boule unité fermée B_M de M n'est que : $B_M = M \cap B_E$ et B_E

d'après le théorème de Kakutani est compacte pour $\sigma(E, E')$ car E est réflexif. Donc B_M est compacte pour la topologie induite par $\sigma(E, E')$ sur M (un fermé dans un compact est compact), alors pour $\sigma(M, M')$. En appliquant le théorème de Kakutani, on déduit que M est réflexif. ■

Avant de donner un résultat qui relie la réflexivité de E avec celle de son dual, donnons le lemme suivant :

Lemme 5.1.3 *Soit E_1, E_2 deux Banach et $T \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$ bijective. Alors E_1 est réflexif si et seulement si E_2 est réflexif.*

Théorème 5.1.2 *Soit E un espace de Banach. Alors E est réflexif si et seulement si son dual E' est réflexif.*

Preuve. Supposons que E est réflexif. Alors la topologie faible $\sigma(E', E'')$ et la topologie faible étoile $*\sigma(E', E)$ coïncident. Par la suite le théorème de Banach Alooglu-Bourbaki assure que la boule unité fermée $B_{E'}$ est compacte pour la topologie faible étoile $*\sigma(E', E)$. Il résulte qu'elle est aussi pour le topologie faible $\sigma(E', E'')$. Le théorème de Kakutani implique alors que E' est réflexif.
Réciproquement, supposons que E' est réflexif. D'après ce qui précède son dual E'' est réflexif. Mais $J(E)$ est un sous-espace vectoriel fermé de E'' pour la topologie forte. Le corollaire 5.1.1 implique que $J(E)$ est réflexif. Enfin comme J est linéaire, continue et bijective de E sur $J(E)$, le lemme 5.1.3 assure la réflexivité de E. ■

5.2 Espaces uniformément convexes

Dans cette section, on présente l'uniforme convexité, qui sera un outil explicite pour assurer la réflexivité.

Définition 5.2.1 *Un espace de Banach E est dit uniformément convexe si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \textit{ tels que} : (x, y \in E,\ \ \|x\| \leq 1,\ \ \|y\| \leq 1 \textit{ et } \|x - y\| > \varepsilon) \Rightarrow \left(\left\| \frac{x+y}{2} \right\| < 1 - \delta \right).$$

Remarque 5.2.1 *On peut vérifier que si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tels que} : (x, y \in E, \ \ \|x\| = 1, \ \ \|y\| = 1 \text{ et } \|x - y\| > \varepsilon) \Rightarrow \left(\left\| \frac{x+y}{2} \right\| < 1 - \delta \right),$$

alors E est uniformément convexe.

Exemples :

i) L'espace $\mathbb{R}^n$ muni de la norme euclidienne $\|\cdot\|_2$ est uniformément convexe. Par contre, $\mathbb{R}^n$ muni de $\|\cdot\|_1$ ou $\|\cdot\|_\infty$ ne l'est pas.

Cet exemple affirme que l'uniforme convexité dépend de la norme choisie et qu'elle n'est pas stable par passage à une norme équivalente.

ii) Tout espace de Hilbert $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace uniformément convexe pour la norme assoiciée au produit scalaire $\|\cdot\| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$. En effet, d'après l'identité du parallélograme :

$$\left\| \frac{a+b}{2} \right\|^2 + \left\| \frac{a-b}{2} \right\|^2 = \frac{1}{2} \left(\|a\|^2 + \|b\|^2 \right), \quad \forall a, b \in H,$$

On obtient que :

$$\forall \varepsilon > 0, x, y \in E, \|x\| < 1, \|y\| < 1 \text{ et } \|x - y\| > \varepsilon \text{ on a } \left\| \frac{x+y}{2} \right\|^2 < 1 - \frac{\varepsilon^2}{4}$$

et par la suite :

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\| < 1 - \delta \text{ avec } \delta = 1 - (1 - \frac{\varepsilon^2}{4})^{\frac{1}{2}}.$$

iii) Pour $1 < p < +\infty$ les espaces $l^p(\mathbb{R})$ et $L^P(\Omega)$ sont uniformément convexes (pour leurs norme usuelle).

iv) Les espaces $l^1(\mathbb{R})$, $l^\infty(\mathbb{R})$, $L^1(\Omega)$ et $L^\infty(\Omega)$ ne sont pas uniformément convexes.

Théorème 5.2.1 *Soit E un espace uniformément convexe. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E telle que $x_n \rightharpoonup x$ pour la topologie faible $\sigma(E, E')$ et* $\limsup \|x_n\| \leq \|x\|$. *Alors $x_n \to x$ fortement.*

Preuve. Dans le cas où $x = 0_E$ le résultat est évident.

Supposons que $x \neq 0_E$. On introduit :

$$\lambda_n = \max\left(\|x_n\|, \|x\|\right), \; y_n = \lambda_n^{-1} x_n \text{ et } y = \|x\|^{-1} x.$$

Ceci donne que :

$$\lambda_n \to \|x\|, \; \|y_n\| \leq 1, \; \|y\| = 1 \text{ et } \|y_n\| \to \|y\|.$$

Pour montrer que $x_n \to x$ fortement, il suffit de montrer que $y_n \to y$ dans E puisque $\|x_n - x\| = \|\lambda_n y_n - \|x\| y\|$.

Par absurde supposons que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas fortement vers y. Alors, on a :

$$y_n, y \in B_E \text{ et } \|y_n - y\| \geq \varepsilon > 0 \text{ implique } \left\|\tfrac{y_n+y}{2}\right\| \leq 1 - \delta, \text{ pour un } \delta > 0 \;;$$

car E est uniformément convexe.

D'autre part, puisque $\frac{y_n+y}{2} \rightharpoonup y$ implique :

$$\|y\| \leq \liminf \left\|\frac{y_n+y}{2}\right\| \quad \text{et} \quad \limsup \left\|\frac{y_n+y}{2}\right\| \leq \frac{1}{2}\lim(\|y_n\| + \|y\|) = \|y\| \;;$$

Donc $\left\|\frac{y_n+y}{2}\right\| \to \|y\|$, contradiction avec le fait que $\|y\| = 1$ et que $\left\|\frac{y_n+y}{2}\right\| \leq 1 - \delta$.

