

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de La Recherche
Scientifique

Université Djilali Bounaama-Khemis Miliana
Faculté des Sciences et de la technologie
Département de Mathématiques et informatique



Mémoire de fin d'étude
En vue de l'obtention d'un diplôme de Master en
Mathématiques
Spécialité Analyse Mathématique et Applications

Thème :

Le théorème d'Arzelà-Ascoli pour un espace
quasi-métrique

Présenté par :

HARIZI Haizia

Devant le jury composé par :

Président :	Ali KRELIFA	Université de Khemis Miliana
Examineur :	Boualem SADAoui	Université de Khemis Miliana
Examineur :	Omar BENNICHE	Université de Khemis Miliana
Encadrant :	Leila SLIMANE	Université de Khemis Miliana

Année universitaire : 2021-2022

Remerciement

Tout d'abord, je remercie Dieu le tout puissant, de m'avoir donné le courage, la santé et la patience durant tout le temps que j'ai consacré à la réalisation de ce travail.

Je tiens à adresser mes sincères remerciements à mon encadreur monsieur "SLIMANE Leila" pour son encouragement, son aide et son suivi pour terminer ce travail.

Je voudrais remercier messieurs les membres de jury, a que tous les enseignants du département de mathématiques.

A la fin, je remercie tous ceux qui de près ou de loin m'ont aidée à la réalisation de ce travail.

MERCI

Dédicace

Je dédie ce travail :

À

celui qui a épuisé sa jeunesse et sa vie, qui n'a vécu que pour me voir réussir, à mon premier encadrant depuis ma naissance, à mon cher père que Dieu lui fasse miséricorde :

" Taieb. "

À

celle qui m'a donné la vie, qui a bercé mes nuits, a mon soleil qui brille, le symbole de tendresse, à ma chère mère.

À

mon cher mari Ahmed à mon cher enfant Taha, et à mes beaux parents.

À

mes frères : Boumadian, Mohamed et Taieb.

À

mes amies : Akila, Imen, Khouloud, Nadjat.

À

La famille : HARIZI et BOUADJLA

HARIZI Haizia

Table des matières

1	Préliminaires	6
1.1	Espaces métriques	6
1.1.1	Topologie des espaces métriques	7
1.1.2	Continuité dans les espaces métriques	8
1.1.3	Compacité dans les espaces métriques	9
1.1.4	Espaces précompacts	10
1.1.5	Complétude	11
1.2	Espaces vectoriels normés	11
1.2.1	Espaces normés de dimension finie	12
2	Théorème d'Arzelà-Ascoli pour un espace métrique	14
2.1	Espace des applications continues	14
2.1.1	Convergences simple et uniforme d'une suite de fonctions	14
2.2	Ensemble équicontinue	17
2.3	Théorème d'Arzelà-Ascoli	19
2.4	Applications du théorème d'Ascoli	25
2.4.1	Compacité dans L^p	25
2.4.2	Opérateur à noyau	27
2.4.3	Théorème d'Ascoli-Peano-Arzelà	28
3	Théorème d'Arzelà-Ascoli pour un espace quasi-métrique	31
3.1	Topologie des espaces quasi-métrique	31
3.2	Complétude et compacité	34
3.3	Équicontinuité et compacité	36
3.4	Le théorème d'Arzelà-Ascoli	38

Introduction

Le théorème d'Arzelà-Ascoli, ou le théorème d'Ascoli, est un théorème fondamental en analyse fonctionnelle qui permet de caractériser les ensembles relativement compacts dans l'espace des fonctions continues. Notons que l'espace des fonctions continues est un espace de dimension infinie, donc les ensembles bornés ne sont pas nécessairement relativement compacts comme dans le cas de dimension finie. Une forme faible de ce théorème a été prouvée par Ascoli (1883-1884), qui a établi la condition suffisante pour la compacité, et par Arzelà (1895), qui a établi la condition nécessaire et a donné la première présentation claire du résultat. Ce théorème possède des applications en plusieurs domaines de mathématiques : analyse fonctionnelle, les équations différentielles, analyse complexe... etc.

L'objectif de ce travail est d'étudier le théorème d'Arzelà-Ascoli. On présente ce théorème fondamental dans le cas des espaces métriques, ainsi que quelques de ses applications et on l'étudie pour un espace quasi-métrique, appelé aussi espace métrique asymétrique (ces espaces sont définis comme les espaces métriques, mais sans la condition de la symétrie $d(x, y) = d(y, x)$).

Ce mémoire est composé de trois chapitres. Dans le premier chapitre on commence par rappelle de quelques définitions, notions et propriétés comme convergence, continuité, compacité et complétude dans le cadre des espaces métriques. Dans le deuxième chapitre, on expose quelques concepts dans le contexte de l'espace des fonctions continues comme la convergence uniforme, l'équicontinuité et l'équicontinuité uniforme. Le théorème d'Ascoli pour les espaces métriques et quelques de ses applications sont aussi étudiés le dernier chapitre est consacré au théorème d'Ascoli pour les espaces quasi-métriques. Afin de présenter ce théorème et sa démonstration, on donne les notions de convergence, continuité, compacité, complétude et équicontinuité dans le cadre de ce type d'espaces.

Dans ce chapitre on donne les notions de base d'un espace métrique et d'un espace vectoriel normé.

1.1 Espaces métriques

Définition 1.1.1. Soit X un ensemble. On dit qu'une application $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ est une distance sur X si les trois propriétés suivantes sont vérifiées :

- i) symétrie : pour tout $(x, y) \in X^2$, on a $d(x, y) = d(y, x)$,
- ii) positivité : pour tout $(x, y) \in X^2$, on a $d(x, y) \geq 0$ et $d(x, y) = 0$ si et seulement si $x = y$,
- iii) inégalité triangulaire : pour tout $(x, y, z) \in X^3$, on a $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Le couple (X, d) est alors appelé espace métrique.

Exemple 1.1.1.

1. Sur \mathbb{R} la distance usuelle est définie par : $d(x, y) = |x - y|$.
2. Si X un ensemble quelconque, on définit une distance sur X en posant

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = y \\ 1, & \text{si } x \neq y. \end{cases}$$

Définition 1.1.2. On dit qu'une partie A d'un espace métrique (X, d) est bornée s'il existe $x \in X$, et un réel positif M tels que

$$\forall a \in A, d(a, x) \leq M.$$

Définition 1.1.3. Soit A et B deux parties non vides de l'espace métrique (X, d) et $x \in X$.

— Le réel positif

$$d(x, A) \stackrel{\text{déf}}{=} \inf_{a \in A} d(x, a),$$

est appelé distance de x à l'ensemble A .

— Le réel positif

$$d(A, B) \stackrel{\text{déf}}{=} \inf\{d(a, b) / (a, b) \in A \times B\},$$

est appelé distance de A à B .

Définition 1.1.4. Soit (X, d) un espace métrique et Y une partie de X . La restriction de la fonction d à l'ensemble $Y \times Y$ est une distance sur Y appelée distance induite.

1.1.1 Topologie des espaces métriques

Dans tout espace métrique, la distance permet de définir des boules.

Définition 1.1.5. Soit (X, d) un espace métrique, x_0 un élément de X et r un réel positif.

— L'ensemble $B_X(x_0, r) \stackrel{\text{déf}}{=} \{x \in X, d(x_0, x) < r\}$ (noté aussi $B(x_0, r)$) est appelé boule ouverte de centre x_0 et de rayon r .

— L'ensemble $\bar{B}_X(x_0, r) \stackrel{\text{déf}}{=} \{x \in X, d(x_0, x) \leq r\}$ (noté aussi $\bar{B}(x_0, r)$) est appelé boule fermée de centre x_0 et de rayon r .

— L'ensemble $S_X(x_0, r) \stackrel{\text{déf}}{=} \{x \in X, d(x_0, x) = r\}$ (noté aussi $S(x_0, r)$) est appelé sphère de centre x_0 et de rayon r .

Définition 1.1.6. Un sous-ensemble Ω d'un espace métrique (X, d) est dit ouvert si pour tout $x \in \Omega$ il existe $r > 0$ tel que $B_X(x, r) \subset \Omega$.

Définition 1.1.7. (Suites convergentes) [8]

On dit qu'une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite x dans l'espace métrique (X, d) si et seulement si on a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq n_0 \text{ alors } d(x_n, x) < \varepsilon.$$

Si la limite d'une suite existe, elle est nécessairement unique.

Définition 1.1.8. (Valeur d'adhérence) [8]

Soient $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments d'un espace métrique (X, d) et a un point de X . On dit que a est une valeur d'adhérence de $(x_n)_n$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \forall n_0 \in \mathbb{N}, \exists n \geq n_0 \text{ tel que } d(x_n, a) < \varepsilon.$$

Remarque 1.1.1. Dans un espace métrique, l'adhérence \bar{A} d'une partie A , qui est le plus petit fermé contenant A , et donc l'ensemble des limites des suites convergentes d'éléments de A .

Proposition 1.1.1. [8] Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de points de l'espace métrique (X, d) . Alors a est valeur d'adhérence de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si et seulement si il existe une suite extraite $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers a .

1.1.2 Continuité dans les espaces métriques

Dans un espace métrique, l'ensemble des boules ouvertes centrées en un point constitue une base de voisinages de ce point.

En conséquence, une fonction f définie sur une partie A d'un espace métrique (X_1, d_1) et à valeurs dans un espace métrique (X_2, d_2) est continue en $x \in A$ si et seulement si on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall y \in X_1 \cap A, d_1(x, y) < \delta \implies d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Proposition 1.1.2. [3] Une application entre deux espaces métriques est continue en un point si et seulement si elle est séquentiellement continue en ce point. i.e :

Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite qui converge vers $x \in X$ alors $f(x_n)$ converge vers $f(x)$.

Nous avons vu que pour une application $f : (X_1, d_1) \rightarrow (X_2, d_2)$ entre deux espaces métriques, la continuité en tout point est caractérisée de la façon suivante :

$$\forall \varepsilon > 0, \forall x \in X_1, \exists \delta(X, \varepsilon), \forall y \in X_1, d_1(x, y) < \delta \implies d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

On peut définir une notion plus forte de continuité appelée continuité uniforme :

Définition 1.1.9. On dit qu'une application $f : X_1 \rightarrow X_2$ entre deux espaces métriques (X_1, d_1) et (X_2, d_2) est uniformément continue si l'on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in X_1, \forall y \in X_1, d_1(x, y) < \delta \implies d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Définition 1.1.10. Soit k un réel positif. Une application f entre deux espaces métriques (X_1, d_1) et (X_2, d_2) est dite lipschitzienne de rapport k si

$$\forall (x, y) \in X_1 \times X_1, d_2(f(x), f(y)) \leq kd_1(x, y).$$

Remarque 1.1.2. On a si $f : X \rightarrow Y$ est lipschitzienne alors elle est uniformément continue et si elle est uniformément continue alors elle est continue sur X :

$$f \text{ lipschitzienne} \implies f \text{ uniformément continue} \implies f \text{ continue.}$$

En revanche les réciproques de ces résultats ne sont pas toujours vraies. On note de plus, que les propriétés de continuité, d'uniforme continuité et lipschitzienne sont invariantes par changement de distances en une distance équivalente.

