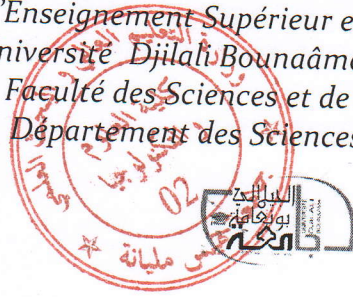


République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Djilali Bounaâma Khemis Miliana
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département des Sciences de la Matière



Structure Nucléaire 1 : Cours et exercices corrigés

Par : Douici Mohamed
E-mail m.douici@univ-dbk.m.dz
UDBKM 2020

Table des matières



1	Généralités sur le noyau atomique	5
1.1	Constituants et dimensions du noyau atomique	5
1.2	Stabilité des noyaux	6
1.3	Rayon et densité nucléaire	7
1.4	Energie de liaison	9
1.5	Energie de séparation	11
1.6	Centre de masse et cinétique des réactions nucléaires	12
1.6.1	Système du laboratoire	12
1.6.2	Système du centre de masse "cm"	14
1.7	Section efficace	15
1.8	Section efficace différentielle de Rutherford	16
1.9	Exercices	18
1.10	Solutions des exercices	19
2	Modèles Nucléaires	25
2.1	Introduction	25
2.2	Modèle de la goutte liquide	26
2.3	Modèle en couches des noyaux	27
2.3.1	Equation de Schrödinger	28
2.4	Moment quadripolaire électrique	36
2.5	Moment quadripolaire électrique d'un ellipsoïde	39

2.6	Description quantique du moment quadripolaire	41
2.7	Moment magnétique Dipolaire	42
2.8	Interaction noyau champ magnétique externe	44
2.8.1	Champ magnétique externe faible	45
2.8.2	Champ magnétique externe fort	45
2.8.3	Absence du champ magnétique externe	46
2.9	Exercices	46
2.10	Solutions des exercices	47
3	Transitions Nucléaires	54
3.1	Emission Alpha	54
3.1.1	Potentiel effectif	56
3.2	Transitions isobariques	57
3.2.1	Désintégration bêta moins (β^-)	57
3.2.2	Désintégration bêta plus (β^+)	57
3.2.3	Transformation capture électronique (CE)	57
3.2.4	Bilan énergétique	57
3.2.5	Probabilité de transition bêta	58
3.2.6	Règles de sélections	58
3.3	Transition électromagnétique (Emission gamma)	59
3.3.1	Bilan énergétique	60
3.3.2	Règles de sélections	60
3.4	Exercices	61
3.5	Solutions des exercices	63
	Bibliographie	73



Table des figures

1-1	Répartition des noyaux sur le plan $Z-N$	6
1-2	Densité de charge nucléaire en fonction du rayon de nucléon	8
1-3	Energie de liaison par nucléon représentée en fonction du nombre de masse A pour différents noyaux stables [6].	10
1-4	Réaction nucléaire de deux corps	13
1-5	Schéma de mesure de la section efficace de particules émis par unité de temps.	15
1-6	Schéma d'illustration des trajets de diffusion de la particule alpha par un noyau.	16
2-1	Energie de liaison par nucléon en fonction du nombre de masse A et contribution relative des différents termes de la formule de masse [4].	27
2-2	Séquence des couches principales de l'oscillateur harmoniques.	31
2-3	Potentiel de l'oscillateur harmonique et le potentiel de Woods-Saxon [12] .	33
2-4	Les niveaux d'énergie des nucléons dans le modèle en couches.	35
3-1	Diagramme d'énergie de liaison de l'émission Alpha d'un noyau.	55
3-2	Evolution de la particule α dans la barrière de potentiel	56

Préface

Ce polycopié est un cours et exercices corrigés en structure nucléaire, dont je suis responsable, destiné aux étudiants de Master 1 Physique Théorique à l'université Djillali Bounaama Khemis-Miliana. Il est élaboré conformément au programme du canevas de la spécialité sus-citée. Il contient des notions de cours et des exercices d'applications résolus à la fin de chaque chapitre. L'objectif de ce polycopié est de permettre aux étudiants d'acquérir les connaissances sur le noyau atomique à savoir constituants et dimensions du noyau atomique, les réactions nucléaires, les modèles nucléaires, les moments nucléaires et les transitions nucléaires.

Chapitre 1

Généralités sur le noyau atomique

1.1 Constituants et dimensions du noyau atomique

La matière est constituée d'atomes en forme de sphères de rayon de l'ordre de 10^{-10} m. Chaque atome contient des électrons (é) et un noyau de dimension de l'ordre de 10^{-15} m [1]. Le noyau est constitué de nucléons (protons et neutrons). Le noyau atomique associé à un élément X est représenté par le symbole ${}^A_Z X_N$, où A représente le nombre de masse ou nombre de nucléons (protons + neutrons), Z représente le numéro atomique également nombre de protons ou d'électrons et N représente le nombre de neutrons.

Parmi les nucléides connus, on distingue [2] :

- les isotopes : même nombre atomique Z mais N différent et A différent, exemple : ${}^{16}_8 O_8$ et ${}^{15}_8 O_7$.

- les isobares : même nombre de masse A mais Z différent et N différent, exemple : ${}^{15}_8 O_7$ et ${}^{15}_7 N_8$.

- les isotones : même nombre de neutrons N mais A et Z différent, exemple : ${}^{15}_8 O_8$ et ${}^{17}_9 F_8$.

Les masses de particules constituant un atome sont :

- électron : $m_e = 9.109389 \times 10^{-31} kg$

- proton : $m_p = 1.672623 \times 10^{-27} kg$

- neutron : $m_n = 1.677428 \times 10^{-27} kg$
- la charge élémentaire vaut : $e = 1.602177 \times 10^{-19} C$

Par ailleurs, l'unité de masse atomique est notée u est égale 1/2 de la masse d'un atome de carbone, on a :

$$\begin{aligned} 1u &\simeq 1.660540 \times 10^{-27} kg \\ &\simeq 931.5 Mev/c^2 \end{aligned}$$

1.2 Stabilité des noyaux

La stabilité des noyaux varie avec le changement des valeurs de N , Z comme illustré à la figure 1-1 de la ligne de stabilité (vallée de stabilité des noyaux) [4].

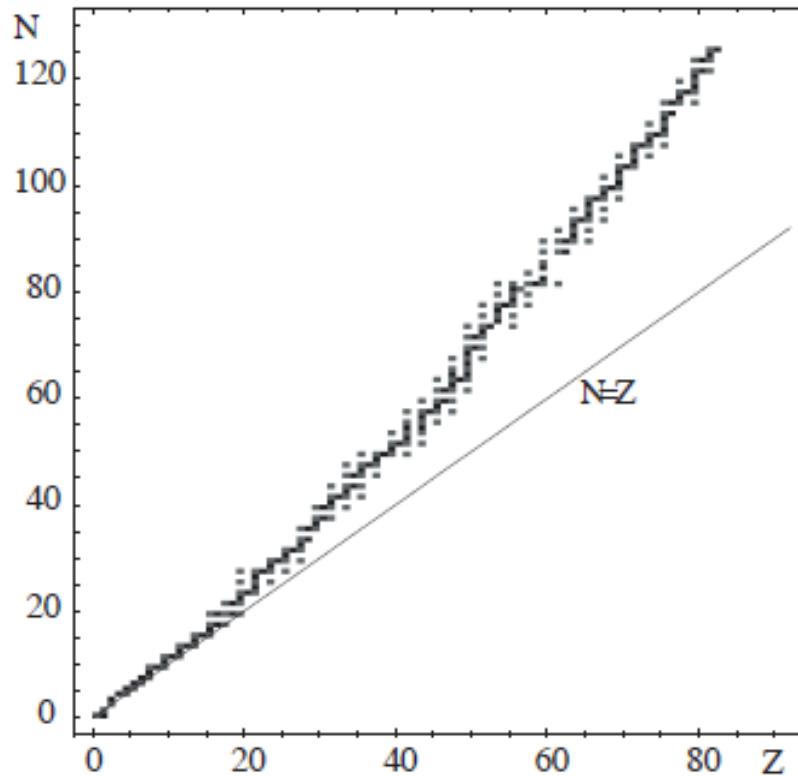


FIG. 1-1: Répartition des noyaux sur le plan Z -N.

Les noyaux stables sont répartis étroitement autour d'une courbe dans le plan $Z - N$. On note que cette courbe tend vers la droite $Z = N$ pour les petites valeurs de Z , mais s'en écarte pour les Z plus élevés, et que le nombre de neutrons peut alors être jusqu'à 50% plus élevé que le nombre de protons [4].

Les noyaux légers stables sont situés sur la ligne moyenne de stabilité ($Z \leq 20$), la stabilité est obtenue quand N est supérieur à Z ou $N \simeq 1.7 Z$. Les noyaux instables ou radioactifs se répartissent autour de la vallée de stabilité.

Les nombres magiques, sont des noyaux plus stables, possèdent un nombre de protons ou de neutron égale : (Z ou N) = 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126. Exemple : ${}_{40}^{90}\text{Zr}_{50}$, ${}_{58}^{140}\text{Ce}_{82}$.

Les noyaux doublement magiques sont : (Z et N) = 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126. Exemple : ${}^4_2\text{He}_2$, ${}^{40}_{20}\text{Ca}_{20}$, ${}^{208}_{82}\text{Pb}_{126}$.

1.3 Rayon et densité nucléaire

Le noyau est représenté comme une goutte de matière nucléaire. Le rayon moyen du noyau est approximativement donné par l'expression [1,3] :

$$R_0 \simeq r_0 A^{1/3} \quad (1.1)$$

où $r_0 = 1.2 \text{ fm}$ pour l'ensemble des noyaux.

La densité nucléaire est donnée par l'expression :

$$\begin{aligned} d_N &= \frac{A}{V} & (1.2) \\ &\simeq 10^{14} \text{ g/cm}^3 \\ &\simeq 10^{38} \text{ nucléon/cm}^3 \end{aligned}$$

V représente le volume du noyau et A est le nombre de masse.

Par ailleurs, la densité de la charge nucléaire est donnée par [3] :

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{1 + \exp \frac{r-R_c}{0.228a}} \quad (1.3)$$

avec :

$$\begin{cases} R_c = r_0 A^{1/3} \\ r_0 = 1.1 \times 10^{-13} \text{ cm} \\ a = 2.2 \times 10^{-13} \text{ cm} \end{cases}$$

Cette fonction est représentée sur la figure (1-2).

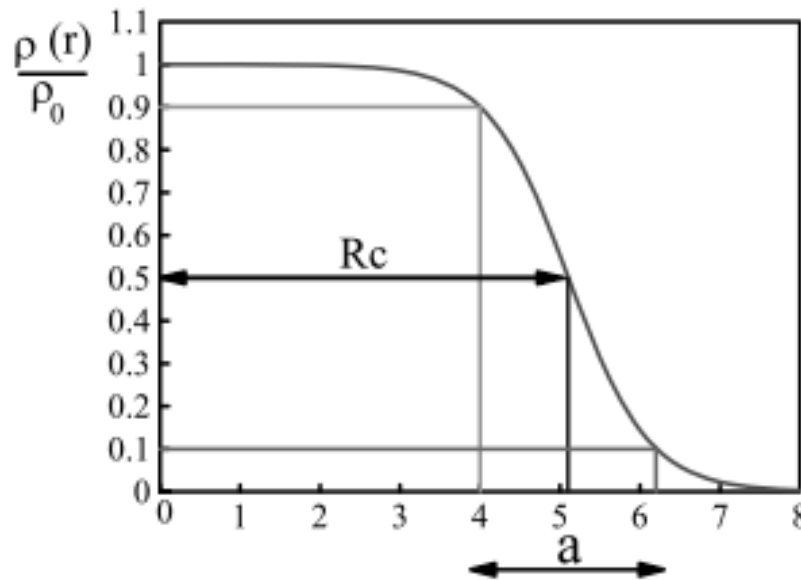


FIG. 1-2: Densité de charge nucléaire en fonction du rayon de nucléon

On constate alors que l'allure de la densité de la figure (1-2), est pratiquement constante à l'intérieur du noyau puis diminue jusqu'à pratiquement s'annuler en surface.

1.4 Energie de liaison

Les nucléons d'un noyau sont fortement liées de sorte qu'on doit fournir de l'énergie pour les séparer. L'énergie de liaison d'un noyau est l'énergie nécessaire pour dissocier le noyau pris au repos en protons et en neutrons, elle est donnée par [9] :

$$B(A, Z) = [Zm_p + Nm_n - M_{noy}(A, Z)] c^2 \quad (1.4)$$

où $M_{noy}(A, Z)$ est la masse atomique d'un noyau.

L'expérience montre que la masse d'un noyau est inférieure à la somme des masses de ses constituants pris isolément, soit :

$$M_{noy}(A, Z) < Zm_p + Nm_n$$

il y a donc un défaut de masse $\Delta M_{noy}(A, Z)$ défini par :

$$\Delta M_{noy}(A, Z) = (Zm_p + Nm_n) - M_{noy}(A, Z) \quad (1.5)$$

L'énergie de liaison par nucléon (B_L/A) est obtenue en divisant l'énergie de liaison du noyau par le nombre de nucléons, elle est donnée par :

$$\frac{B_L}{A} = \frac{B(A, Z)}{A} \quad (1.6)$$

Cette énergie est représenté sur la figure (1-3), nous constatons que l'allure de cette énergie est faible pour la zone des noyaux légers $A < 15$ puis se croit et deviens maximale pour les éléments aux alentours du ^{56}Fe , et elle décroît légèrement pour les noyaux lourds.

Nous pouvons également définir l'énergie de liaison d'un atome comme :

$$B_e(A, Z) = [M_{noy}(A, Z) + Zm_e - M_{at}(A, Z)] c^2 \quad (1.7)$$

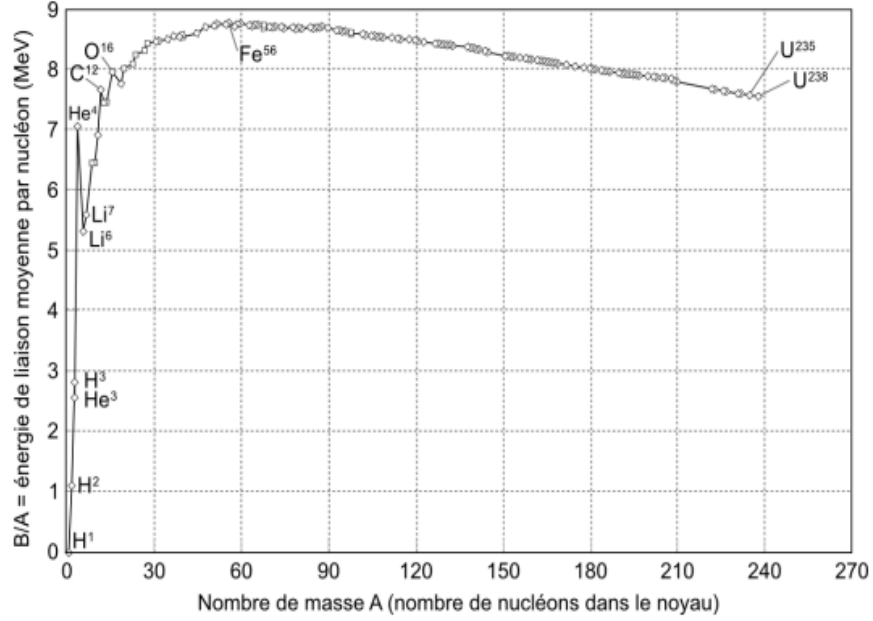


FIG. 1-3: Energie de liaison par nucléon représentée en fonction du nombre de masse A pour différents noyaux stables [6].

où $M_{at}(A, Z)$ est la masse d'un atome, elle est donnée par :

$$M_{at}(A, Z) = M_{noy}(A, Z) c^2 + Z m_e c^2 - B_e(A, Z) \quad (1.8)$$

$$= Z(m_p + m_e) c^2 + N m_n c^2 - B(A, Z) - B_e(A, Z)$$

$$= Z M_H c^2 + N m_n c^2 - B(A, Z) - B_e(A, Z) \quad (1.9)$$

où M_H représente la masse atomique de l'hydrogène.

