République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de La Recherche Scientifique

Université Djilali Bounaama Khemis Miliana

Faculté des Sciences et de la Technologie

Département de Mathématiques et Informatiques

Mémoire de fin d'étude

En vue de l'obtention d'un diplôme de Master en Mathématique

Spécialité Analyse Mathématiques et Applications

Thème

Sur une équation différentielle via la dérivée conformable avec conditions aux limites en trois points

Présenté par:

Marouf Bakhta

Devant le jury composé de

Président :	Mr. Abderrezak Said	Université de Khemis Miliana
Examinatrice 1 :	Mme. Fouzia Chita	Université de Khemis Miliana
Examinateur 2 :	Mr. Abdelkarim Kellche	Université de Khemis Miliana
Encadreur :	Mme. Leila Slimane	Université de Khemis Miliana

Année universitaire: 2022-2023.

Remerciements

Tout d'abord, je remercie Dieu Tout-Puissant de m'avoir donnée la patience, la volonté, la santé pour réaliser ce travail.

Je tiens à adresser mes sincères gratitudes et mes remerciements à mon encadreur de mémoire Mme Slimane Leila pour son encouragement, son aide, ses multiples conseils et son suivi pour terminer ce travail.

Je tiens à remercier tous les membres du jury, A. Said, F. Chita et A. Kellche d'avoir acceptè d'évaluer ce travail.

Je tiens à remercier tous les enseignants de "département Mathématiques et Informatique" de l'université de Djillali Bounaama Khemis Miliana.

Je remercie mes parents, ma soeur, mes frères, ma famille, tout mes amis et toute personne qui m'a encouragée.

Marouf Bakhta ✍

Dédicace

Je dédie ce modeste travail

À ma grand-mère.

À mon très cher père "M'hammed", ma très chère mère "Khaira", ceux qui ont épuisé leur vie pour me voir aujourd'hui une étudiante qui réussite.

À moi parce que je croyais que chaque jour était une nouvelle opportunité pour moi, pour changer et devenir plus forte et ce qui gâche le monde, une prosternation remplie de conversation avec Allah.

À ma soeur Zahra

À mes frères Omar, Sid Ali et Ramzi.

À celui qui m'a enseigné les principes du succès dans ma vie....

À l'âme qui a quitté le monde mais ne m'a jamais quitté et qui je me souviens chaque jour "mon grand- père".

À toute ma famille, à tous mes amis.

À mon encadrant Mme " L. Slimane" pour ses encouragements.

À toute personne qui choisi le chemain des mathématiques.

À mes chats Minou, Michou et Elbayda.

Marouf Bakhta ✍

ملخص

في هذه المذكرة قمنا بدراسة المشتق الكسري المطابق و التكامل المطابق و عرض خصائصهما. كما درسنا معادلة تفاضلية كسرية مطابقة مع شروط ابتدائية في ثلاث نقاط اين اثبتنا وجود و وحدانية الحل باستعمال نظرية النقطة الصامدة.

كلمات مفتاحية

الحساب الكسري، المشتق الكسري المطابق ، التكامل الكسري المطابق ، المعادلة التفاضلية الكسرية ، تحولات لابلاص الكسرية المطابقة ، النقطة الصامدة.

Abstract

The main objective of this work is to present conformable fractional derivative and conformable fractional integral with their properties. In addition, we study Three-Point : Boundary Value Problems for conformable fractional differential equations where existence and uniqueness results are established by using fixed point theorem.

Key words

Fractional calculation, conformable fractional derivative, conformable fractional integral, conformable fractional Laplace transform, fractionl equation, fixed point.

Résumé

L'objectif principal de ce mémoire est de présenter la dérivée fractionnaire conformable et l'intégrale fractionnaire conformable ainsi que leurs propriétés. On étudie aussi un problème d'équation différentielle via la dérivée conformable avec conditions aux limites en trois points où des résultats d'existence et d'unicité sont établis en utilisant le principe de point fixe.

Mot-clés

Calcul fractionnaire, dérivée fractionnaire conformable, intégrale fractionnaire conformable, transformation de Laplace conformable, point fixe, équation différentielle conformable.

TABLE DES MATIÈRES

REMERCEMENT **i**

DÉDICACE **ii**

Résumé **iv**

NOTATIONS **vi**

Introduction générale **1**

1 Dérivée fractionnaire conformable **3**

1.1 Définitions et notions 3

1.2 Quelques propriétés de la dérivée conformable 7

1.3 Quelques théorèmes sur la dérivée conformable 13

2 L'intégrale conformable et la transformation de Laplace conformable **17**

2.1 L'intégrale conformable 17

2.1.1 La propriété inverse 21

2.1.2 L'intégrale conformable de la dérivée conformable 23

2.1.3 L'intégration par parties 24

2.1.4 Théorème de valeur moyenne pour l'intégrale conformable 26

2.2 La transformation de Laplace conformable 28

3 Problème aux limites en trois points via la dérivée fractionnaire conformable **33**

3.1 Présentation du problème 33

3.2 La résolution du problème linéaire 35

3.3 L'étude du problème non linéaire 38

Annexe **50**

Bibliographie **50**

NOTATIONS

Quelques notations qui utilisent dans cette mémoire :

$\mathbb{N}$:= Ensemble des nombres entiers naturels.

$\mathbb{R}$:= Ensemble des nombres réels.

$\mathbb{C}$:= Ensemble des nombres complexes.

$\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$:=Espace des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

$\Re(\alpha)$:= La partie réel de nombre $\alpha \in \mathbb{C}$.

$\mathscr{B}_r$:= La boule fermée de centre 0 et de rayon r.

$\lceil \alpha \rceil$:= Le plus petit entier supérieur ou égal à α.

$|.|$:= Valeur absolue d'un nombre réel.

$\|.\|$:= La norme convergence uniforme : $\|f\| = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$.

$f^{(n)}$:= Dérivée n-ième de f.

$\Gamma(.)$:= La fonction Gamma d'Euler définie par : $\Gamma(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}dt, \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}, \quad \Re(\alpha) > 0.$

$\mathcal{L}$:= La transformation de Laplace.

$\mathcal{L}_\alpha$:= La transformation de Laplace conformable d'ordre α.

${}^{RL}D^\alpha$:= Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre $n-1 \leq \alpha < n$.

${}^{C}D^\alpha$:= Dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre $n-1 \leq \alpha < n$.

D_α := Dérivée fractionnaire conformable d'ordre (à gauche) α pour $t > 0$.

D_α^a := Dérivée fractionnaire conformable d'ordre (à gauche) α pour $t \geq a$.

${}^{b}D_\alpha$:= Dérivée fractionnaire conformable (à droite) d'ordre α pour $t \leq b$.

$\mathbf{I}_n$:= Intégrale usuelle d'ordre $n \in \mathbb{N}$.

$\mathbf{I}_\alpha$:= Intégrale de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha > 0$.

I_α := Intégrale fractionnaire conformable d'ordre α pour $t \geq 0$.

I_α^a := Intégrale fractionnaire conformable (à gauche) d'ordre α pour $t \geq a$.

${}^{b}I_{\alpha}$:= Intégrale fractionnaire conformable (à droite) d'ordre α pour $t < b$.

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Le calcul fractionnaire est une branche d'analyse mathématique qui généralise la dérivationet l'intégration usuelle à un ordre non entier (réel ou complexe). La première apparition de ce concept remonte à la fin de $17^{ème}$ siècle. L'Hôpital et Leibniz ont discuté le sens de la définition de l'opérateur $d^n y/dx^n = D^n y$, dans le cas où $n = 1/2$. Plusieurs grands mathématiciens ont contribué au développement de ce domaine comme Laplace (1812), Riemmann (1847), Liouville (1832 ; 1837) et Riemann (1847), ainsi que Grùnwal (1867) et Letnikov (1868). Ces dernières décennies, l'application du calcul fractionnaire dans nombreux domaines a suscité un grand intérêt. En effet il a été appliqué en physiques, mécanique, chimie, médecine, finances, biologie (Voir [3], [6], [11], [18], [20]).

Les dérivées fractionnaires les plus connus sont la dérivée fractionnaire au sens de Riemann–Liouville et la dérivée fractionnaire au sens de Caputo qui sont définies pour $n-1 \leq \alpha < n$ par les formules suivantes respectivement :

$$ {}^{RL}D_a^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t \frac{f(x)}{(t-x)^{\alpha-n+1}} dx. \qquad {}^{C}D_a^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(x)}{(t-x)^{\alpha-n+1}} dx. $$

Ces types de dérivées fractionnaires ne vérifient pas plusieurs propriétés connues pour la dérivée usuelle comme la règle du produit, la règle de quotient, la loi des fonctions composées.

En 2014, R. Khalil et al [13] ont présenté une nouvelle définition simple de la dérivée fractionnaire appelée " dérivée fractionnaire conformable ". Sa définition est basée sur la limite comme pour la dérivée ordinaire et elle exige que $t > 0$. De plus, la dérivée conformable conserve certaines propriétés similaires à celles de la dérivée usuelle et simplifie la résolution de certaines équations différentielle fractionnaires. Ils ont aussi définit l'intégrale fractionnaire conformable. En 2015, T. Abdeljawad [1] a généralisé et a amélioré ce nouveau concept, comme il a développé plusieurs résultats autour de la dérivée conformable et l'intégrale conformable.

Les équations différentielles fractionnaires conformable sont appliquées en plusieurs domaines (physique, biologie ...etc (voir [12], [21])).
Ce mémoire est composé de trois chapitres. Dans :
le Chapitre 1, nous présentons quelques définitions, notions et théorèmes concernant la dérivée fractionnaire conformable.
Le Chapitre 2, est consacré à l'étude de l'intégrale fractionnaire conformable. Ses propriétés et sa relation avec la dérivée conformable sont présentées. On étudie aussi la transformation de Laplace conformable et ses propriétés, et on clarifie la relation entre la transformation de Laplace usuelle et la transformation de Laplace conformable.
le Chapitre 3, nous étudions et détaillons le travail fait en [5], où un problème aux limites en trois points via la dérivée conformable est présenté. Ce problème est formulé comme suit :

$$\begin{cases} D_\alpha(D+\lambda)x(t) = f(t, x(t)), \qquad t \in [0,1], \\ x(0) = 0, \quad x'(0) = 0, \quad x(1) = \beta x(\eta). \qquad \beta \in \mathbb{R}, \quad \lambda > 0, \quad \eta \in (0,1), \end{cases}$$

où D_α est la dérivée fractionnaire conformable pour $1 < \alpha \leq 2$, D est la dérivée ordinaire, et $f : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue. Des résultats d'existence et d'unicité sont établis en utilisant la méthode du point fixe (théorème du point fixe de Banach et théorème de point fixe de Kransnoselkii).

CHAPITRE 1

DÉRIVÉE FRACTIONNAIRE CONFORMABLE

Dans ce chapitre, nous présentons le concept de la dérivée conformable fractionnaire ainsi que ses propriétés.

1.1 Définitions et notions

Avant d'introduire la définition de la dérivée conformable, commençons par rappeller la définition usuelle.

Définition 1.1 (La dérivée usuelle). [13] Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la dérivée usuelle de la fonction f est notée par : $\frac{df}{dt}$ où f' qui est définie par la formule :

$$f'(t) = \frac{df}{dt}(t) = \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \frac{f(t+\varepsilon) - f(t)}{\varepsilon}.$$

On introduit maintenant la notion de la dérivée fractionnaire conformable d'ordre α.

Définition 1.2. [13] Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$, on définit "la dérivée conformable" de la fonction f d'ordre α, où $0 < \alpha \leq 1$ par la formule :

$$D_\alpha f(t) = \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon},$$

pour tout $t > 0$. Si la dérivée fractionnaire conformable de la fonction f d'ordre α existe, alors on dit la fonction f est α-différentiable.

Si f est α-différentiable en certain $(0, a)$ tel que $a > 0$ et $\lim_{t \longrightarrow 0^+} D_\alpha f(t)$ existe, alors on peut définir :

$$D_\alpha f(0) = \lim_{t \longrightarrow 0^+} D_\alpha f(t).$$

Remarque 1.1. [13] On constante que si $\alpha = 1$, alors $D_\alpha f(t) = f'(t)$.

Exemple 1.1. Pour $0 < \alpha \leq 1$:

1. Soit $f(t) = e^{ct}$ pour tout $t > 0$ et $c \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} D_\alpha(e^{ct}) &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{e^{c(t+\varepsilon t^{1-\alpha})} - e^{ct}}{\varepsilon} \\ &= e^{ct} \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{e^{c\varepsilon t^{1-\alpha}} - 1}{\varepsilon} \\ &= e^{ct} \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{t^{1-\alpha} e^{c\varepsilon t^{1-\alpha}} - t^{1-\alpha}}{\varepsilon t^{1-\alpha}} \\ &= t^{1-\alpha} e^{ct} \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{e^{c\varepsilon t^{1-\alpha}} - 1}{\varepsilon t^{1-\alpha}}, \end{aligned}$$

on pose $h = \varepsilon t^{1-\alpha}$, on obtient :

$$D_\alpha(e^{ct}) = t^{1-\alpha} e^{ct} \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{e^{ch} - 1}{h} = c t^{1-\alpha} e^{ct} \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{e^{ch}}{1} = c t^{1-\alpha} e^{ct},$$

Donc $D_\alpha(e^{ct}) = c t^{1-\alpha} e^{ct}$.

2. $f(t) = t^p$ pour $t > 0, \quad p \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} D_\alpha(t^p) &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{(t + \varepsilon t^{1-\alpha})^p - t^p}{\varepsilon} \end{aligned}$$

On pose $h = \varepsilon t^{1-\alpha}$, on obtient :

$$\begin{aligned} D_\alpha(t^p) &= \lim_{h\to 0} \frac{(t+h)^p - t^p}{\frac{h}{t^{1-\alpha}}} \\ &= t^{1-\alpha} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{(t+h)^p - t^p}{h} \\ &= t^{1-\alpha}(t^p)' \\ &= pt^{p-1}t^{1-\alpha} \\ &= pt^{p-\alpha}, \end{aligned}$$

car :

$$\lim_{h\to 0} \frac{(t+h)^p - t^p}{h} = pt^{p-1},$$

n'est que la dérivée usuelle de t^p.

Donc $D_\alpha(t^p) = pt^{p-\alpha}$.

• Si $p = 0$, alors : $D_\alpha(1) = 0$.

• Si $p = 1$, alors : $D_\alpha(t) = t^{1-\alpha}$.

La dérivée conformable de quelques fonctions

Soit D_α l'opérateur de la dérivée conformable d'ordre α, telle que : $\alpha \in]0, 1]$ pour $t > 0$.

Le tableau suivant présente la dérivée conformable de quelques fonctions [13] :

La fonction $f(t)$	La dérivée conformable $D_\alpha f(t)$
t^p	$pt^{p-\alpha}$ pour tout $p \in \mathbb{R}$
1	0
e^{ct}	$ct^{1-\alpha}e^{ct}, \quad c \in \mathbb{R}$
$\sin bt$	$bt^{1-\alpha}\cos bt, \quad b \in \mathbb{R}$
$\cos bt$	$-bt^{1-\alpha}\sin bt, \quad b \in \mathbb{R}$
$\frac{1}{\alpha}t^\alpha$	1
$\sin(\frac{1}{\alpha}t^\alpha)$	$\cos(\frac{1}{\alpha}t^\alpha)$
$\cos(\frac{1}{\alpha}t^\alpha)$	$-\sin(\frac{1}{\alpha}t^\alpha)$
$e^{\frac{1}{\alpha}t^\alpha}$	$e^{\frac{1}{\alpha}t^\alpha}$

Table 1.1 : Dérivée conformable de quelques fonctions

Dans la suite on donne la définition de la dériée fractionnaire conformable sur un intervalle qui n'est nécessairement $[0, +\infty[$.

Définition 1.3. [1] • Soit a une constante de $\mathbb{R}$ et $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$. La dérivée fractionnaire conformable d'ordre $0 < \alpha \leq 1$ (à gauche) est définie par :

$$D_\alpha^a f(t) = \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon(t-a)^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon}, \qquad t > a.$$

Si $a = 0$, on peut écrire $D_\alpha f(t)$.

