Table des Matières

Remerciements

Je remercie Allah le tout puissant de nous avoir donné la volonté et le courage pour mener à bien ce travail.

Je tiens à remercier vivement en premier lieu mon professeur Yache Amine pour m'avoir transmis de précieuses connaissances et pour m'avoir conseillé et guidé tout au long de ce travail.

J'adresse un grand merci a les membres du jury d'avoir bien voulu présider mes jury et d'avoir examiner ce travail.

Mes remerciments s'adressent également à tous mes enseignants de l'université Djilali Bounaama Khemis Miliana et l'université Hassiba Benbouali de Chlef qui grâce à eux j'ai pu achever mon cycle universitaire durant ces années d'études.

Je remercie mon père, ma mère, mes sœurs, mon frère, et mes amies pour leur soutien durant toute la période de ma préparation de mon mémoire.

Introduction

Les problémes aux limites associés aux équations différentielles ordinaires ont un rôle trés important dans l'etude des problèmes d'analyse mathématique et de physique et interviennent dans divers domaines (industrie, biologie, économie, population...) necéssite beaucoup d'intérêts de la part des mathématiciens et physiciens. Malgré, il reste plusieurs questions consernant ces problémes .

En 1836-1837 Sturm et Liouville ont publié une série de document sur les opérateurs differentiels ordinaires linéaire du deuxiémes ordre. Depuis, le probléme de Sturm-Liouville est devenu trés célèbre. Cette théorie (théorie de Sturm-Liouville) reste un champ actif de la recherche avec de nombreuses applications en mathémathique et en physique mathémathique.

Dans ce mémoire on va étudier l'existence et la multiplicité de solutions périodiques pour les problémes aux limites pérodiques de Sturm-Liouville associés aux équations différentielles ordinaires du deuxiéme ordre (en abrégé PLP).

Les principaux outils pour l'etude de ses problèmes sont les théorèmes du point fixe, les estimations a priori, solutions minimales et solutions maximales et aussi les methode de variations.

Ce travail est composé en trois parties importantes:

Dans le premier chapitre, on donne des notions de base pour la théorie des opérateurs ; la compacité, le degré topologique et quelques théoreme de point fixe.

Dans le deuxiéme chapitre, on rappelle le problème de Sturm-Liouville régulier tout en citant queleques resultats importants dans le cas périodique (théorèmes de comparaison et de séparation de Sturm, théorie de floquet), on va rappeler aussi l'éxistence et unicité de solutions du probléme initial de Sturm-Liouville.

Dans le dernier chapitre, on va donne des résultats sur l'éxistence des solutions positives pour les PLP de Sturm-Liouville, sous certaines conditions sur la nonlinéarité positive $f(t, u)$, l'auteur a appliqué le théorème du point fixe d'expansion et de compression du cône de Guo-Kranoselskii, et on verra que l'étude de l'éxistence des solutions pour les équations différentielles à coeffitions périodiques est équivalente à l'étude d'un prolème aux limites périodique sur $[0, T]$.

Chapitre 1

Priliminaires

Dans ce chapitre on va rappeler quelques notions de base qui seront utilisées consignant les opérateurs compacts, le degré topologique de Leray-Schader, et on va citer des théorèmes du point fixe.

1.1 Opérateurs compacts

Soit X et Y deux éspaces de Banach et $\Omega \subset X$ un ouvert.

Définition 1.1.1 *Un sous-ensemble E d'un espace de banach est dit relativement compact si $\overline{E}$ est compact*

Définition 1.1.2 *Soit $f : \Omega \to Y$ une application continue. f est dite*

- compacte si $\overline{f(\Omega)}$ est compact dans Y.

- complètement continue si l'image de tout borné est relativement compacte.

- de rang fini s'il éxiste un sous-éspace véctoriel E de Y avec dim $E < +\infty$ et $f(\Omega) \subset E$.

Remarque 1 *Il est clair que:*

1. Toute application compacte est complètement continue, la réciproque est vraie si Ω est borné.

2. Toute application linéaire compacte est continue, la réciproque est vraie si f est de rang fini.

Soit (X, d) un espace métrique compact, et $C(X, Y)$ l'espace de Banach des fonctions continues de X dans Y muni de la norme

$$\|f\| = \sup_{t \in X} \|f(t)\|_Y$$

Définition 1.1.3 *Un sous-ensemble H de $C(X, Y)$ est équicontinu si :*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \quad \forall t, t_0 \in X, \ \forall f \in X \qquad d(t, t_0) \leq \delta \quad \Rightarrow \quad \|f(t) - f(t_0)\|_Y \leq \epsilon$$

Théorème 1.1.1 *Ascoli-Arzela*

H est relativement compact si et seulement si :

1. H est équicontinu.

2. $\forall t \in X$, l'ensemble $H(t) = \{f(t), f \in H\}$ est relativement compact dans Y.