Nous pouvons également introduire la notion de l'excès de masse pour exprimer l'énergie de liaison par :

$${}^A_Z \Delta_N = M_{at}(A, Z) - A \quad (1.10)$$

L'énergie de liaison en excès de masse s'exprime comme suit :

$$\begin{aligned}
B(A, Z) &= Zm_p c^2 + Nm_n c^2 - M_{noy}(A, Z) c^2 \\
&= Z({}_1^1\Delta_0 + 1) c^2 + N({}_0^1\Delta_1 + 1) c^2 - \left(\frac{A}{Z}\Delta_N + A\right) c^2 \\
&= Z{}_1^1\Delta_0 c^2 + N{}_0^1\Delta_1 c^2 - \frac{A}{Z}\Delta_N c^2
\end{aligned} \tag{1.11}$$

avec :

$$\begin{cases}
{}_1^1\Delta_0 c^2 = 7.28903 \text{ Mev} \\
{}_0^1\Delta_1 c^2 = 8.07137 \text{ Mev}
\end{cases}$$

1.5 Energie de séparation

L'énergie de séparation d'un nucléon ($S(A, Z)$) est le travail nécessaire pour arracher un proton ou un neutron du noyau [9, 10]. Pour établir son expression, nous pouvons à titre d'exemple de celle du proton écrire :

$$S_p(A, Z) = M_{noy}(A-1, Z-1) c^2 + m_p c^2 - M_{noy}(A, Z) c^2 \tag{1.12}$$

En tenant en compte l'expression (1.4), cette dernière s'écrit comme :

$$\begin{aligned}
S_p(A, Z) &= -B(A-1, Z-1) c^2 + (Z-1) m_p c^2 + Nm_n c^2 + m_p c^2 + B(A, Z) - Zm_p c^2 - Nm_n c^2 \\
&= B(A, Z) - B(A-1, Z-1)
\end{aligned} \tag{1.13}$$

Nous pouvons, en outre, l'exprimer en fonction des excès de masse comme suit :

$$S_p(A, Z) = \frac{A-1}{Z-1} \Delta_N c^2 + {}_1^1\Delta_0 c^2 - \frac{A}{Z} \Delta_N c^2 \tag{1.14}$$

En suivant la même procédure que celle du calcul de S_p , nous pouvons déterminer les expressions de l'énergie de séparation du neutron et de la particule Alpha, elles sont

données respectivement par :

$$\begin{aligned} S_n(A, Z) &= M_{noy}(A-1, Z)c^2 + m_n c^2 - M_{noy}(A, Z)c^2 \\ &= -B(A-1, Z)c^2 + Zm_p c^2 + (N-1)m_n c^2 + m_n c^2 + B(A, Z) - Zm_p c^2 - Nm_n c^2 \end{aligned} \quad (1.15)$$

$$= B(A, Z) - B(A-1, Z) \quad (1.16)$$

et

$$\begin{aligned} S_\alpha(A, Z) &= M_{noy}(A-4, Z-2)c^2 + m_\alpha c^2 - M_{noy}(A, Z)c^2 \\ &= B(A, Z) - B(A-4, Z-2) - B_\alpha(4, 2) \end{aligned} \quad (1.17)$$

$$= \frac{A-4}{Z-2} \Delta_{N-2} c^2 + \frac{4}{2} \Delta_2 c^2 - \frac{A}{Z} \Delta_N c^2 \quad (1.18)$$

Nous notons que l'énergie de séparation varie d'un noyau à un autre et elle nous donne des informations sur la stabilité du noyau.

1.6 Centre de masse et cinétique des réactions nucléaires

1.6.1 Système du laboratoire

Soit la réaction nucléaire d'un noyau atomique provoquée par l'interaction d'une particule projectile (autre noyau, particule α , électron, nucléon, rayonnement γ). Cette réaction s'écrit :

$$a + X \rightarrow b + Y \quad \text{en abrégé} \quad X(a, b)Y \quad (1.19)$$

où a est la particule projectile (particule incidente), X est le noyau cible (état initial ou voie d'entrée), b est la particule sortante (légère) et Y est le noyau résiduel (état final ou voie de sortie)

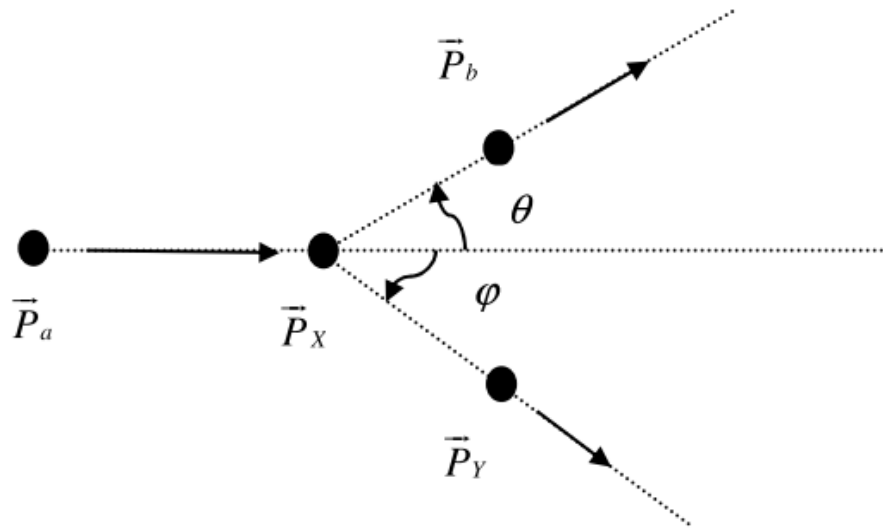


FIG. 1-4: Réaction nucléaire de deux corps

Conservation de l'énergie totale

La loi non relativiste de la conservation de l'énergie totale pour la réaction (1.19) s'écrit :

$$(T_a + m_a c^2) + (T_X + m_X c^2) = (T_b + m_b c^2) + (T_Y + m_Y c^2)$$

où m_a , m_X , m_b et m_Y sont les masses au repos des particules, T_a , T_b et T_Y sont les énergies cinétiques des particules. On suppose que le noyau cible est au repos dans le système laboratoire ($T_X = 0$).

Le bilan énergétique (Q) est donné par :

$$Q = E_{réactifs} - E_{produits} \quad (1.20)$$

$$= (m_a + m_X - m_b) c^2 \quad (1.21)$$

- si $Q < 0$, la réaction est endoénergétique, elle nécessite un apport d'énergie.
- si $Q = 0$, diffusion élastique ($a + X \rightarrow b + Y$), $T_f = T_i$.
- si $Q > 0$, la réaction est exoénergétique, elle libère de l'énergie.

Conservation de la quantité du mouvement

Le principe de la conservation de la quantité de mouvement donne :

$$\vec{P}_a = \vec{P}_b + \vec{P}_Y \quad (1.22)$$

en exprimant l'impulsion en fonction de l'énergie cinétique ($T = P^2/2m$) nous pouvons écrire :

$$2m_a T_a + 2m_b T_b - 4\sqrt{m_a T_a m_b T_b} \cos \theta = 2m_Y T_Y$$

Dans le cas où $Q < 0$ et pour que la réaction soit possible, il faut que la particule ait une énergie cinétique minimum. Cette énergie s'appelle l'énergie de seuil, soit :

$$T_{a \text{ seuil}} = \frac{-Q(m_X + m_a)}{m_X} \quad (1.23)$$

- pour $T_a > T_{a \text{ seuil}}$, réaction possible.
- pour $T_a < T_{a \text{ seuil}}$, réaction impossible.

1.6.2 Système du centre de masse "cm"

Le système du centre de masse est un référentiel pour lequel la somme des quantités de mouvement des particules de la voie d'entrée avec la voie de sortie est nulle. Il permet aussi d'exprimer les positions des particules les unes en fonction des autres. La position du repère du centre de masse s'écrit alors :

$$(m_a + m_X) \vec{r}_{CM} = m_a \vec{r}_a + m_X \vec{r}_X \quad (1.24)$$

Nous pouvons écrire la vitesse du centre de masse, en considérant le noyau cible au repos, comme :

$$\vec{V}_{cm} = \frac{m_a}{m_a + m_X} \vec{V}_a \quad (1.25)$$

1.7 Section efficace

La section efficace (σ) a pour but d'étudier la probabilité d'interaction entre les particules ou noyaux d'un faisceau et la matière qui compose une cible. Unité de section efficace est le barn tel que [2] : $1\text{barn} = 10^{-24}\text{cm}^2$.

Considérons un faisceau de particules se dirigeant vers une cible (Fig. 1-5) et soit un détecteur de surface S situé à une distance d de la cible, intercepte toutes les particules émises à l'intérieur de l'angle solide $d\Omega$.

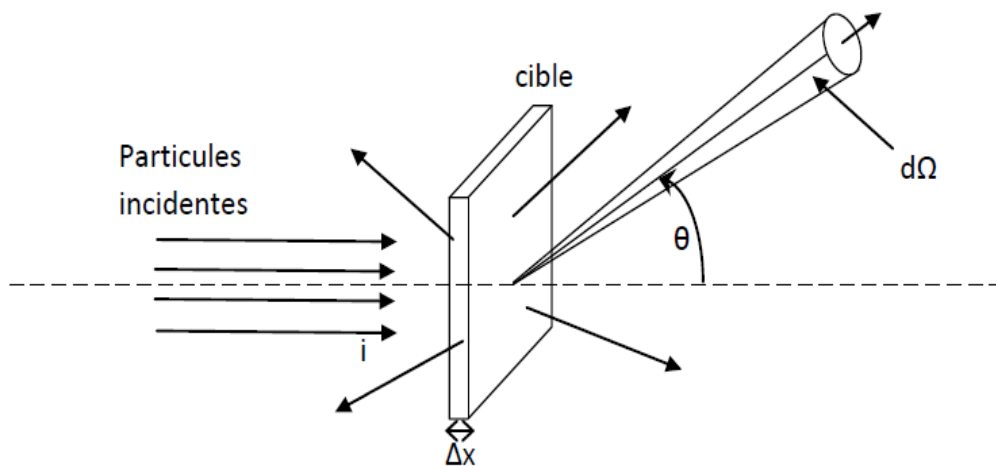


FIG. 1-5: Schéma de mesure de la section efficace de particules émises par unité de temps.

L'expression du nombre de particules émises ou détectés par seconde s'écrit [2, 5] :

$$N_{ém/t} = N \times \Delta x \times \phi \times \sigma \quad (1.26)$$

où :

$N_{ém/t}$ est le nombre de particules émises par unité de temps dans l'angle solide.

N est le nombre de noyaux cible par centimètre cube.

Δx est l'épaisseur de la cible.

ϕ est le nombre de particules incidentes par seconde.

σ est la section efficace de la réaction.

Nous pouvons écrire pour dN particules comme suit :

$$\begin{aligned} dN_{ém/t} &= N \times \Delta x \times \phi \times d\sigma \\ &= N \times \Delta x \times \phi \times \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega \end{aligned} \quad (1.27)$$

$d\Omega \simeq \frac{ds}{d^2}$ Stéradian (*sr*) (si $ds \ll d^2$).

1.8 Section efficace différentielle de Rutherford

Dans l'expérience qui a été réalisé en 1911 par Geiger et Mandsen, des particules alpha (α) bombardaient une cible constituée d'une feuille d'or.

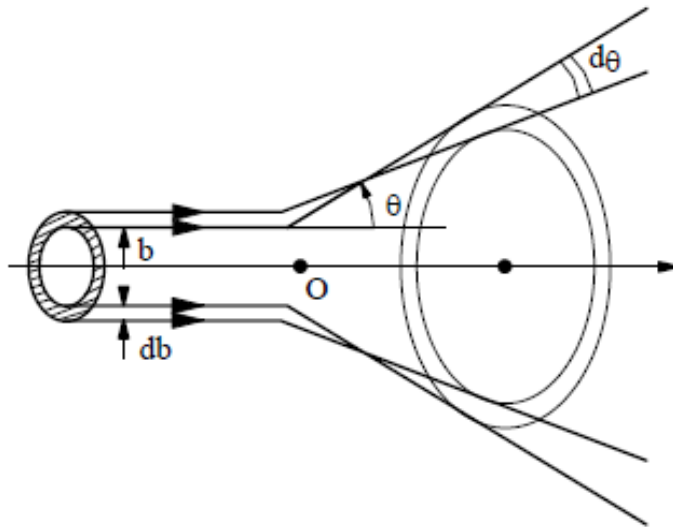


FIG. 1-6: Schéma d'illustration des trajets de diffusion de la particule alpha par un noyau.

- le paramètre d'impact b indiquant à quelle distance d'un noyau cible passerait les particules α dévié.
- d est la cible d'approche.
- a est la distance maximale d'approche des α d'un noyau.

- E est l'énergie cinétique des α .

Dans le cas de la diffusion coulombienne (potentiel $\frac{1}{r}$) on démontre facilement que :

$$\tan \frac{\theta}{2} = \frac{a}{2b} \quad (1.28)$$

avec

$$a = \frac{zZe^2}{E_\alpha} \quad (1.29)$$

Une déviation de la particule d'un angle compris entre θ et $\theta + d\theta$ correspond à la déviation de particules à l'intérieur d'un angle solide $d\Omega$ de centre du noyau, on a :

$$d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta \quad (1.30)$$

Cette déviation correspond aussi des particules incidentes qui sont passées à l'intérieur de la couronne de surface :

$$ds = 2\pi b db \quad (1.31)$$

où :

$$ds = d\sigma \quad (1.32)$$

La section efficace différentielle angulaire est le rapport

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{2\pi b |db|}{2\pi \sin \theta |d\theta|} \\ &= \frac{b}{\sin \theta} \left| \frac{db}{d\theta} \right| \end{aligned} \quad (1.33)$$

avec $d\theta < 0$ pour $db > 0$.

La section efficace coulombienne de Rutherford est :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{zZe^2}{4E} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} \quad (1.34)$$

1.9 Exercices

Exercice 1. Le rayon du noyau atomique est donné par la formule semi-empirique $R = r_0 A^{1/3}$ où A représente le nombre de masse et $r_0 = 1.5 fm$. Quelle est la densité de la matière nucléaire exprimée en g/cm^3 et en *nucléons/cm³*.

Exercice 2. Montrer que l'énergie totale de liaison B d'un noyau (A, Z) peut se calculer en utilisant une table de masses atomiques moyennant une légère approximation. Envisager l'exemple du noyau ${}^{57}_{26}Fe$ pour justifier numériquement cette approximation. On donne :

- Formule semi-empirique donnant l'énergie totale de liaison des électrons d'un atome de numéro atomique Z : $B_e(Z) \approx 15.73 \times Z^{7/3} eV$.

- $M({}^1H) = 1.007825 u$, $M({}^{57}_{26}Fe) = 56.935398 u$, $M(n) = 1.0086654 u$.

Exercice 3. Dans le cadre de la mécanique classique, on définit le centre de masse de deux particules de masse m_a et m_x et de position \vec{r}_a et \vec{r}_x par :

$$\vec{R} = (m_a \times \vec{r}_a + m_x \times \vec{r}_x) / (m_a + m_x)$$

1. Calculer la vitesse du centre de masse en fonction de la particule incidente dans le laboratoire.
2. Calculer dans le référentiel du centre de masse l'impulsion totale.
3. Exprimer les énergies cinétiques \vec{T}'_a et \vec{T}'_x dans le centre de masse en fonction de T_a .
4. Donner l'expression de l'énergie cinétique totale disponible dans le centre de masse avant la réaction.

Exercice 4. La réaction nucléaire ${}^{32}S(d, p){}^{33}S$ a une section efficace totale de $14 mb$ lorsque les deutons incidents possèdent une énergie de $4 MeV$. Calculer le nombre de protons émis par seconde si le faisceau de deutons incidents a une intensité de $1 \mu A$, et si la cible de ${}^{32}S$ a une densité surfacique $(\rho \Delta x)$ de $100 \mu g/cm^2$.

Exercice 5. La réaction nucléaire ${}^{59}Co(p, n){}^{59}Ni$ a une section efficace totale de $3 mb$ pour des protons incidents de $2.3 MeV$. On envoie un faisceau de protons d'intensité $0.1 \mu A$ sur une cible de ${}^{59}Co$, et l'on détecte les neutrons à l'aide d'un compteur qui

permet d'enregistrer les particules dans un angle solide de 0.02 stéradian. On compte 1000 neutrons en 2 minutes. Quelle est la densité surfacique de la cible en $\mu\text{g}/\text{cm}^2$? (On admettra que l'émission de neutron est isotrope).