Si la fonction f est α-différentiable sur l'intervalle $[a, b]$, on définie $D_\alpha^a f(a)$ par :

$$D_\alpha^a f(a) = \lim_{t \longrightarrow a^+} D_\alpha^a f(t).$$

• On définit la dérivée fractionnaire conformable d'ordre $0 < \alpha \leq 1$ (à droite) par :

$${}^b D_\alpha f(t) = -\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(t + \varepsilon(t-b)^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon}, \qquad t < b.$$

Si ${}^b D_\alpha f(t)$ existe sur $[a, b]$, alors :

$${}^b D_\alpha f(b) = \lim_{t \longrightarrow b^-} \quad {}^b D_\alpha f(t).$$

On présente maintenant la définition de la dérivée conformable dans ce cas où $n < \alpha \leq n + 1, (où n \in \mathbb{N})$.

Définition 1.4. [1] Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$. Pour $n < \alpha \leq n+1$ tel que $n \in \mathbb{N}$ et $\beta = \alpha - n$. Si $f^{(n)}(t)$ existe, alors on définit :

• La dérivée conformable (gauche) d'ordre α est donnée par la formule :

$$D_\alpha^a f(t) = D_\beta^a f^{(n)}(t), \qquad t > a.$$

Si $a = 0$, on écrit D_α.

• La dérivée conformable (droite) d'ordre α est donnée par la formule :

$${}^b D_\alpha f(t) = (-1)^{n+1} \quad {}^b D_\beta f^{(n)}(t), \qquad t < b.$$

Remarque 1.2. [1] • Si $\alpha = n+1$, alors $\beta = 1$ et la dérivée fractionnaire conformable de f d'ordre α n'est que $f^{(n+1)}$.

• Si $n = 0$ (où $0 < \alpha \leq 1$), alors $\beta = \alpha$ et la définition 1.4 coïncide avec la définition 1.3.

Une définition équivalent de D_α dans le cas $t > 0$ et $n < \alpha \leq n+1$ est donnée comme suite :

Définition 1.5. [13] Soit $\alpha \in]n, n+1]$ (où $n \in \mathbb{N}$), et f est une fonction n-différentiable au point $t > 0$. Alors la dérivée conformable d'ordre α est définie par la formule :

$$D_\alpha f(t) = \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \frac{f^{(\lceil \alpha \rceil - 1)}(t + \varepsilon t^{\lceil \alpha \rceil - \alpha}) - f^{(\lceil \alpha \rceil - 1)}(t)}{\varepsilon},$$

avec $\lceil \alpha \rceil$ est le plus petit entier supérieur ou égal à α.

1.2 Quelques propriétés de la dérivée conformable

Dans cette section on montre que la dérivée conformable vérifié certaines propriétés similaires à celles de la dérivée usuelle.

Théorème 1.1. [13] Soient $0 < \alpha \leq 1$ et f, g deux fonctions α-différentiables pour chaque point $t > 0$. On désigne par D_α l'opérateur de la dérivée conformable d'ordre α. Alors :

1. $[D_\alpha(af + bg)](t) = a(D_\alpha f)(t) + b(D_\alpha g)(t), \quad a, b \in \mathbb{R}.$
2. $D_\alpha(fg) = f(D_\alpha g) + g(D_\alpha f).$
3. $D_\alpha f(t) = t^{1-\alpha}\dfrac{df}{dt}(t), \qquad$ si f est différentiable.
4. $D_\alpha\left(\dfrac{f}{g}\right) = \dfrac{g(D_\alpha f) - f(D_\alpha g)}{g^2}, \quad g \neq 0.$
5. $D_\alpha(\lambda) = 0$, pour chaque fonction constante $f(t) = \lambda$.

Démonstration. Soient f, g deux fonctions α-différentiables pour chaque point $t > 0$ et $a, b \in \mathbb{R}$, on a :

1.

$$\begin{aligned}
[D_\alpha(af+bg)](t) &= \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \frac{(af+bg)(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) - (af+bg)(t)}{\varepsilon} \\
&= a \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \frac{f(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon} + b \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \frac{g(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) - g(t)}{\varepsilon} \\
&= a(D_\alpha f)(t) + b(D_\alpha g)(t),
\end{aligned}$$

donc $(af + bg)$ est α-différentiables en $t > 0$ et

$$[D_\alpha(af+bg)](t) = a(D_\alpha f(t)) + b(D_\alpha g(t)).$$

2.

$$\begin{aligned}
[D_\alpha(fg)](t) &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(t+\varepsilon t^{1-\alpha})g(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)g(t)}{\varepsilon} \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(t+\varepsilon t^{1-\alpha})g(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)g(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) + f(t)g(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)g(t)}{\varepsilon} \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} \Big(\frac{f(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon} . g(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) \Big) + f(t) \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{g(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) - g(t)}{\varepsilon} \\
&= (D_\alpha f)(t) \lim_{\varepsilon \to 0} g(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) + f(t)(D_\alpha g)(t),
\end{aligned}$$

comme la fonction g est continue en t alors :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} g(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) = g(t).$$

3. Posons $h = \varepsilon t^{1-\alpha}$ donc $\varepsilon = t^{\alpha-1}h$, on a :

$$\begin{aligned}
D_\alpha f(t) &= \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \frac{f(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon} \\
&= \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{ht^{\alpha-1}} \\
&= t^{1-\alpha} \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \\
&= t^{1-\alpha} \frac{df}{dt}(t),
\end{aligned}$$

donc $D_\alpha f(t) = t^{1-\alpha} f'(t)$.

4. D'après Théorème 1.1 (3), on a :

$$\begin{aligned} D_\alpha(\frac{f}{g})(t) &= t^{1-\alpha}(\frac{f}{g})' \\ &= t^{1-\alpha}\frac{g(t)f'(t) - f(t)g'(t)}{g^2(t)} \\ &= \frac{g(t)t^{1-\alpha}f'(t) - f(t)t^{1-\alpha}g'(t)}{g^2(t)} \\ &= \frac{g(t)D_\alpha f(t) - f(t)D_\alpha g(t)}{g^2(t)}, \end{aligned}$$

avec $g(t) \neq 0$.

□

Proposition 1.1. [1] Si f est différentiable, alors :

$$D_\alpha^a f(t) = (t-a)^{1-\alpha}\frac{df}{dt}(t), \qquad {}^bD_\alpha f(t) = -(b-t)^{1-\alpha}\frac{df}{dt}(t).$$

Soit $0 < \alpha \leq 1$, $f, g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ deux fonctions α-différentiable pour tout point $t > 0$. L'inégalité triangulaire suivante :

$$D_\alpha(|f+g|)(t) \leq D_\alpha(|f|)(t) + D_\alpha(|g|)(t),$$

n'est pas en général toujours vérifiée comme le montre le contre exemple suivant.
Soit $f(t) = t^2, \quad g(t) = t$ définies sur l'intervalle $[0, 1]$. On a :

$$|f| = f \leq g \leq |g|.$$

Pour $0 < \alpha \leq$, on a : $D_\alpha(|f|)(1) = 2$ et $D_\alpha(|g|)(1) = 1$. Donc on remarque que :

$$D_\alpha(|g|)(1) \leq D_\alpha(|f|)(1).$$

Théorème 1.2. [13] Si la fonction $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ est α-différentiable pour $t_0 > 0$ et $0 < \alpha \leq 1$, alors f est continue en t_0.

Démonstration. Supposons que la fonction f est α- différentiable en $t_0 \in [0, \infty[$. On a :

$$f(t_0 + \varepsilon t_0^{1-\alpha}) - f(t_0) = \frac{f(t_0 + \varepsilon t_0^{1-\alpha}) - f(t_0)}{\varepsilon} \varepsilon.$$

Alors :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} [f(t_0 + \varepsilon t_0^{1-\alpha}) - f(t_0)] = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(t_0 + \varepsilon t_0^{1-\alpha}) - f(t_0)}{\varepsilon} \cdot \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon.$$

Posons $h = \varepsilon t_0^{1-\alpha}$, l'égalité précédente devient :

$$\lim_{h \to 0} [f(t_0 + h) - f(t_0)] = f^{(\alpha)}(t_0) \cdot 0,$$

ce qui implique :

$$\lim_{h \to 0} f(t_0 + h) = f(t_0).$$

Par conséquent, la fonction f est continue en t_0. $\square$

Remarque 1.3. Il existe des fonctions qui sont α-différentiables en un point mais pas dérivable en ce point.

Exemple 1.2. Soit $f(t) = 3t^{\frac{3}{2}}$ pour $t > 0$. On a :

$$D_{\frac{1}{3}} f(0) = \lim_{t \longrightarrow 0^+} D_{\frac{1}{3}} f(t) = 1.$$

Telle que $D_{\frac{1}{3}} f(t) = 1$, pour tout $t > 0$. Mais $\frac{df}{dt}(0)$ n'existe pas.

Théorème 1.3. [22] Soit J un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $0 < \alpha \leq 1$. Si $g : I \to \mathbb{R}$ est α-différentiable en $t > 0$ et si $f : J \to \mathbb{R}$ est différentiable en $g(t) \in J$. Donc $f \circ g$ est α-différentiable en t et on a :

$$D_\alpha (f \circ g)(t) = f'(g(t)) \cdot D_\alpha g(t).$$

Démonstration. Soit g une fonction continue en $t>0$ et α-différentiable pour $0<\alpha\leq 1$. Donc d'après Théorème 1.1 (4), on obtient :

$$\begin{aligned} D_\alpha(f\circ g)(t) &= t^{1-\alpha}(f\circ g)'(t) \\ &= t^{1-\alpha}f'(g(t))g'(t) \\ &= f'(g(t))t^{1-\alpha}g'(t) \\ &= f'(g(t))D_\alpha g(t). \end{aligned}$$

□

Exemple 1.3. Soit $g:[1,2]\to\mathbb{R}$ et $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ telle que $g(t)=t^2$ et $f(t)=e^t$, on a :

$$D_\alpha g(t)=2t^{2-\alpha},\ f'(t)=e^t \text{ et } (f\circ g)(t)=e^{t^2}.$$

D'après Théorème 1.3, on a :

$$\begin{aligned} D_\alpha(f\circ g)(t) &= e^{t^2}\cdot 2t^{2-\alpha} \\ &= 2t^{2-\alpha}e^{t^2}, \end{aligned}$$

et comme g est différentiable, d'après Théorème 1.1 (4), on a :

$$\begin{aligned} D_\alpha(f\circ g)(t) &= t^{1-\alpha}(f\circ g)'(t) \\ &= t^{1-\alpha}\cdot 2te^{t^2}. \end{aligned}$$

On donne le résultat suivant concernant la dérivée conformable sur $[a,+\infty[$ de la composition de deux fonctions avec des hypothèses différentes de celles données dans Théorème 1.3.

Théorème 1.4. [1] Soient $f,g:[a,+\infty[\longrightarrow\mathbb{R}$ deux fonctions α-différentiables avec $0<\alpha\leq 1$. On suppose que $h(t)=f(g(t))$ est α-différentiable pour tout $t\neq a$ et $g(t)\neq 0$. Alors :

$$D^a_\alpha h(t)=D^a_\alpha f(g(t))\cdot D^a_\alpha g(t)\cdot(g(t))^{\alpha-1},$$

si $t=a$, alors :

$$D^a_\alpha h(a)=\lim_{t\longrightarrow a^+}D^a_\alpha f(g(t))\cdot D^a_\alpha g(t)\cdot(g(t))^{\alpha-1}.$$

Démonstration. Soient $f, g : [a, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions α-différentiables telle que $0 < \alpha \leq 1$. D'après la définition 1.3, on pose $u = t + \varepsilon(t-a)^{1-\alpha}$. On obtient :

$$\begin{aligned}
D_\alpha^a h(t) &= \lim_{u \to t} \frac{f(g(u)) - f(g(t))}{u-t} t^{1-\alpha} \\
&= \lim_{u \to t} \frac{f(g(u)) - f(g(t))}{g(u) - g(t)} \cdot \lim_{u \to t} \frac{g(u) - g(t)}{u-t} t^{1-\alpha} \\
&= \lim_{g(u) \to g(t)} \frac{f(g(u)) - f(g(t))}{g(u) - g(t)} \cdot g^{1-\alpha}(t) \cdot D_\alpha^a g(t) \cdot g^{\alpha-1}(t) \\
&= D_\alpha^a f(g(t)) \cdot D_\alpha^a g(t) \cdot g^{\alpha-1}(t).
\end{aligned}$$

□

Proposition 1.2. [1] Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ deux fois différentiable sur $]a, +\infty[$ et $0 < \alpha, \beta \leq 1$ telle que $1 < \alpha + \beta \leq 2$. Alors :

$$D_\alpha^a D_\beta^a f(t) = D_{\alpha+\beta}^a f(t) + (1-\beta)(t-a)^{-\beta} D_\alpha^a f(t). \tag{1.1}$$

Démonstration. En utilisant la règle du produit pour la dérivée conformable et le fait que f est deux fois différentiable, on a :

$$\begin{aligned}
D_\alpha^a D_\beta^a f(t) &= (t-a)^{1-\alpha} \frac{d}{dt} [D_\beta^a f(t)] \\
&= (t-a)^{1-\alpha} \frac{d}{dt} [(t-a)^{1-\beta} f'(t)] \\
&= (t-a)^{1-\alpha} [(1-\beta)(t-a)^{-\beta} f'(t) + (t-a)^{1-\beta} f''(t)] \\
&= (1-\beta)(t-a)^{-\beta} (t-a)^{1-\alpha} f'(t) + (t-a)^{2-\alpha-\beta} f''(t) \\
&= (1-\beta)(t-a)^{-\beta} D_\alpha^a f(t) + D_{\alpha+\beta}^a f(t).
\end{aligned}$$

□

Remarque 1.4. (1) Pour l'équation (1.1). Si on a $\alpha = \beta = 1$, alors :

$$D_\alpha^a D_\beta^a f(t) = D_2^a f(t) = f''(t).$$

(2) Pour l'équation (1.1). Si $\beta = 1$ on trouve :

$$D_{\alpha+\beta}^a f(t) = D_\alpha^a (D_\beta^a f(t)).$$

Proposition 1.3. [10][13] Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$. Si f est $(n+1)$-différentiable pour tout $t > 0$, Alors on peut écrire l'égalité suivante :

$$D_\alpha f(t) = t^{\lceil\alpha\rceil-\alpha} f^{\lceil\alpha\rceil}(t) = t^{n+1-\alpha} f^{(n+1)}(t),$$

avec $n < \alpha \leq n+1$ et $f^{(n+1)}$ est la dérivée d'ordre $(n+1)$ de f.

Démonstration. On suppose que $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est $(n+1)$-différentiable, d'après définition 1.5 pour $n < \alpha \leq n+1$ on obtient :

$$\begin{aligned}
D_\alpha f(t) &= \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \frac{f^{(\lceil\alpha\rceil-1)}(t+\varepsilon t^{\lceil\alpha\rceil-\alpha}) - f^{(\lceil\alpha\rceil-1)}(t)}{\varepsilon} \\
&= \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \frac{f^{(\lceil\alpha\rceil-1)}(t+\varepsilon t^{\lceil\alpha\rceil-\alpha}) - f^{(\lceil\alpha\rceil-1)}(t)}{\varepsilon t^{\lceil\alpha\rceil-\alpha}} t^{\lceil\alpha\rceil-\alpha} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f^{(\lceil\alpha\rceil-1)}(t+h) - f^{(\lceil\alpha\rceil-1)}(t)}{h} t^{\lceil\alpha\rceil-\alpha} \qquad (h = \varepsilon t^{\lceil\alpha\rceil-\alpha}) \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f^{(n)}(t+h) - f^{(n)}(t)}{h} t^{1+n-\alpha} \\
&= t^{1+n-\alpha} f^{(n+1)}(t).
\end{aligned}$$

Car $\lceil\alpha\rceil = n+1$ (où $n \in \mathbb{N}$). □

1.3 Quelques théorèmes sur la dérivée conformable

Dans la suite nous présentons quelques théorèmes qui sont très importants pour la dérivée conformable d'ordre $0 < \alpha \leq 1$.

