

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université de Djilali BOUNAËMA, Khemis Miliana



Faculté des Sciences et de la Technologie
Département de Mathématiques et d'Informatique

Mémoire Présenté

Pour l'obtention de diplôme de

Master en Mathématiques

Spécialité: Mathématiques Appliquées et Traitement du Signal

Titre :

**La résolution numérique des équations différentielles
d'ordre fractionnaire**

Réalisé par : **ZAIDOUR Fatiha.**

Soutenu publiquement le : 21 / 06 / 2015

devant le jury composé de:

Mr **M. Karras**

Président

Mr **M. Benbachir**

Examineur1

Mr **M. Houas**

Examineur2

Mme **F. Chita**

Encadreur

Année Universitaire 2014/2015

Remerciements

J'aimerais en premier lieu remercier mon dieu Allah qui m'a donné la volonté et le courage pour la réalisation de ce travail.

Je tiens à remercier tout d'abord mon encadreur Mme Chita Fouzia pour m'avoir proposé le thème de ce mémoire et m'avoir dirigée tout le long de mon travail, ses critiques et ces conseils m'ont été précieux.

Je remercie également Mrs Benbachir Maamar et Houas Mohamed membres de jury pour l'honneur qu'ils m'ont accordé en acceptant de juger mon travail.

Je remercie également Mr Karras Meselem de l'honneur qu'il me fait en présidant ce jury.

Je remercie une autre fois et vivement Mr Benbachir Maamar pour ces conseils durant cette année, elles me sont d'ores.

Je remercie particulièrement et sincèrement Mr Menad Mohamed et Mme Belahdji Khayra du département de mathématiques de l'université de Chlef pour m'avoir aidée et conseillée tout le long de mes études.

Et en fin j'adresse mes sincères remerciements à mes parents, mes frères et soeurs, mes amis et à tous qui ont contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce travail.

Dédicace

Je dédie ce mémoire a mes chers parents à qui je dois compte tout ce travail est le fruit de leur amour, leurs encouragement et sacrifices.
A ma chère mère.
A mon cher père.
A ma chère grande mère.
A mon cher oncle Mohamed.
A mes chères soeurs Khadidja, Zahra et Khawla.
A mes chers frères Mohamed, Aissa et Yaakoub.
A mes amis Khayra, Sabrina, Sakina, Chrifa, Djazia et Nassira .
A toutes mes amies et toute personne qui ont contribué à la réalisation de ce travail.

FATIHA

Résumé

de

mémoire de Master

de l'étudiante

Zaïdour Fatiha

Sous le thème

La Résolution numérique des Équations différentielles d'ordre fractionnaire

Les équations différentielles fractionnaires sont des généralisations des équations différentielles classiques.

Dans ce travail, nous étudions des approximations numériques de la solution d'un problème différentiel fractionnaire par les méthodes ADM, VIM, HPM et MFTDM, en utilisant la dérivé fractionnaire au sens de Caputo.

Nous avons traité plusieurs exemples, ainsi que l'équation de Riccati que pour laquelle nous avons essayé de donner un algorithme de résolution par la méthode MFTDM, avec un résultat d'existence et d'unicité et des résultats numériques.

ملخص

مذكرة ماستر

للطالبة

زيدور فتيحة

تحت عنوان

الحل العددي للمعادلات التفاضلية ذات رتب ناطقة

المعادلات التفاضلية ذات رتب ناطقة هي تعميم للمعادلات التفاضلية الكلاسيكية. في هذه المذكرة تطرقنا الى دراسة تقريبات عددية للحل لهذه المعادلات و ذلك باستخدام بعض الطرق أو الخوارزميات المعروفة و الكثيرة الاستعمال, حيث تم استخدام المشتقات الكسرية بمعنى كاييتو.

لقد تطرقنا للعديد من الأمثلة و بصفة خاصة لمعادلة ريكاتي اللتي حاولنا اعطاءها خوارزمية للحل كما أننا أثبتنا وجود الحل و وحدانيته لهذه المعادلة لننتهي بنتائج عددية.

Abstract

of

memory of Master

of the student

Zaïdour Fatiha

Under the theme of

The Numerical Solution of Differentials Equations with Fractional Order

Fractional differential equations are generalization of classical differential equations.

In this work, we study numerical approximations of the solution of a fractional differential problem with the ADM method, VIM, HPM and MFTDM method, using the fractional derivative in the sense of Caputo.

We treated several examples and the Riccati equation that for which we have tried to give a solution algorithm by MFTDM method, with a result of existence and uniqueness and numerical results.

Table des matières

0.1	Introduction générale	3
1	Bases mathématiques du calcul fractionnaires	7
1.1	Fonctions spécifiques pour la dérivation fractionnaire	7
1.1.1	La fonction Gamma	7
1.1.2	La fonction Bêta	8
1.2	La transformée de Laplace	8
1.3	L'intégrale fractionnaire sur un intervalle $[a; b]$	9
1.4	Dérivées fractionnaires	11
1.4.1	Approche de Riemann-Liouville	11
1.4.2	Dérivées fractionnaire au sens de Caputo :	13
1.4.3	Comparaison entre la dérivée fractionnaire au sens de Caputo et celle de Riemann-Liouville	15
1.4.4	Propriétés générales des dérivées fractionnaires	16
2	Quelques méthodes numériques pour résoudre des EDO	17
2.1	La méthode ADM	17
2.1.1	Description de la méthode	17
2.1.2	Résolution d'équations différentielles par la méthode d'Adomian	20
2.2	La méthode HPM	23
2.2.1	Description de la méthode	23

2.3	La méthode VIM	27
2.3.1	Description de la méthode	28
2.3.2	Des exemples numériques	28
3	Équations différentielles fractionnaires	33
3.1	Quelques résultats d'existence et d'unicité	33
3.1.1	Existence et unicité pour l'équation de type Caputo	34
3.2	Résolution numérique des équations différentielles fractionnaires	37
3.2.1	La méthode ADM	38
3.2.2	Application ADM pour résoudre l'équation de Foam Drainage	39
3.2.3	La méthode VIM	42
3.2.4	Application VIM pour résoudre l'équation de Foam Drainage	44
3.2.5	La méthode HPM	46
3.2.6	Application HPM pour résoudre l'équation de Foam Drainage	49
4	Application et résultats numériques	53
4.1	Implémentation du MFTDM pour l'équation de Riccati	53
4.2	Existence et unicité	55
4.3	Exemples numériques	58
4.4	Conclusion générale	67

0.1 Introduction générale

La théorie de dérivation fractionnaire est un sujet presque ancien que le calcul classique tel que nous le connaissons aujourd'hui, ces origines remontent à la fin du 17^{ème} siècle, l'époque où Newton et Leibniz ont développé les fondements de calcul différentiel et intégral. En particulier, Leibniz a présenté le symbole $\frac{d^n f}{dt^n}$ pour désigne la $n^{\text{ème}}$ dérivée d'une fonction f . Quand il a annoncé dans une lettre à l'Hôpital (apparemment avec l'hypothèse implicite que $n \in \mathbb{N}$), l'Hôpital a répondu :

Que signifie $\frac{d^n f}{dt^n}$ si $n = \frac{1}{2}$?

Cette lettre de l'Hôpital, écrite en 1695, est aujourd'hui admise comme le premier incident de ce que nous appelons la dérivation fractionnaire, et le fait que l'Hôpital a demandé spécifiquement pour $n = \frac{1}{2}$, c'est à dire une fraction (nombre rationnel) a en fait donné lieu au nom de cette partie des mathématiques.

Une liste de mathématiciens qui ont fournit des contributions importantes au calcul fractionnaire jusqu'au milieu du 20^{ème} siècle, inclut :

P.S. Laplace (1812), J.B.J. Fourier (1822), N.H. Abel (1823-1826), J. Liouville (1832-1873), B. Riemann (1847), H. Holmgren (1865-67), A.K. Grunwald (1867-1872), A.V. Letnikov (1868-1872), H. Laurent (1884), P.A. Nekrassov (1888), A. Krug (1890), J. Hadamard (1892), O. Heaviside (1892-1912) S. Pincherle (1902), G.H. Hardy et J.E. Littlewood (1917-1928), H. Weyl (1917), P. Lévy (1923), A. Marchaud (1927), H.T. Davis (1924-1936), A. Zygmund (1935-1945) E.R. Amour (1938-1996), A. Erdélyi (1939-1965), H. Kober (1940), D.V. Widder (1941), M. Riesz (1949).

Cependant, cette théorie peut être considérée comme un sujet nouveau aussi, depuis seulement un peu plus de trente années elle a été objet de conférences spécialisées. Pour la première conférence, le mérite est attribué à B. Ross qui a organisé la première conférence sur les calculs fractionnaires et ses applications à l'université de New Haven en juin 1974, et il a édité les débats. Pour la première monographie le mérite est attribué à K.B. Oldham et J. Spanier, qui ont publié un livre consacré au calcul fractionnaire en 1974 après une collaboration commune, commenté en 1968.

Une autre théorie se développe en parallèle de la dérivation fractionnaire telle est **la théorie des équations différentielles fractionnaires** qui a de nombreuses applications dans la description de nombreux événements dans le monde réel.

La modélisation mathématique des systèmes physiques conduit à des nombreuses équations différentielles non linéaires, tel que l'équation de Klein-Gordon, équation de Duffing, ...etc. Par conséquent, nous devons être capable de résoudre les équations différentielles dans l'espace et le temps, qui peuvent être fortement non linéaires.

La résolution de telles équations par les méthodes dites classiques, telle que les méthodes des éléments finis, des différences finies et les méthode des volumes finis, donnent des approximations de la solution en des points discrets. En outre, ces méthodes font appel à des techniques de discrétisation de l'espace et du temps et elles linéarisent souvent les équations.

Dans le début des années 1981, Adomian a présenté et développé une méthode de résolution des systèmes non-linéaires que l'on appelle la méthode de décomposition pour résoudre des problèmes linéaires ou non linéaires tels que les équations différentielles ordinaires et partielles. La méthode de décomposition d'Adomian (ADM) consiste à décomposer l'équation donnée en parties linéaires et des parties non linéaires. Elle consiste à recherché la solution sous la forme d'une série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et à décomposer le terme non linéaire Nu sous la forme d'une série $Nu = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n$, les termes A_n sont appelés polynômes Adomian.

Durant ces dernières années, les équations différentielles fractionnaires (FDE) ont trouvé des applications dans beaucoup des problèmes en physique. Comme dans la plupart du temps, ces équations ne peuvent être résolues exactement et les méthodes approximatives et quelques méthodes analytiques doivent être utilisées pour résoudre des problèmes non linéaires incluent ADM, la méthode des perturbations homotopique (HPM), ou la méthode des itérations du variationnelles (VIM).

Le concept des opérateurs d'ordre fractionnaire a été défini aux 19^{ème} siècle par Rie-

mann et Liouville. Leur but devait prolonger la dérivation ou intégration d'ordre fractionnaire en employant non seulement un ordre entier mais également des ordres non entiers.

Il existe plusieurs définitions de la dérivée fractionnaire d'ordre α . Les définitions les plus utilisées sont celle de Riemann-Liouville et de Caputo.

L'intégrale fractionnaire d'ordre $p \in \mathbb{R}$ dans un intervalle $[0, T]$ de Riemann-Liouville est définie par :

$$I^{(p)} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{(p-1)} f(\tau) d\tau \quad ,$$

La dérivée fractionnaire d'ordre p sur $[0, t]$ au sens de Riemann-Liouville est définie par :

$${}^R D^p f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-p)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t - \tau)^{n-p-1} f(\tau) d\tau = \frac{d^n}{dt^n} (I^{n-p} f(t)),$$

La dérivée fractionnaire d'ordre α sur $[0, t]$ au sens de Caputo est définie par :

$${}^C D^p f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_a^t (t - \tau)^{n-p-1} f^{(n)}(\tau) d\tau = I^{n-p} \left(\frac{d^n}{dt^n} f(t) \right),$$

avec $n = [p] + 1$, $[p]$ désigne la partie entière de p et $D^n = \left(\frac{d}{dt} \right)^n$ désigne la dérivée d'ordre n et Γ est la fonction Gamma.

Notre mémoire est organisé comme suit :

Le premier chapitre sera consacré aux éléments de base du calcul fractionnaire, nous citons par exemple la fonction Gamma, la fonction Bêta et la transformée de Laplace. Deux approches sont présentées, ainsi que l'approche de Riemann-Liouville et celle de Caputo pour la généralisation des notions de dérivation entière.

Le deuxième chapitre de ce mémoire est dédié aux méthodes numériques pour la résolution des équations différentielles ordinaires. On citera par exemple les méthodes ADM, HPM, VIM avec quelques exemples.

Dans le troisième chapitre, nous étudions l'existence et l'unicité de la solution d'une équation différentielle fractionnaire, pour étudier ensuite les trois méthodes précédente mais cette fois dans le cas ou les équations différentielles sont d'ordre fractionnaire.

Le dernier chapitre sera consacré à la résolution de l'équation de Riccati, écrite sous la forme $D^\alpha y = A(t) + B(t)y + C(t)y^2$ par la méthode Multistage telle que la dérivée fractionnaire utilisée est celle de Caputo.

Nous terminons notre mémoire par une conclusion générale avec quelques perspectives.

Chapitre 1

Bases mathématiques du calcul fractionnaires

1.1 Fonctions spécifiques pour la dérivation fractionnaire

Dans cette section, nous présentons les fonctions Gamma et Béta, qui seront utilisées dans les autres chapitres. Ces deux fonctions jouent un rôle très important dans la théorie du calcul fractionnaire et ces application.

1.1.1 La fonction Gamma

La fonction Gamma est, une fonction complexe, considérée également comme une fonction spéciale. Elle prolonge la fonction factorielle à l'ensemble des nombres complexe (exepté en certains points)

Définition 1.1.1 *Pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $\text{Re}(z) > 0$, la fonction Gamma $\Gamma(z)$ est définie par :*

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \quad (1.1.1)$$

Propriétés :

1. La propriété importante de la fonction Gamma $\Gamma(z)$ est la relation de récurrence suivante : $\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z)$, qu'on peut démontrer par une intégration par parties :

$$\Gamma(z + 1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^z dt = [-e^{-t} t^z]_0^{+\infty} + z \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt = z\Gamma(z)$$

2. $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(0_+) = +\infty$.Et aussi $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

3. $\Gamma(z)$ est une fonction monotone et strictement décroissante pour $0 < z \leq 1$

4. Si $n \in \mathbb{N}$ alors $\Gamma(n + 1) = n!$ et aussi si $n \in \mathbb{N}$ alors : $\Gamma(n + \frac{1}{2}) = \frac{(2n)! \sqrt{\pi}}{4^n \cdot n!}$

Proposition 1.1.1 *par le principe de prolongement analytique on peut prolonger la fonction Γ sur \mathbb{C}/\mathbb{Z}^- .*

Soit $z > 0$, $z \notin \mathbb{N}$ on a :

$$(-1)^j \binom{z}{j} = \frac{\Gamma(-z + j)}{\Gamma(j + 1)\Gamma(-z)}$$

1.1.2 La fonction Bêta

Définition 1.1.2 *La fonction Bêta (qui est un type d'intégrale, au même titre que la fonction Gamma) est une fonction définie par :*

$$\beta(p, q) = \int_0^1 \tau^{p-1} (1 - \tau)^{q-1} d\tau ; \operatorname{Re}(p) > 0; \operatorname{Re}(q) > 0. \quad (1.1.2)$$

La fonction Gamma et la fonction Bêta sont liées par la relation suivante :

$$\beta(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p + q)}$$

1.2 La transformée de Laplace

Soit f une fonction d'ordre exponentiel α (c'est-à-dire qu'il existe deux constantes M et T telles que $|f(t)| \leq M e^{\alpha t}$ pour $t > T$), la transformée de Laplace de la fonction $f(t)$ définie pour tout nombre réel $t \geq 0$ est la fonction F , définie par :

$$F(s) = L \{f(t)\} = \int_0^{\infty} \exp(-st)f(t)dt \quad (1.2.1)$$

L'inversion de transformation de Laplace s'effectue par le moyen d'une intégrale dans le plan complexe, pour t positive,

$$f^{-1}(t) = L^{-1} \{F(s)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \exp(st)F(s)ds \quad (1.2.2)$$

où γ est choisi pour que l'intégrale soit convergente, ce qui implique que γ soit supérieur à la partie réelle de singularité de $F(s)$.

