Ministère de l'Enseignement Supérieur et de La Recherche Scientifique

Université Djilali Bounaama Khemis Miliana

Faculté des Sciences et de la technologie

Département de Mathématiques et Informatiques

Cours et Exercices D'Analyse Complexe

Destiné Aux Etudiants

Niveau: Deuxième Année Licence   Spécialité: Mathématique

Auteur:

F CHITA.

Experts du polycopié	**Grade**	**Etablissement d'affiliation**
Bouriah Soufyane	MCA	Université Hassiba Benbouali de Chlef
Bouderbala mihoub	MCA	Université de D.Bounaama khemis miliana

Date de validation du polycopié par l'instance scientifique habilitée

CSD   13-03-2023

Année Universitaire:

2022-2023

INTRODUCTION

L'analyse complexe est la branche de la mathématique recherchant sur les fonctions holomorphe c'est-à-dire sur les fonctions qui sont définies sur certains domaine du plan complexe et qui sont dérivables entant que fonction complexe.
La dérivabilité complexe a des conséquences beaucoup plus fortes que celle la dérivabilité réelle. Exemple toute fonction holomorphe et développable en série entières dans tout disque ouvert inclus dans son domaine de définition et est ainsi une fonction analytique.
En particulier, les fonctions holomorphe sont indéfiniment dérivables, un résultat qui est loin d'être vraie sur les fonctions réelles dérivables.
La plupart des fonctions élémentaires telle que les fonctions polynomiales, la fonction exponentielle, les fonctions trigonométrique sont des fonctions holomorphes.
L'analyse complexe pose des fondations au 19 eme siècle et un peu avant, les bâtisseurs les plus importants de cette théorie sont les mathématiciens : Euler- Gauss- Riemann- Cauchy.

Objectifs: Généraliser l'utilisation des concepts et du vocabulaire de l'analyse et analyse complexe.

Ce polycopié est un résultat du cours qui a été donné aux étudiants du deuxième année licence mathématique (L 2 Maths) de l'université de khemis miliana. Le polycopié se compose de 6 chapitres. Chaque chapitre est subdivisé en sections.
• Le premier chapitre, fait un rappel aux notions générales de l'analyse complexe.
• Le deuxième chapitre, est introduit la notion du fonctions holomorphes, analytiques, conditions de Cauchy-Riemann, et les fonction harmonique.
• Le troisième chapitre sera consacrée àa l'étude de certaines fonctions élémentaires complexes

comme par exemple : l'exponentielle, le logarithme, les puissances, les fonctions circulaires et les fonctions hyperboliques

• Le quatrième et cinquième contient certains des résultats les plus importants de l'analyse complexe. On cite parmi ces résultats le théorème de Cauchy-Goursat et la formule intégrale de Cauchy, Inégalité de cauchy, Théorème de Liouville et de Morera...

• Le dernier chapitre nous allons introduire le théorème des résidus: l'une des applications les plus remarquables de l'intégration dans le plan complexe en général et du théorème de Cauchy en particulier.

En fin, je tiens a remercier vivement le Dr. Bouriah Soufyane Maître de Conférence à l'Université de Hassiba Benbouali Chlef et le Dr. Bouderbala Mihoub Maître de Conférence à l'Université Djilali Bounaama khemis Miliana d'avoir accepté d'examiner ce manuel et de le juger pour qu'il puisse être présenté a nos étudiants.

CHAPTER 1

TOPOLOGIE DANS LE PLAN COMPLEXE

1.1 Propriétés algébriques des nombres complexes.

les nombres complexes sont apparus pour la première fois dès le XVIème siècle, dans les formules de Caradan et Tartaglia destinées à résoudre l'équation du troisième degré $x^3 = px + q$ (on dit que Tartaglia envoya sa méthode à Cardan qui se l'appropria ensuite) mais c'est sous la plume de Raffaile Boumbelli, en 1550, que le nom de nombre imaginaire futcité pour la première fois. La formule qui permet de calculer l'une des solutions de l'équation $x^3 = px + q$

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

est connue sous le nom de formule de Cardan.
R. Boumbelli d'ecrit l'exemple de l'équation $x^3 = 15x + 4$ dont une racine réelle est donnée par la formule de Caradan:
$\sqrt[3]{2 + \sqrt{(-121)}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{(-121)}}$ (expression qui aujourd'hui on ne se permettrait pas d'écrire...) or il a vu que 4 est une solution réelle de cette équation, et il émet l'hypothèse que les racines cubiques de $2 + \sqrt{-1}$ et $2 - \sqrt{-121}$ sont de la forme $2 \pm \alpha\sqrt{-1}$ et il trouve que $\alpha = 1$ convient ... Dès lors, l'expression précédente devient $2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1}$ et l'imaginaires disparaisissent.

C'est un peu plus tard, avec Gauss (1883) que les nombres complexes commencent à être étudiée pour eux mêmes, et non juste comme des quantités intermédiaires à un calcul qui nécessairement en disparaissent à la fin.

On muni $\mathbb{R}^2$ par les lois (l'addition et la multiplication) suivantes : Soient $(x, y), (u, v) \in \mathbb{R}^2$,

$$(x, y) + (u, v) = (x + u, y + v)$$

$$(x, y) \times (u, v) = (x.u - y.v, x.v + y.u)$$

Ces operations créent un corps commutatif, le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes note par $(\mathbb{C}, +, \times)$
$(0, 0)$ est l'élément neutre pour l'addition.
$(1, 0)$ est l'élément neutre pour la multiplication.

- l'inversse multiplicatif de $(x, y) \neq (0, 0)$ est $(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2})$
- En identifiant $(x, 0) \in \mathbb{R}^2$ avec $x \in \mathbb{R}$, et en posant $i = (0, 1)$ alors:

$$\mathbb{C} = \left\{z, z = x + iy, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1\right\}$$

n° Dans la suite, on notera par $i = (0, 1)$, le nombre complexe solution de l'équation $z^2 + 1 = 0$.

1.1.1 Représentation d'un nombre complexe

Tout nombre complexe peut s'écrire sous la forme algébrique

$$z = x + iy$$

- Le nombre réel x est la partie **réelle** de z.

- Le nombre réel y est la partie **imaginaire** de z.

On note: $x = Re(z)$ et $y = Im(z)$

Le conjugue d'un nombre complexe Soit $z = x + iy$ telsque $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$

Définition 1.1. *On appelée le conjugué de z le nombre complexe*

$$\overline{z} = x - iy$$

Proposition 1.1. *Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ alors on a*

$$\begin{aligned}
\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} : \overline{z_1 + z_2} &= \overline{z_1} + \overline{z_2} \\
\overline{z_1 z_2} &= \overline{z_1}\,\overline{z_2}. \\
\forall n \in \mathbb{N} : \overline{\alpha z} &= \alpha \overline{z}, \alpha \in \mathbb{R} \\
\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} &= \frac{1}{\overline{z}}, z \neq 0 \\
\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} &= \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}, z_2 \neq 0
\end{aligned}$$

Le Module d'un nombre complexe

Définition 1.2. *Le nombre réel positif*

$$|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

s'appelle le module de z

Proposition 1.2. $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ $\left\{\begin{array}{c}
\forall \lambda \in \mathbb{R}, |z| \geq 0, |\lambda z| = |\lambda|\,|z|. \\
|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|\,, |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|. \\
|\overline{z}| = |z|\,, \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, z_2 \neq 0. \\
||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq ||z_1| + |z_2||.
\end{array}\right.$

Exemple 1.1. *Si $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$, l'équation quadratique $az^2 + bz + c = 0$, admet toujours deux solutions dans $\mathbb{C}$.*

$$z = \left\{\begin{array}{lr}
\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} & ; \quad \Delta = b^2 - 4ac \succ 0. \\
\dfrac{-b}{2a} & ; \quad \Delta = b^2 - 4ac = 0. \\
\dfrac{-b \pm i\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} & ; \quad \Delta = b^2 - 4ac \prec 0.
\end{array}\right.$$

Argument d'un nombre complexe

Définition 1.3. *L'argument d'un nombre complexe non nul z est une mesure de l'angle $(i, V$ $)$ ou V est le vecteur d'affixe z dans la base orthonormée (i, j) on le note $\arg z$, il défini à 2π*

prés la valeur particuliére appartenant à l'intervalle $]-\pi, \pi[$ *est appelé argument principale on notera par exemple*

$$\arg(z) = \theta + [2k\pi]$$

Proposition 1.3. *Pour tout* $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$*, on a*

$$\begin{aligned} \arg z_1 z_2 &= \arg z_1 + \arg z_2 + 2k\pi \\ \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) &= \arg z_1 - \arg z_2 + 2k\pi \\ \arg z^n &= n \arg z + 2k\pi, \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Forme trigonometrique

Puisque un nombre complexe $z = x + iy$ peut être considère comme un couple (x,y) alors on peut représenter de tels points du plan xoy appelé le plan complexe

$$z = x + iy = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) = \rho e^{i\theta}$$

Cette formule est appelée la forme **trigonométrique** de z ou **polaire**.

Formule de Moivre

Proposition 1.4. *Si* $\rho = 1$ *on obtient la formule dite de Moivre*

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = e^{in\theta}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Racines n'iéme d'un nombre complexe

Définition 1.4. *Un nombre complexe* ***w*** *est appelé racine* ***nième*** *d'un nombre complexe z* $(z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta))$ *si* $w^n = z$.

D'aprés la formule de moivre:

$$w_k = \sqrt[n]{\rho}\left(\frac{\cos\theta + 2k\pi}{n} + i\frac{\sin\theta + 2k\pi}{n}\right), k = 0, \cdots, n-1.$$

Il ya **n** valeurs différent pour w_k, et leurs images forment un **polygone** de n cotês.

Exemple 1.2. *Les racines cubiques de l'unité* $(z^3 = 1)$ *sont:*

$$\begin{aligned} z_1 &= 1 \\ z_2 &= \cos(\frac{2\pi}{3}) + i\sin(\frac{2\pi}{3}) = e^{i\frac{2\pi}{3}} \\ z_3 &= \cos(\frac{4\pi}{3}) + i\sin(\frac{4\pi}{3}) = e^{i\frac{4\pi}{3}} \end{aligned}$$

1.2 Propriétés topologiques:

Définition 1.5. *Soit l'application:*

$$\begin{aligned} d : \mathbb{C} \times \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ (z_1, z_2) &\longrightarrow d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2| \end{aligned}$$

d est une distance sur $\mathbb{C}$.

$\mathbb{C}$ muni de d est un espace ***métrique*** *noté $(\mathbb{C}, d)$.*

1.2.1 Ouverts et fermées de C

- l'ensemble $B(z_0, r)$ de centre z_0 et de rayon r

  $$B = (z_0, r) = \{z \in \mathbb{C}, |z - z_0| \prec r\}$$

  est appelé **boule ouverte**.

- l'ensemble $B(z_0, r)$ de centre z_0 et de rayon r

  $$B = (z_0, r) = \{z \in \mathbb{C}, |z - z_0| \leq r\}$$

  est appelé **boule fermée**.

- l'ensemble $S(z_0, r)$ de centre z_0 et de rayon r

$$S = (z_0, r) = \{z \in \mathbb{C}, |z - z_0| = r\}$$

est appelé **sphère** de centre z_0 et de rayon r.

- Soit $U \subset \mathbb{C}$, U est appelé une partie ouverte de $\mathbb{C}$ (un ouvert de $\mathbb{C}$) ssi:

$$\forall z \in U, \exists \delta \succ 0, B(z, \delta) \subset U$$

- On dit que $F \subset \mathbb{C}$ est un fermé si et seulement si son complimentaire est ouvert.

- Soit $U \in \mathbb{C}$, U est borné si et seulement si $\exists M \succ 0, U \subset B(z_0, M)$

1.2.2 Voisinage d'un complexe

Définition 1.6. *On dit que le sous ensemble V de $\mathbb{C}$ est un voisinage du complexe z_0 si V contient une boule ouverte de centre z_0, i.e*

$$\exists r \in \mathbb{R}_+^*, B = (z_0, r) \subset V$$

Ensemble compact

$S \subset \mathbb{C}$, S est compact de $\mathbb{C}$ si et seulement si S est à la fois borné et fermé.

Ensemble connexe

$D \subset \mathbb{C}$, D est dit non connexe s'il existe deux ouverts A et B non vides tel que :

$$\begin{cases} D = A \cup B, \\ A \cap B = \emptyset. \end{cases}$$

Connexité par Arcs

Un ensemble ouvert $S \subset \mathbb{C}$ est dit connexe par arcs si deux points quelconques peuvent être reliés par un chemin qui se trouve entièrementdans S.

Domaine

Toute partie de $\mathbb{C}$ est à la fois ouverte et connexe est appelée domaine.

1.3 L'infini en analyse complexe

Il souvent commode d'ajouter à $\mathbb{C}$ un point à l'infini noté ∞. L'ensemble $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ est appelé sphère de Riemann. nous le noterons $\overline{\mathbb{C}}$

Structure d'espace topologique.

On définit une topologie sur $\bar{\mathbb{C}}$ en disant que S est ouvert si

1. $S \cap \mathbb{C}$ est un ouvert de $\mathbb{C}$

2. Si $\infty \in S, ilexisteR \succ 0$ telque $\mathbb{C} \setminus \overline{\Delta}(0, R) \subset S$

Proposition 1.5. *On a les équivalances suivantes,*

1. *pour une suite de nombres complexes:*

$$\lim_{n \to \infty} z_n = \infty \iff \lim_{n \to \infty} \frac{1}{z_n} = 0$$

$$\lim_{n \to \infty} z_n = \infty \iff \lim_{n \to \infty} |z_n| = \infty$$

2. *pour une fonction définie au voisinage de $z_0 \in \mathbb{C}$*

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty \iff \lim_{z \to z_0} \frac{1}{f(z)} = 0$$

3. *Pour une fonction définie pour $|z| \succ r$*

$$\lim_{z \to \infty} f(z) = w_0 \in \mathbb{C} \iff \lim_{z \to 0} f(\frac{1}{z}) = w_o$$

$$\lim_{z \to \infty} f(z) = \infty \iff \lim_{z \to 0} \left[f(\frac{1}{z}) \right]^{-1}$$

Remarque 1.1. *On a par définition*

$$Z_n \longrightarrow \infty \quad et \quad w_n \longrightarrow a \Longrightarrow Z_n + w_n \longrightarrow \infty$$

$$Z_n \longrightarrow \infty \quad et \quad w_n \longrightarrow a \neq 0 \Longrightarrow Z_n w_n \longrightarrow \infty$$

Toute suite de points de $\overline{\mathbb{C}}$ contient donc une suite partielle convergeant vers un point de $\mathbb{C}$: Le plan achevé $\overline{\mathbb{C}}$ admet pour représentation géometrique une sphére (la sphère de Riemann) via la *projection stéréograhique. Si*

$$S^2 = \left\{ (\alpha, \beta, \gamma), \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1 \right\}$$

cette projection $S^2 \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$ *est définie par les relations*

$$\Re z = \frac{\alpha}{1-\gamma}, \Im z = \frac{\beta}{1-\gamma}$$

1.4 Exercices

Exercice 1.1. *Mettre sous la forme* $x + iy$, x, y *réels, les expressions suivantes:*

$$(i) \frac{3+i}{3-2i}, (ii) \frac{(2+i)(3+2i)}{1-i}, (iii)(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})^4, (iv)\ i^n, n \in N, (v)\ (1+i)^n + (1-i)^n, n \in \mathbb{N}$$

Exercice 1.2. *1. Trouver la racine carrée du nombre complexe* $a = 5 - 12i$.

2. Trouver la racine d'ordre 3 *du nombre complexe* $b = 1 - i$.

3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ *l'équation:* $2iz^2 - 3z + 1 - 3i = 0$.

Exercice 1.3. *Montrer que,* $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$*:*

1. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$, $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}.\overline{z_2}$.

2. $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|$.

3. $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2\left(|z_1|^2 + |z_2|^2\right)$.

4. $|z|^n = |z^n|, \forall n \in \mathbb{N}$.

Exercice 1.4. *Soit* $P(z)$ *un polynôme d'ordre* n *à coefficients réels;*
Montrer que $\forall z \in \mathbb{C} : \overline{P(z)} = P(\overline{z})$ *et* $P(z) = 0 \Leftrightarrow P(\overline{z}) = 0$. *Que deduire?*

Exercice 1.5. *Décrire les sous-ensembles* $z \in \mathbb{C}$ *déterminés par les conditions suivantes:*

$$(1)\, |z - i| \leq 1,\ (2)\ \left|\tfrac{z-1}{z+1}\right| = 1,\ (3)\ \ |z-2| \succ |z-3|,\ (4)\ \Im(z) \succ 0, |z| \prec 1,\ (5)\ \tfrac{1}{z} = \overline{z},$$

$$(6)\, |z|^2 = \Im(z).$$

CHAPTER 2

FONCTION DE LA VARIABLE COMPLEXE

Dans ce chapitre, nous allons introduire la notion d'une fonction d'une variable complexe, à valeur complexe $w = f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$, Fonctions holomorphe, Analytique, Equations de Cauchy-Riemann et fonction harmonique.
Notre objectif principal sera d'établir la relation entre les notions de différentiabilité, d'holomorphie et d'analycité d'une fonction complexe.
La différence fondamentale entre l'analyse réelle et l'analyse complexe est que la géométrie du plan complexe $\mathbb{C}$ est beaucoup plus riche que celle de la droite réelle $\mathbb{R}$. Par exemple, les seules parties connexes de $\mathbb{R}$ sont des intervalles, alors qu'il y a des sous-ensembles connexes beaucoup plus compliqués dans $\mathbb{C}$ tel que la couronne.

2.1 Définition de la fonction de la variable complexe

Définition 2.1. *Soit U un ouvert dans $\mathbb{C}$ et $U' \subseteq \mathbb{C}$ un autre ensemble de $\mathbb{C}$, une fonction qui associe a chaque $z \in U$ un*

$$w = f(z) \subset \mathbb{C}$$

est une fonction complexe a valeur complexe.

$$\begin{aligned} f : U &\longrightarrow U' \\ z &\longrightarrow w = f(z) \end{aligned}$$

Tout fonction complexe s'écrite sous la forme:

$$f(z) = u(x, y) + iy(x, y)$$

Exemple 2.1. *On considère la fonction*

$$f_1(z) = z^2$$

cette fonction est définie sur l'ensemble $\mathbb{C}$ c'est-à-dire que ***son domaine de définition*** *est $D = \mathbb{C}$.*

Exemple 2.2. *On considère la fonction*

$$f_2(z) = \frac{z}{z-1}$$

cette fonction est définie sur l'ensemble $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, c'est-à-dire que ***son domaine de définition*** *est $D = \mathbb{C} \setminus \{1\}$.*

Exemple 2.3. *On considère la fonction*

$$f_3(z) = \frac{z}{z^2+1}$$

cette fonction est définie sur l'ensemble $\mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$, c'est-à-dire que ***son domaine de définition*** *est $D = \mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$.*

2.1.1 Partie réelle et partie imaginaire d'une fonction complexe

Comme le nombre complexe z s'écrit souvent sous la forme algèbrique classiques

$$z = x + iy$$

cela nous laissent penser que la fonction variable complexe à valeur complexe

$$\begin{aligned} f : D &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longrightarrow w = f(z) \end{aligned}$$

admet aussi une forme algèbrique. En effet, si $f(z)$ est la valeur de f au point z alors on peut écrire

$$f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$$

n° Dans la pratique, on note par la fonction à deux variables.

$$(x,y) \longrightarrow u(x,y)$$

la partie réelle de la fonction f et on écrit souvent

$$\Re f(z) = u(x,y)$$

et par la fonction à deux variables

$$(x,y) \longrightarrow v(x,y)$$

la partie imaginaire de la fonction z et on écrit souvent

$$\Im f(z) = v(x,y)$$

Exemple 2.4. *On considère la fonction*

$$f(z) = xy + ix^2y^2$$

$$f(z) = x + iy$$

$$f(z) = e^{i(\ cosy + i\sin y)}.$$

On considère par exemple la fonction

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longrightarrow & f(z) = z^2 + \overline{z} \end{array}$$

Pour déterminer la partie réelle et imaginaire de notre fonction, il suffit tout simplement de remplacer dans l'expression de f, la valeur de z par $x+iy$,Donc

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x+iy & \longrightarrow & f(x+iy)=(x+iy)^2+\overline{x+iy} \end{array}$$

Par conséquent, on obtient

$$\begin{array}{rcl} f(x+iy) & = & x^2+y^2+x-iy \\ & = & (x^2+y^2+x)+i(-y) \end{array}$$

ce qui implique que

$$\begin{array}{rcl} \Re f(z) & = & u(x,y)=x^2+y^2+x. \\ \Im f(z) & = & v(x,y)=(-y). \end{array}$$

2.1.2 Limites et continuité d'une fonction complexe

Limites d'une fonction complexe

Définition 2.2. *Soit f la fonction complexe*

$$\begin{array}{rcl} f:D & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longrightarrow & w=f(z) \end{array}$$

avec D est le domaine de définition de f. Soit $z_0 \in D$. On dit que

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=L$$

si et seulement si pour tout $\epsilon>0$, il existe $\delta>0$ tel que si $z\in D$ et

$$0 \prec |z-z_0| \prec \delta$$

alors

$$|f(z)-L| \prec \epsilon$$

Remarque 2.1. *Lorsque*

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$$

on pose

$$z_0 = x_0 + iy_0$$

et

$$L = L_1 + iL_2$$

Alors

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = L_1 \quad et \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = L_2$$

En effet, il est facile de constater que

$$\begin{aligned} |f(z) - L| &= |(u(x,y) + iv(x,y)) - (L_1 + iL_2)| \\ &= |(u(x,y) - L_1) + i(v(x,y) - L_2)| \end{aligned}$$

L'inégalité triangulaire implique que

$$\begin{aligned} |f(z) - L| &= |(u(x,y) + iv(x,y)) - (L_1 + iL_2)| \\ &\leq |(u(x,y) - L_1) + i(v(x,y) - L_2)| \end{aligned}$$

En tenant compte que

$$\begin{aligned} |u(x,y) - L_1| &\leq \sqrt{(u(x,y) - L_1)^2 + (v(x,y) - L_2)^2} = |f(z) - L| \\ |v(x,y) - L_2| &\leq \sqrt{(u(x,y) - L_1)^2 + (v(x,y) - L_2)^2} = |f(z) - L| \end{aligned}$$

Ce qui montre que

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = L \Longleftrightarrow \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = L_1 \quad et \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = L_2$$

La continuité d'une fonction complexe

Définition 2.3. *Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{C}$, $z_0 \in U$ et $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ On dit que f est continue au point z_0 de U*

$$\forall z_0 \in E, \forall \epsilon \succ 0, \exists \delta \succ 0, \forall z \in E, 0 \leq |z - z_0| \prec \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| \leq \epsilon$$

i.e

$$\lim_{z \longrightarrow z_0} f(z) = f(z_0).$$

Exemple 2.5. *Soit*

$$f(x+iy) = \frac{xy}{x^2+y^2}$$

$$\lim_{z \longrightarrow 0} f(z) = \lim_{\rho \longrightarrow 0} \frac{\rho^2(\cos\theta \times \sin\theta)}{\rho^2}$$

Donc f n'est pas continue en point 0.