Théorème de Rolle

Théorème 1.5. [13][17] Soit $a > 0, b \in]a, +\infty[$, $\alpha \in]0, 1[$ et $f : [a, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ qui vérifie les hypothèses suivantes :

(H1) f est continue sur l'intervalle $[a, b]$.

(H2) f est $\alpha-$différentiable pour $\alpha \in]0, 1[$.

(H3) $f(a) = f(b)$ avec $b \in]a, +\infty[$. Alors il existe $c \in [a, b]$ tel que :

$$D_\alpha f(c) = 0.$$

Démonstration. Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et $f(a)=f(b)$, on suppose que $c\in]a,b[$ est un point d'extremum local.

Si c est un point minimum local, alors :

$$D_\alpha f(c)=\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0^+}\frac{f(c+\varepsilon c^{1-\alpha})-f(c)}{\varepsilon}=\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0^-}\frac{f(c+\varepsilon c^{1-\alpha})-f(c)}{\varepsilon}.$$

Mais, la première limite est positive et la deuxième limite est négative.

Donc $D_\alpha f(c)=0$. On trouve le même résultat si c un point de maximum local. □

Théorème de valeur moyenne

Théorème 1.6. [2][13][15] Soit $a>0, b\in]a,+\infty[$ et $f:[a,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction qui satisfait :

1. f est continue sur $[a,b]$.
2. f est α-différentiable pour $\alpha\in]0,1[$. Alors il existe un point $c\in]a,b[$, telle que :

$$D_\alpha f(c)=\frac{f(b)-f(a)}{\frac{1}{\alpha}b^\alpha-\frac{1}{\alpha}a^\alpha},$$

Démonstration. Soit la fonction P définie sur $[a,b]$ par :

$$P(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{\frac{1}{\alpha}b^\alpha-\frac{1}{\alpha}a^\alpha}\left(\frac{1}{\alpha}x^\alpha-\frac{1}{\alpha}a^\alpha\right).$$

On a P est continue sur $[a,b]$ et α-différentiable pour $\alpha\in]0,1[$ (puisque f est continue sur $[a,b]$ et α-différentiable), et $P(a)=P(b)=0$ avec

$$D_\alpha P(t)=D_\alpha f(t)-\frac{f(b)-f(a)}{\frac{1}{\alpha}b^\alpha-\frac{1}{\alpha}a^\alpha}.$$

Donc d'après Théorème 1.5 (Théorème de Rolle), il existe $c\in]a,b[$ telle que :

$$D_\alpha P(c)=0,\quad \text{d'où}\quad D_\alpha(c)=\frac{f(b)-f(a)}{\frac{1}{\alpha}b^\alpha-\frac{1}{\alpha}a^\alpha}.$$

□

Corollaire 1.1. [2][15] Soit $a>0, b\in]a,+\infty[, \alpha\in]0,1]$ et $f,g:[a,+\infty[\longrightarrow\mathbb{R}$. Pour $0<\alpha\leq 1$, on a $D_\alpha f(t)=D_\alpha g(t)$ pour tout $t\in]a,b[$. Alors il existe une constante c telle que :

$$f(t)=g(t)+c.$$

Théorème 1.7. [17] Soit $a > 0, b \in]a, +\infty[, \alpha \in]0, 1]$ et $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions qui vérifient les conditions suivantes :

- f, g sont continues sur $[a, b]$.
- f, g sont différentiables sur (a, b).
- $D_\alpha g(t) \neq 0$ pour tout $t \in (a, b)$.
- $g(a) \neq g(b)$.
- $D_\alpha f(t)$ et $D_\alpha g(t)$ non nulles simultanément sur $[a, b]$.

Alors, il existe $c \in [a, b]$ telle que :

$$\frac{D_\alpha f(c)}{D_\alpha g(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Proposition 1.4. [13] Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ α-différentiable, Alors :

(i) Si $D_\alpha f$ est bornée sur l'intervalle $[a, b]$ où $a > 0$, alors f est uniformément continue et bornée sur $[a, b]$.

(ii) Si $D_\alpha f$ est bornée sur l'intervalle $[a, b]$ et continue en a, alors f est uniformément continue et bornée sur $[a, b]$.

Théorème 1.8. [17] Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ avec $a > 0$ pour $\alpha \in]0, 1[$, supposons que :

(i) f est continue sur l'intervalle $[a, b]$.

(ii) f est α-différentiable sur $[a, b[$.

Donc :

1. Si $D_\alpha f(t) \geq 0$ pour tout $t \in]a, b[$, alors la fonction f est croissante sur $[a, b]$.
2. Si $D_\alpha f(t) \leq 0$ pour tout $t \in]a, b[$, alors la fonction f est décroissante sur $[a, b]$.
3. Si $D_\alpha f(t) = 0$ pour tout $t \in]a, b[$, alors la fonction f est constante sur $[a, b]$.

Exemple 1.4. Soit $f : [\frac{1}{2}, 3] \to \mathbb{R}$ tel que $f(t) = t^3 - 3t + 2$. Pour $0 < \alpha \leq 1$, on a :

$$D_{\alpha}^{\frac{1}{2}} f(t) = 3t^{1-\alpha}(t^2 - 1),$$

si :

$$D_{\alpha}^{a} f(t) = 0 \Longleftrightarrow 3t^{1-\alpha}(t^2 - 1) = 0,$$

alors $t = 1, \quad t = -1$ ou $t = 0$.

Tout les nombres inférieurs à 0 ne seront pas pris en compte parce que $0 \notin [\frac{1}{2}, 3]$. Donc :

1. Pour $t \in [\frac{1}{2}, 1]$, on a

$$t - 1 < 0 \text{ et } t + 1 > 0 \quad \text{qui implique} \quad D_{\alpha}^{a} f(t) \leq 0,$$

   alors f est une fonction décroissante sur $[\frac{1}{2}, 1]$.

2. Pour $t \in [1, 3]$, on a

$$t - 1 \geq 0 \text{ et } t + 1 > 0 \quad \text{qui implique} \quad D_{\alpha}^{a} f(t) \geq 0, \text{ alors :}$$

   f est une fonction croissante sur $[1, 3]$.

CHAPITRE 2

L'INTÉGRALE CONFORMABLE ET LA TRANSFORMATION DE LAPLACE CONFORMABLE

Dans ce chapitre, nous présentons quelques définitions et résultats concernant l'intégrale fractionnaire conformable et la transformation de Laplace conformable.

2.1 L'intégrale conformable

Définition 2.1. [1][13] Soit $f : [a, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue pour tout $t \geq a$, on définie l'intégrale fractionnaire conformable d'ordre $0 < \alpha \leq 1$ par la formule suivante :

- Gauche

$$I_\alpha^a f(t) = \mathbf{I}_1((t-a)^{\alpha-1} f)(t) = \int_a^t \frac{f(s)}{(s-a)^{1-\alpha}} ds = \int_a^t (s-a)^{\alpha-1} f(s) ds.$$

Si $a = 0$, on note I_α^a par I_α.

- Droite

$$^b I_\alpha f(t) = \mathbf{I}_1((b-t)^{\alpha-1} f)(t) = \int_t^b \frac{f(s)}{(b-s)^{1-\alpha}} ds = \int_t^b (b-s)^{\alpha-1} f(s) ds.$$

On rappelle que $\mathbf{I}_1$ est l'intégrale usuelle d'une fonction f donnée par :

$$\mathbf{I}_1 f(t) = \int_a^t f(s) ds.$$

Remarque 2.1. Si $\alpha = 1$, alors l'intégrale conformable $I_\alpha f(t)$ est l'intégrale usuelle $\mathbf{I}_1 f(t)$.

Le Théorème suivant donne l'intégrale conformable des fonctions puissances et polynomiales.

Théorème 2.1. [13] Soit $t > 0$ et $p \in \mathbb{R}, \alpha \in]0, 1[$.

- Si $f(t) = t^p$, alors : $I_\alpha f(t) = \dfrac{t^{\alpha+p}}{\alpha + p}$ pour tout $p \in \mathbb{R}$ et $\alpha \neq -p$.
- Si $f(t) = \sum_{k=0}^{n} b_k t^k$, alors :

$$I_\alpha f(t) = \sum_{k=0}^{n} b_k I_\alpha(t^k) = \sum_{k=0}^{n} b_k \frac{t^{k+\alpha}}{k+\alpha}.$$

- Si $f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k$ est une série uniformément convergente, alors :

$$I_\alpha f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k I_\alpha(t^k) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \frac{t^{k+\alpha}}{k+\alpha}.$$

Démonstration. • Soit $f(t) = t^p$ pour $t > 0$ tel que $p \in \mathbb{R}, \alpha \in]0, 1]$, alors :

$$\begin{aligned} I_\alpha(f(t)) &= \int_0^t s^{\alpha-1} s^p ds \\ &= \int_0^t s^{p+\alpha-1} ds \\ &= \left[\frac{1}{\alpha+p} t^{\alpha+p}\right]_0^t \\ &= \frac{t^{\alpha+p}}{\alpha+p}. \end{aligned}$$

Donc $I_\alpha(f(t)) = \dfrac{t^{\alpha+p}}{\alpha+p}$ pour tout $p \in \mathbb{R}$ et $\alpha \neq -p$.

- Soit $f(t) = \sum_{k=0}^{n} b_k t^k$, on a :

$$\begin{aligned} I_\alpha(f(t)) &= \int_0^t \frac{1}{s^{1-\alpha}} \sum_{k=0}^{n} b_k s^k ds \\ &= \sum_{k=0}^{n} b_k \int_0^t \frac{1}{s^{1-\alpha}} s^k ds \\ &= \sum_{k=0}^{n} b_k I_\alpha(t^k) \\ &= \sum_{k=0}^{n} b_k \frac{t^{k+\alpha}}{k+\alpha}. \end{aligned}$$

- Soit $f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k$ une série uniformément convergente. Alors :

$$\begin{aligned} I_\alpha(f(t)) &= \int_0^t \frac{1}{s^{1-\alpha}} \sum_{k=0}^{\infty} b_k s^k ds \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} b_k \int_0^t \frac{1}{s^{1-\alpha}} s^k ds \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} b_k I_\alpha(t^k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} b_k \frac{t^{k+\alpha}}{k+\alpha}. \end{aligned}$$

□

Exemple 2.1. Soit $\alpha = \frac{1}{2}$. En utilisant le développement limités pour les fonctions suivantes, on obtient :

1. Soit $f(t) = \sin t = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}$, donc :

$$I_{\frac{1}{2}}(\sin t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+\frac{3}{2}}}{(2n+\frac{3}{2})((2n+1)!)}.$$

2. Soit $f(t) = \cos t = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k)!}$, donc :

$$I_{\frac{1}{2}}(\cos t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+\frac{1}{2}}}{(2n+\frac{1}{2})((2n)!)}.$$

3. Soit $f(t) = e^t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}$, donc :

$$I_{\frac{1}{2}}(e^t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n+\frac{1}{2}}}{(n+\frac{1}{2})(n!)}.$$

Définition 2.2. [1][23] Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$, on définit l'intégral fractionnaire conformable d'ordre $n < \alpha \leq n+1$ commençant par a par :

$$I_{\alpha}^{a} f(t) = \mathbf{I}_{n+1}^{a}((t-a)^{\beta-1} f)(t) = \frac{1}{n!} \int_{a}^{t} (t-s)^{n} (s-a)^{\beta-1} f(s) ds,$$

avec $\beta = \alpha - n$ ou d'une manière équivalente :

$$I_{\alpha} f(t) = \mathbf{I}_{n+1}\Big((t-a)^{\alpha-\lceil\alpha\rceil} f\Big)(t) = \frac{1}{n!} \int_{0}^{t} (t-s)^{n} (s-a)^{\alpha-\lceil\alpha\rceil} f(s) ds,$$

avec $\mathbf{I}_n$ est l'opérateur $\mathbf{I}_1$(l'intégral usuelle) d'ordre n $(n \in \mathbb{N})$.

Remarque 2.2. [1] Si $\alpha = n+1$, alors $\beta = \alpha - n = n+1-n = 1$ et

$$I_{\alpha}^{a} f(t) = \mathbf{I}_{n+1}^{a} f(t) = \frac{1}{n!} \int_{a}^{t} (t-s)^{n} f(s) ds,$$

qui est l'intégrale de Cauchy d'ordre $n+1$ (où $n \in \mathbb{N}$) de la fonction f sur $]a, t]$.

Remarque 2.3. [1] Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$. L'intégrale de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha > 0$ de la fonction f en point a est définie par :

$$\mathbf{I}_{\alpha}^{a} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{a}^{t} (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds,$$

on constante que $I_{\alpha}^{a} f(t) = \mathbf{I}_{\alpha}^{a} f(t)$ pour $\alpha = n+1, \quad n = 0, 1, 2, ...$

Dans le cas où $a = 0$, la définition précédente devient :

Définition 2.3. [23] Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$. Pour $n < \alpha \leq n+1$, on définit l'intégrale fractionnaire conformable d'ordre α la formule :

$$I_{\alpha} f(t) = \mathbf{I}_{n+1}\Big(t^{\alpha-\lceil\alpha\rceil} f\Big)(t) = \int_{0}^{t} s^{\alpha-\lceil\alpha\rceil} f(s) ds = \int_{0}^{t} s^{\alpha-n-1} f(s) ds.$$

Avec $\mathbf{I}_n$ est l'opérateur $\mathbf{I}_1$(l'intégral usuelle) d'ordre n $(n \in \mathbb{N})$.

Proposition 2.1. [1] Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ et $0 < \alpha, \beta \leq 1$ telles que $1 < \alpha + \beta \leq 2$. Alors :

$$I_\alpha I_\beta f(t) = \frac{t^\beta}{\beta} I_\alpha f(t) + \frac{1}{\beta} I_{\alpha+\beta} f(t) - \frac{t}{\beta} \int_0^t s^{\alpha+\beta-2} f(s) ds. \tag{2.1}$$

Démonstration. Soit $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ et $0 < \alpha, \beta \leq 1$, avec $1 < \alpha + \beta \leq 2$. D'après Définition 2.1 et Définition 2.2, on a :

$$\begin{aligned} I_{\alpha+\beta} f(t) = (\mathbf{I}_2 t^{\alpha+\beta-\lceil \alpha+\beta \rceil} f)(t) &= \mathbf{I}_2 t^{\alpha+\beta-2} f(t) \\ &= (\mathbf{I}_2 s^{\alpha+\beta-2} f(s))(t) = \int_0^t (t-s) s^{\alpha+\beta-2} f(s) ds \\ &= t \int_0^t s^{\alpha+\beta-2} f(s) ds - \int_0^t s^{\alpha+\beta-1} f(s) ds \end{aligned} \tag{2.2}$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} I_\alpha I_\beta f(t) &= \int_0^t \Big(\int_0^{t_1} f(s) s^{\alpha-1} ds \Big) t_1^{\beta-1} dt_1 \\ &= \int_0^t f(s) s^{\alpha-1} \Big(\int_s^t t_1^{\beta-1} dt_1 \Big) ds \\ &= \int_0^t f(s) s^{\alpha-1} \Big[\frac{t^\beta}{\beta} - \frac{s^\beta}{\beta} \Big] ds \\ &= \frac{t^\beta}{\beta} \int_0^t f(s) s^{\alpha-1} ds - \frac{1}{\beta} \int_0^t f(s) s^{\alpha+\beta-1} ds \\ &= \frac{t^\beta}{\beta} I_\alpha f(t) + \frac{1}{\beta} \Big[I_{\alpha+\beta} f(t) - t \int_0^t s^{\alpha+\beta-2} f(s) ds \Big] \\ &= \frac{t^\beta}{\beta} I_\alpha f(t) + \frac{1}{\beta} I_{\alpha+\beta} f(t) - \frac{t}{\beta} \int_0^t s^{\alpha+\beta-2} f(s) ds. \end{aligned} \tag{2.3}$$

□

Remarque 2.4. [1] Pour l'équation (2.1), si $\alpha = \beta = 1$ alors $\mathbf{I}_1 \mathbf{I}_1 f(t) = \mathbf{I}_2 f(t)$.