Exemple 1.1.2. Dans \mathbb{R}^+ muni de la valeur absolue, on a les fonctions suivantes :

1. $f(x) = 5x + 7$ est lipschitzienne de rapport 5.
2. $g(x) = \sqrt{x}$ est uniformément continue mais pas lipschitzienne.
3. $h(x) = x^2$ est continue mais elle est ni uniformément continue ni lipschitzienne.

1.1.3 Compacité dans les espaces métriques

Définition 1.1.11. On dit qu'un espace E est compact si de tout recouvrement ouvert de E on peut extraire un sous-recouvrement fini, ou bien :

$\forall (\Omega_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts telle que $\bigcup_{i \in I} \Omega_i = E$, $\exists J \subset I$, avec J fini, tel que $\bigcup_{i \in J} \Omega_i = E$ $i \in J$.

En général, la continuité uniforme est une notion strictement plus forte que la continuité. Le théorème suivant établit que dans un espace métrique compact, la continuité implique la continuité uniforme.

Théorème 1.1.1. (de Heine)

Soit (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques. Supposons (X, d_X) compact. Alors toute fonction continue de X vers Y est uniformément continue sur X .

Preuve : Fixons $\varepsilon > 0$. Par définition de la continuité, pour chaque $x \in X$, il existe $\eta_x > 0$ tel que

$$d_X(x, y) < \eta_x \implies d_Y(f(x), f(y)) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Par compacité de X , on peut trouver un nombre fini de points x_1, \dots, x_N tels que

$$X \subset \bigcup_{k=1}^N B_X \left(x_k, \frac{\eta_{x_k}}{2} \right).$$

Posons $\eta = \min_{1 \leq k \leq N} \eta_{x_k}$. Pour tout couple (x, y) tel que $d_X(x, y) < \frac{\eta}{2}$, on peut trouver un indice k tel que x et y soient dans $B_X(x_k, \eta_{x_k})$. On a alors

$$d_Y(f(x), f(y)) \leq d_Y(f(x), f(x_k)) + d_Y(f(x_k), f(y)) < \varepsilon,$$

d'où la continuité uniforme. ■

Dans les espaces métriques, la compacité peut se caractériser à l'aide de suites. Ce fait fondamental est l'objet du théorème ci-dessous.

Théorème 1.1.2. (de Bolzano-Weierstrass) [1]

Un espace métrique (X, d) est compact si et seulement si toute suite d'éléments de X admet une sous-suite convergente.

Définition 1.1.12. On dit qu'une partie A d'un espace métrique X est relativement compacte si son adhérence \bar{A} est compacte.

Corollaire 1.1.1. [3] Soit (X, d) un espace métrique. Une partie A de X est relativement compacte si et seulement si de toute suite d'éléments de A , on peut extraire une sous-suite qui converge dans X .

Corollaire 1.1.2. [3] Dans un espace métrique, toute partie relativement compacte est bornée et toute partie compacte est fermée bornée.

Théorème 1.1.3. [3] Le produit cartésien d'espaces métriques compacts est un espace métrique compact.

Définition 1.1.13. (Séparabilité)

Un espace métrique (X, d) est séparable s'il existe une partie A de X qui soit à la fois dénombrable et dense dans X .

Proposition 1.1.3. Tout espace métrique compact est séparable.

1.1.4 Espaces précompacts

Définition 1.1.14. (Espace précompact)

On dit qu'un espace métrique (X, d) est précompact si, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut le recouvrir par un nombre fini de boules de rayon ε , i.e s'il existe un nombre fini de points $x_1, \dots, x_n \in X$ tels que

$$X = \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \varepsilon).$$

Proposition 1.1.4. [1] Soit (X, d) un espace métrique, on a les propriétés suivantes :

1. Si (X, d) est compact, alors il est précompact.
2. Si (X, d) est précompact, alors toute suite de points de X admet une sous-suite de Cauchy.
3. Si (X, d) est complet et précompact, alors (X, d) est compact.

Corollaire 1.1.3. [1] Soit (X, d) un espace métrique et A une partie de X .

1. Le sous-espace (A, d) est précompact si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut recouvrir A par un nombre fini de boules ouvertes de X de rayon ε .
2. Si (A, d) est précompact et (X, d) est complet, alors \bar{A} est compact.

1.1.5 Complétude

Rappelons tout d'abord la définition de suite de Cauchy.

Définition 1.1.15. Soit (X, d) un espace métrique, on dit qu'une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $X^{\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy si elle vérifie :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p \geq N \text{ et } n \geq N \implies d(x_n, x_p) < \varepsilon.$$

Définition 1.1.16. L'espace métrique (X, d) est dit complet si toute suite de Cauchy d'éléments de X converge dans X . Une partie A d'un espace métrique est dite complète si, munie de la distance induite, c'est un espace métrique complet.

Proposition 1.1.5. [3] Soit (X, d) et (X', d') deux espaces métriques. Supposons qu'il existe une application bijective $f : X \rightarrow X'$ telle que f et f^{-1} soient uniformément continues. Alors (X, d) est complet si et seulement si (X', d') est complet.

Proposition 1.1.6. [3] Toute partie complète est fermée et Toute partie fermée d'un espace métrique complet est complète.

Proposition 1.1.7. [3] Le produit cartésien d'un nombre fini d'espaces métriques complets est un espace métrique complet.

Corollaire 1.1.4. [3] Soit (X, d) un espace métrique complet et A une partie de X . Il y a équivalence entre les deux énoncés suivants :

- i) la partie A est relativement compacte,
- ii) pour tout $\varepsilon > 0$, la partie A peut être recouverte par un nombre fini de boules centrées en des points de A .

Corollaire 1.1.5. [3] Les compacts de \mathbb{R} sont les ensembles fermés bornés.

Théorème 1.1.4. [3] Soit (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques. Supposons (Y, d_Y) complet. Soit A une partie dense de X et $f : A \rightarrow Y$ uniformément continue.

Alors il existe une unique application $\bar{f} : X \rightarrow Y$ continue sur X qui prolonge f sur X . De plus ce prolongement est uniformément continu sur X .

1.2 Espaces vectoriels normés

Définition 1.2.1. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . Une norme sur E est une application $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ vérifiant :

i) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$.

ii) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E : \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ (homogénéité).

iii) $\forall x, y \in E : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (inégalité triangulaire).

Le couple $(E, \|\cdot\|)$ est alors appelé espace vectoriel normé.

Définition 1.2.2. Soit E un espace vectoriel muni de deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$.

1. On dit que $\|\cdot\|_2$ est plus forte que $\|\cdot\|_1$ s'il existe $c > 0$ telle que :

$$\forall x \in E, \quad \|x\|_1 \leq c \|x\|_2.$$

2. On dit que $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont équivalentes s'ils existent $c_1 > 0$ et $c_2 > 0$ telles que :

$$\forall x \in E, \quad c_1 \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq c_2 \|x\|_2.$$

Il est évident que les distances associées à deux normes équivalentes sont équivalentes.

Remarque 1.2.1. Un produit d'un nombre fini d'espaces vectoriels normés est un espace vectoriel normé. Par contre, un produit infini d'espaces vectoriels normés muni de sa topologie produit n'est pas nécessairement un espace vectoriel normé.

Définition 1.2.3. On appelle espace de Banach tout espace normé complet.

Exemple 1.2.1. Les espaces \mathbb{R} et \mathbb{C} sont des Banach.

1.2.1 Espaces normés de dimension finie

Théorème 1.2.1. [3] Dans un espace vectoriel normé de dimension finie, les compacts sont les fermés bornés et toutes les normes sont équivalentes.

Corollaire 1.2.1. [3] Tous les espaces vectoriels normés de dimension finie sont complets.

Lemme 1.2.1. [8] Dans un espace vectoriels normés, un sous espace vectoriel de dimension finie est fermé.

Théorème 1.2.2. (de Riesz)[8]

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Alors E est de dimension finie si et seulement si sa boule unité fermée $B(0, 1)$ est compacte.

Remarque 1.2.2. Le théorème de Riesz affirme que dans un espace vectoriel normé de dimension infinie, les boules fermées de rayon non nul ne sont pas compactes. En particulier, en dimension infinie, les fermés bornés ne sont pas compacts.

Exemple 1.2.2. Dans l'espace $(C([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ la boule unité fermée n'est pas compacte. En effet, considérons la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 0}$ définies par : $f_n(x) = x^n$. La seule limite possible est la fonction :

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in [0, 1[, \\ 1, & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

Mais cette fonction n'est pas continue. Donc il n'existe aucune sous-suite de la suite $(f_n)_{n \geq 0}$ qui converge dans $(C([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$.

Théorème d'Arzelà-Ascoli pour un espace métrique

Dans ce chapitre on va étudier le théorème d'Arzelà-Ascoli, dans le cas d'un espace métrique. Quelques applications de ce théorème seront présentées.

Dans ce chapitre, (E, d_E) et (F, d_F) désignent deux espaces métriques, et on note $\mathcal{C}(E, F)$ l'ensemble des applications continues de E vers F .

2.1 Espace des applications continues

Dans cette section on va donner les définitions de convergence simple et uniforme d'une suite de fonctions.

Proposition 2.1.1. *Supposons (E, d_E) compact. Alors la fonction d définie sur $\mathcal{C}(E, F) \times \mathcal{C}(E, F)$ par :*

$$d(f, g) = \sup_{x \in E} d_F(f(x), g(x)),$$

est une distance sur $\mathcal{C}(E, F)$.

Preuve : La seule chose à vérifier est que la fonction d est bien à valeurs finies. Soit donc (f, g) un couple de fonctions de $\mathcal{C}(E, F)$. Sachant que E est compact, les ensembles $f(E)$ et $g(E)$ sont aussi compacts, et donc bornés. En conséquence, l'ensemble $\{d_F(f(x), g(x)), x \in E\}$ est un borné de \mathbb{R}^+ . Des vérifications de routine permettent alors de conclure que d est bien une distance. ■

2.1.1 Convergences simple et uniforme d'une suite de fonctions

Définition 2.1.1. *On dit qu'une suite de fonction f_n , c'est-à-dire d'applications d'un ensemble E dans un espace métrique F , converge simplement, pour n tendant vers $+\infty$, vers une fonction*

limite f , si pour tout x de E , la suite des points $\{f_n(x)\}_{n \geq 0}$ de F converge, pour n tendant vers $+\infty$, vers le point $f(x)$ de F c'est-à-dire :

$$\forall x \in E, \forall \varepsilon > 0, \exists m \in \mathbb{N}, \forall n \geq m : d_F(f_n(x), f(x)) < \varepsilon.$$

Définition 2.1.2. On dit que la suite des fonctions f_n converge uniformément vers la fonction f , pour n tendant vers $+\infty$, si l'entier m peut être choisi indépendamment de x , c'est-à-dire seulement en fonction de ε ; autrement dit, si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists m \in \mathbb{N}, \forall x \in E, \forall n \geq m : d_F(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon.$$

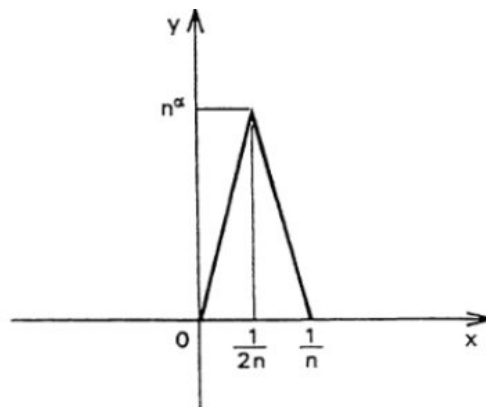
Cela s'écrit encore :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists m \in \mathbb{N}, \forall n \geq m : d(f_n, f) \leq \varepsilon.$$

(i.e la distance de f_n à f tend vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$).