Proposition 2.1. *Soit U un ouvert dans $\mathbb{C}$ on a*

$$f : U \longrightarrow \mathbb{C}$$

fonction continue

$$\begin{aligned} \lim_{z \longrightarrow z_0} f(z) = f(z_0) \quad &\Longrightarrow \quad \lim_{z \longrightarrow z_0} \overline{f(z)} = f(z_0) \\ \lim_{z \longrightarrow z_0} \Re(f(z)) \quad &= \quad \Re(f(z_0)). \\ \lim_{z \longrightarrow z_0} \Im(f(z)) \quad &= \quad \Im(f(z_0)). \end{aligned}$$

Proposition 2.2. *Soit f, g deux fonctions complexes continue en z_0 alors :*

$$(f+g), (f \times g), (\frac{f}{g} \ \ tel \ \ que \ \ g \neq 0), |f|, \Re(f), \Im(f).$$

sont continue en z_0.

Proposition 2.3. *La fonction $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ est continue en $z_0 = (x_0, y_0)$ si et seulement si les fonctions réelles $u(x,y)$ et $v(x,y)$ sont continues en (x_0, y_0):*

Exemple 2.6. *La fonction*

$$f(z) = \overline{z}$$

est continue sur $\mathbb{C}$. En effet, si on écrit cette fonction sous la forme algébrique, on constate facilement que

$$f(z) = x - iy$$

i.e

$$\Re f = u(x,y) = x, \Im f = v(x,y) = -y$$

qui sont continues en tout point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ et par conséquent sur $\mathbb{C}$.

Exemple 2.7. *Si on considère la fonction*

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

est définie par

$$f(z) = \begin{cases} z^2 & si \quad z \neq i \\ 0 & si \quad z = i \end{cases}$$

cette fonction est discontinue en $z_0 = i$ car

$$\lim_{z \longrightarrow i} f(z) = -1 \neq f(i) = 0$$

2.1.3 La dérivabilité d'une fonction complexe

Définition 2.4. *Soit f une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{C}$, $z_0 \in \mathbb{C}$.*
*On dit que f est **dérivable** au point z_0, ou $\mathbb{C}$**-dérivable** si l'expression $\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$ admet une limite quand h tend vers 0. Cette limite est appelée le **nombre dérivé** de f en z_0 et noté par $f'(z_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$*

Exemple 2.8. *Soit la fonction $f(z) = z^2$, on a:*

$$\forall z \in \mathbb{C} : lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = lim_{h\to 0} \frac{(z+h)^2 - (z)^2}{h} = lim_{h\to 0}(2z + h) = 2z$$

alors f est dérivable en tout point $z \in \mathbb{C}$ et $f'(z) = 2z$

Continuité des fonctions dérivables

Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $z_0 \in \mathbb{C}$. si f est dérivable en z_0, alors f est continue en z_0. l'inverse n'est pas toujours vrai

$$lim_{h\to 0}(f(z_0 + h) - f(z_0)) = lim_{h\to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}.h = 0$$

(Puisque $lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$ existe)

Opérations algébriques sur les fonctions dérivables

Les mêmes propriétés algébriques sur les fonctions dérivables sont obtenues comme celles des dérivées réelles.

Proposition 2.4. *Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$, f et g deux fonctions dérivables en un point z_0 de S, telle que $f, g : S \to \mathbb{C}$*

On a les propriétés suivantes:

*1-**La somme** $f+g$ est dérivable en point z_0 et on a*

$$(f+g)^{'}(z_0) = f^{'}(z_0) + g^{'}(z_0)$$

Et pour $\lambda \in \mathbb{C}$ λf est dérivable en point z_0 et on a

$$(\lambda f)^{'}(z_0) = \lambda f^{'}(z_0)$$

*2- **Le produit** $f.g$ est dérivable en point z_0 et on a*

$$(f.g)^{'}(z_0) = f^{'}(z_0)g(z_0) + g^{'}(z_0)f(z_0)$$

3-Si $g(z_0) \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ est dérivable en point z_0 et on a

$$(\frac{f}{g})^{'}(z_0) = \frac{f^{'}(z_0)g(z_0) - g^{'}(z_0)f(z_0)}{g^2(z_0)}$$

Proposition 2.5. *Soient U et U' deux ouverts de $\mathbb{C}$, $f : S \to \mathbb{C}$,$g : S^{'} \to \mathbb{C}$. On suppose que f est dérivable en un point z_0 et que g est dérivable en un point $f(z_0)$. Alors $g \circ f$ est dérivable en un point z_0, et on a*

$$(g \circ f)^{'}(z_0) = g^{'}(f(z_0)).f^{'}(z_0)$$

Proposition 2.6. *Une fonction réelle à variable complexe, est soit dérivable en un point z_0 et sa dérivée est nulle, soit elle n'est pas dérivable en z_0.*

Exemple 2.9. *Soit la fonction $f(z) = \overline{z}$, on a:*

$$\forall z \in C : lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = lim_{h \to 0} \frac{\overline{(z+h)} - \overline{(z)}}{h} = lim_{h \to 0} \frac{\overline{h}}{h}$$

$=$

$$\begin{cases} 1 & si \quad h \in \mathbb{R} \\ \\ -1 & si \quad h \in \mathrm{I}\mathbb{R} \end{cases}$$

Alors $\frac{f(z+h)-f(z)}{h}$ *n'a pas de limite quand* h *tend vers zéro (*f *n'est pas dérivable sur* $\mathbb{C}$*).*

2.2 Fonctions holomorphes, fonction analytiques

Définition 2.5. *Soit* $w = f(z)$ *on dit que la fonction* f*:*

- *est* ***holomorphe*** *ou* ***analytique*** *en un point* z_0 *d'un domaine* D *si elle est* ***dérivable*** *aussi bien au point* z_0 *lui-même que dans un certain voisinage de ce point. On dit aussi que* f *est analytique en* z_0 *si elle est développable en une série entière au voisinage de* z_0*.*

- *est* ***analytique dans un domaine*** D *si elle est analytique en tout point de* D*.*

- *est* ***entière*** *si elle est analytique en tout point de* $\mathbb{C}$*.*

Remarque 2.2. 1. *il est clair que sur un domaine* D*:* f *analytique* $\Leftrightarrow$ f *est holomorphe.*

2. *La fonction* $f(z) = |z|^2$ *est différentiable seulement au point* z_0*. Mais cette fonction n'est pas analytique au point* z_0 *car il n'existe pas de voisinage de* z_0 *ou la fonction est différentiable. On a donc : analycité* $\Rightarrow$ *différentiabilité. mais la réciproque est fausse.*

Exemple 2.10. *De fonctions holomorphes (analytiques)*

1- Tout polynôme $P(z)$ *est holomorphe (analytique) dans* $\mathbb{C}$*.*

2- Toute fraction rationnelle $\frac{P(z)}{Q(z)}$ *est holomorphe dans* $\mathbf{C} \setminus \{\cup_{i=1}^{n} z_i\}$ *ou les* z_i *sont les pôles de la fraction.*

3-$e^z, \sin(z), \cos(z), sh(z), ch(z)$ sont holomorphe dans $\mathbb{C}$.

** $tan(z)$ est holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus \left\{\cup_{k\in Z}(2k+1)\frac{\pi}{2}\right\}$*

** $th(z)$ est holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus \left\{\cup_{k\in Z}(2k+1)\frac{\pi}{2i}\right\}$*

2.3 Conditions de Cauchy-Riemann

Théorème 2.1. *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$, f une fonction complexe définie sur U, telle que $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ et soit $z_0 = x_0 + iy_0$ dans U.*

Les conditions suivantes sont équivalentes:

i- f est dérivable en z_0.

ii- U et V sont différentiables en (x_0, y_0) et vérifient:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) = \dfrac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) \\ \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) \end{cases} \qquad \cdots\cdots (E).$$

Les équations (E) s'appellent ***les équations de Cauchy- Riemann***

Démonstration

1- Supposons que $lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}$ existe, alors elle indépendante de la façcon dont h tend vers 0:

<u>$1^{er}cas$</u>: Supposons que $h \to 0$ (sur l'axe réel),$h \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f^{'}(z) = lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h} &= lim_{h\to 0}\frac{u(x+h,y)-u(x,y)}{h} + i\frac{v(x+h,y)-v(x,y)}{h}. \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x,y). \cdots\cdots (1) \end{aligned}$$

$\underline{2^{er} cas}$: Supposons que h imaginaire pur, ($h \in \mathbb{IR}$) ie $h = it, t \in \mathbb{R}, h \to 0$ si $t \to 0$

$$\begin{aligned} f^{'}(z) = lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h} &= lim_{h\to 0}\frac{u(x,y+t)-u(x,y)}{it}+i\frac{v(x,y+t)-v(x,y)}{it}. \\ &= \frac{1}{i}\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)+i\frac{\partial v}{\partial y}(x,y).\cdots\cdots(2) \end{aligned}$$

Par identification de 1 et 2, on obtient

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y) \\ \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) \end{cases}$$

ii-Supposons que U et V sont différentiables en (x, y) et vérifient les équations de Cauchy-Riemann, on va montrer que f est dérivable en $z \in \mathbb{C}$.

puisque U et V sont différentiables en (x, y), on a:

$$u(x+s,y+t)-u(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}s+\frac{\partial u}{\partial y}t+\alpha(s,t)$$

où $lim_{(s,t)\to(0,0)}\frac{\|\alpha(s,t)\|}{\|(s,t)\|} = 0$ et

$$v(x+s,y+t)-v(x,y) = \frac{\partial v}{\partial x}s+\frac{\partial v}{\partial y}t+\beta(s,t)$$

où $lim_{(s,t)\to(0,0)}\frac{\|\beta(s,t)\|}{\|(s,t)\|} = 0$

soit $h = s + it$ on a

$$\begin{aligned}
f(z+h)-f(z) &= (u(x+s,y+t)+iv(x+s,y+t))-(u(x,y)+iv(x,y)).\\
&= (u(x+s,y+t)-u(x,y))+i(v(x+s,y+t)-v(x,y))\\
&= (\frac{\partial u}{\partial x}s+\frac{\partial u}{\partial y}t+\alpha(s,t))+i(\frac{\partial v}{\partial x}s+\frac{\partial v}{\partial y}t+\beta(s,t))\\
&= (\frac{\partial u}{\partial x}s+\frac{\partial u}{\partial y}t)+i(\frac{\partial v}{\partial x}s+\frac{\partial v}{\partial y}t)+(\alpha(s,t)+i\beta(s,t))\\
&= (\frac{\partial u}{\partial x}s+\frac{\partial u}{\partial y}t)+i(\frac{\partial v}{\partial x}s+\frac{\partial v}{\partial y}t)+\eta(s,t),
\end{aligned}$$

$\eta(s,t)=\alpha(s,t)+i\beta(s,t)$ où $lim_{(s,t)\to(0,0)}\frac{\|\eta(s,t)\|}{\|(s,t)\|}=0$

En utilisant les équations de Cauchy- Riemann, on obtient

$$\begin{aligned}
f(z+h)-f(z) &= (\frac{\partial u}{\partial x}s-\frac{\partial v}{\partial x}t)+i(\frac{\partial v}{\partial x}s+\frac{\partial u}{\partial x}t)+\eta(s,t).\\
f(z+h)-f(z) &= \frac{\partial u}{\partial x}(s+it)+i(\frac{\partial v}{\partial x}(s+it))+\eta(s,t).\\
f(z+h)-f(z) &= (\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x})(s+it)+\eta(s,t).\\
\frac{f(z+h)-f(z)}{h} &= (\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x})+\frac{\eta(s,t)}{h}.
\end{aligned}$$

car $lim_{h\to 0}\frac{\|\eta(s,t)\|}{\|(s,t)\|}=lim_{(s,t)\to(0,0)}\frac{\|\alpha(s,t)+i\beta(s,t)\|}{\|(s,t)\|}=0$ donc

$$lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}=(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x})=f^{'}(z)$$

On en déduit que f est dérivable en z, et que $f^{'}(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}$

Remarque 2.3. *Les conditions de* ***Cauchy-Riemann*** *ne sont pas* ***des conditions nécessaires*** *pour la* ***dérivabilité*** *des fonctions, c-à-d. : il existe des fonctions qui admettent des dérivées partielles vérifiant les équations de Cauchy-Riemann sans être* $\mathbb{C}$-***dérivables***.
par exemple

$$f(z)=f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(x.y)(x+iy)}{x^2+y^2} & si \quad (x,y)\neq(0,0)\\ \\ 0 & si \quad (x,y=(0,0)\end{cases} \qquad Ona$$

$\partial u_{\overline{\partial x(0,0) = \frac{\partial u}{\partial y}(0,0) = \frac{\partial v}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial v}{\partial y}(0,0)}}$

Mais la limite $lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}$ n'existe pas.

On introduit les **opérateurs aux dérivées partielles** suivants

$$\begin{aligned}\frac{\partial .}{\partial z} &= \frac{1}{2}(\frac{\partial .}{\partial x} + \frac{1}{i}\frac{\partial .}{\partial y}) = \frac{1}{2}(\frac{\partial .}{\partial x} - i\frac{\partial .}{\partial y})\\ \frac{\partial .}{\partial \overline{z}} &= \frac{1}{2}(\frac{\partial .}{\partial x} - \frac{1}{i}\frac{\partial .}{\partial y}) = \frac{1}{2}(\frac{\partial .}{\partial x} + i\frac{\partial .}{\partial y})\end{aligned}$$

On a la proposition suivante

Proposition 2.7. *Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction dérivables en un point $z_0 \in \mathbb{C}$. Alors on a*

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0) &= 0.\\ \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) &= f'(z_0) = 2\frac{\partial u}{\partial z}(x_0,y_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0).\end{aligned}$$

Remarque 2.4. *Les équations de **Cauchy -Riemann** traduisent le fait qu'une fonction holomorphe ne dépend pas de la variable $\overline{z}$ (condition suffissante pour l'holomorphie).*

Proposition 2.8. *Soient U un **ouvert connexe** de $\mathbb{C}$ et f est holomorphe. Les conditions suivantes sont **équivalentes**.*

1-f est constante sur U.

2- Re(f)est constante sur U.

3- Im(f)est constante sur U.

4-$|f|$ est constante sur U.

5-$\overline{f}$ est constante sur U.

Démonstration

$1 \Rightarrow 2$: il est clair que si f est une fonction constante, alors les parties réelle et imaginaire sont constantes.

$2 \Rightarrow 3$ si $u(x,y) = constante$, alors $u_x = v_y = 0$ ce qui implique que $v_x = v_y = 0$, et par conséquent $v(x,y) = constante$.

$3 \Rightarrow 4$ la preuve est similaire à celle de $2 \Rightarrow 3$. $1 \Rightarrow 2$: on a $|f|^2 = u^2 + v^2 = constante$. En dérivant par rapport à x puis à y; et en utilisant les conditions de Cauchy Riemann, on trouve

$$uu_x - vu_y = 0$$

$$vu_x + uu_y = 0$$

La résolution de ce système donne

$$|f|^2 u_x = 0, |f|^2 u_y = 0$$

Comme $|f|^2 \neq 0$, il en résulte $u_x = u_y = v_x = v_y = 0$, ce qui prouve que $u(x, y) = v(x, y) = constante$. D'où f est constante.

Remarque 2.5. *Une autre formule des Equations de Cauchy-Riemann*
Soit U *un ouvert de* $\mathbb{C}$ *et* $z \in U$ *on a:*

$$f(z) = f(x, y) = f(\frac{z+\overline{z}}{2}, \frac{z-\overline{z}}{2i})$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}). \\
\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \overline{z}} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}).
\end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} &= \frac{\partial}{\partial \overline{z}}(u + iv) = \frac{\partial u}{\partial \overline{z}} + i\frac{\partial v}{\partial \overline{z}}. \\
&= \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{i}\frac{\partial u}{\partial y}) + \frac{i}{2}(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{1}{i}\frac{\partial v}{\partial y}). \\
&= \frac{1}{2}\left[(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}) + i(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y})\right].
\end{aligned}$$

$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0 \Longleftrightarrow$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

Donc, f est analytique sur $\mathbb{C}$

2.4 Fonctions harmoniques

Définition 2.6. *Soient U un ensemble de $\mathbb{R}^2$ et f une application de U dans $\mathbb{R}$. La fonction f est dite de classe C^2 sur U si les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ existent et sont continues pour tout x,y de U. On note par $f \in C^2(U, \mathbb{R})$.*

Définition 2.7. *$f \in C^2(U, \mathbb{R})$. On dit que f est **harmonique** dans U si pour tout $(x, y) \in U$ on a:*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

Notation. *La fonction $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ est appelée le laplacien de f.*
On peut le noter aussi par $\Delta f = f_{xx} + f_{yy}$ où $f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ et $f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

Exemple 2.11. *$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, où $f(x, y) = e^{-y}$. il est clair que cette fonction est dans $C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, de plus*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx} = -e^{-y} \sin x, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy} = e^{-y} \sin x$$

Le laplacien $\Delta f = f_{xx} + f_{yy} = 0$, ce qui montre que cette fonction est harmonique.

Théorème 2.2. *Soit $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ une fonction holomorphe sur $D \subset \mathbb{C}$. Alors les fonctions réelles u(x,y) et v(x,y) sont harmoniques.*

Démonstration. La fonction f est holomorphe, donc les équations de Cauchy Riemann sont satisfaites

$$u_x = v_y \Rightarrow u_{xx} = v_{xy}$$

$$u_y = -v_x \Rightarrow u_{yy} = -v_{xy}$$

et donc $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$. Ce qui prouve que la fonction réelle u(x,y) est harmonique.
Pour montrer que v(x,y) est harmonique on procède exactement de la même manière.

Exemple 2.12. *La fonction $w = f(z) = z^2 = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + i(2xy)$ est entière et donc les fonctions $u(x, u) = x^2 - y^2$ et $v(x, y) = 2xy$ sont nécessairement harmoniques sur tout domaine $U \subset \mathbb{C}$. En effet*

$$u_{xx} + u_{yy} = 2 - 2 = 0, v_{xx} + v_{yy} = 0 - 0 = 0$$

Conjuguée harmonique Si $f(z) = u(x,u) + iv(x,y)$ est holomorphe dans un domaine D, alors u et v sont harmoniques dans D. Maintenant, supposons que $u(x,y)$ est une fonction réelle harmonique dans D. Si on peut trouver une fonction v(x,y) telle que $u(x,y) + iv(x,y)$ est holomorphe dans D, alors v(x,y) sera apellée **la fonction conjuguée harmonique** de u(x,y).

Exemple 2.13.