Exercice 6. Calculer la section efficace différentielle de Rutherford pour la diffusion élastique, à un angle de 90° dans le laboratoire, de particules α de 5MeV d'énergie cinétique sur une cible d'Or $^{197}_{79}\text{Au}$.

Exercice 7. On envoie un faisceau de proton de 1MeV sur une cible d' $^{40}_{18}\text{Ar}$ et on observe les protons diffusés élastiquement à l'angle $\theta = 165^\circ$.

1. Sachant que l'intensité du faisceau incident est de $1.6\mu\text{A}$, que la cible a une épaisseur $0.2\mu\text{g}/\text{cm}^2$, que le nombre de proton détectés est de 12 par seconde dans un détecteur de surface utile 1cm^2 situé à 10cm de la cible. Calculer la section efficace différentielle de diffusion Coulombienne (expérimentale).

2. Comparer ce résultat au résultat théorique.

Exercice 8. On produit la réaction $^{19}\text{F}(d,p)^{20}\text{F}$ à l'aide d'un faisceau de deutons dont l'intensité est de $0.64\mu\text{A}$. La cible est constituée de fréon (C_2H_6) à une pression de 1mm de mercure et à la température de 0°C . Combien peut-on compter de protons par seconde dans un détecteur de 1cm^2 de surface, situé à 12cm de la cible, sachant que celle-ci a une épaisseur de 2mm que la section différentielle vaut $0.45\text{mb}/\text{str}$ pour $\theta = 90^\circ$.

1.10 Solutions des exercices

Exercice 1

Calcul de la densité nucléaire en g/cm^3 et en $\text{nucléons}/\text{cm}^3$.

en g/cm^3 , la densité nucléaire d'après l'expression (1.2) est :

$$\begin{aligned}
 d_N &= \frac{A_u \text{ (masse d'un noyau)}}{V \text{ (volume de ce même noyau)}} & (1.35) \\
 &= \frac{A_u}{\frac{4}{3}\pi R^3} \\
 &= \frac{1 \times 1.66 \times 10^{-24}}{\frac{4}{3} \times 3.14 \times (1.5 \times 10^{-13})} \\
 &= 2.3 \times 10^{14} \text{ g/cm}^3
 \end{aligned}$$

en $nucléons/cm^3$, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
 d_N &= \frac{A_{nucléon}}{V} \\
 &= 1.38 \times 10^{38} \text{ nucléons/cm}^3
 \end{aligned}$$

Exercice 2

D'après l'expression (1.4), l'énergie de liaison d'un noyau est :

$$\begin{aligned}
 B(A, Z) &= [Zm_p + Nm_n - M_{noy}(A, Z)] c^2 \\
 &= [Z(m_p + m_e) + Nm_n - (M_{noy}(A, Z) + Zm_e)] c^2 & (1.36)
 \end{aligned}$$

En utilisant l'énergie de liaison des électrons d'un atome de l'expression (1.7) :

$$B_e(A, Z) = [M_{noy}(A, Z) + Zm_e - M_{at}(A, Z)] c^2 \quad (1.37)$$

et pour $(A, Z) = 1$, on obtient :

$$B_e(1) = (m_p + m_e - M_H) c^2 \quad (1.38)$$

ce qui implique que :

$$(m_p + m_e) c^2 = M_H c^2 + B_e(1) \quad (1.39)$$

on remplace cette dernière expressions dans (1.36), il vient :

$$B(A, Z) = [ZM_H + Nm_n - M_{at}(A, Z)]c^2 + ZB_e(1) - B_e(Z) \quad (1.40)$$

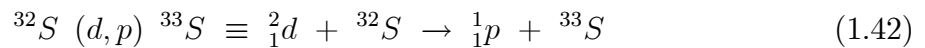
$$\simeq [ZM_H + Nm_n - M_{at}(A, Z)]c^2 \quad (1.41)$$

on constate à travers de l'expression (1.40) que les énergies de liaisons des électrons en eV sont négligeables devant le premier terme en MeV . Le calcul numérique de cette énergie de liaison, d'un noyau en utilisant les masses atomiques et envisageant le noyau ${}^{57}_{26}Fe$, donne :

$$\begin{aligned} B(A, Z) &= [26M_H + 31m_n - M_{at}(A, Z)]c^2 + 26(15.73) - 15.73 \times 26^{7/3} \\ &\simeq 500 \text{ MeV} \end{aligned}$$

Exercice 4

Nous avons la réaction :



calculons le nombre de protons émis par seconde, et qui est d'après l'expression (1.26) :

$$N_{p/s} = N \times \Delta x \times \phi_d \times \sigma \quad (1.43)$$

on sait que la charge Q déposée sur la cible est donnée par :

$$Q = I_d \times t \quad (1.44)$$

$$= n \times Z_d \times e \quad (1.45)$$

avec n représente le nombre total de particules incidentes arrivant sur la cible et Z_d désigne à la charge d'une particule ($Z_d = 1$).

le flux ϕ_d s'écrit :

$$\phi_d = \frac{n}{t} \quad (1.46)$$

$$= \frac{I_d}{Z_d \times e} \quad (1.47)$$

soit n' est le nombre total de noyau contenant dans la cible de masse m , on peut écrire :

$$n' = \frac{\rho \times V \times \eta}{A} \quad (1.48)$$

avec η est le nombre d'Avogadro.

d'où :

$$N = \frac{n'}{V} \quad (1.49)$$

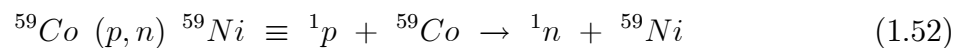
$$= \frac{\rho \times \eta}{A} \quad (1.50)$$

en remplaçant les expressions (1.47) et (1.50), il vient :

$$\begin{aligned} N_{p/s} &= \frac{I_d \times \rho \times \Delta x \times \eta \times \sigma}{Z_d \times e} \quad (1.51) \\ &= 1.65 \times 10^5 \text{ p/s} \end{aligned}$$

Exercice 5

Nous avons la réaction :



calcul de la densité surfacique de la cible ($\rho\Delta x$) en $\mu\text{g}/\text{cm}^2$ d'après l'expression (1.26), on peut écrire :

$$dN_{n/s} = N \times \Delta x \times \phi_p \times d\sigma_T \quad (1.53)$$

où $dN_{n/s}$ est le nombre de neutrons émis par seconde dans l'angle solide et qui se développe

comme :

$$dN_{n/s} = N \times \Delta x \times \phi_p \times \frac{d\sigma_T}{d\Omega} d\Omega \quad (1.54)$$

avec $\frac{d\sigma_T}{d\Omega}$ est la section efficace différentielle, puisqu'on a isotrope $\frac{d\sigma_T}{d\Omega}$ est constante.

la section efficace totale s'écrit :

$$\sigma_T = \frac{d\sigma_T}{d\Omega} \int_0^\pi d\Omega \quad (1.55)$$

$$= \frac{d\sigma_T}{d\Omega} \int_0^\pi 2\pi \sin \theta d\theta$$

$$= \frac{d\sigma_T}{d\Omega} \times 4\pi \quad (1.56)$$

la section efficace différentielle s'écrit à partir de cette dernière expression :

$$\frac{d\sigma_T}{d\Omega} = \frac{\sigma_T}{4\pi} \quad (1.57)$$

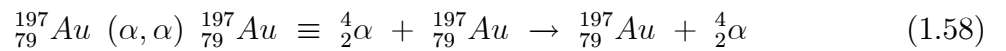
On remplace les expressions (1.47), (1.50) et (1.57) dans (1.54), on obtient :

$$\rho \Delta x = \frac{dN_{n/s} \times 4\pi \times Z_p \times e \times A}{I_p \times \sigma_T \times d\Omega \times \rho}$$

$$= 270 \mu\text{g}/\text{cm}^2$$

Exercice 6

Calcul de la section efficace différentielle de Rutherford $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\theta=90^\circ}^{Ruth}$ de la réaction nucléaire de diffusion élastique suivante :



En utilisant l'expression (1.34) qui est :

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\theta=90^\circ}^{Ruth} = \left(\frac{zZe^2}{4\bar{E}_\alpha}\right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\bar{\theta}}{2}} \quad (1.59)$$

où \bar{E}_α est l'énergie cinétique de particules α exprimées dans le centre de masse (C.M), donnée par l'expression :

$$\begin{aligned} \bar{E}_\alpha &= \frac{1}{2}m_\alpha \bar{v}_\alpha^2 \\ &= E_\alpha \left(\frac{m_{Au}}{m_\alpha + m_{Au}}\right)^2 \end{aligned} \quad (1.60)$$

et $\bar{\theta}$ est l'angle de diffusion dans C.M. puisque $\frac{m_\alpha}{m_{Au}} \ll 1$ et $\tan \theta = \frac{\sin \bar{\theta}}{\cos \bar{\theta} + \frac{m_\alpha}{m_{Au}}}$ on peut écrire $\tan \theta = \frac{\sin \bar{\theta}}{\cos \bar{\theta}}$, ceci nous permet mettre :

$$\theta = \bar{\theta} \quad (1.61)$$

En injectant les expressions (1.60) et (1.61) dans (1.59), on obtient :

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\theta=90^\circ}^{Ruth} = 5.56 \text{ barn/sr}$$

Chapitre 2

Modèles Nucléaires

2.1 Introduction

L'étude des noyaux exotiques ou loin de la vallée de stabilité étaient et demeurent un problème majeur pour les physiciens. Le développement de techniques expérimentales de plus en plus performantes permet désormais de produire et d'étudier la structure de ces noyaux. Ceux-ci présentent de nouveaux comportements par rapport aux noyaux stables, dont les propriétés sont bien reproduites par les modèles théoriques. L'un des premiers modèles du noyau, proposé par Weizsacker en 1935, est celui de la goutte liquide où le noyau est assimilé à un fluide classique constitué de nucléons qui sont confinés dans un volume fini de l'espace par l'interaction forte. Le deuxième modèle est le modèle en couche, où les nucléons sont considérés comme des particules indépendantes, l'un de l'autre, rend naturelle l'existence d'un potentiel moyen dans lequel évoluent les nucléons. Le problème qui se pose alors en physique nucléaire est la définition de ce potentiel moyen qui a la particularité ici d'être produit par les nucléons eux-mêmes. Les potentiels qui seront cités ici sont le potentiel d'oscillateur harmonique, le potentiel de Wood-Saxon et le potentiel du couplage spin-orbite.

2.2 Modèle de la goutte liquide

Dans ce modèle on considère le noyau comme un ensemble de nucléons, traités de manière collective interagissant entre eux par interaction forte. Le noyau est considéré comme une matière incompressible. La force nucléaire est la même pour chaque nucléon, ainsi que est à courte portée.

Ce modèle a été proposé en 1935 par Von Weizsacher donnant une approche semi-empirique de l'énergie de liaison pour des noyaux appartenant à la vallée de stabilité. En 1936 Beth et Bacher ont simplifié cette approche en donnant la formule de Beth-Weizsacher [1, 4].

$$B(A, Z) = a_v A - a_s A^{2/3} - a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_a \frac{(N - Z)^2}{A} + \delta(A) \quad (2.1)$$

dont les paramètres sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_v = 15.56 \text{ Mev} \\ a_s = 17.23 \text{ Mev} \\ a_a = 23.6 \text{ Mev} \\ a_c = 0.7 \text{ Mev} \end{array} \right. \quad (2.2)$$

- Le terme a_v est un terme de volume qui correspond à l'énergie de liaison moyenne par nucléon.

- Le terme a_s est un terme de surface qui abaisse l'énergie de liaison.

- Le terme a_c est un terme de répulsion coulombienne des protons. La répulsion électrostatique entre protons tend à diminuer l'énergie de liaison.

- Le terme d'asymétrie a_a vient pour les noyaux lourds, le nombre de neutrons est supérieur à celui des protons pour compenser l'augmentation d'énergie de répulsion coulombienne.

- Le terme $\delta(A)$ est un terme quantique d'appariement traduit le fait que le noyau est plus stable lorsque les protons et neutrons sont appariés, de sorte que, $\delta = 0$ pour les noyaux pair-impair ou impair-pair, $\delta = 12A^{-1/2}$ pour les noyaux pair-pair et $\delta = -12A^{-1/2}$

pour les noyaux impair-impair.

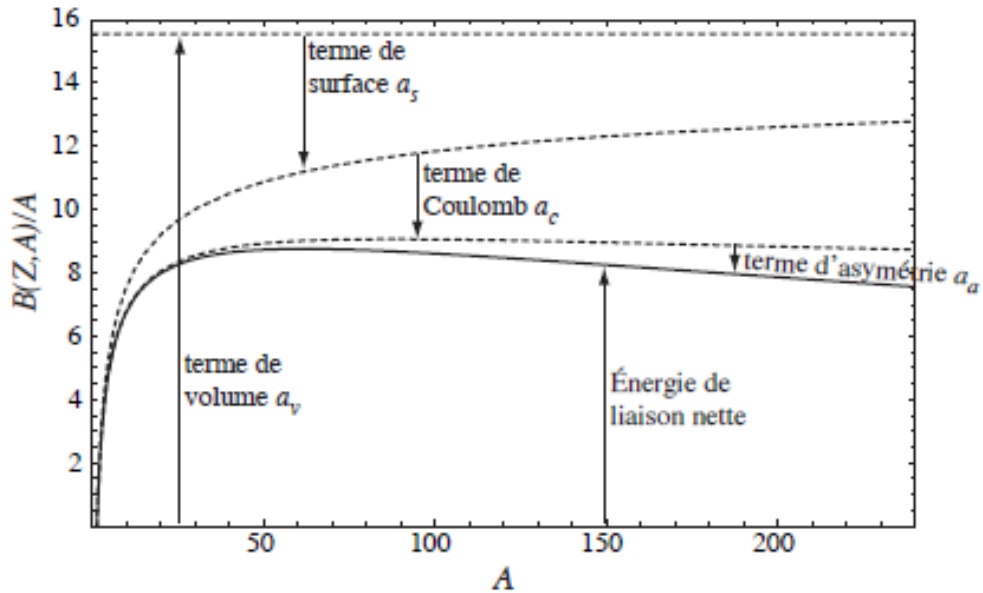


FIG. 2-1: Énergie de liaison par nucléon en fonction du nombre de masse A et contribution relative des différents termes de la formule de masse [4].

2.3 Modèle en couches des noyaux

Le modèle en couche ou modèle à particules indépendantes, est un modèle microscopique, à pour objectif de décrire la structure des noyaux où les nucléons sont arrangés dans des couches ou des niveaux dans le noyau. Dans ce modèle à particules indépendantes (les nucléons sont supposés indépendants), contrairement au modèle de la goutte liquide (modèle macroscopique), chaque nucléon se déplace dans un champ moyen créé par les autres nucléons sans aucune interaction entre eux. Approximativement, le champ moyen est un potentiel moyen $V(r)$ et peut avoir la forme d'un oscillateur harmonique [1, 4, 8].

2.3.1 Equation de Schrödinger

L'objet de ce problème est de déterminer la configuration du noyau dans l'état fondamental. Pour cela, on résout d'abord l'équation de Schrödinger pour un nucléon unique, puis on place les nucléons sur les niveaux successifs, on a [11] :

$$H\Psi(\vec{r}) = E\Psi(\vec{r}) \quad (2.3)$$

où :

H est l'hamiltonien du système, son expression est :

$$H = \frac{P^2}{2m} + V(r) \quad (2.4)$$

avec $V(r)$ est le potentiel de l'oscillateur harmonique.

Ψ est la fonction d'onde et E est l'énergie.