Remarque 2.1.1. La convergence uniforme entraîne la convergence simple. La réciproque n'est pas vraie ; la convergence uniforme est une propriété beaucoup plus forte que la convergence simple.

Exemple 2.1.1. Considérons la fonction f_n ($n \geq 1$) réelle, d'une variable réelle, définie comme suit : elle est égale à 0, pour $x \leq 0$ et $x \geq \frac{1}{n}$, elle est égale à n^α , $\alpha > 0$, pour $x = \frac{1}{2n}$, et dans chacun des intervalles $[0, \frac{1}{2n}]$, $[\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}]$, elle est affine. Elle est représentée par le graphique suivant :



On constate que f_n converge simplement vers la fonction $f = 0$, quand $n \rightarrow +\infty$. En effet, $\forall x > 0$, pour n assez grand, on a $\frac{1}{n} < x$ et par conséquent, pour n assez grand, on a $f_n(x) = 0$; de plus pour $x \leq 0$, on a $f_n(x) = 0$ d'où le résultat que nous avons annoncé. Cependant, la distance de f_n et de 0 est égale à n^α , $d(f_n, 0) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - 0| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)| = n^\alpha$, que tend vers l'infini, donc f_n ne converge pas uniformément vers f .

Théorème 2.1.1. *Supposons (E, d_E) compact et (F, d_F) complet. Alors l'ensemble $\mathcal{C}(E, F)$ muni de la distance d est un espace métrique complet.*

Preuve : Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de fonctions de $\mathcal{C}(E, F)$. Il s'agit de montrer que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un élément f de $\mathcal{C}(E, F)$ au sens de la distance d .

1. Convergence simple :

En utilisant les définitions de suite de Cauchy et de la distance d , on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n \geq N \text{ et } p \geq N \implies \forall x \in E, d_F(f_n(x), f_p(x)) \leq \varepsilon. \quad (2.1)$$

La suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans F , pour $x \in E$ fixé et comme F est complet, $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est converge vers $f(x)$, tel que $f(x) \in F$.

2. Convergence uniforme :

Fixons $\varepsilon > 0$ et $n \geq N$ dans (2.1). En faisant tendre p vers $+\infty$, on obtient

$$\forall x \in E, d_F(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon.$$

En conséquence la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f .

3. Continuité de la fonction limite :

On va montrer que f est continue sur E . Soit donc $\varepsilon > 0$ et $x_0 \in E$. Pour tout $x \in E$ et $n \in \mathbb{N}$, on peut écrire :

$$d_F(f(x), f(x_0)) \leq d_F(f(x), f_n(x)) + d_F(f_n(x), f_n(x_0)) + d_F(f_n(x_0), f(x_0)).$$

Choisissons n de telle sorte que $\sup_{x \in E} d_F(f(x), f_n(x)) \leq \frac{\varepsilon}{3}$. On obtient :

$$\forall x \in E, d_F(f(x), f(x_0)) \leq \frac{2}{3}\varepsilon + d_F(f_n(x), f_n(x_0)). \quad (2.2)$$

Sachant que f_n est continue en x_0 , il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in E, d_E(x, x_0) \leq \eta \implies d_F(f_n(x), f_n(x_0)) \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

D'après (2.2), on a donc

$$\forall x \in E, d_E(x, x_0) \leq \eta \implies d_F(f(x), f(x_0)) \leq \varepsilon,$$

d'où la continuité en x_0 , i.e $f \in \mathcal{C}(E, F)$. ■

2.2 Ensemble équicontinue

La notion l'équicontinuité et l'équicontinuité uniforme feront l'objet de cette section.

Définition 2.2.1. Soit E un espace métrique, et \mathcal{F} une partie de $C(E, F)$ et x_0 un point de E . On dit que \mathcal{F} est équicontinue en x_0 si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta = \eta(\varepsilon, x_0) > 0, \forall f \in \mathcal{F}, \forall y \in E, d_E(x_0, y) < \eta \Rightarrow d_F(f(x_0), f(y)) < \varepsilon. \quad (2.3)$$

On dit que \mathcal{F} est équicontinue sur E si \mathcal{F} est équicontinue en tout point de E .

On remarque que η ne dépend pas de la fonction choisie dans \mathcal{F} , de plus l'équicontinuité au point x_0 implique la continuité en ce point. En revanche, l'équicontinuité n'implique pas la continuité.

Remarque 2.2.1. La réunion de deux parties équicontinues de $C(E, F)$ est une partie équicontinue de $C(E, F)$.

Exemple 2.2.1. Soient E et F des espaces métriques et M un ensemble de fonctions uniformément holdérien d'ordre α , il existe $\alpha \in]0, 1]$ et une constante $k > 0$ telles que

$$\forall f \in M, \forall (x_1, x_2) \in E \times E, d(f(x_1), f(x_2)) \leq kd_E(x_1, x_2)^\alpha.$$

Alors M est un ensemble équicontinue $\left(\text{à } \varepsilon \text{ fixé, il suffit de prendre } \eta = \left(\frac{\varepsilon}{k} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \right)$.

En cas particulier l'ensemble \mathcal{F} des fonctions $f : E \rightarrow F$ lipschitziennes de rapport k est uniformément équicontinu sur E (à ε fixé, il suffit de prendre $\eta = \frac{\varepsilon}{k}$ dans 2.3).

Rappel 2.2.1. On dit que f est différentiable en a s'il existe une application linéaire $d_a f$ de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^p telle que

$$f(a+h) = f(a) + d_a f(h) + o_{h \rightarrow 0}(\|h\|).$$

Exemple 2.2.2. Soient Ω un ouvert d'un espace vectoriel normé E et M un ensemble de fonctions définies dans Ω , à valeurs dans un espace vectoriel normé F , différentiable en tout point de Ω . Supposons que les différentielles des fonctions de M soient bornées uniformément, i.e tel que

$$\exists k \geq 0, \forall f \in M, \forall x \in \Omega, \text{ on a } \|f'(x)\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq k.$$

Ce qui donne que l'ensemble M est équicontinu sur Ω . En effet, soient $x_0 \in \Omega$, B une boule de centre x_0 et de rayon $\eta > 0$ contenue dans Ω . Le théorème des accroissements finis donne :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall x \in B, \forall y \in B, \quad \text{on a} \\ \|f(x) - f(y)\|_F \leq \|x - y\|_E \sup_{\theta \in]0,1]} \|f'(\theta x + (1 - \theta)y)\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq k\|x - y\|_E, \end{array} \right.$$

ce qui implique bien l'équicontinuité puisque k ne dépend pas de f .

Définition 2.2.2. On dit que \mathcal{F} est uniformément équicontinue si l'on a la condition plus forte :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall f \in \mathcal{F}, \forall (x, y) \in E \times E, d_E(x, y) \leq \alpha \Rightarrow d_F(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Exemple 2.2.3. Une partie de $\mathcal{C}(E, F)$ avec un nombre finis d'éléments est toujours équicontinue. Si de plus les éléments de \mathcal{F} sont uniformément continus alors \mathcal{F} est uniformément équicontinue.

On sait que le théorème de Heine donne un résultat d'équivalence entre la continuité et la continuité uniforme sur un compact. On a un résultat similaire pour l'équicontinuité.

Lemme 2.2.1. [3] Soit \mathcal{F} une partie équicontinue de $\mathcal{C}(E, F)$. Supposons (E, d_E) compact. Alors \mathcal{F} est uniformément équicontinue sur E .

Exemple 2.2.4.

1. Soit $E = [0, 1]$ et $F = \mathbb{R}$ muni tous les deux de la distance $d(x, y) = |x - y|$. Soit

$$\mathcal{F} = \left\{ f \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R}) / \int_0^1 |f'(t)|^2 dt \leq 1 \right\}.$$

Alors \mathcal{F} est équicontinue sur $[0, 1]$. En effet, si x et y sont deux points de $[0, 1]$ tels que $x \leq y$, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz avec intégrale :

$$\left(\int_a^b h(x)g(x)dx \right) \leq \left(\int_a^b (h(x)^2 dx) \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b g(x)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

On a :

$$\begin{aligned} f(x) - f(y) &= \int_x^y f'(t)dt = \int_x^y f'(t) \cdot 1 dt \\ &\leq \left(\int_x^y (1)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_x^y f'(t)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \sqrt{y - x} \sqrt{\int_x^y f'(t)^2 dt} \leq \sqrt{y - x}. \end{aligned}$$

Il suffit de prendre $\eta = \varepsilon^2$.

2. Considérons l'ensemble :

$$M = \left\{ f_n = x \mapsto e^{-nx}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Alors M est équicontinue en tout point de $]0, 1]$ mais pas en 0. Le défaut d'équicontinuité en 0 est dû au fait que la suite $(f'_n(0))_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas bornée $\left(f'_n(x) = -ne^{-nx}, f'_n(0) = -n \right)$.

On sait que la propriété de la convergence uniforme est strictement plus forte que la convergence Simple. On a un résultat d'équivalence dans le cas particulier suivante.

Lemme 2.2.2. *Supposons (E, d_E) compact. Soit \mathcal{F} une partie uniformément équicontinue de $\mathcal{C}(E, F)$ et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de \mathcal{F} . On a l'équivalence suivante :*

$$(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge simplement vers } f \iff (f_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge uniformément vers } f.$$

Preuve : Il suffit de montrer l'implication directe. Soit $\varepsilon > 0$, par l'hypothèse de l'uniforme continuité de \mathcal{F} il existe un réel α strictement positif tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, d_E(x, x') < \alpha \implies d_F(f_n(x), f_n(x')) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

En passant à la limite, on voit que l'inégalité ci-dessus est aussi satisfaite par f . (f donc est uniformément continue). On recouvre ensuite le compact E par une famille finie de boules $(B_E(x_j, \alpha))_{1 \leq j \leq N_\varepsilon}$. Soit $x \in E$ et x_j tel que $x \in B_E(x_j, \alpha)$. On a :

$$\begin{aligned} d_F(f_n(x), f(x)) &\leq d_F(f_n(x), f_n(x_j)) + d_F(f_n(x_j), f(x_j)) + d_F(f(x_j), f(x)) \\ &\leq \frac{2}{3}\varepsilon + \max_{1 \leq i \leq N_\varepsilon} d_F(f_n(x_i), f(x_i)). \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall x \in E, \forall x \geq n_0 = d_F(f_n(x), f(x)).$$

D'où le résultat recherché i.e. la convergence uniforme. ■

2.3 Théorème d'Arzelà-Ascoli

Dans cette section on va présenter le résultat principal de ce chapitre, le théorème d'Arzelà-Ascoli, ou théorème d'Ascoli. C'est un résultat fondamental d'analyse fonctionnelle qui a de nombreuses applications. Ce théorème caractérise les parties relativement compactes de l'espace des fonctions continues $\mathcal{C}(E, F)$.