- *Vérifier que la fonction $u(x,y) = e^{-y}\sin x$ est harmonique dans $\mathbb{C}$.*

- *Trouver la conjuguée harmonique de u.*

Réponse. On a

$$u_x = e^{-y}\cos x, u_{xx} = -e^{-y}\sin x, u_y = -\sin xe^{-y}, u_{yy} = -\sin xe^{-y},$$

donc

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

- En utisant les équations de Cauchy-Riemann on a:$v_y = u_x = e^{-y}\cos x$ et $v_x = -u_y = \sin xe^{-y}$.En intégrant la premiére équation par rapport à y on obtient, $v(x,y) = -\cos x.e^{-y} + h(x)$.
  Maintenant $v_x(x,y) = \sin x.e^{-y} + h^{'}(x) = -u_y = \sin xe^{-y}$ nous donne que $h^{'}(x) = 0$ et donc $h(x) = C$. Donc la fonction harmonique conjuguée est $v(x,y) = -\cos x.e^{-y} + C$

2.5 Exercices

Exercice 2.1. *Trouver les fonctions holomorphes et les non holomorphes, Puis donner la dérivée de celles qui sont holomorphes:*

- $f_1(z) = x^2 - y^2 + x + 1 + i(2xy + y)$.

- $f_2(z) = 2x^2 + 2y^2 - x + i(4xy - y)$.

- $f_3(z) = z^2 + z + \ln z.(\Re(z) \succ 0)$.

- $f_4(z) = e^z + \overline{z} + \cos z$

Exercice 2.2. *Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ donnée par sa forme algébrique: $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$*

- *Trouver toutes les fonctions f telle que:*

- $u(x, y) = 3x + 1$.

- $u(x, y) = x^2 - y^2 + 2x + 1$.

- $u(x, y) = -2xy$.

- $v(x, y) = e^x \sin y$.

- $v(x, y) = 2x + 2xy$.

- $v(x, y) = x^2 - y^2$.

Exercice 2.3. *Pour quelles valeurs de λ les fonctions f sont-elles holomorphes*

- $f(z) = x + i\lambda y$.

- $f(z) = x^2 - y^2 + \lambda x + i(\lambda y + 2xy)$.

- $f(z) = \Re(\lambda)\Re(z) + i[\Im(\lambda) + 1]\Im(z)$.

Exercice 2.4. *Montrer que les fonctions suivantes sont harmoniques.*

1. $u(x, y) = xy$.

2. $u(x, y) = x^2 - y^2 + xy$.

3. $u(x, y) = e^x x \cos y - e^x y \sin y$.

CHAPTER 3

FONCTIONS ÉLÉMENTAIRES

Les fonctions complexes sont un prolongement naturel des fonctions réelles sur le plan des nombres complexes $\mathbb{C}$. Dans ce chapitre nous étudierons les propriétés principales des fonctions élémentaires complexes, leurs domaines d'analycité et leurs dérivées.

3.1 Fonction exponentielle.

Définition 3.1. *Si $z = x + iy \in \mathbb{C}$, où x et y sont des réels, on défini la fonction exponentielle complexe par la relation $e^z = e^{x+iy} = e^x.e^{iy} = e^x(cosy + isiny)$ Si $y = 0$ alors $z = x$, cette définition coïncide avec la définition dans les réels. Donc la fonction complexe e^z un prolongement de la fonction réelle e^x.*

Théorème 3.1. *La fonction exponentielle complexe e^z est entière et sa dérivée est égale à*

$$\frac{d}{dz}e^z = e^z.$$

Démonstration. Notons que $\Re(e^z) = u(x, y) = e^x \cos y$ et $\Im(e^z) = v(x, y) = e^x \sin y$. En utilisant les équations de Cauchy-Riemann on a pour tout $z = x + iy \in \mathbb{C}$

$$u_x = e^x \cos y = v_y, u_y = -e^x \sin y = v_x$$

Donc e^z est entière et on a

$$\frac{d}{dz}e^z = u_x + iv_x = e^x(\cos y + i \sin y) = e^z.$$

Exemple 3.1. *Trouver la dérivées de chacune des fonctions:*

$$f_1(z) = iz^4(z^2 - e^z), f_2(z) = e^{z^2-(1+i)z+3}$$

.

Solution.

$$f_1'(z) = 6iz^5 - iz^4e^z - 4iz^3e^z, f_2'(z) = e^{z^2-(1+i)z+3}.(2z - 1 - i)$$

Propriétés de e^z

L'exponentielle complexe e^z possède les propriétés suivantes:

$$(1)e^0 = 1, (2)e^{z_1+z_2} = e^{z_1}.e^{z_2}, (3)\frac{1}{e^z} = e^{-z}(4)\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1-z_2}, (5)(e^z)^n = e^{nz}, n \in \mathbb{Z}$$

$$(6)\,|e^z| = e^{\Re z} = e^x \succ 0, (7)e^z \neq 0, (8)e^{z+2\pi i} = e^z, (9)(e^z)' = e^z \forall z \in \mathbb{C}$$

$$,(10)a^z = e^{z\ln a}, a \succ 0$$

Remarque 3.1. *La fonction exponentielle complexe e^z est*

- *périodique de période $2\pi i$,*

- *n'est pas injective comme dans les réels,*

- *ne s'annule pour aucune valeur complexe.*

3.2 Fonction logarithme

Comme pour le cas réel, la fonction logarithme réele est définie comme l'inverse de la fonction exponentielle, donc

$$e^w = z \Longleftrightarrow \log z = w, z \neq 0$$

Le nombre complexe w n'est pas définit de façon unique car si $z = e^w$ alors $e^{w+i2k\pi} = e^w = z$ aussi ceci signifie que $\log z$ est une fonction multiforme, il ya une infinité de w associes au même nombre complexe z le problème fondamental est donc de trouver une valeur $w = x + iy$ telle que $e^w = z, \forall z \in \mathbb{C}, z = |z|\, e^{i\theta}$, ou θ est l'argument de z.

$$\begin{aligned} e^w = z &\iff e^{u+iv} = |z|\, e^{i\theta}; \\ &\iff e^u.e^{i\theta} = |z|\, e^{i\theta} \\ &\iff e^u = |z| \\ &\iff e^{iv} = e^{i\theta} \\ &\iff v = \theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Une solution est donc donnée par $u = \ln|z|, v = \theta$ donc $w = \ln|z| + i\theta$

Les autres solutions sont $\log z = \log|z| + i\theta + 2ik\pi, k \in \mathbb{Z}$

Définition 3.2. *On appelle determination principale du logarithme de z et on note $\log z$ le cas ou $k = 0$ et $-\pi \prec \theta \leq \pi$*

Exemple 3.2.

1. $\log(1+i) = \log(\sqrt{(2)}e^{i\frac{\pi}{4}}) = \ln(\sqrt{2}) + i\frac{\pi}{4}, (k = 0, \theta = \frac{\pi}{4} \in [-\pi, \pi])$

2. $\log i = \log(1e^{i\frac{\pi}{2}}) = \ln(1) + i\frac{\pi}{2}, (k = 0, \theta = \frac{\pi}{2} \in [-\pi, \pi])$

3. $\log(-1) = \log(1e^{i\pi}) = \ln(1) + i\pi$

Remarque 3.2. *En En général on a:*

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \log(z_1.z_2) \neq \log(z_1) + \log(z_2)$$

On a plutôt la formule.

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \log(z_1.z_2) = \log(z_1) + \log(z_2) + i2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

avec $k = -1, 0, 1$ selon les cas.

En effet:

$$\begin{aligned}
\log(z_1.z_2) &= \log(|z_1|\,.\,|z_2|\, e^{i(\theta_1+\theta_2)}); \\
&= \ln(|z_1.z_2|) + i(\theta_1+\theta_2) + 2ki\pi; \\
&= \ln(|z_1|) + \ln(|z_2|) + i(\theta_1) + i(\theta_2) + 2ki\pi; \\
&= \log(z_1) + \log(z_2) + 2ki\pi;
\end{aligned}$$

On peut toujours supposer que $-\pi \prec \theta_1 \prec \pi$ et $-\pi \prec \theta_2 \prec \pi$

On a trois posibilités pour $\theta_1 + \theta_2$

$$\begin{aligned}
\theta_1+\theta_2 \leq -\pi \quad &; \quad \Rightarrow k=1 \Rightarrow \log(z_1.z_2) = \log(z_1)+\log(z_2)+2i\pi. \\
-\pi \prec \theta_1+\theta_2 \leq \pi \quad &; \quad \Rightarrow k=0 \Rightarrow \log(z_1.z_2) = \log(z_1)+\log(z_2). \\
\theta_1+\theta_2 \succ \pi \quad &; \quad \Rightarrow k=-1 \Rightarrow \log(z_1.z_2) = \log(z_1)+\log(z_2)-2i\pi.
\end{aligned}$$

Exemple 3.3.

$$\log(-1-i) = \log((-1)(1+i)) = \log(-1) + \log(1+i) + 2ki\pi$$

avec $k=-1$ *ou* $k=0$ *ou* $k=1$ *on a*

$$\theta_1 = \arg(-1) = \pi, \theta_2 = \arg(1+i) = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \theta_1+\theta_2 = \frac{5\pi}{4} \Rightarrow k=-1$$

$$\log(-1-i) = \log((-1)(1+i)) = \log(-1) + \log(1+i) - 2ki\pi$$

Exemple 3.4.

$$\begin{aligned}
\log z^n &= \ln(|z|^n) + i(\arg z^n) + 2ki\pi; k,n\in\mathbb{Z}, -\pi \prec \theta \leq \pi \\
&= n\ln(|z|) + in\theta + 2ki\pi; k,n\in\mathbb{Z}, -\pi \prec \theta \leq \pi \\
&= n\ln(|z|) + i(n\theta + 2k\pi);
\end{aligned}$$

Proposition 3.1. *La fonction logarithme* $\log z$ *définie par* $f(z) = \log z$ *est analytique et sa* *dérivée est donnée par:*

$$\frac{d}{dz}\log z = \frac{1}{z}$$

Démonstration. Si $z = re^{i\theta}$, et $-\pi \prec \theta \prec \pi$ alors

$$\log z = \log(re^{i\theta}) = u + iv = \ln r + i\theta$$

on trouve

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}, \frac{\partial v}{\partial \theta} = 1, \frac{\partial v}{\partial r} = 0, \frac{\partial u}{\partial \theta} = 0$$

Donc u et v satisfont les équations de Cauchy-Riemann en coordonnées polaires

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}, \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

Ce qui montre que Log z est analytique dans ce domaine et sa dérivée est

$$f^{'}(z) = e^{-i\theta}(\frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{\partial v}{\partial r}) = \frac{1}{e^{i\theta}} = \frac{1}{z}$$

3.3 Fonctions circulaires.

Tout comme nous avons étendu la fonction exponentielle réelle, nous étendons maintenant les fonctions circulaires réelles aux fonctions circulaires complexes.
En utilisant la formule d'Euler $e^{it} = \cos t + i \sin t$, on défini le sinus et cosinus d'une variable complexe z par les formules:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} = -i\frac{e^{2iz} - 1}{e^{2iz} + 1}, \cot z = \frac{\cos z}{\sin z} = i\frac{e^{2iz} + 1}{e^{2iz} - 1}$$

Il est clair que ces définitions sont des extensions des fonctions circulaires réelles, car si nous posons $z = x$, nous obtenons $\cos z = \cos x$ et $\sin z = \sin x$.

$$\sin z = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \frac{(\cos x + i \sin x) - (\cos x - i \sin x)}{2i} = \sin x$$

Les identités circulaires fondamentales suivantes restent valides. Pour tout $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ on a

$$(1) \sin(-z) = -\sin(z), (2) \sin(z + 2\pi) = \sin(z), (3) \sin(z + \frac{\pi}{2}) = \cos(z)$$

$$(4)\cos(-z)=\cos(z),(5)\cos(z+2\pi)=\cos(z),(6)\cos(z+\frac{\pi}{2})=-\sin(z)$$

$$(7)\tan(z+\pi)=\tan(z),(8)\cot(z+\pi)=\cot(z),(9)\cos^2(z)+\sin^2(z)=1$$

$$(10)\cos^2(z)-\sin^2(z)=\cos(2z),(11)\sin(z_1+z_2)=\sin(z_1)\cos(z_2)+\cos(z_1)\sin(z_2)$$

$$(12)\cos(z_1+z_2)=\cos(z_1)\cos(z_2)-\sin(z_1)\sin(z_2)$$

Théorème 3.2. *Les fonctions $\sin z$ et $\cos z$ sont entières et leurs dérivées sont :*

$$\frac{d}{dz}\sin z=\cos z,\frac{d}{dz}\cos z=-\sin z$$

- *Les parties réelles et imaginaires de $\sin z$ et $\cos z$ sont données par les formules:*

$$\sin z=\sin x\cosh y+i\cos x\sinh y,\cos z=\cos x\cosh y-i\sin x\sinh y$$

- *Beaucoup de propriétés importantes de $\sin z$ et de $\cos z$ se déduisent à partir de ces formules. Par exemple on a:*

$$\sin(iy)=i\sinh y,\cos(iy)=\cosh y$$

$$|\sin z|^2=\sin^2 x+\sinh^2 y,|\cos z|^2=\cos^2 x+\sinh^2 y$$

- *Les zéros de $\sin z$ et $\cos z$ sont tous réels.*

  1. *Les zéros de $\sin z$ sont $z=n\pi,n=0,\pm1,\pm2,\cdots$*

  2. *Les zéros de $\cos z$ sont $z=(n+\frac{1}{2})\pi,n=0,\pm1,\pm2,\cdots$*

Fonctions circulaires inverses

On défini les fonctions circulaires inverses par :

$$\sin^{-1}z=-i\log[iz+(-z^2+1)^{\frac{1}{2}}]$$

$$\cos^{-1}z=-i\log[z+(z^2-1)^{\frac{1}{2}}]$$

$$\tan^{-1}z=\frac{i}{2}\log\frac{i+z}{i-z},z\neq\pm i$$

3.4 Fonctions hyperboliques

On défini les fonctions hyperboliques comme dans le cas des variables réelles.

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

$$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z} = \frac{e^{2z} - 1}{e^{2z} + 1}, \coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z} = \frac{e^{2z} + 1}{e^{2z} - 1}$$

Théorème 3.3. *Les fonctions* $\sinh z$ *et* $\cosh z$ *sont entières et leurs dérivées sont :*

$$\frac{d}{dz} \sinh z = \cosh z, \frac{d}{dz} \cosh z = \sinh z$$

- *Les parties réelles et imaginaires de* $\sinh z$ *et* $\cosh z$ *sont données par les formules:*

$$\sinh z = \sinh x \cos y + i \cosh x \sin y, \cosh z = \cosh x \cos y - i \sinh x \sin y$$

- *Les relations entres les fonctions circulaires et hyperboliques sont étroites comme on le constate dans les formules suivantes :*

$$\sinh(iz) = i \sin z, \cosh(iz) = \cos z, \sin(iz) = i \sinh z, \cos(iz) = \cosh z$$

$$|\sinh z|^2 = \sinh^2 z + \sin^2 z, |\cosh z|^2 = \sinh^2 z + \cos^2 z$$

- *Les zéros de* $\sinh z$ *et* $\cosh z$ *sont tous réels.*

  1. *Les zéros de* $\sinh z$ *sont* $z = n\pi i, n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$

  2. *Les zéros de* $\cos z$ *sont* $z = (n + \frac{1}{2})\pi i, n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$

Fonctions hyperboliques inverses

On défini les fonctions hyperboliques inverses par :

$$\sinh^{-1} z = \log[z + (z^2 + 1)^{\frac{1}{2}}]$$

$$\cosh^{-1} z = \log[z + (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}}]$$

$$\tanh^{-1} z = \frac{1}{2} \log \frac{1+z}{1-z}, z \neq \pm 1$$

3.5 Fonction puissances

La fonction puissance générale $w = z^a$, où $a \in \mathbb{C}$ est définie par :

$$w = z^a = e^{a \log z}$$

où $\log z$ est une fonction multiforme, et donc la fonction z^a est aussi multiforme

- La dérivée de z^a est:
$$\frac{d}{dz} z^a = a z^{a-1}$$

- La valeur principale (détermination principale) de z^a sera:

$$e^{a \log z} = e^{a(\ln|z| + i\theta)}$$

- Les autres valeurs s'obtiennent par:

$$z^a = e^{a(\ln|z| + i(\theta + 2k\pi))}$$

Exemple 3.5. *Trouver toutes les valeurs de:* $i^i, (1+i)^i$

$$i^i = e^{i \log i} = e^{i(i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi))} = e^{-\frac{\pi}{2}} e^{-2k\pi}, k \in \mathbb{Z}$$

$$(i+1)^i = e^{i \log(i+1)} = e^{i(\ln(\sqrt{2}) + i(\frac{\pi}{4} + 2k\pi))} = e^{i\frac{\ln 2}{2}} e^{-(\frac{\pi}{4} + 2k\pi)}, k \in \mathbb{Z}$$

Propriétés de z^a

1. $z^a z^b = z^{a+b}$

2. $(z_1 z_2)^a = {z_1}^a {z_2}^a e^{2k\pi}, k = -1, 0, 1$

3. $\log z^a = a \log z + 2ki\pi, k \in \mathbb{Z}$

4. $(z^a)^a = z^{a.a} e^{2i\pi a k} k \in \mathbb{Z}$

3.6 Exercices

Exercice 3.1. 1. *Montrer que si* $z = x + iy$ *alors:*

$$\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y, \cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$$

2. *pour quelles valeurs de* x *et de* y $\sin z \in \mathbb{R}$ *et* $\cos z \in \mathbb{R}$.

Exercice 3.2.

- *Résoudre dans* $\mathbb{C}$, *l'équation suivante:* $2z + i\bar{z} = 3$.

Exercice 3.3. 1. *Résoudre l'équation suivante* $z^4 - i = 0, z \in \mathbb{C}$

2. *Trouver les solutions de l'équation suivante :*$ie^{iz} - ie^{-iz} = 1, z \in \mathbb{C}$.

Exercice 3.4. *Résoudre dans* $\mathbb{C}$ *les ´quations suivantes:*

1. $e^z = i + 1$.

2. $\cos z = 3 + 2e^i$.

Exercice 3.5. *Résoudre dans* $\mathbb{C}$ *l'équation suivante* $2\cos(z) - e^{-iz} = 1 + 2i$.

CHAPTER 4

LE CALCUL INTÉGRAL

Ce chapitre contient certains des résultats les plus importants de l'analyse complexe. On cite parmi ces résultats le théorème de Cauchy-Goursat et la formule intégrale de Cauchy. Un résultat fascinant déduit de la formule intégrale de Cauchy est que si une fonction complexe est dérivable une fois en un point, alors les dérivés de n'importe quel ordre existent et ces dérivées sont elles mêmes analytiques. Autres théorèmes importants de ce chapitre sont, le théorème de la valeur moyenne de Gauss, le théorème de Liouville

4.1 Intégrale curviligne

Définition 4.1. *Soit D un domaine du plan complexe $\mathbb{C}$, et soit C une courbe paramétrée par le chemin:*

$$\begin{aligned} \gamma : [a,b] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\longrightarrow \gamma(t) \end{aligned}$$

tel que $\gamma^{'}(t)$ existe et continue.

Soit f une fonction complexe continue et définie sur D:

$$\begin{aligned} f : D &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \gamma &\longrightarrow f(\gamma) \end{aligned}$$

On définit l'intégrale de f le long de la courbe C par

$$\int_C f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t)).\gamma^{'}(t)dt$$

Remarque 4.1.

- *L'intégrale le long d'une courbe est aussi appelée intégrale le long d'un* ***chemin****, ou intégrale* ***curviligne*** *complexe.*

- *Si la courbe C est fermée et orientée dans le sens trigonomitrique on note $\oint_C f(z)dz$ au lieu $\int_C f(z)dz$*

Proposition 4.1. *Si $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ et $z(t) = x(t) + iy(t)$, l'intégrale $\int_C f(z)dz$ peut être exprimée sous la forme suivante*

$$\begin{aligned}
\int_C f(z)dz &= \int_C (u+iv)(dx+idy) = \int_C (udx - vdy) + i(vdx + udy) \\
&= \int_a^b u(x(t),y(t))x^{'}(t)dt - \int_a^b v(x(t),y(t))y^{'}(t)dt \\
&+ i\left[\int_a^b u(x(t),y(t))y^{'}(t)dt + \int_a^b v(x(t),y(t))x^{'}(t)dt\right]
\end{aligned}$$

Exemple 4.1. *Soit C le segment entre $O(0,0)$ et $A(3,1)$ qui est défini par*

$$C = \{\gamma(t) \in \mathbb{C} \ telque \ \ \gamma(t) = (1-t)O + tA, \ \ 0 \leq t \leq 1\}$$

$$C = \{\gamma(t) \in \mathbb{C} \ telque \ \ \gamma(t) = (1-t)(0+i0) + t(3+i), \ \ 0 \leq t \leq 1\}$$

$$C = \{\gamma(t) \in \mathbb{C} \ telque \ \ \gamma(t) = 3t + it, \ \ 0 \leq t \leq 1\}$$

Calculons l'intégrale $\int_C \overline{z}dz$ $(f(z) = \overline{z})$.