- Linéarité : $L \{\alpha f + \beta g\} = \alpha L \{f\} + \beta L \{g\}$.
- Dérivation : $L \{f^{(n)}(t)\} = s^n L \{f(s)\} - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0)$.
- Intégration : $L \left\{ \int_a^t f(u)du \right\} = \frac{1}{s} L \{f\} = \frac{1}{s} L \{f\} + \frac{1}{s} \int_a^0 f(u)du$.
- Convolution : $L \{f * g\} = L \{f\} \times L \{g\}$.
- La transformation de Laplace de la fonction $t^{\alpha-1}$ est : $L [t^{\alpha-1}] (s) = \Gamma(p)s^{-\alpha}$.

1.3 L'intégrale fractionnaire sur un intervalle $[a; b]$

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a; b]$. On considère l'intégrale :

$$\begin{aligned} I^{(1)} f(x) &= \int_a^x f(t)dt. \\ I^{(2)} f(x) &= \int_a^x I^{(1)} f(u)du. \\ &= \int_a^x \left(\int_a^u f(t)dt \right) du. \\ &= \int_a^x \left(\int_t^x du \right) f(t)dt. \\ &= \int_a^x (x-t)f(t)dt. \end{aligned}$$

Plus généralement la n-ième itération de l'opérateur I peut s'écrire :

$$I^{(n)}f(x) = \int_a^{x_1} dx_1 \int_a^{x_2} dx_2 \dots \int_a^{x_{n-1}} f(x_n) dx_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{(n-1)} f(t) dt \quad (1.3.1)$$

pour tout entier n .

Cette formule est appelée formule de Cauchy, et depuis la généralisation du factoriel par la fonction Gamma : $\Gamma(n) = (n-1)!$, Riemann rendu compte que le second membre de 1.3.1 pourrait avoir un sens même quand n prenant une valeur non-entière, il a défini l'intégrale fractionnaire de la manière suivante :

Définition 1.3.1 Si $f \in [a; b]$; $\alpha \in \mathbb{R}_+$, l'intégrale

$$I_{a^+}^{(\alpha)} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{(\alpha-1)} f(t) dt \quad \text{telle que } a \in]-\infty; +\infty[\quad (1.3.2)$$

est appelée intégrale fractionnaire (à gauche) de Riemann-Liouville d'ordre α , et l'intégrale :

$$I_{b^-}^{(\alpha)} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (x-t)^{(\alpha-1)} f(t) dt \quad \text{telle que } b \in]-\infty; +\infty[\quad (1.3.3)$$

est appelée intégrale fractionnaire (à droite) de Riemann-Liouville d'ordre α .

Remarque 1.3.1 Dans tout ce qui suit on va utiliser uniquement l'intégrale (à gauche).

Théorème 1.3.1 [13] Pour $f \in C[a; b]$, l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville possède la propriété suivante :

$$I_{a^+}^{(\alpha)} [I_{a^+}^{(\beta)} f(x)] = I_{a^+}^{(\alpha+\beta)} f(x) \quad \text{pour } \alpha > 0, \beta > 0.$$

Preuve. La preuve découle directement de la définition

$$I_{a^+}^{(\alpha)} [I_{a^+}^{(\beta)} f(x)] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \frac{dt}{(x-t)^{\alpha-1}} \int_a^t \frac{f(u)}{(t-\mu)^{1-\beta}} du.$$

Or $f \in C[a, b]$, d'après le théorème de Fubini et par le changement $t = u + s(x - u)$ on obtient

$$I_{a^+}^{(\alpha)}[I_{a^+}^{(\beta)} f(x)] = \frac{\beta(\alpha, \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \frac{f(u)}{(t-u)^{1-\alpha-\beta}} du = I_{a^+}^{(\alpha+\beta)} f(x).$$

Où $\beta(\alpha, \beta)$ désigne la fonction Beta. □

Propriétés :

1. Transformé de Laplace de l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville pour $a = 0$ d'une fonction f qui possède la transformé de Laplace $F(s)$ dans le demi plan $\text{Re}(s) > 0$ est :

$$L(I^\alpha f)(s) = s^{-\alpha} F(s)$$

2. $I^\alpha t^\gamma = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\gamma+1)} t^{\alpha+\gamma}$

1.4 Dérivées fractionnaires

Dans la littérature il existe plusieurs approches pour la dérivation fractionnaire, nous allons citer les approches qui sont fréquemment utilisées dans les applications.

1.4.1 Approche de Riemann-Liouville

Soit f une fonction intégrable sur $[a; t]$ alors la dérivée fractionnaire d'ordre p (avec $n - 1 < p < n$) au sens de Riemann-Liouville est définie par :

$${}^R D^p f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-p)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1} f(\tau) d\tau = \frac{d^n}{dt^n} (I^{n-p} f(t)) \quad (1.4.1)$$

Exemples :

1. La dérivée non entière d'une fonction constante au sens de Riemann-Liouville n'est

pas nulle ni constante, mais on a :

$${}^R D^p C = \frac{C}{\Gamma(1-p)} (t-a)^{-p}$$

2. La dérivée de $f(t) = (t-a)^\alpha$ au sens de Riemann-Liouville :

Soit p non entier et $0 \leq n-1 < p < n$ et $\alpha > -1$, alors on a :

$${}^R D^p (t-a)^\alpha = \frac{1}{\Gamma(n-p)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1} (\tau-a)^\alpha d\tau$$

En faisant le changement de variable $\tau = a + s(t-a)$, on aura :

$$\begin{aligned} {}^R D^p (t-a)^\alpha &= \frac{1}{\Gamma(n-p)} \frac{d^n}{dt^n} (t-a)^{n+\alpha-p} \int_0^1 (1-s)^{n-p-1} s^\alpha ds \\ &= \frac{\Gamma(n+\alpha-p+1) \beta(n-p, \alpha+1)}{\Gamma(n-p)} (t-a)^{\alpha-p} \\ &= \frac{\Gamma(n+\alpha-p+1) \Gamma(n-p) \Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p) \Gamma(\alpha-p+1) \Gamma(n+\alpha-p+1)} (t-a)^{\alpha-p} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-p+1)} (t-a)^{\alpha-p} \end{aligned}$$

A titre d'exemple :

$${}^R D^{0.5} t^{0.5} = \frac{\Gamma(1.5)}{\Gamma(1)} = \Gamma(1.5)$$

Propriété 1.4.1 *Composition avec l'intégrale fractionnaire :*

- L'opérateur de dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville est un inverse gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire :

$${}^R D^p (I^p f(t)) = f(t),$$

- on a

$${}^R D^p (I^q f(t)) = {}^R D^{p-q} f(t)$$

– La dérivation et l'intégration fractionnaire ne commutent pas.

$${}^R D^{-p}({}^R D_t^q f(t)) = {}^R D^{q-p} f(t) - \sum_{k=1}^m [{}^R D^{q-k} f(t)]_{t=a} \frac{(t-a)^{p-k}}{\Gamma(p-k+1)} \quad \text{avec } m-1 < q < m. \quad (1.4.2)$$

1.4.2 Dérivées fractionnaire au sens de Caputo :

On va introduit une dérivée fractionnaire qui est plus restrictive que celle de Riemann-Liouville.

Définition 1.4.1 Soit $p > 0$ avec $n-1 < p < n$, ($n \in \mathbb{N}^*$) et f une fonction telle que $\frac{d^n}{dt^n} f \in L_1[a; b]$.

La dérivée fractionnaire d'ordre p de f au sens de Caputo est définie par :

$${}^C D^p f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1} f^{(n)}(\tau) d\tau = I^{n-p} \left(\frac{d^n}{dt^n} f(t) \right) \quad (1.4.3)$$

Propriétés :

1. Relation avec la dérivée de Riemann-Liouville :

Soit $p > 0$ avec $n-1 < p < n$, ($n \in \mathbb{N}^*$), supposons que f est une fonction telle que ${}^C D_t^p f(t)$ et ${}^R D_t^q f(t)$ existent alors :

$${}^C D^p f(t) = {}^R D^p f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-p}}{\Gamma(k-p+1)} \quad (1.4.4)$$

On déduit que si $f^{(k)}(a) = 0$ pour $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$, on aura ${}^C D^p f(t) = {}^R D^p f(t)$

2. Composition avec l'opérateur d'intégration fractionnaire :

Si f est une fonction continue on a :

$${}^C D^p I_a^p f = f \text{ et } I_a^p {}^C D^p f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^k}{k!}. \quad (1.4.5)$$

donc l'opérateur de dérivation de Caputo est un inverse gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire mais il n'est pas un inverse à droite.

Exemples :

1. La dérivée d'une fonction constante au sens de Caputo :

La dérivée d'une fonction constante au sens de Caputo est nulle :

$${}^C D^p C = 0.$$

2. La dérivée de $f(t) = (t - a)^\alpha$ au sens de Caputo :

Soit p un entier et $0 \leq n - 1 < p < n$ avec $\alpha > n - 1$, alors on a :

$$f^{(n)}(\tau) = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha - n + 1)} (\tau - a)^{\alpha - n},$$

d'où

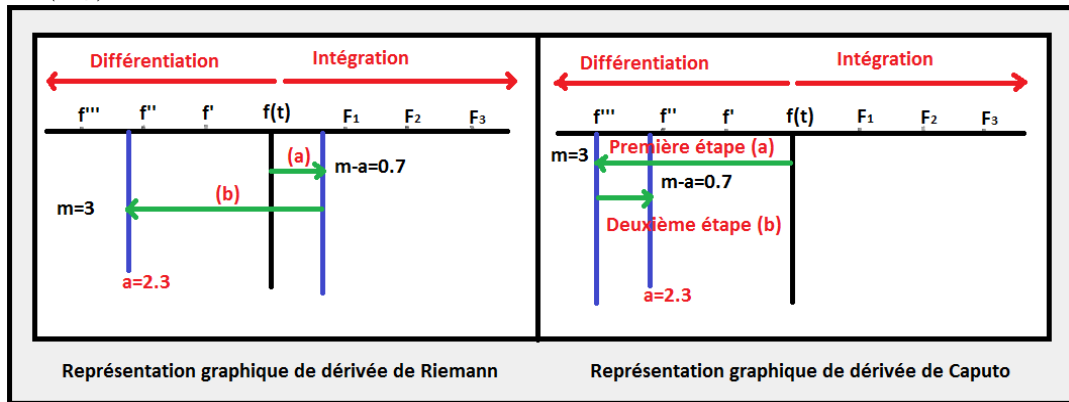
$${}^C D^p (t - a)^\alpha = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(n - p)\Gamma(\alpha - n + 1)} \int_a^t (t - \tau)^{n-p-1} (\tau - a)^{\alpha - n} d\tau,$$

effectuant le changement de variable $\tau = a + s(t - a)$ on obtient :

$$\begin{aligned} {}^C D^p (t - a)^\alpha &= \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(n - p)\Gamma(\alpha - n + 1)} \int_a^t (t - \tau)^{n-p-1} (\tau - a)^{\alpha - n} d\tau \\ &= \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(n - p)\Gamma(\alpha - n + 1)} (t - a)^{\alpha - p} \int_0^1 (1 - s)^{n-p-1} s^{\alpha - n} ds. \\ &= \frac{\Gamma(\alpha + 1)\beta(n - p, \alpha - n + 1)}{\Gamma(n - p)\Gamma(\alpha - n + 1)} (t - a)^{\alpha - p}. \\ &= \frac{\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(n - p)\Gamma(\alpha - n + 1)}{\Gamma(n - p)\Gamma(\alpha - n + 1)\Gamma(\alpha - p + 1)} (t - a)^{\alpha - p} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha - p + 1)} (t - a)^{\alpha - p} \end{aligned}$$

1.4.3 Comparaison entre la dérivée fractionnaire au sens de Caputo et celle de Riemann-Liouville

- L'avantage principale de l'approche de Caputo est que les conditions initiales des équation différentielles fractionnaires avec dérivées de Caputo acceptent la même forme comme pour les équations différentielles d'ordre entier, c'est à dire, contient les valeurs limites des dérivées d'ordre entier des fonctions inconnues en borne inférieur $x = a$.
- Une autre différence entre la définition de Riemann et celle de Caputo est que la dérivée d'une constante est nulle par Caputo, par contre par Riemann-Liouville elle est $\frac{C}{\Gamma(1-p)}(t - a)^{-p}$.



La dérivée d'ordre $a = 2.3$ d'une fonction f , par la définition de Riemann et de Caputo.

- Grafiquement, on peut dire que le chemin suivi pour arriver à la dérivée fractionnaire au sens de Caputo est également l'inverse quand on suit l'autre sens (Riemann Liouville), c'est à dire pour trouver la dérivée fractionnaire d'ordre α où $m - 1 < \alpha < m$ par l'approche de Riemann-Liouville, on commence d'abord par l'intégration fractionnaire d'ordre $(m - \alpha)$ pour la fonction $f(x)$ et puis on dérive le résultat obtenu à l'ordre entier m , mais pour trouver la dérivée fractionnaire d'ordre α où $m - 1 < \alpha < m$ par l'approche de Caputo on commence par la dérivée d'ordre entier m de la fonction $f(x)$ et puis on l'intègre d'ordre fractionnaire $(m - \alpha)$

1.4.4 Propriétés générales des dérivées fractionnaires

La linéarité

La dérivation fractionnaire est une opération linéaire

$$D^\alpha(\lambda f(t) + \mu g(t)) = \lambda D^\alpha f(t) + \mu D^\alpha g(t)$$

pour les deux approches de dérivation considérée dans ce mémoire

La règle de Leibniz

Pour un entier n on a

$$\frac{d^n}{dt^n}(f(t)g(t)) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(t)g^{(n-k)}(t).$$

La généralisation de cette formule nous donne

$$D^p(f(t)g(t)) = \sum_{k=0}^n \binom{p}{k} f^{(k)}(t)D^{(p-k)}g(t) + R_n^p(t),$$

où $n \geq p + 1$ et

$$R_n^p(t) = \frac{1}{n!\Gamma(-p)} \int_a^t (t - \tau)^{-p-1} g(\tau) d\tau \int_\tau^t f^{(n+1)}(\xi) d\xi,$$

avec $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n^p(t) = 0$.

Si f et g sont continues dans $[a, t]$ ainsi que toutes leurs dérivées, la formule devient :

$$D^p(f(t)g(t)) = \sum_{k=0}^n \binom{p}{k} f^{(k)}(t)D^{(p-k)}g(t).$$

D^α est la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville.

Chapitre 2

Quelques méthodes numériques pour résoudre des EDO

2.1 La méthode ADM

La méthode de décomposition d'Adomian permet de résoudre des problèmes fonctionnelles de différents types : équation algébriques, différentielles, intégrales, intégral-différentielles, aux dérivées partielles (EDP). La méthode s'adapte aussi bien aux problèmes linéaires qu'aux problèmes non linéaires. Il suffit qu'on puisse écrire l'équation sous la forme : $AU = f$ qui est appelée forme canonique d'Adomian.

2.1.1 Description de la méthode

Considérons l'équation fonctionnelle :

$$AU = f \tag{2.1.1}$$

où A est un opérateur différentiel contenant des termes linéaires et des termes non linéaires et f est une fonction connue. Le terme linéaire de l'opérateur A est décomposé en $L + R$ où L est inversible et R est le reste de 2.1.1. On note N le terme non linéaire

de A et donc $A = L + R + N$, alors 2.1.1 s'écrit comme : $LU + RU + NU = f$,

L étant inversible, si L^{-1} est son inverse on a :

$$U = \Phi + L^{-1}f - L^{-1}RU - L^{-1}NU, \quad (2.1.2)$$

où Φ est la constante de l'intégration.

La méthode d'Adomian consiste à rechercher la solution sous forme d'une série :

$$U = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n, \quad (2.1.3)$$

et à décomposer le terme non linéaire NU sous forme d'une série :

$$NU = F(U) = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n, \quad (2.1.4)$$

Les A_n sont appelés polynômes d'Adomian et sont obtenues grâce à la relation suivante :

$$A_n(u_0, u_1, \dots, u_n) = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} \left[N \left(\sum_{i=0}^{+\infty} \lambda^i u_i \right) \right]_{\lambda=0}, \quad (2.1.5)$$

où λ est un paramètre réel introduit par convenance.

En remplaçant les relations 2.1.3 et 2.1.4 dans 2.1.2, on obtient :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \Phi + L^{-1}f - L^{-1}R \sum_{n=0}^{+\infty} u_n - L^{-1} \sum_{n=0}^{+\infty} A_n \quad (2.1.6)$$

Ce qui entreine par identification :

$$\begin{cases} u_0 = \Phi + L^{-1}f \\ u_1 = -L^{-1}Ru_0 - L^{-1}A_0 \\ \dots \\ u_{n+1} = -L^{-1}Ru_n - L^{-1}A_n \end{cases} \quad (2.1.7)$$

Tous les termes de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ ne peuvent être calculés, en utilisant l'approximation

$$\varphi_n = \sum_{i=0}^{n-1} u_i, \quad n \geq 1, \quad \text{avec} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = U. \quad (2.1.8)$$

Le problème qui se pose est comment déterminer les $(A_n)_{n \geq 0}$.