Ceci nous permet de déduire que $\|y_n - y\| \to 0$ et par la suite que $\|x_n - x\| \to 0$. ■

Le résultat suivant présente un critère explicite garantissant la réflexivité.

Théorème 5.2.2 *Un espace de Banach uniformément convexe est réflexif.*

Exemple : Comme tout espace de Hilbert est un espace uniformément convexe, on déduit que tout espace de Hilbert est réflexif.

5.3 Espaces séparables

Définition 5.3.1 *On dit que l'espace topologique E est séparable s'il possède une partie $D \subset E$ dénombrable et dense dans E.*

Exemples :

1. Les espaces $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont séparables (le sous-ensemble $\mathbb{Q}$ est dénombrable et dense dans $\mathbb{R}$, l'ensemble $\{x+iy, \quad x,y \in \mathbb{Q}\}$ est dénombrable et dense dans $\mathbb{C}$).
2. Tout espace normé de dimension finie est séparable : si E est un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$ et si $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ est une base de E, l'ensemble dénombrable $D = \{\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n, \quad \lambda_i \in \mathbb{Q} \text{ pour } i = 1, \ldots, n\}$ est dense dans E.
3. Les espaces $L^p(\Omega)$ sont séparables pour $1 \leq p < \infty$, par contre $L^\infty(\Omega)$ n'est pas séparable.

Le résultat suivant est utille pour monter la séparabilité de certains espaces vectoriels normés.

Lemme 5.3.1 *Soient E un $\mathbb{k}$-espace vectoriel normé, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E et notons par F le sous-espace vectoriel engendré par $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Supposons que F soit dense dans E. Alors E est séparable.*

Preuve. Notons par L_0 l'espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$ engendré par la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On peut vérifier que L_0 est dénombrable et que L_0 est un sous-ensemble dense de F. Par conséquent L_0 est dense dans E, ce qui montre que E est séparable. ■

Proposition 5.3.1 *Soit E un espace métrique séparable et soit A une partie de E. Alors A est également séparable.*

Preuve. Si $D \subset E$ est dénombrable et dense dans E, alors $D \cap A$ est dénombrable et dense dans A. ■

Proposition 5.3.2 *Le produit d'une famille dénombrable d'espaces métriques séparables est séparable.*

Preuve. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille dénombrable des espaces métriques séparables et $X = \prod\limits_{n\in\mathbb{N}} X_n$ l'espace produit. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit D_n une partie dénombrable dense dans X_n. Soit $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un point de X, posons $A_p = \prod\limits_{n=0}^{p} D_n \times \prod\limits_{n=p+1}^{\infty} \{a_n\}$ pour $p \in \mathbb{N}$. L'ensemble $A = \bigcup\limits_{p=0}^{\infty} A_p$ est alors dénombrable (comme le produit d'une famille finie d'ensembles dénombrables est un ensemble dénombrable et la réunion d'une famille dénombrable d'ensemble dénombrable est un ensemble dénombrable). De plus l'ensemble A est dense dans X, car tout ouvert élémentaire non vide sécrit $\prod\limits_{n=0}^{p} \mathcal{O}_n \times \prod\limits_{n=p+1}^{\infty} X_n$, $\mathcal{O}_n$ ouvert de X_n, et recontre A. Donc X est séparable. ■

Remarque 5.3.1 *Il découle de ce résultat que $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$ sont séparables.*

Proposition 5.3.3 *Tout espace métrique compact est séparable.*

Preuve. Supposons que (E, d) est un espace métrique compact. Soit $n \geq 1$ un entier, l'espace E est recouvert par les boules ouvertes $B(x, \frac{1}{n})$, $x \in E$. On peut extraire un sous-recouvrement fini, ce qui signfie que :

$$\exists x_1^n, x_2^n, \ldots, x_{k_n}^n \in E \text{ telque : } E = \bigcup_{k=1}^{k_n} B(x_k^n, \frac{1}{n}).$$

Posons : $D = \{x_k^n, \quad k = 1, \ldots, k_n,\ n \geq 1\}$.
L'ensemble D est une union dénombrable d'ensembles finis, donc dénombrable. De plus, la partie D est dense dans E, en effet :

$$\forall x \in E, \forall \varepsilon > 0, \exists n \geq 1 \text{ tel que } \frac{1}{n} \leq \varepsilon \text{ et } \exists x_i^n \in D \text{ tel que } x \in B(x_i^n, \frac{1}{n}).$$

Donc $d(x, x_i^n) \leq \varepsilon$. On conclut que l'espace E est bien séparable. ■

Théorème 5.3.1 *Soit E un espace de Banach. Si son dual E' est séparable alors E est séparable aussi.*

Preuve. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dénombrable dense dans E'. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $x_n \in E$ fixé tel que $\|x_n\| = 1$ et $|f_n(x_n)| \geq \frac{1}{2} \|f_n\|_{E'}$. Posons :

$$D = \left\{ \sum_{k\geq 1} \lambda_k x_k, \quad \lambda_k \in \mathbb{Q} \right\}.$$

On note que D est dénombrable. Montrons maintenant que D est dense dans E. Comme D est dense dans le sous-espace vectoriel :

$$G = \left\{ \sum_{k \geq 1} \alpha_k x_k, \quad \alpha_k \in \mathbb{R} \right\},$$

il suffit de vérifier que G est dense dans E. D'après le critère de densité donné par corollaire 3.5.6, il suffit de montrer que toute forme linéaire s'annulant sur G est nulle. Soit $f \in E'$ tel que $f(x) = 0, \forall x \in G$. La densité de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans E implique que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N} : \|f - f_n\|_{E'} \leq \tfrac{\varepsilon}{3}.$$