1.1.1 Exemple d'opérateur complètement continu

Soit $X = C([0, T], \mathbb{R})$ muni de la norme usuelle $\|u\| = \sup\limits_{t \in [0,T]} |u(t)|$ et soit $A : X \to X$ l'opérateur définie par

$$(Au)(x) = \int_0^T G(x, y) f(y, u(y)) dy$$

où $G : [0, T] \times [0, T] \to \mathbb{R}$ est continue et la fonction $f : [0, T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue .

Pour éviter la répitition dans ce mémoire, nous allons présenter ici la preuve que cet opérateur A est complètement continu.

(a) A est continue :

soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ tel que $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = u \in X$.

Alors

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{y \in [0,T]} |u_n(y) - u(y)| = 0$$

f étant continue, $\sup\limits_{y\in[0,T],\ z\in[-M,M]} |f(y,z)| < \infty$

on a pour tout $x \in [0,T]$

$$\begin{aligned} |Au_n(x) - Au(x)| &\leq T \sup_{(x,y)\in[0,T]^2} |G(x,y)| \sup_{y\in[0,T]} |f(y,u_n(y)) - f(y,u(y))| \\ &\leq TM \sup_{y\in[0,T]} |f(y,u_n(y)) - f(y,u(y))| \end{aligned}$$

où le second membre tend vers 0 lorsque n tends vers $+\infty$.

(b) soit B un borné de X et $B^{'} = A(B)$. Montrons en utilisant le théorème d'AscoliArzela que B' est relativement compact :

i- B' est borné car $\forall v \in B^{'}$ et $\forall x \in [0,T]$, $\exists u \in B : v(x) = (Au)(x)$ avec

$$|v(x)| \leq T \sup_{(x,y)\in[0,T]^2} |G(x,y)| \sup_{y\in[0,T],\ u\in[-M,M]} |f(y,u)|$$

ii- B' est équicontinu car $\forall (x_1,x_2) \in [0,T]^2$ et $\forall u \in B$ on a

$$\begin{aligned} |Au(x_1) - Au(x_2)| &\leq \int_0^T |f(y,u(y))| \ |G(x_1,y) - G(x_2,y)|\, dy \\ &\leq \sup_{y\in[0,T],\ u\in[-M,M]} |f(y,u)| \int_0^T |G(x_1,y) - G(x_2,y)|\, dy \end{aligned}$$

Soit $\epsilon > 0$, par l'uniforme continuité de $G(x,.)$, il existe $\delta > 0$

$$\begin{aligned} |x_1 - x_2| \leq \delta \quad &\Rightarrow |G(x_1,y) - G(x_2,y)| < \frac{\epsilon}{\sup\limits_{y\in[0,T],\ u\in[-M,M]} |f(y,u)|}, \quad \forall y \in [0,T] \\ &\Rightarrow |Au(x_1 - Au(x_2))| < \epsilon \end{aligned}$$

donc, l'ensemble $B^{'}$ est équicontinu et borné.

Par le théorème d'Ascoli-Arzéla, B' est relativement compact, par conséquent l'opérateur A est complètement continu.

1.2 Degré topologique de Leray-Schauder

Théorème 1.2.1 *Soit X un éspace de Banach.* .

Si:$A = \{(Id - f, \Omega, y); \Omega$ *ouvert borné de* X, *et* $f : \Omega \to X$ *est compacte,* $y' \in (Id - f)(\partial\Omega)\}$,
alors il éxiste une unique application $d : A \to \mathbb{Z}$*vérifiant*

- ***Normalisation :*** *Si* $y \in \Omega$, *alors* $d(Id, \Omega, y) = 1$.