Les polynômes d'Adomian

Définition 2.1.1 Les polynômes d'Adomian sont définie par la formule :

$$\left\{ \begin{array}{l} A_0(u_0) = N(u_0) = F(u_0) \\ A_n(u_0, u_1, \dots, u_n) = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} \left[N \left(\sum_{i=0}^{+\infty} \lambda^i u_i \right) \right]_{\lambda=0}, \end{array} \right. \quad (2.1.9)$$

La formule proposé par G.Adomian pour le calcul des polynômes d'Adomian $(A_n)_{n \geq 0}$ est la suivante :

$$A_0(u_0) = N(u_0) = F(u_0)$$

$$A_1(u_0, u_1) = u_1 \frac{d}{du} N(u_0) = u_1 F'(u_0)$$

$$A_2(u_0, u_1, u_2) = u_2 \frac{d}{du} N(u_0) + \frac{1}{2!} u_1^2 \frac{d^2}{du^2} N(u_0) = u_2 F'(u_0) + \frac{1}{2!} u_1^2 F^{(2)}(u_0)$$

$$\begin{aligned} A_3(u_0, u_1, u_2, u_3) &= u_3 \frac{d}{du} N(u_0) + u_1 u_2 \frac{d^2}{du^2} N(u_0) + \frac{1}{3!} u_1^3 \frac{d^3}{du^3} N(u_0) \\ &= u_3 F'(u_0) + u_1 u_2 F^{(2)}(u_0) + \frac{1}{3!} u_1^3 F^{(3)}(u_0), \end{aligned}$$

...

$$A_n = \sum_{v=0}^n c(v, n) N^{(v)}(u_0), \quad n \geq 1.$$

Où , $c(v, n)$ représente la somme de tous les produits (divisée par $m!$) des v termes u_i dont la somme des indices i est égale à n ; m étant le nombre de répétitions des mêmes termes dans le produit.

2.1.2 Résolution d'équations différentielles par la méthode d'Adomian

Si $AU = f$ est une équation différentiel ou A est un opérateur différentielle non linéaire (ou A linéaire) possédant des termes linéaires et non linéaires. Le terme linéaire est décomposé en $L + R$ où par convenance L est un opérateur différentiel d'ordre le plus grand facilement inversible.

Soit l'équation différentielle d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{d^n u}{dt^n} + Ru + Nu = f \quad (2.1.10)$$

où $u(t_0), u'(t_0), \dots, u^{(n-1)}(t_0)$ sont des valeurs données.

Si on pose $L = \frac{d^n}{dt^n}(\cdot)$. La formule $LU + RU + NU = f$ transforme l'équation différentielle ci-dessus en $Lu + Ru + Nu = f$.

L'équation 2.1.2 s'écrit :

$$u(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-t_0)^k}{k!} u^{(k)}(t_0) + L^{-1}f(t) - L^{-1}R\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)\right) - L^{-1}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} A_n\right). \quad (2.1.11)$$

D'où l'on tire :

$$\begin{cases} u_0(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-t_0)^k}{k!} u^{(k)}(t_0) + L^{-1}f(t) \\ u_1(t) = -L^{-1}Ru_0 - L^{-1}A_0 \\ \dots \\ u_{n+1} = -LRu_n - L^{-1}A_n. \end{cases}$$

où L^{-1} désigne n intégration successives de t_0 à t .

Exemple 2.1.1 Soit l'équation

$$\begin{cases} u'(t) - u(t) = t^2 \\ u(0) = -2 \end{cases}.$$

On a : $Lu = u'(t)$, $Ru = -u(t)$, $Nu = 0$ et $f(t) = t^2$.

L^{-1} représente une simple intégration de 0 à t . On trouve :

$$u = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = u(0) + L^{-1}(t^2) + L^{-1}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right). \quad (2.1.12)$$

Par identification on a :

$$u_0 = u(0) + L^{-1}(t^2) = -2 + \frac{t^3}{3}$$

$$u_1 = L^{-1}(u_0) = -2t + \frac{t^4}{12}$$

$$u_2 = L^{-1}(u_1) = -t^2 + \frac{t^5}{60}$$

$$u_3 = -\frac{t^3}{3} + \frac{t^6}{300}$$

...

$$u_n = -2\frac{t^n}{n!} + 2\frac{t^{n+3}}{(n+3)!},$$

d'où $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = -2 - 2t - t^2$, qui est la solution exacte de l'équation différentielle.

Exemple 2.1.2 Soit l'équation différentielle non-linéaire suivante :

$$\begin{cases} u' - e^u = 0. \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

On a : $Lu = u'(t)$, $Nu = e^u$. On applique L^{-1} ($L^{-1} = \int_0^t (\cdot) dt$) aux termes du problème on trouve :

$$u = L^{-1}(e^u). \quad (2.1.13)$$

On utilise la série de la décomposition pour la fonction linéaire $u(t)$ et la série polynomiale pour le terme non-linéaire, nous obtenons l'expression suivante :

$$\begin{cases} u_0(t) = 0 \\ u_{k+1}(t) = L^{-1}(A_k), \quad k \geq 0. \end{cases} \quad (2.1.14)$$

Les polynômes d'Adomian pour le terme non-linéaire e^u sont calculés comme suit :

$$\begin{aligned}
 A_0(u_0) &= e^{u_0} = 1. \\
 A_1(u_0, u_1) &= u_1 \\
 A_2(u_0, u_1, u_2) &= u_2 + \frac{1}{2!}u_1^2 \\
 A_3(u_0, u_1, u_2, u_3) &= u_3 + u_1u_2 + \frac{1}{3!}u_1^3
 \end{aligned} \tag{2.1.15}$$

On remplace 2.1.15 dans 2.1.14 on trouve :

$$\begin{aligned}
 u_0 &= 0. \\
 u_1 &= L^{-1}(A_0) = t. \\
 u_2 &= L^{-1}(A_1) = \frac{1}{2}t^2. \\
 u_3 &= L^{-1}(A_2) = \frac{1}{3}t^3. \\
 u_4 &= L^{-1}(A_3) = \frac{1}{4}t^4.
 \end{aligned}$$

...

Alors la solution dans une forme d'une série est donné par :

$$u(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{4}t^4 + \dots \tag{2.1.16}$$

Exemple 2.1.3 (Equation de Riccati)

$$\begin{cases} u' - u^2 = 1 \\ u(0) = 1 \end{cases} \tag{2.1.17}$$

On a $Lu = u'(t)$, $Nu = -u^2$, $f(t) = 1$.

La solution exacte de l'équation est :

$$u(t) = \tan(t)$$

La solution approximative est :

$$\begin{aligned}
u_0 &= t. \\
u_1 &= \frac{t^3}{3} \\
u_2 &= \frac{2t^5}{15}. \\
u_3 &= \frac{357t^7}{6615} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

d'où la solution est

$$u(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = t + \frac{t^3}{3} + \frac{2}{15}t^5 + \frac{357}{6615}t^7 + \dots \quad (2.1.18)$$

2.2 La méthode HPM

La méthode des perturbation de l'homotopie (HPM) a été établie par **Ji-Haun-He** en 1999. La méthode a été utilisé par beaucoup de chercheurs et appliquée pour résoudre plusieurs équations linéaires et non linéaires.

2.2.1 Description de la méthode

Pour illustrer les idées de base de cette méthode, nous considérons l'équation différentielle non linéaire suivante :

$$A(u) - f(r) = 0 \quad , \quad r \in \Omega \quad (2.2.1)$$

avec les conditions aux limite :

$$\beta(u, \frac{\partial u}{\partial n}) = 0 \quad ; \quad r \in \Gamma \quad (2.2.2)$$

où A est un opérateur différentielle général, B est un opérateur de la limite, $f(r)$ est une fonction analytique connu, et Γ est la limite du domaine Ω .

L'opérateur A peut être divisé en deux parties qui sont L et N où L est un linéaire et N est un opérateur non-linéaire, peut être récrit comme suit :

$$L(u) + N(u) - f(r) = 0 \quad (2.2.3)$$

Avec la technique de l'homotopie nous contruissons une homotopie :

$$v(r, p) : \Omega \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \quad (2.2.4)$$

qui satisfait :

$$H(v, p) = (1 - p)[L(v) - L(u_0)] + p[A(v) - f(r)] = 0, \quad p \in [0, 1] ; r \in \Omega. \quad (2.2.5)$$

$$H(v, p) = L(v) - L(u_0) + pL(u_0) + p[N(v) - f(r)] = 0 \quad (2.2.6)$$

où $p \in [0, 1]$ est un paramètre, u_0 est une approximation initiale de 2.2.1 qui satisfait les conditions aux limites.

Evidement, d'après les deux équations précédentes nous aurons :

$$H(v, 0) = L(v) - L(u_0) = 0 \quad (2.2.7)$$

$$H(v, 1) = A(v) - f(r) = 0 \quad (2.2.8)$$

En faisant varier p de 0 à 1, on change $v(r, p)$ de $u_0(r)$ à $u(r)$. D'après le (HPM), nous pouvons utiliser le paramètre p comme un petit paramètre, et supposons que les solution d'équations peut être écrit comme une série suivante :

$$v = v_0 + pv_1 + p^2v_2 + \dots \quad (2.2.9)$$

Mettant $p = 1$, la solution approximative d'équation 2.2.1 est :

$$u = \lim_{p \rightarrow 1} v = v_0 + v_2 + \dots \quad (2.2.10)$$

Exemple 2.2.1 Nous considérons en premier temps l'exemple suivant :

$$\begin{cases} u' + u^2 = 0 & ; \quad t \geq 0 ; t \in \Omega \\ u(0) = 1 \end{cases} \quad (2.2.11)$$

d'où la solution exacte est $u(t) = \frac{1}{1+t}$.

Nous pouvons construire l'homotopie suivante : $v : \Omega \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, qui satisfait :

$$(1 - p)(v' - u_0') + p(v' + v^2) = 0, \quad p \in [0, 1], \quad t \in \Omega \quad (2.2.12)$$

avec l'approximation initiale $u_0 = 1$.

Supposons que la solution de 2.2.1 soit sous la forme :

$$v = v_0 + pv_1 + p^2v_2 + \dots \quad (2.2.13)$$

En remplaçant 2.2.13 dans 2.2.12, et identifions les termes avec les puissances identiques de p ,

$$\begin{aligned} p^0 & : \quad v_0' = u_0', \\ p^1 & : \quad v_1' + u_0' + v_0^2 = 0, \quad v_1(0) = 0, \\ p^2 & : \quad v_2' + 2v_0v_1 = 0, \quad v_2(0) = 0, \end{aligned}$$

Par conséquent, les premiers composants de la solution sont données par $v_0 = 1$, $v_1 = -t$, $v_2 = t^2$. Donc la solution de est

$$u = \lim_{p \rightarrow 1} v = v_0 + v_1 + v_2 = 1 - t + t^2$$

Exemple 2.2.2 Exemple 2.2.3 Nous considérons l'équation de Riccati suivante :

$$\begin{cases} u' - u^2 = 1 \\ u(0) = 1 \end{cases} \quad (2.2.14)$$

d'où la solution exacte de l'équation 2.2.14 est $u(t) = \tan(t)$,

le développement de Taylor de u au voisinage de zero est donné par :

$$u(t) = t + \frac{1}{3}t^3 + \frac{2}{15}t^5 + \frac{17}{315}t^7 + t^8\varepsilon(t).$$

On cherche maintenant la solution avec l'utilisation de la méthode (HPM)

Nous pouvons construire l'homotopie suivante : $U : \Omega \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, qui satisfait :

$$(1 - p)(U' - u'_0) + p(U' - U^2 - 1) = 0, p \in [0, 1], t \in \Omega. \quad (2.2.15)$$

la solution d'équation peuvent être écrit comme une série suivante :

$$U = U_0 + pU_1 + p^2U_2 + \dots \quad (2.2.16)$$

On identifie les termes avec les puissances identiques de p :

$$U' - u'_0 + p(u'_0 - U^2 - 1) = 0 \quad (2.2.17)$$

on obtient :

$$(U_0 + pU_1 + p^2U_2 + \dots)' - u'_0 + p [u'_0 - (U_0 + pU_1 + p^2U_2 + \dots)^2 - 1] = 0 \quad (2.2.18)$$

où

$$(\dot{U}_0 + p\dot{U}_1 + p^2\dot{U}_2 + \dots) - u'_0 + p \left[u'_0 - (U_0^2 + 2pU_0U_1 + p^2U_1^2 + 2pU_0U_2 + 2p^3U_1U_2 + p^4U_2^2) - 1 \right] = 0 \quad (2.2.19)$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned}
 p^0 & : \dot{U}_0 - \dot{u}_0 - U_0^2 - 1 = 0 \\
 p^1 & : \dot{U}_1 + \dot{u}_0 - U_0^2 - 1 = 0 \\
 p^2 & : \dot{U}_2 - 2U_1U_0 = 0 \\
 p^3 & : \dot{U}_3 - U_1^2 + 2U_0U_2 = 0 \\
 p^4 & : \dot{U}_4 + 2U_0U_3 + 2U_1U_2 = 0 \\
 p^5 & : \dot{U}_5 - 2U_1U_3 + U_2^2 = 0 \\
 & \vdots
 \end{aligned}$$

Par conséquent, les premiers composants de la solution sont données par :

Exemple 2.2.4 $U_0 = 0$,

$$U_1 = t, U_2 = 0, U_3 = \frac{1}{3}t^3, U_4 = 0, U_5 = \frac{2}{15}t^5, \dots$$

Mettant $p = 1$ la solution approximative d'équ. (2.2.14) est

$$u = U_0 + U_1 + U_2 + \dots \tag{2.2.20}$$

Donc :

$$u(t) = t + \frac{1}{3}t^3 + \frac{2}{15}t^5 + \dots \tag{2.2.21}$$

2.3 La méthode VIM

La méthode Itérative variationnelle (VIM) a été développée par **Je-Haun-He** au début des années 1990. Cette méthode a été utilisée par beaucoup des chercheurs dans une variété de champs scientifiques et peut résoudre des problèmes non linéaire, et a été proposé la première fois pour résoudre des problème en mécanique. La méthode est basé sur la détermination de multiplicateur de Lagrange de façon optimale par l'intermédiaire de la théorie variationnelle.

2.3.1 Description de la méthode

Nous considérons l'équation différentielle suivante :

$$L(u) + N(u) = g(x) \quad (2.3.1)$$

où : L est un opérateur linéaire, N est un opérateur non linéaire et $g(x)$ est une fonction connue.

Nous pouvons construire une correction fonctionnelle selon la méthode itérative variationnelle suivante :

$$u_{n+1} = u_n + \int_0^x \lambda(t)(Lu_n(t) + N\widetilde{u}_n(t) - g(t))dt \quad (2.3.2)$$

où λ est un multiplicateur générale du Lagrange. L'indice n représente la n -ième approximation, $\widetilde{u}_n(t)$ est considéré comme une variation restreinte c'est à dire $\delta\widetilde{u}_n(t) = 0$.

Pour résoudre l'équation par la méthode VIM, on doit d'abord déterminer le multiplicateur de Lagrange λ qui va être identifier par une intégration par partie. Alors les approximations successives u_n de la solution $u(x)$ vont être obtenues en utilisant le multiplicateur de Lagrange et une fonction u_0 bien choisie (qui doit être au moins satisfaire les conditions initiales, par conséquent, la solution exacte sera la limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = u(x) \quad (2.3.3)$$

2.3.2 Des exemples numériques

Nous considérons l'EDO linéaire du premier ordre :

$$\begin{cases} u' + p(x)u = q(x) \\ u(0) = \alpha \end{cases} \quad (2.3.4)$$

avec $p(x)$ et $q(x)$ sont des fonctions connus.

Pour résoudre cette équation différentielle, nous construisant une correction fonctionnelle comme suit :

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) + \int_0^x \lambda(x)(u'_n(t) + p(t)\widetilde{u}_n(t) - q(t))dt \quad (2.3.5)$$

où λ est le multiplicateur du Lagrange qui dans cette méthode peut être une constante ou une fonction , et $\widetilde{u}_n(t)$ est une valeur restreinte où $\delta\widetilde{u}_n(t) = 0$.