On peut écrire l'expression :

$$\Delta\Psi(\vec{r}) + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V(r))\Psi(\vec{r}) = 0 \quad (2.5)$$

Le potentiel $V(r)$ est un potentiel à symétrie sphérique et dépend de r et (θ, φ) qui désignent la position d'un nucléon. Les variables r et (θ, φ) sont indépendants, donc on peut écrire :

$$\Psi(\vec{r}) = R(r)S(\theta, \varphi) \quad (2.6)$$

Le laplacien en coordonnées sphérique s'écrit :

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \quad (2.7)$$

en remplaçant les expressions (2.6) et (2.7) dans l'expression (2.5), il vient :

$$\begin{aligned} \frac{S(\theta, \varphi)}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} R(r) \right) + \frac{R(r)}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} S(\theta, \varphi) \right) + \frac{R(r)}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} S(\theta, \varphi) \\ + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V(r)) R(r) S(\theta, \varphi) = 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

On multiplie par $\frac{r^2}{R(r)S(\theta,\varphi)}$, on obtient :

$$\frac{1}{R(r)} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR(r)}{dr} \right) + \frac{2mr^2}{\hbar^2} (E - V(r)) = \frac{-1}{S(\theta,\varphi)} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} S(\theta, \varphi) \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 S(\theta, \varphi)}{\partial \varphi^2} \right] \quad (2.9)$$

ceci nous permet de dire que :

$$\frac{1}{R(r)} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR(r)}{dr} \right) + \frac{2mr^2}{\hbar^2} (E - V(r)) = \lambda \quad (2.10)$$

$$\frac{-1}{S(\theta, \varphi)} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} S(\theta, \varphi) \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 S(\theta, \varphi)}{\partial \varphi^2} \right] = \lambda \quad (2.11)$$

L'expression (2.10) est une équation radial, tandis que l'expression (2.11) est une équation angulaire qui n'admet pas de solution physiquement acceptable que si la constante λ est de la forme $\lambda = l(l + 1)$ où l est un entier positif ou nul.

On multiplie par $\frac{R(r)}{r^2}$ et en remplaçant λ par son expression, l'équation (2.10) devient :

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR(r)}{dr} \right) + \left[\frac{2mr^2}{\hbar^2} (E - V(r)) - \frac{l(l + 1)}{r^2} \right] R(r) = 0 \quad (2.12)$$

Les solutions correspondantes sont alors les harmoniques sphériques $Y_l^m(\theta, \varphi)$ où l est un nombre quantique de moment angulaire orbital et m est un nombre quantique magnétique orbital.

Posant $R(r) = \frac{u(r)}{r}$, l'expression (2.12) devient :

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V(r)) - \frac{l(l + 1)}{r^2} \right] u(r) = 0 \quad (2.13)$$

Afin de trouver les énergies des états, de cette dernière expression, pour reproduire les nombres magiques 2, 8, 20, 28, 50, 82 et 126, et de décrire la structure en couches des noyaux, il faut déterminer la forme du potentiel moyen. En première approximation ce potentiel prend la forme d'un oscillateur harmonique sous forme : $-V_0 + \frac{1}{2}\mu\omega^2 r^2$. Ce potentiel reproduit seulement les nombres magiques 2, 8 et 20. Une amélioration a été apportée

en introduisant un terme représentant l'effet de bord Dl^2 , ($D < 0$), qui permet de lever la dégénérescence en l . Là encore on ne trouve pas la bonne séquence de nombres magiques, un autre troisième terme a été ajouté dit spin-orbite $f(r) \vec{l} \cdot \vec{s}$ au potentiel moyen.

Potentiel de l'oscillateur harmonique

$$V(r) = -V_0 + \frac{1}{2}\mu\omega^2 r^2 \quad (2.14)$$

où V_0 est la profondeur du puits de potentiel, μ est la masse réduite du nucléon ($\mu = m \frac{A-1}{A}$) et m étant la masse du nucléon libre et r est la distance entre le nucléon et l'origine du référentiel.

L'expression des niveaux d'énergies est donnée par :

$$\begin{aligned} E_N &= \left(N_x + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega + \left(N_y + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega + \left(N_z + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega \\ &= \left(N + \frac{3}{2}\right) \hbar\omega \end{aligned} \quad (2.15)$$

où la quantité $\hbar\omega$ représente le quantum de l'énergie de l'oscillateur harmonique.

et

$$\begin{aligned} N &= N_x + N_y + N_z \\ &= 2(n-1) + l \end{aligned} \quad (2.16)$$

où N est un nombre quantique principale prend les valeurs entières à partir de 0, n est un nombre quantique radial et l est un nombre quantique du moment angulaire orbital prend les valeurs repérés par des notations de la spectroscopie $l = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots$, qui correspondent respectivement les sous-couches $s, p, d, f, g, h, i, j, \dots$

On peut alors écrire pour quelques valeurs de N :

$$N = 0 \longrightarrow (n, l) = (1, 0) \longrightarrow 1s$$

$$N = 1 \longrightarrow (n, l) = (1, 1) \longrightarrow 1p$$

$$N = 2 \longrightarrow (n, l) = \begin{cases} (1, 2) \longrightarrow 1d \\ (2, 0) \longrightarrow 2s \end{cases}$$

$$N = 3 \longrightarrow (n, l) = \begin{cases} (1, 3) \longrightarrow 1f \\ (2, 1) \longrightarrow 2p \end{cases}$$

La spectroscopie d'un tel noyau pour les différentes valeurs de N est schématisée en structure en couches sur la figure suivante comme suit :

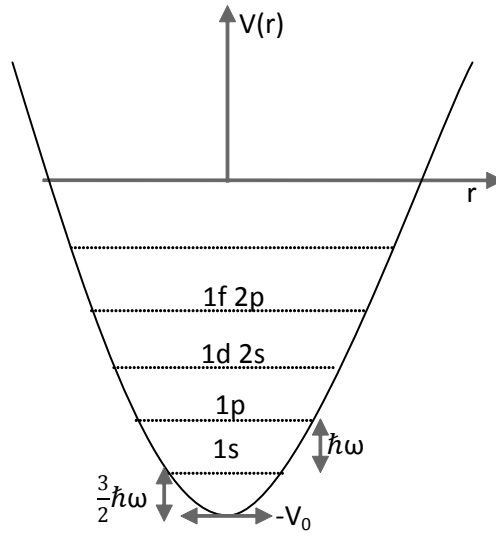


FIG. 2-2: Séquence des couches principales de l'oscillateur harmoniques.

La dégénérescence d_l de chaque couche se calcule à partir de la relation :

$$d_l = 2(2l + 1) \quad (2.17)$$

La parité (π) est une propriété des fonctions d'ondes décrivant le système du noyau en

mécanique quantique par :

- $\Psi(-\vec{r}) = \Psi(\vec{r})$ qui désigne à une parité positive.
 - $\Psi(-\vec{r}) = -\Psi(\vec{r})$ qui désigne à une parité négative.
- où $\pi = (-1)^l$.

Le tableau suivant résume les caractéristiques des premières couches et qui représentent les états des différents nucléons du noyau :

N	E_N	n	l	sous-couches	d_l	$\sum d_l$	π
0	$\frac{3}{2}\hbar\omega$	1	0	1s	2	2	+
1	$\frac{5}{2}\hbar\omega$	1	1	1p	6	8	-
2	$\frac{7}{2}\hbar\omega$	1 2	2 0	1d 2s	10 2	20	+
3	$\frac{9}{2}\hbar\omega$	1 2	3 1	1f 2p	14 6	40	-
4	$\frac{11}{2}\hbar\omega$	1 2 3	4 2 0	1g 2d 3s	18 10 2	70	+

Potentiel de Woods-Saxon

Le potentiel de Woods-Saxon est un potentiel réaliste du champ moyen empirique, sa forme est la même que celle de la distribution de Fermi et la même aussi que la densité nucléaire [11].

$$V_{w.s}(r) = \frac{V_0}{1 + \exp\left(\frac{r-R_0}{a}\right)} \quad (2.18)$$

où V_0 est la profondeur du puits, R_0 est le rayon du noyau représentant la largeur du potentiel et a_0 est l'épaisseur de surface. Les valeurs des paramètres sont :

$$\begin{cases} V_0 \simeq -50 \text{ Mev} \\ R_0 \simeq +1.1A^{1/3} \\ a \simeq 0.5 \text{ fm} \end{cases}$$

Ce potentiel est schématisé sur la figure suivante :

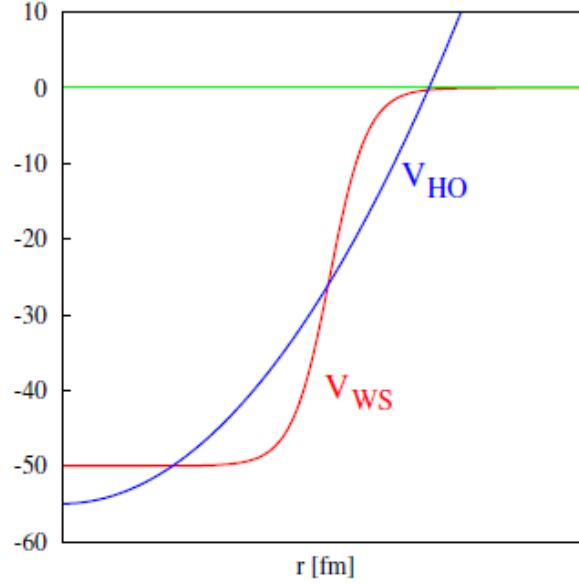


FIG. 2-3: Potentiel de l'oscillateur harmonique et le potentiel de Woods-Saxon [12]

Les deux potentiels cités précédemment ne sont pas suffisants pour interpréter tous les nombres magiques, d'où la nécessité d'ajouter un terme correctif dit le couplage spin-orbite.

Potentiel spin-orbite

M.G. Mayer et al ont proposé d'ajouter un terme spin-orbite au potentiel du champ moyen de l'oscillateur harmonique. Le potentiel du champ moyen prend la forme suivante [11] :

$$V(r) = V_{o.h} + Dl^2 + f(r) (\vec{s} \cdot \vec{l}) \quad (2.19)$$

où s et l représentent respectivement les vecteurs spin et le moment angulaire orbital et $f(r)$ est une fonction d'onde de potentiel. Cette interaction couplage spin-orbite explique qu'il existe un couplage fort entre le spin et le moment angulaire orbital de chaque nucléon et qui permet d'expliquer tous les nombres magiques de 2 jusqu'à 126. Les carrés des

valeurs numériques de s et l sont $s(s+1)$ et $l(l+1)$. Les deux vecteurs se combinent pour donner un moment angulaire total j .

où :

$$\vec{j} = \vec{l} + \vec{s} \quad (2.20)$$

le spin de nucléon est caractérisé par le nombre quantique $s = 1/2$ et le nombre j peut prendre les valeurs suivantes :

$$j = l + \frac{1}{2}, \quad \text{cas parallèle} \quad (2.21)$$

$$j = l - \frac{1}{2}, \quad \text{cas antiparallèle} \quad (2.22)$$

sauf pour, $l = 0$, $j = 1/2$.

La quantité du couplage spin-orbite se calcule comme :

$$\vec{l} \cdot \vec{s} = \frac{1}{2} (j^2 - l^2 - s^2) \quad (2.23)$$

$$= \frac{1}{2} \left[j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4} \right] \quad (2.24)$$

$$= \begin{cases} \frac{l}{2} & \text{si } j = l + \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}(l+1) & \text{si } j = l - \frac{1}{2} \end{cases}$$

Expérimentalement, il est trouvé que la fonction d'onde $f(r)$ est négative, ce qui veut dire que le niveau $j = l - \frac{1}{2}$ est toujours plus haut que le niveau $j = l + \frac{1}{2}$.

La différence entre les énergies potentielles est donnée par :

$$\begin{aligned} \Delta U_{sl} &= f(r) \left[\left(\vec{l} \cdot \vec{s} \right)_{\text{parallèle}} - \left(\vec{l} \cdot \vec{s} \right)_{\text{antiparallèle}} \right] \\ &= \frac{1}{2} f(r) (2l + 1) \end{aligned} \quad (2.25)$$

La figure (2.3) montre que les nombres magiques sont identiques à ceux de l'oscillateur harmonique jusqu'à 20. Au-delà, le terme de spin-orbite devient si important (puisque la levée de dégénérescence s'accroît avec l), que c'est lui qui détermine les nombres magiques

à partir de 28 comme on peut le constater sur le figure (2.3).

Les noyaux sphériques ayant un nombre de protons ou de neutrons égal à un nombre magique sont donc plus stables que leurs voisins.

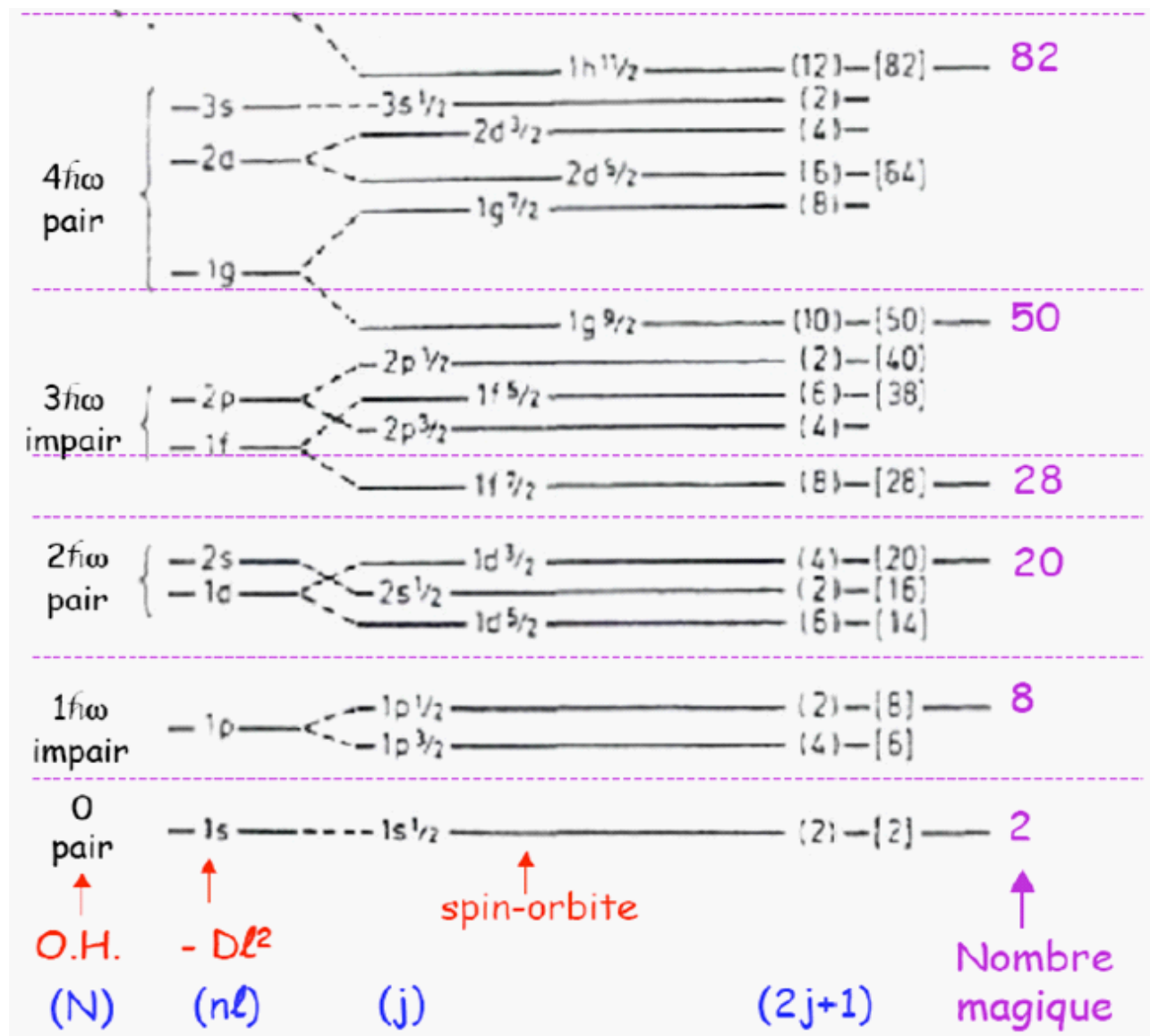


FIG. 2-4: Les niveaux d'énergie des nucléons dans le modèle en couches.

Spin et parité des états fondamentaux des noyaux

- Un noyau pair-pair, (Z pair et N pair), a un moment angulaire total d'état fondamental,

$$J = 0^+ \quad (2.26)$$

- Un noyau impair, (Z impair et N pair ou Z pair et N impair), a un moment angulaire demi entier J et à la parité,

$$\pi = (-1)^l, \quad (2.27)$$

de la particule célibataire. Il existe quelques exceptions à cette règle, par exemple le noyau ${}^9F_{10}$ (J observé est $(\frac{1}{2})^+$ et J preuve est $(\frac{5}{2})^+$).

