



**Intitulé du polycopié :**

Théorie de Champ

**Destiné aux étudiants :**

**Niveau** Troisième Année licence  
**Spécialité** Electrotechnique Industrielle

**Auteur**

KARA MOSTEFA KHELIL Cherifa

Experts du polycopié	Grade	Etablissement d'affiliation
HAMZAOUI Ihssen	MCA	Universite de Khemis Miliana
AMROUCHE Badia	MCA	Universite de Blida 1

**Date de validation du polycopié par l'instance scientifique habilité CSD et/ou CSF :**

CSD .....

CSF .....

**Année universitaire : 2021/2022**

## **Avant-propos**

Ce polycopié est le fruit de plusieurs années d'enseignement dans le domaine de Génie Electrique, destine aux étudiants de la troisième année licence en Electrotechnique Industrielle, à l'Université de Khemis Miliana ainsi que dans toutes les universités sur le territoire national Algérien. Il est aussi utile pour les étudiants de spécialité électronique, physique ainsi que mécanique classique. Il regroupe les notions indispensables pour bien comprendre la théorie de champ, depuis l'électrostatique, jusqu'à la réflexion et transmission des ondes électromagnétiques, en passant par la magnétostatique, le phénomène dépendant du temps, régime variable-Equation de Maxwell ainsi que la propagation du champ électromagnétique.

Ce polycopié correspond exactement au programme du canevas exigé par le Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique est constitué de six chapitres. Tous les étudiants en Génie électrique spécialement en Electrotechnique Industrielle doivent comprendre les concepts de base de l'électrostatique et la magnétostatique représentant le cœur du cours parallèlement à la relativité entre eux dans la propagation des ondes ainsi que dans l'émission et transmission des ondes au niveau des différents milieux matériels.

## Résumé

Les champs électromagnétiques sont produits à partir de sources naturelles et artificielles. Nous distinguons les champs électriques, magnétiques et électromagnétiques. Qu'elles soient statiques ou variables dans le temps, elles possèdent chacune des propriétés physiques qui produisent des interactions spécifiques avec les organismes biologiques : végétaux, animaux et humains. Afin de mieux comprendre les mécanismes d'interaction, les concepts d'électromagnétisme et la terminologie associée sont présentés dans ce polycopié afin de renforcer et approfondir les notions d'électromagnétisme aux étudiants. Appréhender les outils physiques et mathématiques pour comprendre les équations de Maxwell ainsi que la propagation des ondes.

## Table des Matières

<b>PAGE DE GARDE</b> .....	1
<b>AVANT-PROPOS</b> .....	2
<b>RESUME</b> .....	3
<b>TABLE DES MATIERES</b> .....	4
<b>LISTES DES FIGURES</b> .....	6
<b>LISTES DES TABLEAUX</b> .....	11
<b>LISTES DES NOTATIONS &amp; ABREVIATIONS</b> .....	12
<b>INTRODUCTION GENERALE</b> .....	14
<b>CHAPITRE 1 : LE CHAMP ELECTROSTATIQUE</b> .....	17
1- INTRODUCTION.....	17
2- STRUCTURE DE LA MATIERE.....	17
3- LOI DE COULOMB.....	19
4- CHAMP ELECTRIQUE.....	20
5- REPARTITION DES CHARGES.....	21
5-1- Répartition linéique.....	21
5-2- Répartition surfacique.....	21
5-3- Répartition volumique.....	22
6- DIPOLE ELECTRIQUE.....	22
6-1- Calcul du potentiel à grande distance.....	22
6-2- Calcul du champ électrique à grande distance.....	23
6-3- Force et couple exercés par un champ électrique sur un dipôle.....	23
7- POTENTIEL ELECTRIQUE.....	24
8- RELATION ENTRE LE CHAMP ET LE POTENTIEL V.....	26
9- SURFACE EQUIPOTENTIELLE.....	26
10- THEOREME DE GAUSS.....	27
11- CAPACITE-CONDENSATEUR.....	29
11-1 Condensateur sphérique :.....	30
11-2 Condensateur cylindrique.....	31
11-3 Condensateur plan.....	31
12- ENERGIE ELECTROSTATIQUE.....	32
12-1 Energie d'une charge ponctuelle placée dans un champ E.....	32
12-2- Energie d'un système de charges ponctuelles.....	32
12-3- Energie d'une distribution continue de charges.....	33
12-4- Energie d'un système de conducteur charges en équilibre électrostatique.....	33

12-5- Energie d'un condensateur charge.....	33
<b>CHAPITRE 2 : LE CHAMP MAGNETIQUE.....</b>	<b>34</b>
1- INTRODUCTION.....	34
1-1 Le magnétisme terrestre.....	34
1-2. Comment modifier localement le magnétisme terrestre.....	34
1-3. Notion de champ magnétique.....	35
1-4. Spectres magnétiques et lignes de champ.....	36
1-5. Propriétés du champ magnétique créé par un courant.....	37
2- LOI D'AMPERE.....	40
2-1. Conducteur rectiligne.....	40
2-2. Cas d'un courant volumique.....	41
3- DIRECTION DU CHAMP MAGNETIQUE (REGLE DE LA MAIN DROITE) .....	42
4- POTENTIEL MAGNETIQUE.....	42
5- THEOREME D'AMPERE.....	43
5-1. Théorème d'Ampère.....	43
5-2. Forme différentielle.....	44
6- FLUX MAGNETIQUE.....	44
6-1. Surface non fermée.....	45
6-2. Surface fermée.....	45
7- FORCE MAGNETIQUE.....	46
7-1. Force de Lorentz.....	46
7-2. Force de Laplace.....	46
8- ENERGIE MAGNETIQUE WM.....	48
9- RESUME DES LOIS DU REGIME STATIONNAIRE.....	49
9-1. Théorème de Gauss.....	49
9-2. Théorème d'Ampère.....	49
9-3. Théorème du Flux Magnétique.....	50
10- ANALOGIE ENTRE L'ELECTROSTATIQUE ET LA MAGNETOSTATIQUE.....	50
<b>CHAPITRE 3 PHENOMENE DEPENDANT DU TEMPS (REGIME QUASI-STATIONNAIRE) .....</b>	<b>51</b>
1- OBSERVATIONS EXPERIMENTALES.....	51
1-1 Circuit déformable dans un champ d'induction magnétique uniforme et constant.....	51
1-2 Circuit indéformable se déplaçant dans un champ D'INDUCTION MAGNETIQUE non uniforme.....	51
1-3 Circuit indéformable dans un champ d'induction magnétique variable dans le temps.....	52

1-4 Conclusions .....	53
2- INTERPRETATION DES EXPERIENCES : LOI DE FARADAY – LOI DE LENZ.....	54
2-1 Loi de FaradaY.....	54
2-2 Interprétation des résultats.....	54
2-3 Loi de Lenz.....	60
3- APPLICATION DES PHENOMENES D’INDUCTION.....	61
3-1 Coefficient d’auto-induction.....	61
3-2 Coefficient d’induction mutuelle.....	62
3-3 Couplage par induction mutuelle.....	63
3-4 Établissement d’un courant dans un circuit R, L. ....	64
3-5 Énergie (électro)magnétique.....	67
4- COMPARAISON ENTRE LE REGIME STATIONNAIRE ET LE REGIME QUASI-STATIONNAIRE.....	68
<b>CHAPITRE 4: REGIME VARIABLE- EQUATIONS DE MAXWELL....</b>	<b>69</b>
1- INTRODUCTION.....	69
2- PRINCIPE DE CONSERVATION DE LA CHARGE.....	69
3- LOI DE MAXWELL-AMPERE.....	71
4- EQUATIONS DE MAXWELL.....	71
4-1 Equations de Maxwell dans n’importe quel supporT.....	71
4-2 Équations de Maxwell dans un milieu homogène, isotrope et linéaire.....	73
4-3 Equations de propagation des champs.....	74
5- LOI D’OHM LOCALISEE.....	75
6- CONDITIONS AUX LIMITES.....	76
<b>CHAPITRE 5 PROPAGATION DU CHAMP ELECTROMAGNETIQUE.....</b>	<b>77</b>
1- DESCRIPTION MATHEMATIQUE DE LA PROPAGATION.....	77
2- EQUATION DE PROPAGATION D’UNE ONDE QUELCONQUE... ..	78
3- EQUATION DE PROPAGATION DU CHAMP ELECTROMAGNETIQUE DANS LE VIDE.....	79
4- ONDE PLANE.....	80
5- CARACTERISTIQUES DES ONDES PLANES.....	82
6- PROPAGATION DANS UNE DIRECTION QUELCONQUE.....	83
7- VITESSE ET LONGUEUR D’ONDE.....	83
8- PROPAGATION DE L’ENERGIE ELECTROMAGNETIQUE.....	85
9- ONDES GUIDEES.....	85

10- SPECTRE	DU	RAYONNEMENT	87
ELECTROMAGNETIQUE.....			
<b>CHAPITRE 6 REFLEXION ET TRANSMISSION DES ONDES</b>			<b>88</b>
<b>ELECTROMAGNETIQUES.....</b>			
1- PHENOMENE DE REFLEXION ET TRANSMISSION.....			88
1-1. Cas général.....			88
2- REFLEXION ET TRANSMISSION A INCIDENCE OBLIQUE.....			91
3- ONDE EN POLARISATION PARALLELE.....			91
3-1. Si $n_1 < n_2$ onde de l'air.....			93
3-2. Si $n_1 > n_2$ .....			94
4- ONDE PERPENDICULAIRE EN POLARISATION.....			94
5- REPRESENTATION GRAPHIQUE.....			95
5-1. cas ou $n_1 < n_2$ .....			95
5-2. cas ou $n_1 > n_2$ .....			96
<b>REFEENCES.....</b>			<b>97</b>

## Listes des Figures

### CHAPITRE 1

Figure 1.1. Loi de Coulomb .....	8
Figure 1.2 Loi de Coulomb .....	8
Figure 1.3. Calcul Potentiel a grande distance .....	23
Figure 1.4. Calcul du champ électrique a grande distance .....	23
Figure 1.5. Force et couple exercés par un champ électrique sur un dipôle.....	24
Figure 1.6. Potentiel électrique (fil charge uniformément).....	25
Figure 1.7. Potentiel électrique (surface chargée uniformément).....	25
Figure 1.8. Potentiel électrique (volume chargé uniformément).....	26
Figure 1.9. Surface équipotentielle .....	27
Figure 1.10. Théorème de Gauss 1.....	28
Figure 1.11. Théorème de Gauss 2.....	29
Figure 1.12. Condensateur Plan .....	32

### CHAPITRE 2

Figure 2.1. mouvement du champ magnétique aimant droit.....	36
Figure 2.2 mouvement du champ magnétique aimant en U.....	37
Figure 2.3. ligne de champ magnétique.....	37
Figure 2.4. Règle du tire-bouchon dans un champ magnétique.....	38
Figure 2.5. ligne de champ magnétique dans une solénoïde.....	38
Figure 2.6. conducteur rectiligne.....	40
Figure 2.7. courant circulaire.....	41
Figure 2.8. conducteur volumique.....	41
Figure 2.9. champ magnétique fil rectiligne.....	42
Figure 2.10. champ magnétique spire.....	42



Figure 2.11. théorème d'ampère.....	43
Figure 2.12. le flux dans une surface non ferme.....	45
Figure 2.13. le flux dans une surface ferme.....	45
Figure 2.14. force de Laplace dans un conducteur cylindrique.....	47

### CHAPITRE 3

Figure 3.1. Circuit déformable dans un champ d'induction magnétique Uniforme et constant .....	51
Figure 3.2 Circuit indéformable se déplaçant dans un champ d'induction magnétique non uniforme.....	52
Figure 3.3. Circuit indéformable. dans un champ d'induction magnétique variable dans le temps.....	53
Figure 3.4. Conclusions Flux .....	54
Figure 3.5. Loi de Faraday Exp 1.....	54
Figure 3.6. Loi de Faraday Exp 2.....	57
Figure 3.7. Loi de Faraday Exp 3.....	57
Figure 3.8. Loi de Faraday Exp 4.....	58
Figure 3.9. Loi de Lenz.....	61
Figure 3.10. Coefficient d'auto induction 1 .....	61
Figure 3.11. Coefficient d'auto induction 2 .....	62
Figure 3.12. Coefficient d'induction mutuelle .....	61
Figure 3.13. Couplage par induction mutuelle.....	64
Figure 3.14. Etablissement d'un courant dans un circuit R,L 1.....	64
Figure 3.15. Etablissement d'un courant dans un circuit R,L 2.....	64
Figure 3.16. Etablissement d'un courant dans un circuit R,L 3.....	66
Figure 3.17. Générateur de courant alternatif.....	66
Figure 3.18. moteurs électriques.....	67

**CHAPITRE 5**

Figure 5.1. Onde plane.....	80
Figure 5.2 Champs électrique et magnétique d'une onde électromagnétique dans un espace vide.....	81

**CHAPITRE 6**

Figure 6.1. Miroir Plan.....	88
Figure 6.2 Onde plane incidente à l'interface de deux milieux.....	89
Figure 6.3. Onde plane à incidence oblique à l'interface de deux milieux.....	91
Figure 6.4. incidence oblique, polarisation parallèle.....	92
Figure 6.5. incidence oblique, polarisation perpendiculaire.....	94
Figure 6.6. Coefficient de réflexion et de transmission en fonction de l'angle d'incidence.....	96
Figure 6.7. Coefficient de réflexion et de transmission en fonction de l'angle d'incidence.....	96

**Listes des Tableaux****CHAPITRE 2**

<b>Table 2.1.</b> Analogie entre l'électrostatique et la magnétostatique .....	50
--	----

**CHAPTER 3**

<b>Table 3.1.</b> Circuit indéformable dans un champ d'induction magnétique variable dans le temps.....	53
<b>Table 3.2.</b> Comparaison entre le régime stationnaire et le régime quasi stationnaire ...	68

**CHAPTER 5**

<b>Table 5.1.</b> Spectre électromagnétique .....	87
---	----

**Listes des notations & Abréviations**

$A$	Vecteur potentiel
$B$	Champ magnétique
$c$	La vitesse de la lumière dans le vide
$C$	Capacitance
$D$	Déplacement du champ électrique
$e$	Charge élémentaire
$\mathbf{e}$	Vecteur unitaire
$E$	Champ électrostatique
$F_m$	Force magnétique
$h$	Constant de Planck
$I$	Intensité de courant
$j$	Densité de courant
$k$	Constant de Boltzmann
$\mathbf{k}$	Vecteur d'onde
$K_0$	Force de Coulomb constant
$L$	Auto-inductance
$m_e$	Masse d'électron
$n$	Indice de réfraction
$\mathbf{n}$	Vecteur unitaire normal
$P$	puissance
$Q$	Facteur de qualité
$q$	Charge électrique
$R$	reluctance
$T$	période
$u$	Fonction d'onde
$U_{em}$	Energie électromagnétique
$U_e$	Potentiel d'énergie électrique
$U_m$	Potentiel d'énergie magnétique

$V$	Potentiel électrostatique
$V_p$	Potentiel de polarisation
$v$	Vitesse de propagation
$W$	travail
$Z$	impédance
$Z_0$	Impédance dans le vide
$\Delta$	Laplacien
$\Delta t$	Durée d'un signal
$\Delta x$	Intervalle d'espace
$\varepsilon$	Permittivité
$\varepsilon_0$	Permittivité dans le vide
$\varepsilon_r$	Permittivité relative
$\eta$	Coefficient d'atténuation
$\theta_i$	Angle d'incidence
$\theta_r$	Angle de réflexion
$\theta_t$	Angle de transmission
$\lambda$	Longueur d'onde
$\mu$	Perméabilité
$\mu_0$	Perméabilité dans le vide
$\mu_r$	Perméabilité relative
$\rho$	Résistivité
$\sigma$	Conductivité
$\Phi$	Flux magnétique
$\Psi(r, t)$	Fonction d'onde
$\omega$	Fréquence angulaire
$\Gamma$	Coefficient de réflexion
$\tau$	Coefficient de transmission

## Introduction générale

L'étude scientifique des forces électriques et magnétiques a commencé comme deux sciences distinctes au cours de la seconde moitié du XVIII<sup>e</sup> siècle. Les concepts de champs électriques et magnétiques ont été introduits en tant que constructions indépendantes pour faciliter le calcul des forces. Cependant, après la découverte par Oersted en 1819 qu'un courant électrique produit un champ magnétique, et la découverte par Faraday en 1831 qu'un champ magnétique variable induit des courants, il est devenu clair que les champs électriques et magnétiques sont liés et qu'ils sont des concepts physiques très importants. En 1873, Maxwell unifie l'électricité et le magnétisme en une seule théorie, appelée électromagnétisme, basée sur quatre équations fondamentales. Une prédiction importante de cette théorie était l'existence d'ondes électromagnétiques qui se propagent à la vitesse de la lumière. Cette prédiction a été confirmée expérimentalement par Hertz en 1887.

Grâce à la découverte de l'induction, la production d'électricité à grande échelle devient possible, ouvrant la porte à une nouvelle ère technologique dans la seconde moitié du XIX<sup>e</sup> siècle. La découverte des ondes électromagnétiques et le développement de l'électronique ont engendré une véritable révolution dans les télécommunications au 20<sup>e</sup> siècle avec un impact économique, social, culturel et politique considérable.

Le champ électromagnétique, qui est une association des champs électrique et magnétique, est un véritable objet physique avec de l'énergie, de la quantité de mouvement et du moment cinétique, qui peut être statique ou se propager sous forme d'ondes exactement comme le son, des ondes élastiques ou même des particules. C'est le premier exemple de théories des champs en physique moderne. Elle a été suivie par la découverte du champ gravitationnel dans le cadre de l'étude générale Relativité et champs quantiques dans le cadre de l'électrodynamique quantique et de la chromodynamique quantique. D'autre part, la théorie de Maxwell a résolu le très ancien problème de la nature de la lumière ; c'est une onde électromagnétique de courte longueur d'onde. Ainsi, les travaux de Maxwell ont unifié l'électricité, le magnétisme et l'optique en une seule théorie. La théorie électromagnétique est en parfait accord avec expériences que toute théorie en conflit avec elle devrait être modifiée ou abandonnée.

La formulation de la théorie électromagnétique a été un événement majeur dans l'histoire de la physique dans sa recherche incessante d'expliquer le maximum de phénomènes avec le

minimum de principes de base. De plus, l'électromagnétisme est le prototype des théories dites de jauge en physique moderne. Ils incluent l'unification des interactions électromagnétiques et faibles par Glashow, Salam et Weinberg vers 1967, la chromodynamique quantique vers 1973 et les soi-disant théories de la grande unification qui tentent d'unifier toutes les interactions dans la nature.

La théorie électromagnétique a posé deux problèmes difficiles, qui ont produit de véritables révolutions en physique et même en philosophie au début du XXe siècle. Le premier était le désaccord de la propagation de la lumière avec la transformation galiléenne, qui est l'un des principes de base de la mécanique classique. Cela a été démontré par plusieurs expériences (notamment l'expérience historique de Michelson) et elle est fondamentale puisque les équations de Maxwell, auxquelles obéissent la lumière en tant qu'ondes électromagnétiques, ne sont pas covariantes dans la transformation galiléenne. Cette contradiction a été résolue par la théorie restreinte de la relativité qui a modifié la transformation galiléenne et a eu des conséquences considérables. Le deuxième problème était la compréhension du rayonnement du corps noir et du spectre d'émission discret des atomes, qui contredisent à la fois la mécanique classique et la théorie électromagnétique. Sa solution a conduit à la formulation de la théorie quantique. A l'heure actuelle, l'interaction des rayonnements électromagnétiques avec la matière reste un sujet très important tant en physique théorique que dans divers domaines de la physique appliquée.

L'électromagnétisme joue un rôle important dans presque toutes les branches de la physique : la physique atomique, la physique moléculaire, la physique du solide, l'astrophysique, la physique de l'atmosphère, etc., et elle intervient même en chimie et en biologie. En fait, presque toutes les propriétés de la matière sont fondamentalement électromagnétiques à la fois à l'échelle macroscopique et à l'échelle microscopique atomique et moléculaire. D'autre part, les ondes électromagnétiques jouent un rôle fondamental dans le transfert d'énergie et d'information. Ainsi, une bonne compréhension de l'électromagnétisme est essentielle dans toute activité scientifique et dans la formation des futurs physiciens et ingénieurs.

L'objectif en écrivant ce polycopié est d'étudier l'électromagnétisme au niveau licence supérieur suite à une expérience d'enseignement de plusieurs années. Le but est de comprendre les notions de champs électrostatiques et électromagnétiques, d'obtenir les équations de Maxwell et d'analyser certaines de leurs conséquences sur la propagation et l'émission de radiation.