On a 2.3.5 équivalente à :

$$\delta u_{n+1}(x) = \delta u_n(x) + \delta \int_0^x \lambda(x)(u'_n(t) + p(t)\widetilde{u}_n(t) - q(t))dt \quad (2.3.6)$$

Cela donne :

$$\delta u_{n+1}(x) = \delta u_n(x) + \delta \int_0^x \lambda(t)u'_n(t)dt \quad (2.3.7)$$

obtenu sur utiliser $\delta\widetilde{u}_n(t) = 0$ et $\delta q(t) = 0$.

Intégrons par parties nous obtenons :

$$\delta u_{n+1}(x) = \delta u_n(x) + \delta(\lambda(t)u_n(x) - \int_0^x \lambda'(t)u_n(t)dt) \quad (2.3.8)$$

$$\Leftrightarrow \delta u_{n+1}(x) = \delta u_n(x) + \delta\lambda(t)u_n(x) - \delta \int_0^x \lambda'(t)u_n(t)dt \quad (2.3.9)$$

$$\Leftrightarrow \delta u_{n+1}(x) = (1 + \lambda|_{t=x})\delta u_n(x) - \int_0^x \delta\lambda'(t)u_n(t)dt \quad (2.3.10)$$

Les extrémums conditionnelles d'un u_{n+1} exige que $\delta u_{n+1} = 0$. Cela veut dire que le côté gauche de 2.3.10 est égale à 0, et en conséquence le côté droit devrait être aussi 0.

Cela donne les conditions stationnaire $1 + \lambda|_{t=x} = 0$, $\lambda'|_{t=x} = 0$, qui donne $\lambda = 1$.

Substituant cette valeur du multiplicateur du Lagrange dans 2.3.5 , on obtient la formule suivante :

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) - \int_0^x (u'_n(t) + p(t)\widetilde{u}_n(t) - q(t))dt \quad (2.3.11)$$

Etant donné $u(0) = \alpha$, nous pouvons prendre première approximation de $u_0 = \alpha$.

Nous obtenons les approximations successives suivantes :

$$\begin{aligned} u_0(x) &= \alpha. \\ u_1(x) &= u_0(x) - \int_0^x (u'_0(t) + p(t)u_0(t) - q(t))dt. \\ u_2(x) &= u_1(x) - \int_0^x (u'_1(t) + p(t)u_1(t) - q(t))dt. \\ u_3(x) &= u_2(x) - \int_0^x (u'_2(t) + p(t)u_2(t) - q(t))dt. \\ &\dots \\ u_{n+1}(x) &= u_n(x) - \int_0^x (u'_n(t) + p(t)u_n(t) - q(t))dt. \end{aligned}$$

Exemple 2.3.1 Nous considérons l'équation suivante :

$$\begin{cases} u' - 2xu = 0 \\ u(0) = 1 \end{cases} \quad (2.3.12)$$

On a : $p(x) = -2x$, $q(x) = 0$, $\alpha = 1$ et $\lambda = -1$ et aussi $u_0 = 1$. Alors nous avons les approximations successives suivantes :

$$\begin{aligned} u_0(x) &= 1. \\ u_1(x) &= u_0(x) - \int_0^x (u'_0(t) + 2tu_0(t))dt = 1 + x^2. \\ u_2(x) &= u_1(x) - \int_0^x (u'_1(t) + 2tu_1(t))dt = 1 + x^2 + \frac{1}{2!}x^4. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_3(x) &= u_2(x) - \int_0^x (u_2'(t) + 2tu_2(t))dt = 1 + x^2 + \frac{1}{2!}x^4 + \frac{1}{3!}x^6. \\
u_4(x) &= u_3(x) - \int_0^x (u_3'(t) + 2tu_3(t))dt = 1 + x^2 + \frac{1}{2!}x^4 + \frac{1}{3!}x^6 + \frac{1}{4!}x^8. \\
&\vdots \\
u_{n+1}(x) &= 1 + x^2 + \frac{1}{2!}x^4 + \frac{1}{3!}x^6 + \frac{1}{4!}x^8 + \dots + \frac{1}{n!}x^{2n}.
\end{aligned}$$

Rappelez que la solution exacte est donnée par $u(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x)$. Cela donne la solution exacte $u(x) = e^{2x}$.

Exemple 2.3.2 L'exemple choisi est l'équation de Riccati de la forme générale :

$$\begin{cases} u' - Q(t)u - R(t)u^2 = P(t) \\ u(0) = G(t) \end{cases} \quad (2.3.13)$$

avec $Q(t)$, $R(t)$, $P(t)$, $G(t)$ sont des fonctions scalaires, pour résoudre l'équation différentielle générale de Riccati nous construisant une correction fonctionnelle suivante :

$$\begin{aligned}
u_{n+1}(x) &= u_n(x) + \int_0^t \lambda(t) [u_n'(t) - Q(t)\widetilde{u}_n(t) - R(t)\widetilde{u}_n^2(t) - P(t)] dt \\
\delta u_{n+1}(x) &= \delta u_n(x) + \delta \int_0^t \lambda(t) [u_n'(t) - Q(t)\widetilde{u}_n(t) - R(t)\widetilde{u}_n^2(t) - P(t)] dt \\
\delta u_{n+1}(x) &= \delta u_n(x) + \delta \int_0^t \lambda(t) [u_n'(t)] dt \\
\delta u_{n+1}(x) &= \delta u_n(x) + \delta \left[\lambda(t)u_n(t) - \int_0^t \lambda'(t)u_n(t)dt \right] \\
\delta u_{n+1}(x) &= (1 + \lambda)u_n(x) - \int_0^t \delta u_n(t)\lambda' dt = 0
\end{aligned}$$

où \widetilde{u}_n est considéré comme variation restreinte c-à-d $\delta \widetilde{u}_n = 0$.

ces conditions stationnaire peuvent être obtenue comme suit :

$$1 + \lambda(x) = 0, \quad \lambda'(t)|_{t=x} = 0 \quad (2.3.14)$$

Le multiplicateur de Lagrange, on peut le déterminer de façon $\lambda(s) = -1$, d'où la formule d'itération variationnelle :

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) - \int_0^x [u'_n(t) - Q(t)\widetilde{u}_n(t) - R(t)u_n^2(t) - P(t)] dt \quad (2.3.15)$$

Exemple 2.3.3 (Cas particulier de l'équation de Riccati)

Nous considérons l'équation suivante :

$$\begin{cases} u' - u^2 = 1 ; t \geq 0. \\ u(0) = 0 \end{cases} \quad (2.3.16)$$

On a : $Q(t) = 0$, $R(t) = 1$, $P(t) = 1$ et $\lambda = -1$ et aussi $u_0 = 0$. Alors nous avons les approximations successives suivantes :

$$u_0(x) = 0.$$

$$u_1(x) = u_0(x) - \int_0^x (u'_0(t) - u_0^2(t) - 1) dt = x.$$

$$u_2(x) = u_1(x) - \int_0^x (u'_1(t) - u_1^2(t) - 1) dt = x + \frac{x^3}{3}.$$

$$u_3(x) = u_2(x) - \int_0^x (u'_2(t) - u_2^2(t) - 1) dt = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{x^7}{63}.$$

$$u_4(x) = u_3(x) - \int_0^x (u'_3(t) - u_3^2(t) - 1) dt = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{x^7}{63} + \frac{38x^9}{2835}.$$

Chapitre 3

Équations différentielles fractionnaires

Le but de ce chapitre est de présenter quelques éléments de la théorie des équations différentielles fractionnaires. Nous commençons par considérer la question d'existence et d'unicité de la solution d'un problème à valeurs initiales, pour une équation différentielle fractionnaire. Puis on va traitées quelques méthodes numériques nécessaires à la résolution d'équations différentielles fractionnaires.

3.1 Quelques résultats d'existence et d'unicité

Dans cette partie on va discuter les propriétés d'existence et d'unicité des solutions des équations différentielles d'ordre fractionnaire. On va se restreindre à des problèmes aux conditions initiales (problèmes de Cauchy). On utilisera les symboles ${}^R D^\alpha$ et ${}^C D^\alpha$ pour les dérivées fractionnaire de Riemann-Liouville et Caputo.

Définition 3.1.1 Soit $\alpha > 0$, $\alpha \notin \mathbb{N}$, $n = [\alpha] + 1$ et $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ alors :

$${}^R D^\alpha u(x) = f(x, u(x)), \quad (3.1.1)$$

est appelée équation différentielle fractionnaire de type Riemann-Liouville. Comme conditions initiales pour ce type d'EDF on utilise :

$${}^R D^{\alpha-k} u(0) = b_k \quad (k = 1, 2, \dots, n-1) \quad \lim_{z \rightarrow 0_+} I^{n-\alpha} u(z) = b_n. \quad (3.1.2)$$

De la même manière

$${}^C D^\alpha u(x) = f(x, u(x)), \quad (3.1.3)$$

est appelée équation différentielle fractionnaire de type Caputo et dans ce cas on utilise comme conditions initiales :

$$u^k(0) = b_k \quad (k = 0, 2, \dots, n-1). \quad (3.1.4)$$

L'utilisation de conditions initiales de différents types pour les équations différentielles fractionnaires 3.1.1 et 3.1.3 nous assure l'unicité des solutions de l'EDF correspondante, qu'on va prouver dans les théorèmes suivants.

3.1.1 Éxistence et unicité pour l'équation de type Caputo

Nous présentons quelques théorème concernant l'existence et l'unicité de la solution d'une équation de type Caputo.

Théorème 3.1.1 [3] Soit (U, d) un espace métrique complet non vide, soit $0 < \omega < 1$ et soit $T : U \rightarrow U$ une contractante telle que, pour chaque $u, v \in U$, la relation

$$d(Tu, Tv) \leq \omega d(u, v) \quad (3.1.5)$$

est vérifiée. Alors l'opérateur T a un point fixe unique $u^* \in U$.

Nous notons que, si la contraction $T : U \rightarrow U$ vérifie la condition 3.1.5, est appelée une contraction, ou une application contractive.

Théorème 3.1.2 [5] [14] Soit $\alpha > 0$, $\alpha \notin \mathbb{N}$, $n = [\alpha] + 1$. De plus, soit $k > 0$, $h^* > 0$, et $b_0, b_1, \dots, b_{n-1} \in \mathbb{R}$. On défini

$$G = [0, h^*] \times [b_0 - K, b_0 + K],$$

et soit la fonction continue $f : G \rightarrow \mathbb{R}$. Alors, il existe un réel $h > 0$ et une fonction $u \in C[0, h]$ solution de l'équation différentielle fractionnaire de type Caputo muni des conditions initiales. Dans le cas $\alpha \in (0, 1)$ le paramètre h est donné par la relation

$$h = \min\{h^*, (KT(\alpha + 1)/M)^{\frac{1}{\alpha}}\}, \quad \text{avec} \quad M = \sup_{(x,z) \in G} |f(x, z)|.$$

Si de plus f vérifie la condition de Lipschitz par rapport à la seconde variable, c'est-à-dire :

$$|f(x, u_1) - f(x, u_2)| < L |u_1 - u_2|.$$

avec $L > 0$ une constante indépendante de x , u_1 et u_2 , alors la fonction $u \in C[0, h]$ est unique.

Lemme 3.1.1 [4] Sous les hypothèses du théorème précédente, la fonction $u \in C[0, h]$ est une solution de l'EDF de type Caputo avec les conditions initiales si et seulement si elle est solution de l'équation intégrale de Volterra du second type :

$$u(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} b_k + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t, u(t)) dt. \quad (3.1.6)$$

Preuve. Premièrement supposons que u est solution de l'équation précédente, on peut écrire cette équation sous la forme réduite :

$$u(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} u_0^{(k)} + I_0^\alpha f(x, u(x)).$$

En appliquant l'opérateur de différentiation ${}^R D_0^\alpha$ sur les deux cotés de cette relation on aura immédiatement que y est solution de l'équation différentielle.

Appliquons maintenant l'opérateur ${}^R D_0^k$, $0 \leq k \leq n - 1$ sur l'équation de Volterra.

$${}^R D_0^k u(x) = \sum_{j=0}^{n-1} {}^R D_0^k \frac{(x)^j}{j!} u_0^{(j)} + {}^R D_0^k I_0^k I_0^{\alpha-k} f(x, u(x)).$$

${}^R D_0^k(t)^j = 0$ pour $j < k$ alors si $x = 0$ on a :

$${}^R D_0^k u(0) = {}^R D_0^k \frac{(x)^k}{k!} u_0^{(k)}|_{x=0} + I_0^{\alpha-k} f(x, u(x))|_{x=0}.$$

et comme $\alpha - k > 0$, l'intégrale est nul $I_0^{\alpha-k} f(x, u(x))|_{x=0} = 0$

par suite ${}^R D_0^k u(0) = u_0^k = b_k$.

D'autre part on définit $z(x) = f(x, u(x))$ alors $z \in C[0, h]$ on réécrit l'équation de la forme

$$\begin{aligned} z(x) &= f(x, u(x)) = {}^C D_0^\alpha u(x) = {}^R D_0^\alpha (u - T_{n-1}[u, 0])(x) \\ &= {}^R D_0^n I_0^{n-\alpha} (u - T_{n-1}[u, 0])(x) \end{aligned}$$

$T_{n-1}[u, 0]$ est le polynôme de Taylor de degré $n - 1$ ($T_{n-1}[u, 0] = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x)^k}{k!} u_0^{(k)}$) pour la fonction f autour de 0. En appliquant l'opérateur I_0^n sur les deux termes de cette relation elle devient :

$$I_0^n z(x) = I_0^{n-\alpha} (u - T_{n-1}[u, 0])(t) + q(x).$$

Avec q un polynôme de degré ne dépassant pas $n - 1$. Comme z est continue la fonction $I_0^n z$ a un zéro d'ordre au moins n à l'origine. En outre la différence $y - T_{n-1}[y, 0]$ a la même propriété par construction. Et donc la fonction $I_0^{n-\alpha} (u - T_{n-1}[u, 0])$ doit avoir un zéro d'ordre n aussi. Par suite le polynôme q a la même propriété mais comme il est de

degré ne dépassant pas $n - 1$ il en résulte que $q = 0$, par conséquent

$$I_0^n z(x) = I_0^{n-\alpha}(u - T_{n-1}[u, 0])(x).$$

En appliquant l'opérateur de dérivation de Riemann-Liouville ${}^R D_0^{n-\alpha}$ sur les deux cotés de cette équation elle devient :

$$u(x) - T_{n-1}[u, 0](x) = I_0^\alpha z(x).$$

En substituant $z(x)$ et $T_{n-1}[u, 0](x)$ on retrouve l'équation de Volterra :

$$u(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} b_k + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t, u(t)) dt.$$

□

Lemme 3.1.2 [5] *Sous les hypothèses du théorème 3.1.2, l'équation de Volterra*

$$u(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} b_k + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t, u(t)) dt,$$

possède une unique solution $u \in C \in [0, h]$.

3.2 Résolution numérique des équations différentielles fractionnaires

Pour le cas des équations différentielles fractionnaires, obtenir une solution analytique exacte est très compliqué, ainsi, il est nécessaire de se tourner vers les méthodes numériques.

Nous allons traiter les méthodes que nous avons déjà vu dans le cas entier.

3.2.1 La méthode ADM

Considérons l'équation différentielle au sens de Caputo avec $0 < \alpha \leq 1$, d'après le lemme 1, si f est une fonction continue alors notre problème à valeur initiale est équivalent à l'équation intégrale non linéaire de Volterra.

Dans ce sens, si $u(x) \in C[0, T]$ satisfait le problème, alors aussi satisfait l'équation intégrale de Volterra.

L'équation non linéaire de Caputo peut s'écrire sous la forme

$${}^C D^\alpha u(x) = f(x, u(x)) = g(x) + h(x)u + N(x, u)$$

où g, h sont des fonctions continues et N est la partie non linéaire de f .

Appliquons l'opérateur I^α sur les deux cotés de l'équation précédente, on trouve l'équation d'intégrale de Volterra

$$u(x) = u(0) + I^\alpha[g](x) + I^\alpha[h(x)u + N(x, u)](x)$$

ADM propose la relation de récurrence suivante :

$$u_0(t) = u(0) + I^\alpha[g](x) \quad , \quad u_{n+1} = I^\alpha[h(x)u + A_n](x), n \geq 0. \quad (3.2.1)$$

tel que les A_n sont des polynômes Adomian.