- Un noyau impair-impair a un moment angulaire total qui est la somme vectorielle des valeurs de J du proton impair et du neutron impair, tels que :

$$\vec{J} = \vec{J}_p + \vec{J}_n \iff |J_n - J_p| \leq J \leq J_n + J_p \quad (2.28)$$

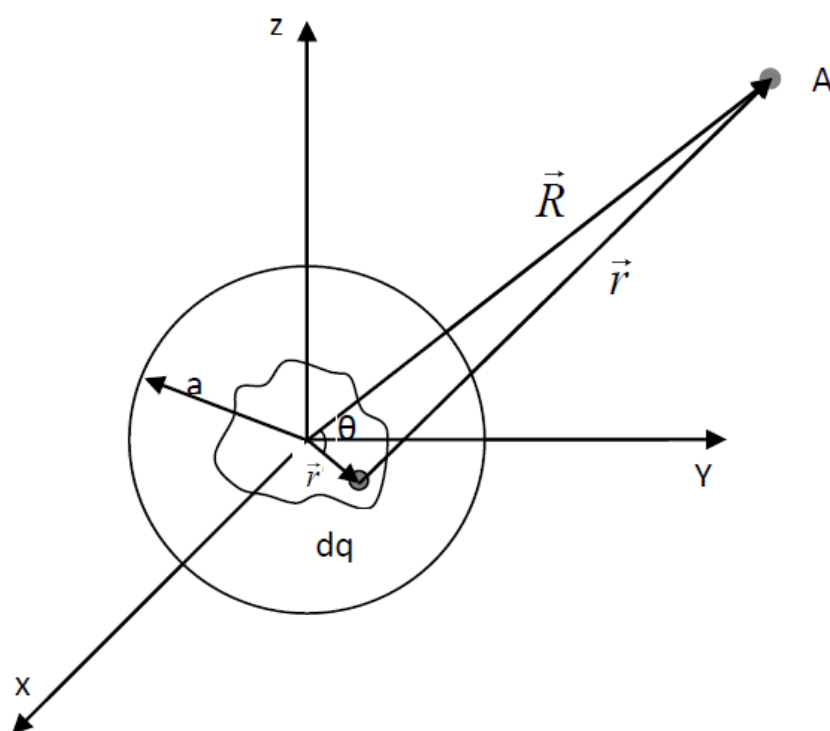
et la parité $\pi = (-1)^{l_n}(-1)^{l_p}$.

2.4 Moment quadripolaire électrique

Le moment quadripolaire électrique permet de mettre en évidence la déformation des noyaux par rapport à la forme sphérique ou bien il permet de mesurer la déviation de la distribution de charge par rapport à la sphéricité. Considérons une distribution de charge $\rho(r)$ contenue dans une sphère de rayon a . Plaçons l'origine d'un système d'axes $Oxyz$ au centre de cette sphère et considérons un observateur situé suffisamment loin de la distribution ($R \gg a$). Soit un élément de charge $dq = \rho d\tau$ et sa distribution dv_A au potentiel en A .

on a : $dv_A = \frac{dq}{r^2}$ et que :

$$\vec{R} = \vec{r} + \vec{r}' \quad (2.29)$$



$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \vec{r}' &= \vec{R} - \vec{r} \\
 &= R \left[1 - 2 \frac{r}{R} \cos \theta + \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]^{1/2}
 \end{aligned} \tag{2.30}$$

Posons $\frac{r}{R} = t \ll 1$

Donc :

$$r' = R (1 - 2t \cos \theta + t^2)^{1/2} \tag{2.31}$$

d'où :

$$\begin{aligned}
 dv_A &= \frac{dq}{r'} \\
 &= \frac{dq}{R} (1 - 2t \cos \theta + t^2)^{-1/2}
 \end{aligned} \tag{2.32}$$

La quantité $(1 - 2t \cos \theta + t^2)^{-1/2}$ est appelée fonction génératrice des polynômes de Legendre.

on peut écrire donc :

$$(1 - 2t \cos \theta + t^2)^{-1/2} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos \theta) t^l \quad (2.33)$$

avec :

$$\begin{cases} P_0(\cos \theta) = 1 \\ P_1(\cos \theta) = \cos \theta \\ P_2(\cos \theta) = \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2} \end{cases} \quad (2.34)$$

En remplaçant ces dernières expressions dans l'expression (2.32), il vient :

$$dv_A = \frac{dq}{R} \left[1 + \frac{r}{R} \cos \theta + \frac{r^2}{R^2} \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2} \right] \quad (2.35)$$

Finalement :

$$\begin{aligned} v_A &= \iiint_v dv_A \\ &= \frac{1}{R} \iiint_V \rho d\tau + \frac{1}{R^2} \iiint_V r \cos \theta \rho d\tau + \frac{1}{R^3} \iiint_V \frac{r^2 (3 \cos^2 \theta - 1)}{2} \rho d\tau \end{aligned} \quad (2.36)$$

où :

$\iiint_v \rho d\tau = c$ est un moment monopole électrique de la distribution d'ordre 0, $\iiint_v r \cos \theta \rho d\tau$ est un moment dipolaire électrique d'ordre 1 et $\iiint_v \frac{r^2 (3 \cos^2 \theta - 1)}{2} \rho d\tau = Q$ est un moment quadripolaire électrique de la distribution d'ordre 2.

Si A situé sur l'axe Oz , l'expression (2.36) devient :

$$v_A = \frac{c}{R} + \frac{1}{R^2} \iiint_V z \rho d\tau + \frac{1}{R^3} \iiint_V \frac{(3z^2 - r^2)}{2} \rho d\tau \quad (2.37)$$

avec :

$$z = r \cos \theta \quad (2.38)$$

si la distribution de charge admet un plan symétrie perpendiculaire à Oz et passant par

l'origine, c'est à dire le moment dipolaire s'annule pour une telle distribution, alors on a :

$$\begin{aligned} \rho \iiint_v z d\tau &= \rho \int dx \int dy \int_{-Z}^{Z_0} z dz \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.39)$$

l'expression (2.37) devient alors :

$$v_A = \frac{c}{R} + \frac{1}{R^3} \iiint_V \frac{(3z^2 - r^2)}{2} \rho d\tau \quad (2.40)$$

$$\text{avec : } r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

2.5 Moment quadripolaire électrique d'un ellipsoïde

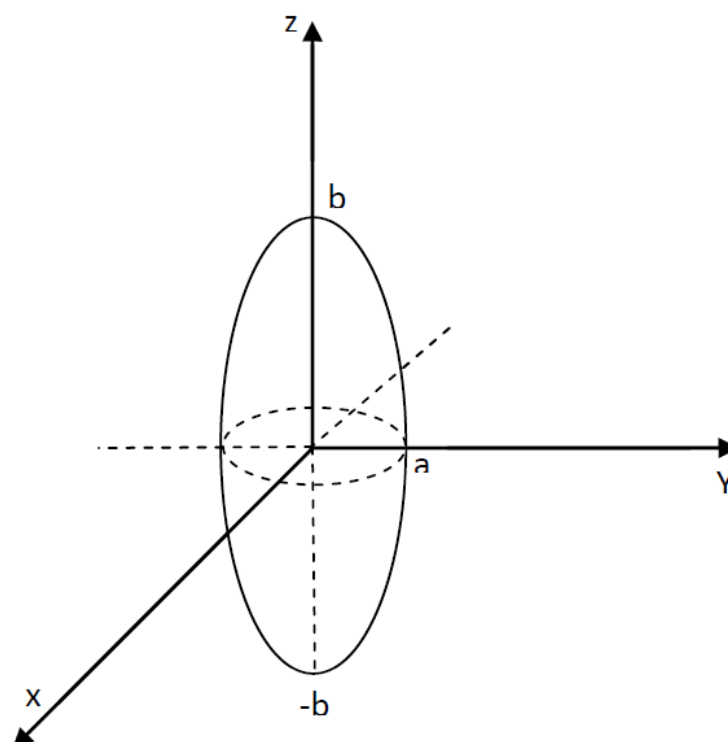
Simulons le noyau par un objet ellipsoïdal de demi-axes a et b , b étant porté par Oz , et l'on supposera que l'ellipsoïde renferme la charge Z_e avec une densité de charge centrale.

à partir de l'expression (2.40), on peut écrire l'expression du moment quadripolaire Q par :

$$\begin{aligned} Q &= \rho \iiint_v \frac{3z^2 - r^2}{2} d\tau \\ &= \rho \iiint_v z^2 d\tau - \frac{\rho}{2} \iiint_v (x^2 + y^2) d\tau \end{aligned} \quad (2.41)$$

Considérons les coordonnées cylindriques (γ, φ, z) :

$$\begin{cases} x = \gamma \cos \varphi \\ y = \gamma \sin \varphi \\ z = z \end{cases} \quad (2.42)$$



et l'équation d'une ellipse :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 \quad (2.43)$$

d'où : $z = \pm b\sqrt{1 - \gamma^2/a^2}$, $0 \leq \gamma \leq a$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ et $d\tau = \gamma d\gamma d\varphi dz$.

après l'intégration l'expression (2.41), on obtient :

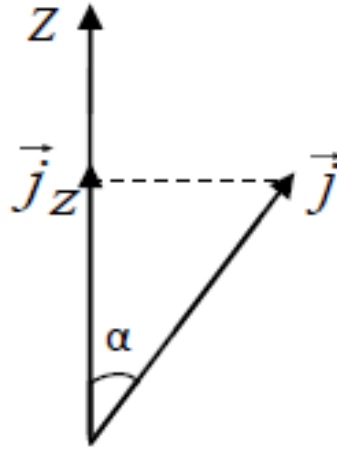
$$\begin{aligned} Q &= \frac{4}{3} \rho \pi a^2 b \left(\frac{b^2 - a^2}{5} \right) \\ &= Z_e \left(\frac{b^2 - a^2}{5} \right) \end{aligned} \quad (2.44)$$

avec : $Z_e = \frac{4}{3} \rho \pi a^2 b$.

- si $Q > 0$ alors $b > a$, on a donc une forme de ballon de Rugby.
- si $Q < 0$ alors $b < a$, on a donc une forme de disque aplati.
- si $Q = 0$ alors $b = a$, on a donc une forme sphérique.

2.6 Description quantique du moment quadripolaire

Dans une approche semi-classique, on remarque que si j est le moment cinétique de la particule et m_j sa projection sur l'axe du gradient de champ, choisi comme axe de quantification, alors on peut écrire à partir de la figure suivante :



$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{|\vec{j}_z|}{|\vec{j}|} \\ &= \frac{m_j}{\sqrt{j(j+1)}} \end{aligned} \quad (2.45)$$

m_j est la valeur propre de j_z .

L'opérateur quadripolaire $(2j + 1)$ valeurs s'écrit :

$$Q_{m,j} = \int \varphi_{j,m_j}^*(r) [q(3z^2 - r^2)] \varphi_{j,m_j}(r) d\tau \quad (2.46)$$

où φ_{j,m_j} est la fonction d'onde associée à l'état $|j, m_j\rangle$.

2.7 Moment magnétique Dipolaire

Le moment magnétique dipolaire est induit par le moment magnétique dipolaire intrinsèque des protons et des neutrons du noyau, et par les courants qui circulent dans le noyau à cause du mouvement des protons.

Le moment magnétique orbital (μ_l) d'un atome s'écrit [9] :

$$\begin{aligned}\vec{\mu}_l &= \frac{-e\hbar}{2m_e c} \vec{l} \\ &= -\mu_b \vec{l}\end{aligned}\tag{2.47}$$

où $\mu_b = \frac{-e\hbar}{2m_e c}$ est le magnétons de l'électrons se mesure en magnétons de Bohr.

Le moment magnétique de spin (μ_s) d'un atome s'écrit :

$$\vec{\mu}_s = -2\mu_b \vec{s}\tag{2.48}$$

Le moment magnétique orbital des nucléons ($\vec{\mu}_l^p$ pour les protons et $\vec{\mu}_l^n = 0$ pour les neutrons) est donné par [9] :

$$\vec{\mu}_l^p = g_l \mu_N \vec{l}\tag{2.49}$$

où $\mu_N = \frac{-e\hbar}{2m_p c}$ est le moment magnétique du noyau se mesure en magnétons nucléaire et g_l est un facteur positif ou négatif, vaut :

$$\begin{cases} g_l = 1 & \text{pour les protons} \\ g_l = 0 & \text{pour les neutrons} \end{cases}\tag{2.50}$$

Le moment magnétique de spin des nucléons ($\vec{\mu}_s^p$ pour les protons et $\vec{\mu}_s^n$ pour les neutrons) s'écrit :

$$\begin{cases} \vec{\mu}_s^p = g_s \mu_N \vec{s} \\ \vec{\mu}_s^n = g_s \mu_N \vec{s} \end{cases}\tag{2.51}$$

où :

$$\begin{cases} g_s = 5.85 & \text{pour les protons} \\ g_s = -3.83 & \text{pour les neutrons} \end{cases} \quad (2.52)$$

Le moment magnétique total s'écrit :

$$\begin{aligned} \vec{\mu}_j &= g_j \mu_N \vec{j} \\ &= \vec{\mu}_l + \vec{\mu}_s \end{aligned} \quad (2.53)$$

Le module du vecteur $\vec{\mu}_j$ est :

$$\mu_j = \mu_l \cos(\vec{j}, \vec{l}) + \mu_s \cos(\vec{j}, \vec{s}) \quad (2.54)$$

avec :

$$\begin{cases} \cos(\vec{j}, \vec{l}) = \frac{j^2 + l^2 - s^2}{2jl} \\ \cos(\vec{j}, \vec{s}) = \frac{j^2 + s^2 - l^2}{2jl} \end{cases} \quad (2.55)$$

et

$$g_j = g_l \frac{j(j+1) + l(l+1) - s(s+1)}{2j(j+1)} + g_s \frac{j(j+1) + s(s+1) - l(l+1)}{2j(j+1)} \quad (2.56)$$

Cas parallèle : En remplaçant l'expression (2.21) dans l'expression (2.56), il vient :

$$g_j = g_l \frac{l}{l+1/2} + g_s \frac{1}{2(l+1/2)} \quad (2.57)$$

$$= \frac{1}{j} \left[jg_l + \frac{1}{2}(g_s - g_l) \right] \quad (2.58)$$

Cas antiparallèle : De même, en remplaçant l'expression (2.22) dans l'expression (2.56), il vient :

$$g_j = g_l \frac{l+1}{l+1/2} - g_s \frac{1}{2(l+1/2)} \quad (2.59)$$

$$= \frac{1}{j+1} \left[jg_l + \frac{1}{2}(3g_l - g_s) \right] \quad (2.60)$$

On trace μ_j/μ_N pour protons et neutrons comme suit :

Pour les protons D'après les expressions (2.58) et (2.60) on a :

$$g_j = \begin{cases} 1 + 2.29/j , & \text{avec } j = l + 1/2 \\ \frac{1}{j+1}(j - 1.29) , & \text{avec } j = l - 1/2 \end{cases} \quad (2.61)$$

et à partir de l'expression (2.53), on peut écrire :

$$\frac{\mu_j}{\mu_N} = g_j j \quad (2.62)$$

En utilisant l'expression (2.61) dans cette dernière expression, on trouve :

$$\frac{\mu_j}{\mu_N} = \begin{cases} j + 2.29 , & \text{pour } j = l + 1/2 \\ \frac{j}{j+1}(j - 1.29) , & \text{pour } j = l - 1/2 \end{cases} \quad (2.63)$$

Pour les neutrons De même pour les neutrons, on obtient :

$$g_j = \begin{cases} -1.91/j , & \text{avec } j = l + 1/2 \\ 1.91/(j + 1) , & \text{avec } j = l - 1/2 \end{cases} \quad (2.64)$$

et

$$\frac{\mu_j}{\mu_N} = \begin{cases} -1.91 , & \text{pour } j = l + 1/2 \\ 1.91j/(j + 1) , & \text{pour } j = l - 1/2 \end{cases} \quad (2.65)$$

2.8 Interaction noyau champ magnétique externe

Soit \vec{H} un champ magnétique créé par les électrons et \vec{H}_e un champ magnétique externe. Le noyau étant soumis au champ magnétique externe en considérant qu'il y a interaction entre ce champ et le moment magnétique $\vec{\mu}_i$ du noyau. Cette interaction est caractérisée par une énergie de couplage $\Delta\omega$. Le couplage entre i et j forme le moment angulaire de l'atome comme :

$$\vec{F} = \vec{i} + \vec{j} \quad (2.66)$$

où :

$$|i - j| \leq F \leq i + j \quad (2.67)$$

2.8.1 Champ magnétique externe faible

L'interaction (\vec{j}, \vec{H}_e) est faible devant l'interaction (\vec{i}, \vec{j}) qui se couplent pour donner $\vec{F} = \vec{i} + \vec{j}$ ainsi que (\vec{i}, \vec{j}) processionnent autour de \vec{F} qui processionnent autour de \vec{H}_e . L'énergie d'interaction s'écrit :

$$\Delta\omega = -\vec{\mu}_F \vec{H}_e \quad (2.68)$$

$$= -\mu_F \vec{H}_e \cos(\vec{F}, \vec{H}_e) \quad (2.69)$$

où :

$$\vec{\mu}_F = \vec{\mu}_i + \vec{\mu}_j \quad (2.70)$$

avec :

$$\vec{\mu}_j = g_j \mu_b \vec{j} \quad (2.71)$$

et :

$$\vec{\mu}_i = g_i \mu_N \vec{i} \quad (2.72)$$

2.8.2 Champ magnétique externe fort

Les interactions (\vec{i}, \vec{H}_e) et (\vec{j}, \vec{H}_e) sont très supérieures à l'interaction (\vec{i}, \vec{j}) de couplage. Il y a donc rupture de couplage \vec{i} et \vec{j} . L'énergie d'interaction s'écrit :

$$\Delta\omega = -\vec{\mu}_i \vec{H}_e - \vec{\mu}_j \vec{H}_e \quad (2.73)$$

2.8.3 Absence du champ magnétique externe

On a dans ce cas une énergie d'interaction entre le noyau et le champ créé par le cortège électronique. Celle-ci est de la forme :

$$\Delta\omega = -\vec{\mu}_i \cdot \vec{H}(0) \quad (2.74)$$

2.9 Exercices

Exercice 1. Déterminer le bilan d'énergie d'une réaction (p, n) à l'aide de la formule semi-empirique de masse de Von Weizacker. En utilisant les noyaux miroirs ${}^3_1\text{He}$ et ${}^3_1\text{H}$, calculer le terme d'interaction coulombienne de la formule de Von Weizacker. On donne : $[M({}^3\text{He}) - M({}^3\text{H})]c^2 = 0.073 \text{ MeV}$, $[M(n) - M({}^1\text{H})]c^2 = 0.782 \text{ MeV}$.