2.1.1 La propriété inverse

Proposition 2.2. [1][13] Soit $f : [a, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $0 < \alpha \leq 1$. Si l'intégrale fractionnaire conformable (gauche) $I_\alpha^a f(t)$ existe. Alors, pour tout $t > a$, on a :

$$D_\alpha^a [I_\alpha^a f(t)] = f(t).$$

Démonstration. On suppose que f est une fonction continue pour tout $t > a$ et $I_\alpha^a f(t)$ existe. Donc $I_\alpha^a f(t)$ est différentiable.

D'après Proposition 1.2. On a pour $0 < \alpha \leq 1$:

$$\begin{aligned} D_\alpha^a[I_\alpha^a f(t)] &= (t-a)^{1-\alpha}\frac{d}{dt}[I_\alpha^a(f(t))] \\ &= (t-a)^{1-\alpha}\frac{d}{dt}\int_a^t \frac{f(s)}{(s-a)^{1-\alpha}}ds \\ &= (t-a)^{1-\alpha}\frac{f(t)}{(t-a)^{1-\alpha}}. \end{aligned}$$

Donc

$$D_\alpha^a[I_\alpha^a f(t)] = f(t).$$

□

Proposition 2.3. [1][13] Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ et $f^{(n)}(t)$ continue. Donc pour tout $t > a$ et $n < \alpha \leq n+1$, on a :

$$D_\alpha^a[I_\alpha^a f(t)] = f(t).$$

Démonstration. Pour $n < \alpha \leq n+1$ (où $n \in \mathbb{N}$), posons $\beta = \alpha - n$, alors $0 < \beta \leq 1$. D'après Définition 2.2, on a :

$$\begin{aligned} D_\alpha^a I_\alpha^a f(t) = D_\beta^a\left(\frac{d^n}{dt^n} I_\alpha^a f(t)\right) &= D_\beta^a\left(\frac{d^n}{dt^n}\mathbf{I}_{n+1}^a((t-a)^{\beta-1}f(t)\right) \\ &= D_\beta^a(\mathbf{I}_1^a((t-a)^{\beta-1}f(t)) \\ &= D_\beta^a I_\beta^a f(t). \end{aligned}$$

Avec $D_\alpha^a I_\alpha^a f(t) = D_\beta^a I_\beta^a f(t) = f(t)$. (d'après Proposition 2.2) □

D'une manière analogue on peut montrer le résultat suivant :

Proposition 2.4. [1] Soit $f :]-\infty, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue pour tout $b \geq 0$ et $b < t$. Alors l'intégrale fractionnaire conformable (droite) ${}^bI_\alpha f(t)$ existe et on a :

$${}^bD_\alpha[{}^bI_\alpha f](t) = f(t),$$

avec $n < \alpha \leq n+1$ (où $n \in \mathbb{N}$).

2.1.2 L'intégrale conformable de la dérivée conformable

Théorème 2.2. [2][5][22] Soit $f : [a, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ α-différentiable tel que $0 < \alpha \leq 1$. Alors pour tout $t > a$, on a :

$$I_\alpha^a[D_\alpha^a f(t)] = f(t) - f(a).$$

Démonstration. D'après Définition 2.2, pour $0 < \alpha \leq 1$ on a :

$$\begin{aligned}
I_\alpha^a[D_\alpha^a(f(t))] &= \int_a^t (s-a)^{\alpha-1} D_\alpha^a f(s) ds \\
&= \int_a^t (s-a)^{\alpha-1} \frac{df}{dt}(s)(s-a)^{1-\alpha} ds \\
&= \int_a^t \frac{df}{ds}(s) ds \\
&= \Big[f(s)\Big]_a^t \\
&= f(t) - f(a).
\end{aligned}$$

Donc $\quad I_\alpha^a[D_\alpha^a f(t)] = f(t) - f(a).$ □

Proposition 2.5. [1] Soit $\alpha \in]n, n+1]$ et $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction $(n+1)$-différentiable pour $t > a$. Alors :

$$I_\alpha^a D_\alpha^a f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^k}{k!}.$$

Démonstration. Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ $(n+1)$-différentiable pour tout $t > a$. Pour $n < \alpha \leq n+1$ et d'après la définition 2.2 et Théorème 1.2, on obtient :

$$I_\alpha^a D_\alpha^a f(t) = I_{n+1}^a((t-a)^{\beta-1}(t-a)^{1-\beta} f^{(n+1)}(t)) = \mathbf{I}_{n+1}^a f^{(n+1)}(t) = \frac{1}{n!}\int_a^t (t-s)^n f^{(n+1)}(s) ds.$$

Utilisons la formule de Taylor avec reste intégrale, on a :

$$I_\alpha^a D_\alpha^a f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^k}{k!}.$$

□

On a un résultat analogue dans le cas ou $t \in]-\infty, b]$.

Proposition 2.6. [1] Soit $\alpha \in]n, n+1]$ et $f :]-\infty, b] \to \mathbb{R}$ une fonction $(n+1)$-différentiable pour $t < b$. Alors :

$$^{b}I_{\alpha}^{b}D_{\alpha}f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k f^{(k)}(b)(b-t)^k}{k!}.$$

2.1.3 L'intégration par parties

Dans la suite on présente une formule d'intégration par parties en utilisant la dérivée conformable.

Théorème 2.3. [1] Soit $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que fg est différentiable. Alors :

$$\int_a^b f(s)D_{\alpha}^{a}g(s)(s-a)^{\alpha-1}ds = fg|_a^b - \int_a^b g(s)D_{\alpha}^{a}f(s)(s-a)^{\alpha-1}ds,$$

où $0 < \alpha \leq 1$.

Démonstration. D'après Théorème 1.1 (2), on a :

$$D_{\alpha}^{a}(fg)(t) = f(t)D_{\alpha}^{a}g(t) + g(t)D_{\alpha}^{a}f(t).$$

Appliquons l'intégrale I_{α}^{a}, on obtient :

$$I_{\alpha}^{a}fg(t) = I_{\alpha}^{a}f(D_{\alpha}^{a}g)(t) + I_{\alpha}^{a}(gD_{\alpha}^{a}f)(t).$$

Utilisant la définition de I_{α}^{a} et Théorème 2.2, on obtient :

$$fg(t) - fg(a) = \int_a^t f(s)D_{\alpha}^{a}g(s)(s-a)^{\alpha-1}ds + \int_a^t g(s)D_{\alpha}^{a}f(s)(s-a)^{\alpha-1}ds.$$

Posons $t = b$ on obtient le résultat du Théorème. □

Proposition 2.7. [1] Soit $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$. Pour $0 < \alpha \leq 1$, on a :

$$\int_a^b I_{\alpha}^{a}f(t)g(t)(b-t)^{\alpha-1}dt = \int_a^b f(t)^{b}I_{\alpha}g(t)(t-a)^{\alpha-1}dt.$$

Démonstration. D'après la définition 2.1 pour $0 < \alpha \leq 1$, on a :

$$\begin{aligned}\int_a^b I_\alpha^a f(t)g(t)(t-a)^{\alpha-1}dt &= \int_a^b (\int_a^t (s-a)^{\alpha-1} f(s)ds)g(t)(b-t)^{\alpha-1}dt \\ &= \int_a^b f(s)(\int_s^b (b-t)^{\alpha-1} g(t)dt)(s-a)^{\alpha-1}ds \\ &= \int_a^b f(s)^b I_\alpha g(s)(s-a)^{\alpha-1}ds \\ &= \int_a^b f(t)^b I_\alpha g(t)(t-a)^{\alpha-1}dt.\end{aligned}$$

□

Théorème 2.4. [1] Soit $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions différentiables. Pour $0 < \alpha \leq 1$, on a :

$$\int_a^b D_\alpha^a f(t)g(t)(t-a)^{\alpha-1}dt = \int_a^b f(t)^b D_\alpha g(t)(b-t)^{\alpha-1}dt + f(t)g(t)|_a^b.$$

Démonstration. Comme $g : [a, b]$ est différentiable, d'après Proposition 2.6 on a pour $0 < \alpha \leq 1$:

$${}^b I_\alpha^b D_\alpha g(t) = g(t) - g(b).$$

donc $g(t) =^b I_\alpha^b D_\alpha g(t) + g(b)$, par conséquent :

$$\int_a^b D_\alpha^a f(t)g(t)(t-a)^{\alpha-1}dt = \int_a^b D_\alpha^a f(t)^b I_\alpha^b D_\alpha g(t)(t-a)^{\alpha-1}dt + g(b)\int_a^b D_\alpha^a f(t)(t-a)^{\alpha-1}dt.$$

Appliquant Proposition 2.7 et la définition de ${}^b I_\alpha$, on obtient :

$$\int_a^b D_\alpha^a f(t)g(t)(t-a)^{\alpha-1}dt = \int_a^b I_\alpha^a D_\alpha^a f(t)^b D_\alpha g(t)(b-t)^{\alpha-1} + g(b) I_\alpha^a f(t).$$

Sachant que $I_\alpha^a D_\alpha^a f(t) = f(t) - f(a)$, on obtient :

$$\begin{aligned}\int_a^b D_\alpha^a f(t)g(t)(t-a)^{\alpha-1}dt &= \int_a^b f(t)^b D_\alpha g(t)(b-t)^{\alpha-1}dt - \int_a^b f(a)^b D_\alpha g(t)(b-t)^{\alpha-1}dt \\ &+ g(b)(f(b) - f(a)) \\ &= \int_a^b f(t)^b D_\alpha g(t)(b-t)^{\alpha-1}dt - f(a)[{}^b I_\alpha^b D_\alpha g(a)] + g(b)f(b) - g(b)f(a).\end{aligned}$$

Remplaçant ${}^b I_\alpha^b D_\alpha g(a)$ par $g(a) - g(b)$, on obtient le résultat du Théorème. □

2.1.4 Théorème de valeur moyenne pour l'intégrale conformable

Soit $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$, on définit l'intégrale conformable d'ordre α pour $t\in[a,b]$ par :

$$I_{\alpha,a}f(t)=\int_a^t\frac{f(s)}{s^{1-\alpha}}ds,$$

avec $0<\alpha\leq 1$.

Théorème 2.5. [17] Soit $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction continue sur l'intervalle $[a,b]\subset[0,+\infty[$ et $0<\alpha\leq 1$. Alors il existe $c\in[a,b]$ tel que :

$$f(c)=\left(\frac{1}{\alpha}b^\alpha-\frac{1}{\alpha}a^\alpha\right)\int_a^b\frac{f(t)}{t^{1-\alpha}}dt.$$

Démonstration. Comme f est continue sur $[a,b]$ donc $I_{\alpha,a}f$ est continue et α-différentiable sur $[a,b]$ et

$$D_\alpha[I_{\alpha,a}f(t)]=f(t).$$

On vérifie cette égalité d'une manière analogue à Proposition 2.2. D'après le théorème des valeurs moyenne 1.6 il existe $c\in[a,b]$ tel que :

$$I_{\alpha,a}f(b)-I_{\alpha,a}f(a)=D_\alpha[I_\alpha f(c)]\Big(\frac{1}{\alpha}b^\alpha-\frac{1}{\alpha}a^\alpha\Big).$$

Mais comme $D_\alpha[I_\alpha f(c)]=f(c)$ et

$$I_{\alpha,a}f(b)=\int_a^b\frac{f(t)}{t^{1-\alpha}}dt$$

,

$$I_{\alpha,a}f(a)=\int_a^b\frac{f(t)}{t^{1-\alpha}}dt=0,$$

on obtient

$$\int_a^b\frac{f(t)}{t^{1-\alpha}}dt=f(c)\Big(\frac{1}{\alpha}b^\alpha-\frac{1}{\alpha}a^\alpha\Big).$$

□

Théorème 2.6. [17] Soient $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues pour tout $t \in [a, b]$ et $0 < \alpha \leq 1$. On a les propriétés suivantes :

1. $$I_{\alpha,a}(\lambda f + \mu g)(t) = \lambda I_{\alpha,a}f(t) + \mu I_{\alpha,a}g(t), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

2. Si $f(t) \geq 0$ pour tout $t \in [a, b]$, alors
$$I_{\alpha,a}f(t) \geq 0.$$

3. Si $f(t) \geq g(t)$ pour tout $t \in [a, b]$, alors :
$$I_{\alpha,a}f(t) \geq I_{\alpha,a}g(t).$$

Théorème 2.7. [17] Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors pour tout $t > a$ et $0 < \alpha \leq 1$, on a :
$$\mid I_{\alpha,a}f(t) \mid \leq I_{\alpha,a}(\mid f \mid)(t).$$

Démonstration. Puisque f est une fonction continue, on a :
$$\begin{aligned}
\mid I_{\alpha,a}f(t) \mid &= \mid \int_a^t \frac{f(s)}{s^{1-\alpha}} ds \mid \\
&\leq \int_a^t \mid \frac{f(s)}{s^{1-\alpha}} \mid \\
&\leq \int_a^t \frac{\mid f(s) \mid}{s^{1-\alpha}} \\
&\leq I_{\alpha,a}(\mid f \mid)(t).
\end{aligned}$$
□

Corollaire 2.1. [23] Soit $0 < a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour $0 < \alpha \leq 1$ si :
$$M = \sup_{t \in [a,b]} \mid f(t) \mid,$$
alors pour tout $t \in [a, b]$ et $0 < \alpha \leq 1$, on a :
$$\mid I_{\alpha,a}f(t) \mid \leq M \Big(\frac{t^\alpha}{\alpha} - \frac{a^\alpha}{\alpha} \Big).$$

Démonstration. D'après Théorème 2.7, pour $t \in [a, b]$ et $0 < \alpha \leq 1$ on a :

$$\begin{aligned}
|I_{\alpha,a} f(t)| &\leq I_{\alpha,a}(|f|)(t) \\
&\leq \int_a^t \frac{|f(s)|}{s^{1-\alpha}} ds \\
&\leq M \int_a^t s^{\alpha-1} ds \\
&\leq M\Big(\frac{t^\alpha}{\alpha} - \frac{a^\alpha}{\alpha}\Big)
\end{aligned}$$

□

2.2 La transformation de Laplace conformable

Dans cette section, nous présentons quelques théorèmes de base pour la transformation de Laplace conformable qui est importante pour la résolution de certaines équations fractionnaires conformables.

Définition 2.4. [4] [16] Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$, pour $0 < \alpha \leq 1$, on définit la transformation de Laplace conformable de la fonction f par la formule :

$$\mathcal{L}_\alpha^a\{f(t)\} = \mathcal{F}_\alpha^a(s) = \int_a^\infty e^{-s\frac{(t-a)^\alpha}{\alpha}} f(t)(t-a)^{\alpha-1} dt.$$

Si $a = 0$, on a :

$$\mathcal{L}_\alpha\{f(t)\} = \mathcal{F}_\alpha(s) = \int_0^\infty e^{-s\frac{t^\alpha}{\alpha}} f(t) t^{\alpha-1} dt. \tag{2.4}$$

En particulier, si $\alpha = 1$, alors l'équation (2.4) est équivalente à la définition de la transformation Laplace usuelle :

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{F}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt.$$

Théorème 2.8. [4] Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction différentiable, pour $0 < \alpha \leq 1$. Alors pour tout $s > 0$, on a :

$$\mathcal{L}_\alpha\{D_\alpha f(t)\} = s\mathcal{F}_\alpha(s) - f(0), \quad \forall s > 0.$$

Démonstration. Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction différentiable. En utilisant Définition 2.4 et on intègre sur l'intervalle $[0,\infty[$, on obtient pour tout $s > 0$:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\alpha\{D_\alpha f(t)\}(s) &= \int_0^\infty e^{-s\frac{t^\alpha}{\alpha}} D_\alpha f(t) t^{\alpha-1} dt \\ &= \int_0^\infty e^{-s\frac{t^\alpha}{\alpha}} t^{1-\alpha} f'(t) t^{\alpha-1} dt \\ &= \int_0^\infty e^{-s\frac{t^\alpha}{\alpha}} f'(t) dt.\end{aligned}$$

En utilisant l'intégration par partie, on pose :

$$\begin{aligned} u = e^{-s\frac{t^\alpha}{\alpha}} \qquad & du = -st^{\alpha-1}e^{-s\frac{t^\alpha}{\alpha}} dt \\ dv = f'(t)dt \qquad & v = f(t),\end{aligned}$$

Donc on a :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\alpha\{D_\alpha f(t)\}(s) &= \left[e^{-s\frac{t^\alpha}{\alpha}} f(t)\right]_0^\infty - \int_0^\infty -st^{\alpha-1}e^{-s\frac{t^\alpha}{\alpha}} f(t) dt \\ &= [0 - f(0)] + s\int_0^\infty e^{-s\frac{t^\alpha}{\alpha}} f(t) t^{\alpha-1} dt \\ &= s\mathcal{F}_\alpha(s) - f(0).\end{aligned}$$

Alors : $\quad \mathcal{L}_\alpha\{D_\alpha f(t)\}(s) = s\mathcal{F}_\alpha(s) - f(0), \quad \forall s > 0.$ □

Le résultat suivant présente la relation entre la transformation de Laplace usuelle et la transformation de Laplace conformable.