Écrire un polycopie dans le domaine de théorie de champ n'est pas une tâche facile pour deux raisons : la première c'est que le sujet est si bien établi et qu'il existe déjà tant d'excellents livres qu'on ne peut s'attendre à de l'originalité que dans les détails didactiques : choix des sujets, clarté présentation du matériel, choix des exercices, etc. La seconde est que ce cours est très lié à d'autres sujets, à savoir la théorie quantique, relativité, propriétés de la matière, et ses applications sont innombrables. Ainsi, il est difficile de fixer les limites du texte.

Généralement, selon la littérature certains auteurs préfèrent commencer par les équations de Maxwell comme équations de base et puis étudier les phénomènes indépendants du temps et les phénomènes dépendant du temps. Cette approche est similaire à commencer l'électricité de base avec les principes de l'électrostatique et de magnétostatique, à un niveau supérieur, en commençant par le principe du théorème d'Ampere, théorème de Gauss ainsi que la loi de Coulomb et de Faraday. Je pense que l'approche habituelle, partant de l'électrostatique et la magnétostatique, sont plus pédagogique afin de consolider et approfondir les notions de base à l'étudiant avant d'atteindre l'électromagnétisme. Ainsi, ce polycopié va être divisé en six chapitres selon le canevas ministériel:

Chapitre 1 : Cette partie va au-delà de l'introduction de l'électricité, les concepts basic de la structure de la matière, répartitions des charges, surfaces équipotentielle, champ électrique, potentiel électrique, capacité-condensateur ainsi que l'énergie électrostatique sont introduits.

Chapitre 2 : dans cette section l'introduction de la loi et théorème d'Ampere, la direction, le potentiel, le flux, la force et l'énergie magnétique sont présentés.

Chapitre 3 : représente le phénomène dépendant du temps en étudiant les lois de Faraday, de Lenz, forme intégrales et différentielles ainsi que la comparaison entre le régime stationnaire et le régime quasi stationnaire.

Chapitre 4 : dans cette partie le régime variable et tout type d'équations de Maxwell sont présentés.

Chapitre 5 : dans cette section une étude approfondie de la propagation des ondes électromagnétiques a été introduit.

Chapitre 6 : représente réflexion et transmission des ondes électromagnétiques.



J'espère que ce polycopié rend le sujet plus accessible aux étudiants, et qu'il est utilisé comme un bon outil pédagogique pour les futurs professeurs.

KARA MOSTEFA KHELIL.C

Juin 2022

## Chapitre 1 : Le champ Electrostatique

### 1- INTRODUCTION

L'électrostatique est la branche de la physique qui étudie les phénomènes (champ et potentiel électrostatique) créés par des charges électriques statiques pour l'observateur. Les forces électrostatiques sont décrites par la loi de Coulomb qui présente une certaine analogie avec l'interaction gravitationnelle.

### 2- STRUCTURE DE LA MATIERE

La charge électrique d'une particule est une grandeur scalaire (algébrique) qui caractérise les actions électromagnétiques subies ou exercée par la particule. Malgré le fait que la matière soit macroscopiquement neutre, elle est composée de particules chargées et neutres avec des valeurs discrètes ( $0, \pm e, \pm 2e, \pm 3e, \text{etc.}$ ) qui sont des multiples entiers de la charge élémentaire. C'est la valeur absolue de la charge de l'électron  $e = 1,60219 \times 10^{-19} \text{ C}$ .

Les particules élémentaires, constituants de la matière, ont pour charges :

- électron ( $e^-$ ) : Charge :  $q_e = -e = -1,60 \times 10^{-19} \text{ C}$

Masse :  $m_e = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$

- Proton ( $H^+$ ) : Charge :  $q_p = +e = 1,60 \times 10^{-19} \text{ C}$

Masse :  $m_p = 1,67 \times 10^{-24} \text{ kg}$

- neutron : la charge est nulle.

- L'unité de la charge est le coulomb C dans le SI.

Cette quantification a été établie pour la première fois en 1913 par l'expérience de Millikan sur la goutte d'huile. L'électrification par frottement est simplement faite par un transfert d'électrons d'un corps de faible affinité électronique à un autre de plus forte affinité. D'autre part, la charge électrique des particules ne dépend pas de leur vitesse ou sur des conditions physiques, telles que la température, la pression, etc., même dans des conditions extrêmes, comme dans le cœur

des étoiles ou au début de la formation de l'Univers. L'électron et le proton sont absolument stables. Il n'est pas possible d'éliminer l'un d'eux individuellement mais un électron et un proton peuvent interagir et produire un neutron et un neutrino .

### 3- LOI DE COULOMB

Soit dans le vide, deux charges ponctuelles  $q_1$  et  $q_2$ , fixées en  $M_1$  et  $M_2$  sur une distance de  $r$ . Les deux charges sont stationnaires  $q_1$  et  $q_2$  exercent l'une sur l'autre une force proportionnelle à chacune des charges et inversement proportionnelle au carré de la distance qui les sépare. La force électrostatique est dirigée suivant la droite qui joint les charges (figure 1). Elle est attractive si les charges sont de signes contraires (figure 1-a), répulsive lorsque les charges sont de même signe (figure 1-b) .

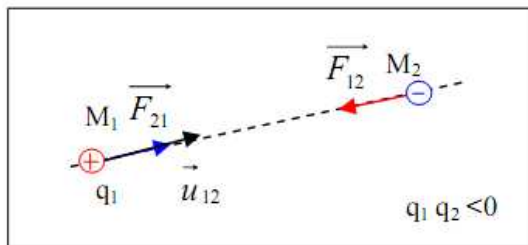


Figure 1-1

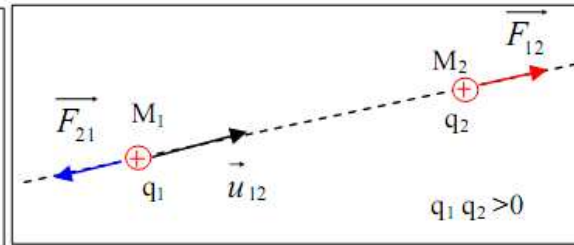


Figure 1-2

La force  $\vec{F}_{12}$  exercée par  $q_1$  sur la charge  $q_2$  s'écrit :

$$\vec{F}_{12} = K \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{u}_{12} \quad (1.1)$$

Où la distance entre  $q_1$ ,  $q_2$  et  $\vec{u}_{12}$  le vecteur unitaire porte par le support de  $M_1 M_2$  et qui est orienté de  $M_1$  vers  $M_2$  est défini par :

$$\vec{u}_{12} = \frac{\overrightarrow{M_1 M_2}}{\|\overrightarrow{M_1 M_2}\|} = \frac{\overrightarrow{M_1 M_2}}{r} \quad (1.2)$$

La constante de proportionnalité est liée aux unités choisies pour exprimer la force, la longueur et la charge. Dans le système d'unités international (S.I.), sous sa forme rationalisée,  $K$  s'écrit :

$$K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cong 9 \cdot 10^9 \text{SI (V m/ C)} \quad (1.3)$$

où  $\epsilon_0$  est la permittivité du vide et a pour valeur :  $\epsilon_0 = 8,85410^{-12} \text{ Fm}^{-1}$

Conformément au principe de l'action et de la réaction, la force  $\vec{F}_{21}$  exercée par  $q_2$  sur la charge  $q_1$  est égale et opposée à  $\vec{F}_{12}$  :

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12} \quad (1.4)$$

Les forces  $\vec{F}_{12}$  et  $\vec{F}_{21}$  sont portées par la droite qui joint les charges  $q_1$  et  $q_2$ . C'est une caractéristique que l'on peut expliquer en évoquant le principe d'isotropie : dans un univers vide, aucune direction ne peut être privilégiée par rapport à une autre, toutes les directions sont équivalentes. La présence de deux charges ponctuelles détruit cette isotropie en introduisant une seule direction privilégiée, la droite joignant les charges.

#### 4- CHAMP ELECTRIQUE

Selon le principe de superposition, la force totale que plusieurs charges  $q_i$  situées aux points  $r_i$  s'exercent sur une charge  $q$  placée en  $r$  est la somme vectorielle de ces forces exercées par chaque charge  $q_i$ .

$$F = \sum_i K_0 q q_i / R_i^2 \quad (1.5)$$

$$\text{Où : } R_i = r - r_i \quad (1.6)$$

Dans ce qui suit, la charge  $q$  sur laquelle agit la force est considérée comme une charge d'essai, tandis que les charges  $q_i$  qui produisent la force sont considérées comme les charges sources. Si les charges de la source sont réparties en continu dans un volume  $V$ , sur une surface  $S$  ou une courbe  $L$ , la charge source  $q_i$  doit être remplacée par  $q_v(r') dV$ ,  $q_s(r') dS$  ou  $q_L(r') dL$ , où  $q_v$ ,  $q_s$  et  $q_L$  sont les densités de charge, respectivement, par unité de volume, par unité surface, et par unité de longueur, puis intégrer sur la distribution de charge de la source. D'après l'expression (1.1) de la force exercée par les charges ponctuelles  $q_i$  en  $r_i$  sur  $q$  en  $r$ , on en déduit le champ électrique produit par ces charges  $E = F/q$  et on peut la généraliser aux distributions de charges continues, et nous aurons :

$$E(r) = \sum_i K_0 q_i / R_i^2 \quad (1.7)$$

$$\text{Où : } R_i = r - r_i \quad \text{ou} \quad R = r - r'$$

Champ électrique dans un volume chargé uniformément:

$$E(r) = K_0 \iiint_v dV' q_v(r')/R^2 \quad (1.8)$$

Champ électrique dans une surface chargée uniformément :

$$E(r) = K_0 \iint_s dS' q_s(r')/R^2 \quad (1.9)$$

Champ électrique dans une courbe chargée uniformément :

$$E(r) = K_0 \int_l dl' q_l(r')/R^2 \quad (1.10)$$

## 5- REPARTITION DES CHARGES

La répartition des charges est hypothèse d'une charge macroscopique permettant de définir une charge infinitésimale  $dq$ , à laquelle on peut appliquer les formules établies dans le cas d'une charge ponctuelle définies comme suit:

### 5-1- Répartition linéique

Dans le cas où la longueur d'un fil, sur lequel est répartie une charge électrique, est très grande devant les autres dimensions, on peut choisir une longueur extrêmement petite  $\Delta l$ , autour du point de vecteur position  $\vec{r}$ , qui contient un nombre relativement faible d'électrons de quantité de charge  $\Delta Q$ , et on définit la distribution linéique de la charge électrique comme suit :

$$\lambda(\vec{r}) = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta l} = \frac{dQ}{dl} \quad (C/m) \quad (1.11)$$

### 5-2- Répartition surfacique

Il se trouve parfois que l'épaisseur d'un volume contenant des charges électriques est très petite devant la racine carrée de sa surface ( $d \ll \sqrt{S}$ ). Dans ce cas, il est possible de considérer avec une bonne approximation que les charges sont distribuées sur la surface  $S$  du volume. On délimite donc une surface infinitésimale  $\Delta S$ , autour du point de vecteur position  $\vec{r}$ , qui contient un nombre relativement faible

d'électrons de quantité de charge  $\Delta Q$ , et on définit la distribution surfacique de la charge électrique comme :

$$\sigma(\vec{r}) = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta S} = \frac{dQ}{dS} \quad (C/m^2) \quad (1.12)$$

### 5-3- Répartition volumique

Pour cela, on délimite un volume infinitésimal  $\Delta V$ , autour du point de vecteur position  $\vec{r}$ , qui contient un nombre relativement faible d'électrons de quantité de charge  $\Delta Q$ , et on définit la distribution volumique de la charge électrique comme :

$$\rho(\vec{r}) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta V} = \frac{dQ}{dV} \quad (C/m^3) \quad (1.13)$$

## 6- DIPOLE ELECTRIQUE

Un dipôle électrique est une distribution de charges modélisable par deux charges  $-q$  et  $+q$  que l'on prend en  $A^-$  et  $A^+$  de coordonnées  $A$  et  $B$  distant de  $A$ .

### 6-1- Calcul du potentiel à grande distance

$$V_M = Kq \left( \frac{1}{MB} - \frac{1}{MA} \right) = Kq \frac{MA - MB}{MB \times MA}$$

Comme  $OM = r \gg a$ , on a :

$$MA \cong r + \frac{a}{2} \cos\theta, \quad MB \cong r - \frac{a}{2} \cos\theta$$

$$MA \times MB \cong r^2$$

$$V_M = K \frac{\vec{p} \cdot \vec{u}_r}{r^2} = \frac{Kq a \cos\theta}{r^2} \quad (1.14)$$

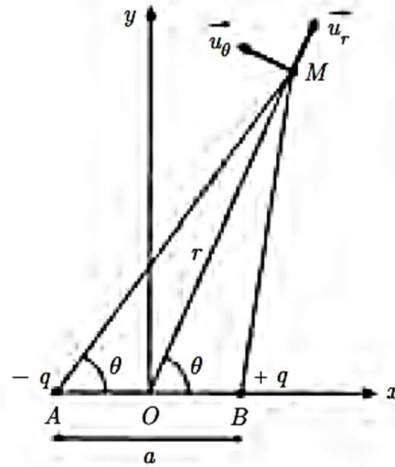


Figure 1-3

**6-2- Calcul du champ électrique à grande distance**

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}V}$$

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2Kp\cos\theta}{r^3} \quad (1.15)$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{Kp\sin\theta}{r^3} \quad (1.16)$$

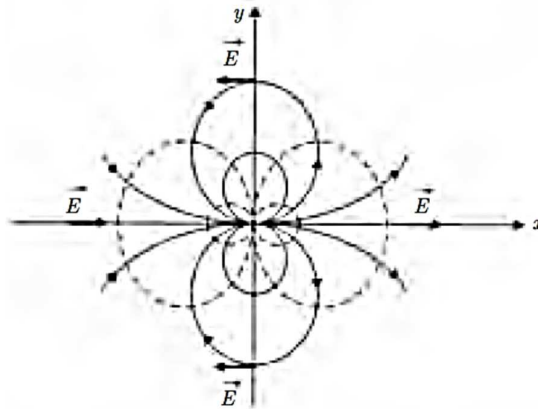


Figure 1-4

**6-3- Force et couple exercés par un champ électrique sur un dipôle**

a) Cas d'un champ uniforme

Soit  $\theta$  l'angle de AB avec l'axe  $\vec{Ox}$  pris dans la direction du champ appliqué  $\vec{E}$ .

$$\vec{F} = \vec{F}_B + \vec{F}_A = qE\vec{e}_x - qE\vec{e}_x = \vec{0} \quad (1.17)$$

La force résultante est nulle, mais le moment résultant ne l'est pas,  $\vec{F}_A$  et  $\vec{F}_B$  Constituent un couple.

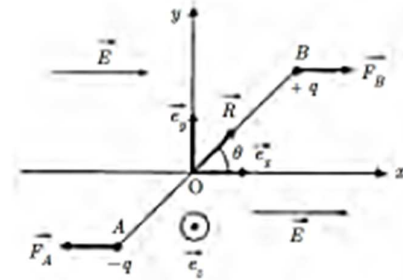


Figure 1-5

b) Cas d'un champ non uniforme

Dans ce cas, les forces  $\vec{F}_B$  et  $\vec{F}_A$  ne sont plus égales et opposées. Il en résulte une force qui va déplacer le dipôle dans son ensemble. On aura donc un mouvement de translation de centre de masse O du dipôle, en plus du mouvement de rotation autour de O.

La force résultante est liée à l'énergie potentielle par :

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}E_p$$

On aura donc

$$\vec{F} = \overrightarrow{\text{grad}}(\vec{p} \cdot \vec{E}) \quad (1.18)$$

## 7- POTENTIEL ELECTRIQUE

Lorsque n charges ponctuelles existent simultanément en des points  $M_1, M_2, \dots, M_n$ , le principe de superposition permet d'écrire:

- pour le champ résultant en un point M (avec  $r_i = M_iM \neq 0$ ) :



$$\vec{E}_M = K \sum_i \frac{q_i}{r_i^2} \vec{u}_{M_i M} \quad (1.19)$$

- et pour le potentiel résultant :

$$V_M = K \sum_i \frac{q_i}{r_i} \quad (1.20)$$

Dans le cas de distributions continues de charges, on aura de même :

- pour un fil chargé uniformément :

$$\vec{E} = K_0 \int_l \frac{\lambda dl}{r^2} \vec{u}_{PM} \quad (1.20)$$

$$V_l = K_0 \int_l \frac{\lambda dl}{r} \quad (1.20)'$$

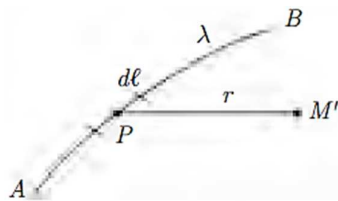


Figure 1-6

- pour une surface chargée uniformément :

$$\vec{E} = K_0 \iint_s \frac{\sigma ds}{r^2} \vec{u}_{MM'} \quad (1.21)$$

$$V_s = K_0 \iint_s \frac{\sigma ds}{r} \quad (1.21)'$$

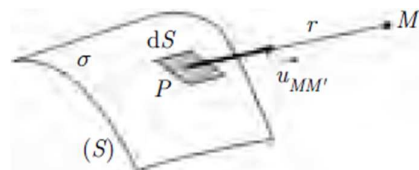


Figure 1-7

- et pour un volume chargé uniformément :

$$\vec{E} = K_0 \iiint_i \frac{\rho dv}{r^2} \vec{u}_{MM'} \quad (1.22)$$

$$V_v = K_0 \iiint_v \frac{\rho dv}{r} \quad (1.22)'$$

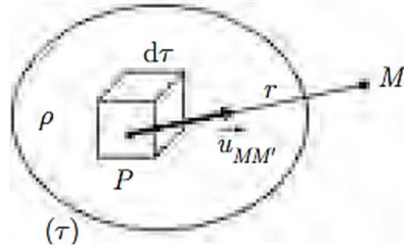


Figure 1-8

## 8- RELATION ENTRE LE CHAMP ET LE POTENTIEL V

Ici nous sommes intéressés par le potentiel électrique relatif à la force électrique tel que  $F = -\nabla U_E$ . On peut montrer que l'interaction électrostatique de deux charges  $q$  et  $q_i$  correspond à une énergie potentielle  $U_E = K_0 q q_i / R_i$ , où  $R_i = |r - r_i|$ . Dans le cas d'une charge d'essai  $q=1C$ , La force  $F$  devient le champ électrique et l'énergie potentiel de la charge unitaire est le potentiel électrostatique  $V$  tel que:

$$E_x = -\partial_x V, \quad E_y = -\partial_y V, \quad E_z = -\partial_z V \quad (1.23)$$

Le champ électrostatique  $\vec{E}$  dérive du potentiel scalaire  $V$ . Par l'intermédiaire de cette relation locale, qui lie le champ électrostatique  $\vec{E}$  et le potentiel électrostatique  $V$ , la connaissance de  $V$  en un point de l'espace suffit pour la détermination de  $\vec{E}(M)$ . Cette relation implique des conditions de continuité et de dérivabilité sur la fonction  $V(M)$ . Selon le système international des unités (SI) l'unité du potentiel est le Joule par Coulomb (J/C) appelé volt (V), et l'unité du champ électrique est le Newton par Coulomb (N/C), qui peut être aussi appelé volt par Mètre (V/m).

## 9- SURFACE EQUIPOTENTIELLE

Le principe fondamental d'une surface équipotentielle électrique est la région où la valeur du potentiel électrique est la même en tout point. Les équipotentielles électriques possèdent les caractéristiques suivantes :

- Le potentiel électrique est en contre balance en tout point de la surface  $V=cte$ .
- Le champ électrique est perpendiculaire à la surface équipotentielle  $\vec{E} \perp \vec{dl}$ .
- Le sens du champ électrique définit le sens où il y a une chute de potentiel.
- Plus les équipotentiels sont rapprochés, plus le champ électrique  $\vec{E}$  est de module élevé.