Théorème 2.3.1. *(d'Arzelà-Ascoli)*

Soit (E, d) un espace métrique compact (F, δ) un espace métrique complet.

Une partie A de $\mathcal{C}(E, F)$ est relativement compacte si et seulement si :

1. *A est équicontinue, c'est-à-dire :*

$$\forall x \in E, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall f \in A, \forall y \in E, (d_E(x, y) \leq \eta) \implies (d_F(f(x), f(y)) < \varepsilon).$$

2. *Pour tout $x \in E$, l'ensemble $A(x) = \{f(x), f \in A\}$ est relativement compact dans F .*

Preuve :

On commence par démontrer l'implication directe du théorème d'Ascoli.

Supposons que A soit relativement compacte. Comme $\mathcal{C}(E, F)$ est un espace métrique complet, car F est complet A est précompact. Autrement dit, pour tout réel $\varepsilon > 0$, on peut choisir un nombre fini d'éléments f_1, \dots, f_p dans A tel que :

$$A \subset \bigcup_{i=1}^p B(f_i, \varepsilon).$$

Cela signifie que toute fonction f dans A se trouve à une distance d'au plus ε de l'un des f_i . Pour x fixé dans E , toute image $f(x)$ se trouve donc à une distance au plus ε de l'un des $f_i(x)$.

Ainsi :

$$A(x) \subset \bigcup_{i=1}^p B(f_i(x), \varepsilon).$$

Une telle inclusion étant valable pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble $A(x)$ est précompact. Comme F est complet, $A(x)$ est relativement compact.

De plus, les fonctions f_i sont continues sur le compact E et donc, par le théorème de Heine, sont uniformément continues. En particulier,

$$\exists \eta_i > 0 / \forall x, y \in E, (d_E(x, y) < \eta_i) \Rightarrow (d_F(f_i(x), f_i(y)) < \varepsilon).$$

On pose $\eta = \min_{i=1, \dots, p} \eta_i > 0$. Soient x, y deux points quelconques dans E vérifiant $d_E(x, y) < \eta$. Pour une fonction f dans A , il existe un indice i pour lequel $\max_{z \in E} d_F(f(z), f_i(z)) < \varepsilon$. Par le choix de η , l'implication précédente donne :

$$d_F(f_i(x), f_i(y)) < \varepsilon.$$

Ce qui donne d'après l'inégalité triangulaire :

$$d_F(f(x), f(y)) \leq d_F(f(x), f_i(x)) + d_F(f_i(x), f_i(y)) + d_F(f_i(y), f(y)) < 3\varepsilon.$$

Cette inégalité vérifiée par tout x et y tels que $d(x, y) < \eta$, reste vrai, pour toute fonction $f \in A$. D'où l'équicontinuité de A .

• **Réciproquement**, on souhaite démontrer qu'une partie équicontinue A de $\mathcal{C}(E, F)$ telle que $A(x)$ soit relativement compacte pour tout x , est relativement compacte.

Comme $\mathcal{C}(E, F)$ est un espace métrique, il revient au même d'établir que l'adhérence de A est séquentiellement compacte, i.e. que toute suite d'éléments de l'adhérence de A admet une sous-suite convergente.

Soit donc $(f_p)_p$ une suite de \bar{A} . Comme E est un espace métrique compact, il est séparable et on peut donc se donner une partie dénombrable $D = \{a_k, k \in \mathbb{N}\}$ dense dans E .

Posons

$$G = \prod_{k \in \mathbb{N}} \overline{A(a_k)}.$$

Par hypothèse, $A(x)$ est relativement compact pour tout $x \in E$, autrement dit son adhérence est une partie compacte de F , l'espace X est défini comme le produit dénombrable d'espaces métriques compacts : c'est donc lui même un espace métrique compacte.

À chaque $f \in \bar{A}$, on fait correspondre l'élément $(f(a_k))_k$ de G . Donc à chaque $(f_p)_p$, on fait correspondre $h_p = (f_p(a_k))_k \in G$. De la suite $(h_p)_p \in G^{\mathbb{N}}$, on peut extraire, par compacité de G , une sous-suite convergente $(h_{\varphi(p)})_p$ qui converge vers $h = (h^{(k)})_k$. La continuité des projections p_k sur chacun des facteurs de G donne :

$$\forall k, p_k(h_{\varphi(p)}) = f_{\varphi(p)}(a_k) \longrightarrow h^{(k)} \in F.$$

Autrement dit, la sous-suite $(f_{\varphi(p)})_p$ est simplement convergente en tout point de E .

De plus, $(f_{\varphi(p)})_p \in \bar{A}^{\mathbb{N}}$ donc est équicontinue par la première hypothèse. Or on a d'après lemme 2.2.1 et 2.2.2 que si une suite de fonctions d'un espace métrique compact E dans un espace métrique complet F est simplement convergente sur E et équicontinue, alors cette suite est uniformément convergente sur E .

On en déduit que la sous-suite $(f_{\varphi(p)})_p$ est uniformément convergente sur G donc $(f_{\varphi(p)})_p$ converge dans $\mathcal{C}(E, F)$ muni de la topologie de la convergence uniforme et donc A est relativement compacte.

Donnons maintenant une autre démonstration de l'implication réciproque reposant sur la caractérisation des ensembles relativement compacts des espaces métriques complets donnée par le corollaire 1.1.4. Comme l'ensemble $\mathcal{C}(E, F)$ muni de la distance d est bien complet, car F est complet il suffit finalement de montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ l'ensemble \mathcal{F} peut être recouvert par un nombre fini de boules $B_{\mathcal{C}(E, F)}(f_i, \varepsilon)$ avec $f_i \in \mathcal{F}$.

Donc pour un $\varepsilon > 0$ fixé, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall f \in \mathcal{F}, \forall (x, y) \in E \times E, d_E(x, y) < \eta \implies d_Y(f(x), f(y)) < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (2.4)$$

Comme E est compact, il existe une famille finie (x_1, \dots, x_n) de points de E telle que

$$E \subset \bigcup_{i=1}^n B_E(x_i, \eta).$$

Par hypothèse, les n ensembles $\{f(x_i) / f \in \mathcal{F}\}$ sont relativement compacts dans Y , donc l'ensemble

$$\{(f(x_1), \dots, f(x_n)) / f \in \mathcal{F}\},$$

est relativement compact dans Y^n muni de la distance produit.

L'espace Y^n est complet car produit d'espaces métriques complets. Donc en vertu du corollaire 1.1.4, on peut le recouvrir par un nombre fini p de boules de type $B_{Y^n}((f_j(x_1), \dots, f_j(x_n)), \frac{\varepsilon}{3})$ avec $f_j \in \mathcal{F}$. On cherche à vérifier maintenant que

$$\mathcal{F} \subset \bigcup_{j=1}^p B_{\mathcal{C}(E,F)}(f_j, \varepsilon),$$

ou, de manière équivalente, que pour tout $f \in \mathcal{F}$, il existe $j \in \{1, \dots, p\}$ tel que

$$\forall x \in X, d_Y(f(x), f_j(x)) < \varepsilon.$$

Soit donc $f \in \mathcal{F}$ et $x \in X$. Choisissons $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $d_E(x, x_i) < \eta$ et $j \in \{1, \dots, p\}$ tel que $(f(x_1), \dots, f(x_n)) \in B_{Y^n}((f_j(x_1), \dots, f_j(x_n)), \frac{\varepsilon}{3})$. Écrivons que

$$d_Y(f(x), f_j(x)) \leq d_Y(f(x), f(x_i)) + d_Y(f(x_i), f_j(x_i)) + d_Y(f_j(x_i), f_j(x)).$$

Le choix de j assure que le deuxième terme du membre de droite est strictement plus petit que $\frac{\varepsilon}{3}$. Il en est de même des deux autres termes d'après (2.4). ■

Le théorème d'Ascoli, pour être utilisé pratiquement, suppose connues les parties compactes de F . Par exemple si $F = \mathbb{K}^n$, la condition 2 est équivalente à pour tout $x \in E$, $A(x)$ est une partie bornée.

Corollaire 2.3.1. *Soient E un espace compact, $\mathcal{C}(E, \mathbb{K})$ l'espace de Banach des fonctions continues dans E , à valeurs réelles ou complexes. Alors tout ensemble $M \subset \mathcal{C}(E, \mathbb{K})$, **fermé**, **borné** et **équicontinu** est une partie compacte de $\mathcal{C}(E, \mathbb{K})$, ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou \mathbb{R}).*

Preuve : L'hypothèse 1) du théorème d'Ascoli est satisfaite, montrons qu'il en est de même pour l'hypothèse 2). Puisque M est un ensemble borné dans $\mathcal{C}(E, \mathbb{K})$, il existe une boule B , de centre $g \in \mathcal{C}(E, \mathbb{K})$ et de rayon fini $\rho > 0$, contenant M . Donc,

$$\forall f \in M, \text{ on a } d(f, g) \leq \rho,$$

par la suite : $\forall f \in M, \forall x \in E$ on a $d_F(f(x), g(x)) \leq \rho$.

Alors $M(x)$ est contenu dans la boule de centre $g(x)$ et de rayon ρ , boule qui est compacte (fermé dans un compact est compact).

Alors, d'après le théorème d'Ascoli M est donc relativement compact, mais comme il est fermé, il est donc compact. ■

Remarque 2.3.1. Nous avons vu dans le chapitre 1 que la boule unité de $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{K})$ n'est pas compacte. C'est bien un ensemble fermé borné mais non équicontinu. De façon plus précise, montrons que la suite des $f_n(x) = x^n$ sur $[0, 1]$ n'est pas équicontinue au point $x = 1$. Si elle l'était, on aurait pour tout $\varepsilon > 0$, $\exists \eta(\varepsilon) > 0$ tel que

$$\forall x \in [0, 1], \forall n \geq 0 \quad [(0 \leq 1 - x \leq \eta) \implies 0 \leq 1 - x^n \leq \varepsilon].$$

Prenons

$$\varepsilon = \frac{e - 1}{2e},$$

soit N un entier tel que

$$\frac{1}{N} \leq \eta(\varepsilon).$$

Alors $\forall n \geq N$, le point $x = 1 - \frac{1}{n}$ satisfait $0 \leq 1 - x \leq \eta$, donc on a

$$\forall n \geq N, 0 \leq 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \leq \frac{e - 1}{2e},$$

passant à la limite $n \rightarrow +\infty$, et sachant que

$$\lim \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{-1} = \frac{1}{e},$$

on trouve :

$$\frac{e - 1}{e} \leq \frac{e - 1}{2e},$$

qui est fausse. Cette suite de fonctions n'est donc pas un ensemble équicontinu.