Théorème 2.9. [4][22] Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ et $\alpha \in]0,1]$. Pour tout $S > 0$, on a :

$$\mathcal{L}_\alpha\{f(t)\}(s) = \mathcal{L}\{f((\alpha t)^{\frac{1}{\alpha}})\}(s),$$

où $\mathcal{L}$ est la transformation de Laplace usuelle définie par :

$$\mathcal{F}(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$$

Démonstration. Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$, et $\alpha \in]0,1]$. Pour $s > 0$, on a d'après définition 2.4 :

$$\mathcal{L}_\alpha\{f(t)\}(s) = \int_0^\infty e^{-s\frac{t^\alpha}{\alpha}} f(t) t^{\alpha-1} dt,$$

on pose : $v = \frac{t^\alpha}{\alpha}$, alors :

$$\mathcal{F}_\alpha(s) = \int_0^\infty e^{-sv} f((\alpha v)^{\frac{1}{\alpha}})dv = \mathcal{L}\{f((\alpha v)^{\frac{1}{\alpha}})\}(s).$$

□

Théorème 2.10. [22] Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ pour tout $a, p \in \mathbb{R}$ et $0 < \alpha \leq 1$. Si $\mathcal{F}_\alpha(s) = \mathcal{L}_\alpha\{f(t)\}(s)$ existe pour tout $s > 0$, alors :

(i) $\mathcal{L}_\alpha\{c\}(s) = \dfrac{c}{s}, \quad s > 0.$

(ii) $\mathcal{L}_\alpha\{t^p\}(s) = \alpha^{\frac{p}{\alpha}} \dfrac{\Gamma(1 + \frac{p}{\alpha})}{s^{1+\frac{p}{\alpha}}}, \quad s > 0.$

(iii) $\mathcal{L}_\alpha\{e^{\frac{at^\alpha}{\alpha}}\}(s) = \dfrac{1}{s-a}, \quad s > a.$

(iv) $\mathcal{L}_\alpha\{\sin(\dfrac{at^\alpha}{\alpha})\}(s) = \dfrac{a}{s^2 + a^2}, \quad s > 0.$

(v) $\mathcal{L}_\alpha\{\cos(\dfrac{at^\alpha}{\alpha})\}(s) = \dfrac{s}{s^2 + a^2}, \quad s > 0.$

(vi) $\mathcal{L}_\alpha\left\{\sinh(\dfrac{at^\alpha}{\alpha})\right\}(s) = \dfrac{a}{s^2 - a^2}, \quad s > |a|.$

(vii) $\mathcal{L}_\alpha\{\cosh(\dfrac{at^\alpha}{\alpha})\}(s) = \dfrac{s}{s^2 - a^2}, \quad s > |a|.$

Théorème 2.11. [4][22] Soit $f, g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$, $\lambda, \mu, a \in \mathbb{R}$ et $0 < \alpha \leq 1$. Si $\mathcal{F}_\alpha(s) = \mathcal{L}_\alpha\{f(t)\}(s)$ existe pour tout $s > 0$, alors :

1. $\mathcal{L}_\alpha\{\lambda f(t) + \mu g(t)\}(s) = \lambda \mathcal{F}_\alpha(s) + \mu \mathcal{G}_\alpha, \quad s > 0.$
2. $\mathcal{L}_\alpha\{e^{-a\frac{t^\alpha}{\alpha}} f(t)\}(s) = \mathcal{F}_\alpha(s + a), \quad s > |a|.$
3. $\mathcal{L}_\alpha\{I_\alpha f(t)\}(s) = \dfrac{\mathcal{F}_\alpha(s)}{s}, \quad s > 0.$
4. $\mathcal{L}_\alpha\left\{\dfrac{t^{n\alpha}}{\alpha^n} f(t)\right\}(s) = (-1)^n \dfrac{d^n}{ds^n} \mathcal{F}_\alpha(s), \quad s > 0.$
5. $\mathcal{L}_\alpha\{(f*g)(t)\}(s) = \mathcal{F}_\alpha(s)\mathcal{G}_\alpha(s), \quad s > 0.$ Avec $f*g$ est le produit de convolution du f et g.

Démonstration. Soient $f, g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ et $0 < \alpha \leq 1$.

2. D'après le Théorème 2.9, on a :

$$\mathcal{L}_\alpha\Big\{e^{-a\frac{t^\alpha}{\alpha}} f(t)\Big\} = \mathcal{L}\Big\{e^{\frac{-a}{\alpha}(\alpha t)^{\alpha\cdot\frac{1}{\alpha}}} f(\alpha t)^{\frac{1}{\alpha}}\Big\} = \mathcal{L}\Big\{e^{-at} f(\alpha t)^{\frac{1}{\alpha}}\Big\}$$
$$= \mathcal{L}\Big\{f(\alpha t)\frac{1}{\alpha}\Big\}|_{s\to s+a} = \mathcal{F}_\alpha(s+a).$$

3. D'après le Théorème 2.8, on trouve :

$$\mathcal{L}_\alpha\Big\{D_\alpha I_\alpha f(t)\Big\}(s) = s\mathcal{L}_\alpha\{I_\alpha f(t)\} - I_\alpha f(0).$$

Comme $I_\alpha f(0) = 0$, donc :

$$\mathcal{F}_\alpha(s) = s\mathcal{L}_\alpha\{I_\alpha f(t)\}(s), \qquad \mathcal{L}_\alpha\{I_\alpha f(t)\}(s) = \frac{\mathcal{F}_\alpha}{s}.$$

4. D'après le Théorème 2.9, on a :

$$\mathcal{L}_\alpha\Big\{\frac{t^{n\alpha}}{\alpha^n} f(t)\Big\}(s) = \mathcal{L}\Big\{\frac{(\alpha t)^{n\alpha\cdot\frac{1}{\alpha}}}{\alpha^n} f(\alpha t)^{\frac{1}{\alpha}}\Big\}(s) = \mathcal{L}\Big\{t^n f(\alpha t)^{\frac{1}{\alpha}}\Big\}(s) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}\mathcal{F}_\alpha(s).$$

5. D'après le Théorème 2.9, on a :

$$\mathcal{L}_\alpha\{(f*g)(t)\} = \mathcal{L}\Big\{(f*g)(\alpha t)^{\frac{1}{\alpha}}\Big\}(s) = \mathcal{L}\{f(\alpha t)^{\frac{1}{\alpha}}\}(s)\mathcal{L}\{g(\alpha t)^{\frac{1}{\alpha}}\}(s) = \mathcal{F}_\alpha(s)\mathcal{G}_\alpha(s).$$

□

Théorème 2.12. [1] Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ et $\alpha \in]0, 1]$. Pour tout $s > 0$, on a :

$$\mathcal{L}_\alpha^a\{e^{-k\frac{(t-a)^\alpha}{\alpha}} f(t)\}(s) = \mathcal{L}\{e^{-kt} f(a + (\alpha t)^{\frac{1}{\alpha}})\}(s).$$

Exemple 2.2. Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$. Pour $0 < \alpha \leq 1$ et $s > 0$, on a :

$$\mathcal{L}_\alpha^a\{e^{-k\frac{(t)^\alpha}{\alpha}} \sin(\frac{t^\alpha}{\alpha})\}(s) = \mathcal{L}\{e^{-kt}\sin t\}(s) = \frac{1}{(s+k)^2+1}.$$

Dans l'exemple suivant, on utilise la transformation de Laplace conformable pour trouver la solution d'une équation différentielle fractionnaire conformable.

Exemple 2.3. [1] Considérons le problème suivant :

$$D_\alpha^a y(t) = \lambda y(t), \qquad y(a) = y_0, \quad t > a,$$

tel que $y(t)$ est différentiable sur $]a, +\infty[$ et $0 < \alpha \leq 1$.

On applique $\mathcal{L}_\alpha^a$ et on utilise Théorème 2.8, on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\alpha^a\{D_\alpha^a y(t)\}(s) = \lambda \mathcal{L}_\alpha^a\{y(t)\}(s) &\Longleftrightarrow s\mathcal{L}_\alpha^a\{y(t)\}(s) - y(a) = \lambda \mathcal{L}_\alpha^a\{y(t)\}(s) \\ &\Longleftrightarrow (s-\lambda)\mathcal{L}_\alpha^a\{y(t)\}(s) = y_0 \\ &\Longleftrightarrow \mathcal{L}_\alpha^a\{y(t)\}(s) = \frac{y_0}{s-\lambda}, \end{aligned}$$

d'après Théorème 2.10, alors :

$$y(t) = y_0 e^{\lambda \frac{(t-a)^\alpha}{\alpha}}.$$

CHAPITRE 3

PROBLÈME AUX LIMITES EN TROIS POINTS VIA LA DÉRIVÉE FRACTIONNAIRE CONFORMABLE

Dans ce chapitre on s'intéresse à étudier et détailler le travail fait en [5], où un problème aux limite en trois points via la dérivée conformable est étudié. Des résultats d'existence et d'unicité sont établis en utilisant la méthode du point fixe.

3.1 Présentation du problème

Considérons le problème suivant [5] :

$$\begin{cases} D_\alpha(D+\lambda)x(t) = f(t,x(t)), \qquad t \in [0,1], \\ x(0)=0, \quad x'(0)=0, \quad x(1)=\beta x(\eta). \qquad \beta\in\mathbb{R}, \quad \lambda>0, \quad \eta\in(0,1), \end{cases} \tag{3.1}$$

où D_α est la dérivée fractionnaire conformable pour $1<\alpha\leq 2$, D est la dérivée ordinaire, et $f:[0,1]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est une fonction continue.

Rappelons que la dérivée conformable d'ordre $1<\alpha\leq 2$ (d'après Définition 1.5) de la fonction x est donnée par la formule :

$$\begin{aligned} D_\alpha^a x(t) &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{x^{(\lceil\alpha\rceil-1)}(t+\varepsilon t^{\lceil\alpha\rceil-\alpha}) - x^{(\lceil\alpha\rceil-1)}(t)}{\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{x^{(2-1)}(t+\varepsilon t^{2-\alpha}) - x^{(2-1)}}{\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{x'(t+\varepsilon(t-a)^{2-\alpha}) - x'(t)}{\varepsilon} \qquad (car \quad \lceil\alpha\rceil = 2). \end{aligned}$$

Notons aussi que l'intégrale conformable de x dans le cas où $1 < \alpha \leq 2$ est donnée par (voir Définition 2.2) :

$$\begin{aligned} I_\alpha f(t) &= \mathbf{I}_2(t^{\alpha-\lceil\alpha\rceil}x)(t) \\ &= \int_0^t \int_0^{t_1} s^{\alpha-2} f(s) ds dt_1 \\ &= \int_0^t s^{\alpha-2}(t-s) f(s) ds. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Lemme 3.1. [5] Soit $1 < \alpha \leq 2$ et x une fonction continue qu'est définie sur la domaine de I_α, alors $D_\alpha I_\alpha x(t) = x(t)$ pour $t \geq 0$.

Démonstration. Soit x une fonction continue, alors $I_\alpha x(t)$ est deux fois différentiables.
D'après (Proposition 1.3), on a :

$$\begin{aligned} D_\alpha(I_\alpha x)(t) &= t^{2-\alpha} \frac{d^2}{dt^2} \int_0^t \int_0^{t_1} x(s) s^{\alpha-2} ds dt_1 \\ &= t^{2-\alpha} \frac{d}{dt} \int_0^t x(s) s^{\alpha-2} ds \\ &= t^{2-\alpha} x(t) t^{\alpha-2} \\ &= x(t). \end{aligned}$$

□

En utilisant Proposition 2.5, on peut déduire le résultat suivant :

Lemme 3.2. [5] Soit $1 < \alpha \leq 2$ et $x : (1, 2] \to \mathbb{R}$ α-différentiable, alors $D_\alpha x(t) = 0$ si et seulement si :

$$x(t) = c_1 t + c_2,$$

avec $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

3.2 La résolution du problème linéaire

Avant de traiter le cas non linéaire (3.1), commençons par étudier le problème linéaire suivant :

$$\begin{cases} D_\alpha(D+\lambda)x(t) = \sigma(t), \qquad t \in [0,1], \\ x(0) = 0, \quad x'(0) = 0, \quad x(1) = \beta x(\eta). \qquad \beta \in \mathbb{R}, \quad \lambda > 0, \eta \in (0,1), \end{cases} \tag{3.3}$$

avec $1 < \alpha \leq 2$ et $\sigma \in \mathscr{C}([0,1])$.