Donc :

$$|f(x_n) - f_n(x_n)| = |f_n(x_n)| \geq \tfrac{1}{2} \|f_n\|_{E'} = \tfrac{1}{2} \|f_n\|_{E'} \|x_n\|.$$

Alors :

$$\|f - f_n\|_{E'} \geq \tfrac{1}{2} \|f_n\|_{E'} \Rightarrow \|f_n\|_{E'} \leq \tfrac{2\varepsilon}{3}.$$

Par la suite :

$$\|f\|_{E'} \leq \|f - f_n\|_{E'} + \|f_n\|_{E'} \leq \tfrac{2\varepsilon}{3} + \tfrac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

On déduit alors $\|f\|_{E'} = 0$ ce qui veut dire que $f = 0_{E'}$. ■

Remarque 5.3.2 *La réciproque n'est pas toujours vraie. La séparabilité de E n'implique pas nécessairement celle de E'. En effet, on va voir dans la section suivante que l'espace $L^1(\Omega)$ est séparable mais son dual $L^\infty(\Omega)$ ne l'est pas.*

Dans le cas où E est séparable et réflexif, on a l'équivalence suivante :

Corollaire 5.3.1 *Soit E un Banach. Alors E est réflexif et séparable si et seulement si E' est réflexif et séparable.*

Preuve. i) On sait que si E' est réflexif alors E l'est aussi (voir théorème 5.1.2) et si E' est séparable alors théorème 5.3.1 assure que E l'est également.

ii) Montrons maintenant l'implication directe. Supposons que E est réflexif et séparable. Alors $E'' = J(E)$ est réflexif séparable car $E^{''}$ est identifié à E et donc d'après i) E' aussi.

■

Théorème 5.3.2 *Soit E un espace de Banach séparable. Alors il existe une distance d définie sur $B_{E'}$ et telle que la topologie associée à d et la topologie induite par $*\sigma(E', E)$*

sur $B_{E'}$ coïncident. On dit que la boule unité fermée $B_{E'}$ de E' est métrisable pour la topologie faible étoile.

Preuve. Comme E est séparable, il existe un sous ensemble $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dénombrable dense dans B_E. Pour $f, g \in B_{E'}$ on définit :

$$d(f,g) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \left| g(x_n) - f(x_n) \right|.$$

C'est claire que d est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, de plus comme $\|x_n\| \leq 1$ on peut vérifier que d est une distance sur E'. Montrons maintenant que la topologie associée à d coïncide avec la topologie induite par $*\sigma(E', E)$ sur $B_{E'}$.

a) Soit $f_0 \in B_{E'}$ et V un voisinage de f_0 pour $*\sigma(E', E)$. Montrons qu'il existe une boule ouverte centrée en f_0 pour la distance d, c'est-à-dire qu'il existe $r > 0$ tel que :

$$U = \{ f \in B_{E'}, \quad d(f, f_0) < r \ \} \subset V.$$

Supposons que V est de la forme :

$$V = \{ f \in B_{E'}, \quad |f(y_i) - f_0(y_i)| < \varepsilon, \ \ i = 1, \cdots, k \}$$

avec $\|y_i\|_E \leq 1$, pour $i = 1, \cdots, k$. La densité de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans B_E assure qu'il existe pour tout $i = 1, \cdots, k$ un entier n_i tel que : $\|y_i - x_{n_i}\| < \frac{\varepsilon}{4}$.

Choisissant $r > 0$ tel que $2^{n_i} r < \frac{\varepsilon}{2}$. Prenons :

$$U = \{ f \in B_{E'}, \quad d(f, f_0) < r \}.$$

Alors on a pour tout $f \in U$ et $i = 1, \cdots, k$:

$$\begin{aligned} |f(y_i) - f_0(y_i)| &\leq |f(y_i) - f(x_{n_i})| + \left| f(x_{n_i}) - f_0(x_{n_i}) \right| + |f_0(x_{n_i}) - f_0(y_i)| \\ &< \frac{\varepsilon}{4} + 2^{n_i} r + \frac{\varepsilon}{4} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Donc $f \in V$, *i.e.* $U \subset V$.

b) Réciproquement, soit $f_0 \in B_{E'}$ et fixons $r > 0$. On cherche à montrer que

$$U = \{ f \in B_{E'}, \quad d(f, f_0) < r \}$$

est un voisinage de f_0 pour $*\sigma(E', E)$. On a pour $k \in \mathbb{N}$:

$$d(f, f_0) = \sum_{n=0}^{k} 2^{-n} |f(x_n) - f_0(x_n)| + \sum_{n=k+1}^{\infty} 2^{-n} |f(x_n) - f_0(x_n)| .$$

Prenons k de tel sorte que $2^{k-2} r > 1$ et définissons V par :

$$V = \left\{ f \in B_{E'}, \quad |f(x_i) - f_0(x_i)| < \tfrac{r}{4}, \quad i = 1, \cdots, k \right\} .$$

L'ensemble V est bien un ouvert pour la topologie induite pour $*\sigma(E', E)$ de plus $f \in V$ implique que :

$$d(f, f_0) \leq \frac{r}{4} \sum_{n=0}^{k} 2^{-n} + 2 \sum_{n=k+1}^{\infty} 2^{-n} < \frac{r}{2} + \frac{1}{2^{k-1}} < r.$$

Donc $f \in U$, *i.e.* $V \subset U$. ■

Remarque 5.3.3 *L'espace entier E' n'est jamais métrisable pour $*\sigma(E', E)$ sauf en dimension finie.*

Le résultat suivant se montre d'une manière analogue au théorème 5.3.2.

Théorème 5.3.3 *Soit E un espace de Banach tel que E' soit séparable. Alors B_E est métrisable pour la topologie faible $\sigma(E, E')$.*

Le théorème 5.3.2, qui donne un résultat de métrisabilité de la topologie faible étoile sur les bornés, combiné avec le théorème de Banach-Aloaglu-Bourbaki donne le résultat suivant :

Corollaire 5.3.2 *Soit E' un Banach séparable et soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée de E'. Alors $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une sous-suite qui converge pour la topologie $*\sigma(E', E)$.*

Le théorème suivant donne un résultat similaire dans le cas où E est réflexif.