Exemple 2.3.1. Voici un autre exemple d'ensemble borné de $\mathcal{C}([0, 1])$ qui n'est pas équicontinu. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, soit la fonction définie dans $[0, 1]$ par :

$$f_\lambda : x \mapsto \sin \lambda x. \tag{2.5}$$

Soit $M = \{f_\lambda, \lambda \in \mathbb{R}\}$ l'ensemble de ces fonctions lorsque λ parcourt \mathbb{R} . On remarque que M est contenu dans la boule unité de $\mathcal{C}([0, 1])$. Pour tout λ , on a $f_\lambda(0) = 0$, alors si l'ensemble M est équicontinu en 0, il existerait $\eta > 0$ tel que :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in [0, 1], 0 \leq x \leq \eta \implies |f_\lambda(x)| \leq \frac{1}{2}. \tag{2.6}$$

Posons $x = \frac{1}{N}$, pour N assez grande tel que $\frac{1}{N} \leq \eta$, et posons $\lambda = N\frac{\pi}{2}$ on a :

$$f_\lambda(x) = f_\lambda\left(\frac{1}{N}\right) = \sin\left(\frac{N\pi}{2} \cdot \frac{1}{N}\right) = \sin \frac{\pi}{2} = 1.$$

En effet cet ensemble n'admet pas une sous-suite uniformément convergente dans $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ c'est-à-dire M n'est pas relativement compacte.

Corollaire 2.3.2. [3] Soit K un compact de \mathbb{R}^n . L'ensemble $\mathcal{C}(K; \mathbb{R})$ est muni de la norme

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in K} |f(x)|.$$

Soit \mathcal{M} une partie équicontinue de $\mathcal{C}(K; \mathbb{R})$ telle que l'ensemble $\{f(x) \mid f \in \mathcal{M}\}$ soit borné pour tout $x \in K$. Alors \mathcal{M} est relativement compacte dans $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$.

Comme application directe de ce corollaire on a le résultat suivant

Soit $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite de $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{K})$, on suppose qu'il existe une constante $k > 0$ telle que

$$|f_n(y) - f_n(x)| < k|y - x|,$$

$\forall n \geq 0$, et $\forall x, y \in [0, 1]$, et on suppose qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall n \geq 0, \sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x)| \leq C.$$

Donc d'après le théorème d'Ascoli Arzelà, on peut extraire de la suite $(f_n)_{n \geq 0}$ une sous-suite qui converge dans $(\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty)$ i.e. une sous-suite qui converge uniformément sur $[0, 1]$.

Exemple 2.3.2. Soit

$$\mathcal{F} = \left\{ f \in \mathcal{C}^1([0, 1]; \mathbb{R}) / \int_0^1 |f(t)|^2 dt + \int_0^1 |f'(t)|^2 dt \leq 1 \right\}.$$

D'après l'exemple 2.2.4. On a déjà vu dans un exemple précédent que \mathcal{F} était une partie uniformément équicontinue de $\mathcal{C}([0, 1]; \mathbb{R})$. D'autre part, si $f \in \mathcal{F}$ alors la fonction $|f|$ qui est aussi continue sur $[0, 1]$ atteint son minimum en un point $x_0 \in [0, 1]$.

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a pour tout $x \in [0, 1]$:

$$(|f(x)| - |f(x_0)|)^2 \leq |f(x) - f(x_0)|^2 \leq \left(\int_{x_0}^x |f'(t)| dt \right)^2 \leq |x - x_0| \left| \int_{x_0}^x |f'(t)|^2 dt \right| \leq \int_0^1 |f'(t)|^2 dt,$$

et on a

$$|f(x_0)|^2 \leq \int_0^1 |f(t)|^2 dt.$$

En conséquence, pour tout $x \in [0, 1]$, on a

$$|f(x)| = |f(x_0)| + |f(x) - |f(x_0)|| \leq \sqrt{\int_0^1 |f(t)|^2 dt} + \sqrt{\int_0^1 |f'(t)|^2 dt} \leq 2.$$

Les hypothèses du corollaire 2.3.2 sont vérifiées donc \mathcal{F} est une partie relativement compacte de $\mathcal{C}([0, 1]; \mathbb{R})$. Autrement dit de toute suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions de $\mathcal{C}^1([0, 1]; \mathbb{R})$ telles que

$$\int_0^1 |f_n(t)|^2 dt + \int_0^1 |f_n'(t)|^2 dt \leq 1,$$

on peut extraire une sous-suite convergente dans $\mathcal{C}([0, 1]; \mathbb{R})$.

2.4 Applications du théorème d'Ascoli

Le théorème d'Ascoli à plusieurs applications dans les domaines de l'analyse fonctionnelle, les équations différentielles ordinaires, l'analyse complexe,...ect. Dans cette section on présente quelques-unes de ces applications.

2.4.1 Compacité dans L^p

On définit l'espace $L^p(\mathbb{R}^d)$ par :

$$L^p(\mathbb{R}^d) = \left\{ f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}; \int_{\mathbb{R}^d} |f|^p dx < +\infty \right\}.$$

On munit l'espace $L^p(\mathbb{R}^d)$ on tout simplement L^p par la norme : $\|f\|_{L^p} = \left(\int_{\Omega} |f|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$, le cas où $p = \infty$, l'espace L^∞ est défini par :

$$L^\infty = \left\{ f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}, \exists c > 0 : |f(x)| \leq C \text{ presque par tout sur } \mathbb{R}^d \right\}.$$

Ce dernier espace est muni de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |f(x)|$.

Théorème 2.4.1 (Kolmogoroff frechet).

Soit A une partie bornée de $L^1(\mathbb{R}^d)$ vérifiant les hypothèses suivantes :

1. Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $R > 0$ tel que

$$\forall f \in A, \int_{|x| > R} |f(x)| dx \leq \varepsilon.$$

2. Si on définit, pour tout $h \in \mathbb{R}^d$, la quantité

$$\omega(h) = \sup_{f \in A} \|\tau_h f - f\|_{L^1},$$

alors on suppose que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \omega(h) = 0.$$

Alors A est relativement compacte dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ (i.e \bar{A} est compacte dans $L^1(\mathbb{R}^d)$).

Remarque 2.4.1. Le théorème reste vrai sans modification en remplaçant partout L^1 par L^p pour n'importe quel $p < +\infty$ mais pas dans L^∞ .

Preuve : Pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $r > 0$ on définit l'opérateur de moyenne

$$M_r f(x) = \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} f(y) dy = \frac{1}{|B(0, r)|} \int_{B(0, r)} f(x + h) dh,$$

ou encore

$$M_r f = \frac{1}{|B(0, r)|} \int_{B(0, r)} \tau_h f dh.$$

— On a les estimations suivantes :

$$\begin{aligned} \|M_r f\|_{L^1} &= \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{1}{|B(0, r)|} \int_{B(0, r)} |f(x+h)| dh dx \right| \\ &\leq \frac{1}{|B(0, r)|} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{B(0, r)} |f(x+h)| dh dx \\ &\leq \frac{1}{|B(0, r)|} \int_{B(0, r)} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x+h)| dx \right) dh \\ &\leq \frac{\Lambda}{|B(0, r)|} \int_{B(0, r)} dh \|f\|_{L^1} = \frac{1}{|B(0, r)|} |B(0, r)| \|f\|_{L^1} \end{aligned}$$

$$\implies \|M_r f\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1}, \quad \forall f \in L^1, \quad \forall r > 0$$

$$\begin{aligned} \|M_r f\|_{L^\infty} &= \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |M_r f(x)| = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \left| \frac{1}{|B(0, r)|} \int_{B(0, r)} f(x+h) dh \right| \\ &\leq \frac{1}{|B(0, r)|} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \int_{B(0, r)} |f(x+h)| dh \\ &\leq \frac{1}{|B(0, r)|} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} |f(x+h)| dh \\ &\leq \frac{1}{|B(0, r)|} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \|f\|_{L^1} = \frac{1}{|B(0, r)|} \|f\|_{L^1}. \end{aligned}$$

$$\implies \|M_r f\|_{L^\infty} \leq C_r \|f\|_{L^1}, \quad \forall f \in L^1, \quad \forall r > 0, \quad \text{avec } C_r = \frac{1}{|B(0, r)|}.$$

— $\forall r > 0$, l'ensemble $M_r A$ est équicontinu sur \mathbb{R}^d . En effet, on fixe $x \in \mathbb{R}^d$, et on écrit $\forall f \in A : M_r f(y) - M_r f(x) = M_r (\tau_{y-x} f - f)(x)$

$$\begin{aligned} \left| M_r f(y) - M_r f(x) \right| &= \left| M_r (\tau_{y-x} f - f)(x) \right| \\ &\leq \|M_r (\tau_{y-x} f - f)\|_{L^\infty} \\ &\leq M_r \|(\tau_{y-x} f - f)\|_{L^\infty} \\ &\leq C_r \|(\tau_{y-x} f - f)\|_{L^1} \\ &\leq C_r \sup_{f \in A} \|\tau_{y-x} f - f\|_{L^1} \\ &\leq C_r \omega(y-x). \end{aligned}$$

On obtient bien le résultat d'équicontinuité, comme $\lim_{h \rightarrow 0} \omega(h) = 0$.

— $\forall r, R > 0$, on définit l'espace $E_R = \mathcal{C}(\bar{B}(0, R), \mathbb{R})$ (muni de la norme infinie) puis le sous-espace

$$A_{r,R} = \left\{ (M_r f)|_{\bar{B}(0, R)}, \quad f \in A \right\} \subset E_R.$$

Donc, cet ensemble est équicontinu et $\forall x \in \bar{B}(0, R)$, on a $|M_r f(x)| \leq C_r \|f\|_{L^1} \leq C_{r,A}$. Ainsi on peut appliquer le corollaire 2.3.2 qui est une conséquence du théorème d'Ascoli à $A_{r,R}$ qui est donc un ensemble relativement compact dans E_R .

On fixe $\varepsilon > 0$, et on choisit le $R > 0$ correspondant à la première hypothèse du théorème, puis un $r > 0$ tel que $\omega(h) \leq \varepsilon$, $\forall |h| < r$ (ceci est possible grâce à la seconde hypothèse). D'après tout ce qui précède, et avec ce choix des paramètres, on peut trouver un nombre fini de boules de rayon $\frac{\varepsilon}{|B(0, R)|}$ qui recouvrent $A_{r,R}$, car $A_{r,R}$ est relativement compact dans ce cas : il existe $f_1, \dots, f_N \in E_R$ telles que

$$A_{r,R} \subset \bigcup_{i=1}^N B_{\|\cdot\|_\infty} \left(f_i, \varepsilon / |B(0, R)| \right).$$

Alors $\forall f \in A$, $\exists i \in \{1, \dots, N\}$ tel que

$$\|M_r f - f_i\|_{L^1(\bar{B}(0,R))} \leq |\bar{B}(0, R)| \|M_r f - f_i\|_\infty \leq \bar{B}(0, R) \frac{\varepsilon}{|B(0, R)|} = \varepsilon.$$

De plus, par contraction, on a :

$$\|f - M_r f\|_{L^1(B(0,R))} \leq \omega(r).$$

pour tout i , on note \tilde{f}_i le prolongement par 0 de f_i à l'espace \mathbb{R}^d tout entier. Alors $\forall f \in A$, nous avons

$$\begin{aligned} \|f - \tilde{f}_i\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} &= \|f 1_{|\cdot| > R}\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} + \|f - f_i\|_{L^1(B(0,R))} \\ &\leq \varepsilon + \underbrace{\|f - M_r f\|_{L^1(B(0,R))}}_{\leq \omega(r) \leq \varepsilon} + \underbrace{\|M_r f - f_i\|_{L^1(B(0,R))}}_{\leq \varepsilon} \\ &\leq 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Ainsi, nous avons montré que

$$A \subset \bigcup_{i=1}^N B_{L^1} (f_i, 3\varepsilon).$$

D'après le corollaire 1.1.3, ceci montre que A est relativement compact dans $L^1(\mathbb{R}^d)$. ■

2.4.2 Opérateur à noyau

On va présenter maintenant une autre application du théorème d'Arzelà-Ascoli, qui va être sur la compacité de l'opérateur à noyau

Commençons par donner la définition d'un opérateur compact

Définition 2.4.1. Soient E et F deux espaces de Banach ; une application linéaire continue $T \in \mathcal{L}(E, F)$ est dite compacte si l'image $T(\bar{B}_E)$ par l'application T de la boule unité fermée \bar{B}_E de l'espace E est relativement compacte (en norme) dans F . On note $\mathcal{K}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires compactes de E dans F . On pose $\mathcal{K}(E) = \mathcal{K}(E, E)$.