Finalement, nous rapprochons la solution par la série

$$\Phi_N = \sum_{n=0}^{N-1} u_n(t) \quad \text{et} \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \Phi_N = u(t). \quad (3.2.2)$$

Exemple 3.2.1 On considère l'équation différentielle fractionnaire non linéaire avec coefficients variables :

$$\begin{cases} {}^C D^\alpha u + tu^2 = \frac{32}{21\Gamma(\frac{7}{4})} t^{\frac{7}{4}} + t^5 \\ u(0) = 0 \end{cases} \quad (3.2.3)$$

La solution exacte de cette équation avec $\alpha = \frac{1}{4}$ est $u(t) = t^2$.

D'après 3.2.1 , nous avons la relation réursive suivante :

$$u_0(t) = I_0^\alpha \left(\frac{32}{21\Gamma(\frac{7}{4})} t^{\frac{7}{4}} + t^5 \right) , \quad u_{n+1} = -I_0^\alpha (A_n)(t), n \geq 0.$$

D'après cette relation, on trouve :

$$u_0(t) = I_0^\alpha \left(\frac{32}{21\Gamma(\frac{7}{4})} t^{\frac{7}{4}} + t^5 \right),$$

$$u_1(t) = -I_0^\alpha (t(u_0(t))^2),$$

$$u_2(t) = -2I_0^\alpha (tu_0(t)u_1(t)),$$

$$u_3(t) = -2I_0^\alpha (tu_0(t)u_2(t)) - I_0^\alpha (t(u_0(t))^2),$$

$$u_4(t) = -2I_0^\alpha (tu_1(t)u_2(t)) - 2I_0^\alpha (tu_0(t)u_3(t)),$$

$$u_5(t) = -2I_0^\alpha (tu_0(t)u_4(t)) - 2I_0^\alpha (tu_1(t)u_3(t)) - I_0^\alpha (t(u_2(t))^2).$$

Finalemnt on a une approximation des premiers cinq termes comme suit :

$$\begin{aligned} \Phi_6 = \sum_{n=0}^5 u_n(t) = & t^2 - 0.223473t^{\frac{21}{4}} + 0.412130385t^{\frac{17}{2}} - 0.755616844t^{\frac{47}{4}} + 1.538979902t^{15} - \\ & 3.18619934t^{\frac{73}{4}} - 55.57748572t^{\frac{47}{2}} - 119.5579407t^{\frac{99}{4}} - 115.5219367t^{28} - 58.93506052t^{\frac{125}{4}} - \\ & 15.55703363t^{\frac{69}{2}} - 1.683107690t^{\frac{151}{4}}. \end{aligned}$$

3.2.2 Application ADM pour résoudre l'équation de Foam Drainage

Dans cette section, nous présentons une solution analytique et numérique pour l'équation de Foam Drainage.

En utilisant la méthode ADM avec le temps fractinnaire :

$${}^C D_t^\alpha u = \frac{1}{2} u \cdot u_{xx} - 2u^2 {}^C D_x^\beta u + ({}^C D_x^\beta u)^2; \quad 0 \leq \alpha \leq 1, \quad 0 \leq \beta \leq 1. \quad (3.2.4)$$

où les opérateurs ${}^C D_t^\alpha u$ et ${}^C D_x^\beta u$ représentent la dérivé fractionnaire au sens du Caputo.

En prenant la condition initiale comme $u(x, 0) = f(x)$ et en appliquant l'opérateur I^α , l'inverse de ${}^C D^\alpha$ sur l'équation précédente, on obtient :

$$u(x, t) = f(x) - 2I^\alpha \Phi_1(u(x, t)) + \frac{1}{2}I^\alpha \Phi_2(u(x, t)) + I^\alpha \Phi_3(u(x, t)), \quad (3.2.5)$$

où $\Phi_1(u) = u^2 {}^C D_x^\beta u$, $\Phi_2(u) = u \cdot u_{xx}$, $\Phi_3(u) = ({}^C D_x^\beta u)^2$.

En appliquant la méthode ADM, la solution est représentée comme série infinie

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t).$$

Les opérateurs non-linéaires $\Phi_1(u)$, $\Phi_2(u)$ et $\Phi_3(u)$ sont décomposés sous la forme :

$$\Phi_1(u) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n, \quad \Phi_2(u) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n, \quad \Phi_3(u) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n, \quad (3.2.6)$$

où A_n , B_n et C_n sont appelés les polynômes Adomian et ont la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} A_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} [\Phi_1(\sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k u_k)]_{\lambda=0} = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} [(\sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k u_k)^2 {}^C D_x^\beta u(\sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k u_k)]_{\lambda=0}, \\ B_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} [\Phi_2(\sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k u_k)]_{\lambda=0} = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} [(\sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k u_k) (\sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k u_{kxx})]_{\lambda=0}, \\ C_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} [\Phi_3(\sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k u_k)]_{\lambda=0} = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} [{}^C D_x^\beta u(\sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k u_k)^2]_{\lambda=0}, \end{array} \right. \quad (3.2.7)$$

Nous donnons les trois premiers composants de ces polynômes

$$\begin{aligned} A_0 &= u_0^2 {}^C D_x^\beta u_0, \\ A_1 &= 2u_0 u_1 {}^C D_x^\beta u_0 + u_0^2 {}^C D_x^\beta u_1, \\ A_2 &= u_1^2 {}^C D_x^\beta u_0 + 2u_0 u_2 {}^C D_x^\beta u_0 + 2u_0 u_1 {}^C D_x^\beta u_1 + u_0^2 {}^C D_x^\beta u_2, \\ A_3 &= u_1^2 {}^C D_x^\beta u_1 + 2u_1 u_2 {}^C D_x^\beta u_0 + 2u_0 u_2 {}^C D_x^\beta u_1 + 2u_0 u_1 {}^C D_x^\beta u_2 \\ &\quad + 2u_0 u_3 {}^C D_x^\beta u_0 + u_0^2 {}^C D_x^\beta u_0^2 {}^C D_x^\beta u_3, \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

Les premiers trois composants de B_n sont :

$$\begin{aligned}
B_0 &= u_0 u_{0xx}, \\
B_1 &= u_0 u_{1xx} + u_1 u_{0xx}, \\
B_2 &= u_2 u_{0xx} + u_0 u_{2xx} + u_1 u_{1xx}, \\
B_3 &= u_3 u_{0xx} + u_0 u_{3xx} + u_2 u_{1xx} + u_1 u_{2xx}
\end{aligned} \tag{3.2.9}$$

et ceux de C_n sont données par :

$$\begin{aligned}
C_0 &= ({}^C D_x^\beta u_0)^2, \\
C_1 &= 2 {}^C D_x^\beta u_0 {}^C D_x^\beta u_1, \\
C_2 &= ({}^C D_x^\beta u_1)^2 + 2 {}^C D_x^\beta u_0 {}^C D_x^\beta u_2, \\
C_3 &= 2 {}^C D_x^\beta u_1 {}^C D_x^\beta u_2 + 2 {}^C D_x^\beta u_0 {}^C D_x^\beta u_3,
\end{aligned} \tag{3.2.10}$$

Les autres polynômes peuvent être produits dans une manière similaire.

En substituant la série de la décomposition $u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t)$, et 3.2.6 dans 3.2.5, on obtient la formule de récursive suivante :

$$\begin{cases} u_0(x, t) = f(x), \\ u_{n+1}(x, t) = -2I^\alpha(A_n) + \frac{1}{2}I^\alpha(B_n) + I^\alpha(C_n), \end{cases} \tag{3.2.11}$$

Maintenant, nous allons calculer la solution numérique pour l'équation de Foam Drainage :

Exemple 3.2.2 *Considérons la forme suivante de l'équation avec dérivée temporelle fractionnaire :*

$${}^C D_t^\alpha u = \frac{1}{2} u \cdot u_{xx} - 2u^2 u_x + u_x^2; \quad 0 < \alpha \leq 1 \tag{3.2.12}$$

avec la condition initiale $u(x, 0) = f(x) = -\sqrt{c} \tanh \sqrt{c}(x)$. Où c est la vitesse de l'onde.

La solution exacte de 3.2.12 pour le cas spécial $\alpha = \beta = 1$ est

$$\begin{cases} u(x, t) = -\sqrt{c} \tanh \sqrt{c}(x - ct); & x \leq ct. \\ 0 & ; \quad x > ct. \end{cases} \quad (3.2.13)$$

Pour obtenir la solution numérique d'équation 3.2.12, on remplace la condition initiale et on remplace aussi les polynômes d'Adomian ??, 3.2.9, 3.2.10 dans l'expression 3.2.11

Les premiers termes de la série sont données comme suit :

$$u_0 = f(x),$$

$$u_1 = -2I^\alpha(A_0) + \frac{1}{2}I^\alpha(B_0) + I^\alpha(C_0) = -2I^\alpha(u_{0x}^2) + \frac{1}{2}I^\alpha(u_0 u_{0xx}) + I^\alpha(u_{0x}^2) = f_1 \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$$

$$u_2 = -2I^\alpha(A_1) + \frac{1}{2}I^\alpha(B_1) + I^\alpha(C_1) = -2I^\alpha(2u_0 u_1 u_{0x} + u_0^2 u_{1x}) + \frac{1}{2}I^\alpha(u_0 u_{1xx} + u_1 u_{0xx}) + I^\alpha(2u_{0x} u_{1x}),$$

$$\text{où } f(x) = -\sqrt{c} \tanh(\sqrt{c}x), \quad f_1(x) = -2f^2 f_x + \frac{1}{2}f f_{xx} + f_x^2$$

$$f_2(x) = -2(2f f_x f_1 + f^2 f_{1x}) + \frac{1}{2}f f_{1xx} + \frac{1}{2}f_1 f_{xx} + 2f_x f_{1x}.$$

$$f_3(x) = -2f_x f_1^2 \frac{\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma^2(\alpha+1)} - 4f f_x f_2 - 4f f_1 f_{1x} \frac{\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma^2(\alpha+1)} - 2f^2 f_{2x} + \frac{1}{2}f_2 f_{xx} + \frac{1}{2}f f_{2xx} + \frac{1}{2}f_1 f_{1xx} \frac{\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma^2(\alpha+1)} + f_{1x}^2 \frac{\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma^2(\alpha+1)} + 2f_x f_{2x}.$$

Finalemnt, on peut approcher la solution par la série des trois premier composants :

$$\Phi_3 = \sum_{n=0}^2 u_n(t) \simeq u(t).$$

3.2.3 La méthode VIM

On considère l'équation fractionnaire de Riccati

$$\begin{cases} {}^C D^\alpha u = A(t) + B(t)u + C(t)u^2, \\ u(0) = 0 \end{cases} \quad (3.2.14)$$

Nous pouvons construire une correction fonctionnelle selon la méthode itération variationnelle suivante :

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) + I^\alpha \lambda(t) \left[\frac{d^\alpha u_n}{dt^\alpha} - A(t) - B(t)u_n - c(t)u_n^2 \right]. \quad (3.2.15)$$

$$Lu + Ru + Nu = g(x)$$

Par identification du multiplicateur, l'approximation s'écrit sous la forme :

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) + \int_0^x \lambda(t) \left(\frac{d^\alpha u_n}{dt^\alpha} - A(t) - B(t)\widetilde{u}_n - C(t)\widetilde{u}_n^2 \right) dt. \quad (3.2.16)$$

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) + I^\alpha \lambda(x) [Lu_n + R\widetilde{u}_n(x) + N\widetilde{u}_n(x) - g(x)].$$

Avec λ est le multiplicateur général du Lagrange, l'indice n est représente la $n^{\text{ième}}$ approximation, $\widetilde{u}_n(t)$ est considéré comme étant une variation réduite c'est à dire $\delta\widetilde{u}_n(t) = 0$, $\delta u_{n+1} = \delta u_n + \delta \left(\int_0^x \lambda(t) \frac{d^\alpha u_n}{dt^\alpha} dt \right) = 0$.

Cela conduit aux conditions stationnaires $1 + \lambda|_{t=0} = 0$, $\lambda'|_{t=0} = 0$,

qui donne $\lambda = -1$. En substituant cette valeur du mutiplicateur de Lagrange dans 3.2.15 on obtient la formule itérative :

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) - I^\alpha \left[\frac{d^\alpha u_n}{dt^\alpha} - A(t) - B(t)u_n - C(t)u_n^2 \right] dt. \quad (3.2.17)$$

et la solution exacte est donnée par : $u(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x)$.

Exemple 3.2.3 On considère l'équation fractionnaire de Riccati suivante :

$$\begin{cases} \frac{d^\alpha u}{dt^\alpha} = -u^2(t) + 1, \\ u(0) = 0 \end{cases} \quad \text{avec } 0 < \alpha \leq 1.$$

Si $\alpha = 1$ la solution exacte est $u(t) = \frac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1}$.

D'après l'équation 3.2.17 la correction fonctionnelle est donnée par :

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) - I^\alpha \left[\frac{d^\alpha u_n}{dt^\alpha} + u_n^2 - 1 \right] dt, \quad (3.2.18)$$

Par la formule d'itération 3.2.18, on obtient :

$$\begin{aligned}
u_0(t) &= \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}, \\
u_1(t) &= \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{\Gamma(2\alpha+1)t^{3\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)^2\Gamma(3\alpha+1)}, \\
u_2(t) &= \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{\Gamma(2\alpha+1)t^{3\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)^2\Gamma(3\alpha+1)} + \frac{2^{3+2\alpha}\Gamma(4\alpha)\Gamma(\frac{1}{2}+\alpha)t^{5\alpha}}{\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+1)\Gamma(3\alpha+1)\Gamma(5\alpha+1)} - \frac{64^\alpha\Gamma(2\alpha+1)^2\Gamma(\frac{1}{2}+3\alpha)t^{7\alpha}}{\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha+1)^3\Gamma(3\alpha+1)\Gamma(7\alpha+1)}, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

et ainsi de suite. la énième solution approximation de la méthode des itérations variationnelles converge vers la solution exacte. Donc, nous rapprochons la solution $u(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x)$.

3.2.4 Application VIM pour résoudre l'équation de Foam Drainage

Dans cette section, nous présentons une solution analytique et numérique pour l'équation de Foam Drainage en utilisant la méthode VIM avec le temps fractionnaire :

$${}^C D_t^\alpha u = \frac{1}{2}u \cdot u_{xx} - 2u^2 {}^C D_x^\beta u + ({}^C D_x^\beta u)^2; \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad 0 < \beta \leq 1, \quad (3.2.19)$$

où les opérateurs ${}^C D_t^\alpha u$ et ${}^C D_x^\beta u$ représentent la dérivé fractionnaire au sens de Caputo.

En prenant la condition initiale $u(x, 0) = f(x)$, nous pouvons construire une correction fonctionnelle selon la méthode des itérations variationnelles suivante : $u_{n+1}(x, t) =$

$$u_n(x, t) + \int_0^t \lambda(s) \left[\begin{aligned} & {}^C D_s^\alpha u_n(x, s) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{u}_n(x, s)}{\partial x} \right) (\tilde{u}_n(x, s)) + 2(\tilde{u}_n(x, s))^2 {}^C D_x^\beta (\tilde{u}_n(x, s)) \\ & - {}^C D_x^\beta (\tilde{u}_n(x, s))^2 \end{aligned} \right] ds$$

Où λ est le multiplicateur de Lagrange qui dans cette méthode peut être une constante ou une fonction, et $\tilde{u}_n(x, s)$ est une valeur réduite où $\delta \tilde{u}_n = 0$, nous obtenons : $\delta u_{n+1}(x, t) =$

$$\delta u_n(x, t) + \int_0^t \delta \lambda(s) \left[\begin{aligned} & {}^C D_s^\alpha u_n(x, s) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{u}_n(x, s)}{\partial x} \right) (\tilde{u}_n(x, s)) + 2(\tilde{u}_n(x, s))^2 {}^C D_x^\beta (\tilde{u}_n(x, s)) \\ & - {}^C D_x^\beta (\tilde{u}_n(x, s))^2 \end{aligned} \right] ds$$

où

$$\delta u_{n+1}(x, t) = \delta u_n(x, t) + \int_0^t \delta \lambda(s) [{}^C D_s^\alpha u_n(x, s)] ds. \quad (3.2.20)$$

Intégrons l'intégrale de 3.2.20 par parties nous obtenons

$$\delta u_{n+1}(x, t) = \delta u_n(x, t) + \lambda u_n(x, t) + \int_0^t \lambda' \delta u_n(x, t) ds \quad (3.2.21)$$

Qui est équivalente à

$$\delta u_{n+1}(x, t) = \delta u_{n+1}(x, t)(1 + \lambda|_{t=x}) + \int_0^t \lambda' u_n(x, s) ds \quad (3.2.22)$$

Cela conduit aux conditions stationnaires $1 + \lambda|_{t=x} = 0$, $\lambda'|_{t=x} = 0$, qui donne $\lambda = -1$.