Exercice 2. On considère la réaction ${}^{51}_{23}\text{V}(p, n){}^{51}_{24}\text{Cr}$ où $Q = -1.705 \text{ MeV}$ et la désintégration ${}^{51}\text{Ti} \longrightarrow {}^{51}\text{V} + \beta^- + \bar{\nu}$ où $T_{\beta_{\max}^-} = 2.28 \text{ MeV}$.

Sachant que : $[M(n) - M({}^1\text{H})]c^2 = 0.782 \text{ MeV}$.

1. Déterminer pour $A = 51$, les termes coulombien et d'asymétrie de la formule de Von Weizacker.

2. Pour quelle charge Z , le noyau est-il le plus stable ?

Exercice 3. Préciser, dans le cadre du modèle en couches, les caractéristiques spins et parités de l'état fondamental des noyaux ${}^4_2\text{He}$, ${}^{10}_5\text{B}$, ${}^{13}_6\text{C}$, ${}^{13}_7\text{Ni}$, ${}^{14}_6\text{C}$, ${}^{17}_8\text{O}$, ${}^{27}_{13}\text{Al}$ et ${}^{40}_{20}\text{Ca}$.

Exercice 4. Exprimer le moment quadripolaire (Q) en fonction de \bar{r}_p^2 puis Calculer Q du noyau ne possédant en plus des couches remplies qu'un proton en état : $s^{1/2}$; $p^{3/2}$ et $d^{5/2}$.

Exercice 5. L'atome dans l'état fondamental ${}^2s_{1/2}$ dont le noyau a un spin I est plongé dans un champ externe H .

1. Le champ magnétique externe est faible. Trouver les valeurs propres ΔW de l'énergie des différents sous-niveaux (on calculera g_i , $g_f(I)$ et on donnera l'expression de ΔW de chaque sous-niveau en fonction de I , M_F et H).

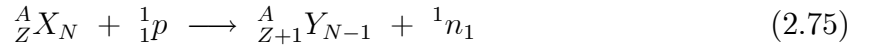
2. Le champ magnétique externe est un champ fort. Trouver les valeurs propres ΔW de l'énergie des différents sous-niveaux.

3. Application numérique : représenter graphiquement la décomposition hyperfine de l'état fondamental $^2s_{1/2}$ de l'isotope ^{42}K de spin $I = 2$ dans les trois cas : absence de champ externe, champ faible, champ fort.

2.10 Solutions des exercices

Exercice 1

Déterminons le bilan énergétique (Q) de la réaction (p, n) à l'aide de la formule semi-empirique de masse de Von Weizacker. Soit la réaction :



pour cela nous utilisons l'expression (1.20), il vient :

$$Q = [m({}^A_Z X_N) + m_p - m({}^A_{Z+1} Y_{N-1}) - m_n] c^2 \quad (2.76)$$

$$= [m({}^A_Z X_N) + Zm_e + m_e + m_p - m({}^A_{Z+1} Y_{N-1}) - (Z+1)m_e - m_n] c^2 \quad (2.77)$$

$$= [M_{at}({}^A_Z X_N) + M_H - M_{at}({}^A_{Z+1} Y_{N-1}) - m_n] c^2 \quad (2.78)$$

on sait que et d'après l'expression (1.41), on a :

$$B(A, Z) = [ZM_H + Nm_n - M_{at}(A, Z)] c^2 \quad (2.79)$$

l'expression de la masse atomique à partir de cette dernière expression est alors :

$$M_{at}(A, Z) c^2 = [ZM_H + Nm_n] c^2 - B(A, Z) \quad (2.80)$$

on remplace l'expression (2.80) dans l'expression (2.78), il vient :

$$Q = B(A, Z + 1) - B(A, Z) \quad (2.81)$$

on sait que l'énergie de liaison des nucléons dans le noyau, ou formule de Beth-Weizsacher, d'après l'expression (2.1) est :

$$B(A, Z) = a_v A - a_s A^{2/3} - a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_a \frac{(N - Z)^2}{A} + \delta(A) \quad (2.82)$$

on remplace cette dernière expression dans (2.81), on obtient :

$$Q = \frac{-a_c}{A^{1/3}} (2Z + 1) + \frac{4a_a}{A} (A - 2Z - 1) \quad (2.83)$$

afin de calculer le terme d'interaction coulombienne (a_c) de la formule de Von Weizsacker, nous calculons d'abord le bilan Q des noyaux miroirs ${}^3_1\text{He}$ et ${}^3_1\text{H}$, soit l'interaction :



le bilan Q de cette dernière expression d'après l'expression (2.78) est :

$$Q = [M_{at}({}^3_1\text{H}) + M_H - M_{at}({}^3_2\text{He}) - m_n] c^2 \quad (2.85)$$

le terme (a_c) se calcule à partir de l'expression (2.83) en remplaçant le bilan Q par son expression (2.85), soit :

$$a_c \simeq 0.41 \text{ MeV} \quad (2.86)$$

Exercice 2

1. Déterminons pour $A = 51$, les termes coulombien (a_c) et d'asymétrie (a_s) de la formule de Von Weizsacker.

soit la première réaction donnée :



le bilan d'énergie de cette réaction est :

$$Q = [M_{at}({}_{23}^{51}\text{V}) + m_p - M_{at}({}_{24}^{51}\text{Cr}) - m_n] c^2 \quad (2.88)$$

en appliquant l'expression (2.83), sur cette dernière expression pour $A = 51$, $Z = 23$ et $Q = -1.705 \text{ MeV}$, on obtient une première équation :

$$\frac{-47a_c}{51^{1/3}} + \frac{16a_a}{51} = -1.705 \quad (2.89)$$

nous avons la deuxième réaction :



en appliquant la loi de la conservation de l'énergie totale sur cette dernière réaction, on obtient :

$$m_{Ti}c^2 = m_Vc^2 + m_{\beta^-}c^2 + T_{\beta^-} + T_{\bar{\nu}} \quad (2.91)$$

on peut écrire l'expression du bilan énergétique de la désintégration bêta moins (Q_{β^-}) de la réaction (2.90) à partir de cette dernière expression :

$$Q_{\beta^-} = [m_{Ti} - m_V - m_{\beta^-}] c^2 \quad (2.92)$$

$$= T_{\beta^-} + T_{\bar{\nu}} \quad (2.93)$$

$$= T_{\beta_{Max}^-} \quad (2.94)$$

on ajoute et retranche $(Z - 1)m_e$ dans l'expression (2.92), on obtient :

$$Q_{\beta^-} = [M_{at}({}_{22}^{51}\text{Ti}) - M_{at}({}_{23}^{51}\text{V})] c^2 \quad (2.95)$$

en utilisant l'expression (2.80), on peut écrire cette dernière expression comme suit :

$$Q_{\beta^-} = [-M_H + m_n] c^2 + B(A, Z) - B(A, Z - 1) \quad (2.96)$$

l'utilisation de l'équation d'énergie de liaison $B(A, Z)$ de l'expression (2.1) nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned} Q_{\beta^-} &= [-M_H + m_n] c^2 - \frac{a_c}{A^{1/3}} (2Z - 1) + \frac{4a_a}{A} (A - 2Z + 1) \\ &= T_{\beta_{\max}^-} \end{aligned} \quad (2.97)$$

en utilisant les valeurs numériques pour $A = 51$, $Z = 23$ et $T_{\beta_{\max}^-} = 2.28 \text{ MeV}$, on obtient une deuxième équation :

$$\frac{-45a_c}{51^{1/3}} + \frac{24a_a}{51} = -0.782 \quad (2.98)$$

à partir de cette dernière expression et l'expression (2.89), on peut trouver les valeurs des termes a_c et a_s de la formule de Von Weizsacker comme suit :

$$\begin{cases} a_c = 0.59 \text{ MeV} \\ a_a = 18.4 \text{ MeV} \end{cases} \quad (2.99)$$

2. Déterminons Z pour le noyau le plus stable. Le noyau le plus stable est qui a une énergie de liaison des nucléons maximale, c-à-d :

$$\left. \frac{\partial B(A, Z)}{\partial Z} \right|_{Z=Z_0} = 0 \quad (2.100)$$

on dérive l'équation de l'expression (2.1), on obtient :

$$\left. \frac{\partial B(A, Z)}{\partial Z} \right|_{Z=Z_0} = \frac{-2a_c Z_0}{A^{1/3}} + \frac{4a_a (A - 2Z_0)}{A} = 0 \quad (2.101)$$

en remplaçant les valeurs de l'expression (2.101) et $A = 51$ dans cette dernière expression, on obtient :

$$Z_0 = 23$$

ceci montre que l'élément le plus stable correspond à $Z_0 = 23$ est ${}^{51}_{23}\text{V}$.

Exercice 3. En utilisant les expressions (2.26), (2.27) et (2.28), on peut trouver dans le cadre du modèle en couches les caractéristiques spins (J) et parités (π) de l'état fondamental des noyaux comme suit :

- le noyau ${}^4_2\text{He}$, $J^\pi = 0^+$.
- le noyau ${}^{10}_5\text{B}$, $J^\pi = 0^+$, 1^+ , 2^+ et 3^+ , ce sont des valeurs possibles, tandis que la valeur réelle est $J^\pi = 3^+$.
- le noyau ${}^{13}_6\text{C}$, $J^\pi = \left(\frac{1}{2}\right)^-$.
- le noyau ${}^{13}_7\text{Ni}$, $J^\pi = \left(\frac{1}{2}\right)^-$.
- le noyau ${}^{14}_6\text{C}$, $J^\pi = 0^+$.
- le noyau ${}^{17}_8\text{O}$, $J^\pi = \left(\frac{5}{2}\right)^+$.
- le noyau ${}^{27}_{13}\text{Al}$, $J^\pi = \left(\frac{5}{2}\right)^+$.
- le noyau ${}^{40}_{20}\text{Ca}$, $J^\pi = 0^+$.

Exercice 4. En exprimant le moment quadripolaire (Q) en fonction de \bar{r}_p^2 .

Nous écrivons l'opérateur quadripolaire ($2j + 1$) valeurs comme suit :

$$Q_{m_j} = \int \phi_{j,m_j}^*(r) [q(3z^2 - r^2)] \phi_{j,m_j}(r) d\tau \quad (2.102)$$

ces valeurs sont reliées entre elles par la relation :

$$\frac{Q_{m_{j_1}}}{Q_{m_{j_2}}} = \frac{3m_{j_1}^2 - j(j+1)}{3m_{j_2}^2 - j(j+1)} \quad (2.103)$$

avec $\phi_{j,m_j}(r)$ est une fonction d'onde associée à l'état $|j, m_j\rangle$.

on peut écrire :

$$Q_j = \int \phi_{j,j}^*(r) [q(3z^2 - r^2)] \phi_{j,j}(r) d\tau \quad (2.104)$$

où,

$$\phi_{j,j}(r) = R_l(r) Y_l^l(\theta, \vartheta) , \quad (2.105)$$

sont des harmoniques sphériques.

et

$$d\tau = r^2 \sin \theta dr d\theta d\vartheta \quad (2.106)$$

on remplaçant ces deux dernières expressions et l'expression (2.38) dans l'expression (2.14), on obtient :

$$Q_j = \int |R_l(r)|^2 |Y_l^l(\theta, \vartheta)|^2 [q(3r^2 \cos^2 \theta - r^2)] r^2 \sin \theta dr d\theta d\vartheta \quad (2.107)$$

$$= \frac{(2l+1)!! q \bar{r}_p^2}{2^{l+2} l! \pi} \int_0^\pi (3 \cos^2 \theta - 1) (\sin \theta)^{2l+1} d\theta \int_0^{2\pi} d\vartheta \quad (2.108)$$

où nous avons posé :

$$\bar{r}_p^2 = \int |R_l(r)|^2 r^4 dr \quad (2.109)$$

et

$$|Y_l^l(\theta, \vartheta)|^2 = \frac{(2l+1)!! (\sin \theta)^{2l}}{2^{l+2} l! \pi} \quad (2.110)$$

Le calcul de Q du noyau ne possédant en plus des couches remplies qu'un proton en état : $s^{1/2}$; $p^{3/2}$ et $d^{5/2}$ s'effectue à partir de l'expression (2.107) comme suit :

- Pour l'état $s^{1/2}$, le moment angulaire orbital qui correspond cet état est $l = 0$, et on obtient à partir de l'expression (2.108) :

$$Q_j = \frac{q \bar{r}_p^2}{2} \int_0^\pi (3 \cos^2 \theta - 1) \sin \theta d\theta \quad (2.111)$$

$$= 0 \quad (2.112)$$

- Pour l'état $p^{3/2}$, le moment angulaire orbital qui correspond cet état est $l = 1$, soit à

partir de l'expression (2.108) :

$$Q_j = \frac{3q\bar{r}_p^2}{4} \int_0^\pi (3 \cos^2 \theta - 1) \sin^3 \theta d\theta \quad (2.113)$$

$$= \frac{-2}{5} q\bar{r}_p^2 \quad (2.114)$$

- Pour l'état $d^{5/2}$, le moment angulaire orbital qui correspond cet état est $l = 2$, le moment quadripolaire devient à partir de l'expression (2.108) :

$$Q_j = \frac{-4}{5} q\bar{r}_p^2 \quad (2.115)$$

Chapitre 3

Transitions Nucléaires

3.1 Emission Alpha

Dans la nature la plupart des noyaux sont stables mais il y a certains noyaux sont instables qui permettent se désintégrer en émettant une particule alpha (α), noyau d'hélium ${}^4_2\text{He}$. Cette désintégration est réservée aux nucléides lourds qui possèdent une grande énergie (MeV). L'équation générale de l'activité α est [1, 8] :