Théorème 5.3.4 *Si E est un espace de Banach réflexif alors de toute suite bornée $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E on peut extraire une sous suite qui converge pour la topologie faible $\sigma(E, E')$.*

Preuve. Soit $vect\{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ le sous-espace engendré par les x_n et notons $M = \overline{vect\{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}}$. Le corollaire 5.1.1 donne que M est réflexif donc d'après le théorème de Kakutani B_E est compact pour la topologie $\sigma(M, M')$. D'autre part M est séparable par construction, alors M' est séparable. On déduit alors, d'après théorème 5.3.3 que B_E est métrisable pour la topologie $\sigma(M, M')$. En utilisant le théorème de Bolzano-Weiestrass on obtient qu'il existe une sous-suite qui converge pour $\sigma(M, M')$ et donc elle converge aussi pour la topologie $\sigma(E, E')$. ■

Remarque 5.3.4 *On note qu'un espace topologique (général) dans lequel toute suite admet une sous-suite convergente n'est pas nécessairement compact et que dans le cas d'un espace topologique compact on peut trouver des suites qui ne possèdent aucune sous-suite convergente. Mais si E est un espace métrique le théorème de Bolzano-Weiestrass affirme que E est compact si et seulement toute suite possède une sous-suite convergente.*

On admet le résultat suivant :

Théorème 5.3.5 *(d'Eberlein-Šmulian) Si K est une partie faiblement compacte dans un espace de Banach E, alors de toute suite d'éléments de K, on peut extraire une sous-suite faiblement convergente vers un élément de K.*

On termine cette section, par donner un critère qui nous aide à identifier les espaces qui ne sont pas séparables.

Lemme 5.3.2 *Soit E un Banach. Supposons qu'il existe une famille d'ouverts $(\mathcal{O}_i)_{i \in I}$ telle que :*

i) $\mathcal{O}_i \neq \emptyset, \quad i \in I,$

ii) $\mathcal{O}_i \cap \mathcal{O}_j = \emptyset \quad$ *si* $i \neq j$,

iii) *I n'est pas dénombrable.*

Alors E n'est pas séparable.

Preuve. Voir exercice 5.5. ■

5.4 Les espaces L^P

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ muni de la mesure de Lebesgue dx et $p \in [1, +\infty[$. On définit l'espace $L^p(\Omega)$ par :

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R}\,;\ f \text{ est mesurabe et } \int_\Omega |f|^p \, dx < +\infty \right\}.$$

On munit l'espace $L^p(\Omega)$ ou tout simplement L^p par la norme :

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Le cas où $p = \infty$, l'espace L^∞ est défini par :

$$L^\infty = \{ f : \Omega \to \mathbb{R}\,;\ f \text{ est mesurabe et } \exists C > 0 :\ |f(x)| \leq C \ p.p. \text{ sur } \Omega \},$$

(p.p. désigne presque partout). Ce dernier espace est muni de la norme :

$$\|f\|_\infty = \inf \{ C, |f(x)| \leq C \ p.p. \text{ sur } \Omega \}.$$

Dans cette section, on étudie la réflexivité et la séparabilité des espaces L^p. Nous distinguons trois cas : $1 < p < +\infty$, $p = 1$ et $p = +\infty$. Certains résultats sont présentés sans démonstrations, car elles se basent sur des outils qui ne sont pas présentés dans ce cours. Commençons par le résultat de complétude suivant :

Théorème 5.4.1 *Pour tout $p \in [1, +\infty]$ l'espace vectoriel normé $(L^p, \|.\|_p)$ est un espace de Banach.*

5.4.1 Étude de L^p pour $1 < p < +\infty$

Théorème 5.4.2 ***(de représentation de Riesz)*** *Soit $p \in]1, +\infty[$, q son exposant conjugué ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$) et soit $\varphi \in (L^p)'$. Alors il existe une unique fonction $u \in L^q$ telle que :*

$$\varphi(f) = \int_\Omega ufdx, \quad \forall f \in L^p.$$

De plus : $\|\varphi\|_{(L^p)'} = \|u\|_{L^q}$. *Autrement dit, l'application* $T : u \to T_u$ *qui est définie pour tout* $u \in L^q$ *et* $f \in L^p$ *par* $T_u(f) = \int_\Omega ufdx$ *est une isométrie bijective de* L^q *sur* $(L^p)'$.

Remarque 5.4.1 *Le théorème de représentation de Riesz est fort utile. Il assure que toute forme linéaire continue sur* L^p *avec* $1 < p < +\infty$, *se représente à l'aide d'une fonction de* L^q. *Alors si* $1 < p < +\infty$ *et si* q *vérifie* $(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$ *on a l'identification* $(L^p)' = L^q$. *Ceci nous permet d'écrire la convergence faible* $f_n \rightharpoonup f$ *dans* L^p, *où* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'éléments de* L^p *et* $f \in L^p$, *comme suit :*

$$\int_\Omega f_n g dx \to \int_\Omega fgdx, \quad \forall g \in L^q.$$

Avant d'énoncer un résultat de réflexivité, donnons le lemme suivant :

Lemme 5.4.1 ***(Inégalité de Clarkson)*** *Soit* $f, g \in L^p$. *On a :*

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p^p + \left\|\frac{f-g}{2}\right\|_p^p \leq \frac{1}{2}(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p), \tag{5.1}$$

pour $2 \leq p < +\infty$.

Théorème 5.4.3 *Pour tout* $p \in]1, +\infty[$ *l'espace* $(L^p, \|.\|_p)$ *est réflexif.*

Preuve. La démonstrartion se fait en deux étapes.

Première étape : si $2 \leq p < +\infty$.