Donc la formule des itérations variationnelles peuvent être obtenue selon la forme suivante :

$$u_{n+1}(x, t) = u_n(x, t) - \int_0^t \left[{}^C D_s^\alpha u_n - \frac{1}{2} \tilde{u}_n \tilde{u}_{nxx} + 2(\tilde{u}_n)^2 {}^C D_x^\beta \tilde{u}_n - ({}^C D_x^\beta \tilde{u}_n)^2 \right] ds \quad (3.2.23)$$

Exemple 3.2.4 *Considérons la forme suivante de l'équation avec dérivée temporelle fractionnaire*

$${}^C D_t^\alpha u - \frac{1}{2} u \cdot u_{xx} + 2u^2 u_x - u_x^2 = 0; \quad 0 < \alpha \leq 1. \quad (3.2.24)$$

Avec la condition initiale $u(x, 0) = f(x) = -\sqrt{c} \tanh \sqrt{c}(x)$. Où c est la vitesse. La solution exacte de pour le cas spécial $\alpha = \beta = 1$ est

$$\begin{cases} u(x, t) = -\sqrt{c} \tanh(\sqrt{c}(x - ct)); & x \leq ct. \\ 0 & ; x > ct. \end{cases} \quad (3.2.25)$$

Pour obtenir la solution numérique de l'équation 3.2.24, on utilise l'expression 3.2.23, et

nous obtenons :

$$u_{n+1}(x, t) = u_n(x, t) - \int_0^t \left[{}^C D_s^\alpha u_n - \frac{1}{2} \tilde{u}_n \tilde{u}_{nxx} + 2(\tilde{u}_n)^2 \tilde{u}_{nx} - (\tilde{u}_{nx})^2 \right] ds. \quad (3.2.26)$$

Par la formule de l'itération 3.2.26, nous pouvons obtenir les autres composants comme suit :

$$\begin{aligned} u_0 &= f(x), \\ u_1 &= u_0 - \int_0^t \left[{}^C D_s^\alpha u_0 - \frac{1}{2} \tilde{u}_0 \tilde{u}_{0xx} + 2(\tilde{u}_0)^2 \tilde{u}_{0x} - (\tilde{u}_{0x})^2 \right] ds = f(x) + t f_1(x), \\ f_1(x) &= -2f^2 f_x + \frac{1}{2} f f_{xx} + f_x^2, \\ u_2 &= u_1 - \int_0^t \left[{}^C D_s^\alpha u_1 - \frac{1}{2} \tilde{u}_1 \tilde{u}_{1xx} + 2(\tilde{u}_1)^2 \tilde{u}_{1x} - (\tilde{u}_{1x})^2 \right] ds = f - f_2 t^{2-\alpha} + f_3 t + f_4 \frac{t^2}{2} + \\ & f_5 \frac{t^3}{3} + f_6 \frac{t^6}{6}, \end{aligned}$$

$$\text{où } f_2 = \frac{f_1(x)}{(2-\alpha)\Gamma(2-\alpha)}, \quad f_3 = f_1(x) - 2f^2 f_x + \frac{1}{2} f_x f_{xx} + f_x^2,$$

$$f_4 = 2f_x f_{1x} - 2(f^2 f_{1x} + 2f f_1 f_x) + \frac{1}{2}(f_x f_{1xx} + f_{xx} f_{1x}),$$

$$f_5 = f_{1x}^2 - 2(2f f_1 f_{1x} + f_1^2 f_x) + \frac{1}{2} f_{1x} f_{1xx}, \quad f_6 = 2f_{1x} f_1^2,$$

$$u_3 = u_2 - \int_0^t \left[{}^C D_s^\alpha u_2 - \frac{1}{2} \tilde{u}_2 \tilde{u}_{2xx} + 2(\tilde{u}_2)^2 \tilde{u}_{2x} - (\tilde{u}_{2x})^2 \right] ds,$$

⋮

et ainsi de suite, On rappelle que la solution est $u(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x)$.

3.2.5 La méthode HPM

La méthode HPM qui fournit une solution approximative analytique est appliquée à plusieurs problèmes des équations non-linéaires. Pour illustrer cette méthode nous considérons l'équation différentielle non-linéaire d'ordre fractionnaire suivante :

$${}^C D^\alpha u(t) = N(u) + g(t), \quad t > 0 \quad (3.2.27)$$

où $m - 1 < \alpha < m$, N est un opérateur non-linéaire, $g(t)$ est une fonction analytique

connue et ${}^C D^\alpha u$ est la dérivé fractionnaire au sens du Caputo α .

Par la technique de l'homotopie, nous construisons un homotopie suivant :

$$(1 - p)L [\phi(t, p) - \phi_0(t)] = -p({}^C D^\alpha \phi(t, p) - N(\phi(t, p) - g(t))), \quad (3.2.28)$$

Où $p \in [0, 1]$ est un paramètre enfonçant, ϕ_0 est une estimation initiale de $u(t)$ et L est un opérateur linéaire qui peut être définie comme $L = \frac{d^m}{dt^m}$ ou $L = \frac{d^\alpha}{dt^\alpha}$.

Lorsque $p = 0$, Eq 3.2.28 devient

$$L [\phi(t, 0) - \phi_0(t)] = 0. \quad (3.2.29)$$

Et lorsque $p = 1$, Eq 3.2.28 devient Eq 3.2.27.

D'après HPM, nous pouvons utiliser en premier paramètre enfonçant p comme un petit paramètre, et suppose que la solution d'Eq 3.2.27 peut être écrite comme une série suivante :

$$\phi = \phi_0 + p\phi_1 + p^2\phi_2 + \dots \quad (3.2.30)$$

On remplace 3.2.30 dans 3.2.28, et par identification des termes avec les puissances identiques de p , nous obtenons les équations :

$$\begin{aligned} L[\phi_1] &= -({}^C D^\alpha \phi_0 - N_0(\phi_0) - g(t)), \\ L[\phi_2] &= L[\phi_1] - ({}^C D^\alpha \phi_1 - N_1(\phi_0, \phi_1)), \\ L[\phi_3] &= L[\phi_2] - ({}^C D^\alpha \phi_2 - N_2(\phi_0, \phi_1, \phi_2)), \\ L[\phi_4] &= L[\phi_3] - ({}^C D^\alpha \phi_3 - N_3(\phi_0, \phi_1, \phi_2, \phi_3)), \end{aligned}$$

Où, $N(\phi_0 + p\phi_1 + p^2\phi_2 + \dots) = N_0(\phi_0) + pN_1(\phi_0, \phi_1) + p^2N_2(\phi_0, \phi_1, \phi_2) + \dots$

La solution approximative d'Eq 3.2.27, par conséquent, peut être obtenue comme

$$u = \lim_{p \rightarrow 1} \phi = \phi_0 + \phi_1 + \phi_2 + \dots \quad (3.2.31)$$

En appliquant l'opérateur I^α aux deux côtés de l'Eq 3.2.27, on trouve

$$u(t) = \sum_{k=0}^{m-1} u^{(k)}(0_+) \frac{t^k}{k!} + I^\alpha N(u) + I^\alpha g(t), \quad t > 0 \quad (3.2.32)$$

Négligeant le terme non linéaire $I^\alpha N(u)$, nous pouvons utiliser la partie restante comme l'estimation initiale de la solution, c'est-à-dire,

$$\phi_0(t) = \sum_{k=0}^{m-1} u^{(k)}(0_+) \frac{t^k}{k!} + I^\alpha g(t), \quad t > 0 \quad (3.2.33)$$

Exemple 3.2.5 On considère l'équation fractionnaire de Riccati suivante :

$$\begin{cases} \frac{d^\alpha u}{dt^\alpha} = -u^2(t) + 1, \\ u(0) = 0 \end{cases} \quad \text{avec } 0 < \alpha \leq 1. \quad (3.2.34)$$

Si $\alpha = 1$ la solution exacte est $u(t) = \frac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1}$.

D'après l'équation 3.2.28 nous avons l'homotopie suivante :

$$(1-p)L[\phi(t,p) - \phi_0(t)] = -p({}^C D^\alpha \phi(t,p) - \phi^2(t,p) - 1). \quad (3.2.35)$$

D'après l'équation 3.2.33, nous avons l'estimation initiale,

$$\phi_0 = \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}. \quad (3.2.36)$$

En remplaçant 3.2.30 et l'estimateur initiale 3.2.36 dans l'homotopie et par identification des termes avec les puissances identiques de p , nous obtenons l'ensemble des équations

différentielles linéaires d'ordre fractionnaire suivant :

$$\begin{aligned}
p^1 & : \quad {}^C D^\alpha \phi_1 = -({}^C D^\alpha \phi_0 + \phi_0^2 - 1), \\
p^2 & : \quad {}^C D^\alpha \phi_2 = {}^C D^\alpha \phi_1 - ({}^C D^\alpha \phi_1 + 2\phi_0 \phi_1), \\
p^3 & : \quad {}^C D^\alpha \phi_3 = {}^C D^\alpha \phi_2 - ({}^C D^\alpha \phi_2 + \phi_1^2 + 2\phi_0 \phi_2), \\
& \quad \vdots \\
p^n & : \quad {}^C D^\alpha \phi_n = {}^C D^\alpha \phi_{n-1} - ({}^C D^\alpha \phi_{n-1} + \frac{1}{n!} \left[\frac{d^n}{d\lambda^n} \left(\sum_{i=0}^{+\infty} \lambda^i u_i \right)^2 \right]_{\lambda=0}).
\end{aligned} \tag{3.2.37}$$

Par conséquent, les premiers composants de la solution d'Eq 3.2.34 avec sont donné par :

$$\begin{aligned}
\phi_1 & = -\frac{\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)^2 \Gamma(2\alpha+2)} t^{2\alpha+1}, \\
\phi_2 & = -\frac{\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)^2 \Gamma(2\alpha+2)} t^{2\alpha+1} + \frac{\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)^2 \Gamma(2\alpha+3)} t^{\alpha+2} + 2 \frac{\Gamma(2\alpha+1) \Gamma(3\alpha+2)}{\Gamma(\alpha+1)^3 \Gamma(2\alpha+2) \Gamma(3\alpha+3)} t^{3\alpha+2}, \\
\phi_3 & = -\frac{\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)^2 \Gamma(2\alpha+2)} t^{2\alpha+1} + \frac{\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)^2 \Gamma(2\alpha+3)} t^{\alpha+2} - \frac{\Gamma(2\alpha+1)}{6\Gamma(2\alpha+1)} t^3 + 4 \frac{\Gamma(2\alpha+1) \Gamma(3\alpha+2)}{\Gamma(\alpha+1)^3 \Gamma(2\alpha+2) \Gamma(3\alpha+3)} t^{3\alpha+2} \\
& + 2 \frac{\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)^3 \Gamma(2\alpha+4)} \left(\frac{\Gamma(3\alpha+2)}{\Gamma(2\alpha+2)} + \frac{\Gamma(2\alpha+3)}{\Gamma(\alpha+3)} \right) t^{2\alpha+3} - \frac{\Gamma(2\alpha+1)^2 \Gamma(4\alpha+3)}{\Gamma(\alpha+1)^4 \Gamma(2\alpha+2)^2 \Gamma(4\alpha+4)} t^{4\alpha+3} - 4 \frac{\Gamma(2\alpha+1) \Gamma(3\alpha+2) \Gamma(4\alpha+3)}{\Gamma(\alpha+1)^4 \Gamma(2\alpha+2) \Gamma(3\alpha+3) \Gamma(4\alpha+4)} t^{4\alpha+3}
\end{aligned}$$

et la solution approximative de l'équation 3.2.34, par conséquent, peut être obtenu aisément,

$$u = \lim_{p \rightarrow 1} \phi = \phi_0 + \phi_1 + \phi_2 + \dots$$

3.2.6 Application HPM pour résoudre l'équation de Foam Drainage

L'équation de Foam Drainage a été étudiée par beaucoup d'auteurs. L'étude de l'équation de Foam Drainage avec temps et dérivées fractionnaires de cette forme

$${}^C D_t^\alpha u = \frac{1}{2} u \cdot u_{xx} - 2u^2 {}^C D_x^\beta u + ({}^C D_x^\beta u)^2; \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad 0 < \beta \leq 1. \tag{3.2.38}$$

Où les opérateurs ${}^C D_t^\alpha$ et ${}^C D_x^\beta u$ représentent la dérivé fractionnaire au sens du Caputo. Cette équation a été résolue par la méthode VIM.

Maintenant, nous allons prendre l'équation de Foam Drainage et lui appliqué la méthode HPM pour résoudre cette équation.

D'après [12] . Nous introduisons un algorithme pour manier dans un chemin réaliste et effectif l'EDP non linéaire d'ordre fractionnaire. En premier, récrivez Eq 3.2.27 sous la forme

$$\begin{cases} {}^C D^\alpha u(t) = f(x, u_x, u_{xx}) = L(u, u_x, u_{xx}) + N(u, u_x, u_{xx}) + f(x, t), & t > 0 \\ u^k(x, 0) = g_k(x), & k = 0, 1, \dots, m-1. \end{cases} \quad (3.2.39)$$

Où L est un opérateur linéaire, N est un opérateur non-linéaire, f est une fonction analytique connue, $m-1 < \alpha \leq m$.

D'après 3.2.28, nous pouvons construire l'homotopie suivante :

$$\frac{\partial u^m}{\partial t^m} - L(u, u_x, u_{xx}) - f(x, t) = p \left[\frac{\partial u^m}{\partial t^m} + N(u, u_x, u_{xx}) - {}^C D^\alpha u \right], \quad (3.2.40)$$

ou

$$\frac{\partial u^m}{\partial t^m} - f(x, t) = p \left[\frac{\partial u^m}{\partial t^m} + L(u, u_x, u_{xx}) + N(u, u_x, u_{xx}) - {}^C D^\alpha u \right]. \quad (3.2.41)$$

où $p \in [0, 1]$ est un paramètre, la solution de l'équation 3.2.40 ou l'équation 3.2.41 peut être écrite comme une série suivante : $\phi = \phi_0 + \phi_1 + \phi_2 + \dots$, et la solution de est donnée par $u = \lim_{p \rightarrow 1} \phi = \phi_0 + \phi_1 + \phi_2 + \dots$

Exemple 3.2.6 *Considérons la forme suivante de l'équation avec dérivée temporelle fractionnaire*

$${}^C D_t^\alpha u - \frac{1}{2}u \cdot u_{xx} + 2u^2 u_x - u_x^2 = 0; \quad 0 < \alpha \leq 1. \quad (3.2.42)$$

Où la condition initiale $u(x, 0) = g(x) = -\sqrt{c} \tanh \sqrt{c}(x)$. Où c est la vitesse. La solution

exacte de pour le cas spécial $\alpha = \beta = 1$ est

$$\begin{cases} u(x, t) = -\sqrt{c} \tanh(\sqrt{c}(x - ct)); & x \leq ct. \\ 0 & ; x > ct. \end{cases} \quad (3.2.43)$$

D'après 3.2.40 ,l'homotopie de 3.2.42 est

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = p \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \phi \phi_{xx} - 2\phi^2 \phi_x + \phi_x^2 - {}^C D_t^\alpha \phi \right] \quad (3.2.44)$$

Remplaçant $\phi = \phi_0 + \phi_1 + \phi_2 + \dots$, et la condition initiale $\phi(x, 0) = -\sqrt{c} \tanh \sqrt{c}(x)$ dans l'homotopie 3.2.44 et en identifiant les termes avec les puissances identiques de p , nous obtenons l'ensemble des équations différentielles linéaires d'ordre fractionnaire suivante :

$$\begin{aligned} p^0 & : \phi_0 = g(x) = -\sqrt{c} \tanh \sqrt{c}(x) & (3.2.45) \\ p^1 & : \frac{\partial \phi_1}{\partial t} = \frac{\partial \phi_0}{\partial t} + \frac{1}{2} \phi_0 (\phi_0)_{xx} - 2\phi_0^2 (\phi_0)_x + (\phi_0)_x^2 - ({}^C D_t^\alpha \phi_0), \\ p^2 & : \frac{\partial \phi_2}{\partial t} = \frac{\partial \phi_1}{\partial t} + \frac{1}{2} \phi_0 (\phi_1)_{xx} + 2(\phi_0)_x (\phi_1)_x - 2\phi_0^2 (\phi_1)_x - 4\phi_0 \phi_1 (\phi_0)_x - ({}^C D_t^\alpha \phi_1), \end{aligned}$$

Par conséquent, les premiers composants de la solution de l'équation 3.2.42 sont donnés par

$$\begin{aligned} \phi_0(x, t) & = -\sqrt{c} \tanh \sqrt{c}(x), \\ \phi_1(x, t) & = \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} [1 - \tanh(\sqrt{c}x)^2 t^\alpha c^2], \\ \phi_2(x, t) & = \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)^2} [t^{2\alpha} c^{\frac{7}{2}} \tanh(\sqrt{c}x) - t^{2\alpha} c^{\frac{7}{2}} \tanh(\sqrt{c}x)^3], \\ & \dots \end{aligned}$$

Finalement, nous reproduisons la solution de 3.2.42 comme suit :

$$u(x, t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)^3} \left[\begin{aligned} & -\sqrt{c} \tanh \sqrt{c}(x) \Gamma(\alpha + 1)^3 + t^\alpha c^2 \Gamma(\alpha + 1)^2 - t^\alpha c^2 \tanh(\sqrt{c}x)^2 \Gamma(\alpha + 1)^2 - \\ & t^{2\alpha} c^{\frac{7}{2}} \tanh(\sqrt{c}x) \Gamma(\alpha + 1) - t^{2\alpha} c^{\frac{7}{2}} \tanh(\sqrt{c}x)^3 \Gamma(\alpha + 1) + \dots \end{aligned} \right]$$

Si on prend $\alpha = 1$ la solution de 3.2.42 devient comme suit :

Exemple 3.2.7 $u(x, t) = -\sqrt{c} \tanh \sqrt{cx} + tc^2 - tc^2 \tanh(\sqrt{cx})^2 + t^{2\alpha} c^{\frac{7}{2}} \tanh(\sqrt{cx}) - t^{2\alpha} c^{\frac{7}{2}} \tanh(\sqrt{cx})^3 + \dots = -\sqrt{c} \tanh \sqrt{cx} + (1 - \tanh^2 \sqrt{cx}) c^2 t + (\tanh \sqrt{cx}) - \tanh(\sqrt{cx})^3 c^{\frac{7}{2}} t^2 + \dots$

Chapitre 4

Application et résultats numériques

L'équation différentielle fractionnaire de Riccati est étudié par nombreux auteurs en utilisant différentes méthodes numériques telles que ADM, VIM et HPM. Dans ce chapitre on va essayé de résoudre l'équation de Riccati par la méthode MFTDM.