On a $d\gamma = \gamma^{'}(t)dt = (3+i)dt$, Alors

$$\int_C \overline{z}dz = \int_0^1 f(\gamma(t))\gamma^{'}(t)dt = \int_0^1 \overline{\gamma(t)}\gamma^{'}(t)dt = (3+i)\int_0^1 (3t - it)dt = 5$$

Exemple 4.2. *Calculer $\int_C f(z)dz$ où $f(z) = z^2$*

C:est le segment entre le point $O(0,0)$ et le point $A(1,0)$ suivi du segment entre le point $A(1,0)$ et $B(1,1)$.

- *Il faut d'abord trouver le paramétrage du segment* $\gamma_1 : [OA]$ *et du segment* $\gamma_2 : [AB]$.

$$\begin{array}{rcl}\gamma_1 : [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longrightarrow & \gamma_1(t) = (1-t)O + tA = (1-t)(0+i.0) + t(1+i.0) = t.\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}\gamma_2 : [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longrightarrow & \gamma_2(t) = (1-t)A + tB = (1-t)(1+i.0) + t(1+i.1) = 1+it.\end{array}$$

$$\begin{aligned}\int_C f(z)dz &= \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz. \\ &= \int_0^1 f(\gamma_1(t))\gamma_1^{'}(t)dt + \int_0^1 f(\gamma_2(t))\gamma_2^{'}(t)dt. \\ &= \int_0^1 t^2 dt + \int_0^1 i(1+it)^2 dt. \\ &= \frac{(1+i)^3}{3}\end{aligned}$$

Exemple 4.3. *Calculer* $\int_C f(z)dz$ *où* $f(z) = z$.

C:est le quart de cercle de rayon 2 *reliant les points* $(2,0)$ *à* $(0,2)$ *ie.*

$C = \left\{\gamma(t) \in \mathbb{C} \ telque \ \ \gamma(t) = 2e^{it}, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}\right\}$

$$\int_C f(z)dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\gamma(t))\gamma^{'}(t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2e^{it}.2ie^{it}dt = 4i\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2it}dt = -4.$$

Propriétés des courbes

Définition 4.2.

- *Toute application continue* $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ *S'appelle* ***chemin (courbe)***

- $\gamma(a)$ *et* $\gamma(b)$ *sont* ***l'origine*** *et* ***l'extrémité*** *du courbe respectivement.*

- *Si $\gamma(a)=\gamma(b)$, on dit que γ est une courbe fermée ou est un* ***lacet***

- *Si la restriction de l'application γ sur l'intervalle $]a,b[$ est* ***injective****, on dit que la courbe est* ***simple****.*

- *Toute courbe fermée est simple, est appelée courbe de* ***Jordan****.*

- $C=\{\gamma(t);t\in[a,b]\}$ *s'appelle courbe paramétrée dans le plan complexe par l'application γ.*

- *La courbe γ est de classe C^1 par morceaux s'il existe un nombre fini de points $a\prec t_1\prec t_2\prec\cdots\prec t_m\prec b$ tels que l'application $\gamma(t)$ possède des dérivées à gauche et à droite de chaque points t_j et toutes ses restrictions $]t_j,t_{j+1}[\xrightarrow{\gamma}\mathbb{C}$ sont de classe C^1.*

- *L'application continue $\gamma^-:[a,b]\longrightarrow\mathbb{C}$ définie par $\gamma^-(t)=\gamma(a+b-t)$ s'appelle chemin* ***inverse*** *du chemin γ.*

- *Toute courbe paramétrée poura être parcourue suivant deux sens soit de $\gamma(a)$ vers $\gamma(b)$ ou bien de $\gamma(b)$ vers $\gamma(a)$*
  ** le parcourt du point $\gamma(a)$ vers le point $\gamma(b)$ s'appelle orientation positive (le sens trigonométrique).*
  ** le parcourt du point $\gamma(b)$ vers le point $\gamma(a)$ s'appelle orientation négative (le sens horaire).*

- *Si l'application γ est définie par $\gamma(t)=x(t)+iy(t)$, alors la longueur $L(\gamma)$ du courbe γ est égale à*
$$L(\gamma):=\int_a^b\left|\gamma^{'}(t)dt\right|=\int_a^b\sqrt{(x^{'}(t))^2+(y^{'}(t))^2}dt$$

Quelques exemples importants:

1. C est une courbe reliant z_1 à z_2 dans $\mathbb{C}$, alors $\int_C dz = z_2 - z_1$ et $\int_C z^n dz = z_2^{n+1} - z_1^{n+1}$

   Démonstration.

$$\begin{aligned} \gamma : [a,b] &\longrightarrow \mathbb{C}, \\ t &\longrightarrow \gamma(t), \gamma(a) = z_1, \gamma(b) = z_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_C z^n dz &= \int_a^b (\gamma(t))^n \gamma(t)' dt = \left[\frac{(\gamma(t))^{n+1}}{n+1} \right]_a^b . \\ &= \frac{(\gamma(b))^{n+1}}{n+1} - \frac{(\gamma(a))^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{n+1} \left(z_2^{n+1} - z_1^{n+1} \right). \end{aligned}$$

$$\int_C dz = \int_a^b 1.\gamma(t)' dt = [(\gamma(t))]_a^b = z_2 - z_1.$$

2. Si C est un lacet (ie $z_1 = z_2$) alors $\int_C z^n dz = 0$.

3. Soient $z_0 \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{Z}$ et C_r le cercle de centre z_0 et de rayon r alors: Démonstration.

$$\begin{aligned} C_r : [0, 2\pi] &\longrightarrow \mathbb{C}, \\ t &\longrightarrow C_r(t) = z_0 + re^{it} \end{aligned}$$

   alors

$$\int_{C_r} (z - z_0)^n dz = \int_0^{2\pi} (z_0 + re^{it} - z_0)^n (ire^{it}) dt = ir^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} dt =$$

$$\begin{cases} \left[\dfrac{r^{n+1}}{n+1} e^{i(n+1)t} \right]_0^{2\pi} = 0 & ; n \neq -1 \\ \\ 2\pi i & n = -1 \end{cases}$$

Quelques exemples importants des courbes

1)**Le cercle**: Soient $z_0 \in \mathbb{C}$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$, le cercle de centre z_0 et de rayon r, qui est une courbe fermée paramétrée par l'application

$$\begin{array}{rcl} \gamma : [0, 2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longrightarrow & z_0 + re^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi : . \end{array}$$

* pour voir une orientation négative du cercle on pose $\gamma(t) = z_0 + re^{-it}$,

2)**Le segment**: Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, le segment orienté d'origine z_1 et d'extrémité z_2, qui le note $[z_1, z_2]$, est défini par

$$\begin{array}{rcl} \gamma : [0, 1] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longrightarrow & (1-t)z_1 + tz_2. \end{array}$$

Propriétés Soit C une courbe dans le plan complexe. On note par $-C$, la courbe C orienteé dans son sens inverse. On suppose que $C = C_1 \cup C_2$ avec le point final de la courbe C_1 coïncide avec le point initial de la courbe C_2.
Si f et g sont intégrables le long de C, alors

1. $\displaystyle\int_C f(z) + g(z)dz = \int_C f(z)dz + \int_C g(z)dz.$
2. $\displaystyle\int_C \alpha f(z)dz = \alpha \int_C f(z)dz$
3. $\displaystyle\int_{-C} f(z)dz = -\int_C f(z)dz$
4. $\displaystyle\int_C f(z)dz = \int_{C_1 \cup C_2} f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz$

Proposition 4.2. *Soit F une fonction holomorphe avec une dérivée $F'(z) = f(z)$ continue dans une domaine $D \subset \mathbb{C}$, soit C une courbe dans D, son origine z_1 et son extrimité z_2, alors:*

$$\int_C f(z)dz = F(z_2) - F(z_1)$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\int_C f(z)dz &= \int_C F^{'}(z)dz = \int_a^b F^{'}(\gamma(t))\gamma^{'}(t)dt \\
&= [F(\gamma(t))]_a^b = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) \\
&= F(z_2) - F(z_1)
\end{aligned}$$

Proposition 4.3. *On a la formule d'intégration par parties:*

$$\int_C F(z)G^{'}(z)dz = F(z)G(z) - \int_C F^{'}(z)G(z)dz$$

4.2 Théorème de Cauchy.

Théorème 4.1. *Si f est une fonction définie dans un domaine $D \subset \mathbb{C}$, et si γ est une courbe, simple fermée à l'intérieur de D et f est holomorphe à l'intérieur de γ et sur γ alors*

$$\oint_\gamma f(z)dz = 0$$

Exemple 4.4. *Soit le cercle de centre 0 et de rayon 2*

$$C = \left\{\gamma(t) \in \mathbb{C}, t \in [0, 2\pi] \text{ où} \gamma(t) = 2e^{it}\right\}$$

Calculer $\int_C zdz$, on a

$$\begin{aligned}
\int_\gamma zdz &= \int_0^{2\pi} \gamma(t).\gamma^{'}(t)dt = 4i\int_0^{2\pi} e^{2it}dt. \\
&= 2\left[e^{2it}\right]_0^{2\pi} = 2 - 2 = 0.
\end{aligned}$$

Corolaire 4.1. *Si f est holomorphe dans un domaine limité par deux courbes simples et fermées γ_1 et γ_2 et sur ces courbes γ_1 et γ_2, alors:*

$$\oint_{\gamma_1} f(z)dz = \oint_{\gamma_2} f(z)dz$$

Si les deux courbes sont parcourues dans le sens positif.

Exemple 4.5. *Calculer* $\int_{C_1} \frac{1}{z} dz$, *où*

$$C_1 = \{\gamma_1(t) \in \mathbb{C}, t \in [0, 2\pi] \text{ où } \gamma_1(t) = 2\cos + 3i \sin t\}$$

La fonction $f(z) = \frac{1}{z}$ *est holomorphe dans le domaine limité par les courbes* C_1 *et* C_2 *et sur ces courbes, où* C_2 *est le cercle de centre* 0 *et de rayan* 1.

$$C_2 = \left\{\gamma_2(t) \in \mathbb{C}, t \in [0, 2\pi] \text{ où } \gamma_2(t) = e^{it}\right\}$$

alors

$$\begin{aligned} \int_{C_1} \frac{1}{z} dz &= \int_{C_2} \frac{1}{z} dz = 4i \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} e^{it} dt. \\ &= i\,[t]_0^{2\pi} = 2i\pi. \end{aligned}$$

4.3 Formule intégrale de Cauchy

La formule intégrale de Cauchy permet de donner la valeur d'une fonction holomorphe en chaque point intérieur à un conteur simple fermé des que l'on connait les valeurs de cette fonction sur ce conteur.

Théorème 4.2. *Soit f une fonction holomorphe à l'intérieur d'une courbe simple fermée* γ *et sur cette courbe, Si* w *est un point à l'intérieur de* γ *alors:*

$$f(w) = \frac{1}{2i\pi} \oint_\gamma \frac{f(z)}{z - w} dz$$

où γ *est parcouru dans le sens positif.*

Démonstration.posons $g : D \longrightarrow \mathbb{C}$

$$z \to g(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} & ; \quad z \neq z_0. \\ f'(z_0) & ; \quad z = z_0. \end{cases}$$

Puisque f est holomorphe alors g est continue et holomorhe sur D. Ce qui donne d'après le théorème de Cauchy que

$$\int_\gamma g(z) dz = 0$$

c-a-d

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} = 2\pi i f(z_0) I(\gamma, z_0)$$

Exemple 4.6. *Calculer* $\oint_{|z|=2} \frac{z^2-4z+1}{z+i}dz$ *Solution. Soit* $f(z) = z^2 - 4z + 1$, $w = -i$ *et notons que* f *est holomorphe dans* $|z| \leq 2$ *et que* w *est à l'intérieur du disque* $|z| \leq 2|z| \leq 2$. *D'après la formule de Cauchy, on obtient:*

$$\oint_{|z|=2} \frac{z^2 - 4z + 1}{z + i} dz = 2\pi i f(-i) = 2\pi i.4i = -8\pi$$

Exemple 4.7. *Calculer* $\oint_{|z-2i|=4} \frac{z}{z^2+9}dz$ *Solution. Notons que* $z^2 + 9 = (z - 3i)(z + 3i)$,*et que seul* $w = 3i$ *est à l'intérieur de* $|z - 2i| = 4$.*Si on choisit* $f(z) = \frac{z}{z+3i}$ *et en utilisant la formule de Cauchy, on obtient :*

$$\oint_{|z-2i|=4} \frac{z^2 - 4z + 1}{z + i} dz = 2\pi i f(3i) = 2\pi i. \frac{3i}{6i} = i\pi$$

4.4 Formule de la moyenne

Théorème 4.3. *Supposons que* f *est holomorphe (analytique) sur un domaine simplement connexe* D *et que* $C(z0, r) \subset D$, *alors*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta$$

Démonstration. Soit $\gamma(\theta) = z_0 + re^{i\theta}$, avec $0 \leq \theta \leq 2\pi$ une paramétrage. La formule de Cauchy nous donne

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0,r)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{i\theta})}{z_0 + re^{i\theta} - z_0} ire^{i\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta$$

4.5 Formule intégrale de Cauchy pour les dérivées.

Théorème 4.4. *la formule intégrale de Cauchy pour les dérivées*

$$f^{(n)}(w) = \frac{n!}{2i\pi} \oint_\gamma \frac{f(z)}{(z - w)^{n+1}} dz, \quad n = 1, 2, 3, \cdots$$

- La formule précédente est appelées formules intégrales de Cauchy et est très remarquable car ils montre que si une fonction f est connue sur la courbe simple fermée γ, alors ses valeurs et les valeurs de toutes ses dérivées peuvent être calculées en tout point situé à intérieur de γ.

- Si une fonction de la variable complexe admet une dérivée première dans un domaine simplement connexe D, toutes ses dérivées d'ordre supérieur existent dans D. Ceci n'est pas nécessairement vrai pour les fonctions de la variable réelle.

Exemple 4.8. *utiliser la formule intégrale de Cauchy pour évaluer* $\oint_C \frac{z-1}{(z+1)(z+2)}dz$ *le long du cercle* $C = \left\{z \in \mathbb{C}, |z| = \frac{z}{2}\right\}$.

La fonction $z \longrightarrow f(z) = \frac{z-1}{z+2}$ *est holomorphe à l'intérieur du cercle* C *et sur* C*, alors d'après la formule intégrale de Cauchy avec* $w = -1$*, on a*

$$\oint_C \frac{z-1}{(z+1)(z+2)}dz = \oint_C \frac{f(z)}{(z+1)}dz = 2\pi i f(-1) = -4i\pi$$

Exemple 4.9. *utiliser la formule intégrale de Cauchy pour évaluer* $\oint_C \frac{1}{z(z-1)^4}dz$ *le long du cercle* $C = \left\{z \in \mathbb{C}, |z-1| = \frac{1}{2}\right\}$.

La fonction $z \longrightarrow f(z) = \frac{1}{z}$ *est holomorphe sur* $\mathbb{C}^*$*, donc elle est holomorphe à l'intérieur du cercle* C *et sur* C*, alors*

d'après la formule intégrale de Cauchy avec $w = 1$*, on a*

$$\oint_C \frac{1}{z(z-1)^4}dz = \oint_C \frac{f(z)}{(z-1)^4}dz = \frac{2\pi i f^{(3)}(1)}{3!} = \frac{2\pi i.(-6)}{6} = -2i\pi$$

4.6 Inégalité de Cauchy

Théorème 4.5. *Si* f *est une fonction holomorphe à l'intérieur du cercle* C_r *et sur* C_r*, ou* C_r *désigne le cercle de centre* z_0 *et de rayon* r*, posons:* $M = \sup_{z \in C_r} |f(z)|$*, alors*

$$\forall n \geq 0 : \left|f^{(n)}(z_0)\right| \leq M\frac{n!}{r^n}.$$

Démonstration.

Par la formule intégrale de Cauchy pour les dérivées.

$$\begin{aligned}
\left|f^{(n)}(z_0)\right| &= \left|\frac{n!}{2i\pi}\oint_{C_r}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\right|dz. \\
&\leq \frac{n!}{2\pi}\oint_{C_r}\frac{|f(z)|}{(z-z_0)^{n+1}}dz. \\
&\leq \frac{n!}{2\pi}\frac{M}{r^{n+1}}\oint_{C_r}|dz|\,. \\
&\leq M\frac{n!}{r^n}.
\end{aligned}$$

4.7 Théorème de Liouville- Théorème de Morera

Théorème de Liouville

Théorème 4.6. *Toute fonction entière et bornée est constante.*

Démonstration.
Soit f(z) une fonction entière et bornée c.a.d. $|f(z)| \leq M$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. D'après l'inégalité de Cauchy pour tout $z_0 \in \mathbb{C}$, on a

$$\left|f'(z_0)\right| \leq \frac{M}{r} \longrightarrow 0$$

quand $r \longrightarrow +\infty$ Donc $\left|f'(z_0)\right| = 0$ pour tout $z_0 \in \mathbb{C}$ ce qui montre que la fonction f est constante.

Théorème 4.7. *(Théorème de Morera)*
Supposons que f est continue sur un domaine simplement connexe D et

$$\oint_\gamma f(x)dz = 0$$

pour tout lacet de D. Alors f est analytique sur D.

Démonstration. Puisque f est continue alors elle admet une primitive $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(s)ds$ pour tout $z \in D$; où z_0 est un point fixe à l'intérieur de D. Donc F est analytique dans D et par conséquent sa dérivée f est aussi analytique.

4.8 Exercices

Exercice 4.1. *Trouver dans chaque cas, la courbe C ayant pour paramétrage:*

$$1)\ \gamma(t) = Re^{it}, t \in [0, 2\pi] \quad R \succ 0; \quad 2)\ \gamma(t) = t + it^2, t \geq 0$$

$$3)\gamma(t) = t + \frac{i}{t}, \quad t \geq 1.$$

Exercice 4.2. *Calculer* $\int_\gamma |z|\, dz$*, où:*

1. γ *est le segment* $[A, B]$*, A(0,-1) B(0,1).*

2. γ *est le demi cercle,*$|z| = 1$*,* $\Re z \geq 0$ *reliant le point* $(0, -1)$ *au* $(0, 1)$

Exercice 4.3. *Calculer* $\int_\gamma z \sin z dz$*, où* γ *est le segment reliant le point* $(0, 0)$ *au point* $(0, 1)$*.*

Exercice 4.4. *En utilisant la formule intégrale de Cauchy, Calculez les intégrales suivants (les courbes sont parcourus une fois dans le sens (+)).*

$$1) \int_{|z+i|=3} \sin z \frac{dz}{z+i}, \qquad 2) \int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2+1}$$

$$3) \int_{|z+1|=1} \frac{dz}{(z+1)(z-1)^3} \qquad 4) \int_{|z-i|=1} \frac{\cos z}{(z-i)^2} dz$$

4.8.1 Exercices Supplémentaires

Exercice 4.5. 1. *Calculer l'intégrale suivante:* $\int_i^{1+i} (1 + iy) dz$

2. *Calculer l'intégrale suivante sur une courbe* γ *paramétrée par* $x = 1 + t$ *et* $y = t$ *et* $t \in [0, 1]$ *reliant les points* 1 *et* $2 + i$*:* $\int_1^{2+i} (x + ixy) dz$

3. *Calculer l'intégrale suivante sur un demi-cercle* γ *de rayon* 2 *et de centre* $(0, 0)$*:* $\int_\gamma \frac{z^2+4}{z}$

Exercice 4.6. *Calculer l'intégrale suivante par la méthode directe puis en effectuant l'intégration suivant les chemins indiqués* $\int_{1-2i}^{3+i}(2z+3)dz$

1. *Le long du chemin:* $x = 2t+1$ *et* $y = 4t^2 - t - 2$ *et* $t \in [0,1]$.

2. *Le long de la droite joignant* $(1-2i)$ *et (3+i).*

3. *Le long des segments joignant* $(1-2i)$ *et* $(1+i)$ *puis* $(1+i)$ *et* $(3+i)$.

4. *Le long des demi-cercles* C_1 *et* C_2: C_1*(de centre* $z_0 = 1 - \frac{1}{2}i$*,de rayon* $r = \frac{3}{2}$*.)et* C_2*(de centre* $z_0 = 2+i$*,de rayon* $r = 1$*.)*

FORMULE INTÉGRALE DE CAUCHY

Exercice 4.7. *Calculer chacune des intégrales suivantes sur les courbes* γ *indiquées:*

1. $\oint_\gamma \frac{z^2+z+1}{z-1-i}dz$. γ *un cercle de centre* $(1,0)$ *et de rayon* 2.

2. $\oint_\gamma \frac{z+\cos z}{z-\frac{\pi}{2}}dz$. γ *un cercle de centre* $(0,1)$ *et de rayon* 1.

3. $\oint_\gamma \frac{e^z}{3z-2}dz$. γ *un carré de sommets* $A(1,1)$, $B(-1,1)$, $C(-1,-1)$, $D(1,-1)$.