Montrons que l'espace L^p est uniformément convexe dans ce cas. Soient

$\varepsilon > 0$ et $f, g \in L^P$ tels que $\|f\|_p \leq 1$, $\|g\|_p \leq 1$ et $\|f - g\|_p > \varepsilon$.

En utilisant l'inégalité (5.1) on obtient que :

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p^p \leq 1 - (\frac{\varepsilon}{2})^p$$

et donc :

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p \leq 1-\delta \quad \text{avec} \quad \delta = (1-(\frac{\varepsilon}{2})^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Par la suite L^p est uniformément convexe et donc réflexif grâce au théorème 5.2.2.

Deuxième étape : si $1 < p \leq 2$. Le théorème de représentation de Riesz donne que $(L^p)' = L^q$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Si $1 < p \leq 2$, on obtient que $2 \leq q < +\infty$. Mais L^q est réflexif d'après la première étape, par la suite le théorème 5.1.2 assure que L^p est aussi réflexif. ■

Théorème 5.4.4 *Soit $1 \leq p < +\infty$. Alors l'espace L^p est séparable.*

5.4.2 Étude de L^1

Le théorème suivant détermine le dual de L^1.

Théorème 5.4.5 *Soit $\varphi \in (L^1)'$. Alors il existe une unique fonction $u \in L^\infty$ telle que :*

$$\varphi(f) = \int_\Omega u f dx, \qquad \forall f \in L^1.$$

De plus : $\|\varphi\|_{(L^1)'} = \|u\|_\infty$.

Remarque 5.4.2 *Ce théorème nous permet d'identifier le dual de L^1 avec L^∞ :*

$$(L^1)' = L^\infty.$$

Théorème 5.4.6 *L'espace L^1 n'est pas réflexif.*

5.4.3 Étude de L^∞

On sait que $(L^1)' = L^\infty$ et comme L^1 n'est pas réflexif alors l'espace L^∞ n'est pas réflexif. De plus, on obtient grâce à l'injection canonique J que :

$$L^1 \subset (L^1)'' = (L^\infty)'.$$

Donc le dual de L^∞ contient L^1 et il est strictement plus grand que L^1, car L^1 n'est pas réflexif.

Théorème 5.4.7 *L'espace L^∞ n'est ni réflexif ni séparable.*

Preuve. Concernant la non refléxivité c'est déjà montré. Concernant le deuxième énoncé on va appliquer le critère de non séparabilté donné par le lemme 5.3.2 . Pour tout $a \in \Omega$, fixons $r_a = dist(a, C_{\mathbb{R}^n}\Omega)$ et définissons les fonctions u_a par :

$$u_a(x) = \begin{cases} 1 \quad \text{sur } B(a, r_a) \\ 0 \quad \text{ailleurs} \end{cases},$$

et les ouverts $\mathcal{O}_a = \left\{ f \in L^\infty, \|f - u_a\|_\infty < \frac{1}{2} \right\}$.

La famille des ouverts $(\mathcal{O}_a)_{a\in\Omega}$ vérifient les hypothèses du lemme 5.3.2. On déduit alors que L^∞ n'est pas séparable. ■

5.5 Exercices

Exercice 5.1 *Montrer que : Un Banach E est réflexif si et seulement si $J(B_E) = B_{E''}$ où B_E (resp. $B_{E''}$) est la boule unité fermée de E (resp. de E'').*

Solution. On suppose que E est réflexif. Comme J est une isométrie (conserve la norme), on a : $J(B_E) \subset B_{E''}$. Soit maintenant $\xi \in B_{E''}$. Comme E est réflexif (J est surjectif), il existe $x \in E$ tel que $J(x) = \xi$, de plus $\|x\|_E = \|J(x)\|_{E''} = \|\xi\|_{E''} \leq 1$. Donc $x \in B_E$. Par la suite $B_{E''} \subset J(B_E)$, d'où $J(B_E) = B_{E''}$.

Reciproquement, supposons que $J(B_E) = B_{E''}$. Notons que $J(0_E) = 0_{E''}$. Soit maintenant $\xi \in E''\setminus\{0_{E''}\}$. On a $\frac{\xi}{\|\xi\|_{E''}} \in B_{E''}$, donc il existe $x \in E$ tel que $J(x) = \frac{\xi}{\|\xi\|_{E''}}$. Comme J est linéaire on obtient : $J(\|\xi\|_{E''} x) = \xi$, i.e $J(E) = E''$. En conséquence E est réflexif.

Exercice 5.2 *Soit E un Banach réflexif. Montrer que J^{-1}, l'inverse de l'injection canonique J, est continue de $(E'', *\sigma(E'', E'))$ dans $(E, \sigma(E, E'))$.*

Solution. Comme E est réflexif, l'inverse $J^{-1} : (E'', *\sigma(E'', E')) \to (E, \sigma(E, E'))$ est bien défini. Soit U un ouvert de E pour $\sigma(E, E')$. On cherche à vérifier que $(J^{-1})^{-1}(U) = J(U)$ est un ouvert de E'' pour la topologie $*\sigma(E'', E')$. Soit $x_0 \in U$. Il existe $f_1, \cdots, f_n \in E'$ et $\varepsilon > 0$ tels que :

$$V = \{x \in E,\ \ |f_i(x) - f_i(x_0)| < \varepsilon,\ \text{pour } i = 1, \cdots, n\} \subset U.$$

Par la définition de J, on a :

$$J(V) = \{\xi \in E'' \text{ tel que } \xi = J(x) \in E \text{ et } \ |f_i(x) - f_i(x_0)| < \varepsilon,\ \text{pour } i = 1, \cdots, n\}.$$

Mais $\xi(f_i) = f_i(x)$ si $\xi = J(x)$ donc :

$$J(V) = \{\xi \in E'' \text{ tel que } \ \ |\xi(f_i) - J(x_0)(f_i)| < \varepsilon,\ \text{pour } i = 1, \cdots, n\}.$$

Alors $J(U)$ est bien un voisinage de $J(x_0)$ pour la topologie $*\sigma(E'', E')$. On déduit alors que J^{-1} est continue.