4.1 Implémentation du MFTDM pour l'équation de Riccati

Considérons l'équation différentielle fractionnaire de Riccati de la forme suivante :

$$D_t^\alpha u = P(t)u^2 + Q(t)u + R(t), \quad 0 < t < T, 0 < \alpha \leq 1 \quad (4.1.1)$$

avec la condition initiale

$$u(0) = C. \quad (4.1.2)$$

L'intervalle $[0, T]$ peut être divisé en une suite de sous intervalles $[t_0, t_1], [t_1, t_2], \dots, [t_{N-1}, t_N]$, dans lesquels $t_0 = 0, t_N = T$ et $\bigcup_{i=0}^{N-1} \Omega_i = [0, T]$ où $\Omega_i = [t_i, t_{i+1}]$ peuvent être choisis de la même longueur. l'équation 4.1.1 peut être résolu par la méthode FTDM

(voir) dans chaque intervalle séquentiel Ω_i .

Comme nous voulons appliquer la méthode FTDM (voir [11]) dans chaque sous intervalle, nous aurons besoin d'une valeur initiale dans chacun de ces sous-intervalles. La seule valeur initiale connue est celle au point $t_0 = 0$ du premier sous intrvalle $[t_0, t_1]$. Pour les autres valeurs initiales, elles seront calculé à partir des solutions approximatives précédentes. Alors on aura l'algorithme suivant :

dans $\Omega_0 = [t_0, t_1]$ on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{0,0}(t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{u^{(k)}(0^+)}{k!} t^k = C ; \\ u_{0,1}(t) = I^\alpha f(t, u_{0,0}) = I^\alpha [P(t)u_{0,0}^2 + Q(t)u_{0,0} + R(t)] \\ u_{0,2}(t) = I^\alpha [f(t, u_{0,0} + u_{0,1}) - I^\alpha f(t, u_{0,0})] = I^\alpha [P(t)u_{0,1}^2 + 2P(t)u_{0,0}u_{0,1} + Q(t)u_{0,1}] \\ \vdots \\ u_{0,k}(t) = I^\alpha \left[f(t, \sum_{j=0}^{k-1} u_{0,j}) - I^\alpha f(t, \sum_{j=0}^{k-2} u_{0,j}) \right] \\ = I^\alpha \left[P(t)u_{0,k-1}^2 + 2P(t) \left(\sum_{j=0}^{k-2} u_{0,j} \right) u_{0,k-1} + Q(t)u_{0,k-1} \right] \\ \Phi_{0,N_0}(t) = \sum_{j=0}^{N_0} u_{0,j}(t), N_0 \in N - \{0\}, \end{array} \right. \quad (4.1.3)$$

et dans chaque intervalle $\Omega_i = [t_i, t_{i+1}]$, ($i = 1, 2, \dots, N - 1$) on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{i,0}(t) = \Phi_{i-1, N_0}(t_i) \quad ; \\ u_{i,1}(t) = I_{t_i}^\alpha f(t, u_{i,0}) = I_{t_i}^\alpha [P(t)u_{i,0}^2 + Q(t)u_{i,0} + R(t)] \\ u_{i,2}(t) = I_{t_i}^\alpha [f(t, u_{i,0} + u_{i,1}) - f(t, u_{i,0})] = I_{t_i}^\alpha [P(t)u_{i,1}^2 + 2P(t)u_{i,0}u_{i,1} + Q(t)u_{i,1}] \\ \vdots \\ u_{i,k}(t) = I_{t_i}^\alpha \left[f(t, \sum_{j=0}^{k-1} u_{i,j}) - I^\alpha f(t, \sum_{j=0}^{k-2} u_{i,j}) \right] \\ = I_{t_i}^\alpha \left[P(t)u_{i,k-1}^2 + 2P(t) \left(\sum_{j=0}^{k-2} u_{i,j} \right) u_{i,k-1} + Q(t)u_{i,k-1} \right] \\ \Phi_{i, N_0}(t) = \sum_{j=0}^{N_0} u_{i,j}(t), N_0 \in N - \{0\}, i = 1, 2, \dots, N - 1 \end{array} \right. \quad (4.1.4)$$

Or, la solution du problème est sous la forme suivante :

$$\Phi_{N_0}(t) = \begin{cases} \Phi_{0, N_0}(t) = \sum_{j=0}^{N_0} u_{0,j}(t), 0 \leq t \leq t_1 \\ \Phi_{i, N_0}(t) = \sum_{j=0}^{N_0} u_{i,j}(t), t_i \leq t \leq t_{i+1}, \\ i = 1, 2, \dots, N - 1. \end{cases} \quad (4.1.5)$$

Alors, cette méthode va nous donner des solutions dans chaque intervalle Ω_i qui sont continues au point t_i , i.e., au point d'extrémité des sous-intervalles.

4.2 Existence et unicité

Considérons l'équation différentielle fractionnaire de Riccati de la forme des équations 4.1.1 et 4.1.2, si $\alpha = 1$, l'équation de Riccati fractionnaire devient l'équation de Riccati classique.

Définition 4.2.1 Soit $I = [0, l]$, $l < \infty$ et $C(I)$ est l'espace des fonctions continues sur

I , avec la norme

$$\|u\| = \sup_{t \in I} |e^{-ht}u(t)|, \quad h > 0$$

qui est équivalente à la norme sup de y .

Remarque 4.2.1 *Supposons que la solution $u(t)$ de l'équation 4.1.1 appartient à l'espace $S = \{u \in \mathbb{R} : |u| \leq c, c \text{ est une constante quelconque}\}$, afin d'étudier l'existence et l'unicité du problème de valeur initiale.*

Définition 4.2.2 *L'espace des fonctions intégrables $L_1[0, l]$ dans l'intervalle $[0, l]$ est définie comme*

$$L_1[0, l] = \left\{ u(t) : \int_0^l |u(t)| dt < \infty \right\}$$

Théorème 4.2.1 [15] *Le problème à valeur initiale donnée par les équations 4.1.1 et 4.1.2 a une solution unique*

$$u \in C(I), \quad u' \in \left\{ u \in L_1[0, l], \quad \|u\| = |e^{-ht}u(t)|_{L_1} \right\} \quad (4.2.1)$$

Preuve. L'équation fractionnaire 4.1.1 peut être écrite comme

$$I^{1-\alpha} \frac{du(t)}{dt} = P(t)u^2 + Q(t)u + R(t) \quad (4.2.2)$$

devient

$$u(t) = I^\alpha (P(t)u^2 + Q(t)u + R(t)) \quad (4.2.3)$$

Maintenant, nous définissons l'opérateur $\Theta : C(I) \rightarrow C(I)$ par

$$\Theta u(t) = I^\alpha (P(t)u^2 + Q(t)u + R(t)) \quad (4.2.4)$$

On a

$$\begin{aligned}
& e^{-ht}(\Theta u - \Theta \omega) \\
&= e^{-ht} I^\alpha [(P(t)u^2 + Q(t)u + R(t)) - (P(t)\omega^2 + Q(t)\omega + R(t))] \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t ((t-s)^{\alpha-1} e^{-h(t-s)} ((u-\omega)(u+\omega) - C(u-\omega)) e^{-ht}) ds \\
&\leq \|u - \omega\| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t s^{\alpha-1} e^{-ht} ds \\
&\text{par conséquent, nous avons}
\end{aligned}$$

$$\|\Theta u - \Theta \omega\| < \|u - \omega\|$$

ce qui implique que l'opérateur donné par l'équation 4.2.4 a un unique point fixe et par conséquent l'équation intégrale donnée a une solution unique $u \in C(I)$. D'autre part nous pouvons voir que

$$I^\alpha (P(t)u^2 + Q(t)u + R(t))|_{t=0} = C \quad (4.2.5)$$

Maintenant à partir de l'équation 4.2.3 , nous avons

$$u(t) = \left[\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} (Pu_0^2 + Qu_0 + R) + I^{\alpha+1}(P'u^2 + 2u'P + Q'u + Qu' + R') \right]$$

et

$$\begin{aligned}
\frac{du}{dt} &= \left[\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} (Pu_0^2 + Qu_0 + R) + I^{\alpha+1}(P'u^2 + 2u'P + Q'u + Qu' + R') \right] \\
\Leftrightarrow e^{-ht} \frac{du}{dt} &= e^{-ht} \left[\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} (Pu_0^2 + Qu_0 + R) + I^{\alpha+1}(P'u^2 + 2u'P + Q'u + Qu' + R') \right]
\end{aligned}$$

à partir de laquelle nous pouvons déduire que $u' \in C(I)$ et $u' \in S$.

Encore à partir des équations 4.2.3 , 4.2.4 et 4.2.5 nous obtenons

$$\frac{du}{dt} = \frac{d}{dt} I^\alpha [Pu_0^2 + Qu_0 + R]$$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow I^{1-\alpha} \frac{du}{dt} &= I^{1-\alpha} \frac{d}{dt} I^\alpha [Pu_0^2 + Qu_0 + R] \\
&= \frac{d}{dt} I^{1-\alpha} I^\alpha [Pu_0^2 + Qu_0 + R] \\
\Leftrightarrow D^\alpha u(t) &= \frac{d}{dt} [Pu_0^2 + Qu_0 + R] \\
&= Pu_0^2 + Qu_0 + R
\end{aligned}$$

et

$$u(0) = I^\alpha (P(t)u^2 + Q(t)u + R(t))|_{t=0} = C$$

ce qui implique que l'équation intégrale 4.2.5 est équivalente au problème à valeur initiale 4.1.2 et le théorème est prouvé. \square

4.3 Exemples numériques

Exemple 4.3.1 *On considère l'équation différentielle fractionnaire de Riccati de la forme suivante :*

$$D^\alpha u(t) = -u^2, \quad t > 0 \quad (4.3.1)$$

avec la condition initiale

$$u(0) = 1 \quad (4.3.2)$$

La solution exacte de cette équation avec $\alpha = 1$ est $u(t) = \frac{1}{1+t}$.

En utilisant les formules 4.1.3 et 4.1.4 avec $t_0 = 0$, $t_N = 5$, $t_{i+1} - t_i = 0.5$, $N_0 = 3$, et pour $\Omega_0 = [t_0, t_1] = [0, 0.5]$ on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{0,0}(t) = 1 ; \\ u_{0,1}(t) = A_{00}t^\alpha , \text{ o\`u } A_{00} = -\frac{\Gamma(1)}{\Gamma(\alpha+1)} \\ u_{0,2}(t) = A_{01}t^{2\alpha} + A_{02}t^{3\alpha} , \text{ o\`u } A_{01} = 2\frac{1}{\Gamma(2\alpha+1)}, A_{02} = -\frac{\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma(3\alpha+1)\Gamma^2(\alpha+1)} \\ u_{0,3}(t) = A_{03}t^{3\alpha} + A_{04}t^{4\alpha} + A_{05}t^{5\alpha} + A_{06}t^{6\alpha} + A_{07}t^{7\alpha} , \text{ o\`u } A_{03} = -2A_{01}\frac{\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma(3\alpha+1)}, \\ A_{04} = 2\frac{\Gamma(3\alpha+1)}{\Gamma(4\alpha+1)} \left(-A_{02} + \frac{A_{01}}{\Gamma(\alpha+1)} \right), A_{05} = \frac{\Gamma(4\alpha+1)}{\Gamma(5\alpha+1)} \left(-A_{01}^2 + \frac{2A_{01}}{\Gamma(\alpha+1)} \right), \\ A_{06} = -2A_{01}A_{02}\frac{\Gamma(5\alpha+1)}{\Gamma(6\alpha+1)}, A_{07} = -A_{02}^2\frac{\Gamma(6\alpha+1)}{\Gamma(7\alpha+1)}. \\ \Phi_{0,3}(t) = u_{0,0}(t) + u_{0,1}(t) + u_{0,2}(t) + u_{0,3}(t). \end{array} \right.$$

Pour $\alpha = 1$, on trouve :

$$\Phi_{0,3}(t) = 1 - t + t^2 - t^3 + \frac{2}{3}t^4 - \frac{1}{3}t^5 + \frac{1}{9}t^6 - \frac{1}{63}t^7.$$

Pour $\alpha = \frac{1}{4}$, on trouve :

$$\Phi_{0,3}(t) = 1 - 1.1033t^{\frac{1}{4}} + 2.2568t^{\frac{1}{2}} - 5.5260t^{\frac{3}{4}} + 6.7340t - 6.7809t^{\frac{5}{4}} + 4.5151t^{\frac{3}{2}} - 1.1386t^{\frac{7}{4}}.$$

Pour $\alpha = \frac{1}{2}$, on trouve :

$$\Phi_{0,3}(t) = 1 - 1.1284t^{\frac{1}{2}} + 2t - 3.9668t^{\frac{3}{2}} + 4.2732t^2 - 3.7080t^{\frac{5}{2}} + 2.1221t^3 - 0.4732t^{\frac{7}{2}}.$$

Pour $\alpha = \frac{3}{4}$, on trouve :

$$\Phi_{0,3}(t) = 1 - 1.0881t^{\frac{3}{4}} + 1.5045t^{\frac{3}{2}} - 2.1864t^{\frac{9}{4}} + 1.9156t^3 - 1.3048t^{\frac{15}{4}} + 0.5886t^{\frac{9}{2}} - 0.1079t^{\frac{21}{4}}.$$

- Dans $\Omega_1 = [t_1, t_2] = [0.5, 1]$ on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{1,0}(t) = 0.6579 ; \\ u_{1,1}(t) = A_{10}(t - 0.5)^\alpha , \text{ o\`u } A_{10} = -\frac{u_{1,0}^2}{\Gamma(\alpha+1)}, \\ u_{1,2}(t) = A_{11}(t - 0.5)^{2\alpha} + A_{12}(t - 0.5)^{3\alpha} , \text{ o\`u } A_{11} = -2\frac{u_{1,0}}{\Gamma(2\alpha+1)}, A_{12} = -\frac{A_{10}^2\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma(3\alpha+1)\Gamma^2(\alpha+1)} \\ u_{1,3}(t) = A_{13}(t - 0.5)^{3\alpha} + A_{14}(t - 0.5)^{4\alpha} + A_{15}(t - 0.5)^{5\alpha} + A_{16}(t - 0.5)^{6\alpha} + A_{17}(t - 0.5)^{7\alpha} , \\ \text{o\`u } A_{13} = -2A_{11}\frac{\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma(3\alpha+1)}, A_{14} = -2\frac{\Gamma(3\alpha+1)}{\Gamma(4\alpha+1)} \left(u_{1,0}A_{12} + \frac{A_{10}A_{11}}{\Gamma(\alpha+1)} \right), A_{15} = -\frac{\Gamma(4\alpha+1)}{\Gamma(5\alpha+1)} \left(A_{11}^2 + \frac{2A_{10}A_{12}}{\Gamma(\alpha+1)} \right), \\ A_{16} = -2A_{12}A_{11}\frac{\Gamma(5\alpha+1)}{\Gamma(6\alpha+1)}, A_{17} = -A_{12}^2\frac{\Gamma(6\alpha+1)}{\Gamma(7\alpha+1)}. \\ \Phi_{1,3}(t) = u_{1,0}(t) + u_{1,1}(t) + u_{1,2}(t) + u_{1,3}(t). \end{array} \right.$$