Proposition 2.4.1 (Opérateur à noyau).

Soit $k : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On note $E = C([0, 1], \mathbb{R})$ et on définit l'opérateur $T : E \rightarrow E$ pour tout $x \in [0, 1]$ tel que

$$Tf(x) = \int_0^1 k(x, y)f(y)dy.$$

L'opérateur T ainsi défini est compact.

Preuve : Les hypothèses du théorème de Heine sont vérifiées donc on déduit que k est uniformément continue sur $[0, 1] \times [0, 1]$, i.e :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y, x', y' \in [0, 1], \|(x, y) - (x', y')\| \leq \delta \Rightarrow |k(x, y) - k(x', y')| \leq \varepsilon.$$

Soit B la boule unité fermée de E et $A = T(B)$. On veut montrer que A est relativement compacte dans E et pour cela on va utiliser le théorème d'Ascoli.

— $\forall f \in B$, Tf vérifie l'estimation

$$|Tf(x)| \leq \int_0^1 |k(x, y)||f(y)| dy \leq \|k\|_\infty \|f\|_\infty \leq \|k\|_\infty, \forall x \in [0, 1],$$

donc

$$\|Tf\|_\infty \leq \|k\|_\infty,$$

ce qui prouve que tous les ensembles $\{Tf(x), f \in B\}$ sont bornés dans \mathbb{R} et donc relativement compacts dans \mathbb{R} . La deuxième hypothèse du théorème d'Ascoli est donc vérifiée.

— Montrons maintenant l'équicontinuité des éléments de A . On fixe $\varepsilon > 0$ et soit $\delta > 0$ donné par l'uniforme continuité de k .

On remarque alors que pour tout $(x, x') \in [0, 1]$ tel que $|x - x'| \leq \delta$, et pour tout $f \in B$, on a

$$|Tf(x) - Tf(x')| \leq \int_0^1 |k(x, y) - k(x', y)||f(y)| dy \leq \varepsilon \|f\|_\infty \leq \varepsilon.$$

On déduit que A est relativement compacte et par la suite l'opérateur T est compact. ■

2.4.3 Théorème d'Ascoli-Peano-Arzelà

On va donner une autre application du théorème d'Ascoli-Arzelà, dans le domaine des équation différentielle ordinaire (E.D.O)

Considérons l'équation différentielle ordinaire suivante :

U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$

$f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ continue

$$y' = f(t, y). \quad (2.7)$$

Définition 2.4.2. Une solution de (2.7) sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ est une fonction dérivable $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que

- $\forall t \in I, (t, y(t)) \in U$;
- $\forall t \in I, y'(t) = f(t, y(t))$.

Remarque 2.4.2. $y : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ est une solution de (E) avec condition initiale (t_0, y_0) , i.e.

$y(t_0) = y_0$, si et seulement si

- $\forall t \in I, (t, y(t)) \in U$;
- y est continue ;
- $\forall t \in I, y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds$.

Présentons maintenant le théorème d'Ascoli -Peano-Arzelà, qui donne un résultat d'existence de la solution dans problème (2.7) avec condition initiale

$$y(t_0) = y_0.$$

Théorème 2.4.2 (Ascoli-Peano-Arzelà).

Soit $(t_0, y_0) \in U$ et soit $r_0 > 0$ et $T > 0$ tels que $C := [t_0 - T, t_0 + T] \times \bar{B}(y_0, r_0) \subset U$ et $T \times \sup_{(t,y) \in C} \|f(t, y)\| < r_0$. Alors il existe une solution $y : [t_0 - T, t_0 + T] \rightarrow \bar{B}(y_0, r_0)$ de (2.7) avec condition initiale (t_0, y_0) .

Remarque 2.4.3. Il n'y a pas unicité en général. En fait il peut y avoir une infinité de solutions.

Par exemple pour l'EDO, $y' = 2\sqrt{|y|}$ les fonctions $y_\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définies par $y(t) = (t - \lambda)^2$ pour $t \geq \lambda$ et 0 sinon sont solutions pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^+$ avec condition initiale $y(0) = 0$.

Dans la preuve suivante, une subdivision Δ_N de l'intervalle $[t_0, t_0 + T]$ est une partition finie de l'intervalle $[t_0, t_0 + T]$:

$$\Delta_N := \{t_0 < t_1 < \dots < t_N = t_0 + T\}.$$

Le pas $\delta(\Delta_N)$ de la subdivision Δ_N est défini par

$$\delta(\Delta_N) := \max_{i=0, \dots, N-1} |t_{i+1} - t_i|.$$

Preuve : Pour toute subdivision Δ_n de $[t_0, t_0 + T]$ on définit $\phi_{\Delta_n} : [t_0, t_0 + T] \rightarrow \mathbb{R}$ par récurrence

$$\forall t \in [t_0, t_1] \quad \phi_{\Delta_n}(t) := y_0 + (t - t_0) f(t_0, y_0)$$

$$\forall t \in [t_n, t_{n+1}] \quad \phi_{\Delta_n}(t) := \phi_{\Delta_n}(t_n) + (t - t_n) f(t_n, \phi_{\Delta_n}(t_n)).$$

On observe que :

- pour tout $t \in [t_0, t_0 + T]$, $\phi_{\Delta_n}(t) \in \bar{B}(y_0, r_0)$ car $|\phi_{\Delta_n}(t) - y_0| \leq |t - t_0| \sup_{(t,y) \in C} \|f(t, y)\|$;
- ϕ_{Δ_n} est continue affine par morceaux et $\sup_{(t,y) \in C} \|f(t, y)\|$ -lipschitzienne.

On peut donc appliquer le théorème d'Ascoli dans $C([t_0, t_0 + T], \bar{B}(y_0, r_0))$ à $(\phi_{\Delta_n})_{n \in \mathbb{N}}$ avec $(\Delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des subdivisions telles que $\delta(\Delta_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$: il existe une sous suite encore notée $(\phi_{\Delta_n})_{n \in \mathbb{N}}$ convergente uniformément vers une fonction continue notée ϕ .

D'autre part, d'après le théorème des accroissements finis pour les fonctions continues \mathcal{C}^1 par morceaux, puis par l'uniforme continuité de f sur le compact \mathcal{C} , on peut montrer que $(\phi_{\Delta_n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers, $y_0 + \int_0^t f(s, \phi(s)) ds$.

On déduit :

$$\phi(t) = y_0 + \int_0^t f(s, \phi(s)) ds,$$

et donc ϕ est solution de (2.7) d'après la remarque 2.4.2 . ■

Théorème d'Arzelà-Ascoli pour un espace quasi-métrique

Ce chapitre est consacré au théorème d'Arzelà-Ascoli dans le cas d'un espace quasi-métrique. On commence par donner la définition d'un espace quasi-métrique, les notions de convergence, continuité, compacité et complétude sont présentées dans le cas de ce type d'espaces. La référence principale de ce chapitre est [2].

3.1 Topologie des espaces quasi-métrique

Dans cette section, nous discuterons la topologie des espaces quasi-métrique et certaines notions de continuité et limites dans ce type d'espaces.

Définition 3.1.1. Une application $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ est une *métrique asymétrique* (ou un *espace quasi-métrique*) et (X, d) est une *espace métrique asymétrique* si :

1. Pour tout $x, y \in X$, $d(x, y) \geq 0$ et $d(x, y) = 0$ si et seulement si $x = y$.
2. Pour tout $x, y, z \in X$, $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Remarque 3.1.1. Toute quasi-distance d induit une distance d' en passant :

$$d'(x, y) = \frac{d(x, y) + d(y, x)}{2}.$$

Exemple 3.1.1. Considérons un système de routes, dont certains sont éventuellement à sens unique, le temps nécessaire pour aller d'un endroit à un autre en passant par la route donne une quasi-distance (quasi-métrique).

Exemple 3.1.2. Soit $\alpha > 0$. Alors $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ définie par : $d(x, y) = \begin{cases} x - y, & x \geq y \\ \alpha(y - x), & y > x, \end{cases}$ est une quasi-métrique. En effet, il suffit de vérifier la condition 2 (l'inégalité triangulaire).

Soit $x, y, z \in \mathbb{R}$:

— Supposons que $x \geq y$ donc :

$$d(x, y) = x - y \Rightarrow (x - z) + (z - y), \quad \forall z \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Si } x \geq z \Rightarrow x - z = d(x, z).$$

$$\text{Si } x \leq z \Rightarrow x - z \leq \alpha(z - x) = d(x, z).$$

Par la même manière pour $(z - y)$ on a : $z - y \leq d(z, y)$.

On obtient donc :

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y). \quad (3.1)$$

— Supposons que $x < y$ donc :

$$d(x, y) = \alpha(y - x) = \alpha(y - z) + \alpha(z - x).$$

$$\text{Si } y \leq z \Rightarrow \alpha(y - z) \leq z - y = d(y, z).$$

$$\text{Si } y \geq z \Rightarrow \alpha(y - z) = d(y, z),$$

de la même manière pour $\alpha(z - x)$, on obtient

$$d(x, y) \leq d(y, z) + d(z, x). \quad (3.2)$$

De (3.1) et (3.2) on a :

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}; \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y). \quad (3.3)$$

Définition 3.1.2. La topologie à droite τ_+ induite par d est la topologie générée par les boules ouvertes à droite :

$$\mathbf{B}^+(x, \varepsilon) = \{y \in X; \quad d(x, y) < \varepsilon\} \quad \text{pour } x \in X, \quad \varepsilon > 0.$$

Également, la topologie à gauche τ_- induite par d est la topologie générée par les boules ouvertes à gauche :

$$\mathbf{B}^-(x, \varepsilon) = \{y \in X; \quad d(y, x) < \varepsilon\} \quad \text{pour } x \in X, \quad \varepsilon > 0.$$

Définition 3.1.3. Un ensemble $S \subset X$ est borné à droite, respectivement borné à gauche, si il existe $x \in X$ et $\varepsilon > 0$ tel que $S \subset \mathbf{B}^+(x, \varepsilon)$, resp. $S \subset \mathbf{B}^-(x, \varepsilon)$.

On introduit maintenant la notion de continuité dans ce type d'espace.