Les surfaces équipotentielles sont des sphères centrées en un point où se trouve la charge. La direction de  $\vec{E}$ , c'est à dire du gradient de  $V$  est la direction de la normale aux surfaces équipotentielles, celle où  $V$  varie le plus rapidement ; La direction des lignes de champ dépend de la polarité de la charge. Si la charge de la source est positive, ses lignes de champ sont dirigées radialement vers l'extérieur et vice versa avec les charges négatives :

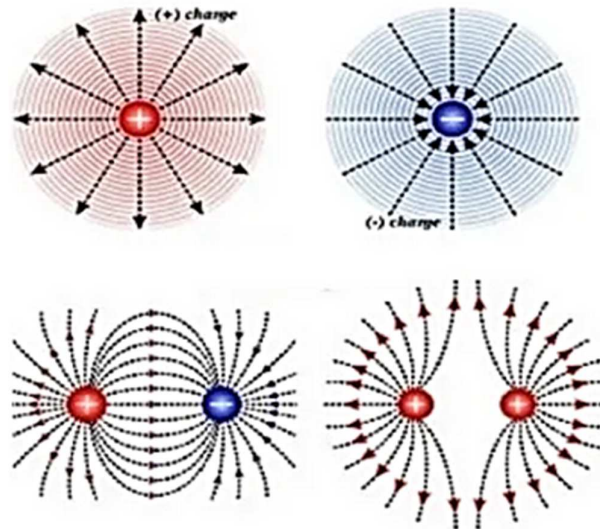


Figure 1-9

## 10- THEOREME DE GAUSS

Soit une charge  $q$  placée au point  $O$ . Le champ créé par cette charge en un point  $M$ , à une distance  $OM = r$  est donnée par :

$$\vec{E} = K \frac{q}{r^2} \vec{e}_r \quad (1.24)$$

Considérant un certain nombre de charges  $q_i$ , les unes à l'intérieur du volume  $\tau$ , les autres à l'extérieur.

Si  $q_i$  est à l'intérieur :

$$\text{On a : } d\phi = \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Kq}{r^2} \vec{e}_r \cdot \vec{N} ds = Kq d\Omega \quad (1.25)$$

$$d\phi' = \vec{E}' \cdot d\vec{s}' = \frac{Kq}{r'^2} \vec{e}_r \cdot \vec{N}' ds' = Kq d\Omega \quad (1.26)$$

$$d\phi_i = d\phi + d\phi' \quad (1.27)$$

$$\phi_i = \iint_S Kq d\Omega = 4\pi Kq \quad (1.28)$$

Donc :  $\phi_i = \frac{q_i}{\epsilon_0}$                       puisque                       $K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$

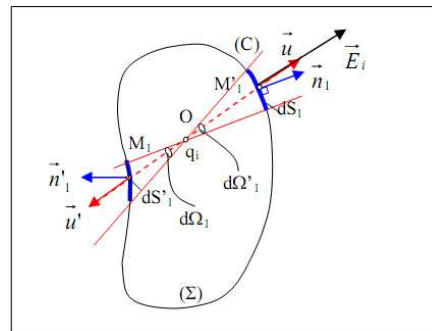


Figure 1-10

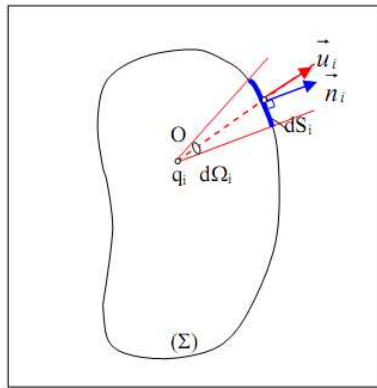
Si  $q_i$  est à l'extérieur :

$$\text{On a : } d\phi = \vec{E} \cdot d\vec{s} = K \frac{q}{r^2} \vec{e}_r \cdot \vec{N} ds = -Kq d\Omega \quad (1.29)$$

$$d\phi' = \vec{E}' \cdot d\vec{s}' = K \frac{q}{r'^2} \vec{e}_r \cdot \vec{N}' ds' = -Kq d\Omega \quad (1.30)$$

Au total:

$$d\phi_i = d\phi + d\phi' = 0 \Rightarrow \phi_i = 0 \quad (1.31)$$



**Figure 1-11**

De ce fait, le flux du champ résultant à travers (S) n'est dû qu'aux seules charges intérieures à

$$S : \Phi = \iint_S \vec{E} \cdot \vec{ds} = \sum_i \frac{q_i}{\epsilon_0} \quad (\text{Charges intérieures uniquement}) \quad (1.32)$$

Le cas du théorème de Gauss où v est le volume limité par la surface fermée  $\Sigma$  est donné par l'équation suivante :

$$\Phi = \oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \vec{ds} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_v \rho d\tau \quad (1.33)$$

## 11- CAPACITE-CONDENSATEUR

Un conducteur porté au potentiel V apparaît sur sa surface, une charge q définie par :

$$q = \oiint_S \sigma ds \quad (1.34)$$

Donc, si le potentiel se transforme en V1, puis V2, puis V3, la charge devient q1, q2, q3. Les relations charge potentiel étant linéaires et peuvent s'écrire de manière suivante :

$$\frac{q}{V} = \frac{q_1}{V_1} = \frac{q_2}{V_2} = \frac{q_3}{V_3} = C \quad (1.35)$$

C représente le coefficient de proportionnalité appelé aussi la capacité du corps conducteur. Ce dernier est indépendant de q et de V. Si q est en coulomb (C) et V en volt (V), C se mesurera en Farad (F).

D'une façon générale, la relation entre charges et potentiels à un système de n Conducteurs en équilibre. Sous forme matricielle, s'écrit de la manière suivante :

$$[Q_i] = [C_{ij}] \times [V_j] \quad (1.36)$$

Où les indices i et j varient entre 1 et n. Cette écriture signifie que, pour chaque valeur de i, il faut sommer cette expression sur j.

Propriétés de la matrice C :

- elle est symétrique :  $C_{ij} = C_{ji}$  (identité de Gauss),
- les termes diagonaux sont positifs :  $C_{ii} > 0$ , ils constituent les coefficients de capacité,
- les termes non diagonaux sont négatifs :  $C_{ij} < 0$ , ce sont les coefficients d'influence.

Soit la relation suivante originaire de (1.24) :

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \frac{-Q}{V_2 - V_1} \quad (1.37)$$

A partir de cette équation, on constate que la charge Q et la différence de potentielle entre ( $V_1$  et  $V_2$ ) apporte a déterminer la capacité C du condensateur.

Il existe trois types de condensateurs :

### ***11-1- Condensateur sphérique :***

Ce type de condensateur contient deux armatures en forme de sphère concentrique de rayon  $R_1$  et  $R_2$ .

Pour un point M, situe entre les deux armatures et tel que  $OM=r$ ,

on peut écrire :

$$\vec{E} = E(r)\vec{e}_r = K \frac{Q_1}{r^2} \vec{e}_r$$

$$\text{On a : } \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l} = V_1 - V_2$$

$$\text{Donc : } KQ_1 \int_1^2 \frac{dr}{r^2} = V_1 - V_2 \quad \text{soit : } KQ_1 \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = V_1 - V_2$$

$$\text{Donc : } C = K \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \quad (1.38)$$

Remarque : si  $e \ll R_2 - R_1$ , on a  $C = \epsilon_0 \frac{4\pi R^2}{e} = \epsilon_0 \frac{S}{e}$  qui est un condensateur plan .

### 11-2- Condensateur cylindrique :

Dans ce cas, les armatures sont constituées par deux cylindres coaxiaux. Selon le théorème de Gauss:

$$\vec{E} = E(r)\vec{e}_r = 2K \frac{Q_1}{rh} \vec{e}_r$$

$$\text{On a : } \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l} = V_1 - V_2$$

$$\text{Donc : } 2K \frac{Q_1}{h} \int_1^2 \frac{dr}{r^2} = V_1 - V_2 \quad \text{soit : } Q_1 = \frac{2\pi\epsilon_0 h}{\ln \frac{R_2}{R_1}} (V_1 - V_2)$$

D'où la capacité :

$$C = \frac{Q_1}{V_1 - V_2} = \frac{2\pi\epsilon_0 h}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \quad (1.39)$$

### 11-3- Condensateur plan :

Les armatures sont constituées par deux plans parallèles de surface S, distants de e. Si la première est chargée positivement d'une densité +σ et la deuxième négativement d'une densité -σ. Entre les deux armatures, on a:

$$\text{Pour la première armature : } \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_r$$

$$\text{Pour la deuxième armature : } \vec{E}_2 = \frac{-\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}'_r$$

Le champ total est donc :

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_r$$

$$\text{On déduit : } V_1 - V_2 = Ee = \frac{\sigma e}{\epsilon_0} = \frac{Qe}{S\epsilon_0} = \frac{Qe}{S\epsilon_0}$$

D'où :

$$C = \frac{Q_1}{V_1 - V_2} = \frac{S\epsilon_0}{e} \quad (1.40)$$

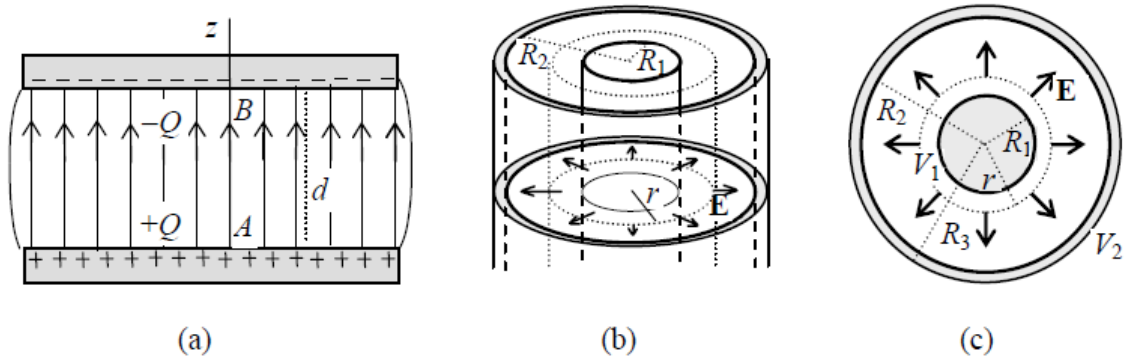


Figure 1-12

## 12- ENERGIE ELECTROSTATIQUE

L'énergie électrostatique  $U$  d'un système de charges, supposées initialement éloignées les unes des autres est correspondante au travail qu'il faut fournir pour amener ces charges à leurs positions finales.

### 12-1- Energie d'une charge ponctuelle placée dans un champ $E$

Le travail de la force électrostatique pour une charge  $q$  se déplaçant de  $A$  vers  $B$  dans le champ est défini par l'équation suivante :

$$U_{AB} = q(V_A - V_B) = qV \quad (1.41)$$

### 12-2- Energie d'un système de charges ponctuelles

Dans ce cas, Chacune des charges est soumise à l'action du champ électrostatique créé par les autres charges:

A retenir  $U_{ij} = q_i V_{j \rightarrow i}$  ce qui donne  $\sum_j U_{ij} = q_i \sum_j V_{j \rightarrow i} = q_i V_i$

Donc on a  $\sum_i \sum_j U_{ij} = \sum_i q_i V_i$

L'énergie totale sera :  $U = \frac{1}{2} \sum_i q_i V_i \quad (1.42)$



Le terme  $\frac{1}{2}$  provient du fait que dans l'interaction entre  $q_i$  et  $q_j$  est comptée 2 fois.

### ***12-3- Energie d'une distribution continue de charges***

Dans un ensemble de charges ponctuelles divisant la charge totale en  $dq$  les équations des énergies sont données comme suit:

$$\text{Distribution volumique : } U = \frac{1}{2} \iiint \rho V d\tau \quad (1.43)$$

$$\text{Distribution surfacique : } U = \frac{1}{2} \iint \sigma V ds \quad (1.44)$$

$$\text{Distribution linéique : } U = \frac{1}{2} \int \lambda V ds \quad (1.45)$$

### ***12-4- Energie d'un système de conducteur charges en équilibre électrostatique***

Dans le cas, d'un seul conducteur l'énergie est comme suit :

$$U = \frac{1}{2} Q_i V_i \quad (1.46)$$

Pour n conducteurs l'énergie totale sera:

$$U = \frac{1}{2} \sum_i q_i V_i \quad (1.47)$$

### ***12-5- Energie d'un condensateur charge***

L'énergie d'un condensateur dont les charges des armatures sont respectivement  $+Q$  et  $-Q$  et sont aux potentiels  $V_1$  et  $V_2$ , à pour expressions :

$$U = \frac{1}{2} Q(V_1 - V_2) = \frac{1}{2} C(V_1 - V_2)^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \quad (1.48)$$

## Chapitre 2 : Le champ magnétique

### 1- INTRODUCTION :

Quand on parle de magnétisme, nous parlons généralement d'aimants, de pôle nord et de pôle sud. Nous allons voir dans ce chapitre que les champs magnétiques peuvent être créés par des courants électriques. Mais pour débiter, chacun sait que nous pouvons utiliser une boussole pour repérer le nord, mais pourquoi la petite aiguille aimantée s'oriente-t-elle spontanément vers le nord ? Voyons cela.

#### *1.1 LE MAGNETISME TERRESTRE :*

**Manipulation :** On abandonne une petite aiguille aimantée, elle s'oriente dans une direction privilégiée. Si on la perturbe un peu, après avoir oscillé quelques instants elle revient dans sa position initiale.

- La terre se comporte comme un gigantesque aimant, ceci est dû aux **mouvements de convection des roches terrestres en fusion** autour de son noyau.
- De ce fait, le pôle nord géographique se comporte comme un pôle magnétique, que l'on appelle **pôle nord** magnétique.
- Le côté de l'aiguille qui s'oriente suivant ce pôle est aussi appelé **pôle nord** par convention, il est généralement marqué en rouge ; l'autre côté devenant donc un pôle sud.

#### *1.2 COMMENT MODIFIER LOCALEMENT LE MAGNETISME TERRESTRE :*

##### *1) Utilisation d'un aimant :*

On utilise alors un aimant, qui possède également deux pôles :

##### Manipulation :

On approche un des pôles de l'aimant de l'aiguille, si celui-ci repousse le pôle Nord de l'aiguille c'est que le pôle de l'aimant approché est un pôle nord. Si on retourne l'aimant, on se rend compte que cette fois-ci, le pôle Nord de la petite aiguille est attiré, le pôle de l'aimant est alors un pôle sud.

Conclusion :

- Deux pôles d'aimant de même nature se repoussent.
- Deux pôles d'aimant de natures différentes s'attirent.

2) *Utilisation d'un fil parcouru par un courant continu :*

Expérience d'Oerstedt :

Une aiguille aimantée se situe à proximité d'un fil qui peut-être parcouru par un courant. L'aiguille prend l'orientation du au magnétisme terrestre. Si on établit un courant continu dans le fil, on remarque que l'orientation de l'aiguille change.

**1.3 NOTION DE CHAMP MAGNETIQUE :**

1) *Son existence :*

L'aimant et le fil parcouru par le courant **modifient les propriétés magnétiques** autour d'eux, on dit **qu'ils créent un champ magnétique**.

2) *Ses caractéristiques :*

Le champ magnétique est un vecteur :  $B$  . Il possède donc certaines caractéristiques :

- Une **direction** : celle de l'axe de l'aiguille aimantée à l'équilibre.
- Un **sens** : du pôle sud de l'aiguille vers son pôle nord.
- Une **valeur** :  $B$  qui est donnée en Tesla (T).

Rq : Ce vecteur ne possède pas de point d'application.

3) *Sa mesure :*

On utilise un appareil spécifique qui s'appelle un teslamètre, il est muni d'une sonde à effet hall. Quelques ordres de grandeur de champ :

- Champ magnétique terrestre :  $B = 50 \cdot 10^{-6}$  T
- Champ crée par un aimant :  $B = 0.02$  T
- Champ crée par un électroaimant :  $B = 10$  T

4) *Superposition de deux champs magnétiques :*

Etant donné que le champ magnétique est une grandeur vectorielle : Si on superpose deux champs, le champ résultant est la somme vectorielle des deux : Si on superpose  $B_1$  et  $B_2$  alors  $B_{TOTAL} = B_1 + B_2$ .

**1.4 SPECTRES MAGNETIQUES ET LIGNES DE CHAMP :**

1) *Définitions :*

Manipulation :

Aimant + limaille de fer : observation du spectre magnétique.

Interprétation :

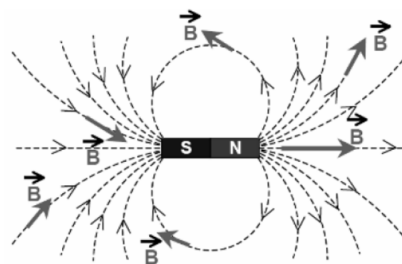
Sous l'action du champ magnétique, la limaille de fer se comporte comme un ensemble de petites aiguilles aimantées. Elles s'orientent en fonction du champ magnétique au point considéré.

Conclusion :

- La figure observée à l'aide de la limaille de fer est appelée un **spectre magnétique**.
- On observe aussi que la limaille s'est répartie selon des lignes courbes autour de l'aimant. Ces lignes sont appelées **lignes de champs**, en chacun des points de ces lignes, le champ magnétique y est tangentiel.

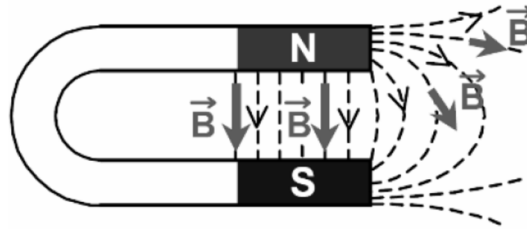
2) *Différents spectres :*

- Spectre magnétique créé par un aimant droit :



**Figure 2-1 mouvement du champ magnétique aimant droit**

- Spectre magnétique créée par un aimant en U :



**Figure 2-2 mouvement du champ magnétique aimant en U**

Remarques :

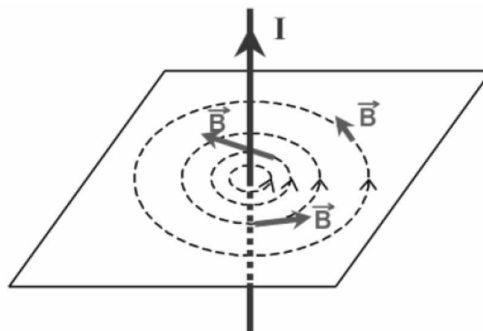
- Les lignes de champs se referment sur elles-mêmes.
- On voit que les lignes de champs situées entre les deux branches de l'aimant en U sont parallèles : les vecteurs champs magnétiques ont même sens, même direction et même valeur.

Ceci est la caractéristique d'un **champ magnétique uniforme**.

**1.5 PROPRIETES DU CHAMP MAGNETIQUE CREE PAR UN COURANT :**

1) *Le champ est créé par un fil :*

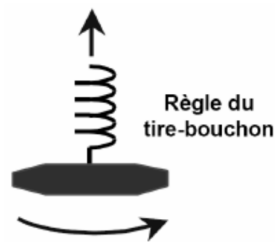
On a vu avec l'expérience d'Oerstedt qu'un fil parcouru par un courant continu crée un champ magnétique. Nous allons étudier ici les propriétés d'un tel champ :



**Figure 2.3- ligne de champ magnétique.**

- Les lignes de champ sont des cercles centrés sur le fil.

- Leur sens est donné par la règle du tire-bouchon :



**Figure 2.4- Règle du tire-bouchon dans un champ magnétique.**

- Le vecteur champ magnétique  $B(M)$  crée en un point  $M$  par un fil rectiligne est dans le plan contenant  $M$  et la perpendiculaire au fil.

Valeur du champ :

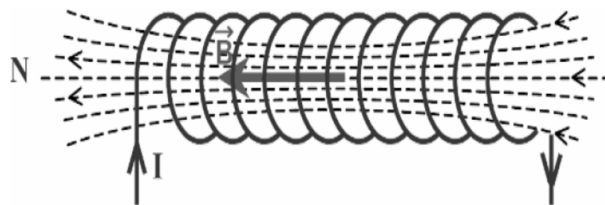
Celle-ci est **proportionnelle à l'intensité du courant** traversant le fil :  $B = k \times I$  La constante  $k$  (exprimée en  $T.A^{-1}$ ) dépend du point où l'on mesure le champ.

2) Si le champ est crée par un solénoïde :

Qu'est-ce qu'un solénoïde ?

Il est constitué par un enroulement en hélice de spires sur un support cylindrique. Par définition, le rayon du cylindre doit être petit devant sa longueur.

2) Lignes de champ :



**Figure 2.5- ligne de champ magnétique dans une solénoïde.**

- On détermine leur sens grâce à la règle du tire-bouchon.
- Elles rentrent par la face sud de la bobine et sortent de la face nord. (Cela permet de repérer la face nord de la bobine, on peut aussi utiliser la règle de la main droite)

- A l'intérieur du solénoïde les lignes de champ sont des droites parallèles, le **champ est donc uniforme.**
- A l'extérieur du solénoïde, les lignes de champ ressemblent à celles d'un aimant droit.

Remarque :

La règle de la main droite permet de déterminer la position de la face nord d'une bobine : Si on enroule le courant avec la paume de la main droite, la direction qu'indique le pouce donne le lieu de la face nord, donc également le sens des lignes de champ.

Valeur du champ à l'intérieur d'un solénoïde :

Elle est donnée par la formule :  $B = n \times I \times \mu_0$  (2.1)

Où

B : valeur du champ magnétique en Tesla (T).