Pour $\alpha = 1$, on trouve :

$$\Phi_{1,3}(t) = 0.6579 - 0.4328(t - 0.5) + 0.2848(t - 0.5)^2 - 0.1873(t - 0.5)^3 + 0.0822(t - 0.5)^4 - 0.0270(t - 0.5)^5 + 0.0059(t - 0.5)^6 - 0.0005571(t - 0.5)^7.$$

Pour $\alpha = \frac{1}{4}$, on trouve :

$$\Phi_{1,3}(t) = 0.6579 - 0.4775(t - 0.5)^{\frac{1}{4}} + 0.7090(t - 0.5)^{\frac{1}{2}} - 0.1672(t - 0.5)^{\frac{3}{4}} + 1.0102(t - 0.5) - 0.6926(t - 0.5)^{\frac{5}{4}} + 0.3235(t - 0.5)^{\frac{3}{2}} - 0.0592(t - 0.5)^{\frac{7}{4}}.$$

Pour $\alpha = \frac{1}{2}$, on trouve :

$$\Phi_{1,3}(t) = 0.6579 - 0.4884(t-0.5)^{\frac{1}{2}} + 0.6426(t-0.5) - 0.8646(t-0.5)^{\frac{3}{2}} + 0.6706(t-0.5)^2 - 0.4001(t-0.5)^{\frac{5}{2}} + 0.1626(t-0.5)^3 - 0.0269(t-0.5)^{\frac{7}{2}}.$$

Pour $\alpha = \frac{3}{4}$, on trouve :

$$\Phi_{1,3}(t) = 0.6579 - 0.4709(t-0.5)^{\frac{3}{4}} + 0.4662(t-0.5)^{\frac{3}{2}} - 0.4568(t-0.5)^{\frac{9}{4}} + 0.2795(t-0.5)^3 - 0.1294(t-0.5)^{\frac{15}{4}} + 0.0405(t-0.5)^{\frac{9}{2}} - 0.0053(t-0.5)^{\frac{21}{4}}.$$

- Dans $\Omega_2 = [t_2, t_3] = [1, 1.5]$ on obtient :

suivrons 4.1.4 et pour $\alpha = 1$ on trouve :

$$\Phi_{2,3}(t) = 0.4936 - 0.2436(t-1) + 0.1203(t-1)^2 - 0.0594(t-1)^3 + 0.0195(t-1)^4 - 0.0048(t-1)^5 + 0.0007932(t-1)^6 + 0.00005593(t-1)^7.$$

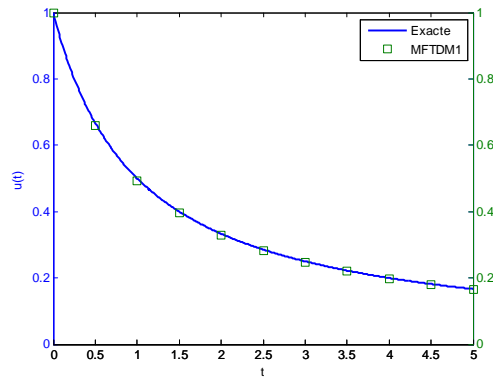
⋮

Ainsi de suite, jusqu'à $\Omega_9 = [t_9, t_{10}] = [4.5, 5]$ on obtient :

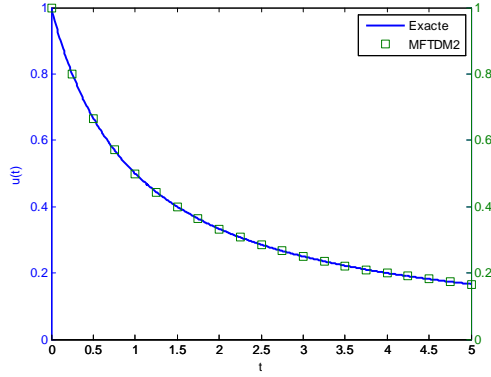
$$\Phi_{11,3}(t) = 0.1808 - 0.0327(t-4.5) + 0.0059(t-4.5)^2 - 0.0011(t-4.5)^3 + 1.288 \cdot 10^{-4}(t-4.5) - 1.1643 \cdot 10^{-5}(t-4.5)^5 + 7.0169 \cdot 10^{-7}(t-4.5)^6 - 1.8124 \cdot 10^{-8}(t-4.5)^7.$$

Maintenant, on donne un tableau de comparaison entre la solution exacte et les solutions approximatives en utilisant les méthodes ADM, FTDM, MFTDM1 ($t_{i+1} - t_i = 0.5$) et MFTDM2 ($t_{i+1} - t_i = 0.25$) c-à-d comparaison entre les erreurs :

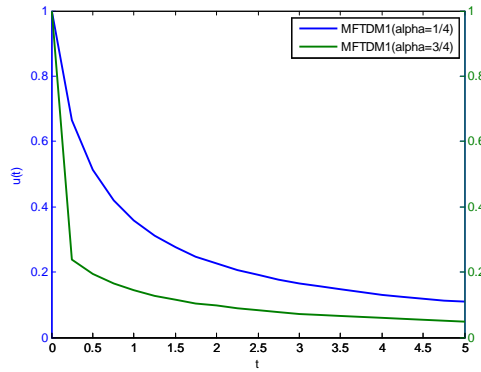
t	ADM	$FTDM$	$FTDM1$	$FTDM2$
0	0	0	0	0
0.5	0.0417	0.0088	0.0088	0.00084743
1	0.5	0.0714	0.0064	0.00061792
1.5	2.0250	0.1868	0.0045	0.000045917
2	5.3333	0.2540	0.0033	0.0003763
2.5	11.1607	0.2325	0.0024	0.00025513
3	20.2500	0.9643	0.0019	0.00014803
3.5	33.3472	6.2526	0.0015	0.000084788
4	51.2000	26.8190	0.0012	0.00011449
4.5	74.5568	86.7611	0.00099761	0.000069719
5	104.1667	233.1349	0.00085933	0.00010401



Approximation de la solution de l'équation 4.3.1 pour $\alpha = 1$ par MFTDM1.



Approximation de la solution de l'équation 4.3.1 pour $\alpha = 1$ par MFTDM2.



Approximation de la solution de l'équation 4.3.1 par MFTDM1 pour $(\alpha = \frac{1}{4}, \alpha = \frac{3}{4})$.

Exemple 4.3.2 On considère l'équation différentielle fractionnaire de Riccati de la forme suivante :

$$D^\alpha u(t) = 1 - u^2 \quad , t > 0 \quad (4.3.3)$$

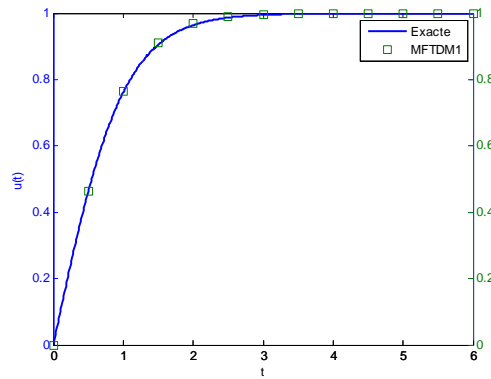
avec la condition initiale

$$u(0) = 0 \quad (4.3.4)$$

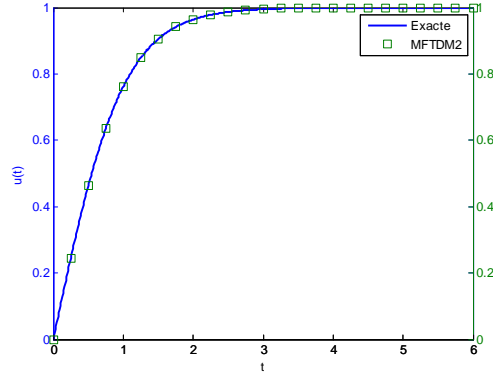
La solution exacte de cette équation avec $\alpha = 1$ est $u(t) = \frac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1}$.

Suivons les mêmes étapes donnés dans l'exemple précédent (avec $t_{i+1} - t_i = 0.5$ pour MFTDM1 et $t_{i+1} - t_i = 0.2$ pour MFTDM2), nous pouvons obtenir les résultats suivante :

t	VIM	FTDM	MFTDM1	MFTDM2
0	0	0	0	0
0.5	0.00025758	0.00025883	0.00025883	0.000049053
1	0.0225	0.0225	0.0039	0.00022741
1.5	0.2104	0.2111	0.0062	0.00021262
2	0.5997	0.6042	0.0049	0.00017709
2.5	0.3820	0.3622	0.0029	0.00010375
3	9.3765	9.3093	0.0014	0.00005306
3.5	44.0777	43.8865	0.00065309	0.000020676
4	142.3391	141.8628	0.00027042	0.0000012536
4.5	375.0332	373.9634	0.00011343	0.0000011825
5	863.2916	861.0793	0.00005746	0.000023861
5.5	1800.8	1795.0793	0.000033403	0.000048465
6	3481.4	3473.6	0.000012288	0.000054646



Approximation de la solution de l'équation 4.3.3 par MFTDM1 pour $\alpha = 1$.



Approximation de la solution de l'équation 4.3.3 par MFTDM2 pour $\alpha = 1$.

Exemple 4.3.3 On considère l'équation différentielle fractionnaire de Riccati de la forme suivante :

$$D^\alpha u(t) = 1 + 2u - u^2 \quad , t > 0 \quad (4.3.5)$$

avec la condition initiale

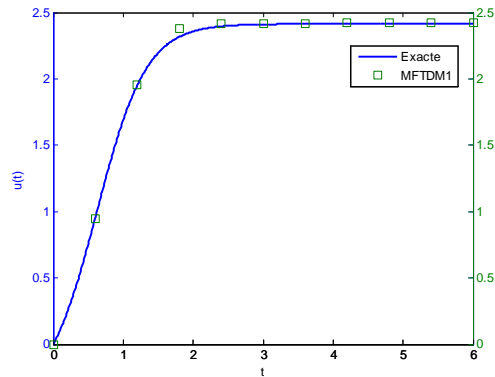
$$u(0) = 0 \quad (4.3.6)$$

La solution exacte de cette équation avec $\alpha = 1$ est :

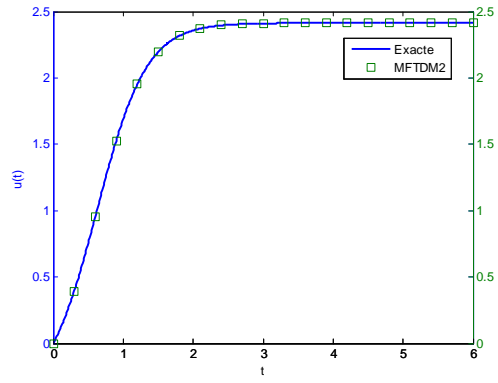
$$u(t) = 1 + \sqrt{2} \tanh(\sqrt{2}t + (1/2) \log((\sqrt{2} - 1)/(\sqrt{2} + 1))). \quad (4.3.7)$$

Suivons les mêmes étapes donnés dans les exemples précédents (avec $t_{i+1} - t_i = 0.6$ pour MFTDM1 et $t_{i+1} - t_i = 0.3$ pour MFTDM2), nous pouvons obtenir les résultats suivants :

t	HPM	$FTDM$	$MFTDM1$	$MFTDM2$
0	0	0	0	0
0.6	0.0011	0.0084	0.0084	0.0021
1.2	0.5878	0.0087	0.0039	0.00084174
1.8	7.6495	0.7831	0.0623	0.0048
2.4	37.8459	3.1010	0.0206	0.0022
3	121.8108	5.3251	0.0032	0.00064441
3.6	308.4643	5.1096	0.00063168	0.00016723
4.2	669.4937	6.4950	0.00011524	0.000026777
4.8	1303.7	34.3739	0.000021909	0.000015381
5.4	2341.6	158.6346	0.000004807	0.000017197
6	3949.2	530.2428	0.0000016745	0.000004853



Approximation de la solution de l'équation 4.3.5 pour $\alpha = 1$ par MFTDM1.



Approximation de la solution de l'équation 4.3.5 pour $\alpha = 1$ par MFTDM2.

4.4 Conclusion générale

Dans ce travail, nous avons essayé d'introduire quelques unes des méthodes les plus utilisées dans le calcul des approximations numériques des équations différentielles d'ordre fractionnaire. Nous avons citer par exemple les méthodes ADM, VIM, HPM et MFTDM, tout en donnant une plus grande importance à la méthode MFTDM car c'est une méthode plus précise que les autres. Nous avons pris des exemples d'équation différentielle ordinaire ainsi que des équations aux dérivées partielles. Pour l'équation de Riccati, nous avons essayé de donné un algorithme de résolution de cette équation par la méthode MFTDM, puis nous nous sommes intéressé à la question d'existence et d'unicité de la solution pour terminer ce travail par des résultats numériques qui assurent l'efficacité de cette méthode.

Nous comptons, dans l'avenir appliquer les méthodes cités dans ce mémoire à d'autre équation, et développer d'autre méthodes numériques de résolution des équations différentielles à dérivées fractionnaires, moins coûteuses et plus précises que celle proposées dans ce mémoire.

Bibliographie

- [1] Ali Assi, Fractional Derivatives, Fractional Integrals, and Differential Equations in Matlab, Engineering Education and Research using MATLAB, 2011.
- [2] M. HAMDI CHERIF, Comparaison des méthodes numériques de résolution des équations différentielles d'ordre fractionnaire, université d'Oran Senia, faculté des sciences, 2012.
- [3] D. ZIANE, Etude de l'existence et de la stabilité des solutions des équations différentielles d'ordre fractionnaire, université d'Oran Senia, faculté des sciences, 2012.
- [4] A. M. SALAH, Les systèmes chaotiques à dérivées fractionnaires, université Mentouri-Constantine, faculté des sciences, 2009.
- [5] T. HOUMOR, Analyse du chaos dans un système d'équations différentielles fractionnaires, université Constantine 1, faculté des sciences exactes, 2014.
- [6] B.Gbadamosi, O.Adebimpe, E.I.Akinola, I.A.Olopade, Solving Riccati equation using Adomian Decomposition Method, Departement of pure Mathematics, university of Technology PMB 4000, Ogbomose, NIGERIA, 2012.
- [7] H.Jafari, H.Tajadodi, He's Variational Iteration Method for solving Fractional Riccati Differential Equation, Departement of Mathematics and Computer science, University of Mazandaran, Babolsar, IRAN, 2010.
- [8] N.H.Sweilam, M.M.Khader, A.M.Mahdy, Numerical studies for solving Fractional Differential Equation, Departement of Mathematics, Cairo University, Benha University, Zagazig University, EGYPT, 2012.

- [9] Desai, V.H. Pradhan, Solution by Homotopy Perturbation Method of linear and non linear diffusion equation, International Journal of Emerging Technology and Advanced Engineering, 2013.
- [10] A.Bouhassoun, Multistage Telescoping Method for solving Fractional Differential Equations, International Journal of Applied Mathematics, 2013.
- [11] F.Chita, Résolution numérique des équations différentielles d'ordre fractionnaire, université d'Oran Senia, faculté des sciences, 2011.
- [12] M.Shaher, O.Zaid, Homotopy Perturbation Method for nonlinear partial differential equations of fractional order, Physics Letters A365 (2007) 345-350.
- [13] K.Belakroum, Existence et positivité de la solution d'un problème aux limites fractionnaire, Département de Mathématiques, Faculté des Sciences, Université Bordj Mokhtar ANNABA, 2013.
- [14] Anatoly A.Kilbas, Sergei A.Marzan, Cauchy Problem for Differential Equation with Caputo derivative, Journal of Fractional Calculus and Applied Analysis, 2004.
- [15] S.Balaji, Solution of nonlinear Riccati differential equation using Chebyshev wavelets, Departement of mathematics SASTRA university, Thanjavur-613401, INDIA, 2014.