Au cours de cette désintégration, il y a libération d'énergie qui s'appelle énergie de désintégration α . Pour cela, en appliquant le principe de la conservation de l'énergie totale (énergie cinétique + énergie de masse), il vient :

$$M_X c^2 + T_X = M_Y c^2 + T_Y + M_\alpha c^2 + T_\alpha \quad (3.2)$$

Le bilan d'énergie (Q) de cette réaction est :

$$Q = (M_X - M_Y - M_\alpha) c^2 \quad (3.3)$$

$$= T_Y + T_\alpha \quad (3.4)$$

On applique le principe de la conservation de l'impulsion, il vient :

$$\vec{0} = \vec{P}_y + \vec{P}_\alpha \quad (3.5)$$

ce qui nous donne :

$$T_Y = \frac{M_\alpha}{M_y} T_\alpha \quad (3.6)$$

On remplace l'expression (3.6) dans l'expression (3.4), on obtient :

$$Q = \frac{M_\alpha + M_y}{M_y} T_\alpha \quad (3.7)$$

Le diagramme d'énergie de liaison de l'émission Alpha d'un noyau est :

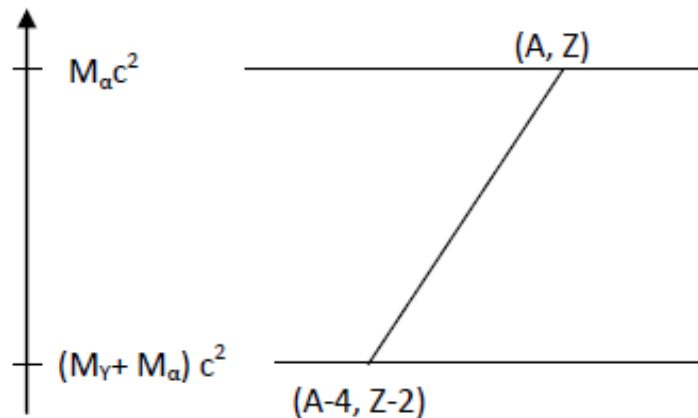
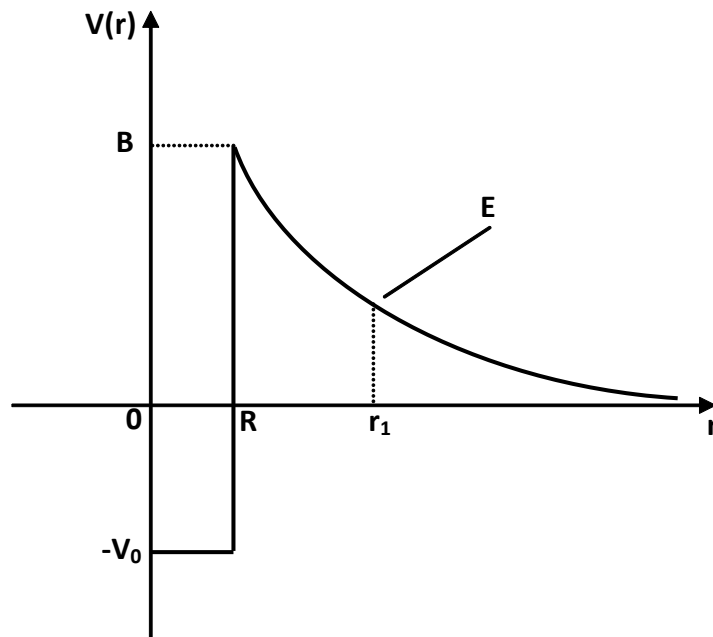


FIG. 3-1: Diagramme d'énergie de liaison de l'émission Alpha d'un noyau.

La particule alpha ont un pouvoir faiblement pénétrant et peuvent être arrêtée par une feuille de papier. Elle est piégée dans le potentiel nucléaire. Une barrière coulombienne l'empêche de sortir, et cette barrière peut être franchie par effet tunnel (effet probabiliste de mécanique quantique), comme indiquée sur la figure 3-1. Le facteur de la pénétration T (ou coefficient de transmission) de la barrière coulombienne s'écrit :

$$T = e^{-2G} \quad (3.8)$$

FIG. 3-2: Evolution de la particule α dans la barrière de potentiel

avec :

$$G = \frac{1}{\hbar} \int_R^{r_1} \sqrt{2m [V(r) - E]} dr \quad (3.9)$$

et

$$V(r) = \frac{zZe^2}{r} \quad (3.10)$$

3.1.1 Potentiel effectif

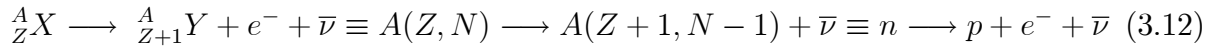
Le potentiel ressenti par la particule alpha dans un état de moment cinétique orbital l n'est plus simplement électrostatique mais comporte aussi un potentiel centrifuge $\frac{l^2}{2mr^2}$. Dans l'équation de Schrödinger on ajoute au potentiel coulombienne ($\frac{zZe^2}{r}$), le potentiel centrifuge qui est de la forme $\frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2}$. Le potentiel effectif donc prend la forme :

$$V_{eff}(r) = \frac{zZe^2}{r} + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2} \quad (3.11)$$

3.2 Transitions isobariques

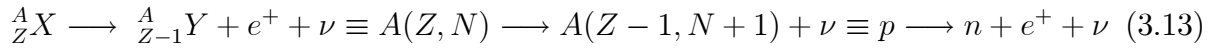
3.2.1 Désintégration bêta moins (β^-)

La désintégration β^- est une transition d'un neutron à un proton accompagné par la création d'un électron et d'un antineutrino suivant la réaction [7, 8] :



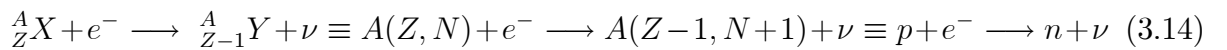
3.2.2 Désintégration bêta plus (β^+)

La désintégration β^+ est une transition d'un proton à un neutron accompagné par la création d'un positron et d'un neutrino suivant la réaction [7, 8] :



3.2.3 Transformation capture électronique (CE)

Ce processus, un proton capture un électron et se transforme en un neutron et un neutrino, soit [7, 8] :



3.2.4 Bilan énergétique

Le bilan énergétique des transitions isobariques (Q) est défini comme la différence de masse entre la somme des masses initiales et la somme des masses finales de la désintégration. Notons qu'ici le processus se réalise, il faut que $Q > 0$, soit :

$$\begin{cases} Q_{\beta^-} = (m_n - m_p - m_e) c^2 \\ Q_{\beta^+} = (m_p - m_n - m_{e^+}) c^2 \\ Q_{CE} = (m_p + m_e - m_n) c^2 \end{cases} \quad (3.15)$$

3.2.5 Probabilité de transition bêta

La probabilité de transition par unité de temps (λ) entre un état quantique initial $|i\rangle$ et un état quantique final $|f\rangle$ est donnée par la règle d'or de Fermi :

$$\lambda = \frac{2\pi}{\hbar} \langle f | H_\beta | i \rangle^2 \rho(E) \quad (3.16)$$

où $\rho(E)$ est la densité d'états finals et H_B l'hamiltonien de l'interaction. La quantité $\langle f | H_\beta | i \rangle$ s'appelle l'élément de matrice de l'hamiltonien.

3.2.6 Règles de sélections

Le processus de désintégration bêta obéit aux lois de conservation et aux règles de sélection des spins et parités. Elles sont liées aux propriétés intrinsèques des particules émises dans la désintégration, en particulier le moment angulaire de spin \vec{S} , et le moment angulaire orbital. La conservation du moment cinétique et de la parité impose les règles de sélections suivantes :

$$\vec{J}_i = \vec{J}_f + \vec{l} + \vec{S} \quad (3.17)$$

et

$$\pi_i = \pi_f (-1)^l \quad (3.18)$$

où \vec{J}_i , \vec{J}_f et π_i , π_f sont respectivement les moments angulaires et les parités des états initial et final.

Nous devons distinguer deux cas :

- Lorsque le neutrino et l'électron émis ont des spins parallèles, la transition observée est alors de type Gamow-Teller (GT).
- S'ils sont émis avec des spins antiparallèles, la transition correspondante est de type Fermi (F).

Lors des transitions de type GT, les particules émises de spin 1/2 sont dans un état

triplet de spin ($S = S_e + S_\nu = 1$) et emportent un moment angulaire $l = 0, 1, 2, \dots$ dans les cas respectifs d'une transition permise, première interdite, deuxième interdite, ... les règles de sélections sont alors :

- Pour des transitions permises ($l = 0$) :

$$\begin{cases} \Delta J = 0, \pm 1 \\ \Delta\pi = \pi_i \times \pi_f = 1 \end{cases} \quad (3.19)$$

avec $0 \longrightarrow 0$ interdit.

- Pour des transitions interdites ($l \neq 0$) :

$$\begin{cases} \Delta J = l, l \pm 1 \\ \Delta\pi = \pi_i \times \pi_f = (-1)^l \end{cases} \quad (3.20)$$

Lors des transitions de type Fermi, les particules émises sont dans un état singulet de spin ($S = S_e + S_\nu = 0$) et emportent un moment angulaire $l = 0, 1, 2, \dots$ dans les cas respectifs d'une transition permise, première interdite, deuxième interdite, ... les règles de sélections sont alors :

$$\begin{aligned} & \text{- Pour des transitions permises } (l = 0) : \begin{cases} \Delta J = 0, \\ \Delta\pi = \pi_i \times \pi_f = 1 \end{cases} \\ & \text{- Pour des transitions interdites } (l \neq 0) : \begin{cases} \Delta J = l - 1, l \\ \Delta\pi = \pi_i \times \pi_f = (-1)^l \end{cases}, \text{ avec } 0 \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

interdit.

3.3 Transition électromagnétique (Emission gamma)

Les noyaux fils produits par les désintégrations alpha ou bêta et qui se trouvent dans des états excités, ils rejoignent à leur état fondamental par des transitions gamma (γ). Un noyau dans un état excité peut émettre un photon gamma pour revenir à un niveau d'énergie inférieur. Le photon n'a pas de masse et n'a pas de charge. Soit la réaction :



3.3.1 Bilan énergétique

En appliquant le principe de la conservation de l'énergie et de l'impulsion sur l'expression (3.21), il vient :

$$M_{Y^*}C^2 + T = M_Y C^2 + T_r + E_\gamma$$

on obtient la quantité de mouvement suivante :

$$P_r^2 = P_\gamma^2$$

où T_r et P_r représentent respectivement l'énergie cinétique de recul et quantité de mouvement du noyau final.

L'énergie cinétique de recul s'écrit :

$$\begin{aligned} T_r &= \frac{P_r^2}{2M_Y} \\ &= \frac{E_\gamma^2}{2M_Y C^2} \end{aligned} \quad (3.22)$$

3.3.2 Règles de sélections

Lors de la transition électromagnétique d'un nucléon (opérateur à un corps) entre le niveau initial d'énergie d'excitation (E_i), de moment angulaire (J_i) et de parité (π_i) et le niveau final d'énergie d'excitation (E_f) de moment angulaire (J_f) et de parité (π_f), le nucléon émet un photon (γ) d'énergie (E_γ), de moment angulaire (L) et de parité (π_γ), on a :

$$E_\gamma = E_i - E_f \quad (3.23)$$

La conservation du moment angulaire et de la parité impose que le moment angulaire L et la parité π_γ d'une transition γ satisfait aux relations suivantes :

$$\vec{L} = \vec{J}_i - \vec{J}_f \quad (3.24)$$

ou bien :

$$|J_i - J_f| \leq L \leq J_i + J_f \quad (3.25)$$

Il n'y a pas de transition γ entre l'état $0 \rightarrow 0$ car $J_i = J_f = 0$, ceci implique que $L \neq 0$.

On observe à la fois des transitions électriques et magnétiques, selon l'expression suivante :

$$\pi_\gamma = \pi_i \times \pi_f = \begin{cases} (-1)^L & \text{pour une transition } 2^L \text{ polaire électrique (EL)} \\ (-1)^{L+1} & \text{pour une transition } 2^L \text{ polaire magnétique (ML)} \end{cases} \quad (3.26)$$

Le tableau suivant resume les types des transitions de la multipolarité, soit :

Type	Symbole	L	multipolarité (2^L)	π
Electrique dipolaire	E1	1	2	-
Magnétique dipolaire	M1	1	2	+
Electrique quadripolaire	E2	2	4	+
Magnétique quadripolaire	M2	2	4	-
Electrique octupolaire	E3	3	8	-
Magnétique octupolaire	M3	3	8	+
Electrique hexadécapolaire	E4	4	16	+
Magnétique hexadécapolaire	M4	4	16	-

3.4 Exercices

Exercice 1. On étudie la désexcitation du noyau ${}_{94}^{238}\text{Pu}$ et la probabilité de transmission d'une onde S à travers de la barrière de potentiel est :

$$T_0 = e^{-2G_0} \quad \text{où} \quad G_0 = \frac{\sqrt{2M}}{\hbar} \int_R^b (V(r) - E)^{1/2} dr$$

1. Evaluer en fonction de T_0 la période du ${}_{94}^{238}\text{Pu}$ (on supposera la vitesse de la particule α à l'intérieur de la barrière égale à celle de la particule α libre).

2. Evaluer B , la hauteur de la barrière de potentiel.
3. Intégrer G_0 et exprimer le résultat en fonction de E/B où $E = 5MeV$, est l'énergie de la particule α libre. Calculer numériquement la période.
4. Evaluer numériquement la hauteur ΔB de la barrière centrifuge pour les transitions sur la bande de rotation fondamentale 0^+ , 2^+ , 4^+ , 6^+ et 8^+ .
5. Comment peut-on introduire le terme centrifuge dans G_l . Montrer que G_l se met sous la forme : $G_l = G_0 + \Delta G \times l(l+1)$ où ΔG est une intégrale.

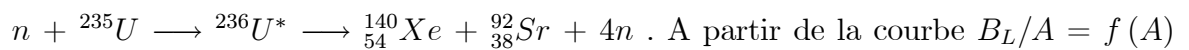
Exercice 2. Les processus suivants sont-ils énergétiquement possible à partir de nucléon libres :

$$n \longrightarrow p + e^- + \bar{\nu} \quad , \quad p \longrightarrow n + e^+ + \nu$$

Donner le cas échéant l'énergie maximum de l'électron émis, dans le système propre du nucléon initial. Energie au repos : Proton = $938.256MeV$, Neutron = $939.550MeV$, Electron = $0.511MeV$.

Exercice 3. En utilisant la formule de Von Weizsacker, trouver un ordre de grandeur de l'énergie libérée au cours de la réaction de fission de ^{235}U par des neutrons lents. On supposera que la fission est symétrique.

En fait, la fission n'est pas symétrique et elle conduit à deux fragments de fission différents et à l'émission de 4 neutrons selon la réaction :



A partir de la courbe $B_L/A = f(A)$ qui relie l'énergie de liaison par nucléons au nombre de masse, trouver l'énergie libérée au cours de cette réaction. Comparer au résultat trouvé à la question précédente.

Exercice 4. Quelle relation doit-il exister entre les masses atomiques de deux isobares adjacentes (A, Z) et $(A, Z - 1)$ pour que ces deux isobares soient stables simultanément vis-à-vis des transitions isobariques ?

Exercice 5. Un noyau impair-impair décroît vers le fondamental du noyau fils par une transition première interdite. Quels sont les J^π possibles de l'état initial ?

Exercice 6. Un état 3^+ décroît par émission bêta vers les états vibrationnels 2^+ ou 0^+ d'un noyau pair-pair. Quel est le degré d'interdiction des deux transitions possibles ?

Exercice 7. Le noyau ^{89}Y a un état excité à 0.915MeV . Il se déexcite sur l'état fondamental et sa durée de vie est $\tau = 16\text{s}$. Les spins des états initial et final sont respectivement $9/2$ et $1/2$.

1. Calculer en eV l'énergie de recul du noyau ^{89}Y lors de l'émission du γ de 0.915MeV .

2. En admettant que la transition se fait sans changement de parité ($\Delta\pi = +$), quelle est la multipolarité du rayonnement émis ?

3. Etablir l'expression de la valeur théorique pour la probabilité de transition à une particule λ d'une transition 2^L polaire électrique (on prendra les fonctions d'ondes radiales constantes à l'intérieur du volume nucléaire de rayon R , nulle à l'extérieur), puis calculer la valeur théorique et expérimentale de λ pour le niveau à 0.915MeV

3.5 Solutions des exercices

Exercice 1

1. Evaluons en fonction de T_0 la période du $^{238}_{94}\text{Pu}$. Nous avons la réaction suivante :



on sait que l'expression de la période (T) s'écrit :

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda} \quad (3.28)$$

avec :

$$\lambda = NT_0 \quad (3.29)$$

et :

$$N = \frac{n}{t} \quad (3.30)$$

où λ est la probabilité de la particule α émise par unité de temps, T_0 est le temps moyen pour traverser le noyau et N est le nombre de tentatives par unité de temps.