I : intensité du courant en Ampère (A)

n : nombre de spires par unité de longueur ( $m^{-1}$ )

$\mu_0 = 4 \times \pi \times 10^{-7} \text{ T.m.A}^{-1}$

3) Conclusion :

La valeur d'un champ magnétique créé par un courant dépend de la géométrie du courant, de son intensité et de la position du point de mesure.

- Une charge électrique immobile crée un champ électrique seulement;
- Une charge en mouvement (un courant) crée un champ électrique et un champ magnétique.

Définition : la magnétostatique est l'étude des phénomènes magnétiques statiques, générés par des courants constants uniquement (courant continu).

## 2- LOI D'AMPERE

Le physicien danois Hans C. Oersted (1777 – 1851), en remarquant la déviation d'une boussole placée près d'un conducteur traversé par un courant, fut le premier à observer le magnétisme créée par un courant électrique.

### 2.1 Conducteur rectiligne

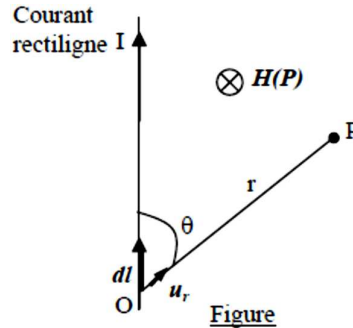


Figure 2.6- conducteur rectiligne

$$H = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Idl \wedge u_r}{4\pi r^2} \quad (2.2)$$

H : champ magnétique

$r = OP$  ;  $u_r$ : vecteur unitaire de  $r$ .

$$B = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu_0 Idl \wedge u_r}{4\pi r^2} \quad (2.3)$$

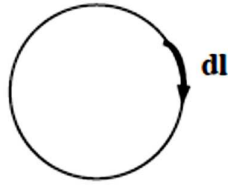
B : Induction magnétique

**Remarque :** La loi d'Ampère est valable si l'on suppose que le conducteur est infiniment long, donc les bornes de l'intégrale sont de  $-\infty$  à  $+\infty$ .

#### 2-2-1- Conducteur fermé :

$$B = \oint \frac{\mu_0 Idl \wedge u_r}{4\pi r^2} \quad (2.4)$$





**Figure 2.7- courant circulaire**

Avec

$\mu_0$  perméabilité magnétique (vide, air...) sa valeur est citée en haut.

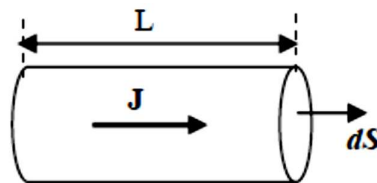
$$B = \mu_0 H \text{ Unités}$$

$$[B] = \text{Tesla T} ; [H] = \text{A /m}$$

### 2.2 Cas d'un courant volumique :

J densité de courant (A/m<sup>2</sup>) ;

$$J = I / S,$$



**Figure 2.8- conducteur volumique**

$$\text{Soit } I = J S,$$

Ou bien plus généralement :

$$I = \int J dS \Rightarrow I dl = \int J dS dl = J S dl = J dV \quad (2.4)$$

Le champ magnétique d'un courant cylindrique (volumique) est donné par :

$$H = \int \frac{J \wedge r}{4\pi r^2} dv \quad (2.5)$$

Soit donc :

$$B = \mu \times H = \mu_0 \int \frac{J \wedge u_r}{4\pi r^2} dv \quad (2.6)$$

### 3- DIRECTION DU CHAMP MAGNETIQUE (REGLE DE LA MAIN DROITE)

a) *Fil rectiligne : (Règle de la main droite)*

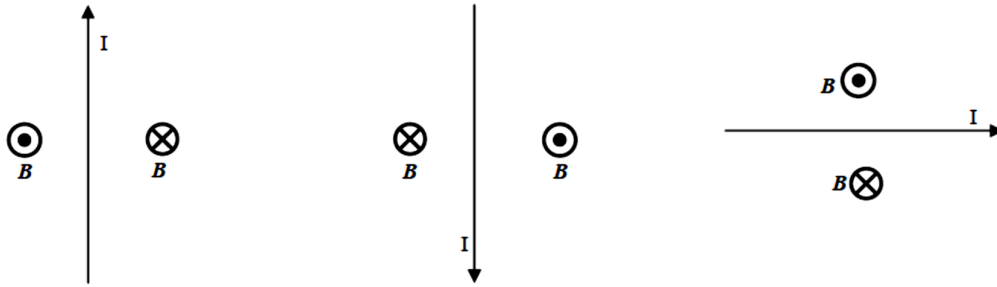


Figure 2.9 champ magnétique fil rectiligne

b) *Spire : (Règle du tournevis)*

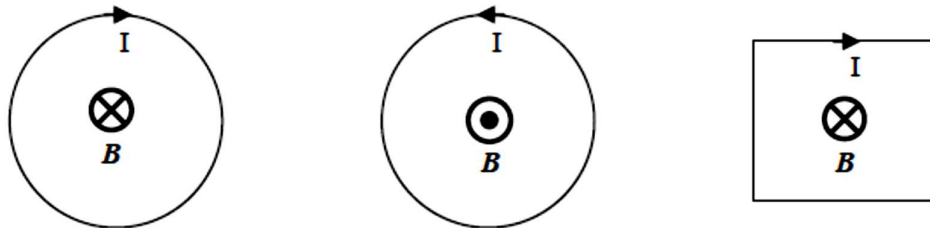


Figure 2.10 champ magnétique spire.

### 4- POTENTIEL MAGNETIQUE

Comme q est un scalaire, qui produit un potentiel électrique scalaire V ;

Par analogie avec l'électrostatique :

L'élément  $I dl$  est un vecteur, produit un potentiel magnétique vectoriel A.

$$B = \text{rot} A$$

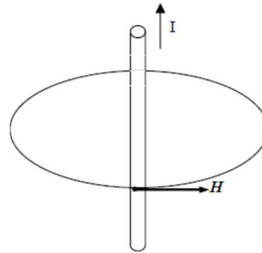
$$A = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{J}{r} dV \quad (2.7)$$

Qui représente l'expression du potentiel A.

**5- THEOREME D'AMPERE**

**5.1 THEOREME D'AMPERE :**

$$\oint H dl = ? \qquad H = \frac{1}{2\pi r} I$$



**Figure 2.11- théorème d'ampère**

$$\oint H dl = \oint \frac{I}{2\pi r} u dl' \qquad (2.8)$$

**Rappel :**

$$A u_x = (A_x u_x + A_y u_y + A_z u_z) u_x = A_x \qquad (2.9)$$

soit donc, la composante de  $A$  suivant l'axe des  $x$ . Par analogie :  $dl \cdot u = dl'$  est la composante de  $dl$  suivant  $u$ .

Comme par ailleurs,  $u \perp r$ , soit  $u \perp r$ , donc aussi  $dl' \perp r$  ;

$dl'$  représente donc un arc de cercle de rayon  $r \Rightarrow dl' = r d\theta$

Par conséquent :

$$\oint H dl = \frac{I}{2\pi} \oint \frac{r d\theta}{r} = \frac{I}{2\pi} \oint d\theta = \frac{I}{2\pi} \theta \Big|_0^{2\pi} = I \qquad (2.10)$$

Donc

$\oint H dl = I$  Qui représente le théorème d'Ampère.

Remarque importante :  $I$  est un courant circulant à l'intérieur du contour fermé.

**5.2 FORME DIFFERENTIELLE :**

$$\oint H dl = I$$

Est la forme intégrale du théorème d'Ampère.

Comme

$$\oint H dl = \int \text{rot} H \cdot dS$$

Et que

$$I = \int J \cdot dS$$

On peut écrire :

$$\int_s \text{rot} H \cdot dS = \int_s J \cdot dS$$

Soit donc : qui représente la forme différentielle du théorème d'Ampère.

*Conclusion :*  $\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J}$  implique que le champ magnétique est rotationnel, c'est à dire que les lignes de champ sont fermées, contrairement aux lignes de champ électrique.

*Remarque :*

Les lignes de champ magnétique sont des courbes fermées car contrairement au champ électrique qui a pour source des charges électriques (part de la charge positive et arrive à la charge négative), il n'y a pas de charges magnétiques.

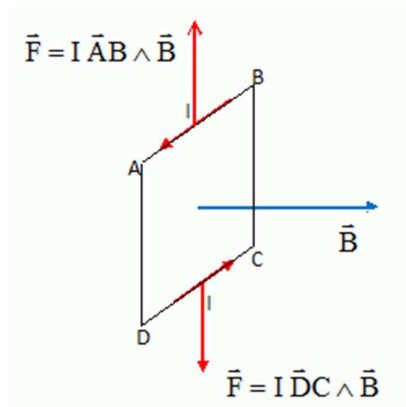
**6- FLUX MAGNETIQUE**

$$\Phi_m = \int B \cdot ds \quad (2.11)$$

Unité [ $\Phi_m$ ]=Weber(Wb) ;

**6.1 SURFACE NON FERMEE**

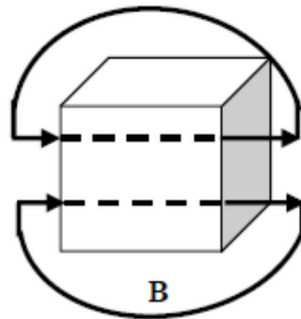
Flux: représente la quantité de lignes de champ passant à travers la surface.



**Figure 2.12- le flux dans une surface non ferme**

**6.2 SURFACE FERMEE**

$$\oint B dS = \int \text{div} B dV = \int \text{div}(\text{rot} A) dV = 0 \quad \oint B dS = 0 \quad (2.12)$$



**Figure 2.13- le flux dans une surface ferme.**

Forme différentielle :

$\oint B dS = 0$  est la forme intégrale de cette loi.

$$\oint B dS = \int \text{div} B dv = 0 \Rightarrow \text{div} B = 0 \quad \text{div} B = 0 \quad (2.13)$$

est la forme différentielle.

## 7- FORCE MAGNETIQUE

### 7.1 FORCE DE LORENTZ :

Une charge électrique animée d'une vitesse  $v$  et placée dans un champ électrique et magnétique, subit la force suivante :

$$F = q(E + v \wedge B)$$

$$F = qE + qv \wedge B = F_e + F_m \quad (2.14)$$

avec :

$F_e = qE$  est la Force électrique;

Si  $q = 0 \Rightarrow F_e = 0$

La force électrique s'annule si la charge est nulle.

$F_m = q(v \wedge B)$  est la Force magnétique.

La force magnétique s'annule si la charge est nulle ou immobile.

L'induction magnétique n'exerce de force que sur une particule chargée en mouvement (ou un courant).

*Conclusion :*

La force magnétique n'agit que sur une charge en mouvement, ou un conducteur traversé par un courant.

### 7.2 FORCE DE LAPLACE :

Considérons un conducteur cylindrique traversé par un courant  $I$ .

Soient :

$n'$  : nombre de particules chargées traversant le conducteur ;

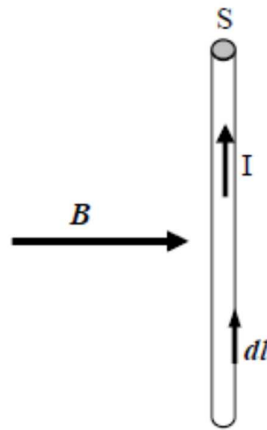
$e$  : charge élémentaire d'une particule.

La charge traversant le conducteur vaut alors :  $q = n'e$

En posant :  $n = n' / V$

$n$  : nombre de particules/unité de volume ;

$V$  : volume du conducteur.



**Figure 2. 14- force de Laplace dans un conducteur cylindrique.**

On obtient :

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}(n'e) = \frac{d}{dt}(neV) = ne \frac{dV}{dt} = neS \frac{dl}{dt} = neSv \quad (2.15)$$

Avec :

$v$  : vitesse de déplacement des particules.

Par conséquent:

$$J = \frac{I}{S} = \frac{neSv}{S} = nev \Rightarrow J = nev$$

Cette égalité est également valable en notation vectorielle :

$$J = nev \quad (2.16)$$

D'un autre côté, en reportant dans la loi de Lorentz la charge par unité de volume =  $ne$  , on obtient :

$$F_m = q(v \wedge B) = nev \wedge B = J \wedge B \quad (2.17)$$

Pour un volume élémentaire  $dV$  :

$$dF_m = (J \wedge B)dV \quad (2.18)$$

Pour tout le volume  $V$  :

$$F_m = \int (J \wedge B)dV = \int (JdV \wedge B) \quad (2.19)$$

Comme  $JdV = Idl$  , on aboutit à l'expression de la Force de Laplace:

Remarque :

$$\text{Si } I = 0 \Rightarrow F_m = 0$$

La force magnétique n'agit donc que sur un conducteur traversé par un courant.

## 8- ENERGIE MAGNETIQUE WM

On considère l'exemple d'une bobine torique comprenant  $n$  spires. Déterminer l'énergie emmagasinée quand le courant dans la bobine croit de 0 à  $I$ . Considérons un circuit formé par une inductance.

A l'instant  $t$  nous avons :  $U = Ldi / dt$

En multipliant les deux membres par  $i dt$  de façon à faire apparaître les énergies mises en jeu pendant  $dt$  :

$$U i dt = L i di = d \left( \frac{1}{2} Li^2 \right) \quad (2.20)$$

Le terme  $U i dt$  représente l'énergie fournie par le générateur, le terme  $dW = d \left( \frac{1}{2} Li^2 \right)$

correspond à l'énergie fournie pour établir le courant  $i$ , énergie emmagasinée dans l'inductance.

Démonstration :



Par analogie avec l'électrostatique où la densité de l'énergie électrostatique  $w_e = (1/2)\epsilon_0 E^2$ , démontrer que la densité de l'énergie magnétique est  $w_m = (1/2)\mu_0 H^2$   
 Considérons pour cela un tube élémentaire d'induction

Posons  $dV = S dl$

L'énergie magnétique localisée dans l'élément de volume  $dV$  est :

$$dW = \frac{1}{2}\pi H^2 dV = \frac{1}{2}\pi H^2 S dl \tag{2.21}$$

En tenant compte que le flux d'induction est constant dans le tube :  $\Phi = \int B \cdot dS = B \cdot S$  et du théorème d'Ampère :  $\oint H dl = I$

on obtient :

$$W = \frac{1}{2\pi} B^2 S dl = \frac{1}{2\pi} BS \int B dl = \frac{1}{2} BS \int H dl = \frac{1}{2} \Phi I \tag{2.22}$$

Comme:

$$\Phi = LI$$

$$W = \frac{1}{2} \Phi I = \frac{1}{2} LI^2 \tag{2.23}$$

Conclusion : le champ magnétique emmagasine bien une énergie de densité  $w_m = (1/2)\mu_0 H^2$

## 9- RESUME DES LOIS DU REGIME STATIONNAIRE

### 9.1 THEOREME DE GAUSS

$$\oint E dS = \frac{q}{\epsilon_0} \tag{2.24}$$

$$\text{div} E = \frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{2.25}$$

$$\oint E dl = 0 \tag{2.26}$$

$$\text{rot} E = 0 \tag{2.27}$$

### 9.2 THEOREME D'AMPERE

$$\oint H dl = I \quad (2.28)$$

$$\text{rot}H = J \quad (2.29)$$

### 9.3 THEOREME DU FLUX MAGNETIQUE

$$\oint B dS = 0 \quad (2.30)$$

$$\text{div}B = 0 \quad (2.31)$$

### 10- ANALOGIE ENTRE L'ELECTROSTATIQUE ET LA MAGNETOSTATIQUE

#### ELECTROSTATIQUE

Loi de Coulomb (champ électrique)

$$q \rightarrow E = \frac{q}{4\pi\epsilon r^2} \mathbf{u}$$

Déplacement électrique

$$D = \epsilon E$$

Potentiel électrique

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon r}$$

$$E = -\text{grad}V$$

$$\oint E \cdot dl = 0$$

$$\text{rot}E = 0$$

$$\oint E \cdot dS = \frac{q}{\epsilon}$$

$$\text{div}E = \frac{\rho_v}{\epsilon}$$

$$w_e = \frac{1}{2} \epsilon E^2$$

$E=0$  dans un conducteur

#### MAGNETOSTATIQUE

Loi de Biot & Savart (champ magnétique)

$$Idl \rightarrow H = \oint \frac{Idl \wedge \mathbf{u}_r}{4\pi r^2}$$

Induction magnétique

$$B = \mu H$$

Potentiel magnétique

$$A = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{J}{r} dv$$

$$B = \text{rot}A$$

$$\oint H \cdot dl = I$$

$$\text{rot}H = J$$

$$\oint B \cdot dS = 0$$

$$\text{div}B = 0$$

$$w_m = \frac{1}{2} \mu H^2$$

$H \neq 0$  dans le conducteur

Tableau 2.1

## Chapitre 3 Phénomène dépendant du temps (régime quasi-stationnaire)

### 1- OBSERVATIONS EXPERIMENTALES

#### 1-1 CIRCUIT DEFORMABLE DANS UN CHAMP D'INDUCTION MAGNETIQUE UNIFORME ET CONSTANT

Sur un plan horizontal on définit un sens de parcours positif et la normale associée.

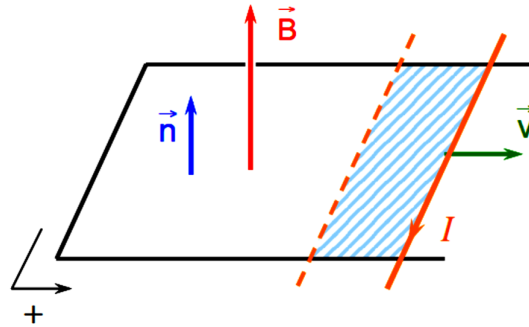


Figure 3.1

Le déplacement de la barre provoque l'apparition d'un courant de signe opposé au sens (+) choisi.

#### 1-2 CIRCUIT INDEFORMABLE SE DEPLAÇANT DANS UN CHAMP D'INDUCTION MAGNETIQUE NON UNIFORME

On considère un aimant se déplaçant avec un mouvement de translation vers une boucle de circuit conducteur :

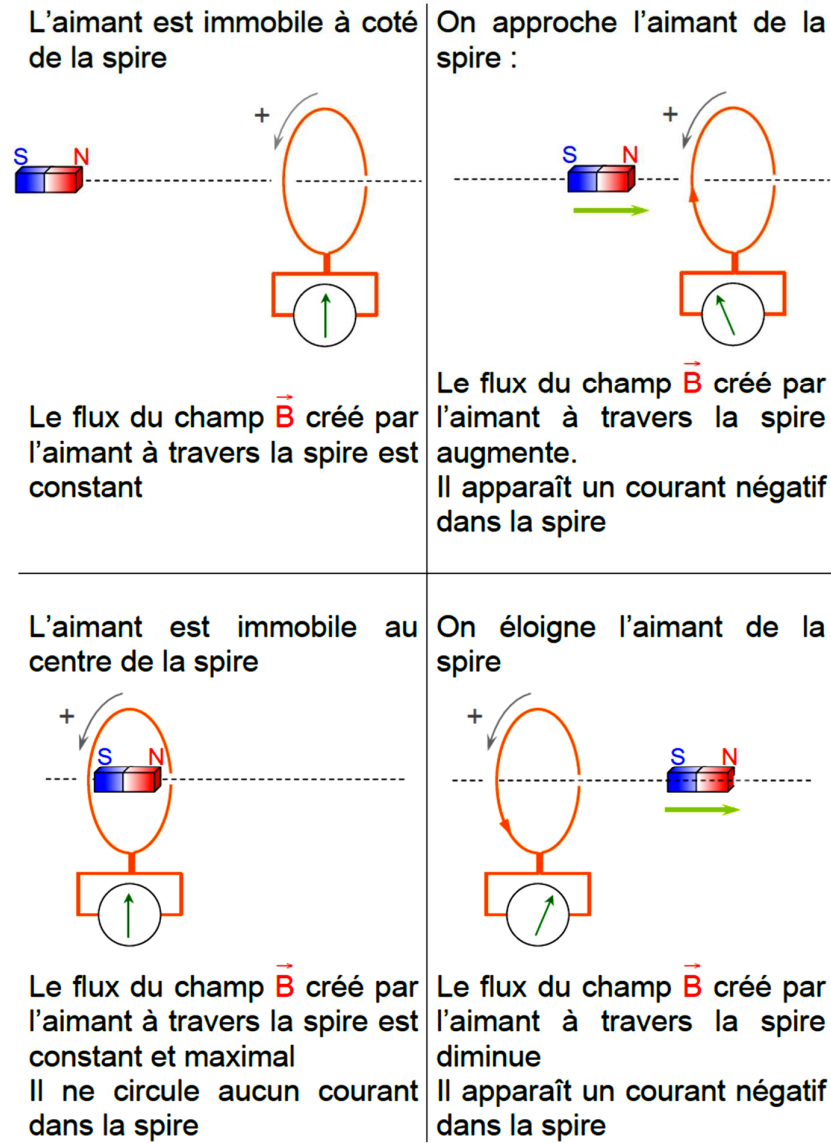


Figure 3.2

### 1-3 CIRCUIT INDEFORMABLE DANS UN CHAMP D'INDUCTION MAGNETIQUE VARIABLE DANS LE TEMPS

On considère le dispositif expérimental suivant :

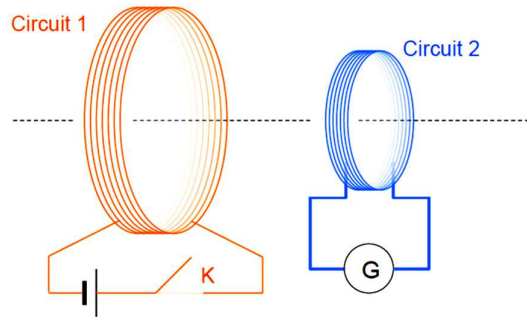


Figure 3.3

On effectue successivement les expériences suivantes :

Interrupteur du circuit 1	Galvanomètre du circuit 2
Ouvert $\vec{B} = \vec{0}$	
Ferme $\vec{B} \neq \vec{0}$	puis
Ouvert $\vec{B} = \vec{0}$	puis

Tableau 3.1

**1-4 CONCLUSIONS :**

- D'après ces expériences, il apparaît que ce n'est pas le flux de  $\vec{B}$  à travers la surface formée par les circuits qui importe mais la variation de ce flux en fonction du temps.
- Les expériences réalisées avec des circuits ouverts montrent qu'il apparaît une différence de potentiel entre les bornes du circuit soumis à la variation de flux de  $\vec{B}$ .
- Le courant qui apparaît dans les circuits fermés consécutivement à la variation de flux est appelé courant induit.