Définition 3.1.4. On suppose (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces quasi-métriques. Soit $f : X \rightarrow Y$ une fonction, on dit que f est continue à droite (resp. continue à gauche) à $x \in X$, si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que $y \in \mathbf{B}^+(x, \delta)$ (resp. $y \in \mathbf{B}^-(x, \delta)$) implique $f(y) \in \mathbf{B}^+(f(x), \varepsilon)$ respectivement $f(y) \in \mathbf{B}^-(f(x), \varepsilon)$.

Cependant, on note que la continuité uniforme à droite et à gauche sont définies de la même manière.

Définition 3.1.5. Une suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'éléments de X converge à droite vers $x_0 \in X$, (resp. converge à gauche) vers $x_0 \in X$ si

$$\lim_{k \rightarrow \infty} d(x_0, x_k) = 0 \left(\text{resp. } \lim_{k \rightarrow \infty} d(x_k, x_0) = 0 \right).$$

On note $x_k \xrightarrow{d} x_0$ (resp. $x_k \xrightarrow{g} x_0$).

Exemple 3.1.3. Soit (\mathbb{R}, d) un espace quasi-métrique tel que $d(x, y) = \begin{cases} x - y & x \geq y \\ \alpha(y - x) & y > x. \end{cases}$

La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $x_n = x + \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, converge à droite vers x , en effet :

$$d\left(x, x + \frac{1}{n}\right) = \alpha \frac{1}{n} \rightarrow 0, \quad \text{si } n \rightarrow +\infty,$$

et elle converge à gauche vers x , en effet :

$$d\left(x + \frac{1}{n}, x\right) = \frac{1}{n} \rightarrow 0, \quad \text{si } n \rightarrow +\infty.$$

On note que si une suite converge à droite elle ne converge pas nécessairement à gauche et vice-versa comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 3.1.4. Soit (\mathbb{R}, d) un espace quasi-métrique tel que $d = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, défini par

$$d(x, y) = \begin{cases} y - x & y \geq x \\ 1 & y < x \end{cases}.$$

La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $x_n = x \left(1 + \frac{1}{n}\right)$, $n \in \mathbb{N}$, converge à droite vers x , en effet :

$$d\left(x, x + \frac{x}{n}\right) = \frac{x}{n} \rightarrow 0, \quad \text{si } n \rightarrow +\infty,$$

mais, ne converge pas à gauche vers x car $d\left(x, \frac{x}{n} + x\right) = 1 \not\rightarrow 0$.

Donc $x_n \xrightarrow{d} x$, $x_n \not\xrightarrow{g} x$.

Lemme 3.1.1. Si $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de X converge à droite vers $x_0 \in X$ et elle converge à gauche vers $y_0 \in X$ alors :

$$x_0 = y_0.$$

Preuve : Soit $\varepsilon > 0$, par hypothèse, $x_n \xrightarrow{d} x$ donc il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $d(x_0, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$ pour $k \geq N_1$, et $x_n \xrightarrow{g} y_0$ donc il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que $d(x_n, y_0) < \frac{\varepsilon}{2}$ pour $k \geq N_2$, et on a pour $k \geq N := \max\{N_1, N_2\}$, $d(x_0, y_0) \leq d(x_0, x_n) + d(x_n, y_0) < \varepsilon$. Comme ε était arbitraire, on déduit que

$$d(x_0, y_0) = 0 \implies x_0 = y_0.$$

■

Corollaire 3.1.1. [2] *Si la convergence à droite d'une suite implique la convergence à gauche, la limite à droite est unique.*

Proposition 3.1.1. *Supposons $d(y, x) \leq c(x, y)d(x, y)$ pour tout $x, y \in X$, où $c : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ satisfait la contrainte suivante :*

$$\forall x \in X, \exists \varepsilon > 0 \text{ tel que } y \in \mathbf{B}^+(x, \varepsilon) \implies c(x, y) \leq C(x), \quad (3.4)$$

où C est une fonction qui ne dépend que de x .

Dans ce cas, l'existence des limites à droite implique l'existence des limites à gauche et les limites sont donc uniques.

Preuve : Supposons $x_n \xrightarrow{d} x_0$. De l'équation (3.4), $\exists \delta > 0$, tel que $c(x_0, x_n) \leq C(x_0)$ pour $d(x_0, x_k) < \delta$. Fixons $\varepsilon > 0$. Comme $x_n \xrightarrow{d} x_0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall k \geq N$, on a $d(x_0, x_n) < \min\left(\delta, \frac{\varepsilon}{C(x_0)}\right)$ et ainsi

$$d(x_n, x_0) \leq c(x_0, x_n)d(x_0, x_n) \leq C(x_0)d(x_0, x_n) < \varepsilon.$$

Donc d'après corollaire 3.1.1 les limites doivent être uniques. ■

Lemme 3.1.2. [2] *Une fonction $f : X \rightarrow Y$ est continue à droite à $x \in X$ si et seulement si $x_k \xrightarrow{d} x$ dans (X, d_X) implique $f(x_k) \xrightarrow{d} f(x)$ dans (Y, d_Y) .*

(On a un résultat analogue pour la continuité à gauche).

Définition 3.1.6. *On suppose (X, d) est un espace quasi-métrique. On dit que la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'éléments de X est de*

1. *Cauchy à gauche si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \text{ tel que } \forall m \geq n \geq N, \quad d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

2. *Cauchy à droite si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \text{ tel que } \forall m \geq n \geq N, \quad d(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

3.2 Complétude et compacité

On s'intéresse maintenant dans cette section aux notions de complétude et de compacité dans les espaces quasi-métriques.

Définition 3.2.1.

- Un ensemble $S \subset X$ est compact à droite, si chaque recouvrement d'ouverts de S dans la topologie droite admet un sous-recouvrement fini.
- S est relativement compacte à droite si la fermeture dans la topologie à droite des S est compact à droite.
- S est séquentiellement compact à droite si chaque suite admet une sous-suite convergente à droite avec une limite dans S .
- $S \subset X$ est complet à droite si chaque suite de Cauchy à droite est convergente à droite.

Ces notions sont données de la même manière à gauche, en remplaçant "à droite" par "à gauche".

Lemme 3.2.1. Soit $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ une quasi-métrique, si (X, d) est séquentiellement compact à droite et $x_n \xrightarrow{g} x$ alors $x_n \xrightarrow{d} x$.

Preuve : Considérons une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $x_n \xrightarrow{g} x$ pour $x \in X$, par la compacité séquentielle, toute sous-suite $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet sous-suite qui converge à droite : $x_{n_{k_j}} \xrightarrow{d} y \in X$ quand $j \rightarrow \infty$. Donc $x = y$ par le lemme. 3.1.1.

Supposons x_n ne converge pas adroite, il existe $\varepsilon_0 > 0$ et une sous suite $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ avec $d(x, x_{n_k})_0 \geq \varepsilon_0$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, mais cette sous-suite a une sous suite $(x_{n_{k_j}})_{j \in \mathbb{N}}$ converge à droite vers x , donc $\exists J \in \mathbb{N}$ telle que $\forall j \geq J$ on a :

$$d(x, x_{n_{k_j}}) < \varepsilon_0.$$

C'est une contradiction donc $x_n \xrightarrow{d} x$. ■

Lemme 3.2.2. Un espace quasi-métrique (X, d) est complet à droite si chaque suite de Cauchy à droite admet une sous suite qui converge à droite.

Preuve : Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite de Cauchy à droite dans (X, d) avec $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ une sous suite qui converge à droite vers $x \in X$.

Soit $\varepsilon > 0$, choisissons $N \in \mathbb{N}$, tel que $d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}$ pour chaque $m \geq n \geq N$, et de même, soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $n_k \geq N$ et $d(x, x_{n_k}) < \frac{\varepsilon}{2}$. Alors pour $n \geq n_k \geq N$ on a

$$d(x, x_n) \leq d(x, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x_n) < \varepsilon.$$

Donc $x_n \xrightarrow{d} x$, ce qui implique que (X, d) est complet à droite. ■

Lemme 3.2.3. [2] *Si X est un ensemble compact à droite alors il est séquentiellement compact à droite.*

Définition 3.2.2. *Un sous-ensemble $S \subset X$ est totalement borné à droite si, pour chaque $\varepsilon > 0$, il peut être recouvert par un nombre fini de boules à droite de rayon ε .*

Proposition 3.2.1. [2]

- *Si (X, d) est séquentiellement compact à droite et totalement borné à droite, alors X est compact à droite.*
- *Si (X, d) est séquentiellement compact à droite et la convergence à droite implique la convergence à gauche, alors X est borné totalement à droite.*
- *L'espace quasi-métrique (X, d) est compact à droite si et seulement si il est complet à droite et borné totalement à droite.*

3.3 Équicontinuité et compacité

On présente dans cette section la notion de l'équicontinuité dans un espace quasi-métrique.

Définition 3.3.1. *Soit (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces quasi-métriques. Un ensemble \mathcal{F} d'applications de X dans Y est équicontinu à droite, (resp. à gauche), si $\forall x \in X$ et $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tel que $\forall y \in Y$ et $\forall f \in \mathcal{F}$ avec $d_X(x, y) < \delta$, alors $d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$, (resp. $d_Y(f(y), f(x)) < \varepsilon$).*

On note par Y^X l'espace des fonctions de X à Y par $\mathcal{C}(X, Y)$ l'espace des fonctions continues à droite de X vers Y . La métrique uniforme sur Y^X est donnée par

$$\bar{\rho}(f, g) = \sup \{ \bar{d}(f(x), g(x)) / x \in X \},$$

avec

$$\bar{d}(f(x), g(x)) = \min \{ d_Y(f(x), g(x)), 1 \},$$

où $\bar{d}(x, y) := \min \{ d(x, y), 1 \}$ et d est la quasi-métrique associée à Y . Cette métrique induit la topologie uniforme sur Y^X .

Lemme 3.3.1. *Supposons que (Y, d_Y) est un compact à droite, et que la convergence à droite implique la convergence à gauche pour cette quasi-métrique. Alors*

1. *Si un ensemble $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(X, Y)$ est équicontinu à droite, alors il est également équicontinu à gauche.*
2. *Si une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset Y^X$ est convergente uniformément à gauche, elle est convergente uniformément à droite.*

On note que l'énoncé 1. de ce lemme n'est pas toujours vérifiée sans l'hypothèse de compacité de Y .

Preuve : La compacité à droite implique la compacité séquentielle à droite par lemme 3.2.3. Puisque la convergence à droite implique la convergence à gauche, on obtient que l'espace est compact séquentiellement à gauche.

Maintenant, par lemme 3.2.1, nous savons que la convergence à gauche implique la convergence à droite et on peut donc conclure, en utilisant la proposition 3.2.1, que l'espace est compact à gauche.

Nous utilisons maintenant le fait que si un espace est compact à la fois à droite et à gauche, les topologies à droite et à gauche sont équivalentes. Par conséquent la convergence uniforme dans une topologie implique la convergence uniforme dans l'autre, et de même avec l'équicontinuité à droite et à gauche, voir [2]. ■

Proposition 3.3.1. *Soit (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces quasi-métriques compacts à droite. Supposons aussi que la convergence à droite implique la convergence à gauche dans (Y, d_Y) . Si un sous-ensemble \mathcal{F} de $C(X, Y)$ est équicontinue à droite, alors \mathcal{F} est totalement borné à droite dans la métrique uniforme $\bar{\rho}$ correspondante à d_Y .*

Preuve : Supposons que $\mathcal{F} \subset C(X, Y)$ est équicontinu à droite, alors \mathcal{F} est également équicontinu à gauche par lemme 3.3.1. Nous devons montrer que $\forall 0 < \varepsilon < 1$, il existe un recouvrement de \mathcal{F} par des boules ouvertes de rayons ε dans la métrique $\bar{\rho}$.