4. $\oint_\gamma \frac{z+e^{2z}+1}{z^4}dz$. γ *un cercle de centre* $(1,1)$ *et de rayon* 2.

5. $\oint_\gamma \frac{e^{iz}+2}{z(z-1+i)}dz$. γ *un cercle de centre* $(0,0)$ *et de rayon* $\frac{1}{2}$.

6. $\oint_\gamma \frac{e^{2iz\pi}+1}{z^1}dz$. γ *un cercle d'équation* $|z-1| = \frac{1}{2}$.

CHAPTER 5

DÉVELOPPEMENT EN SÉRIE TAYLOR ET EN SÉRIE DE LAURENT

5.1 Développement en série Taylor

5.1.1 Séries de fonctions

À partir d'une suite de fonctions $\{u_n(z)\}$, nous formons une nouvelle suite $\{S_n(z)\}$ définie par

$$S_n(z) = u_1(z) + u_2(z) + \cdots + u_n(z) = \sum_{k=1}^{n} u_k(z)$$

où $S_n(z)$ est appelée la n^{ieme} somme partielle , qui est la somme des n premiers termes de la suite $\{u_n(z)\}$ La suite $S_n(z)$ est représentée par

$$u_1(z) + u_2(z) + \cdots + u_n(z) + \cdots = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(z),$$

appelée série infinie de terme général $u_n(z)$. Si $lim_{n \longrightarrow \infty} S_n(z) = S(z)$, la série est dite convergente et $S(z)$ est sa somme, dans le cas contraire la série est dite divergente.

Définition 5.1. *Une série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(z)$ est dite absolument convergente si la série des valeurs absolues, i.e, $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n(z)|$ converge.*

Définition 5.2. *Si $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n(z)|$ est convergente alors, i.e, $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(z)$ convergente.*

5.1.2 Séries entières

Une série entière centrée en $z = z_0$ est une série de fonctions de la forme

$$\sum_{k=0}^{+\infty} c_k (z - z_0)^k \tag{5.1}$$

Remarque 5.1. *1. Les polynômes sont un cas spécial de séries entières, et convergent pour tout $z \in \mathbb{C}$.*

2. La série géométrique $\sum_{k=0}^{+\infty} z^k$ est un cas spécial de séries entières, où $c_k = 1$ pour tout k.

Proposition 5.1. *Considérons la série géométrique $\sum_{k=0}^{+\infty} z^k$.*

1. *La série converge absolument pour $|z| \prec 1$ vers la fonction $f(z) = \frac{1}{1-z}$.*

2. *La série converge uniformément pour $|z| \leq r \prec 1$ vers la fonction $f(z) = \frac{1}{1-z}$.*

3. *La série diverge pour $|z| \geq 1$*

Démonstration. Notons que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} z^k = \lim_{n \longrightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n} z^k = \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} = \frac{1}{1 - z}$$

Puisque $|z| \prec 1$, alors

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} z^{n+1} = \lim_{n \longrightarrow \infty} |z|^{n+1} e^{i(n+1)\arg z} = 0$$

Soit $0 \prec r \prec 1$ et $|z| \leq r$, alors $\left|z^k\right| \leq r^k$ et d'après le théorème (M-test de Weierstrass) la série $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ converge absolument et uniformément pour $|z| \leq r$. Puisque r peut être arbitrairement proche de 1 on a que la série est absolument convergente pour $|z| \prec 1$.

Corolaire 5.1. *Si $z_0 \in \mathbb{C}$, alors pour tout $z \in D(z_0, 1) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \prec 1\}$,*

$$\sum_{k=m}^{+\infty} (z - z_0)^k = \frac{(z - z_0)^m}{1 - (z - z_0)}, m \geq 0$$

Exemple 5.1. *Trouver la somme de la série $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(1+2i)^k}{5^k}$ si elle existe.* ***Solution.****La série est géométrique de raison $r = \frac{1}{5}(1 + 2i)$. Puisque $|z| = \frac{\sqrt{5}}{5} \prec 1$, la série converge absolument et sa* *somme est*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(1+2i)^k}{5^k} = \frac{\frac{1+2i}{5}}{1-\frac{1+2i}{5}} = \frac{1+2i}{4-2i} = \frac{1}{2}i.$$

Question: Quel est le domaine de convergence de la série entière (5.1)?

Réponse: Si on utilise le test de **d'Alembert**, la série entière converge absolument si

$$\lim_{k\longrightarrow\infty} \left| \frac{c_{k+1}(z-z_0)^{k+1}}{c_k(z-z_0)^k} \right| = |z-z_0| \lim_{k\longrightarrow\infty} \left| \frac{c_{k+1}}{c_k} \right| \prec 1.$$

Notons

$$\lim_{k\longrightarrow\infty} \left| \frac{c_{k+1}}{c_k} \right| = L, \quad et \quad R = \frac{1}{L} = \lim_{k\longrightarrow\infty} \left| \frac{c_k}{c_{k+1}} \right|$$

alors, la série entière (5.1) converge absolument dans le domaine $|z-z_0| < R$. Le nombre R est appelé le rayon de convergence de la série.

Si on utilise le test de **Cauchy**, la série entière converge absolument si

$$\lim_{k\longrightarrow\infty} \sqrt[k]{|c_k|\,|(z-z_0)^k|} = \lim_{k\longrightarrow\infty} |z-z_0| \sqrt[k]{|c_k|} \prec 1$$

donc si on note $L = lim_{k\longrightarrow\infty} \sqrt[k]{|c_k|}$ le rayon de convergence peut être défini de manière équivalente par :

$$R = \frac{1}{L} = \lim_{k\longrightarrow\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{|c_k|}}$$

.

Remarque 5.2. *1. Toute série entière admet un rayon de convergence unique R, $0 \leq R \leq \infty$.*

2. Si $L = 0$, alors $R = \infty$ et la série (5.1) converge absolument pour $z \in \mathbb{C}$.

3. Si $L \neq 0$, alors la série (5.1) converge absolument dans le disque ouvert (domaine) $D(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C} : |z-z_0| < R\}$ et diverge dans

$$\mathbb{C} - D(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C} : |z-z_0| \succ R\}$$

.

4. Si $L = \infty$ alors $R = 0$ et la série (5.1) converge seulement pour $z = z_0$ et diverge dans $\mathbb{C}\,\{z_0\}$

5. Pour les points sur le cercle $|z-z_0|=R$, la série peut converger et peut diverger.

Théorème 5.1. *Pour toute série entière $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-z_0)^k$, il existe un nombre positif R, avec $0 \leq R \leq \infty$, qui dépend seulement des coefficients c_k, tel que*

1. la série converge absolument dans $|z-z_0| \prec R$,

2. la série converge uniformément dans $|z-z_0| \leq R' \prec R$,

3. la série diverge dans $|z-z_0| \succ R$.

Exemple 5.2. *Étudier la convergence de la série: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^2}$ Le rayon de convergence est donné par,*

$$R = \lim_{k \longrightarrow \infty} \left| \frac{c_k}{c_{k+1}} \right| = \lim_{k \longrightarrow \infty} \frac{(k+1)^2}{k^2} = 1$$

Donc la série est absolument convergente dans le domaine $|z| \prec 1$. Notons que si $|z|=1$, alors

$$\left| \frac{z^k}{k^2} \right| = \frac{1}{k^2}$$

mais puisque $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ converge, alors $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^2}$ converge absolument sur le cercle $|z|=1$ et donc la série converge absolument dans le disque fermé $|z| \leq 1$

5.1.3 Série de Taylor

Théorème 5.2. *(Série de Taylor) Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert U de C, soient $z_0 \in U$ et $R > 0$ tel que le cercle $C(z_0, R) \subset U$, alors*

$$\forall z \in D(z_0, R) : f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

La série précédante est appelée série de Taylor de f centrée en z_0. Si le centre $z_0 = 0$ alors la série devient

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$$

Théorème 5.3. *Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction analytique (holomorphe) dans le domaine D. Alors f est développable en une série entière*

$$f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n$$

avec

$$c_n = \frac{f^n(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_R} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{k+1}}dw$$

ou $C_R = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = R\}$ *est le plus grand cercle de centre* z_0 *et de rayon* R *orienté positivement inclus dans* D.

5.1.4 Quelques séries particulières:

La liste qui suit contient quelques séries particulières avec leurs domaines de convergence

1 . $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots; |z| \prec +\infty.$

2 . $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots + z^n + \cdots; |z| \prec 1.$

3 . $\sin z = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots; |z| \prec +\infty$

4 . $\cos z = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^{2n-2}}{(2n-2)!} = 1 - \frac{z^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{z^{2n-2}}{(2n-2)!} + \cdots; |z| \prec +\infty.$

5 . $\ln z = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n} = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{z^n}{n} + \cdots; |z| \prec 1.$

6 . $\arctan z = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^{2n-1}}{2n-1} = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{z^{2n-1}}{2n-1} + \cdots; |z| \prec 1.$

5.2 Développement en série de Laurent

Nous allons généraliser la série de Taylor en développant $f(z)$ dans une couronne plutôt que dans un disque.

Définition 5.3. *On dit que la série* $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k$ *est convergente et de somme égale à* L *si* $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ *et* $\sum_{k=1}^{+\infty} a_{-k}$ *sont convergentes vers* L_1 *et* L_2 *et* $L = L_1 + L_2$.

Théorème 5.4. *Soit* A *la couronne limitée par deux cercles* C_1 *et* C_2 *de même centre* z_0 *et de même rayon respectifs* r_1 *et* r_2 *avec* $r_1 < r_2$, *et soit* f *une fonction holomorphe à l'intérieur de la couronne* A *et sur les deux cercles* C_1 *et* C_2, *alors en tous point* z *intérieur de* A, $f(z)$ *peut être représenté de manière unique par une série convergente de puissances positives et négatives de* $(z - z_0)$.

$$\forall z \in A = \{z \in \mathbb{C}, r_1 < |z - z_0| < r_2\}$$

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k (z - z_0)^k = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n (z - z_0)^{-n}$$

Ou

$$a_n = \frac{1}{2i\pi} \oint_{C_2} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw, \quad b_n = \frac{1}{2i\pi} \oint_{C_1} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{-n+1}} dw....(*)$$

- *(*) est appelée série de Laurent associe à f.*

- *La série des puissances positives $\sum_{n\geq 0} a_n (z - z_0)^n$ s'appelle la partie régulière.*

- *La série des puissances négatives $\sum_{n>0} b_n (z - z_0)^{-n}$ s'appelle la partie principale.*

- *On dira que la série de Laurent converge si ses parties principale et régulière convergent.*

Démonstration.

soient w sur le cercle C_1 ou C_2et z dans la couronne A ie z entre le cercle C_1 et C_2 avec $|z - z_0| = r$, $r_1 < r < r_2$.

Par la formule intégrale de Couchy sur la couronne A on a:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(w)}{(w - z)} dw - \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(w)}{(w - z)} dw$$

D'aprés le théorme précédent (série de Taylor)

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(w)}{(w - z)} dw = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(w)}{(w - z)^{n+1}} dw.$$

- Pour le deuxième terme: $-\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(w)}{(w-z)} dw$, on a:

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{w - z} = \frac{1}{z - w} &= \frac{1}{(z - z_0) - (w - z_0)} = \frac{1}{(z - z_0)(1 - \frac{w - z_0}{z - z_0})}. \\
-\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(w)}{(w - z)} dw &= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{(z - z_0)} \oint_{C_1} \frac{f(w)}{(1 - \frac{w - z_0}{z - z_0})} dw.. \\
&= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{(z - z_0)} \oint_{C_1} f(w) \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{w - z_0}{z - z_0}\right)^n dw, \quad \mid \frac{w - z_0}{z - z_0} \mid < 1.
\end{aligned}$$

La série $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{w-z_0}{z-z_0}\right)^n$ converge uniformement car

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(w)}{(w-z_0)}dw &= \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{(z-z_0)}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(z-z_0)^n}\oint_{C_1}f(w)(w-z_0)^n dw. \\
&= \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}\oint_{C_1}f(w)(w-z_0)^n dw.
\end{aligned}$$

Faisons le changement de variable $N = n+1$,

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(w)}{(w-z)}dw &= \frac{1}{2\pi i}\sum_{N=1}^{+\infty}\frac{1}{(z-z_0)^N}\oint_{C_1}f(w)(w-z_0)^{N-1}dw \\
&= \sum_{N=1}^{+\infty}\underbrace{\left(\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{-N+1}}dw\right)}_{\text{bN}}(z-z_0)^{-N} \\
&= \sum_{N=1}^{+\infty}b_N(z-z_0)^{-N}
\end{aligned}$$

Exemple 5.3. *Développez selon Laurent sur le couronne $A = \{z \in \mathbb{C}, 1 < |z| < 2\}$ la fonction $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$*
Par décomposition en éléments simple, on a:

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{-1}{z-1} + \frac{1}{z-2}.$$

Comme $|z| < 2$, alors $\frac{|z|}{2} < 1$, par suite:

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\frac{z}{2}}\right) = -\frac{1}{2}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{z}{2}\right)^n = -\frac{1}{2}\sum_{n\geq 0}\frac{1}{2^n}z^n = -\sum_{n\geq 0}\frac{1}{2^{n+1}}z^n.$$

D'autre part $1 < |z|$, donc $\frac{1}{|z|} < 1$, d'oú:

$$-\frac{1}{z-1} = -\frac{1}{z(1-\frac{1}{z})} = -\frac{1}{z}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{z}\right)^n = -\sum_{n\geq 0}\frac{1}{z^{n+1}}$$

Par conséquent pour tout $z \in A$, on obtient

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = -\sum_{n\geq 0}\frac{1}{2^{n+1}}z^n - \sum_{n\geq}\frac{1}{z^{n+1}}.$$

5.3 Singularité isolées d'une fonction complexe

Définition 5.4. *z_0 est un point singulier isolé si la fonction f n'est pas holomorphe en z_0 mais l'est en tous autre point d'un disque centré en z_0.*

Exemple 5.4. *1. $f(z) = \frac{1}{z-1}$, admet $z_0 = 1$ comme point singulier isolé.*

2. $g(z) = \frac{1}{\sin(\frac{1}{z})}$, admet une infinité de point singulier autour $z_0 = 0$ ce sont $z_n = \frac{1}{n\pi}$, donc $z_0 = 0$ n'est pas un point singulier isolé.

Classification des points singuliers isolés

Il est possible de classer les singularités isolées d'une fonction f l'aide de sa série de Laurent. Supposons que z_0 une singularité isolé de f admet un développement en série de Laurent centré en z_0.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{+\infty} a_b (z-z_0)^{-n}$$

1. Si la partie principale du développement contient un nombre infini de termes, alors z_0 est une singularité essentielle.

   Exemple 5.5. *La fonction $e^{\frac{1}{z}}$ a une singularité en $z_0 = 0$ et comme*

   $$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + ...,$$

   donc $z_0 = 0$ est un point singulier isolé essentiel.

2. Si la partie principale du développement contient un nombre fini de termes, ie

   $$f(z) = \frac{b_N}{(z-z_0)^N} + \frac{b_{N-1}}{(z-z_0)^{N-1}} + ... + \frac{b_i}{(z-z_0)^i} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n.$$

   N: le plus grand des indices de b_N, alors z_0 est un pole d'ordre N.

   Exemple 5.6.

   $$f(z) = \frac{1}{z^2(1-z)} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + 1 + z + z^2 + ..., \quad |z| < 1$$

   . $z_0 = 0$ est un pole d'ordre 2.

3. Si la partie principale du développement est nulle, z_0 est une singularité apparente.

Exemple 5.7.
$$\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - ... + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!} + ...$$
donc $z_0 = 0$ *est un point singulier isolé apparente.*

Proposition 5.2. *Si* f *une fonction holomorphe sur le voisinage* $\{z \in \mathbb{C}, |z - z_0| < \delta\}$ *et s'il existe* $N \in \mathbb{N}$, *tel que*
$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^N f(z) \neq 0$$
et
$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^{N+1} f(z) = 0$$
alors z_0 *est un pôle d'ordre* N.

Exemple 5.8. *Soit la fonction* $f(z) = \frac{e^{2z}}{(z-1)^3}$, $z_0 = 1$ *posons*
$$u = z - 1 \Longleftrightarrow z = u + 1$$

$$\begin{aligned}
\frac{e^z}{(z-1)^3} &= \frac{e^{2u+2}}{u^3} = e^2 \frac{e^{2u}}{u^3} \\
&= \frac{e^2}{u^3}\left(1 + 2u + 2u^2 + \frac{4}{3}u^3 + \cdots\right) \\
&= \frac{e^2}{u^3} + \frac{2e^2}{u^2} + 2\frac{e^2}{u} + \frac{4e^2}{3} + \frac{2e^2}{3}u + \cdots \\
&= \frac{e^2}{(z-1)^3} + \frac{2e^2}{(z-1)^2} + 2\frac{e^2}{(z-1)} + \frac{4e^2}{3} + \frac{2e^2}{3}(z-1) + \cdots
\end{aligned}$$

$z_0 = 1$ *est un pôle triple (d'ordre* 3*) car*
$$\lim_{z \longrightarrow 1} (z-1)^3 f(z) = \lim_{z \longrightarrow 1} (z-1)^3 \frac{e^{2z}}{(z-1)^3} = e^2 \neq 0$$
$$\lim_{z \longrightarrow 1} (z-1)^4 f(z) = \lim_{z \longrightarrow 1} (z-1)^4 \frac{e^{2z}}{(z-1)^3} = 0$$

5.4 Exercices

Exercice 5.1. *Trouvez le rayon de convergence des sériés entières suivantes*

$$1. \sum_{n\geq 0} n^\alpha z^n, \alpha \in \mathbb{R}, 2. \sum_{n\geq 0} n! \left(\frac{z}{n}\right)^n, 3. \sum_{n\geq 1} a_n x^n, a_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$$

Exercice 5.2. *déterminer la nature des points singuliers* $\frac{1}{z^4-z^2}, \coth z, \frac{e^{\frac{1}{z^2}}}{z-1}$.

Exercice 5.3. *Soit f la fonction suivante*

$$f(z) = \frac{1}{z(z-3)}$$

Développer la fonction f en série de Laurent au voisinage de 0 *en précisant les domaines de convergence.*

Exercice 5.4. *Soit*

$$f(z) = \frac{z}{(z-1)(z+2)}$$

1. *Trouver les constantes a et b tels que.*

$$f(z) = \frac{a}{z-1} + \frac{b}{z+2}$$

2. *Développer la fonction f(z) en série de Laurent autour de* 0.

Exercice 5.5. *Soit*

$$f(z) = \frac{-1}{i}\frac{1}{z^2 - \frac{5}{2}z + 1}$$

1. *Déterminer les singularités et préciser leurs types.*

CHAPTER 6

THÉORÈME DES RÉSIDUS ET SES APPLICATIONS

L'une des applications les plus remarquables de l'intégration dans le plan complexe en général et du théorème de Cauchy en particulier, est la possibilité d'utiliser les techniques d'analyse complexe pour calculer des intégrales et des séries réelles qui sont très difficiles à calculer par les méthodes danalyse réelle.

6.1 Théorème des résidus.

Définition 6.1. *Soit f une fonction holomorphe sur U et z_0 un pole de f. On appelle* ***résidu*** *de f en z_0 et l'on note $Res(f, z_0)$ le coefficient b_1 de $\frac{1}{z-z_0}$ dans le développement de Laurent de f en z_0*

$$b_1 = Res(f, z_0) = \oint_C f(z)dz, \quad C = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$$

Remarque 6.1. *D'aprés le théorème de Laurent, la fonction f admet un développement en série de Laurent centré en z_0.*

$$f(z) = ... + \frac{b_2}{(z - z_0)^2} + \frac{b_1}{(z - z_0)} + a_0 + a_1(z - z_0) + ...$$

Où

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw$$

En particulier pour $n = -1$, on trouve

$$b_1 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} f(w)dw = Res(f, z_0).$$

Ainsi peut être obtenu directement du développement de f en série de Laurent.

6.2 Calcul des résidus.

Théorème 6.1. *Si z_0 est un pôle d'ordre N pour f, alors*

$$Res(f, z_0) = \frac{1}{(N-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{N-1}}{dz^{N-1}}[(z - z_0)^N f(z)]$$

En particulier si z_0 est un pôle simple de f, on a

$$Res(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z)$$

Exemple 6.1. *Soit la fonction $f(z) = \frac{z^2-2z}{(z+1)^2}$, on a $z_0 = -1$ est un pôle double d'ordre $N = 2$.*

$$\begin{aligned} Res(f, -1) &= \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z \to -1} \left((z+1)^2 \frac{z^2 - 2z}{(z+1)^2} \right)' \\ &= \frac{1}{1!} \lim_{z \to -1} (2z - 2) = -4. \end{aligned}$$

Théorème 6.2 (théorème des résidus de Cauchy)**.** *Soient C un conteur simple fermé et $z_1, z_2, ..., z_n$ un nombre fini de points singuliers tous à l'intérieur de C, f une fonction holomorphe sur C, alors*

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res(f, z_k) = \sum_{k=1}^{n} \oint_{C_k} f(z)dz$$

L'intégrale étant calculée dans le sens positif, C parcouru une fois .