Proposition 3.1. [5] On suppose que :

$$\beta \neq \frac{\lambda + e^{\lambda} - 1}{\lambda\eta + e^{-\lambda\eta} - 1}.$$

Alors, le problème (3.2) admet une solution unique donnée par :

$$x(t) = \int_0^t e^{-\lambda(t-s)}\Big(\int_0^s \sigma(u)u^{\alpha-2}(s-u)du\Big)ds + A(t)\Big[\beta\int_0^\eta e^{-\lambda(\eta-s)}\Big(\int_0^s \sigma(u)u^{\alpha-2}(s-u)du\Big)ds \\ - \int_0^1 e^{-\lambda(1-s)}\Big(\int_0^s \sigma(u)u^{\alpha-2}(s-u)du\Big)ds\Big],$$

telles que $A(t) = \dfrac{1}{\Delta}(\lambda t + e^{-\lambda t} - 1), \quad \Delta = \lambda + e^{-\lambda} - 1 - \beta(\lambda\eta + e^{-\lambda\eta} - 1).$

Démonstration. Soit x une fonction continue et $\sigma \in \mathscr{C}([0,1])$. On a :

$$D_\alpha(D+\lambda)x(t) = \sigma(t), \tag{3.4}$$

en appliquant l'opérateur I_α sur l'équation (3.4), d'après Lemme 3.2 on obtient :

$$(D+\lambda)x(t) = I_\alpha\sigma(t) + c_1 t + c_2. \tag{3.5}$$

On pose $y(t) = e^{\lambda t}x(t)$, alors $x(t) = y(t)e^{-\lambda t}$ et on a :

$$Dx(t) = Dy(t)e^{-\lambda t} - \lambda e^{-\lambda t}y(t).$$

$$\begin{aligned} Dx(t) + \lambda x(t) &= (Dy(t)e^{-\lambda t}) - \lambda e^{-\lambda t}y(t) + \lambda e^{-\lambda t} \\ &= Dy(t)e^{-\lambda t}. \end{aligned}$$

Donc :

$$(D+\lambda)x(t) = Dy(t)e^{-\lambda t} \Leftrightarrow Dy(t) = (D+\lambda)x(t)e^{\lambda t}.$$

Alors l'équation (3.5) est équivalente à :

$$Dy(t) = (I_\alpha\sigma(t) + c_1 t + c_2)e^{\lambda t}. \tag{3.6}$$

On intègre l'équation (3.6) sur l'intervalle $[0, t]$, on obtient :

$$\int_0^t Dy(t)ds = y(t) - y(0) \Longleftrightarrow \int_0^t (I_\alpha\sigma(t) + c_1 t + c_2)e^{\lambda t}ds = y(t) - y(0).$$

On pose $y(0) = c_3$, alors :

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t \Big(I_\alpha\sigma(s) + c_1 s + c_2\Big)e^{\lambda s}ds + c_3 \\ &= \int_0^t e^{\lambda s}I_\alpha\sigma(s)ds + c_1\int_0^t se^{\lambda s}ds + c_2\int_0^t e^{\lambda s}ds + c_3. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Comme :

$$\begin{aligned} K &= \int_0^t e^{\lambda s}sds & M &= \int_0^t e^{\lambda s}ds \\ &= \Big[\frac{s}{\lambda}e^{\lambda s}\Big]_0^t - \frac{1}{\lambda^2}[e^{\lambda s}]_0^t & &= \frac{1}{\lambda}[e^{\lambda s}]_0^t \\ &= \frac{t}{\lambda}e^{\lambda t} - \frac{1}{\lambda^2}e^{\lambda t} + \frac{1}{\lambda^2}, & &= \frac{1}{\lambda}(e^{\lambda t} - 1), \end{aligned}$$

alors :

$$y(t) = c_1(\frac{t}{\lambda}e^{\lambda t} - \frac{1}{\lambda^2}e^{\lambda t} + \frac{1}{\lambda^2}) + \frac{c_2}{\lambda}(e^{\lambda t} - 1) + \int_0^t e^{\lambda s}I_\alpha\sigma(s)ds + c_3.$$

Mais $y(t) = e^{\lambda t}x(t)$, donc :

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\lambda t}y(t) \\ &= e^{-\lambda t}\Big[\int_0^t e^{\lambda s}I_\alpha\sigma(s)ds + c_1(\frac{t}{\lambda}e^{\lambda t} - \frac{1}{\lambda^2}e^{\lambda t} + \frac{1}{\lambda^2}) + c_2\frac{1}{\lambda}(e^{\lambda t} - 1) + c_3\Big] \\ &= e^{-\lambda t}\int_0^t e^{\lambda s}I_\alpha\sigma(s)ds + \frac{c_1}{\lambda^2}(\lambda t - 1 + e^{-\lambda t}) + \frac{c_2}{\lambda}(1 - e^{-\lambda t}) + c_3e^{-\lambda t} \\ &= \int_0^t e^{-\lambda(t-s)}I_\alpha\sigma(s)ds + \frac{c_1}{\lambda^2}(\lambda t - 1 + e^{-\lambda t}) + \frac{c_2}{\lambda}(1 - e^{-\lambda t}) + c_3e^{-\lambda t}. \end{aligned}$$

D'après la formule (3.2), on a :

$$I_\alpha\sigma(s) = \int_0^s (s-u)u^{\alpha-2}\sigma(u)du,$$

par conséquent :

$$x(t) = \frac{c_1}{\lambda^2}(\lambda t - 1 + e^{-\lambda t}) + \frac{c_2}{\lambda}(1 - e^{-\lambda t}) + \int_0^t e^{-\lambda(t-s)}\Big(\int_0^s \sigma(u)u^{\alpha-2}(s-u)du\Big)ds + c_3 e^{-\lambda t}.$$

D'après les conditions aux limites, on a : $x(0) = 0, \quad x'(0) = 0$ donc $c_2 = c_3 = 0$.

Alors :

$$x(t) = \frac{c_1}{\lambda^2}(\lambda t - 1 + e^{-\lambda t}) + \int_0^t e^{-\lambda(t-s)}\Big(\int_0^s \sigma(u)u^{\alpha-2}(s-u)du\Big)ds. \tag{3.8}$$

On trouve alors que :

$$x(1) = \frac{c_1}{\lambda^2}(\lambda - 1 + e^{-\lambda}) + \int_0^1 e^{-\lambda(1-s)}\Big(\int_0^s \sigma(u)u^{\alpha-2}(s-u)du\Big)ds, \tag{3.9}$$

$$\beta x(\eta) = \beta\Big[\frac{c_1}{\lambda^2}(\lambda\eta - 1 + e^{-\lambda\eta}) + \int_0^\eta e^{-\lambda(\eta-s)}\Big(\int_0^s \sigma(u)u^{\alpha-2}(s-u)du\Big)ds\Big]. \tag{3.10}$$

La condition au limites $x(1) = \beta x(\eta)$ donne :

$$\begin{aligned}\frac{c_1}{\lambda^2}\Big((\lambda - 1 + e^{-\lambda}) - \beta(\lambda\eta - 1 + e^{-\lambda\eta})\Big) &= \beta\int_0^\eta e^{-\lambda(\eta-s)}\Big(\int_0^s \sigma(u)u^{\alpha-2}(s-u)du\Big)ds \\ &\quad - \int_0^1 e^{-\lambda(1-s)}\Big(\int_0^s \sigma(u)u^{\alpha-2}(s-u)du\Big)ds.\end{aligned}$$

Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned}c_1 = &\frac{\lambda^2}{\Big((\lambda - 1 + e^{-\lambda}) - \beta(\lambda\eta - 1 + e^{-\lambda\eta})\Big)} \\ &\Big[\beta\int_0^\eta e^{-\lambda(\eta-s)}\Big(\int_0^s \sigma(u)u^{\alpha-2}(s-u)du\Big)ds - \int_0^1 e^{-\lambda(1-s)}\Big(\int_0^s \sigma(u)u^{\alpha-2}(s-u)du\Big)ds\Big].\end{aligned}$$

Comme $\Delta = (\lambda - 1 + e^{-\lambda}) - \beta(\lambda\eta - 1 + e^{-\lambda\eta}) \neq 0$, car on a supposé que : $\beta \neq \dfrac{\lambda - 1 + e^{-\lambda}}{\lambda\eta - 1 + e^{-\lambda\eta}}$, l'équation (3.8) devient :

$$\begin{aligned}x(t) = &\frac{1}{\Delta}\Big[\beta\int_0^\eta e^{-\lambda(\eta-s)}\Big(\int_0^s \sigma(u)u^{\alpha-2}(s-u)du\Big)ds - \int_0^1 e^{-\lambda(1-s)}\Big(\int_0^s \sigma(u)u^{\alpha-2}(s-u)du\Big)ds\Big] \\ &(\lambda t - 1 + e^{-\lambda t}) + \int_0^t e^{-\lambda(t-s)}\Big(\int_0^s \sigma(u)u^{\alpha-2}(s-u)du\Big)ds.\end{aligned}$$

Si note $A(t) = \dfrac{\lambda t - 1 + e^{-\lambda t}}{\Delta}$, on obtient :

$$\begin{aligned}x(t) = &\int_0^t e^{-\lambda(t-s)}\Big(\int_0^s \sigma(u)u^{\alpha-2}(s-u)du\Big)ds \\ &+ A(t)\Big[\beta\int_0^\eta e^{-\lambda(\eta-s)}\Big(\int_0^s \sigma(u)u^{\alpha-2}(s-u)du\Big)ds - \int_0^1 e^{-\lambda(1-s)}\Big(\int_0^s \sigma(u)u^{\alpha-2}(s-u)du\Big)ds\Big].\end{aligned}$$

□

3.3 L'étude du problème non linéaire

Dans cette section, on va donner des résultats d'existence et d'unicité, en utilisant le théorème du point fixe de Banach (voir l'annexe).

Soit $\mathscr{C} = \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ l' espace de Banach de toutes les fonctions continues sur l'intervalle $[0,1]$ doté de la norme usuelle définie par $\|x\| = \sup\{|x(t)|, t \in [0,1]\}$.

D'après Proposition 1.1, notre problème au limites (3.1) est équivalent à :

$$x = \mathscr{T}x, \qquad x \in \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R}),$$

où $\mathscr{T} : \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R}) \to \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ est défini par :

$$\begin{aligned}\mathscr{T}x(t) = &\int_0^t e^{-\lambda(t-s)}\Big(\int_0^s f(u,x(u))u^{\alpha-2}(s-u)du\Big)ds \\ &+ A(t)\Big[\beta\int_0^\eta e^{-\lambda(\eta-s)}\Big(\int_0^s f(u,x(u))u^{\alpha-2}(s-u)du\Big)ds \\ &- \int_0^1 e^{-\lambda(1-s)}\Big(\int_0^s f(u,x(u))u^{\alpha-2}(s-u)du\Big)ds\Big],\end{aligned} \tag{3.11}$$

où

$$A(t) = \frac{1}{\Delta}(\lambda t + e^{-\lambda t} - 1), \quad \Delta = \lambda + e^{-\lambda} - 1 - \beta(\lambda\eta + e^{-\lambda\eta} - 1),$$

avec

$$\beta \neq \frac{\lambda + e^{\lambda} - 1}{\lambda\eta + e^{-\lambda\eta} - 1}.$$

On constante que le problème (3.1) admet une solution unique si l'opérateur défini par (3.11) admet un point fixe unique.

Théorème 3.1. [5] Soit $f : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue qui vérifie la condition suivante :

$$| f(t,v) - f(t,w) | \leq L \mid v - w \mid \qquad \forall t \in [0,1], \quad v, w \in \mathbb{R},$$

tel que $L > 0$ est une constante de Lipschitz. Si $B < 1/L$, où :

$$B = \frac{1 + A_1[|\beta|\eta^{\alpha}(1 - e^{-\lambda\eta}) + 1 - e^{-\lambda}]}{\lambda\alpha(\alpha - 1)} > 0,$$

avec

$$A_1 = \sup_{t \in [0,1]} |A(t)|,$$

alors le problème (3.1) admet une solution unique.

Démonstration. • $1^{\text{ère}}$ ***étape :***

On montre que $\mathscr{T}(\mathscr{B}_r) \subset \mathscr{B}_r$, avec $\mathscr{B}_r = \{x \in \mathscr{C} : \|x\| \leq r\}$ est une boule fermée tel que $r > 0$. Soit $M > \sup\{| f(t,0) | : t \in [0,1]\}$ et on suppose que :

$$r > \frac{MB}{1 - LB}.$$

Donc pour tout $x \in \mathscr{B}_r$ et $t \in [0,1]$ on pose :

$$\mathscr{T}x(t) = J_1(t) + A(t)[J_2(t) - J_3(t)], \tag{3.12}$$

avec :

$$J_1(t) = \int_0^t e^{-\lambda(t-s)}\Big(\int_0^s f(u, x(u))u^{\alpha-2}(s-u)du\Big)ds$$
$$J_2(t) = \beta\int_0^{\eta} e^{-\lambda(\eta-s)}\Big(\int_0^t f(u, x(u))u^{\alpha-2}(s-u)du\Big)ds,$$
$$J_3(t) = \int_0^1 e^{-\lambda(1-s)}\Big(\int_0^t f(u, x(u))u^{\alpha-2}(s-u)du\Big)ds.$$

Alors :

$$\begin{aligned}\|\mathscr{T}x\| &= \sup_{t\in[0,1]}\Big\{\mid J_1(t)+A(t)[J_2(t)-J_3(t)]\Big\}\\ &\leq \sup_{t\in[0,1]}\{\mid J_1(t)\mid\}+A_1\Big[\sup_{t\in[0,1]}\{\mid J_2(t)\mid\}+\sup_{t\in[0,1]}\{\mid J_3(t)\mid\}\Big].\end{aligned} \tag{3.13}$$

On a :

$$\begin{aligned}\sup_{t\in[0,1]}\{\mid J_1(t)\mid\} &= \sup_{t\in[0,1]}\{\mid \int_0^t e^{-\lambda(t-s)}\Big(\int_0^s f(u,x(u))u^{\alpha-2}(s-u)du\Big)ds\mid\}\\ &= \sup_{t\in[0,1]}\{\mid \int_0^t e^{-\lambda(t-s)}\Big(\int_0^s (f(u,x(u))-f(u,0)+f(u,0))u^{\alpha-2}(s-u)du\Big)ds\mid\}\\ &\leq \int_0^t e^{-\lambda(t-s)}\Big(\int_0^s (\mid f(u,x(u))-f(u,0)\mid+\mid f(u,0)\mid)u^{\alpha-2}(s-u)du\Big)ds.\end{aligned}$$

Utilisant le fait que : $|f(u,x(u))-f(u,0)|\leq Lr$, on obtient que :

$$\begin{aligned}\sup_{t\in[0,1]}\{\mid J_1(t)\mid\} &\leq \int_0^t e^{-\lambda(t-s)}\Big(\int_0^s (Lr+M)u^{\alpha-2}(s-u)du\Big)ds\\ &\leq (Lr+M)\int_0^t e^{-\lambda(t-s)}\Big(\int_0^s u^{\alpha-2}(s-u)du\Big)ds\\ &\leq (Lr+M)\int_0^t e^{-\lambda(t-s)}\Big[\frac{su^{\alpha-1}}{\alpha-1}-\frac{1}{\alpha}u^{\alpha}\Big]_0^s\\ &\leq (Lr+M)\int_0^t e^{-\lambda(t-s)}\Big(\frac{s^{\alpha}}{\alpha(\alpha-1)}\Big)ds\\ &\leq \frac{Lr+M}{\alpha(\alpha-1)}e^{-\lambda t}\int_0^t e^{\lambda s}s^{\alpha}ds.\end{aligned}$$

Mais pour tout $t\in[0,1]$ on a :

$$\begin{aligned}\int_0^t e^{\lambda s}s^{\alpha}ds &= \Big[\frac{s^{\alpha}}{\lambda}e^{\lambda s}\Big]_0^t-\int_0^t\frac{\alpha}{\lambda}e^{\lambda s}s^{\alpha-1}ds\\ &\leq \frac{t^{\alpha}}{\lambda}e^{\lambda t}\\ &\leq \frac{1}{\lambda}e^{\lambda t},\end{aligned}$$

car :

$$-\int_0^t\frac{\alpha s^{\alpha-1}}{\lambda}e^{\lambda s}ds\leq 0.$$

Donc :

$$\begin{aligned}\sup_{t\in[0,1]}\{\mid J_1(t)\mid\} &\leq \frac{Lr+M}{\alpha(\alpha-1)}e^{-\lambda t}\cdot\frac{1}{\lambda}e^{\lambda t}\\ &\leq \frac{Lr+M}{\lambda\alpha(\alpha-1)}.\end{aligned} \tag{3.14}$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}\sup_{t\in[0,1]}\{|J_2(t)|\} &= \sup_{t\in[0,1]}\{|\beta\int_0^\eta e^{-\lambda(\eta-s)}\Big(\int_0^t f(u,x(u))u^{\alpha-2}(s-u)du\Big)ds|\}\\ &= \sup_{t\in[0,1]}\{|\beta\int_0^\eta e^{-\lambda(\eta-s)}\Big(\int_0^t (f(u,x(u))-f(u,0)+f(u,0))u^{\alpha-2}(s-u)du\Big)ds|\}\\ &\leq |\beta|\int_0^\eta e^{-\lambda(\eta-s)}\Big(\int_0^s (\mid f(u,x(u))-f(u,0)\mid+\mid f(u,0)\mid)u^{\alpha-2}(s-u)du\Big)ds.\end{aligned} \tag{3.15}$$

Mais $s,\eta\in[0,1]$ tel que $s\leq\eta$, donc $s^\alpha\leq\eta^\alpha$. Par conséquent :

$$\int_0^\eta e^{-\lambda(\eta-s)}s^\alpha ds \leq e^{-\lambda\eta}\int_0^\eta e^{\lambda s}\eta^\alpha ds,$$

et comme :

$$\begin{aligned}e^{-\lambda\eta}.\eta^\alpha.\int_0^\eta e^{\lambda s}ds &= e^{-\lambda\eta}.\eta^\alpha.\Big[\frac{1}{\lambda}e^{\lambda\eta}-\frac{1}{\lambda}\Big]\\ &= \frac{\eta^\alpha}{\lambda}(1-e^{-\lambda\eta}).\end{aligned} \tag{3.16}$$