Exercice 5.3 *Soit E un espace de Banach réflexif. Soit $K \subset E$ une partie convexe, fermée et bornée. Alors K est compacte pour la topologie faible $\sigma(E, E')$.*

Solution. Comme K est un ensemble convexe et fermé pour la topologie forte alors K est fermé pour la topologie faible $\sigma(E, E')$. De plus K est borné, alors il existe une constante positive m telle que $K \subset mB_E$. Le théorème de Kakutani implique que mB_E est compacte pour $\sigma(E, E')$. Alors K est compact pour la topologie faible (car une partie fermée d'un compact est compacte).

Exercice 5.4 *Soit E et F deux espaces de Banach et $T : E \to F$ une application linéaire continue. Supposons que E est réflexif. Montrer que $T(B_E)$ est un ensemble fermé de F où B_E est la boule unité fermée de E.*

Solution. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de B_E telle que $Tx_n \to y \in F$ quand n tend vers $+\infty$. Ceci implique que $Tx_n \rightharpoonup y \in F$. Puisque E est réflexif, sa boule unité est faiblement compacte. Donc, d'après le théorème d'Eberlein-Šmulian, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite faiblement convergente : $x_{n_k} \rightharpoonup x \in F$ quand n_k tend vers $+\infty$. On constate que T est continue pour les topologies faibles car il est continue pour les topologies fortes. Donc $T(x_{n_k}) \rightharpoonup T(x) \in F$ quand n_k tend vers $+\infty$. L'unicité de la limite nous donne que $y = T(x) \in T(B_E)$. Alors $T(B_E)$ est fermé (fortement) dans F.

Exercice 5.5 *Soit E un Banach. Supposons qu'il existe une famille d'ouverts $(\mathcal{O}_i)_{i\in I}$ telle que :*

i) $\mathcal{O}_i \neq \emptyset, \quad i \in I,$

ii) $\mathcal{O}_i \cap \mathcal{O}_j = \emptyset \quad$ si $i \neq j$,

iii) I n'est pas dénombrable.

Montrer que E n'est pas séparable.

Solution. Montrons ce résultat par l'absurde. Supposons que E est séparable, donc il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dense dans E. Alors pour chaque $i \in I$, il existe $n(i)$ tel que $x_{n(i)} \in \mathcal{O}_i$, car $\mathcal{O}_i$ est un ouvert de E. L'application $i \mapsto n(i)$ est injective, puisque si $n(i) = n(j)$, alors $x_{n(i)} = x_{n(j)} \in \mathcal{O}_i \cap \mathcal{O}_j$ et donc $i = j$. On conclut alors que I est dénombrable, contradiction avec l'hypothèse iii).

Exercice 5.6 *Soit E un espace réflexif. Soit $F \subset E'$ un sous-espace vectoriel fermé. Montrer que :*

$$\text{‹‹ } si\ (x \in E \text{ et } f(x) = 0,\ \forall f \in F \Rightarrow x = 0_E) \quad alors\ F = E'. \text{ ››}$$

Solution. Soit $\xi \in E''$ tel que $\xi(f) = 0$, pour tout $f \in F$. Comme E est réflexif, il existe un certain $x \in E$ tel que $\xi = J(x)$ et $f(x) = 0$, pour tout $f \in F$, et donc par hypothèse $x = 0_E$ et par la suite $\xi = 0_{E''}$. Le corollaire 3.5.6 (un corollaire du théorème de Hahn-Banach) implique que F est dense dans E'. Comme F est fermé on conclut que $F = E'$.

Exercice 5.7 *Utiliser le théorème de représentation de Riesz pour montrer que tout espace de Hilbert réel H est réflexif.*

Solution. Soit H un espace de Hilbert réel muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Grâce au théorème de représentation de Riesz on a :

$$\forall f = f_x \in H', \exists x \in H, \text{ tel que } f_x(y) = \langle y, x \rangle, \quad \forall y \in H.$$

L'application $x \in H \mapsto f_x \in H'$ est un isomorphisme. Cela permet de munir H' d'un produit scalaire défini par :

$$\langle f_x, f_y \rangle_{H'} = \langle x, y \rangle \text{ pour } x, y \in H,$$

qui fait de H' un espace de Hilbert. Le théorème de représentation de Riesz donne alors :

$$\forall \varphi \in H'', \exists f \in H', \text{ tel que } \varphi(g) = \langle g, f \rangle_{H'}, \quad \forall g \in H'.$$

Autrement dit, pour tout $\varphi \in H''$ il existe $x \in H$ tel que pour tout $g = g_y \in H'$ on a :

$$\varphi(g) = \langle g, f \rangle_{H'} = \langle g_y, f_x \rangle_{H'} = \langle y, x \rangle = g_y(x) = \zeta_x(g_y) = \zeta_x(g),$$

Donc $\varphi = \zeta_x$. Par la suite l'injection canonique J est surjective et H est réflexif.

Quelques Sujets d'Examens

Les sujets d'examens suivants sont proposés par l'auteur.

Examen Final (2019-2020)

(Durée 1h30)

Exercice n°1 :

1. Énoncer le théorème de Baire.
2. Énoncer le théorème de l'application ouverte.
3. Dites si l'énoncé est vrai ou faux. Si l'énoncé est faux corrigez-le :

   a) Soit f une forme linéaire sur un espace vectoriel normé E. Alors f est continue ssi Imf est fermée.

   b) Soit E un Banach. Si E est réflexif alors son bidual E'' est réflexif aussi.

   c) Si T est une application continue bijective alors T^{-1} est une application ouverte.

   d) Si E est de dimension infinie, la topologie faible $\sigma(E, E')$ n'est pas séparée.

Exercice n°2 : Soit E et F deux Banach et T une application linéaire. Montrer que : « Si T est continue de E vers F au sens de la topologie faible (des deux espaces) alors T est continue de E vers F au sens de la topologie forte (des deux espaces). »

Exercice n°3 : Soit E un espace de Banach, E' son dual et E'' son bidual.