En injectant les expressions (3.28) et (3.29) dans (3.27), on obtient :

$$T = \frac{2R \ln 2 T_0^{-1}}{\sqrt{\frac{2E}{m}}} \quad (3.31)$$

$$= 7.8 \times 10^{-22} T_0^{-1} \quad (3.32)$$

2. Evaluons B , la hauteur de la barrière de potentiel. D'après la figure 3-1, on constate que $B = V(R)$, donc :

$$B = \frac{zZe^2}{R} \\ \simeq 30.5 \text{ MeV}$$

3. Intégrerons G_0 et exprimons le résultat en fonction de E/B où $E = 5 \text{ MeV}$, est l'énergie de la particule α libre, puis en calculant numériquement la période. En utilisant l'expression (3.9) et en mettant la hauteur de la barrière de potentiel $B = V(r) = \frac{zZe^2}{R}$ et $E = V(r_1) = \frac{zZe^2}{r_1}$, il vient :

$$G = \frac{1}{\hbar} \int_R^{r_1} \sqrt{2m \left[\frac{zZe^2}{r} - \frac{zZe^2}{r_1} \right]} dr \quad (3.33)$$

$$= \frac{\sqrt{2mzZe^2}}{\hbar} \int_R^{r_1} \frac{1}{\sqrt{r}} \left(1 - \frac{r}{r_1} \right)^{1/2} dr \quad (3.34)$$

on pose $\frac{r}{r_1} = \cos^2 u$ et on la remplace dans cette dernière expression on obtient :

$$G = -\frac{\sqrt{2mzZe^2}}{\hbar} \int_{u_2}^{u_1} \frac{1}{\sqrt{r_1} \cos u} (1 - \cos^2 u)^{1/2} 2r_1 \cos u \sin u du \quad (3.35)$$

$$= -\frac{\sqrt{2mzZe^2 r_1}}{\hbar} \int_{u_2}^{u_1} 2 \sin^2 u du$$

$$= \frac{\sqrt{2mzZe^2 r_1}}{\hbar} \left[u - \cos u (1 - \cos^2 u)^{1/2} \right]_{u_1}^{u_2} \quad (3.36)$$

puisqu'on a $\frac{r}{r_1} = \cos^2 u$, ce qui implique que $u = \arccos \sqrt{\frac{r}{r_1}}$, l'expression (3.36) devient :

$$\begin{aligned} G &= \frac{\sqrt{2mzZe^2r_1}}{\hbar} \left[\arccos \sqrt{\frac{r}{r_1}} - \sqrt{\frac{r}{r_1}} \left(1 - \frac{r}{r_1}\right)^{1/2} \right]_r^R \\ &= \frac{\sqrt{2mzZe^2r_1}}{\hbar} \left[\arccos \sqrt{\frac{R}{r_1}} - \sqrt{\frac{R}{r_1}} \left(1 - \frac{R}{r_1}\right)^{1/2} \right] \end{aligned} \quad (3.37)$$

En utilisant $B = V(r) = \frac{zZe^2}{R}$ et $E = V(r_1) = \frac{zZe^2}{r_1}$, tels que : $\frac{E}{B} = \frac{R}{r_1}$, l'expression (3.37) devient :

$$G = \frac{\sqrt{2mzZe^2r_1}}{\hbar} \left[\arccos \sqrt{\frac{E}{B}} - \sqrt{\frac{E}{B}} \left(1 - \sqrt{\frac{E}{B}}\right)^{1/2} \right] \quad (3.38)$$

si $\frac{E}{B} \ll 1$ et en introduisant le développement limité sur l'expression (3.38), où $\arccos \sqrt{\frac{E}{B}} = \frac{\pi}{2} - \sqrt{\frac{E}{B}}$ et $\sqrt{\frac{E}{B}} \left(1 - \sqrt{\frac{E}{B}}\right)^{1/2} = \sqrt{\frac{E}{B}}$, on peut écrire :

$$G = \frac{\sqrt{2mzZe^2r_1}}{\hbar} \left[\frac{\pi}{2} - 2\sqrt{\frac{E}{B}} \right] \quad (3.39)$$

$$= \frac{1}{\hbar} \sqrt{\frac{2m}{E}} zZe^2 \left(\frac{\pi}{2} - 2\sqrt{\frac{E}{B}} \right) \quad (3.40)$$

4. Évaluons numériquement la hauteur ΔB de la barrière centrifuge pour les transitions sur la bande de rotation fondamentale 0^+ , 2^+ , 4^+ , 6^+ et 8^+ . En utilisant l'expression (3.11) et d'après la figure 3-1, on a $B = V(R)$, on peut écrire :

$$B + \Delta B = V(R) + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mR^2} \quad (3.41)$$

de cette dernière expression, on écrit :

$$\Delta B = \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mR^2} \quad (3.42)$$

les bandes de rotations 0^+ , 2^+ , 4^+ , 6^+ et 8^+ correspondant respectivement à $l = 0, 2, 4, 6$ et 8 donnent :

- $l = 0, \longrightarrow \Delta B = 0 \text{ MeV}$
- $l = 2, \longrightarrow \Delta B = 0.142 \text{ MeV}$
- $l = 4, \longrightarrow \Delta B = 0.475 \text{ MeV}$
- $l = 6, \longrightarrow \Delta B = 0.979 \text{ MeV}$
- $l = 8, \longrightarrow \Delta B = 1.710 \text{ MeV}$

5. En introduisant le terme centrifuge dans G_l et montrant que G_l se met sous la forme : $G_l = G_0 + \Delta G \times l(l+1)$ où ΔG est une intégrale. En utilisant l'expression (3.9) et en remplaçant le potentiel $V(r)$ par le potentiel effectif de l'expression (3.11), on obtient :

$$G_l = \frac{\sqrt{2m}}{\hbar} \int_R^{r'_1} \left(V(r) + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2} - E \right)^{1/2} dr \quad (3.43)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\sqrt{2m}}{\hbar} \int_R^{r'_1} (V(r) - E)^{1/2} \left(1 + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2 (V(r) - E)} \right)^{1/2} dr \\ &= G_0 \left[1 + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2 (V(r) - E)} \right] dr \\ &= G_0 + \frac{\sqrt{2}}{\hbar} \frac{\hbar l(l+1)}{4m} \int_R^{r'_1} \frac{dr}{r^2 (V(r) - E)^{1/2}} \\ &= G_0 + \hbar l(l+1) \Delta G \end{aligned} \quad (3.44)$$

où :

$$\Delta G = \frac{\hbar}{2\sqrt{2m}} \int_R^{r'_1} \frac{dr}{r^2 (V(r) - E)^{1/2}} \quad (3.45)$$

Exercice 2

1. On montre que les processus suivants sont énergétiquement possibles ou non, en calculant leurs bilan énergétiques (Q) :

$$\begin{cases} n \longrightarrow p + e^- + \bar{\nu} \\ p \longrightarrow n + e^+ + \nu \end{cases} \quad (3.46)$$

Pour l'émission β^- , on a, $n \longrightarrow p + e^- + \bar{\nu}$. En appliquant le principe de la conservation de l'énergie totale, il vient :

$$T_n + m_n c^2 = T_p + m_p c^2 + T_{e^-} + m_{e^-} c^2 + T_{\bar{\nu}} + m_{\bar{\nu}} c^2$$

le bilan de cette dernière expression est :

$$Q = (m_n - m_p - m_{e^-})c^2 \quad (3.47)$$

$$= T_p + T_{e^-} + T_{\bar{\nu}}$$

$$= 939.55 - 938.256 - 0.511$$

$$= 0.78 \text{ MeV} \quad (3.48)$$

on constate d'après l'expression (3.48), la valeur (0.78) est positive donc le processus pour émission β^- est possible.

De même pour l'émission β^+ , on a, $p \longrightarrow n + e^+ + \nu$. Le bilan de cette dernière expression est :

$$Q = (m_p - m_n - m_{e^+})c^2 \quad (3.49)$$

$$= T_n + T_{e^+} + T_{\nu}$$

$$= 938.256 - 939.55 - 0.511$$

$$= -1.805 \text{ MeV} \quad (3.50)$$

on constate d'après l'expression (3.50), la valeur (-1.805) est négative donc le processus pour émission β^+ est impossible.

Exercice 5.

Nous avons un noyau impair-impair décroît vers le fondamental du noyau fils par une transition première interdite. On cherche les J^π (moment angulaire et parité) possibles de l'état initial.

on a :

$$X \longrightarrow Y + e^- + \bar{\nu} \quad (3.51)$$

où X est un noyau impair-impair et Y est un noyau pair-pair

Nous utilisons l'expression (3.17) qui est de la forme :

$$J_i \longrightarrow J_f + l + S \quad (3.52)$$

puisqu'on a état fondamental d'un noyau pair-pair on peut écrire $J_f^\pi = 0^+$.

on a une transition première interdite $l = 1$ et d'après les règles de sélection des transitions bêta on peut avoir : $S = 0$ et $S = 1$.

- pour $S = 0$ et on remplace dans l'expression (3.52), on obtient :

$$J_i = 1, \quad \text{état singulet}$$

- pour $S = 1$ et d'après l'expression (3.52), il vient :

$$J_i = 0, 1, 2, \quad \text{état triplet}$$

et d'après l'expression (3.20), on peut avoir :

$$\begin{aligned} \Delta\pi &= (-1)^l \\ &= -1 \end{aligned} \quad (3.53)$$

donc on peut écrire : $J_i^\pi = 0^-, 1^-, 2^-$.

Par conséquent, les transitions possibles sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} 0^- \longrightarrow 0^+ \\ 1^- \longrightarrow 0^+ \\ 2^- \longrightarrow 0^+ \end{array} \right.$$

Exercice 6

Trouvons le degré d'interdiction des deux transitions possibles $3^+ \longrightarrow 2^+$ et $3^+ \longrightarrow 0^+$.

Pour la transition $3^+ \longrightarrow 2^+$, on a :

$$\begin{cases} \Delta J = J_i - J_f = 1 \\ \Delta \pi = \pi_i \pi_f = (+) \end{cases}$$

donc la transition est de type Gamow-Teller permise (GT permise).

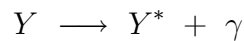
Pour la transition $3^+ \longrightarrow 0^+$, on a :

$$\begin{cases} \Delta J = J_i - J_f = 3 \\ \Delta \pi = \pi_i \pi_f = (+) \end{cases}$$

donc la transition est de type GT deuxième interdite.

Exercice 7

On a la réaction :



- Calculons en électron volt (eV) l'énergie de recul du noyau ^{89}Y avec $E_\gamma = 0.915 MeV$.

D'après l'expression (3.22), on a :

$$\begin{aligned} T_Y &= \frac{E_\gamma^2}{2M_y C^2} \\ &= \frac{(0.915)^2}{2 \times 89 \times 931.48} \\ &\simeq 5 \text{ eV} \end{aligned}$$

- Cherchons la multipolarité du rayonnement émis en admettant que la transition se fait sans changement de parité ($\Delta \pi = +$).

En utilisant l'expression (3.25) et en remplaçant $J_i = 9/2$ et $J_f = 1/2$, il vient :

$$L = 4 \text{ et } 5$$

et d'après l'expression (3.26), on obtient :

- Pour $L = 4$:

$$\begin{aligned}\pi_\gamma &= (-1)^L \\ &= +\end{aligned}$$

donc la transition est de type E_4 .

- Pour $L = 5$:

$$\begin{aligned}\pi_\gamma &= (-1)^{L+1} \\ &= +\end{aligned}$$

donc la transition est de type M_5 .

3. Trouvons l'expression de la valeur théorique pour la probabilité de transition à une particule λ d'une transition 2^L polaire électrique.

On sait que l'expression de la probabilité de transition électrique s'écrit comme suit :

$$\lambda(E_L) = \frac{8\pi(L+1)\omega k^{2L}}{L[(2L+1)!!]^2 \hbar C} |\langle f | O_{L,M}^\sigma | i \rangle|^2 \quad (3.54)$$

avec :

$$\langle f | O_{L,M}^\sigma | i \rangle = e \int \Psi_f^* r^L Y_L^{M*} \Psi_i d\tau \quad (3.55)$$

et :

$$Y_0^0 = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \quad (3.56)$$

Soit la fonction d'onde de transition initiale $\Psi_i = R_i Y_L^M$ et la fonction finale $\Psi_f = R_f Y_0^0$, avec $R_i = R_f = K$.

l'expression (3.55) devient :

$$\begin{aligned}\langle f | O_{L,M}^\sigma | i \rangle &= \frac{e}{\sqrt{4\pi}} K^2 \int_0^R r^{L+2} dr \int Y_L^{M*} Y_L^M d\Omega \\ &= \frac{e K^2 R^{L+3}}{\sqrt{4\pi} (L+3)}\end{aligned}\quad (3.57)$$

la condition de normalisation de la fonction d'onde radiale, s'écrit :

$$\begin{aligned}\int_0^R |R_f|^2 r^2 dr &= 1 \\ &= \frac{K^2 R^3}{3}\end{aligned}$$

de cette dernière expression, on écrit :

$$K^2 = \frac{3}{R^3}\quad (3.58)$$

l'expression (3.55) devient :

$$\langle f | O_{L,M}^\sigma | i \rangle = \frac{e R^L}{\sqrt{4\pi} (L+3)}\quad (3.59)$$

En remplaçant cette dernière expression dans l'expression de la probabilité de transition électrique (3.54) on obtient :

$$\begin{aligned}\lambda(E_L) &= \frac{8\pi (L+1) \omega k^{2L}}{L [(2L+1)!!]^2 \hbar C} \left(\frac{e R^L}{\sqrt{4\pi} (L+3)} \right) \\ &= \frac{2(L+1)}{L [(2L+1)!!]^2} \left(\frac{3}{L+3} \right)^2 \left(\frac{e^2}{\hbar C} \right) \left(\frac{\hbar \omega}{\hbar C} \right)^{2L+1} C R^{2L}\end{aligned}\quad (3.60)$$

la valeur théorique de λ pour le niveau à 0.915MeV à partir de l'expression (3.60) est :

$$\begin{aligned}\lambda(E_4) &= \frac{2(4+1)}{4[(2 \times 4 + 1)!!]^2} \left(\frac{3}{4+3}\right)^2 \left(\frac{1}{137}\right) \left(\frac{0.915}{197}\right)^{2 \times 4 + 1} 3 \times 10^8 (1.2 \times 10^{15} \times 89^{1/3})^{2 \times 4} \\ &= 0.674 \text{ s}^{-1}\end{aligned}\tag{3.61}$$

la valeur expérimentale est :

$$\begin{aligned}\lambda_{\text{exp}} &= \frac{1}{\tau} \\ &= \frac{1}{16} = 0.625 \text{ s}^{-1}\end{aligned}\tag{3.62}$$

Bibliographie

- [1] L.Valentin, Phys Subatomique noyaux et particules, Hermann, Paris, (1975).
- [2] B. Povh, K. Rith, C. Scholz and F. Zetsche, Particles and Nuclei, Springer, (2006).
- [3] J. D. Walaka, Theoretical Nuclear and Subnuclear Physics, Virginia (2004).
- [4] D. Sénéchal, Physique Subatomique, Université de Sherbrooke, Faculté des Sciences, (2005).
- [5] B. R. Martin, Nuclear and Particle Physics, University College London, (2006).
- [6] D. Buskulik, Introduction à la Physique Nucléaire, (2013).
- [7] J. Suhonen, From nucleons to nucleus, Springer, (2007).
- [8] A. Das and T. Ferbel, Introduction to Nuclear and Particle Physics, University of Rochester, (2003).
- [9] W. E. Burcham, Elements of Nuclear Physics, England, (1979).
- [10] D. M. Brink and R. A. Broglia, Nuclear Superfluidity, Cambridge University Press, (2005).
- [11] S. G. Nilsson and I. Ragnarsson, Shapes and shells in Nuclear Structure, Cambridge University Press, (1995).
- [12] K. Bennaceur, Structure nucléaire avancée - Cours 2, Université de Lyon, Automne (2012).