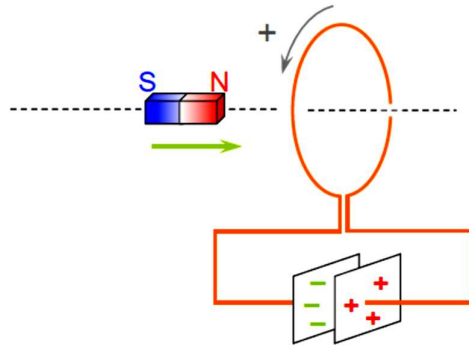


Figure 3.4

## 2- INTERPRETATION DES EXPERIENCES : LOI DE FARADAY – LOI DE LENZ

### 2-1 LOI DE FARADAY

D'une manière générale, quand un circuit filiforme  $C$  est soumis à une variation de flux d'induction magnétique  $\vec{B}$  au cours du temps et dont l'origine est due à :

- une déformation de  $C$ ,
- un déplacement de  $C$  dans un champ magnétique non uniforme,
- une variation de  $\vec{B}$  au cours du temps, on observe l'apparition d'une force électromotrice d'induction :

$$e = - d\varphi/dt \quad (3.1) \quad \text{loi de Faraday}$$

### 2-2. INTERPRETATION DES RESULTATS

#### 2-2-1 EXPERIENCE 1

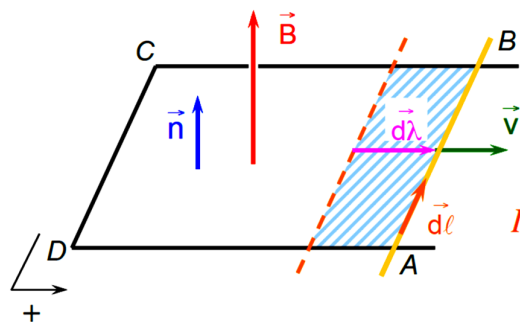


Figure 3.5

La barre conductrice est déplacée à la vitesse  $\vec{V}$  sur la longueur  $d\lambda$  pendant le temps  $dt$ .

Nous avons vu que les  $e^-$  contenus dans la barre sont soumis à la composante magnétique de la force de Lorentz :

$$\vec{F}_M = q\vec{V} \wedge \vec{B} = q\vec{E}_m \quad (3.2)$$

Où  $\vec{E}_m$  est le champ électromoteur.

Calculons la circulation de la force sur le contour fermé (ABCD). Bien que les charges mobiles se déplacent dans tout le circuit, la force magnétique n'est non nulle que sur le segment [AB], cette circulation est :

$$\oint_{ABCD} \vec{F}_M \cdot d\vec{l} = q \int_A^B (\vec{V} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{l} = -q \int_A^B (\vec{V} \wedge d\vec{l}) \cdot \vec{B}$$

Avec :

$$\vec{V} = \frac{d\vec{\lambda}}{dt}$$

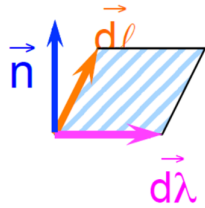
Et :  $q = -1.602 \cdot 10^{-19} \text{C}$  (électrons)

$$\oint_{ABCD} \vec{F}_M \cdot d\vec{l} = -q \int_A^B \left( \frac{d\vec{\lambda}}{dt} \wedge d\vec{l} \right) \cdot \vec{B} \quad (3.4)$$

L'intégration sur  $d\vec{l}$  et la dérivation par rapport au temps étant deux opérations indépendantes, on peut les intervertir :

$$\oint_{ABCD} \vec{F}_M \cdot d\vec{l} = -q \frac{1}{dt} \left[ \int_A^B \vec{B} \cdot (d\vec{\lambda} \wedge d\vec{l}) \right]$$

$(\vec{d\lambda} \wedge \vec{d\ell})$  est un vecteur orienté parallèle à  $\vec{n}$  et dont la norme correspond à l'élément de surface  $d^2S$  :



L'intégration ne se faisant que sur  $d\ell$ ,

$$\int_A^B \vec{B} \cdot (\vec{d\lambda} \wedge \vec{d\ell}) = d\phi$$

d'où, finalement :

$$\oint_{ABCD} \vec{F}_M \cdot \vec{dl} = -q \frac{d\phi}{dt}$$

La quantité

$$\frac{1}{q} \oint_{ABCD} \vec{F}_M \cdot \vec{dl}$$

est homogène à un potentiel électrique et correspond en fait à la force électromotrice (f.e.m.) présente dans le circuit :

$$e = \frac{1}{q} \oint_{ABCD} \vec{F}_M \cdot \vec{dl} \quad (3.5)$$

On retrouve ainsi la loi de Faraday :

$$e = -\frac{d\phi}{dt} \quad (3.6)$$

Remarque :

À partir de la démonstration précédente, on peut montrer que la circulation de ce champ électromoteur sur un circuit fermé n'est pas nulle et est égale à la f.e.m.



Ce champ électrique d'induction ne dérive donc pas d'un potentiel scalaire et son rotationnel n'est pas nul.

2-2-2 EXPERIENCE 2

On écarte l'aimant de la spire C :

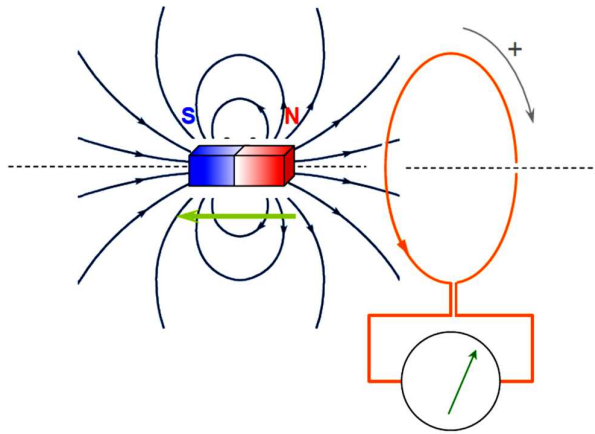


Figure 3.6

Cela revient à écarter la spire de l'aimant à la vitesse  $\vec{V}$  :

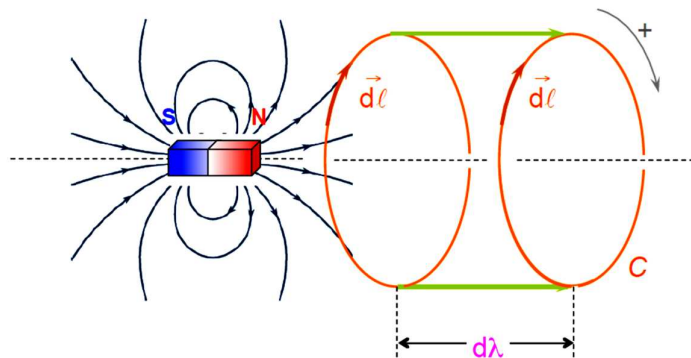


Figure 3.7

Les charges mobiles sont soumises à la composante magnétique de la force de Lorentz :

$$\vec{F}_M = q\vec{V} \wedge \vec{B} \quad (3.7)$$

Tout se passe comme si on avait inséré un générateur de f.e.m.  $e$  dans le circuit. Le travail de la force magnétique est égal à l'énergie acquise par les charges :

$$q \cdot e = \oint_c \vec{F}_M \cdot d\vec{l} = \oint_c q(\vec{V} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

donc la f.e.m  $e$  dans le circuit est égale à :

$$e = \oint_c \left( \frac{d\vec{\lambda}}{dt} \wedge \vec{B} \right) \cdot d\vec{l} = - \oint_c \left( \frac{d\vec{\lambda}}{dt} \wedge d\vec{l} \right) \cdot \vec{B} = - \oint_c \frac{(d\vec{\lambda} \wedge d\vec{l})}{dt} \cdot \vec{B} \quad (3.8)$$

Avec :

$$(d\vec{\lambda} \wedge d\vec{l}) = d^2 S \vec{n}$$

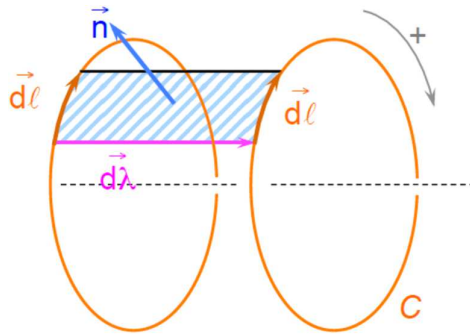


Figure 3.8

$$e = - \oint_c \frac{\vec{B} \cdot \vec{n}}{dt} d^2 S = - \oint_c \frac{d^2 \phi}{dt} \quad (3.9)$$

où  $d^2 \phi$  est le flux coupé par  $d\vec{\ell}$  pendant le temps  $dt$ .

$\oint_c d^2 \phi = d\phi_{coupe}$  : flux coupé par la spire pendant  $dt$ .

or on sait que le flux coupé par un circuit lors d'un déplacement élémentaire  $d\lambda$  est égal à la variation de flux à travers ce circuit pendant ce déplacement :

$$d\phi_c = d\phi$$

donc finalement :

$$e = - \frac{d\phi}{dt}$$

2-2-3 EXPERIENCE 3

Les expériences précédentes s'interprètent de manière cohérente : il existe un lien entre la force magnétique exercée sur les charges mobiles et l'apparition d'une force électromotrice induite.

Cette explication ne permet pas d'expliquer la troisième expérience puisque aucun élément de circuit n'est en mouvement, seul le champ  $\vec{B}$  varie.

Pour expliquer le résultat de l'expérience 3, nous allons établir l'expression locale de la loi de Faraday :

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = \oint_c \vec{E}_m \cdot \vec{dl}$$

En appliquant le théorème de Stokes :

$$-\frac{d\phi}{dt} = \oint_c \vec{E}_m \cdot \vec{dl} = \iint_s (\text{rot } \vec{E}_m) \cdot \vec{dS}$$

D'autre part, on sait que :

$$\phi = \iint_s \vec{B} \cdot \vec{dS} \quad (3.10)$$

Dans l'expérience 3, seul  $\vec{B}$  dépend du temps (les circuits sont indéformables donc  $S = \text{Cte}$ )

$$\frac{d\phi}{dt} = \iint_s \frac{d\vec{B}}{dt} \cdot \vec{dS}$$

D'où finalement :

$$\iint_s (\text{rot } \vec{E}_m) \cdot \vec{dS} = - \iint_s \frac{d\vec{B}}{dt} \cdot \vec{dS} \quad (3.11)$$

Ou encore sous forme locale :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}_m = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (3.12) \quad (\text{Equation de Maxwell-Faraday})$$

Toute variation temporelle du champ d'induction magnétique entraîne l'apparition d'un champ électrique induit d'origine magnétique.

L'explication du phénomène observé dans l'expérience 3 est donc trouvée : c'est la variation de flux qui entraîne l'apparition d'une force électromotrice induite.

Le champ électromoteur  $\vec{E}_m$  ou encore champ électrique d'induction est le même que le champ électrique perçu dans le référentiel des conducteurs en mouvement décrits dans les expériences précédentes :

$$\vec{E}_m = \vec{V} \wedge \vec{B} \quad (3.13)$$

Remarque :

Si un champ électrostatique "classique"  $\vec{E}_s$  est superposé à ce champ induit, l'équation de Maxwell reste valable :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}_s + \vec{E}_m) = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}_s + \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}_m = \vec{0} - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (3.14)$$

Il convient également d'introduire la notion de potentiel vecteur  $\vec{A}$  dont dérive l'induction magnétique ( $\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}$ ).

Dans ce cas :

$$\vec{E} = \vec{E}_s + \vec{E}_m = -\overrightarrow{\text{grad}} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (3.15)$$

### 2-3 LOI DE LENZ

L'induction produit des effets qui s'opposent aux causes qui lui ont donné naissance. Dans ce cas les signaux délivrés par ce l'oscilloscope sont comme suit :

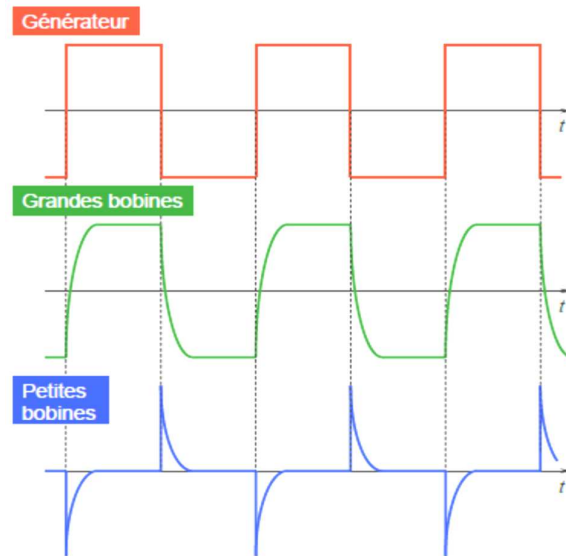


Figure 3.9

### 3- APPLICATION DES PHENOMENES D'INDUCTION

#### 3-1 COEFFICIENT D'AUTO-INDUCTION

On considère une spire orientée parcourue par un courant d'intensité  $I$

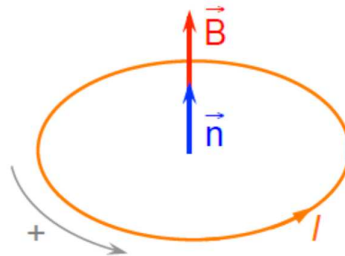


Figure 3.10

Le flux propre du champ créé par la spire à travers elle-même est proportionnel à  $I$  :

$$\Phi = L \cdot I \quad (3.16)$$

$L$  : coefficient d'auto-induction.

Propriétés

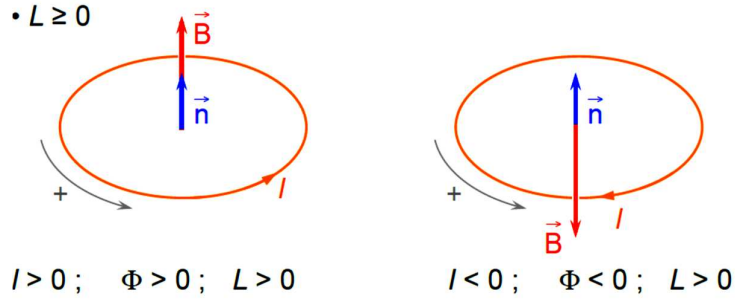


Figure 3.11

Coefficient d'auto-induction d'un solénoïde ( $N, \ell, R, I$ )

$$B = \mu_0 \frac{N}{\ell} I \quad (3.17)$$

$$\Phi = N \cdot B \cdot S = \mu_0 \frac{N^2}{\ell} I \pi R^2 \quad (3.18)$$

$$\Rightarrow L = \frac{\mu_0 N^2 \pi R^2}{\ell} \quad (3.19)$$

### 3-2 COEFFICIENT D'INDUCTION MUTUELLE

On considère deux circuits,  $C_1$  et  $C_2$ , orientés parcourus par les courants  $I_1$  et  $I_2$  :

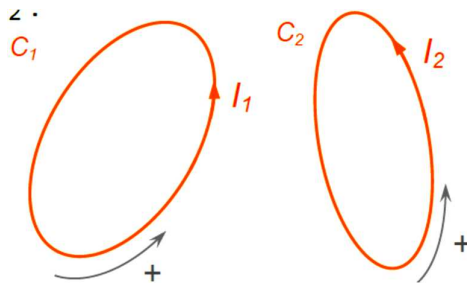


Figure 3.12

Le circuit  $C_1$  crée, au niveau de  $C_2$  un champ d'induction magnétique  $B_1$  proportionnel à  $I_1$ .

Le flux de  $\vec{B}_1$  (créé par  $C_1$ ) à travers le circuit  $C_2$  est donc proportionnel à  $I_1$  :

$$\Phi_{2,1} = k I_1 = M_{2,1} \cdot I_1 \quad (3.20)$$

De même, pour le flux du champ  $\vec{B}_2$  (créé par  $C_2$ ) à travers le circuit  $C_1$  :

$$\Phi_{1,2} = kI_2 = M_{1,2} \cdot I_2 \quad (3.21)$$

$M_{1,2}$  et  $M_{2,1}$  sont des grandeurs algébriques qui ne dépendent que la forme, des positions relatives et des orientations respectives des circuits  $C_1$  et  $C_2$ .

On peut montrer que :

$$M_{2,1} = M_{1,2} = M \quad (3.22)$$

$M_{1,2}$  et  $M_{2,1}$  sont les coefficients d'induction mutuelle.

Unité : le henry (H)

### 3-3 COUPLAGE PAR INDUCTION MUTUELLE

Si  $I_1$  varie au cours du temps alors  $\Phi_{2,1}$  varie.

Il apparaît alors une f.e.m. induite  $e_2$  dans le circuit  $C_2$  :

$$e_2 = -M \frac{dI_1}{dt} \quad (3.23)$$

Le courant  $I_2$  circulant dans  $C_2$  est donc variable ainsi que le champ  $\vec{B}_2$  (créé par  $C_1$ ) dans  $C_1$ .

Il apparaît alors une f.e.m. d'induction dans  $C_1$  :

$$e_1 = -M \frac{dI_2}{dt} \quad (3.24)$$

On dit que les circuits sont couplés par inductance mutuelle.

Application : transformateurs

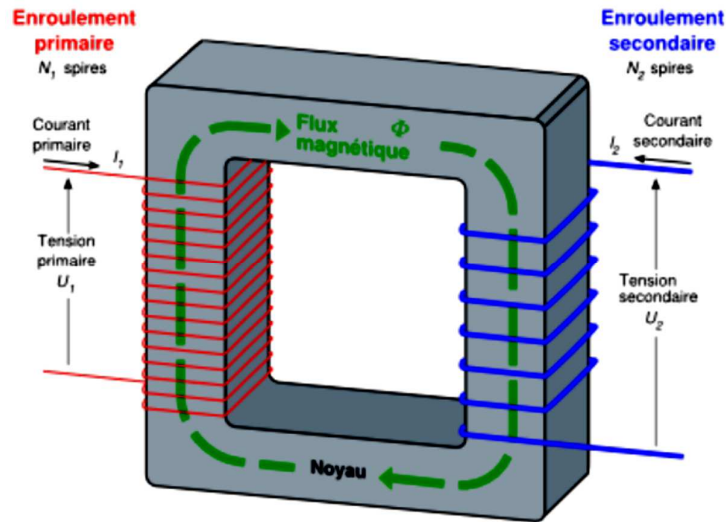


Figure 3.13

### 3-4 ÉTABLISSEMENT D'UN COURANT DANS UN CIRCUIT R, L.

On considère le circuit suivant :

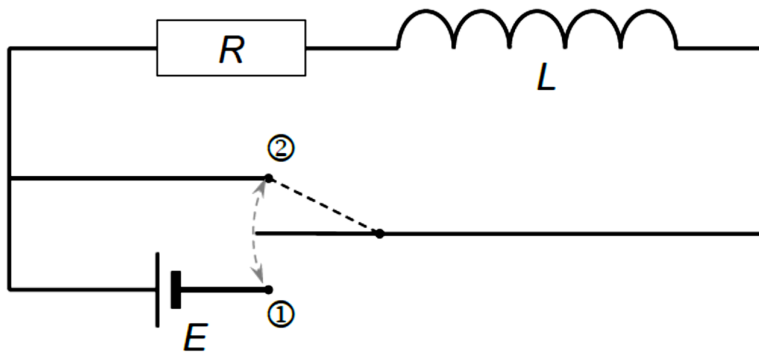


Figure 3.14

À l'instant  $t = 0$ , on ferme le circuit en position 1.