1. Soit $x_0 \in E$. Montrer qu'il existe $f \in E'$ telle que :

$$\|f\|_{E'} = \|x_0\|_E \qquad \text{et} \qquad f(x_0) = \|x_0\|_E^2 .$$

2. Montrer que pour tout $x \in E$ on a : $\|x\|_E = \sup_{L \in E', \|L\|_{E'}=1} |L(x)|$.
3. Pour tout $x \in E$, on associe la forme linéaire :

$$\xi_x : E' \to \mathbb{R} \text{ tel que } \xi_x(f) = f(x).$$

4. Montrer que ξ_x est une forme linéaire continue sur E' et que $\|\xi_x\|_{E''} = \|x\|$.
5. Donner la définition de la topologie faible étoile $*\sigma(E', E)$.
6. Définissons l'application linéaire $J : E \to E''$ tel que $J(x) = \xi_x$.
7. Déduire que J est injective.
8. Quand dit-on que l'espace E est réflexif ?

Exercice n°4 : Soit E un espace de Banach et E' son dual. Montrer que :

« si E est réflexif alors E' est réflexif aussi.»

Examen de rattrapage (2019-2020)

(Durée 1h30)

Exercice n°1 :

1. Énoncer le théorème de Banach-Steinhaus.
2. Énoncer le théorème de Kakutani.
3. Donner la définition de la topologie faible.
4. Dans quel cas la topologie forte et la topologie faible coïncident ?
5. Donner un exemple d'un fermé pour la topologie forte qui n'est pas fermé pour la topologie faible.

Exercice n°2 :

1. Soit $(U_n)_{n\geq 0}$ une suite d'ouverts denses dans $(\mathbb{R}, |.|)$. Montrer que :

$$U := \underset{n\geq 0}{\cap} U_n \quad \text{n'est pas un ensemble dénombrable.}$$

1. Soit E un espace de Banach et E' son dual. Montrer que la topologie faible étoile $*\sigma(E, E')$ est séparée.

Exercice n°3 :

Soit E et F deux Banach et T une application linéaire de E vers F. On appelle graphe de T (noté $G(T)$) le sous-ensemble de $E \times F$ suivant :

$$G(T) = \{(x, y) \in E \times F,\, y = T(x)\}.$$

On suppose maintenant que $G(T)$ est fermé et on munit $E \times F$ par la norme :

$$\|(x, y)\|_{E\times F} = \max\left(\|x\|_E, \|y\|_F\right).$$

1. Déduire que $G(T)$ muni de la norme induite est complet.
2. Soit l'application linéaire : $P : G(T) \to E$ avec $P(x, Tx) = x$.

   i) Montrer que P est une application continue.

   ii) Déduire que l'application P^{-1} est continue.

   iii) Conclure que l'application T est continue.

Examen Final (2020-2021)

Durée 1 heure

Exercice n°1 :

1. Énoncer le théorème de prolongement de Hahn-Banach.
2. Énoncer le théorème de l'application ouverte.
3. Donner la définition de la topologie faible.
4. Dites si l'énoncé est vrai ou faux. Si l'énoncé est faux corrigez-le :

   a) Tout ouvert de la topologie faible est un ouvert de la topologie faible étoile.

   b) Dans un Banach E si une suite converge faiblement alors elle converge fortement.

   c) Soit F un sous espace vectoriel d'un espace vectoriel normé E tel que $\overline{F} \neq E$. Alors il existe $f \in E' \backslash \{0_E\}$ tel que $f(x) = 0, \forall x \in F$.

Exercice n°2 : Soit E un espace vectoriel normé et E' son dual.

1. Soit $x_0 \in E \backslash \{0_E\}$. Montrer que pour tout $x_0 \in E$ il existe $f \in E'$ tel que :
$$\|f\|_{E'} = 1 \qquad \text{et} \qquad f(x_0) = \|x_0\|_E \,.$$
2. Montrer que pour tout $x, x' \in E$ tel que $x \neq x'$ il existe $f \in E'$, tel que $f(x) \neq f(x')$.

Exercice n°3 :

1. Soit E un espace de Banach et E' son dual. Montrer que la topologie faible $\sigma(E, E')$ est séparée.
2. Soit E et F deux espaces de Banach et $T : E \to F$ une application linéaire. Montrer que si le graphe de T est fermé alors T est continue.
3. Soit (X, d) un espace métrique complet et $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fermés de X. Montrer que si $X = \underset{n\in\mathbb{N}}{\cup} F_n$ alors il existe n_0 tel que l'intérieur de F_{n_0} est non vide.

Examen de rattrapage (2020-2021)

Durée 1 heure

Exercice n°1 :

1. Énoncer le théorème de Banach-Steinhaus.
2. Donner un exemple d'une application continue qui n'est pas ouverte.
3. Donner un exemple d'un ouvert pour la topologie forte qui n'est pas ouvert pour la topologie faible.
4. Dites si l'énoncé est vrai ou faux. Si l'énoncé est faux corrigez-le :

   a) Dans un espace vectoriel normé de dimension infinie les ouverts convexes pour la topologie forte sont des ouverts pour la topologie faible.

   b) Si la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas faiblement alors elle ne converge pas fortement.

   c) Si E est de dimension infinie, la topologie faible étoile n'est pas séparée.

   d) L'inégalité $\|x\|_2 \leq c\,\|x\|_1$ signifie que l'application identité :

   $$Id: \ (E, \|\cdot\|_2) \rightarrow \ (E, \|\cdot\|_1) \text{ est continue.}$$

   e) Le théorème de Baire est vrai pour tout espace métrique.

Exercice n°2 :

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments d'un Banach E et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suites d'éléments de E'.

1. Montrer que la limite faible d'une suite, si elle existe, est unique.
2. Montrer que :

si $x_n \rightharpoonup x$ faiblement pour $\sigma(E, E')$ et si $f_n \rightarrow f$ fortement alors $f_n(x_n) \rightarrow f(x)$ fortement.