Alors, d'une manière analogue au traitement de $J_1(t)$ on obtient :

$$\begin{aligned}\sup_{t\in[0,1]}\{|J_2(t)|\} &\leq |\beta|\int_0^\eta e^{-\lambda(\eta-s)}\Big(\int_0^s (\mid f(u,x(u))-f(u,0)\mid+\mid f(u,0)\mid)u^{\alpha-2}(s-u)du\Big)ds\\ &\leq |\beta|\cdot(Lr+M)\int_0^\eta e^{-\lambda(\eta-s)}\Big(\frac{s^\alpha}{\alpha(\alpha-1)}\Big)ds\\ &\leq |\beta|\frac{(Lr+M)}{\alpha(\alpha-1)}\int_0^\eta e^{-\lambda(\eta-s)}\cdot\eta^\alpha ds\\ &\leq |\beta|\frac{\eta^\alpha(Lr+M)}{\lambda\alpha(\alpha-1)}(1-e^{-\lambda\eta}).\end{aligned} \tag{3.17}$$

Finalement :

$$\begin{aligned}
\sup_{t\in[0,1]} |J_3(t)| &= \sup_{t\in[0,1]} \{|\int_0^1 e^{-\lambda(1-s)}\Big(\int_0^t f(u,x(u))u^{\alpha-2}(s-u)du\Big)ds|\}\\
&= \sup_{t\in[0,1]} \{|\int_0^1 e^{-\lambda(1-s)}\Big(\int_0^t (f(u,x(u))-f(u,0)+f(u,0))u^{\alpha-2}(s-u)du\Big)ds|\}\\
&\leq \int_0^1 e^{-\lambda(1-s)}\Big(\int_0^s (\mid f(u,x(u))-f(u,0)\mid + \mid f(u,0)\mid)u^{\alpha-2}(s-u)du\Big)ds.
\end{aligned}$$

Comme $s\in[0,1]$, on a :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 e^{-\lambda(1-s)}s^{\alpha}ds &\leq e^{-\lambda}\int_0^1 e^{\lambda s}ds\\
&\leq e^{-\lambda}\Big[\frac{1}{\lambda}e^{\lambda s}\Big]_0^1\\
&\leq e^{-\lambda}(\frac{1}{\lambda}e^{\lambda}-\frac{1}{\lambda})\\
&\leq \frac{1}{\lambda}(1-e^{-\lambda}).
\end{aligned}\tag{3.18}$$

Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned}
\sup_{t\in[0,1]} |J_3(t)| &\leq (Lr+M)\int_0^1 e^{-\lambda(1-s)}\Big(\frac{s^{\alpha}}{\alpha(\alpha-1)}\Big)ds\\
&\leq \frac{(Lr+M)}{\alpha(\alpha-1)}\int_0^1 e^{-\lambda(1-s)}ds\\
&\leq \frac{(Lr+M)}{\lambda\alpha(\alpha-1)}(1-e^{-\lambda}).
\end{aligned}\tag{3.19}$$

On conclut alors :

$$\begin{aligned}
\parallel \mathscr{T}x \parallel &\leq \sup_{t\in[0,1]}\{\mid J_1(t)\mid\} + A_1\Big[\sup_{t\in[0,1]}\{\mid J_2(t)\mid\} + \sup_{t\in[0,1]}\{\mid J_3(t)\mid\}\Big]\\
&\leq \frac{Lr+M}{\lambda\alpha(\alpha-1)} + A_1\Big[|\beta|\frac{\eta^{\alpha}(Lr+M)}{\lambda\alpha(\alpha-1)}(1-e^{-\lambda\eta}) + \frac{(Lr+M)}{\lambda\alpha(\alpha-1)}(1-e^{-\lambda})\Big]\\
&\leq (Lr+M)\Big[\frac{1+A_1[|\beta|\eta^{\alpha}(1-e^{-\lambda\eta})+1-e^{-\lambda}]}{\lambda\alpha(\alpha-1)}\Big]\\
&\leq (Lr+M)B \leq r.
\end{aligned}$$

Donc $\mathscr{T}(\mathscr{B}_r)\subset\mathscr{B}_r$.

• 2^{eme} ***étape :***

Montrons maintenant que $\mathscr{T}$ est une contraction.

Soit $x, y \in \mathscr{C}$. Pour tout $t \in [0,1]$, on a :

$$\begin{aligned}
\| \mathscr{T}x - \mathscr{T}y \| &= \sup_{t\in[0,1]} \{| \mathscr{T}x(t) - \mathscr{T}y(t) |\} \\
&= \sup_{t\in[0,1]} \Big\{\Big|\int_0^t e^{-\lambda(t-s)}\Big(\int_0^s f(u,x(u))u^{\alpha-2}(s-u)du\Big)ds \\
&+ A(t)\Big[\beta\int_0^\eta e^{-\lambda(\eta-s)}\Big(\int_0^s f(u,x(u))u^{\alpha-2}(s-u)du\Big)ds \\
&- \int_0^1 e^{-\lambda(1-s)}\Big(\int_0^s f(u,x(u))u^{\alpha-2}(s-u)du\Big)ds] \\
&- \Big[\int_0^t e^{-\lambda(t-s)}\Big(\int_0^s f(u,y(u))u^{\alpha-2}(s-u)du\Big)ds \\
&+ A(t)\Big[\beta\int_0^\eta e^{-\lambda(\eta-s)}\Big(\int_0^s f(u,y(u))u^{\alpha-2}(s-u)du\Big)ds \\
&- \int_0^1 e^{-\lambda(1-s)}\Big(\int_0^s f(u,y(u))u^{\alpha-2}(s-u)du\Big)ds]\Big]\Big|\Big\} \\
&= \sup_{t\in[0,1]} \Big\{\Big|\int_0^t e^{-\lambda(t-s)}\Big(\int_0^s (f(u,x(u))-f(u,y(u)))u^{\alpha-2}(s-u)du\Big)ds \\
&+ A(t)\Big[\beta\int_0^\eta e^{-\lambda(\eta-s)}\Big(\int_0^s (f(u,x(u))-f(u,y(u)))u^{\alpha-2}(s-u)du\Big)ds \\
&- \int_0^1 e^{-\lambda(1-s)}\Big(\int_0^s (f(u,x(u))-f(u,y(u)))u^{\alpha-2}(s-u)du\Big)ds]\Big|\Big\}.
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Utilisant les calculs faits dans la 1^{ere} ***étape***, on obtient :

$$\begin{aligned}
\| \mathscr{T}x - \mathscr{T}y \| &= \sup_{t\in[0,1]} \Big\{\Big|(f(u,x(u))-f(u,y(u)))\Big[\int_0^t e^{-\lambda(t-s)}\Big(\int_0^s u^{\alpha-2}(s-u)du\Big)ds \\
&+ A(t)\Big[\beta\int_0^\eta e^{-\lambda(\eta-s)}\Big(\int_0^s u^{\alpha-2}(s-u)du\Big)ds \\
&- \int_0^1 e^{-\lambda(1-s)}\Big(\int_0^s u^{\alpha-2}(s-u)du\Big)ds]\Big]\Big|\Big\} \\
&\le L \| x-y \| \Big[\int_0^t e^{-\lambda(t-s)}\Big(\int_0^s u^{\alpha-2}(s-u)du\Big)ds \\
&+ A(t)\Big[\beta\int_0^\eta e^{-\lambda(\eta-s)}\Big(\int_0^s u^{\alpha-2}(s-u)du\Big)ds \\
&- \int_0^1 e^{-\lambda(1-s)}\Big(\int_0^s u^{\alpha-2}(s-u)du\Big)ds]\Big] \\
&\le L \| x-y \| \Big[\frac{1}{\lambda\alpha(\alpha-1)} + A_1\Big[|\beta|\frac{\eta^\alpha}{\lambda\alpha(\alpha-1)}(1-e^{-\lambda\eta}) + \frac{1}{\lambda\alpha(\alpha-1)}(1-e^{-\lambda})\Big] \\
&\le L \| x-y \| \Big[\frac{1+A_1[|\beta|\eta^\alpha(1-e^{-\lambda\eta})+1-e^{-\lambda}]}{\lambda\alpha(\alpha-1)}\Big] \\
&\le BL \| x-y \| .
\end{aligned}$$

Comme $B < 1/L$, alors $BL < 1$. Donc $\mathscr{T}$ est une contraction.

Les conditions du Théorème du point fixe de Banach (voir l'annexe) sont vérifiées, alors on déduit que notre problème possède une solution unique. □

Appliquons maintenant le théorème de Krasnoselskii (voir l'annexe), qui assure l'existence d'au moins une solution de problème (3.1).

Présentons maintenant le résultat d'existence suivant :

Théorème 3.2. [5] Soit $f : [0, 1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue qui vérifie les conditions suivantes :

(H_1) $|f(t, v) - f(t, w)| \leq L|v - w|$ pour tout $t \in [0, 1]$, $v, w \in \mathbb{R}$.

(H_2) $|f(t, v)| \leq \mu(t)$, pour tout $(t, v) \in [0, 1] \times \mathbb{R}$ avec $\mu \in \mathscr{C}$.

Alors, le problème (3.1) admet au moins une solution dans $\mathscr{C}$ si :

$$LA_1 \frac{\mid \beta \mid \eta^\alpha (1 - e^{-\lambda\eta}) + (1 + e^{-\lambda})}{\lambda\alpha(\alpha - 1)} < 1. \tag{3.21}$$

Démonstration. Soit $\|\mu\| = \sup_{t\in[0,1]}|\mu(t)|$, r un réel positif tel que :

$$r \geq \frac{1 + A_1[\mid \beta \mid \eta^\alpha (1 - e^{-\lambda\eta}) + (1 + e^{-\lambda})]}{\lambda\alpha(\alpha - 1)} \|\mu\|,$$

et $\mathscr{B}_r$ la boule fermée définie par $\mathscr{B}_r = \{x \in \mathscr{C} : \|x\| \leq r\}$.

Pour $x, y \in \mathscr{B}_r$, soit $\mathscr{T}_1$ et $\mathscr{T}_2$ deux opérateurs définis sur $\mathscr{B}_r$ par :

$$\mathscr{T}_1 x(t) = \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} \Big(\int_0^s f(u, x(u)) u^{\alpha-2} (s - u) du \Big) ds, \tag{3.22}$$

$$\begin{aligned} \mathscr{T}_2 y(t) = A(t) \Big[\beta \int_0^\eta e^{-\lambda(\eta-s)} \Big(\int_0^s f(u, y(u)) u^{\alpha-2} (s - u) du \Big) ds \\ - \int_0^1 e^{-\lambda(1-s)} \Big(\int_0^s f(u, y(u)) u^{\alpha-2} (s - u) du \Big) ds \Big]. \end{aligned} \tag{3.23}$$

$1^{ére}$ ***étape :***

On commence par vérifier la condition (i) du Théorème 3.5. Soit $x, y \in \mathscr{B}_r$, on a :

$$\begin{aligned}
\|\mathscr{T}_1 x+\mathscr{T}_2 y\| &= \sup_{t\in[0,1]} |\mathscr{T}_1 x(t)+\mathscr{T}_2 y(t)| \\
&= \sup_{t\in[0,1]} \Big\{ \Big| \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} \Big(\int_0^s f(u,x(u)) u^{\alpha-2}(s-u)du \Big) ds \\
&+ A(t) \Big[\beta \int_0^\eta e^{-\lambda(\eta-s)} \Big(\int_0^s f(u,y(u)) u^{\alpha-2}(s-u)du \Big) ds \\
&- \int_0^1 e^{-\lambda(1-s)} \Big(\int_0^s f(u,y(u)) u^{\alpha-2}(s-u)du \Big) ds \Big] \Big| \Big\} \\
&\leq \sup_{t\in[0,1]} \Big(\int_0^t e^{-\lambda(t-s)} \Big(\int_0^s \mid f(u,x(u)) \mid u^{\alpha-2}(s-u)du \Big) ds \Big) \\
&+ \sup_{t\in[0,1]} \Big(\mid A(t) \mid \Big[\mid \beta \mid \int_0^\eta e^{-\lambda(\eta-s)} \Big(\int_0^s f(u,y(u)) u^{\alpha-2}(s-u)du \Big) ds \\
&- \int_0^1 e^{-\lambda(1-s)} \Big(\int_0^s \mid f(u,y(u)) \mid u^{\alpha-2}(s-u)du \Big) ds \Big] \Big).
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Utilisant l'hypothèse (H_2) et les calculs faits dans la démonstration du Théorème 3.1, on obtient :

$$\begin{aligned}
\sup_{t\in[0,1]} |\mathscr{T}_1 x(t)+\mathscr{T}_2 y(t)| &\leq \|\mu\| \Big(\int_0^t e^{-\lambda(t-s)} (\int_0^s u^{\alpha-2}(s-u)du) ds \\
&+ A_1 \Big[\mid \beta \mid \int_0^\eta e^{-\lambda(\eta-s)} (\int_0^s u^{\alpha-2}(s-u)du) ds - \int_0^s e^{-\lambda(1-s)} (\int_0^s u^{\alpha-2})(s-u)du) ds \Big] \Big) \\
&\leq \|\mu\| \Big(\frac{1}{\lambda\alpha(\alpha-1)} + A_1 \Big[\mid \beta \mid \frac{\eta^\alpha(1-e^{-\lambda\eta})}{\lambda\alpha(\alpha-1)} + \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda\alpha(\alpha-1)} \Big] \Big) \\
&\leq \frac{1+A_1 \Big[\mid \beta \mid \eta^\alpha(1-e^{-\lambda\eta}) + (1-e^{-\lambda}) \Big]}{\lambda\alpha(\alpha-1)} \|\mu\|.
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Le choix de la constante r implique que :

$$\|\mathscr{T}_1 x+\mathscr{T}_2 y\| \leq \frac{1+A_1 \Big[\mid \beta \mid \eta^\alpha(1-e^{-\lambda\eta}) + (1-e^{-\lambda}) \Big]}{\lambda\alpha(\alpha-1)} \|\mu\| \leq r. \tag{3.26}$$

Ainsi, $\mathscr{T}_1 x+\mathscr{T}_2 y \in \mathscr{B}_r$. Alors l'hypothèse (i) du Théorème 3.5 est satisfaite.

$2^{ème}$ ***étape :***

Vérifions maintenant que $\mathscr{T}_1$ est compact sur $\mathscr{B}_r$. Soit $x, y \in \mathscr{B}_r$, d'après la preuve du Théorème 3.1 on a :

$$\|\mathscr{T}_2 x-\mathscr{T}_2 y\| \leq L \frac{1+A_1 \Big[\mid \beta \mid \eta^\alpha(1-e^{-\lambda\eta}) + (1-e^{-\lambda}) \Big]}{\lambda\alpha(\alpha-1)} \|x-y\|. \tag{3.27}$$

Comme $L\dfrac{1+A_1\Big[\mid\beta\mid\eta^{\alpha}(1-e^{-\lambda\eta})+(1-e^{-\lambda})\Big]}{\lambda\alpha(\alpha-1)}<1$ d'après l'hypothèse (3.21), on déduit que $\mathscr{T}_2$ est une contaction.

$3^{éme}$ ***étape :***

Montrons maintenant que l'opérateur $\mathscr{T}_1$ est continu.

Soit $(x_n)_n$ une suite de $\mathscr{B}_r$ telle que $x_n\to x$ dans $\mathscr{B}_r$. Donc pour $\varepsilon>0$ donné, il existe N tel que $\|x_n-x\|\leq\varepsilon$ quand $n>N$.

On a :

$$\begin{aligned}|\mathscr{T}_1x_n(t)-\mathscr{T}_1x(t)|&\leq\int_0^t e^{-\lambda(t-s)}\Big(\int_0^s|f(u,x_n(u))-f(u,x(u))|\cdot u^{\alpha-2}(s-u)du\Big)ds\\&\leq\frac{L}{\lambda\alpha(\alpha-1)}\|x_n-x\|.\end{aligned}$$

Donc :

$$\|\mathscr{T}_1x_n-\mathscr{T}_1x\|\leq\frac{L}{\lambda\alpha(\alpha-1)}\varepsilon,$$

ce qui montre que $\mathscr{T}_1$ est continu.