- le courant commence à passer dans la bobine
- le flux du champ  $\vec{B}$  créé par la bobine à travers elle-même commence à augmenter.
- apparition d'une f.e.m. induite dont l'effet est de s'opposer aux causes qui lui ont donné naissance (Loi de Lenz) :

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = -L \frac{dI}{dt} \quad (3.25)$$



- le circuit est conducteur  $\Rightarrow$  apparition d'un courant  $I_{\text{ind}}$  dont le sens est tel que le champ d'induction magnétique qu'il crée s'oppose à l'augmentation du flux (Loi de Lenz).

Il s'agit d'un phénomène transitoire qui ne perturbe l'établissement du régime permanent que pendant des périodes de temps courtes.

On va chercher à déterminer l'évolution du courant dans le circuit. On exprime la loi d'Ohm :

$$E + e = R.I(t)$$

$$E - L \frac{dI}{dt} = R.I(t) \quad e \text{ s'oppose à } E \text{ (loi de Lenz)}$$

$$\frac{dI(t)}{dt} + \frac{R}{L}.I(t) = \frac{E}{L} \quad \text{Equation différentielle du 1}^{\text{er}} \text{ ordre avec 2}^{\text{nd}} \text{ membre}$$

La solution générale de cette équation est la somme d'une solution particulière de l'équation avec 2<sup>nd</sup> membre et d'une solution de l'équation sans 2<sup>nd</sup> membre :

Solution particulière :

$$I(t) = \frac{E}{R} = I_0 \quad (3.26)$$

Solution de l'équation sans 2<sup>nd</sup> membre :

$$\frac{dI(t)}{dt} = -\frac{R}{L}.I(t) \Leftrightarrow \frac{\left(\frac{dI(t)}{dt}\right)}{I(t)} = -\frac{R}{L} \Leftrightarrow I(t) = k.e^{-(R/L)t} \quad (3.27)$$

D'où la solution générale de l'équation :

$$I(t) = I_0 + k.e^{-(R/L)t} \quad (3.28)$$

La constante k est déterminée par les conditions initiales :

à  $t = 0$ ,  $I(0) = 0$ . Dans ce cas, il vient :  $k = -I_0$

$$I(t) = I_0(1 - e^{-(R/L)t}) \quad (3.29)$$

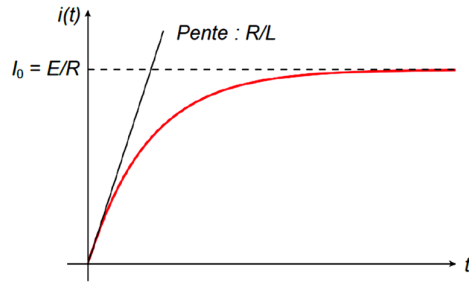


Figure 3.15

De même, si on bascule l'interrupteur en position 2, le courant ne va pas chuter instantanément car la spire va réagir en établissant un courant qui va s'opposer à la diminution du flux de  $\vec{B}$  à travers elle-même.

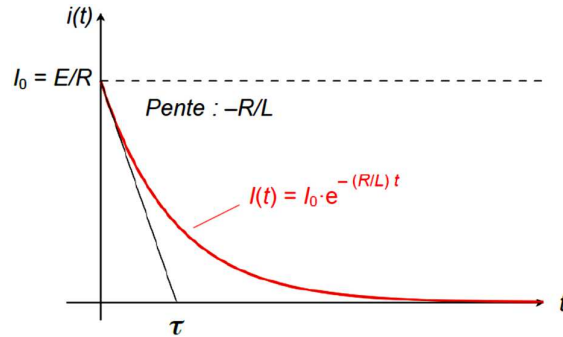


Figure 3.16

$\tau = L/R$  : constante de temps du circuit

Générateur de courant alternatif

On considère une spire qui tourne autour d'un axe  $\Delta$  à la vitesse angulaire  $\omega$ . L'ensemble est plongé dans un champ d'induction magnétique homogène et constant  $\vec{B}$ :

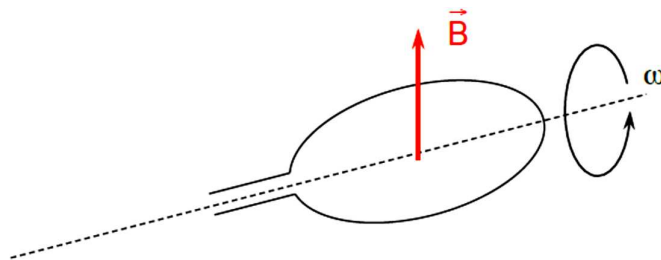


Figure 3.17

Comme l'orientation de la spire varie, le flux de  $\vec{B}$  à travers celle-ci varie, d'où l'apparition d'une f.e.m.  $e$  qui s'oppose aux causes qui lui ont donné naissance :

$$\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot \vec{dS} = \vec{B} \cdot \vec{S} = B \cdot S \cos \omega t \quad (3.30)$$

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = +\omega \cdot B \cdot S \cdot \sin \omega t \quad (3.31)$$

En supposant que la spire a une résistance  $R$ , on en déduit le courant :

$$i = e/R = \frac{\omega \cdot B \cdot S}{R} \sin \omega t \quad (3.32)$$

moteurs électriques

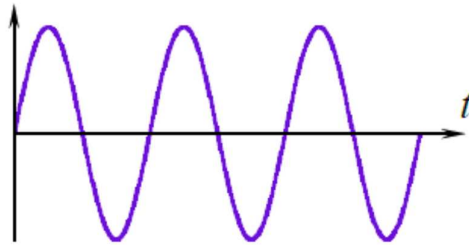


Figure 3.18

**3-5 ÉNERGIE (ELECTRO)MAGNETIQUE**

On considère le circuit du paragraphe précédent et on s'intéresse à l'énergie mise en jeu dans ce circuit pour passer de l'état initial ( $I = 0, \Phi_{bobine} = 0$ ) à l'état final ( $I = I_0, \Phi_{bobine} \neq 0$ ) :

À partir de la loi d'Ohm :

$$E = R \cdot I(t) + L \cdot \frac{dI}{dt} \quad (3.33)$$

On peut déterminer le travail fourni par le générateur entre les instants  $t$  et  $t + dt$  :

$$E \cdot I \cdot dt = R \cdot I^2(t) dt + L \cdot I \cdot \frac{dI}{dt} dt \quad (3.34)$$

Entre  $t = 0$  et l'instant  $t$  pour lequel on a le courant  $I_0$ , le générateur a fourni le travail :

$$W = \int_0^t E \cdot I \cdot dt = \int_0^t R \cdot I^2(t) dt + \int_0^t L \cdot I \cdot \frac{dt}{dt} dt \quad (3.35)$$

D'où :

$$W = \int_0^t R \cdot I^2(t) dt + \frac{1}{2} L \cdot I_0^2 \quad (3.36)$$

Effet joule avec :  $\int_0^t R \cdot I^2(t) dt$

Energie électromagnétique :  $\frac{1}{2} L \cdot I_0^2$

Que se passe t-il quand on ferme le circuit sur lui-même ?

c.à.d. quand le courant passe de  $I_0$  à 0 :

On a montré que le courant décroissait exponentiellement :

$$I(t) = I_0 \cdot e^{-(R/L)t} \quad (3.37)$$

L'énergie dissipée par effet Joule par la circulation de ce courant de  $t = 0$  (on ferme le circuit sur lui-même) et le moment pour lequel le courant est nul ( $t = \infty$ ) est :

$$W = \int_0^{+\infty} R \cdot I^2(t) dt = \int_0^{+\infty} R I_0^2 e^{-(2R/L)t} dt = \frac{1}{2} L \cdot I_0^2 \quad (3.38)$$

L'énergie emmagasinée par le circuit lors de l'établissement du courant permanent est restituée quand on ferme le circuit sur lui-même et dissipée par effet Joule.

#### 4- COMPARAISON ENTRE LE REGIME STATIONNAIRE ET LE REGIME QUASI-STATIONNAIRE

RS	RQS
$\vec{E} = -\overrightarrow{grad} V$	$\vec{E} = -\overrightarrow{grad} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$
$div \vec{B} = 0$	$div \vec{B} = 0$
$\overrightarrow{rot} \vec{E} = 0$	$\overrightarrow{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
$\overrightarrow{rot} \vec{B} = \mu \vec{j}$	$\overrightarrow{rot} \vec{B} = \mu \vec{j}$

Tableau 3.2

## Chapitre 4: Régime variable- Equations de Maxwell

### 1- INTRODUCTION

En 1865, Maxwell unifie l'électricité et le magnétisme dans une seule théorie, appelée l'électromagnétisme. Les champs  $E$  et  $B$  ne peuvent pas être considérés comme indépendants, la variation de l'un dans le temps exige la présence de l'autre. En plus, ils constituent une entité physique unique, appelée champ électromagnétique. Cette théorie est vérifiée par toutes ces conséquences en particulier, l'existence des ondes électromagnétiques qui se propagent dans le vide à une vitesse  $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$  égale à la vitesse de la lumière. La théorie électromagnétique est représentée sous très courte longueur d'onde électromagnétique.

### 2- PRINCIPE DE CONSERVATION DE LA CHARGE

Le principe de la conservation de la charge électrique est considéré comme un principe physique qui a toujours été testé par les expériences, y compris dans les expériences de collisions entre particules relativistes réalisées dans les grands accélérateurs.

Dans un milieu conducteur comportant différents types de porteurs repérés par l'indice  $(i)$ , possédant une densité volumique de charges  $\rho_i$  et une vitesse d'ensemble  $v_i$ , on définit le vecteur densité de courant volumique  $j$  et l'intensité du courant  $I(s)$  à travers une surface  $(S)$  orientée :

$$j = \sum_i \rho_i v_i; \quad I_{(s)} = \iint_{(S)} j \cdot dS \quad (4.1)$$

Alors l'intensité  $I(s)$  est égale à la charge qui traverse  $(S)$  par unité de temps:

$$\delta q = I_{(s)} dt \quad (4.2)$$

Considérons un volume  $(V)$  fixe, limité par la surface fermée  $(\Sigma)$  et faisons un bilan de charges entre l'instant  $t$  et  $t + dt$ . La charge contenue dans  $(V)$  s'écrit :

$$q = \iiint_{(V)} \rho(M, t) d\tau \quad (4.3)$$

Où  $\rho(M, t)$  désigne la densité volumique totale de charges. Entre les instants

$t$  et  $t + dt$ , cette charge varie de

$$\begin{aligned} dq &= \iiint_{(V)} \rho(M, t + dt) d\tau - \iiint_{(V)} \rho(M, t) d\tau \\ &= \iiint_{(V)} [\rho(M, t + dt) - \rho(M, t)] d\tau \end{aligned} \quad (4.4)$$

Soit avec un développement de Taylor a l'ordre 1

$$dq = \iiint_{(V)} \frac{\partial \rho}{\partial t} dt d\tau = dt \iiint_{(V)} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau \quad (4.5)$$

Entre les mêmes instants, la charge  $\delta q(\Sigma)$  qui sort de (V) en franchissant ( $\Sigma$ ) vaut par définition de l'intensité :

$$\delta q_{(\Sigma)} = I_{(\Sigma)} dt = dt \oint_{(\Sigma)} j \cdot dS \quad (4.6)$$

Le postulat de la conservation de la charge affirme que la variation de la charge  $q$  contenue dans le volume (V) n'est due qu'au transfert de charges  $\delta q(\Sigma)$  à travers ( $\Sigma$ ). En orientant conventionnellement la surface ( $\Sigma$ ) vers l'extérieur,  $\delta q(\Sigma)$  est compte positivement lorsqu'elle contribue à diminuer  $q$ , donc :

$$dq = -\delta q_{(\Sigma)} \text{ soit } dt \iiint_{(V)} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau = -dt \oint_{(\Sigma)} j \cdot dS \quad (4.7)$$

En utilisant la définition de la divergence on obtient :

$$\iiint_{(V)} \left( \operatorname{div} j + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) d\tau = 0 \quad (4.8)$$

Cette intégrale est valable quel que soit le volume (V), donc nous obtenons l'équation locale de conservation de la charge

$$\operatorname{div} j + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (4.9)$$

Cette équation locale présente des analogies structurelles avec de nombreuses équations locales traduisant la conservation d'une grandeur scalaire extensive.

### 3- LOI DE MAXWELL-AMPERE

Cette loi est identique à l'équation locale de Maxwell héritée du théorème d'Ampère. Sous forme locale, elle s'écrit en termes de vecteur de densité de courant  $\vec{j}$  :

$$\overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \quad (4.10)$$

- **Introduction du courant de déplacement**

L'équation précédente peut se réécrire de la manière suivante :

$$\overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu_0(\vec{j} + \vec{j}_D) \quad (4.11)$$

En introduisant le courant de déplacement de Maxwell :

$$\vec{j}_D = \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \quad (4.12)$$

La forme intégrale lie la circulation du champ magnétique sur un contour C fermé, et les courants qui traversent la surface s'appuyant sur ce contour :

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} \quad (4.13)$$

### 4- EQUATIONS DE MAXWELL

#### 4-1 EQUATIONS DE MAXWELL DANS N'IMPORTE QUEL SUPPORT

Le champ électrique  $E$  et le champ d'induction magnétique  $B$  sont définis par leur action sur une particule de charge  $q$  et de vitesse  $v$ , appelée force de Lorentz :

$$F = q(E + v \times B) \quad (4.14)$$

En présence de matière, il faut introduire la densité de polarisation  $P$  et la densité d'aimantation  $M$  ou, de manière équivalente, le déplacement électrique  $D = \varepsilon_0 E + P$  et le champ magnétique  $H = B/\mu_0 - M$ . Les champs  $E, D, B$  et  $H$  obéissent à la loi de Maxwell équations sous forme locale :

$$\nabla \cdot D = q_v \quad (\text{Loi de Gauss}) \quad (4.15)$$

$$\nabla \times E + \partial_t B = 0 \quad (\text{Loi de Faraday}) \quad (4.16)$$

$$\nabla \cdot B = 0 \quad (\text{Absence des charges magnétiques}) \quad (4.17)$$

$$\nabla \times H = j + \partial_t D \quad (\text{Loi d'ampère}) \quad (4.18)$$

Ce sont les équations de base des phénomènes électromagnétiques dans le vide et dans la matière. Ils sont valables dans les isolants ( $j = 0$ ) et dans les conducteurs. Dans le cas particulier d'un conducteur ohmique,  $j = \sigma E$ , où  $\sigma$  est la conductivité. Les trois premières équations ont été établies à partir d'observations expérimentales. La quatrième équation est une généralisation de la loi d'Ampère.  $qv$  est la densité de charge des charges libres et  $j$  est la densité de courant libre (c'est-à-dire les courants de conduction, de convection et de faisceau). Le courant de déplacement  $\partial_t D$  a été introduit par Maxwell afin de conserver l'équation de conservation de charge  $\partial_t q_v + \nabla \cdot j = 0$ . On peut inverser l'argument et dériver cette équation de conservation de charge comme conséquence des équations

Parfois, il est utile d'écrire les équations de Maxwell sous une forme intégrale à la place de la forme différentielle locale. Pour cela, nous intégrons les deux côtés de [9.12] et [9.14] sur un volume  $V$  et on utilise le théorème de Gauss-Ostrogradsky pour transformer le volume intégral de la divergence dans le flux sortant par la surface  $S$ , qui limite  $V$ . Comme pour les équations [9.13] et [9.15], on calcule le flux de part et d'autre à travers une surface  $S$  et nous utilisons le théorème de Stokes pour transformer le flux de la boucle en une circulation sur la courbe  $C$ , qui limite  $S$ . Ainsi, on obtient les quatre équations

$$\iint_S dS \cdot n \cdot D = Q^{(in)} \quad \text{où} \quad Q^{(in)} = \iiint_V dV q_v \quad (\text{Loi de Gauss}) \quad (4.19)$$

$$\int_l dr \cdot E + \partial_t \iint_S dS \cdot n \cdot B = 0 \quad (\text{Loi de Faraday}) \quad (4.20)$$

$$\iint_S dS \cdot n \cdot B = 0 \quad (\text{Absence des charges magnétiques}) \quad (4.21)$$

$$\int_l dr \cdot H - \partial_t \iint_S dS \cdot n \cdot D = I^{(in)}$$

$$\text{Où} \quad I^{(in)} = \iint_S dS \cdot n \cdot j \quad (\text{Loi d'Ampère}) \quad (4.22)$$



Ces équations tiennent même si les champs ont des discontinuités. D'autre part, les dérivées par rapport au temps des flux reçoivent des contributions à la fois des variations des champs dans le temps et déplacement des surfaces. Pour ces raisons, les équations de Maxwell sous forme intégrale ont une validité plus générale que la forme différentielle. Dans ces formes intégrales, les champs, charges et courants sont pris en même temps. Par exemple, si une charge entre dans une surface fermée  $S$ , le flux de son champ électrique sortant de  $S$  n'est non nul que lorsqu'il est à l'intérieur de  $S$ . Cependant, certains effets (comme la propagation) dépendent des propriétés locales des champs ; elles ou ils sont mieux analysées en utilisant la forme locale des équations de Maxwell.

#### 4-2 ÉQUATIONS DE MAXWELL DANS UN MILIEU HOMOGENE, ISOTROPE ET LINEAIRE

Si le milieu est homogène, linéaire et isotrope,  $D$  est proportionnel à  $E$  et  $B$  est proportionnel à  $H$  :

$$D = \varepsilon E \quad \text{et} \quad B = \mu H$$

Où  $\varepsilon$  et  $\mu$  sont caractéristiques du milieu. On ne peut alors utiliser que les champs  $E$  et  $B$ , et les équations de Maxwell peuvent être écrites comme

$$\nabla \cdot E = q_v / \varepsilon \quad (\text{Loi de Gauss}) \quad (4.23)$$

$$\nabla \times E + \partial_t B = 0 \quad (\text{Loi de Faraday}) \quad (4.24)$$

$$\nabla \cdot B = 0 \quad (\text{Absence de charges magnétiques}) \quad (4.25)$$

$$\nabla \times B = \mu j + \varepsilon \mu \partial_t D \quad (\text{Loi d'ampère}) \quad (4.26)$$

En particulier, dans le vide  $\varepsilon$  devient  $\varepsilon_0$  et  $\mu$  devient  $\mu_0$ .

Écrire les formes intégrales des équations de manière linéaire mais inhomogène moyen, il faut affecter les constantes  $\varepsilon$  et  $\mu$  correspondantes à chaque élément d'aire  $dS$  ou élément de volume  $dV$  ; nous trouvons:

$$\iint_S S \cdot dS \cdot \varepsilon \cdot n \cdot E = Q^{(in)} \quad (\text{Loi de Gauss}) \quad (4.27)$$

$$\int_l dr. E + \partial_t \iint_s dS. n. B = 0 \quad (\text{Loi de Faraday}) \quad (4.28)$$

$$\iint_s dS. n. B = 0 \quad (\text{Absence des charges magnétiques}) \quad (4.29)$$

$$\int_l dr. B/\mu = I^{(in)} + \left(\frac{d}{dt}\right) \iint_s dS. \varepsilon. n. D \quad (\text{Loi d'Ampère}) \quad (4.30)$$

### 4-3 EQUATIONS DE PROPAGATION DES CHAMPS

Les équations de Maxwell forment un système d'équations aux dérivées partielles couplées de la première commande. Il est possible d'écrire des équations découplées pour chacun des champs ; mais ce sont des équations aux dérivées partielles du second ordre. En effet, évaluons la boucle de l'équation de Faraday [4.24], on trouve  $\nabla \times (\nabla \times E) + \partial_t (\nabla \times B) = 0$ . En utilisant l'identité

$\nabla \times (\nabla \times E) = \nabla(\nabla \cdot E) - \Delta E$ , la loi de Gauss [9.23] et la loi d'Ampère [9.26], on trouve

$$\Delta E - \left(\frac{1}{v^2}\right) \partial_{tt}^2 E = \mu \partial_{tt} \cdot j + \nabla q_v / \varepsilon \quad (4.31)$$

Ou :  $v = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$

De même, calculons la courbure des deux côtés de [9.26] et utilisons les équations [9.24] et [9.21], on trouve l'équation

$$\Delta B - \left(\frac{1}{v^2}\right) \partial_{tt}^2 B = -\mu \nabla \times j \quad (4.32)$$

Les équations non couplées, [9.31] et [9.32], pour E et B déterminent propriétés des champs E et B si on connaît la densité de charge et le courant densité en chaque point de l'espace. En particulier, si ces densités sont égales à zéro partout, ces équations deviennent

$$\Delta E - \left(\frac{1}{v^2}\right) \partial_{tt}^2 E = 0, \quad \Delta B - \left(\frac{1}{v^2}\right) \partial_{tt}^2 B = 0 \quad (4.33)$$

Ce sont les équations de propagation (ou équations d'onde) appelées d'Alembert équations. La vitesse de propagation est

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

Dans le vide, cette vitesse est identique à la vitesse de la lumière dans le vide

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = 2.997\,924\,58 \times 10^8 \text{ m/s}$$

### 5- -LOI D'OHM LOCALISEE

La loi d'Ohm locale pour un milieu conducteur fixe est définie par la relation suivante :

$$j = \gamma E \quad (\text{Am}^{-2})$$

$\gamma$ : Conductivité d'énergie électrique du milieu ( $\text{S} \cdot \text{m}^{-1}$ ).