Exercice n°3 :

1. Soit C un ensemble convexe d'un Banach E. Montrer que si C est fermé pour la topologie forte alors $E\backslash C$ est ouvert pour la topologie faible $\sigma(E, E')$.

2. Soit E et F deux espaces de Banach et T une application linéaire de E vers F. On suppose que :

$$\forall f \in E', \forall\,(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ une suite de } E \text{ avec } x_n \to 0 \Rightarrow f(Tx_n) \to 0.$$

Montrer que T est continue.

Examen Final (2021-2022)

(**Durée 1h**)

Exercice n°1 :

1. Énoncer le théorème de Baire.

2. Énoncer le théorème de Kakutani.

3. Dites si l'énoncé est vrai ou faux. Si l'énoncé est faux corrigez-le :

   a) Dans un espace vectoriel normé de dimension infinie la boule unité fermée est compacte pour la topologie forte.

   b) Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge pour $*\sigma(E',E)$ alors elle converge pour $\sigma(E',E'')$.

   c) L'espace E' est séparable si et seulement si E est séparable.

Exercice n°2 :

1. Soit E un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de E non dense. Montrer que :

   $\exists f \in E'$ tel que $F \subset Kerf$.

2. Soit $(U_n)_{n\geq 0}$ une suite d'ouverts denses dans $(\mathbb{R}, |.|)$. Montrer que :

   $U := \underset{n\geq 0}{\cap} U_n$ n'est pas un ensemble dénombrable.

Exercice n°3 :

Soit E un espace de Banach réflexif et M un sous-espace vectoriel normé fermé.

1. Montrer que M est aussi fermé pour $\sigma(E,E')$.

2. Montrer que B_M la boule unité fermée de M est compacte pour $\sigma(E,E')$.

3. Déduire que M est réflexif.

Exercice n°4 : (Le but de cet exercice est de montrer le théorème du graphe fermé)

Soit E et F deux Banach et T une application linéaire de E vers F. On appelle graphe de T (noté $G(T)$) le sous-ensemble de $E\times F$ suivant :

$$G(T) = \{(x,y) \in E\times F,\ y = T(x)\}.$$

1. Montrer que si T est continue alors $G(T)$ est fermé.
2. On suppose maintenant que $G(T)$ est fermé et on munit $E \times F$ par la norme :

$$\|(x,y)\|_{E\times F} = \max\left(\|x\|_E, \|y\|_F\right).$$

Soit l'application linéaire : $P : G(T) \to E$ avec $P(x,Tx) = x$.

i) Montrer que P est une application continue.

ii) Déduire que l'application P^{-1} est continue.

iii) Conclure que l'application T est continue.

Examen de replacement (2021-2022)

(Durée 1h)

Exercice n°1 :

1. Énoncer le Théorème de l'application ouverte.
2. Énoncer le Théorème de *Banach-Alaoglu-Bourbaki*.
3. Donner un exemple d'un espace qui est réflexif et séparable.
4. Dites si l'énoncé est vrai ou faux. Si l'énoncé est faux corrigez-le :

   a) L'hyperplan d'équation $[f = \alpha]$ est convexe si et seulement si f est continue.

   b) Tout espace normé de dimension infinie est réflexif.

   c) L'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 7x^4$ est ouverte.

Exercice n°2 :

Soit $E = C([0,1], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Considérons les deux espaces normés $X = (E, \|.\|_\infty)$ et $Y = (E, \|.\|_1)$ où :

$$\|f\|_\infty = \sup |f(t)|\,,\ t \in [0,1], \qquad \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\, dt.$$

On note I l'application identité de X dans Y.

1. Montrer que I est une application continue. Quelle est sa norme ?
2. Montrer que l'application I^{-1} n'est pas continue.
3. Sachant que X est un espace de Banach, déduire que l'espace normé Y n'est pas de Banach.

Exercice n°3 :

1. Soit E un espace de Banach. Montrer que si E est réflexif alors son dual E' est réflexif.
2. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Montrer que F est dense si et seulement si :

$$\forall f \in E' \text{ tel que } f(x) = 0, \forall x \in F \Rightarrow f(x) = 0, \forall x \in E.$$

3. Soit G un espace de Banach et soit A une partie de G. Supposons que, pour tout $f \in G'$, l'ensemble $f(A) = \{f(x), \quad x \in A\}$ est borné dans $\mathbb{R}$. Montrer que le sous-ensemble A est borné.

Bibliographie

[1] G. Auliac, J.-Y. Caby, *Mathématiques Topologie et Analyse*, Dunod, Paris, 2005.

[2] H. Brezis, Analyse *Fonctionnelle, Théorie et Applications*, Masson, Paris, 1987.

[3] A. Chala, *Introduction à la Topologie, Cours et Exercices Résolus*, Université de Mohamaed Khider Biskra, 2018.

[4] J. Charles, M. Mbekhta, H. Queffélec : *Analyse Fonctionnelle et Théorie des Opérateurs, Exercices Corrigés*, Dunod, Paris 2010..

[5] E. Kreyszig, *Introductory Functional Analysis with Appplications,* John Wiley & sons Inc., 1978.

[6] D. Li, *Cours d'Analyse Fonctionnelle avec 200 Exercices Corrigés,* Ellipses, 2013.

[7] L. Schwartz, *Topologie Générale et Analyse Fonctionnelle*, Hermann, 1970.

[8] A.-H. Siddiqi, *Functional Analysis and Applications*, Industrial and Applied Mathematics, Springer Singapore, 2018.

[9] G. Skandalis, *Topologie et Analyse 3ème année Licence-Master, Cours et exercices avec solutions,* Dunod, Paris, 2001.

[10] H. Queffelec, *Topologie Cours et Exercices Corrigés,* Dunod, Paris, 2012.

[11] C. Wagschal, *Topologie et Analyse Fonctionnelle*, Hermann, 2012.