Afin de montrer que $\mathscr{T}_1$ est un opérateur compact, on utilise le Théorème d'Arzelè-Ascoli (voir l'annexe).

Donc de il suffit de montrer que $\mathscr{T}_1$ est uniformément borné sur $\mathscr{B}_r$ et que $\mathscr{T}_1(\mathscr{B}_r)$ est équicontinue, on a :

$$\begin{aligned}\|\mathscr{T}_1x\|&=\sup_{t\in[0,1]}|\mathscr{T}_1x(t)|\\&=\sup_{t\in[0,1]}\Big|\int_0^t e^{-\lambda(t-s)}\Big(\int_0^s f(u,x(u))u^{\alpha-2}(s-u)du\Big)ds\Big|\\&\leq\|\mu\|\Big(\int_0^1 e^{-\lambda(1-s)}(\int_0^s u^{\alpha-2}(s-u)du)ds\Big)\\&\leq\|\mu\|\Big(\int_0^1 e^{-\lambda(1-s)}(\frac{s^{\alpha}}{\alpha(\alpha-1)})ds\Big)\\&\leq\frac{\|\mu\|}{\alpha(\alpha-1)}\int_0^1 e^{-\lambda(1-s)}s^{\alpha}ds\\&\leq\|\mu\|\frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda\alpha(\alpha-1)}.\end{aligned}$$

Donc, $\mathscr{T}_1$ est uniformément borné sur $\mathscr{B}_r$. Soit $\Omega=[0,1]\times\mathscr{B}_r$. on définit $M_r=\sup_{(t,x)\in\Omega}\mid f(t,x)\mid$ (qui est fini car f est continue sur le compact $[0,1]\times\mathscr{B}_r$). Soit $0\leq t_2<t_1\leq1$, on a :

$$\begin{aligned}
|\mathscr{T}_1x(t_1)-\mathscr{T}_1x(t_2)| &= |\int_0^{t_1} e^{-\lambda(t_1-s)}\Big(\int_0^s f(u,x(u))u^{\alpha-2}(s-u)du\Big)ds \\
&- \int_0^{t_2} e^{-\lambda(t_2-s)}\Big(\int_0^s f(u,x(u))u^{\alpha-2}(s-u)du\Big)ds| \\
&= |\int_0^{t_2} e^{-\lambda(t_1-s)}\Big(\int_0^s f(u,x(u))u^{\alpha-2}(s-u)du\Big)ds \\
&+ \int_{t_2}^{t_1} e^{-\lambda(t_1-s)}\Big(\int_0^s f(u,x(u))u^{\alpha-2}(s-u)du\Big)ds \\
&- \int_0^{t_2} e^{-\lambda(t_2-s)}\Big(\int_0^s f(u,x(u))u^{\alpha-2}(s-u)du\Big)ds| \\
&= |\int_0^{t_2} (e^{-\lambda(t_1-s)}-e^{-\lambda(t_2-s)})\Big(\int_0^s f(u,x(u))u^{\alpha-2}(s-u)du\Big)ds \\
&+ \int_{t_2}^{t_1} e^{-\lambda(t_1-s)}\Big(\int_0^s f(u,x(u))u^{\alpha-2}(s-u)du\Big)ds| \\
&\leq |\int_0^{t_2} (e^{-\lambda(t_1-s)}-e^{-\lambda(t_2-s)})\Big(\int_0^s f(u,x(u))u^{\alpha-2}(s-u)du\Big)ds| \\
&+ |\int_{t_2}^{t_1} e^{-\lambda(t_1-s)}\Big(\int_0^s f(u,x(u))u^{\alpha-2}(s-u)du\Big)ds|\ .
\end{aligned}$$

D'une part on a :

$$\begin{aligned}
I &= |\int_0^{t_2} (e^{-\lambda(t_1-s)}-e^{-\lambda(t_2-s)})\Big(\int_0^s f(u,x(u))u^{\alpha-2}(s-u)du\Big)ds| \\
&\leq M_r|\int_0^{t_2} (e^{-\lambda(t_1-s)}-e^{-\lambda(t_2-s)})\Big(\int_0^s u^{\alpha-2}(s-u)du\Big)ds| \\
&\leq \frac{M_r}{\alpha(\alpha-1)}\Big(\int_0^{t_2} (e^{-\lambda(t_1-s)}-e^{-\lambda(t_2-s)})s^\alpha ds\Big) \\
&\leq \frac{M_r}{\alpha(\alpha-1)}\Big(\int_0^{t_2} e^{-\lambda(t_1-s)}s^\alpha ds-\int_0^{t_2} e^{-\lambda(t_2-s)})s^\alpha ds\Big),
\end{aligned} \tag{3.28}$$

d'après l'équation (3.16), donc :

$$\begin{aligned}
I &\leq \frac{M_r}{\alpha(\alpha-1)}|\Big(e^{-\lambda t_1}\int_0^{t_2} e^{\lambda s}s^\alpha ds-e^{-\lambda t_2}\int_0^{t_2} e^{\lambda s}s^\alpha ds\Big)| \\
&\leq \frac{M_r}{\lambda\alpha(\alpha-1)}|\Big((e^{-\lambda t_1}-e^{-\lambda t_2})\int_0^{t_2} e^{\lambda s}s^\alpha ds\Big)| \\
&\leq \frac{M_r}{\lambda\alpha(\alpha-1)}|\Big((e^{-\lambda t_1}-e^{-\lambda t_2})\frac{1}{\lambda}e^{\lambda t_2}\Big)| \\
&\leq \frac{M_r}{\lambda\alpha(\alpha-1)}|(e^{-\lambda(t_1-t_2)}-1)|,
\end{aligned} \tag{3.29}$$

$$
\begin{aligned}
II &= \Big| \int_{t_2}^{t_1} e^{-\lambda(t_1-s)}\Big(\int_0^s f(u,x(u))u^{\alpha-2}(s-u)du\Big)ds\Big| \\
&\leq M_r\Big|\Big(\int_{t_2}^{t_1} e^{-\lambda(t_1-s)}\Big(\int_0^s u^{\alpha-2}(s-u)du\Big)ds\Big)\Big| \\
&\leq \frac{M_r}{\alpha(\alpha-1)}\Big|\Big(\int_{t_2}^{t_1} e^{-\lambda(t_1-s)}s^{\alpha}ds\Big)\Big| \\
&\leq \frac{M_r}{\alpha(\alpha-1)}\Big|\Big(\int_{t_2}^{t_1} e^{\lambda s}s^{\alpha}ds\Big)\Big| \\
&\leq \frac{M_r}{\lambda\alpha(\alpha-1)}|(1-e^{-\lambda(t_1-t_2)})|,
\end{aligned}
\tag{3.30}
$$

alors d'après l'équation (3.29) et (3.30), on obtient :

$$
\begin{aligned}
|\ \mathscr{T}_1x(t_1)-\mathscr{T}_1x(t_2)| &\leq \frac{M_r}{\lambda\alpha(\alpha-1)}|(e^{-\lambda(t_1-t_2)}-1)|+\frac{M_r}{\lambda\alpha(\alpha-1)}|(1-e^{-\lambda(t_1-t_2)})| \\
&\leq \frac{2M_r}{\lambda\alpha(\alpha-1)}|1-e^{-\lambda(t_1-t_2)}|.
\end{aligned}
\tag{3.31}
$$

Qui est indépendante de x et tend vers zéro lorsque $t_2 \to t_1$. Donc $\mathscr{T}_1(\mathscr{B}_r)$ est équicontinue. Appliquant le Théorème d'Arzelà-Ascoli (voir l'annexe) , on déduit que $\mathscr{T}_1(\mathscr{B}_r)$ est relativement compact dans $\mathscr{C}$. Ceci implique que $\mathscr{T}_1$ est un opérateur compact.

Alors les conditions du Théorème Krasnoselkii (voir l'annexe) sont vérifiées et par conséquent notre problème possède au moins une solution. □

Exemple 3.1. Considérons le problème suivant :

$$
\begin{cases}
D_{\frac{5}{3}}(D+4)x(t) = L(t^3+e^{5t}+\sin x(t)), & t\in[0,1] \\
x(0)=0; \quad x'(0)=0; \quad x(1)=x(\frac{1}{2}).
\end{cases}
\tag{3.32}
$$

On a alors : $f(t,v)=L(t^3+e^{5t}+\sin v)$, $\alpha=\frac{5}{3}$, $\lambda=4$, $\eta=1/2$ et $\beta=1$.

On a :

$$
|f(t,v)-f(t,w)| = L|\sin v-\sin w|. \tag{3.33}
$$

En effet, d'après le Théorème des accroissements finis, il existe $c\in[v,w]$ tel que :

$$
\sin v-\sin w = (v-w)\sin'(c) = (v-w)\cos(c), \tag{3.34}
$$

et comme $|\cos(c)|\leq 1$, alors :

$$
|\sin v-\sin w| \leq |v-w|.
$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}
A_1 &= \sup_{t\in[0,1]} |A(t)| \\
&= \sup_{t\in[0,1]} \left| \frac{\lambda t - 1 + e^{-\lambda t}}{\lambda + e^{-\lambda} - 1 - \beta(\lambda\eta + e^{-\lambda\eta} - 1)} \right| \\
&= \frac{4 + e^{-4} - 1}{4 + e^{-4} - 1 - (2 + e^{-2} - 1)} \\
&\approx 1.6029,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B &= \frac{1 + A_1\Big(|\ \beta\ |\ \eta^{\alpha}(1 - e^{-\lambda\eta}) + 1 - e^{-\lambda}\Big)}{\lambda\alpha(\alpha - 1)} \\
&= \frac{1 + A_1\Big((1/2)^{\frac{5}{3}}(1 - e^{-2}) + 1 - e^{-4}\Big)}{4.4444} \\
&\approx 0.7283,
\end{aligned}$$

choisissons L tel que $L < 1/B$ donc $L < 1.3731$.

Les conditions de Théorème 3.1 sont vérifiées, alors le problème (3.32) possède une solution unique.

ANNEXE

Dans cette annexe, on introduit quelques théorèmes qui sont utilisés dans ce mémoire.

Théorème 3.3 (Théorème du point fixe de Banach (1922)). [19] Soit (E, d) un espace métrique, complet non vide et $\mathscr{T} : E \to E$ une application contractante

$$d(\mathscr{T}x, \mathscr{T}y) \leq k\ d(x, y), \quad 0 < k < 1,$$

avec la constante de contraction k, alors $\mathscr{T}$ a un point fixe unique dans E.

Théorème 3.4 (Arzelà-Ascoli). [9] Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$. L'ensemble $C(K, \mathbb{R})$ est muni de la norme $\|f\| = \sup_{x \in K}|f(x)|$.
Soit M une partie équicontinue de $\mathscr{C}(K, \mathbb{R})$ telle que l'ensemble $\{f(x), f \in M\}$ soit borné pour tout $x \in K$. Alors M relativement compact dans $\mathscr{C}(K, \mathbb{R})$

Théorème 3.5 (Théorème du point fixe de Krasnoselskii (1955)). [5] Soit N un ensemble non vide, fermé et convexe d'un espace de Banach X. Soit $\mathscr{T}_1$ et $\mathscr{T}_2$ deux opérateurs de N tels que :

(i) $\mathscr{T}_1 x + \mathscr{T}_2 y \in N, \quad x, y \in N.$

(ii) $\mathscr{T}_1$ est compact et continu.

(iii) $\mathscr{T}_2$ est une contraction.

Alors, il existe $z \in N$ tel que $z = \mathscr{T}_1 z + \mathscr{T}_2 z$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] T. Abdeljawad, *On Conformable Fractional Calculus, Journal of Computational and Applied Mathematics*, 279 (57-66), 2015.

[2] A. Atangana, D. Baleanu, A. Alsaedi, *New Properties Of Conformable Derivative*, De Gruyter Open, Open Math, 13 : 889–898, 2015.

[3] K. Assaleh, W.M. Ahmad, *Modeling of Speech Signals Using Fractional Calculus*, 9th International Symposium on Signal Processing and Its Applications, 2007. ISSPA 2007. 12-15, 2007.

[4] Z. Al-zhour, F. Alrawjeh, N. Al-mutairi, R. Alkhawneh, *New Results On The Conformalble Cractional Sumudu Transform : Theories And Applications*, International Journal of Analysis and Applications, 17 (6), 2019.

[5] H. Batarfi, J. Losada, J. Nieto, W. Shammakh, *Three-Point Boundary Value Problems for Conformable Fractional Differential Equations*, Journal of Function Spaces, 2015.

[6] M. Bashour. *Applications of Fractional Calculus*, Applied Mathematical Sciences, Vol. 4, 2010, no. 21, 1021-1032, 2009.

[7] S. Carl, S.Heikkila, *Fixed Point Theory in Ordered sets and Applications*, Springer New York Dordrecht Heidelberg London, 2010.

[8] A. Kilbas, M.H. Srivastava and J.J. Trujillo, *Theory and Application of Fractional Differential Equations*, North Holland Mathematics Studies 204, 2006.

[9] R. Danchin, *Cours de Topologie et d'Analyse Fonctionnelle*, Master première année, 2013.

[10] Birgani et al, *A Note on Some Recent Results of The Conformable Derivative*, Adv. Theory Nonlinear Anal. Appl. 2019.

[11] R. Hilfer, *Applications of fractional calculus in physics,World Scientific*, Singapore, 2000.

[12] A. Kilbas, M.H. Srivastava and J.J. Trujillo, *Theory and Application of Fractional Differential Equations*, North Holland Mathematics Studies 204, 2006.

[13] R. Khalil, M. Al Horani, A. Yousef, M. Sababheh, *"A New Definition of Fractional Derivative "*. Journal of Computational and Applied Mathematics,264 (65-70), 2014.

[14] A. M. Elshenhab, X. Wang , F. Mofarreh and O. Bazighifan, *Exact Solutions and Finite Time Stability of Linear Conformable Fractional Systems with Pure Delay*, 2023.

[15] F. Martínez, I. Martínez, M A. Kaabar, R. Ortíz-Munuera, S. Paredes, *Note on the Conformable Fractional Derivatives and Integrals of Complex-valued Functions of a Real Variable*, IAENG International Journal of Applied Mathematics, 50 : 3, September 2020.

[16] M. Molafi, F. D. Saei, M. Javidi, AND Y. Mahmoudi, *New Analytical Methods for Solving a Class of Conformable Fractional Differential Equations by Fractional Laplace Transform, Computational Methods for Differential Equations*, 2021.

[17] M. Musraini, R. Efendi, L. Endang , P. Hidayah, « *Classical Properties on Conformable Fractional Calculus* ». Pure and Applied Mathematics Journal, 8 (5) : 83-87, 2019.

[18] R. L. Magin, *Fractional calculus in Bioengineering*, CR in Biomedical Engineering, 2004.

[19] D. R. Smart.*Fixed point theorems*. Cambridge Uni.Press.Cambridge 1974.

[20] D.R. Anderson and D.J. Ulness, *Properties of the Katugampola Fractional Derivative with Potential Application in Quantum Mechanics*, J. Math. Phys, 2015.

[21] D. R. Anderson, E. Camrud, D. J. Ulness, *ON THE Nature OF THE Conformable Derivative AND Its Applications TO Physiqs*, Vol. 10(2) July 2019, pp. 92-135, 2019.

[22] F. S. Silva, D M. Moreira, M A. Moret, *Conformable Laplace Transform of Fractional Differential Equations*, Peer-reviewed version available at Axioms, 2018.

[23] O. S. Iyiola and E.R. Nwaeze, *Some New Results on the New Conformable Fractional Calculu Swith Application Using D'Alambert Approach*, Progr.Fract. Dier. Appl 2, 115-122, (2016).

[24] N. Sene, *Solutions For Some Conformable Differential Equations*, Progr. Fract. Differ, 493-501, 2018.