La résistivité est son inverse  $1/\gamma$  ( $\Omega\text{m}$ )

Loi d'Ohm pur un circuit filiforme AB

$$V_A - V_B = Ri \quad (4.34)$$

Où

$i$  : intensité (A)

$$R = L/\gamma S \quad (4.35)$$

$R$  : résistance du fil ( $\Omega$ ) entre A et B, avec L sa longueur (m) et S sa section ( $\text{m}^2$ )

La puissance Joule dissipée entre A et B est donnée par l'équation suivante :

$$P = (V_A - V_B)i = Ri^2 \quad (\text{W}) \quad (4.36)$$

Loi d'Ohm local pour un milieu conducteur mobile

$$j = \gamma(E + v \wedge B) \quad (4.37)$$

Où

$v$  : vitesse de déplacement du conducteur.

$v \wedge B$  : Champ électromoteur, provient du fait que le conducteur ‘voit’ dans son propre référentiel un champ électrique  $E' = E + v \wedge B$  différent de celui (E) du référentiel fixe.

## 6- CONDITIONS AUX LIMITES

Intéressons-nous à l’interface entre deux milieux 1 et 2. Cette interface est susceptible de porter une charge surfacique  $\sigma$  ainsi qu’un courant surfacique  $\vec{j}$ . L’intégration des équations de Maxwell entre deux points très proches de l’interface, un point  $M1$  du milieu 1 et un point  $M2$  du milieu 2, conduit aux relations suivantes :

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \text{donne} \quad \vec{E}_{2n} - \vec{E}_{1n} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \quad (4.38)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad \text{donne} \quad \vec{B}_{2n} - \vec{B}_{1n} = \vec{0} \quad (4.39)$$

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{donne} \quad \vec{E}_{2t} - \vec{E}_{1t} = \vec{0} \quad (4.40)$$

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \text{donne} \quad \vec{B}_{2t} - \vec{B}_{1t} = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \quad (4.41)$$

Ces équations se résument en deux équations, qui pour un point  $M1$  du milieu 1 et un point  $M2$  du milieu 2, voisins de l’interface :

- Relation de passage pour les conditions aux limites

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \quad (4.42)$$

$$\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \quad (4.43)$$

## Chapitre 5 Propagation du champ électromagnétique

### 1- DESCRIPTION MATHEMATIQUE DE LA PROPAGATION

Les équations de propagation obtenues sont vectorielles et tridimensionnelles, les variations s'effectuent uniquement dans une direction de l'espace, représentée par un axe, noté (O,u). On a alors

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(u, t) \quad (5.1)$$

L'axe (O,u) définit l'axe de propagation et les plans perpendiculaires à cet axe sont appelés plans d'onde. Pour ce faire, on définit d'abord un vecteur unitaire de l'axe de propagation :

$$\vec{e}_u = \alpha \vec{e}_x + \beta \vec{e}_y + \gamma \vec{e}_z \quad (5.2)$$

$$\text{Avec} \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1 \quad (5.3)$$

Un point de l'espace repéré par le vecteur :

$$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z \quad (5.4)$$

A pour coordonnée selon l'axe de propagation :

$$u = \vec{e}_u \cdot \vec{r} = \alpha x + \beta y + \gamma z \quad (5.5)$$

Par la suite :

$$\frac{\partial}{\partial x} \vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{\partial}{\partial x} \vec{E}(u, t) = \frac{\partial}{\partial u} \vec{E}(u, t) \frac{\partial}{\partial x} u = \alpha \frac{\partial}{\partial u} \vec{E}(u, t) \quad (5.6)$$

D'où :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \vec{E}(\vec{r}, t) = \alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial u^2} \vec{E}(u, t) \quad (5.7)$$

En appliquant la même démarche pour les dérivées partielles par rapport à y et z, on montre que:

$$\nabla^2 \vec{E}(\vec{r}, t) = \alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial u^2} \vec{E}(u, t) + \beta^2 \frac{\partial^2}{\partial u^2} \vec{E}(u, t) + \gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial u^2} \vec{E}(u, t) = \frac{\partial^2}{\partial u^2} \vec{E}(u, t) \quad (5.8)$$

Au final, l'équation d'onde se ramène à l'équation d'onde unidimensionnelle :

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2} \vec{E}(u, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E}(u, t) = \vec{0} \quad (5.8)$$

Une telle équation admet des solutions de la forme :

$$\vec{E}(u, t) = \vec{E}^+(ct - u) + \vec{E}^-(ct + u) \quad (5.9)$$

Correspondant à la superposition d'une onde directe et d'une onde rétrograde.

## 2- EQUATION DE PROPAGATION D'UNE ONDE QUELCONQUE

Les équations de propagation vérifiées par le champ se déduisent directement des équations de Maxwell :

$$\nabla \cdot \vec{E} = \text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (5.10)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = \text{div} \vec{B} = 0, \quad (5.11)$$

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{B} = \text{rot} \vec{B} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{J} \quad (5.13)$$

$$\nabla \times \vec{E} = \text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (5.14)$$

En prenant le rotationnel de la troisième et en appliquant la formule du double produit vectoriel, on obtient ainsi :

$$\vec{\nabla}[\vec{\nabla} \cdot \vec{E}] - \nabla^2 \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{B} \quad (5.15)$$

En utilisant les première et quatrième équation, on déduit :

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} = \mu_0 \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} + \frac{\vec{\nabla} \rho}{\epsilon_0} \quad (5.16)$$

Avec  $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$

De même, nous avons :

$$\nabla^2 \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{B} = \mu_0 \vec{\nabla} \times \vec{J} \quad (5.17)$$

En dehors des sources, et à partir des équations (5.16) et (5.17) on obtient :

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} = \vec{0} \quad (5.18)$$

$$\nabla^2 \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{B} = \vec{0} \quad (5.19)$$

Ce résultat est une conséquence logique des équations de Maxwell : celles-ci montrent en effet que des champs sont créés au niveau des sources (équations de Maxwell-Gauss et de Maxwell-Ampère) et qu'ils s'entretiennent ensuite mutuellement au delà de ces sources (équations de Maxwell-Faraday et de Maxwell-Ampère). Les variations temporelles du champ électrique engendrent des variations spatiales du champ magnétique et réciproquement si bien que le champ se répand dans tout l'espace, de proche en proche.

### 3- EQUATION DE PROPAGATION DU CHAMP ELECTROMAGNETIQUE DANS LE VIDE

Par un vrai vide on entend : En l'absence de charge ( $\rho=0$ ) et de courants ( $\vec{J} = \vec{0}$ ). Donc, dans ce cas-là, Les équations de Maxwell prennent la forme suivante :

$$\nabla \cdot \vec{E} = \text{div} \vec{E} = 0, \quad (5.20)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = \text{div} \vec{B} = 0, \quad (5.21)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \text{rot} \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (5.22)$$

$$\nabla \times \vec{E} = \text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (5.23)$$

Ou :

$$\frac{1}{c^2} = \mu_0 \varepsilon_0 \quad (5.23)$$

Notre objectif est d'exprimer une forme de l'équation dans laquelle les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  apparait séparément et non pas ensemble dans la même équation. A partir de l'équation (15), on obtient :

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \vec{B} \quad (5.24)$$

Remplaçant cette équation dans l'équation (14), on obtient :

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (5.25)$$

Remarque : Selon la loi

$$\nabla \times \nabla \times \vec{a} \equiv \nabla(\nabla \cdot \vec{a}) - \nabla^2 \vec{a} \quad (5.26)$$

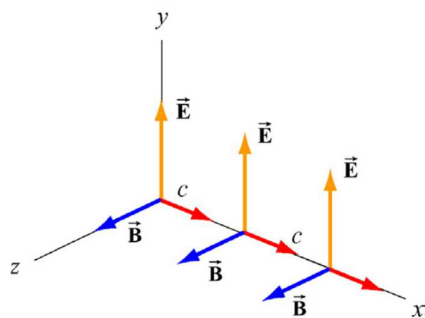
En utilisant l'équation (5.26) et la remplaçant dans l'équation (5.20) nous aurons :

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (5.27)$$

L'équation (5.27) est l'équation d'onde dans trois dimensions spatiales. Notant que chaque composant du champ électrique satisfait indépendamment l'équation d'onde.

#### 4- ONDE PLANE

Une onde plane est une onde dont les fronts d'ondes sont plans. Pour examiner les propriétés des ondes électromagnétiques, considérons pour simplifier une onde électromagnétique se propageant dans la direction +x, avec le champ électrique  $\vec{E}$  pointant dans la direction + y et le champ magnétique  $\vec{B}$  dans la direction +z, comme illustré à la Figure ci-dessous.



**Figure 5.1 Champs électrique et magnétique d'une onde électromagnétique dans un espace vide**



Ce que nous avons ici est un exemple d'onde plane puisqu'à tout instant  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  sont uniformes sur tout plan perpendiculaire à la direction de propagation. De plus, l'onde est transversale car les deux champs sont perpendiculaires à la direction de propagation, qui pointe dans la direction du produit croisé  $\vec{E} \times \vec{B}$ .

Une solution possible de l'équation d'onde est la suivante :

$$\begin{aligned}\vec{E} &= E_y(x, t)\hat{j} = E_0 \cos k(x - vt)\hat{j} = E_0 \cos(kx - \omega t)\hat{j} \\ \vec{B} &= B_z(x, t)\hat{k} = B_0 \cos k(x - vt)\hat{k} = B_0 \cos(kx - \omega t)\hat{k}\end{aligned}\quad (5.28)$$

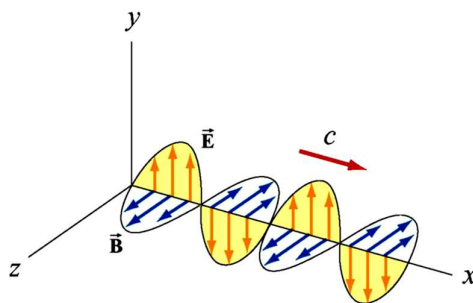
Où les champs sont sinusoïdales, avec des amplitudes  $E_0$  et  $B_0$ . Le nombre d'onde angulaire  $k$  est lié à la longueur d'onde  $\lambda$  par  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

Et la fréquence angulaire  $\omega$  est

$$\omega = kv = 2\pi \frac{v}{\lambda} = 2\pi f$$

Où  $f$  est la fréquence linéaire. Dans le vide, l'onde se propage à la vitesse de la lumière,  $v=c$ .

Le comportement caractéristique de l'onde électromagnétique sinusoïdale est illustré par la figure ci-après.



**Figure 5.2 Champs électrique et magnétique d'ondes électromagnétiques planes dans l'espace**

Nous remarquons que les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  sont toujours en phase. Afin d'obtenir une relation entre les amplitudes des champs  $E_0$  et  $B_0$  nous tenons à prendre en considération les dérivations partielles des deux champs menant à :

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -kE_0 \sin(kx - \omega t) \quad (5.29)$$

Et

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} = \omega B_0 \sin(kx - \omega t) \quad (5.30)$$

Ce qui implique  $E_0 k = \omega B_0$ , ou

$$\frac{E_0}{B_0} = \frac{\omega}{k} = c \quad (5.31)$$

Donc d'une façon générale l'équation sera :

$$\frac{E}{B} = c \quad (5.32)$$

## 5- CARACTERISTIQUES DES ONDES PLANES

Résumons les caractéristiques importantes des ondes électromagnétiques décrites dans l'Eq. (5.31):

- L'onde est transversale depuis les deux champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  qui sont perpendiculaire à la direction de propagation et pointe dans la direction du produit croise.
- Les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  sont perpendiculaires l'un à l'autre. Par conséquent, leur produit scalaire s'annule,  $\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$ .
- Le rapport des grandeurs et des amplitudes des champs est :
- $\frac{E}{B} = \frac{E_0}{B_0} = \frac{\omega}{k} = c$
- La vitesse de propagation dans le vide est égale à la vitesse de la lumière,  $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$
- Les ondes électromagnétiques obéissent au principe de superposition.

## 6- PROPAGATION DANS UNE DIRECTION QUELCONQUE

Dans c'est cas nous prenons le cas d'un diélectrique parfait (isolant)( $\delta=0$ ) milieu neutre qui veut dire pas d'accumulation ou la densité de charge existe e espace libre ( $\rho = 0$ ).

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (5.33)$$

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) = -\mu \cdot \vec{\nabla} \wedge \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\mu \cdot \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \left( \epsilon \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = -\mu \cdot \epsilon \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (5.34)$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \Delta \vec{E} \quad \text{avec} \quad \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) = 0 \quad (5.35)$$

$$-\Delta \vec{E} = -\mu \cdot \epsilon \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (5.36)$$

Donc on aura

$$\Delta \vec{E} - \mu \cdot \epsilon \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad (5.37)$$

Avec la même démonstration pour le champ magnétique on trouve.

Dans le vrai vide, le champ magnétique vérifie l'équation d'ALEMBERT, soit :

$$\Delta \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad (5.38)$$

## 7- VITESSE ET LONGUEUR D'ONDE

D'après l'équation différentielle régissant  $\vec{E}$  et  $\vec{H}$  nous déduisons que  $\mu\epsilon = 1/c^2$

C étant la vitesse de propagation.

Dans le vide,

$$\Delta \vec{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0.$$

$$\epsilon = \epsilon_0 = \frac{1}{36\pi \cdot 10^9} = 8,8 \cdot 10^{-12} F/m$$

$$\mu = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{H/m}$$

Si on écrit  $\mu_0 \cdot \epsilon_0 \cdot c^2 = 1$ , alors  $c \approx 3 \cdot 10^8 \text{m/s}$

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \text{ équation de propagation dans le vide.}$$

Pour un problème monodimensionnel :

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

Si on cherche une solution de la forme  $f(t + \alpha \cdot x/c)$ . On aura alors une onde qui se propage à

la vitesse  $c/\alpha$ . Il vient :  $\left(\frac{\alpha}{c}\right)^2 - \frac{1}{c^2} = 0 \Rightarrow \alpha^2 = 1$

$$\text{Donc } \vec{E}(x, t) = f_1\left(t + \frac{x}{c}\right) + f_2\left(t - \frac{x}{c}\right) \quad (5.39)$$

Ou

C : vitesse de propagation des ondes électromagnétiques.

Dans le cas particulier des ondes électromagnétiques sinusoïdales a pulsation  $\omega$ , on peut simplifier :

$$X(x, t) = X \cdot \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c} \cdot x\right) \quad (5.40)$$

LHI : Linéaire Homogène Isotrope.

$$\Delta \vec{E} - \mu \epsilon \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

Posons :  $\mu \cdot \epsilon \cdot u^2 = 1$  ou  $u$  est la vitesse de propagation. On définit  $n = \frac{c}{u}$  (indice de réfraction),

alors :  $n = \sqrt{\epsilon_r \mu_r} \approx \sqrt{\epsilon}$  car très souvent  $\mu_r = 1$

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi c}{\omega}$$

$$X(x, t) = X \cdot \cos\left(\frac{2\pi c}{\lambda} t - \frac{2\pi}{\lambda} \cdot x\right) \quad (5.41)$$

## 8- PROPAGATION DE L'ENERGIE ELECTROMAGNETIQUE

En régime indépendant du temps l'énergie renfermer dans un élément de volume  $dV$ , soumis a  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  se composent :

- Energie diélectrique

$$dW_e = \frac{\epsilon}{2} E^2 dV \quad (5.42)$$

- Energie magnétique

$$dW_m = \frac{\mu}{2} B^2 dV \quad (5.43)$$

- Energie totale

$$dW = dW_e + dW_m = \frac{\epsilon E^2 + \mu H^2}{2} dV \quad (5.44)$$

En régime dépendant du temps la formule reste valable mais instantanément. En remplaçant,  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  par leurs expressions en fonction du temps.

$$dW = \left[ \frac{\epsilon E_0^2}{2} \cos^2 \left( \omega \left( t - \frac{z}{v} \right) \right) + \frac{\mu E_0^2}{2 \mu^2 v^2} \cos^2 \left( \omega \left( t - \frac{z}{v} \right) \right) \right] dV = \frac{E_0^2}{2} \cos^2 \omega \left( t - \frac{z}{v} \right) \left[ \epsilon + \left( \frac{1}{\mu v^2} \right) \right] dV \quad (5.45)$$

Pour  $\epsilon \mu v^2 = 1 \Rightarrow \mu v^2 = \frac{1}{\epsilon}$

L'équation devient :

$$dW = \epsilon E_0^2 \cos^2 \omega \left( t - \frac{z}{v} \right) dV \quad (5.46)$$

## 9- ONDES GUIDEES

Nous rechercherons s'il est effectivement possible de faire propager, à l'intérieur du guide et le long de l'axe  $z'$ , une onde monochromatique de pulsation  $\omega$ . Pour déterminer quelles seraient alors les configurations possibles du champ électromagnétique, il faut passer par la résolution des équations de Maxwell, en tenant compte des conditions aux limites imposées au champ sur

les faces internes du guide. Pour ce faire, chacune des composantes du champ sera écrite sous la forme générique :

$$\boldsymbol{\psi}(x, y, z, t) = \mathbf{F}(x, y) e^{j(\omega t - k_z z)} \quad (5.47)$$

Ou  $kz$  est a priori un nombre réel, positif puisque l'onde doit être progressive. Ainsi, dans les équations, la dérivation temporelle devient une multiplication par  $j\omega$ , tandis que celle par rapport à  $z$  équivaut à une multiplication par  $-jk_z$ .

Tout d'abord, les composantes des champs électrique et magnétique  $E_z$  et  $B_z$  respectivement doivent être déterminé à partir de l'équation suivante :

$$\overrightarrow{rot} \vec{E} = -j\omega \vec{B} \quad (5.48) \quad \text{on tire}$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} = -j\omega B_x - jk_z E_y, \quad \frac{\partial E_z}{\partial x} = j\omega B_y - jk_z E_x \quad (5.49)$$

Tandis que l'équation  $\overrightarrow{rot} \vec{B} = j \frac{\omega}{c^2} \vec{E}$  conduit a

$$\frac{\partial B_z}{\partial y} = j \frac{\omega}{c^2} E_x - jk_z B_y, \quad \frac{\partial B_z}{\partial x} = -j \frac{\omega}{c^2} E_y - jk_z B_x \quad (5.50)$$

Dans le cas ou  $k_z^2 \neq \omega^2/c^2$ , ces relations permettent d'exprimer les composantes "transversales" des champs en fonction des dérivées partielles de leurs composantes "longitudinales". Explicitement, on obtient, sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} E_y \\ B_x \end{pmatrix} = \frac{1}{\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2} \begin{pmatrix} -jk_z & j\omega \\ -j \frac{\omega}{c^2} & -jk_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial E_z}{\partial y} \\ \frac{\partial B_z}{\partial x} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} E_x \\ B_y \end{pmatrix} = \frac{1}{\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2} \begin{pmatrix} -jk_z & -j\omega \\ -j \frac{\omega}{c^2} & -jk_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ \frac{\partial B_z}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (5.51)$$

les composantes  $E_z$  et  $B_z$  satisfaisant par ailleurs une équation de propagation

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} = \left( k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) E_z, \quad \frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_z}{\partial y^2} = \left( k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) B_z \quad (5.52)$$

Sous la condition précitée, le champ électromagnétique est nul si les composantes  $E_z$  et  $B_z$  sont simultanément nulles. On est alors conduit à classer les configurations de champ en deux groupes :

- le premier, noté (TM) est celui des ondes dites transverses magnétiques pour lesquelles  $B_z = 0, E_z \neq 0$  ;
- le second, noté (TE) est celui des ondes dites transverses électriques pour lesquelles  $E_z = 0, B_z \neq 0$ .
- Un troisième groupe correspond au cas particulier pour lequel  $E_z = 0$  et  $B_z = 0$ . Il s'agit d'ondes TEM, c'est-à-dire, à la fois transverses électriques et transverses magnétiques. Un tel champ non nul ne pourrait exister que si  $kz = \omega/c$ . En fait, comme nous le montrons dans le complément, ce type d'ondes ne peut pas se propager à l'intérieur de guides d'ondes creux.