On pose $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$. $\forall a \in X$, $\exists \delta_a > 0$ tel que chaque fois $d_X(a, x) < \delta_a$ nous avons $d_Y(f(a), f(x)) < \delta$ et $d_Y(f(x), f(a)) < \delta$, $\forall f \in \mathcal{F}$, $x \in X$. Par compacité à droite de X , nous pouvons recouvrir X par des boules $\mathbf{B}^+(a, \delta_a)$, pour $a = a_1, \dots, a_k$. Par la compacité à droite de Y , nous pouvons recouvrir Y par des ensemble ouverts V_1, \dots, V_m de diamètre inférieur à δ (ici $\text{diam}(S) = \max_{x, y \in S} d(x, y)$, et chaque boule de diamètre ε est contenue dans une boule à droite de rayon 2ε afin que tous les arguments de compacité puissent être utilisés normalement).

Soit J la collection de fonctions $\alpha : \{1, \dots, k\} \longrightarrow \{1, \dots, m\}$. Soit $\alpha \in J$, s'il existe une fonction $f \in \mathcal{F}$ tel que $f(a_j) \in V_{\alpha(j)}$, $\forall j = 1, \dots, k$, choisissons une telle fonction notons la f_α . La collection (f_α) est indexée par un sous-ensemble J' de l'ensemble J et donc fini.

Nous affirmons que les boules ouvertes $\mathbf{B}_\rho^+(f_\alpha, \varepsilon)$ recouvre \mathcal{F} , pour $\alpha \in J'$. Pour voir, soit

$f \in \mathcal{F}$ et pour chacun $j = 1, \dots, k$, choisissons un entier α_j tel que $f(a_j) \in V_{\alpha_j}$. Alors la fonction α est dans J' . On va montrer que $\mathbf{B}_{\bar{\rho}}^+(f_\alpha, \varepsilon)$.

Soit $x \in X$ et $j = 1, \dots, k$ tel que $x \in B^+(a_j, \delta_{a_j})$, alors on a

$$\begin{aligned} d_Y(f_\alpha(x), f_\alpha(a_j)) &< \delta \quad (\text{par équicontinuité}) \\ d_Y(f_\alpha(a_j), f(a_j)) &< \delta \quad (\text{puisque } f(a_j) \text{ et } f_\alpha(a_j) \text{ sont dans } V_{\alpha_j}), \\ d_Y(f(a_j), f(x)) &< \delta \quad (\text{par équicontinuité}). \end{aligned}$$

Alors nous concluons que $d_Y(f_\alpha(x), f(x)) < \varepsilon\delta = \varepsilon < 1$. Cette inégalité est vraie pour tout $x \in X$, donc

$$\bar{\rho}(f_\alpha, f) = \max \{ \bar{d}(f_\alpha(x), f(x)) \} < \varepsilon.$$

Alors $f \in \mathbf{B}_{\bar{\rho}}^+(f_\alpha, \varepsilon)$. ■

Proposition 3.3.2. [2] Soit (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espace quasi-métriques, Y compact à droite et la convergence à droite implique la convergence à gauche. Alors $\mathcal{C}(X, Y)$ est complet dans la métrique uniforme $\bar{\rho}$ correspondante à d_Y .

3.4 Le théorème d'Arzelà-Ascoli

On présente maintenant le résultat principal de ce chapitre qui'est le théorème d'Arzelà-Ascoli pour un espace quasi-métrique

Théorème 3.4.1. Soit (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces quasi-métriques. Supposons que X est compact à droite, les ensembles bornés fermés sont compacts à droite dans Y , et que la convergence à droite implique la convergence à gauche dans Y . L'espace $\mathcal{C}(X, Y)$ est muni de la métrique uniforme $\bar{\rho}$ associée à la quasi-métrique. Alors un sous-ensemble \mathcal{F} de $\mathcal{C}(X, Y)$ est relativement compact à droite si \mathcal{F} est équicontinue à droite et $\mathcal{F}(x) = \{ f(x), f \in \mathcal{F} \}$ est borné à droite dans (Y, d_Y) pour tout $x \in X$.

Preuve : La démonstration ce fait en trois étapes

Étape 1 : Commençons par montre que $\overline{\mathcal{F}}$ est equicontinue à droite.

Soit $x_0 \in X$ et $\varepsilon > 0$, choisissons $\delta > 0$ pour que $d_X(x_0, x) < \delta$ implique $d_Y(f(x_0), f(x)) < \frac{\varepsilon}{3}$ pour tout $f \in \mathcal{F}$ et $x \in X$ (de l'équicontinuité à droite de \mathcal{F}). Soit $g \in \overline{\mathcal{F}}$, on peut trouver une suite de points de \mathcal{F} qui converge à droite vers g , et donc aussi convergente à gauche vers g . Ainsi nous pouvons choisir $f \in \mathcal{F}$ pour que $\bar{\rho}(g, f) < \frac{\varepsilon}{3}$ et $\bar{\rho}(f, g) < \frac{\varepsilon}{3}$.

Alors pour $d_X(x_0, x) < \delta$,

$$\begin{aligned} d_Y(g(x_0), g(x)) &\leq d_Y(g(x_0), f(x_0)) + d_Y(f(x_0), f(x)) + d_Y(f(x), g(x)) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Donc $\overline{\mathcal{F}}$ est équicontinue.

On démontre maintenant que $\overline{\mathcal{F}}(x)$ est borné à droite pour tout $x \in X$: Soit $a \in X$ et comme \mathcal{F} est supposée borné à droite, choisissons $y \in Y$ pour que $\{d_Y(y, f(a))\}$ soit borné, i.e., $d_Y(y, f(a)) \leq M$ pour tout $f \in \mathcal{F}$. Étant donné $g \in \overline{\mathcal{F}}$, nous pouvons trouver une suite de points de \mathcal{F} convergente vers g à droite et à gauche, et ainsi nous pouvons choisir $f \in \mathcal{F}$ pour que $\bar{\rho}(f, g) < 1$. Alors

$$d_Y(y, g(a)) \leq d_Y(y, f(a)) + d_Y(f(a), g(a)) < M + 1.$$

Maintenant, $g \in \overline{\mathcal{F}}$ arbitraire, donc $\{d_Y(y, g(a))/g \in \overline{\mathcal{F}}\}$ est borné, et donc $\overline{\mathcal{F}}$ est borné à droite pour tout $a \in X$.

Étape 2 : On va montrer que si $\overline{\mathcal{F}}$ est équicontinu à droite et $\overline{\mathcal{F}}(a)$ borné à droite, pour tout $a \in X$ alors il existe un sous-espace compact à droite E de Y qui contient l'union des ensembles $g(X)$ pour $g \in \overline{\mathcal{F}}$.

Choisissons, pour tout $a \in X$, $\delta_a > 0$ tel que $d_X(a, X) < \delta_a$ implique $d_Y(g(a), g(x)) < 1$ pour tout $g \in \overline{\mathcal{F}}$. Puisque X est compact à droite, nous pouvons recouvrir X par un nombre fini de boules $\mathbf{B}^+(a_i, \delta_{a_i})$, pour $i = 1, \dots, n$. Comme les ensembles $\{g(a_j)/g \in \overline{\mathcal{F}}\}$ sont bornés à droite, leur union est également borné à droite; supposons que l'union se trouve dans $\mathbf{B}^+(y, N)$ pour certains $y \in Y$, $N \in \mathbb{N}$.

Choisissons $g \in \overline{\mathcal{F}}$ arbitraire, choisissons $x \in X$. Soit $x \in \mathbf{B}^+(a_j, \delta_{a_j})$ pour certain $j = 1, \dots, n$, alors

$$\begin{aligned} d_Y(y, g(x)) &\leq d_Y(y, g(a_j)) + d_Y(g(a_j), g(x)) \\ &< N + 1. \end{aligned}$$

Ainsi $g(X) \subset \mathbf{B}^+(y, N + 1)$. Soit E la fermeture de cette boule. Puisque les ensembles bornés fermés sont compacts à droite dans Y , E est compact à droite.

Étape 3 : Par l'étape 1, $\overline{\mathcal{F}}$ est équicontinue à droite et $\overline{\mathcal{F}}(a)$ est bornée à droite pour tout

$a \in X$ dans (Y, d_Y) . Par l'étape 2, il y a un sous-espace compact E de Y tel que $\overline{\mathcal{F}} \subset C(X, E)$.

La proposition 3.3.1 révèle maintenant que $\overline{\mathcal{F}}$ est totalement borné à droite pour $\bar{\rho}$. Puisque E est compact à droite, l'ensemble $C(X, E)$ est complet à droite dans la métrique uniforme par proposition 3.3.2. Alors comme $\overline{\mathcal{F}}$ est un sous-espace fermé de $C(X, E)$, donc il est également complet à droite.

Grâce à la proposition 3.3.2 nous en déduisons que $\overline{\mathcal{F}}$ est un compact à droite, car il est complet et totalement borné à droite. Donc \mathcal{F} est relativement compact. ■

Bibliographie

- [1] F. Boyer, Analyse fonctionnelle, Aix-Marseille université, 2015.
- [2] J. Collins, J. Zimmer, Topology and its Applications 154(2007) 2312-2322.
- [3] R. Danchin, Cours de topologie et d'analyse fonctionnelle master première année, 2013.
- [4] S. Laurent, Analyse, topologie générale et Analyse fonctionnelle, Hermann, Paris 1970.
- [5] S. Laurent, Analyse I, théorie des ensembles et topologie, Hermann, Paris 1991.
- [6] H. Queffélec, Topologie, cours et exercices corrigés, 4^{ème} édition, Dunod, Paris 2012.
- [7] G. Skandalis, Topologie et analyse 3 ème année, edition Dunod, collection sciences sup, 2001.
- [8] L. Slimane, Topologie et analyse fonctionnelle, cours et exercices courigés, polycopie, université de Khemis-Miliana, 2022.
- [9] C. Wagschal, Topologie et analyse fonctionnelle, Hermann, Paris 2012.

Résumé :

Le théorème d'Arzelà-Ascoli est un théorème fondamental en analyse fonctionnelle qui permet de caractériser les ensembles relativement compacts dans l'espace des fonctions continues. Dans ce travail, on présente ce théorème fondamental dans le cas des espaces métriques, ainsi que quelques de ses applications, et on l'étudié aussi pour un espace quasi-métrique.

Les mots clé : Compacité, équicontinuité, quasi-métrique.

Abstract :

Arzelà-Ascoli's theorem is a fundamental theorem in functional analysis which allows to characterize relatively compact sets in the space of continuous functions. In this work we present this fundamental theorem in the case of metric spaces and give some of its applications. We study it also for a quasi-metric space.

Key words : Compactness, equicontinuity, quasi-metric.