Exemple 6.2. *Calculons l'intégrale $\oint_C \frac{\log(z+1)}{z^2(2z-1)} dz$, où C est le cercle $|z| = \frac{2}{3}$.*
La fonction $f(z) = \frac{\log(z+1)}{z^2(2z-1)}$ a deux pôles simples $z_1 = 0$ et $z_2 = \frac{1}{2}$, situés à l'intérieur de C, pour z_2 on a

$$Res(f, \frac{1}{2}) = \lim_{z \to \frac{1}{2}} (z - \frac{1}{2}) \frac{\log(z+1)}{z^2(2z-1)} = \frac{1}{2} \lim_{z \to \frac{1}{2}} \frac{\log(z+1)}{z^2} = 2 \log \frac{3}{2}$$

Pour z_1 on a

$$\lim_{z \to 0} z \frac{\log(z+1)}{z^2(2z-1)} = \lim_{z \to 0} \frac{\log(z+1)}{z} \frac{1}{2z-1} = 1 \times \frac{1}{2 \times 0 - 1} = -1 = Res(f, 0).$$

Ainsi

$$\oint_C \frac{\log(z+1)}{z^2(2z-1)} dz = 2\pi i \left[Res(f, 0) + Res(f, \frac{1}{2}) \right] = 2\pi i \left[-1 + \log \frac{3}{2} \right]$$

.

6.3 Applications au calcul et à la sommation des séries

6.3.1 Les fonctions périodique entre 0 et 2π

Soit $I = \int_0^{2\pi} F(\cos\theta, \sin\theta) d\theta$ où F est une fonction rationnelle de $\sin\theta$ et $\cos\theta$, Si on pose

$$z = e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \Rightarrow dz = ie^{i\theta}d\theta \Rightarrow d\theta = \frac{dz}{iz}$$

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right), \\ \sin\theta = \dfrac{1}{2i}\left(z - \dfrac{1}{z}\right). \end{cases}$$

L'intégrale I devient

$$I = \oint_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res(f, z_k)$$

où C est le cercle d'unité et z_k sont les pôles de f à intérieur de C.

Exemple 6.3. *Calculons* $I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{3-2\cos\theta+\sin\theta} d\theta$ *posons*

$$z = e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \Rightarrow dz = ie^{i\theta}d\theta \Rightarrow d\theta = \frac{dz}{iz}$$

I devient

$$\begin{aligned} I &= \int_\gamma \frac{1}{3 - 2(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)) + (\frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right))} \frac{dz}{iz} \\ &= \int_\gamma \frac{2}{z^2(1-2i) + 6iz - (1+2i)} dz. \end{aligned}$$

Les pôles sont $z_1 = 2 - i \notin \gamma$ $z_2 = \frac{1}{5}(2-i) \in \gamma$

$$\begin{aligned} Res(f, z_2) &= \lim_{z \to z_2} \left((z - z_2) \frac{2}{(1-2i)(z-z_1)(z-z_2)} \right) \\ &= \frac{1}{2i} \end{aligned}$$

alors, d'aprés le théorème des résidus I=2iπ$Res(f, z_2) = \pi^2$

Certains types d'intégrales généralisées:

$|z|^p$, $p \in \mathbb{R}$ s'il existe une constante $k > 0$, telle que : $|f(z)| \leq \frac{k}{|z|^p}$, pour $|z|$ assez grand.

Théorème 6.3. *Supposons que f admet un nombre fini de pôles sur le demi plan supérieur et qu'elle est holomorphe sur tout l'axe réel.*

Supposons aussi que f *est d'ordre* $\frac{1}{|z|^p}$, $p \in \mathbb{R}$ *alors:*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res(f, z_k)$$

Ou les z_k *sont les pôles de* f *dans le demi plan supérieur.*

Théorème 6.4. *Si* $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ *ou* P *et* Q *sont deux polynômes premiers entre eux et* $Q(z)$ *n'a pas de zéro réels.*
Si $deg(Q) - deg(P) \geq 2$ *alors*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res(f, z_k)$$

Ou les z_k *sont les pôles situées dans le demi plan supérieur.*

Remarque 6.2. *Si* $f(x)$ *est paire*

$$\int_{0}^{+\infty} f(x)ds = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \pi i \sum_{k=1}^{n} Res(f, z_k)$$

Exemple 6.4. *Calculons l'intégrale* $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2(x^2+2x+2)}dx$.

Soit $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{z^2}{(z^2+1)^2(z^2+2z+2)}$, *les pôles situées dans le demi plan supérieur* $z_1 = i$ *pôles d'ordre 2 et* $z_2 = -1 + i$, *pôle simple.*

$Res(f, i) = \lim_{z \to i} \frac{d}{dz}((z - i)^2 f(z)) = \frac{9i-12}{100}$.

$Res(f, -1 + i) = \lim_{z \to -1+i}(z - (-1 + i)(f(z)) = \frac{3-4i}{25}$.

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i(\frac{9i-12}{100} + \frac{3-4i}{25}) = \frac{7\pi}{50}$.

Théorème 6.5. *Soit* $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ *ou* P *et* Q *sont deux polynômes premiers entre eux et* $Q(z)$ *n'a pas de zéro réels et si* $deg(Q) > deg(P)$, $m > 0$, *alors*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{imx}dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res(fe^{imz}, z_k)$$

Ou les z_k*sont les pôles de* $f(z)e^{imz}$ *situées dans le demi plan supérieur.*

Remarque 6.3. *Les poles de* $f(z)e^{imz}$ *ne sont autre que les racines de* $Q(z) = 0$, *dans le demi* *plan supérieur ce qui permet de calculer intégrales:*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos mx dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin mx dx$$

.

Exemple 6.5. *Calculer:* $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin x}{(x^2+1)(x^+4)dx}$.
les pôles sont: $z_1 = i, z_2 = 2i, m = 1$ *posons* $f(z) = \frac{ze^{iz}}{(z^2+1)(z^2+4)}$ *En calculant les résudus de la fonction* $f(z)$*, on obtient*

$$Res(f,i) = \frac{1}{6e}, Res(f,2i) = \frac{-1}{6e^2}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{ix}}{(x^2+1)(x^2+4)dx} = 2\pi i(Res(f,i) + Res(f,2i)) = \frac{\pi i}{3e^2}(e-1)$$

d'où

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin x}{(x^2+1)(x^2+4)dx} = \frac{\pi(e-1)}{3e^2}$$

6.4 Exercices

Exercice 6.1. *déterminer la nature des points singuliers puis calculer les résidus de* $\frac{1}{z^4-z^2}, \coth z, \frac{e^{\frac{1}{z^2}}}{z-1}$.

Exercice 6.2. *Appliquer le théorème des résidus pour calculer les intégrales suivants:*

$$(1)\int_{|z|=1} \coth z dz, (2)\int_{|z|=2} ze^{\frac{z}{3}} dz$$

Exercice 6.3. *Montrer que:*

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(5-3\sin\theta)^2} = \frac{5\pi}{32}, \int_0^{2\pi} \frac{\cos 3\theta}{5-4\cos\theta} d\theta = \frac{\pi}{12},$$

Exercice 6.4. *Calculer:*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+4)^2}, \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^n}, n \geq 2.$$

Exercice 6.5. *Calculer:*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2+2x+2} dx, \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+2x+2} dx$$

6.4.1 Exercices Supplémentaires

Exercice 6.6. *On considère la fonction* $f(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)}$

1. *Trouver les résidus de f(z) en tous les pôles.*

2. *Par application du théorème des résidus, calculer* $\int_C \frac{z}{(z-1)(z-2)} dz$ *où* C *désigne le cercle* $|z| = \frac{3}{2}$ *dans le sens direct.*

Exercice 6.7. *On considère la fonction* $f(z) = \frac{-z}{(z-2)(z-3)}$

1. *Trouver les résidus de f(z) en tous les pôles.*

2. *Par application du théorème des résidus, calculer* $\int_C \frac{-z}{(z-2)(z-3)} dz$ *où* C *désigne le cercle* $|z| = 4$ *dans le sens direct.*

Exercice 6.8. *On considère la fonction* $f(z) = \frac{2z}{z^2+1}$

1. *Trouver les résidus de f(z) en tous les pôles.*

2. *Par application du théorème des résidus, calculer* $\int_C \frac{2z}{z^2+1} dz$ *où* C *désigne le cercle* $|z| = 2$ *dans le sens direct.*

Exercice 6.9. *On considère la fonction* $f(z) = \frac{1}{2z^2+5iz-2}$

1. *Trouver les résidus de f(z) en tous les pôles.*

2. *Par application du théorème des résidus, calculer* $\int_C \frac{1}{2z^2+5iz-2} dz$ *où* C *désigne le cercle* $|z| = 1$ *dans le sens direct.*

CHAPTER 7

CORRIGÉ DES EXERCICES

7.1 Topologie dans le plan complexe

Corrigé 7.1. (1) $\frac{3+i}{3-2i} = \frac{(3+i)(3+2i)}{(3+2i)(3-2i)} = \frac{7}{13} + i\frac{9}{13}$

(2) $\frac{(2+i)(3+2i)}{(1-i)} = \frac{(4+7i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{-3}{2} + i\frac{11}{2}$

(3) $\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4 = \left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)^4 = \left(\cos\left(\frac{8\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{8\pi}{3}\right)\right) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

(4) $i^n = \begin{cases} (-1)^k & , \quad n = 2k. \\ (-1)^k i & , \quad n = 2k+1. \end{cases}$

$$\begin{aligned}
(1+i)^n + (1-i)^n &= \sqrt[n]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^n + \sqrt[n]{2}\left(\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right)^n. \\
&= \sqrt[n]{2}\left(\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right) + \sqrt[n]{2}\left(\cos\left(\frac{-n\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{-n\pi}{4}\right)\right). \\
&= \sqrt[n]{2}\left(2\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right) = 2^{\frac{n}{2}} 2\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) = 2^{\frac{n}{2}+1}\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)
\end{aligned}$$

Corrigé 7.2. 1.

$w = x+iy$ la racine carrée du $a = 5-12i \Longleftrightarrow w^2 = 5-12i$, On a $a = 5-12i$ alors $|a| = 13$

$$\begin{aligned}
(x+iy)^2 = 5-12i \quad &\Rightarrow \quad x^2 - y^2 + 2xyi = 5-12i \\
&\Rightarrow \quad \begin{cases} x^2 - y^2 = 5. \\ 2xy = -12. \quad \Rightarrow x = \pm 3 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases}
\end{aligned}$$

alors $w = \pm 3 \mp 2i$

2.

Soit w *la racine d'ordre* 3 *du nombre complexe* $b = 1 - i$

$$\begin{aligned} w = \sqrt[3]{1-i} &= \left\{\sqrt{2}\left(\cos(\frac{-\pi}{4}) + i\sin(\frac{-\pi}{4})\right)\right\}^{\frac{1}{3}} \\ &= \sqrt[6]{2}\left\{\left(\cos(\frac{-\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}) + i\sin(\frac{-\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3})\right)\right\}, k = 0, 1, 2. \end{aligned}$$

- *pour* $k = 0, z_0 = \sqrt[6]{2}\left\{\left(\cos(\frac{-\pi}{12}) + i\sin(\frac{-\pi}{12})\right)\right\}$

- *pour* $k = 1, z_1 = \sqrt[6]{2}\left\{\left(\cos(\frac{7\pi}{12}) + i\sin(\frac{7\pi}{12})\right)\right\}$

- *pour* $k = 2, z_2 = \sqrt[6]{2}\left\{\left(\cos(\frac{5\pi}{4}) + i\sin(\frac{5\pi}{4})\right)\right\}$

3. *La résolution de l'équation* $2iz^2 - 3z + 1 - 3i = 0$.

$$\Delta = (-3)^2 - 4(2i)(1-3i) = -15 - 8i$$

Les racines de Δ *sont* $\delta_{1,2} = x + iy$ *telle que*

$$\begin{aligned} (x+iy)^2 = -15 - 8i &\Rightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = -15 - 8i \\ &\Rightarrow \left\{\begin{array}{c} x^2 - y^2 = -15. \\ 2xy = -8. \\ x^2 + y^2 = |\Delta| = 17 \end{array}\right. \quad \Rightarrow x = \pm 1, y = \mp 4, \delta_{1,2} = \pm 1 \mp 4 \end{aligned}$$

Les racines de $2iz^2 - 3z + 1 - 3i = 0$ *sont:*

$$z_1 = 1 - \frac{1}{2}i, z_2 = -1 - i$$

Corrigé 7.3. *Soit* $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$

$$\begin{aligned}
\overline{z_1 + z_2} &= \overline{(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2)} \\
&= \overline{(x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)} \\
&= (x_1 + x_2) - i(y_1 + y_2) \\
&= (x_1 - iy_1) + (x_2 - iy_2) \\
&= \overline{z_1} + \overline{z_2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{z_1 z_2} &= \overline{(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)} \\
&= \overline{(x_1x_2) + i(y_2x_1) + i(y_1x_2) - (y_1y_2)} \\
&= \overline{(x_1x_2 - y_1y_2) + i(y_2x_1 + y_1x_2)} \\
&= (x_1x_2 - y_1y_2) - i(y_2x_1 + y_1x_2) \\
&= (x_1 - iy_1)(x_2 - iy_2) \\
&= \overline{z_1} \times \overline{z_2}
\end{aligned}$$

2. $$\begin{cases} |z_1| = |z_1 - z_2 + z_2| \\ |z_2| = |z_2 - z_1 + z_1| \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |z_1| \leq |z_1 - z_2| + |z_2| \\ |z_2| \leq |z_2 - z_1| + |z_1| \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2| \cdots\cdots (1) \\ |z_2| - |z_1| \leq |z_2 - z_1| \cdots\cdots (2) \end{cases}$$

de (1) *et* (2), *on trouve*

$$-(|z_1 - z_2|) \leq |z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2|$$

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|$$

$$\begin{aligned}
3.\ |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 &= 2\left(|z_1|^2 + |z_2|^2\right) \\
&= (z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)} + (z_1 - z_2)\overline{(z_1 - z_2)} \\
&= (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) + (z_1 - z_2)(\overline{z_1} - \overline{z_2}) \\
&= 2z_1\overline{z_1} + 2z_2\overline{z_2} \\
&= 2\left(|z_1|^2 + |z_2|^2\right)
\end{aligned}$$

4.Soit $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ *alors* $|z|^n = r^n \cdots\cdots (1)$

D'autre part $z^n = r^n(\cos\theta + i\sin\theta)^n$ *alors* $|z^n| = r^n \cdots\cdots (2)$

D'aprés (1) *et* (2)*, alors* $|z|^n = |z^n|, \forall n \in \mathbb{N}$

Corrigé 7.4. *Soit $P(z)$ un polynôme d'ordre n à ceofficients réels;*

$$\begin{aligned}
P(z) &= a_0 + a_1 z_1 + \cdots + a_{n-1}z^{n-1} + a_n z^n, a_n \neq 0, (a_i)_{i=0}^{n} \in \mathbb{R} \\
\overline{P(z)} &= \overline{a_0 + a_1 z_1 + \cdots + a_{n-1}z^{n-1} + a_n z^n}, \\
&= a_0 + a_1 \overline{z_1} + \cdots + a_{n-1}\overline{z^{n-1}} + a_n \overline{z^n} \\
&= P(\overline{z})
\end{aligned}$$

on va montrer que si $P(z) = 0$ équivalant que $P(\overline{z}) = 0$.

$$P(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i = 0 \Longleftrightarrow a_i = 0, \forall i = 0, \cdots, n. \cdots\cdots (1)$$

$$P(\overline{z}) = \sum_{i=0}^{n} a_i \overline{z}^i = 0 \Longleftrightarrow a_i = 0, \forall i = 0, \cdots, n. \cdots\cdots (2)$$

d'oú $P(z) = 0 \Longleftrightarrow P(\overline{z}) = 0$

- *On déduit que si z est une racine de $P(z)$ alors $\overline{z}$ l'est aussi, par conséquent si $P(z)$ est un polynôme à coefficients réels alors ces racines sont conjuguées deux a deux*

Corrigé 7.5.

$$E_1 = \{z \in \mathbb{C}, |z - i| \leq 1\}$$

On suppose que: $z = x + iy$

$$\begin{aligned}
|x + iy - i| \leq 1 &\Longleftrightarrow \sqrt{x^2 + (y-1)^2} \leq 1. \\
&\Longleftrightarrow x^2 + (y-1)^2 \leq 1.
\end{aligned}$$

L'ensemble E_1 est une Boule fermée de centre $(0,1)$ et de rayon 1 $B((0,1),1)$.

$$E_2 = \left\{z \in \mathbb{C}, \left|\frac{z-1}{z+1}\right| = 1\right\}$$

$$\begin{aligned}\left|\frac{z-1}{z+1}\right| = 1 &\iff |z-1| = |z+1|.\\ &\iff \sqrt{(x-1)^2+y^2} = \sqrt{(x+1)^2+y^2}.\\ &\iff (x-1)^2+y^2 = (x+1)^2+y^2.\\ &\iff x = 0.\end{aligned}$$

L'ensemble E_2 est une équation de la droite $(yy^{'})$.

$$E_3 = \{z \in \mathbb{C}, |z-2| \succ |z-3|\}$$

$$\begin{aligned}|z-2| \succ |z-3| &\iff \sqrt{(x-2)^2+y^2} = \sqrt{(x-3)^2+y^2}.\\ &\iff (x-2)^2+y^2 = (x-3)^2+y^2.\\ &\iff 2x-5 \succ 0.\\ &\iff x \succ \frac{5}{2}.\end{aligned}$$

L'ensemble E_3 c'est le demi plan ouvert délimité par la droite $x = \frac{5}{2}$.

$$E_4 = \{z \in \mathbb{C}, \Im(z) \succ 0, |z| \prec 1\}$$

$|z| \prec 1,$ *et* $\Im(z) \succ 0 \iff \sqrt{x^2+y^2} \prec 1$ *et* $y \succ 0$

L'ensemble E_4 c'est le demi disque (boule) ouvert superieur.

$$E_5 = \left\{z \in \mathbb{C}, \frac{1}{z} = \overline{z}\right\}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{z} = \overline{z} &\iff z\overline{z} = 1.\\ &\iff |z|^2 = 1.\\ &\iff (x-0)^2+(y-0)^2 = 1.\end{aligned}$$

L'ensemble E_5 c'est le Cercle de centre $(0,0)$ et de rayon 1.

$$E_6 = \left\{z \in \mathbb{C}, |z|^2 = \Im z\right\}$$

$$\begin{aligned}
|z|^2 = \Im z &\iff |x+iy|^2 = y. \\
&\iff x^2 + y^2 - y = 0. \\
&\iff (x-0)^2 + (y - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} = 0. \\
&\iff (x-0)^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

L'ensemble E_6 c'est le Cercle de centre $(0, \frac{1}{2})$ et de rayon $\frac{1}{2}$.

7.2 Fonction de la variable complexe

Corrigé 7.6. 1.$f(z) = x^2 - y^2 + x + 1 + i(2xy + y)$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= 2x + 1 = \frac{\partial v}{\partial y}. \\
\frac{\partial u}{\partial y} &= -2y = -\frac{\partial v}{\partial x}
\end{aligned}$$

La fonction est donc bien holomorphe, sa dérivée est

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = 2x + 1 + 2iy$$

2.$f(z) = 2x^2 + 2y^2 - x + i(2xy - y)$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= 4x - 1 = \frac{\partial v}{\partial y}. \\
\frac{\partial u}{\partial y} &= 4y \neq -\frac{\partial v}{\partial x}
\end{aligned}$$

La fonction n'est donc pas holomorphe.