## 10- SPECTRE DU RAYONNEMENT ELECTROMAGNETIQUE

Le spectre électromagnétique est la décomposition du rayonnement électromagnétique selon ses différentes composantes en termes de fréquence (ou période), d'énergie des photons ou encore de longueur d'onde associée, les quatre grandeurs  $\nu$  (fréquence),  $p$  (période),  $E$  (énergie) et  $\lambda$  (longueur d'onde) étant liées deux à deux par : • la constante de Planck  $h$  (approximative a.  $6,626069 \times 10^{-34}$  J·s  $\approx 4,13567$  meV/Hz) • et la vitesse de la lumière  $c$  (exactement 299 792 458 m/s),

Selon les formules : •  $E = h\nu = h/p$  pour l'énergie transportée par le photon, •  $c = \lambda\nu = \lambda/p$  pour le déplacement dans le vide (relativiste dans tous les référentiels) du photon,

D'où aussi : •  $E = hc/\lambda$ .

Les ondes EM couvrent un spectre très large en longueur d'onde et en fréquence. Le tableau suivant donne une portion importante du spectre:

Spectre électromagnétique

Spectre électromagnétique : Radioélectricité · Spectre radiofréquence · Bandes VHF-UHF · Spectre micro-ondes

Fréquence	9 kHz	1 GHz	300 GHz	3 THz	405 THz	480 THz	508 THz	530 THz	577 THz	612 THz	690 THz	750 THz	30 PHz	30 EHz
Longueur d'onde	33 km	30 cm	1 mm	100 μm	745 nm	625 nm	590 nm	565 nm	520 nm	490 nm	435 nm	400 nm	10 nm	10 pm
Bande	ondes radio	micro-ondes	térahertz	infrarouge	rouge	orange	jaune	vert	cyan	bleu	violet	ultraviolet	rayons X	rayons γ
		rayonnements pénétrants			lumière visible							rayonnements ionisants		

Tableau 5.1

## Chapitre 6 Réflexion et transmission des ondes électromagnétiques

### 1- PHENOMENE DE REFLEXION ET TRANSMISSION

La plupart du temps, des ondes planes rencontrent des obstacles, et sont partiellement réfléchies. Un exemple est lorsque la lumière frappe un miroir : la majorité de l'onde est réfléchie, et une faible partie est transmise puis rapidement atténuée dans l'argent qui sert de fond au miroir. Le pourcentage de l'onde qui est réfléchie dépend des caractéristiques des milieux.

En premier lieu, on analysera le cas plus simple où la direction de propagation est Normale à l'interface des deux milieux. On commencera avec le cas plus général de milieux avec pertes, puis on analysera dans les cas particuliers de milieux sans pertes et des conducteurs idéaux. A la section suivante, on analysera le cas où l'angle d'incidence n'est pas normal.

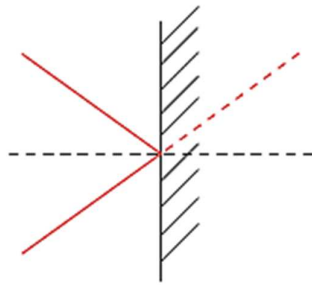


Figure 6.1 –Miroir Plan

#### 1-1. CAS GENERAL

En premier, on considère le cas d'une onde plane polarisée en  $x$  qui se propage d'un milieu 1 vers un milieu 2. Le champ incident est noté par l'exposant  $i$  :

$$\vec{E}^i = E_0^i e^{-\alpha_1 z} \cos(\omega t - \beta_1 z) \hat{a}_x$$

Où  $E_0^i$  est l'amplitude du champ électrique à  $z = 0$ , l'interface entre les deux milieux. Les calculs sont plus simples en phaseurs, alors on a des champs incidents, réfléchis et transmis :

Incident :

$$\vec{E}_s^i = E_0^i e^{-\alpha_1 z} e^{-j\beta_1 z} \hat{a}_x$$



$$\vec{B}_s^i = \frac{E_0^i}{\eta_1} e^{-\alpha_1 z} e^{-j\beta_1 z} \hat{a}_y$$

Réfléchi :

$$\vec{E}_s^r = E_0^r e^{\alpha_1 z} e^{j\beta_1 z} \hat{a}_x$$

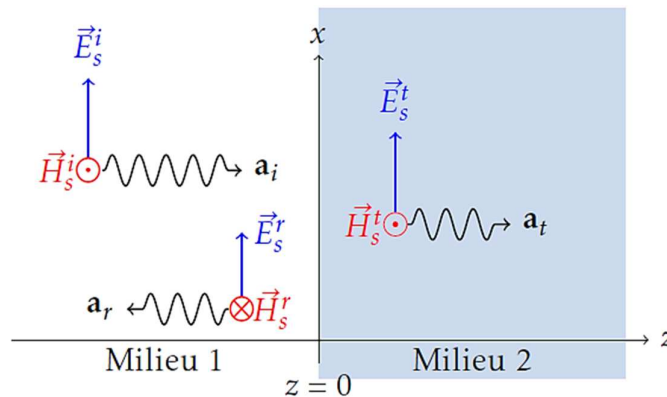
$$\vec{B}_s^r = \frac{E_0^r}{\eta_1} e^{\alpha_1 z} e^{j\beta_1 z} \hat{a}_y$$

Transmis :

$$\vec{E}_s^t = E_0^t e^{-\alpha_2 z} e^{-j\beta_2 z} \hat{a}_x$$

$$\vec{B}_s^t = \frac{E_0^t}{\eta_2} e^{-\alpha_2 z} e^{-j\beta_2 z} \hat{a}_y$$

Notez que les ondes incidentes et réfléchies sont dans le milieu 1, et que l'onde transmise est dans le milieu 2. La figure 6.1 montre les différentes composantes dans les milieux.



**Figure 6.2 – Onde plane incidente à l'interface de deux milieux**

On va déterminer le lien entre  $E_0^i$ ,  $E_0^r$  et  $E_0^t$ . Pour une onde plane uniforme, à incidence normale sur une surface, il y a seulement des composantes tangentielles du champ électrique. Pour des champs tangentiels, on a vu que  $1t = E_2t$ , et pour des champs magnétiques :

$$a_{21} \times (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = J_s$$

Et s'il n'y a pas de courant à la surface,

$$\vec{B}_{1t} = \vec{B}_{2t}$$

A l'aide des équations précédentes, puisque  $z = 0$  à l'interface, et parce que le champ total à l'interface dans le milieu 1 doit être égal au champ dans le milieu 2, on obtient :

$$E_0^i + E_0^r = E_0^t$$

Les champs magnétiques tangentiels sont aussi égaux :

$$\frac{E_0^i}{\eta_1} - \frac{E_0^r}{\eta_1} = \frac{E_0^t}{\eta_2}$$

et si on combine,

$$E_0^i - E_0^r = \frac{\eta_1}{\eta_2} E_0^t$$

On peut obtenir des équations qui relient l'onde réfléchie et l'onde transmise à l'onde incidente :

$$E_0^r = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_1 + \eta_2} E_0^i = \Gamma E_0^i$$

$$E_0^t = \frac{2\eta_2}{\eta_1 + \eta_2} E_0^i = \tau E_0^i$$

Où on définit un *coefficient de réflexion*  $\Gamma$  et un coefficient de transmission  $\tau$  : où on définit un *coefficient de réflexion*  $\Gamma$  et un coefficient de transmission  $\tau$  :

$$\Gamma = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_1 + \eta_2} = \frac{E_0^r}{E_0^i}$$

$$\tau = \frac{2\eta_2}{\eta_1 + \eta_2} = \frac{E_0^t}{E_0^i}$$

Et on a  $\tau = 1 + \Gamma$

## 2- REFLEXION ET TRANSMISSION A INCIDENCE OBLIQUE

L'incidence normale d'une onde plane uniforme à l'interface de deux milieux est un cas particulier du cas général où l'onde atteint l'interface à un angle oblique. Pour une incidence normale, les champs sont tangentiels à la frontière, ce qui n'est pas nécessairement le cas pour une incidence oblique.

On va définir quelques termes à l'aide de la figure 6.3. Il y a trois directions de propagation:  $a_i$ , pour l'onde incidente,  $a_t$  pour l'onde transmise, et  $a_r$  pour l'onde réfléchie. Le *plan d'incidence* est le plan qui contient la normale à la frontière et la direction de propagation de l'onde incidente ; dans ce cas-ci, c'est le plan  $x - z$ . L'angle d'incidence  $\theta_i$  est l'angle que fait l'onde incidente avec une normale à l'interface ; de même,  $\theta_r$  est l'angle de réflexion et  $\theta_t$  est l'angle de transmission.

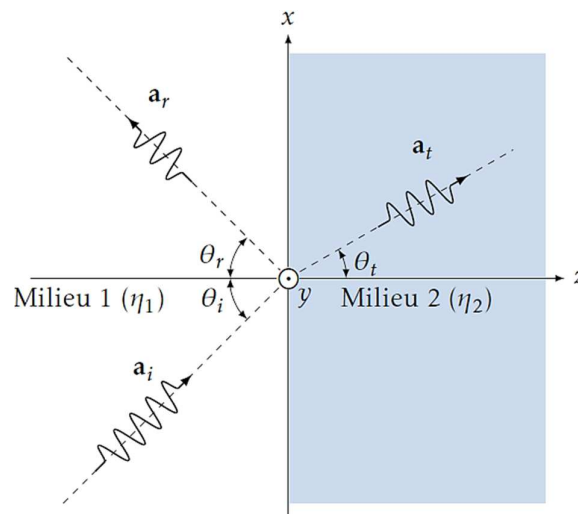


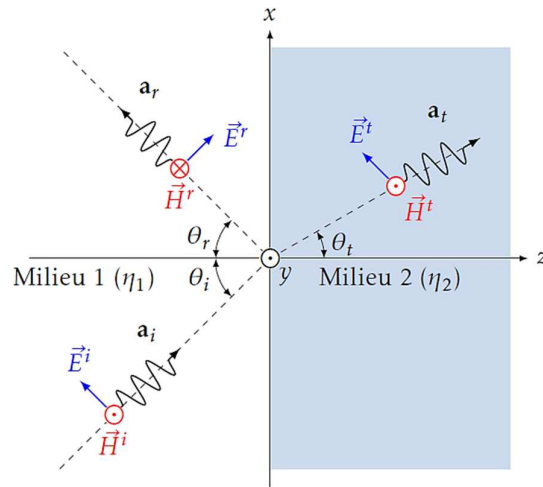
Figure 6.3 – Onde plane à incidence oblique à l'interface de deux milieux.

## 3- ONDE EN POLARISATION PARALLELE

Soit une onde électromagnétique incidente polarisée en parallèle au plan d'incidence de la forme  $\vec{E}_i$  :

$$\vec{E}_i(r, t) = E_i e^{j(\omega t - kz)}$$

$$\vec{E}_i(r, t) = E_i e^{j(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r})}$$



**Figure 6.4– incidence oblique, polarisation parallèle.**

Les ondes réfléchies et réfractées ont pour forme :

$$\vec{E}_r(r, t) = E_r e^{j(\omega t - \vec{k}_r \vec{r})}$$

$$\vec{E}_t(r, t) = E_t e^{j(\omega t - \vec{k}_t \vec{r})}$$

Les champs magnétiques ont pour forme :

$$\vec{B}_i(r, t) = B_i e^{j(\omega t - \vec{k}_i \vec{r})}$$

$$\vec{B}_r(r, t) = B_r e^{j(\omega t - \vec{k}_r \vec{r})}$$

$$\vec{B}_t(r, t) = B_t e^{j(\omega t - \vec{k}_t \vec{r})}$$

Occupons-nous des amplitudes  $(\vec{E}_i, \vec{E}_r, \vec{E}_t)$  et  $(\vec{B}_i, \vec{B}_r, \vec{B}_t)$

$$\frac{E}{B} = Z = \frac{Z_0}{n}$$

Avec

$n$  : indice de réfraction

$$\Gamma // = \frac{E_r}{E_i} = \frac{|\vec{E}_r|}{|\vec{E}_i|}$$

Coefficient de réflexion

$$\tau_{//} = \frac{E_t}{E_i} = \frac{|\vec{E}_t|}{|\vec{E}_i|} \quad \text{Coefficient de transmission}$$

$$\text{Composant tangentiel : } \begin{cases} E_i \cos(i) + E_r \sin(i) = E_t \cos(r) \\ B_i - B_r = B_t \end{cases}$$

$$\text{Equation de Descartes } \begin{cases} (E_i + E_r) \cos(i) = E_t \cos(r) = E_t \sqrt{1 - \sin^2 r} \\ B_i - B_r = B_t \end{cases}$$

$$n_1 \sin(i) = n_2 \sin(r)$$

$$\begin{cases} (E_i + E_r) \cdot \cos(i) = \frac{E_t \sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \cdot \sin^2(i)}}{Z_2} \\ B_i - B_r = B_t \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1 + \Gamma_{//}) \cdot \cos(i) = \tau_{//} \\ 1 - \Gamma_{//} = \tau_{//} \cdot \frac{n_2}{n_1} \end{cases}$$

$$1 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \xrightarrow{\text{apres resolution}} \begin{cases} \Gamma_{//} = \frac{\sqrt{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 - \sin^2 i} - \left(\frac{n_2}{n_1}\right) \cos(i)}{\sqrt{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 - \sin^2 i} + \left(\frac{n_2}{n_1}\right) \cos(i)} \\ \tau_{//} = \frac{2 \left(\frac{n_2}{n_1}\right) \cdot \cos(i)}{\sqrt{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 - \sin^2(i)} + \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \cos(i)} \end{cases}$$

**Cas particulier :** incidence normale  $i=0$

$$\Gamma_{//} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$$

$$\tau_{//} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}$$

### 3-1. Si $n_1 < n_2$ onde de l'air

$\Gamma_{//} < 0$  :  $E_r$  et  $E_i$  déphasage de  $\pi$ . Le champ E change de sens lors de la réflexion.

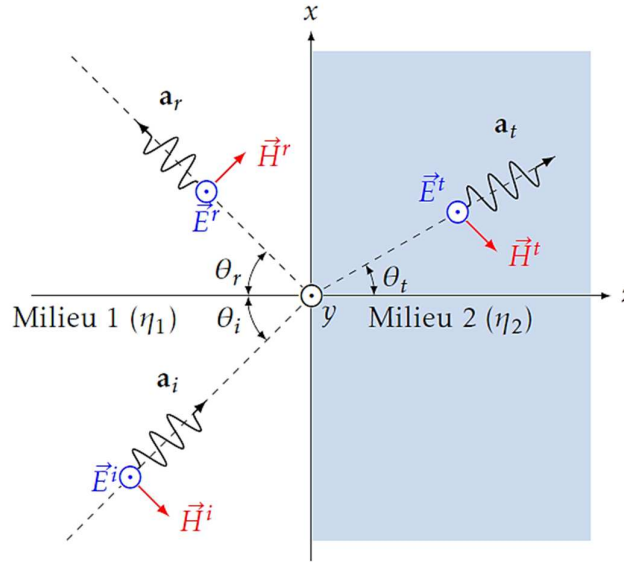
$\tau_{//} > 0$  :  $E_t$  et  $E_i$  sont en phase.

**3-2. Si  $n_1 > n_2$**

$\Gamma // > 0$  :  $E_r$  et  $E_i$  sont en phase

$\tau // > 0$  :  $E_i$  et  $E_t$  sont en phase

**4- ONDE PERPENDICULAIRE EN POLARISATION**



**Figure 6.5– incidence oblique, polarisation perpendiculaire.**

**Soit :**

$E_1, n_1, z_1, \mu_0$  : représente milieu 1

$E_2, n_2, z_2, \mu_0$  : représente milieu 2

On a

$$\begin{cases} E_{t1} = E_{t2} \\ B_{t1} = B_{t2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E_i - E_r = E_t \\ -H_i \cos(i) - H_r \cos(i) = -H_t \cos(r) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E_i - E_r = E_t \\ \left(\frac{E_i}{z_1} + \frac{E_r}{z_1}\right) \cos(i) = \frac{E_t}{z_2} \cos r \end{cases}$$

Or  $\Gamma_{\perp} = \frac{E_r}{E_i}$  ;  $\tau_{\perp} = \frac{E_t}{E_i}$

$n_1 \sin(i) = n_2 \sin(r)$

$$\begin{cases} 1 - \Gamma_{\perp} = \tau_{\perp} \\ (1 + \Gamma_{\perp}) \cdot \cos(i) = \frac{n_2}{n_1} \cdot \tau_{\perp} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \cdot \sin^2(i)} \end{cases}$$

Car

$$\begin{cases} z_1 = \frac{z_0}{n_1} \\ z_2 = \frac{z_0}{n_2} \end{cases}$$

$$\Gamma_{\perp} = \frac{\sqrt{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 - \sin^2(i)} - \cos(i)}{\sqrt{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 - \sin^2(i)} + \cos(i)}$$

$$\tau_{\perp} = \frac{2 \cdot \cos(i)}{\sqrt{\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 - \sin^2(i)} + \cos(i)}$$

**Deux cas particuliers :  $i=0$  (incidence normale)**

$$\Gamma_{\perp} = \frac{n_2 - n_1}{n_1 + n_2} \qquad \Gamma_{\perp} = -\Gamma_{//}$$

$$\tau_{\perp} = \frac{2 \cdot n_1}{n_1 + n_2} \qquad \tau_{\perp} = \tau_{//}$$

## 5- REPRESENTATION GRAPHIQUE

### 5-1. cas ou $n_1 < n_2$

( $n_1$ =air),  $n_2=1,5$

$$\cos i_b = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2}}$$

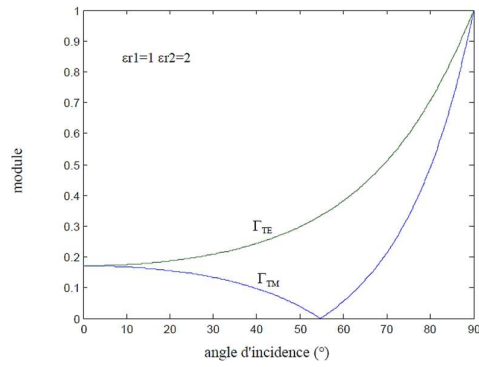


Figure 6.6. Coefficient de réflexion et de transmission en fonction de l'angle d'incidence

5-2. cas ou  $n1 > n2$

$n1=1,5, n2=1$

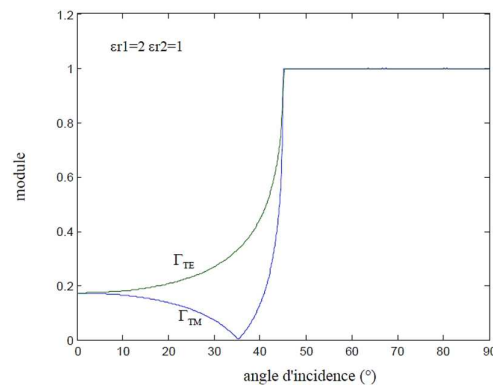


Figure 6.7– Coefficient de réflexion et de transmission en fonction de l'angle d'incidence



**REFERENCES**

- [1] Raphaël GILLARD. PROPAGATION des ONDES ELECTROMAGNETIQUES. Module M3S9.2005.
- [2] A. Wolski. Theory of electromagnetic fields. University of Liverpool, and the Cockcroft Institute, UK.
- [3] Raphael Grandin. Rappel d'électromagnétisme. Version du 21 août 2017
- [4] Patrice Tchofo Dinda. Électromagnétisme. Ondes et propagation guidée. DUNOD 2017.
- [5] Iannis Aliferis. Electromagnétisme. École Polytechnique de l'Université Nice Sophia Antipolis.2012-2013.
- [6] ÉMILE AMZALLAG - JOSEPH CIPRIANI - JOCELYNE BEN AÏM - NORBERT PICCIOLI. LA PHYSIQUE EN FAC. Cours et exercices corrigés. Dunod, Paris 2006
- [7] Hilary. D. Brewster. ELECTROSTATICS. Oxford Book Company. First Edition 2009. ISBN: 978-93-80179-00-1.
- [8] Tamer Becherrawy. Electromagnetism. Maxwell equations, wave propagation and emission.2012. ISBN 978-1-84821-355-5
- [9] Evgeni Popov. HAL. Electrostatique et Magnétostatique : Notes du cours. 2013. cel-00773417 .<https://cel.archives-ouvertes.fr/cel-00773417v1>.