3.$f(z) = z^2 + z + \ln z(\Re z \succ 0)$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0 + 0 + 0 = 0$$

La fonction est donc holomorphe sauf en $z = 0$, sa dérivée est

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial z} = 2z + 1 + \frac{1}{z}$$

4.$f(z) = z^2 + \overline{z} + \cos z$

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 1 \neq 0$$

La fonction n'est donc pas holomorphe

Corrigé 7.7. 1.$u_1(x,y) = 3x + 1$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} &\Rightarrow 3 = \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow v = \int 3dy = 3y + A(x).\\
\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} &\Rightarrow 0 = \frac{-\partial A}{\partial x} \Rightarrow A(x) = \int 0dx = C^{te}\\
&\Rightarrow f(x,y) = u + iv = 3x + 1 + i3y + C^{te}
\end{aligned}$$

2.$u_2(x,y) = x^2 - y^2 + 2x + 1$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} &\Rightarrow 2x + 2 = \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow v = \int (2x+2)dy = 2xy + 2y + A(x).\\
\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} &\Rightarrow -2y = -2y - \frac{\partial A}{\partial x} \Rightarrow A(x) = \int 0dx = C^{te}\\
&\Rightarrow f(x,y) = u + iv = x^2 - y^2 + 2x + 1 + i2(xy + y) + C^{te}
\end{aligned}$$

3.$u_3(x,y) = -2xy$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} &\Rightarrow -2y = \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow v = \int -2ydy = -y^2 + A(x).\\
\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} &\Rightarrow -2x = -\frac{\partial A}{\partial x} \Rightarrow A(x) = \int 2xdx = x^2 + C^{te}\\
&\Rightarrow f(x,y) = u + iv = -2x + i(x^2 - y^2) + C^{te}
\end{aligned}$$

4.$v_1(x,y) = e^x \sin y$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} &\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y \Rightarrow u = \int e^x \cos y dx = e^x \cos y + A(y).\\
\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} &\Rightarrow -e^x siny + \frac{\partial A}{\partial y} = -e^x \sin y \Rightarrow A(y) = \int 0dy = C^{te}\\
&\Rightarrow f(x,y) = e^x \cos y + ie^x \sin y + C^{te} = e^x(\cos y + i \sin y) + C^{te}\\
&\Rightarrow f(z) = e^z + C^{te}
\end{aligned}$$

$5.v_2(x,y) = 2x + 2xy$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} &\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 2x \Rightarrow u = \int 2xdx = x^2 + A(y). \\
\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} &\Rightarrow \frac{\partial A}{\partial y} = -2 - 2y \Rightarrow A(y) = \int (-2-2y)dy = -2y - y^2 + C^{te} \\
&\Rightarrow f(x,y) = x^2 - y^2 - 2y + i2x + i2xy + C^{te} \\
&\Rightarrow f(z) = z^2 + 2iz + C^{te}
\end{aligned}$$

$6.v_3(x,y) = x^2 - y^2$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} &\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = -2y \Rightarrow u = \int 2ydx = -2xy + A(y). \\
\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} &\Rightarrow -2x + \frac{\partial A}{\partial y} = -2x \Rightarrow A(y) = \int 0dy = C^{te} \\
&\Rightarrow f(x,y) = -2xy + i(x^2 - y^2) + C^{te} \\
&\Rightarrow f(z) = i(z^2) + C^{te}
\end{aligned}$$

Corrigé 7.8. *posons $\lambda = a + ib$ et utilisant les équations de Cauchy -Reiman pour trouver a et b.*

$1.f(z) = x + i\lambda y$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} & = & \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & = & -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a & = & 1 \\ -b & = & 0 \end{cases} \Longrightarrow (a = 1, b = 0) \Longrightarrow \lambda = 0$$

$2.f(z) = x^2 - y^2 + \lambda x + i(\lambda y + 2xy)$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} & = & \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & = & -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2x + a & = & a + 2x \\ -2y - b & = & -b - 2y \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ *(a et b quelconque): Les λ sont tous les points du plan complexe.*

$3.f(z) = Re(\lambda)Re(z) + i[Im(\lambda) + 1]Im(z)$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} & = & \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & = & -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a & = & b + 1 \\ 0 & = & 0 \end{cases}$$

$\Longrightarrow (b = a - 1)$ *Les λ sont les points d'une droite.*

Corrigé 7.9. $1.u(x,y) = xy$

$$\left\{\begin{array}{lll} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) & = & y \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) & = & 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{lll} \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) & = & x \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) & = & 0 \end{array}\right.$$

Donc

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 0$$

d'où, u est harmonique.

$2.u(x,y) = x^2 - y^2 + xy$

$$\left\{\begin{array}{lll} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) & = & 2x+y \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) & = & 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{lll} \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) & = & -2y+x \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) & = & -2 \end{array}\right.$$

Donc

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 0$$

d'où, u est harmonique.

$3.u(x,y) = e^x x \cos y - e^x y \sin y$

$$\left\{\begin{array}{lll} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) & = & e^x \cos y(x+1) - ye^x \sin y \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) & = & e^x(-y\sin y + 2\cos y + x\cos y) \end{array}\right.$$

$\Longrightarrow$

$$\left\{\begin{array}{lll} \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) & = & -xe^x \sin y - e^x(\sin y + y\cos y) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) & = & -e^x(-y\sin y + 2\cos y + x\cos y) \end{array}\right.$$

Donc

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 0$$

d'où, u est harmonique.

7.3 Fonctions élémentaires

Corrigé 7.10. *Soit* $z = x + iy$, *on a* $\sin z = \sin(x + iy)$

$$\begin{aligned}
\sin(x+iy) &= \sin(x)\cos(iy) + \cos(x)\sin(iy) \\
&= \sin(x)\cos(\frac{e^{-y}+e^{y}}{2}) + \cos(x)\sin(\frac{e^{-y}-e^{y}}{2i}) \\
&= \sin(x)\cosh(y) + \frac{-1}{i}\cos(x)\sinh(y) \\
&= \sin(x)\cosh(y) + i\cos(x)\sinh(y)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos(x+iy) &= \cos(x)\cos(iy) - \sin(x)\sin(iy) \\
&= \cos(x)\cos(\frac{e^{-y}+e^{y}}{2}) - \sin(x)\sin(\frac{e^{-y}-e^{y}}{2i}) \\
&= \cos(x)\cosh(y) - \frac{-1}{i}\sin(x)\sinh(y) \\
&= \cos(x)\cosh(y) - i\sin(x)\sinh(y)
\end{aligned}$$

$$\sin z \in \mathbb{R} \Rightarrow \cos x \sinh y = 0 \Rightarrow \cos x = 0 \ \vee \quad \sinh y = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \ \vee \quad y = 0$$

$$\cos z \in \mathbb{R} \Rightarrow \sin x \sinh y = 0 \Rightarrow \sin x = 0 \ \vee \quad \sinh y = 0 \Rightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \ \vee \quad y = 0$$

Corrigé 7.11. 1.*Soient* $z = x + iy$ *et* $\overline{z} = x - iy$, *alors l'équation* $2z + i\overline{z} = 3$ *devient*

$$2x + 2iy + ix + y = 3$$

$$\Rightarrow 2x + y + i(2y + x) = 3$$

Par identification, on a

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x+y &=& 3, \\ 2y+x &=& 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2, \\ y &=& -1. \end{array}\right.$$

Corrigé 7.12. *1.La résolution de l'équation se ramène au calcul de la racine quatrième du nomre complexe* i. *Les racines sont données, pour* $k = 0, 1, 2, 3$ *par*

$$w_k = \sqrt[4]{1}\left[\cos(\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{4}) + i\sin(\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{4})\right]$$

par conséquent

$$\begin{aligned}
w_0 &= \left[\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right],\\
w_1 &= \left[\cos\left(\frac{5\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{8}\right)\right],\\
w_2 &= \left[\cos\left(\frac{9\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{9\pi}{8}\right)\right],\\
w_3 &= \left[\cos\left(\frac{13\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{13\pi}{8}\right)\right],
\end{aligned}$$

2.L'équation est équivalente à

$$i(e^{iz})^2 - e^{iz} - i = 0, \quad z \in \mathbb{C}$$

On pose $X = e^{iz}$ *et on obtient*

$$iX^2 - X - i = 0, X \in \mathbb{C}$$

On calcule le discriminent $\Delta = 1 - 4i(-i) = -3 = 3i^2$. *Les solutions sont données par*

$$X_1 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2i}, X_2 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2i}$$

Une réécriture conduit à

$$X_1 = \frac{-i - \sqrt{3}}{2}, X_2 = \frac{-i + \sqrt{3}}{2i}$$

La résolution en terme de la variable z *donne*

$$z_1 = \frac{1}{i}\ln\left(\frac{-i - \sqrt{3}}{2}\right), z_2 = \frac{1}{i}\ln\left(\frac{-i + \sqrt{3}}{2}\right)$$

Corrigé 7.13. 1.*On a l'équation suivante,*

$$e^z = 1 + i$$

$$\begin{aligned}
e^z = 1 + i \quad &\Rightarrow \log e^z = \log 1 + i,\\
&\Rightarrow \quad z = \ln|1 + i| + i\left(\arg(1 + i) + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z},\\
&\Rightarrow \quad z = \ln\sqrt{2} + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z},
\end{aligned}$$

2.*On a l'équation suivante,*

$$\cos z = 3 + 2e^i$$

Nous avons

$$\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = 3+2e^{iz} \Rightarrow e^{iz}+e^{-iz} = 6+4e^{iz} \Rightarrow 3e^{2iz}+6e^{iz}-1=0$$

On pose $X = e^{iz}$ *alors on a*

$$X^2+6X-1=0$$

Les solutions de cette l'équation sont

$$X_1 = -3+\sqrt{6}, X_2 = -3+\sqrt{6}$$

Ainsi

$$e^{iz_1} = -3+\sqrt{6}, e^{iz_2} = -3+\sqrt{6}$$

$\Rightarrow$

$$iz_1 = \log -3+\sqrt{6}, iz_2 = \log -3+\sqrt{6}$$

$\Rightarrow$

$$z_1 = \frac{1}{i}(\ln\left|-3+\sqrt{6}\right| + i\pi + 2k\pi), z_2 = \frac{1}{i}(\ln\left|3+\sqrt{6}\right| + i\pi + 2k^{'}\pi), k, k^{'} \in \mathbb{Z}$$

Corrigé 7.14. *Par définition, nous avons*

$$2\cos(z) - e^{-iz} = 1+2i \Rightarrow 2\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} - e^{-iz} = 1+2i$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned} e^{iz} = 1+2i &\Rightarrow iz = \log(1+2i), \\ &\Rightarrow z = \frac{1}{i}\log(1+2i) = \frac{1}{i}(\ln\sqrt{2} + i\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)), k \in \mathbb{Z}, \\ &\Rightarrow z = -i\ln(\sqrt{5}) + \arctan(2) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

7.4 Le Calcul intégral

Corrigé 7.15. 1.*Soit*

$$\begin{aligned} \gamma : [0, 2\pi] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\longrightarrow \gamma(t) = Re^{it} \end{aligned}$$

Supposons que

$$\gamma(t) = x + iy = Re^{it} = R(\cos t + i \sin t)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x &= R\cos t \\ y &= R\sin t \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x^2 &= R^2\cos^2 t \\ y^2 &= R^2\sin^2 t \end{cases}$$

Ce qui implique

$$x^2 + y^2 = R^2(\cos^2 t + \sin^2 t) = R^2$$

Alors $\gamma(t)$ *le parametrage d'un cercle de centre* $(0,0)$ *et de rayon* R. 2.*Soit*

$$\begin{aligned} \gamma : [0,1] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\longrightarrow \gamma(t) = Re^{it} \end{aligned}$$

Supposons que

$$\gamma(t) = x + iy = t + it^2, t \geq 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x &= t \\ y &= t^2 \end{cases}$$

Ce qui implique

$$y = x^2, x \geq 0$$

Alors $\gamma(t)$ *est un parabole.*

3.*Soit*

$$\begin{aligned} \gamma : [0,1] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\longrightarrow \gamma(t) = Re^{it} \end{aligned}$$

Supposons que

$$\gamma(t) = x + iy = t + i\frac{1}{t}, t \geq 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x &= t \\ y &= \frac{1}{t} \end{cases}$$

Ce qui implique

$$y = \frac{1}{x}, x \geq 1$$

Corrigé 7.16. 1.*Soit* γ_1 *le segment* $[A, B]$, $A(0,-1), B(0,1)$

$$\begin{array}{rcl} \gamma_1 : [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longrightarrow & \gamma_1(t) = (1-t)A + tB = i(2t-1) \end{array}$$

calculons l'intégrale $\int_{\gamma_1} |z|\,dz$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1} |z|\,dz &= \int_0^1 2i\,|2t-1|\,dt, \\ &= 2i\int_0^1 |2t-1|\,dt, \\ &= 2i\left(\int_0^{\frac{1}{2}} (1-2t)\,dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 (2t-1)\,dt\right), \\ &= 2i\left(\left[t-t^2\right]_0^{\frac{1}{2}} + \left[t^2-t\right]_{\frac{1}{2}}^1\right) \\ &= 2i(\frac{1}{2}) = i \end{aligned}$$

2.*Soit* γ_2 *est le demi cercle,*$|z| = 1, \Re(z) \geq 0$ *reliant le point* $(0,-1)$ *au point* $(0,1)$

$$\begin{array}{rcl} \gamma_2 : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longrightarrow & \gamma_2(t) = Re^{it} = e^{it} \end{array}$$

calculons l'intégrale $\int_{\gamma_2} |z|\,dz$

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_2} |z|\, dz &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\gamma_2(t)|\, \gamma_2^{'} dt, \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} ie^{it} \left|e^{it}\right| dt, \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} ie^{it} = \left[e^{it}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}, \\
&= e^{i\frac{\pi}{2}} - e^{-i\frac{\pi}{2}} = 2i
\end{aligned}$$

Corrigé 7.17. *Soit* γ *est le segment reliant le point* $(0,0)$ *au point* $(0,1)$

$$\begin{aligned}
\gamma : [0,1] &\longrightarrow \mathbb{C} \\
t &\longrightarrow \gamma(t) = (1-t)O + tA = it
\end{aligned}$$

calculons l'intégrale $\int_\gamma z \sin z dz$

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma} |z|\, dz &= \int_0^1 f(\gamma(t))\gamma^{'} dt, \\
&= \int_0^1 i\left(it \sin(it)\right) dt = -\int_0^1 \left(t \sin(it)\right) dt, \\
&= -\left(\frac{-t}{i}\left[\cos(it)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{-1}{i}\cos(it) dt\right), \\
&= \left[\frac{t}{i}\cos(it) - \sin(it)\right]_0^1, \\
&= \left[\frac{1}{i}\left(t\cos(it) - i\sin(it)\right)\right]_0^1, \\
&= \frac{1}{i}\left(\cos(i) - i\sin(i)\right) = \frac{1}{i}\left(\cos(-i) + i\sin(-i)\right), \\
&= \frac{1}{i} e^{i(-i)} = \frac{1}{i} e^{1}
\end{aligned}$$

Corrigé 7.18. 1.*Soit* $\gamma_1 : |z+i| = 3$ *est le cercle de centre* $(0,-1)$ *et de rayon* 3*, La fonction* $f(z) = \sin z$ *est holomorphe sur* $\mathbb{C}$*, alors elle est holomorphe sur* γ_1 *et à l'interieur de* γ_1*,*

$z_0 = -i$ est à l'interieur de γ_1, alors d'aprés la formule d'intégrale de cauchy:

$$\begin{aligned} I_1 = \int_{\gamma_1} \frac{\sin z}{z+i} dz &= f(z_0) 2\pi i, \\ &= \sin(-i) 2\pi i, \\ &= \sinh(1) 2\pi, \end{aligned}$$

2.*Soit $\gamma_2 : |z| = 2$ est le cercle de centre $(0,0)$ et de rayon 2, on a*

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{z^2-i^2} = \frac{1}{(z-i)(z+i)} = \frac{1}{2}\left(\frac{i}{z-i} - \frac{i}{z+i}\right)$$

$f(z) = i$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$, alors elle est holomorphe sur γ_2 et à l'interieur de γ_2, $z_0 = i$ et $z_0 = -i$ sont à l'interieur de γ_2, alors d'aprés la formule d'intégrale de cauchy:

$$\begin{aligned} I_2 = \int_{\gamma_2} \frac{1}{z^2+1} dz &= \frac{1}{2}\left(\int_{\gamma_2} \frac{i}{z-i} dz - \int_{\gamma_2} \frac{i}{z+i} dz\right), \\ &= \frac{1}{2}\left[2\pi i f(i) - 2\pi i f(i)\right], \\ &= \frac{1}{2}\left[2\pi i(i) - 2\pi i(i)\right] = \frac{1}{2}(2\pi - 2\pi) = 0 \end{aligned}$$

3.*Soit $\gamma_3 : |z+1| = 1$ est le cercle de centre $(-1,0)$ et de rayon 1, on a $f(z) = \frac{1}{(z-1)^3}$ est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, alors elle est holomorphe sur γ_3 et à l'interieur de γ_3, $z_0 = -1$ est à l'interieur de γ_3, alors d'aprés la formule d'intégrale de cauchy:*

$$\begin{aligned} I_3 = \int_{\gamma_3} \frac{\frac{1}{(z-1)^3}}{(z+1)} dz &= f(-1) 2\pi i, \\ &= \frac{-1}{8} 2\pi i = \frac{-1}{4} i\pi, \end{aligned}$$

4.*Soit $\gamma_4 : |z-i| = 1$ est le cercle de centre $(0,1)$ et de rayon 1, on a $f(z) = \cos z$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$, alors elle est holomorphe sur γ_4 et à l'interieur de γ_4, $z_0 = i$ est à l'interieur de γ_4, alors d'aprés la formule d'intégrale de cauchy pour les dérivées:*

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\gamma_4} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$$

pour $n = 1$, on obtient

$$f^{(1)}(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_4} \frac{\cos z}{(z-i)^2} dz$$

ce qui implique

$$\begin{aligned} I_4 = \oint_{\gamma_4} \frac{\cos z}{(z-i)^2} dz &= \frac{2\pi i}{1} f^{(1)}(i), \\ &= 2\pi i \sin(i), \\ &= 2\pi \sinh(1) \end{aligned}$$

7.5 Développement en série Taylor et en série de Laurent

Corrigé 7.19. *1.Soit la série $\sum_{n\geq 0} n^\alpha z^n, \alpha \in \mathbb{R}$ on a $a_n = n^\alpha$*

$$\left|\frac{(n+1)^\alpha}{(n)^\alpha}\right| = \left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha \Rightarrow \lim_{n\longrightarrow+\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha = 1$$

ce qui implique $R = 1$.

2.Soit la série $\sum_{n\geq 1} n! \left(\frac{z}{n}\right)^n$, on a $a_n = \frac{n!}{n^n}$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{n!}\right| = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{1}{e}$$

ce qui implique $R = e$.

3.Soit la série $\sum_{n\geq 1} a_n x^n$, on a $a_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$

$$0 \leq x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -x \leq 0 \Rightarrow e^{-1} \leq e^{-x} \leq 1 \Rightarrow x^n e^{-1} \leq x^n e^{-x} \leq x^n$$

$$\int_0^1 x^n e^{-1} dx \leq \int_0^1 x^n e^{-x} dx \leq \int_0^1 x^n dx$$

$$\frac{e^{-1}}{n+1} \leq \int_0^1 x^n e^{-x} dx \leq \frac{1}{n+1}$$

$$\sqrt[n]{\frac{e^{-1}}{n+1}} \leq \sqrt[n]{|a_n|} \leq \sqrt[n]{\frac{1}{n+1}}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{e^{-1}}{n+1}} \leq \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n+1}}$$

$$1 \leq \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq 1$$

ce qui implique $R = 1$.

Corrigé 7.20. *1.Soit la fonction* $f_1(z) = \frac{1}{z^4 - z^2} = \frac{1}{z^2(z^2-1)}$ *les points singuliers isolés sont:*$z_0 = 0, z_1 = 1, z_2 = -1$.

pour $z_0 = 0$,

$$\lim_{z_0 \to 0} (z-0)^2 f(z) = \lim_{z_0 \to 0} \frac{z^2}{z^2(z^2-1)} = -1 \neq 0.$$

$$\lim_{z_0 \to 0} (z-0)^3 f(z) = \lim_{z_0 \to 0} \frac{z^3}{z^2(z^2-1)} = 0.$$

ce qui implique que $z_0 = 0$ *est un pôle double pour* $z_1 = 1$,

$$\lim_{z_1 \to 1} (z-1) f(z) = \lim_{z_1 \to 1} \frac{(z-1)}{z^2(z-1)(z+1)} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

$$\lim_{z_1 \to 1} (z-1)^2 f(z) = \lim_{z_1 \to 1} \frac{(z-1)^2}{z^2(z-1)(z+1)} = \lim_{z_1 \to 1} \frac{(z-1)}{z^2(z+1)} = 0.$$

ce qui implique que $z_1 = 1$ *est un pôle simple. pour* $z_2 = -1$,

$$\lim_{z_2 \to -1} (z+1) f(z) = \lim_{z_2 \to -1} \frac{(z+1)}{z^2(z-1)(z+1)} = \frac{-1}{2} \neq 0.$$

$$\lim_{z_2 \to -1} (z+1)^2 f(z) = \lim_{z_2 \to -1} \frac{(z+1)^2}{z^2(z-1)(z+1)} = \lim_{z_2 \to -1} \frac{z+1}{z^2(z-1)} = 0.$$

ce qui implique que $z_2 = -1$ *est un pôle simple.*

2.Soit la fonction $f_2(z) = \coth z$ *les points singuliers isolés sont:*$z_k = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

$$\lim_{z \to z_k} (z - z_k) f(z) = \lim_{z \to k\pi} (z - k\pi) \frac{\cos z}{\sin z}.$$

Supposons que $w = z - k\pi \Rightarrow w \to 0$ *quand* $z \longrightarrow k\pi$

$$\begin{aligned}
\lim_{z \to z_k} (z - z_k) f(z) &= \lim_{w \to 0} w \frac{\cos(w + k\pi)}{\sin(w + k\pi)}, \\
&= \lim_{w \to 0} w \frac{(-1)^k \cos(w)}{(-1)^k \sin(w)}, \\
&= \lim_{w \to 0} \frac{\cos(w)}{\frac{\sin(w)}{w}} = 1 \neq 0
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\lim_{z\to z_k}(z-z_k)^2f(z) &= \lim_{w\to 0} w^2\frac{\cos(w+k\pi)}{\sin(w+k\pi)},\\ &= \lim_{w\to 0} w^2\frac{(-1)^k\cos(w)}{(-1)^k\sin(w)},\\ &= \lim_{w\to 0} w\frac{\cos(w)}{\frac{\sin(w)}{w}}=0\end{aligned}$$

ce qui implique que $z_k = k\pi$ sont des pôles simples, et $Res(f, k\pi) = 1$.

3.Soit la fonction $f_3(z) = \frac{e^{\frac{1}{z^2}}}{z-1}$ les points singuliers isolés sont:$z_0 = 0, z_1 = 1$.

pour $z_1 = 1$,

$$\lim_{z_1\to 1}(z-1)f(z) = \lim_{z_1\to 1}(z-1)\frac{e^{\frac{1}{z^2}}}{z-1} = e \neq 0.$$

$$\lim_{z_1\to 1}(z-1)^2f(z) = \lim_{z_1\to 1}(z-1)^2\frac{e^{\frac{1}{z^2}}}{z-1} = 0.$$

ce qui implique que $z_1 = 1$ est un pôle simple.

pour $z_0 = 0$, on a $f_3(z) = \frac{e^{\frac{1}{z^2}}}{z-1}, |z| \prec 1$

$$\begin{aligned}f_3(z) = \frac{e^{\frac{1}{z^2}}}{z-1} &= \left(\sum_{n\geq 0}\frac{\left(\frac{1}{z^2}\right)^n}{n!}\right)\left(-\sum_{n\geq 0} z^n\right),\\ &= \left(1+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{2!z^4}+\cdots\right)\left(-1-z-z^2+\cdots\right),\\ &= \left(-1-z-z^2+\cdots\right)+\frac{1}{z^2}\left(-1-z-z^2+\cdots\right)+\frac{1}{2!z^4}\left(-1-z-z^2+\cdots\right)+\cdots\end{aligned}$$

$b_n \neq 0$ et la partie principale est infinie ceci implique que $z_0 = 0$ est un point singulier essentiel.

Corrigé 7.21. *Soit la fonction $f(z) = \frac{1}{z(z-3)}$, Si $|z| \prec 3$, on a*

$$f(z) = \frac{1}{z}\frac{1}{z-3} = \frac{1}{3z}\frac{1}{\frac{z}{3}-1} = \frac{-1}{3z}\frac{1}{1-\frac{z}{3}} = \frac{-1}{3z}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z}{3}\right)^n.$$

Si $|z| \succ 3$, on a

$$f(z) = \frac{1}{z}\frac{1}{z-3} = \frac{1}{z^2}\frac{1}{1-\frac{3}{z}} = \frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{3}{z}\right)^n.$$

Corrigé 7.22. *1.La fonction*

$$f(z) = \frac{z}{(z-1)(z+2)} = \frac{a}{z-1}+\frac{b}{z+2} = \frac{az+2a+bz-b}{(z-1)(z+2)} = \frac{(a+b)z+2a-b}{(z-1)(z+2)}$$

Ainsi,

$$\begin{cases} a+b &= 1, \\ 2a-b &= 0, \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a &= \frac{1}{3}. \\ b &= \frac{2}{3}. \end{cases}$$

ceci implique que

$$f(z) = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{z-1} + \frac{2}{z+2}\right].$$

2.Le développement de la fonction f(z) en série de Laurent autour de 0 *se fait comme suit :*

- *Si* $|z| \prec 1$, *nous avons*

$$f(z) = \frac{1}{3}\left[-\frac{1}{1-z} + \frac{1}{2}\frac{2}{\frac{z}{2}+1}\right] = \frac{1}{3}\left[-\sum_{n=0}^{+\infty} z^n + \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{z}{2}\right)^n\right]$$

- *Si* $1 \prec |z| \prec 2$, *nous avons*

$$f(z) = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} + \frac{1}{2}\frac{2}{1+\frac{z}{2}}\right] = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n + \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{z}{2}\right)^n\right]$$

- *Si* $2 \prec |z| \prec +\infty$, *nous avons*

$$f(z) = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} + \frac{2}{z}\frac{1}{1+\frac{2}{z}}\right] = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n + \frac{2}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{2}{z}\right)^n\right].$$

Corrigé 7.23. *Soit la fonction* $f(z) = \frac{-1}{i}\frac{1}{z^2-\frac{5}{2}z+1}$, *les singularités de f satisfont* $z^2 - \frac{5}{2}z + 1 = 0$. *Aprés calcul, nous trouvons deux singularités* $z_0 = \frac{1}{2}$ *et* $z_1 = 2$ *on a*

$$f(z) = \frac{-1}{i}\frac{1}{z^2-\frac{5}{2}z+1} = \frac{-1}{i}\frac{1}{(z-\frac{1}{2})(z-2)}$$

En effet pour $z_0 = \frac{1}{2}$ *on a*

$$f(z) = \frac{\frac{-1}{i}\frac{1}{(z-2)}}{(z-\frac{1}{2})}$$

Soit $\Phi(z) = \frac{-1}{i}\frac{1}{(z-2)}$. *Nous avons* $\Phi(\frac{1}{2}) \neq 0$. *Ainsi,* z_0 *est un pôle simple (d'ordre* 1*).*

pour $z_1 = 2$ *on a*

$$f(z) = \frac{\frac{-1}{i}\frac{1}{(z-\frac{1}{2})}}{(z-2)}$$

Soit $\Phi(z) = \frac{-1}{i}\frac{1}{(z-\frac{1}{2})}$. *Nous avons* $\Phi(2) \neq 0$. *Ainsi,* z_1 *est un pôle simple (d'ordre* 1*).*

7.6 Théorème des résidus et ses applications

Corrigé 7.24. *1ère méthode:*

Calcul des résidus: $f(z) = \frac{1}{z^2(z^2-1)}$

- *pour* $z_0 = 0$ *est un pôle double (N=2).*

$$\begin{aligned}
Res(f, z_0) &= \frac{1}{(N-1)!} \lim_{z \to z_0} \Big((z - z_0)^N f(z) \Big)^{(N-1)}, \\
Res(f, 0) &= \frac{1}{1!} \lim_{z \to 0} \left((z)^2 \frac{1}{z^2(z^2-1)} \right)', \\
&= \lim_{z \to 0} \frac{-2z}{(z^2-1)^2} = 0
\end{aligned}$$

- *pour* $z_0 = 1$ *est un pôle simple (N=1).*

$$Res(f, 1) = \frac{1}{0!} \lim_{z \to 1} \left((z-1) \frac{1}{z^2(z-1)(z+1)} \right)^{(0)} = \lim_{z \to 1} \frac{1}{z^2(z+1)} = \frac{1}{2}$$

- *pour* $z_0 = -1$ *est un pôle simple (N=1).*

$$Res(f, -1) = \frac{1}{0!} \lim_{z \to -1} \left((z+1) \frac{1}{z^2(z-1)(z+1)} \right)^{(0)} = \lim_{z \to -1} \frac{1}{z^2(z-1)} = \frac{-1}{2}$$

2ème méthode:

1. *Le développement de Laurent de* f *au voisinage de* $z_0 = 0$

$$\begin{aligned}
f(z) = \frac{1}{z^2(z^2-1)} &= -\frac{1}{z^2} \frac{1}{1 - z^2}, \\
&= -\frac{1}{z^2} \sum_{n \geq 0} (z^2)^n, |z| \prec 1, \\
&= -\frac{1}{z^2} \left(1 + z^2 + z^4 + z^6 + \cdots \right), \\
&= \frac{-1}{z^2} - 1 - z^2 - z^4 - z^6 + \cdots .
\end{aligned}$$

$z_0 = 0$ *est un pôle double,* $Res(f, 0) = b_1 = 0$

2. *Le développement de Laurent de f au voisinage de $z_1 = 1$*

$$\begin{aligned} f(z) = \frac{1}{z^2(z^2-1)} &= \frac{A}{z} + \frac{B}{z^2} + \frac{C}{z-1} + \frac{D}{z+1}, \\ &= \frac{-1}{z^2} + \frac{1}{2(z-1)} - \frac{1}{2(z+1)}, \end{aligned}$$

Développons la fonction $\frac{1}{z+1}$ en série de Laurent au voisinage de 0.

$$\begin{aligned} \frac{1}{z+1} &= \frac{1}{2+z-1} = \frac{1}{2(1+\frac{z-1}{2})}, \\ &= \frac{1}{2(1-\frac{1-z}{2})} = \frac{1}{2}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{1-z}{2}\right)^n, \left|\frac{1-z}{2}\right| \prec 1 \\ &= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1-z}{2} + \frac{(1-z)^2}{4} + \cdots\right), \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1-z}{4} + \frac{(1-z)^2}{8} + \cdots\right), \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{z-1}{4} + \frac{(z-1)^2}{8} + \cdots\right). \end{aligned}$$

Développons la fonction $\frac{1}{z}$ en série de Laurent au voisinage de 0.

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} &= \frac{1}{1-(1-z)} = \sum_{n\geq 0}(1-z)^n, |1-z| \prec 1 \\ &= 1 + (1-z) + (1-z)^2 + (1-z)^3 + \cdots, \\ &= 1 - (z-1) + (z-1)^2 - (z-1)^3 + \cdots, \\ \frac{-1}{z^2} = \left(\frac{1}{z}\right)' &= -1 + 2(z-1) - 3(z-1)^2. \end{aligned}$$

ceci implique que

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{-1}{z^2} + \frac{1}{2(z-1)} - \frac{1}{2(z+1)} \\ &= \frac{1}{2(z-1)} + (-1 + 2(z-1) - \cdots) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{z-1}{4} + \cdots\right), \\ &= \frac{1}{2(z-1)} + \left(-\frac{5}{4} + \frac{17}{8}(z-1) - \frac{49}{16}(z-1)^2 + \cdots\right). \end{aligned}$$

alors $z_1 = 1$ est un pôle simple et le $Res(f, 1) = \frac{1}{2}$.

Corrigé 7.25. *1.Les points singuliers isolés sont $z_k = k\pi, k \in \mathbb{Z}, Res(f, k\pi) = 1,$ et z_0 dans* *l'interieur de* γ

$$\oint_{|z|=1} \coth z dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} Res(f, z_0) = 2\pi i$$

2.Soit $I_2 = \int_{|z|=2} z e^{\frac{3}{z}} dz$, *on a*

$$e^{\frac{3}{z}} = \sum_{n\geq 0} \frac{\left(\frac{3}{z}\right)^n}{n!} = 1 + \frac{3}{z} + \frac{9}{2z^2} + \cdots$$

ceci implique que

$$f(z) = z e^{\frac{3}{z}} = z + 3 + \frac{9}{2z} + \frac{27}{3!z^2} + \cdots$$

Alors $z_0 = 0$ *est un point singulier essentiel et* $Res(f, 0) = b_1 = \frac{9}{2}$, *d'ou*

$$I_2 = \int_{|z|=2} z e^{\frac{3}{z}} dz = 2\pi i Res(f, 0) = 2\pi i \frac{9}{2} = 9\pi i.$$

Corrigé 7.26. *1.Montrons que* $I_1 = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(5-3\sin\theta)^2} = \frac{5\pi}{32}$

Supposons que

$$\begin{cases} z &= e^{i\theta}, \\ \sin\theta &= \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right), \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} dz &= ie^{i\theta} d\theta. \\ \sin\theta &= \frac{1}{2i}\left(\frac{z^2-1}{2}\right) \end{cases}$$

ceci implique que

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(5 - 3\sin\theta)^2} = \oint_{|z|=1} \frac{-4z dz}{i\left(3z^2 - 10iz - 3\right)^2}$$

Les points singuliers isolés de $\frac{-4zdz}{i(3z^2-10iz-3)^2}$ *sont* $z_0 = \frac{i}{3}$ *et* $z_1 = 3i$, *on a*

$$\begin{cases} |z_0| \prec 1 & \Rightarrow & z_0 \in Int(\gamma), \\ |z_1| \succ 1 & \Rightarrow & z_1 \notin Int(\gamma). \end{cases}$$

Calculons $Res(f, \frac{i}{3})$

$$\begin{aligned} Res(f, \frac{i}{3}) &= \lim_{z\to\frac{i}{3}} \frac{d}{dz}\left((z - \frac{i}{3})^2 \frac{-4zdz}{(z-\frac{i}{3})^2(z-3i)^2}\right) \\ &= \lim_{z\to\frac{i}{3}} \frac{-4(z-3i)^2 + 8z(z-3i)}{(z-3i)^4}, \\ &= \lim_{z\to\frac{i}{3}} \frac{-4(z-3i) + 8z}{(z-3i)^3} = \frac{5}{64i}, \end{aligned}$$

Alors

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(5-3\sin\theta)^2} = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} Res(f, z_i) = 2\pi i Res(f, \frac{i}{3}) = 2\pi i(\frac{5}{64i}) = \frac{5\pi}{32}.$$

2.Montrons que $I_2 = \int_0^{2\pi} \frac{\cos(3\theta)d\theta}{(5-4\cos\theta)} = \frac{\pi}{12}$

Supposons que

$$\begin{cases} z &= e^{i\theta}, \\ \cos(3\theta) &= \frac{1}{2}\left(z^3 - \frac{1}{z^3}\right), \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} dz &= ie^{i\theta}d\theta. \\ \cos(3\theta) &= \frac{1}{2}\left(\frac{z^6+1}{z^3}\right), \end{cases}$$

ceci implique que

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos(3\theta)d\theta}{(5-4\cos\theta)} = \frac{1}{-4i} \oint_{|z|=1} \frac{z^6+1dz}{\left(z^3(z-\frac{1}{2})(z-2)\right)}$$

Les points singuliers isolés de $\frac{z^6+1dz}{\left(z^3(z-\frac{1}{2})(z-2)\right)}$ *sont* $z_0 = 0$ *est un pôle d'ordre* 3,$z_1 = \frac{1}{2}$ *est un pôle simple et* $z_2 = 2$ *est un pôle simple, on a*

$$\begin{cases} |z_0| \prec 1 & \Rightarrow & z_0 \in Int(\gamma), \\ |z_1| \prec 1 & \Rightarrow & z_1 \in Int(\gamma), \\ |z_2| \succ 1 & \Rightarrow & z_2 \notin Int(\gamma), \end{cases}$$

Calculons $Res(f, 0), Res(f, \frac{1}{2})$

$$\begin{aligned} Res(f,0) &= \frac{1}{2!}\lim_{z\to 0}\left(\frac{z^6+1}{z^2-\frac{5}{2}z+1}\right)'' = \frac{21}{4}, \\ Res(f,\frac{1}{2}) &= \lim_{z\to\frac{1}{2}}\left(\frac{z^6+1}{z^3(z-2)}\right) = \frac{-65}{12}. \end{aligned}$$

Alors

$$I_2 = \int_0^{2\pi} \frac{\cos(3\theta)d\theta}{(5-4\cos\theta)} = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} Res(f, z_i) = 2\pi i\left(Res(f,0) + Res(f,\frac{1}{2})\right) = 2\pi i(\frac{21}{4} + \frac{-65}{12}) = \frac{\pi}{12}.$$

Corrigé 7.27. *1.Soit* $I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+4)^2}dx$ *posons* $x = z$ *ce qui implique* $I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+4)^2}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{(z^2+4)^2}dx$ *nous avons*

$$\begin{cases} p(z) &= 1, \\ q(z) &= (z^2+4)^2, \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \deg(p(z)) &= 0. \\ \deg(q(z)) &= 4. \end{cases} \Longrightarrow \deg(p(z)) - \deg(q(z)) = 4 \succ 2$$

- *p et q sont premier entre eux.*

$$q(z) = 0 \Rightarrow z^2 + 4 = 0 \Rightarrow z_0 = 2i \vee z_1 = -2i$$

- *$q(z)$ n'a pas de zéro réel, $z_0 = 2i \in$ demi plan superieur, $z_0 = 2i \notin$ demi plan superieur.*

Calculons $Res(f, 2i)$:

$$\begin{aligned}
Res(f,2i) &= \lim_{z\to 2i}\left((z-2i)^2 f(z)\right)', \\
&= \lim_{z\to 2i}\left((z-2i)^2\frac{1}{(z-2i)^2(z+2i)^2}\right)', \\
&= \lim_{z\to 2i}\left(\frac{-2}{(z+2i)^3}\right) = \frac{1}{32i}.
\end{aligned}$$

Alors

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+4)^2}dx = 2\pi i\sum_{i=1}^{n} Res(f,z_i) = 2\pi i\left(Res(f,2i)\right)) = 2\pi i(\frac{1}{32i}) = \frac{\pi}{16}.$$

2.Soit $I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^n}dx$ posons $x = z$ ce qui implique $I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^n}dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dz}{(z^2+1)^n}dx$ nous avons

$$\left\{\begin{array}{lcl} p(z) &=& 1, \\ q(z) &=& (z^2+1)^n, \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} \deg(p(z)) &=& 0. \\ \deg(q(z)) &=& 2n. \end{array}\right. \Longrightarrow \deg(p(z)) - \deg(q(z)) = 2n \geq 2$$

- *p et q sont premier entre eux.*

$$q(z) = 0 \Rightarrow z^2 + 1 = 0 \Rightarrow z_0 = i \vee z_1 = -i$$

- *$q(z)$ n'a pas de zéro réel, $z_0 = i$ (pôle d'ordre n) située dans le demi plan superieur, $z_1 = -i \notin$ demi plan superieur.*

Calculons $Res(f, i)$:

$$\begin{aligned}
Res(f,i) &= \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to i}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left((z-i)^n f(z)\right), \\
&= \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to i}\left(\frac{(-1)^{n-1}(2n-2)!}{(n-1)!(z+i)^{2n-1}}\right), \\
&= \frac{(-1)^{n-1}(2n-2)!}{((n-1)!)^2(2i)^{2n-1}}.
\end{aligned}$$

Alors

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^n} dx = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} Res(f, z_i) = 2\pi i \left(Res(f, i) \right) = 2\pi i (\frac{(-1)^{n-1}(2n-2)!}{((n-1)!)^2 (2i)^{2n-1}}).$$

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^n} dx = \frac{(2n-2)!\pi}{((n-1)!)^2 2^{2n-2}}$$

Corrigé 7.28. *Soit l'intégrale* $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2+2x+2} dx$.

posons $f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2+2z+2}$, *on a deux pôles simples* $z_0 = -1+i$ *située dans le demi plan superieur* $(\Im(z_0) \succ 0)$ *et* $z_1 = -1-i \notin$ *demi plan superieur* $(\Im(z_1) \leq 0)$. *Calculons* $Res(f, -1+i)$*:*

$$\begin{aligned} Res(f, -1+i) &= \lim_{z \to -1+i} \left((z+1-i) f(z) \right), \\ &= \lim_{z \to -1+i} \left(((z+1-i)) \frac{e^{iz}}{(z-(-1+i))(z-(-1-i))} \right), \\ &= \frac{e^{i(-1+i)}}{(2i)} = \frac{e^{-1-i}}{2i}. \end{aligned}$$

Finalement

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iz}}{z^2+2z+2} dz = 2\pi i \frac{e^{-1-i}}{2i} = \pi e^{-1}(\cos(1) - i\sin(1)) = (\pi e^{-1}\cos(1)) - i(\pi e^{-1}\sin(1)).$$

D'où

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2+2x+2} dx = (-\pi e^{-1}\sin(1)).$$

De plus

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+2x+2} dx = (\pi e^{-1}\cos(1)).$$

BIBLIOGRAPHY

[1] A. Kherlifa, *Cours d'Analyse complexes*, Université de Djilali Bounaama Khemis Miliana,2019.

[2] EL Bachir Yallaoui et Hamid Benseridi, *Analyse complexe Elementaire*, 2015.

[3] H. Cartan, *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes*, Hermann, 1961.

[4] R. Gélinas,Marcel Lambert, *Elément d'analyse complexe*Presses de l'Université du Québec, 1994.

[5] W. Rudin, *Analyse réelle et complexe. Cours et exercices.*DUNOD, 3ième édition 1998.

[6] P. Dolbeault,*Analyse complexe*, Masson,1990.

[7] P. Tauvel, *Analyse complexe. Exercices corrigés.* Dunod, 1999.

[8] J. Kuntzmann, . *Variable complexe. Hermann, Manuel de premier cycle.* Paris, 1967.

[9] J-B.Bost, . *Fonction analytiques d'une variable complexe.* Ecole polytechnique, 1997.

[10] Patrice Tauvel, . *Analyse complexe pour la Licence 3, cours et exercices corrigés.*DUNOD, paris 2006.

[11] André Giroux, . *Analyse complexe, cours et exercices corrigés.* Département de mathématiques et statistique, Université de Montréal, 2013.

[12] V.Smirnov, . *Cours de Mathématiques Supérieures.* Tome 3, OPU 1985.

[13] R.Silverman, .*Introductory complex analysis, Dover.* 1972.