- ***Additivité :*** *Si* $(Id - f, \Omega, y) \in A$,*et* Ω_1, Ω_2 *sont deux ouverts disjoints de* Ω *tels que* $y \notin (Id - f)(\Omega \backslash \Omega_1 \cup \Omega_2)$, *alors*

$$d(Id - f, \Omega, y) = d(Id - f, \Omega_1, y) + d(Id - f, \Omega_2, y)$$

- ***Invariance par homotopie :*** *Si* $h : [0,1] \times \overline{\Omega} \to X$ *est compacte, et* $y : [0,1] \to X$ *continue et vérifie* $\forall t \in [0,1]$, $y(t) \notin (Id - h(t,.))(\partial\Omega)$, *alors* $d(Id - h(t,.), \Omega, y(t))$ *est indépendant de* $t \in [0,1]$.

- ***Invariance par rapport à*** $\mathbf{y_0}$ ***:*** *Si* y_1 *est dans un voisinage de* y_0, *alors*

$$d(Id - f, \Omega, y_0) = d(Id - f, \Omega, y_1).$$

- ***Invariance sur le bord :*** *Si* $f_{|\partial\Omega} = g_{|\partial\Omega}$, *alors pour tout* $y_0 \notin f(\partial\Omega)$

$$d(Id - f, \Omega, y_0) = d(Id - g, \Omega, y_0).$$

- ***Excision :*** *Soit* $F \in \Omega$ *fermé et* $y_0 \notin f(F) \cup f(\partial\Omega)$, *alors*

$$d(Id - f, \Omega, y_0) = d(Id - f, \Omega/F, y_0).$$

Remarque 2 *1. La propriété essentielle du degré est :*

Si $d(Id - f, \Omega, y) \neq 0$,*alors il éxiste* $x \in \Omega$ *telque* $f(x) - x = y$.

2. Le degré ne dépend en fait que des valeurs de $Id - f$ *sur* $\partial\Omega$

1.3 Quelques théorèmes du point fixe

1.3.1 Théoréme de Schauder

Théorème 1.3.1 *Soit C un sous ensemble convexe, férmé, borné, non vide d'un éspace de Banach X et $K : C \to C$ une application compacte. Alors K admet au moins un point fixe.*

1.3.2 Théorème de Leray-Schauder

Théorème 1.3.2 *Soit X un éspace de Banach, et soit $L : X \to X$ un opérateur compact linéaire, Si $\lambda \neq 0$ et $\frac{1}{\lambda} \notin \sigma(L)$, ou $\sigma(L)$ est le spectre de L, et Ω est un ouvert borné de X contenant 0, alors $d(Id - \lambda L, \Omega, 0) \neq 0$.*

Corollaire 1.3.3 *Soit C un sous ensemble, compact, non vide d'un éspace de Banach X, et $f : C \to C$ une application continue. Alors f admet au moin un point fixe.*

Corollaire 1.3.4 *Soit C un sous ensemble convexe fermé non vide, C non nécéssairement borné d'un éspace de Banach X et $f : C \to C$ une application continue telle que $f(C)$ est inclus dans un compact de C, Alors f admet au moins un point fixe.*

1.3.3 Théorèmes de compression et d'expansion d'un cône

On a le théorème de Kranoselskii

Théorème 1.3.5 *Soit K un cône dans un espace de banach $(E, \|\|)$ et $0 < r < R$ deux constantes réelles. Soient $F : \overline{B_R} \cap K \to K$ un opérateur complètement continu et supposons les conditions suivantes vérifiées :*

1. *$\lambda x \neq Fx$ pour tout $\lambda \geq 1$ et $x \in \partial B_r \cap K$.*
2. *il existe $x_0 \in K \backslash \{0\}$ tel que*

$$x \neq Fx + \lambda x_0, \qquad \forall x \in \partial B_R \cap K, \qquad \forall \lambda > 0.$$

Alors, F admet au moins un point fixe dans $K \cap (\overline{B_R} \backslash B_r)$.

On a le théorème de Kranoselskii de type norme

Théorème 1.3.6 *Soit X un espace de Banach et soit $P \subset X$ un cône de X. Supposons que Ω_1 et Ω_2 deux sous ensembles ouverts de X avec $0 \in \Omega_1, \overline{\Omega_1} \subset \Omega_2$ et soit $A : P \cap \overline{\Omega_2} \backslash \Omega_1 \to P$ un opérateur complètement continu,*

Si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

1- $\|Au\| \leq \|u\|$ si $u \in P \cap \partial\Omega_1$ et $\|Au\| \geq \|u\|$ si $u \in P \cap \partial\Omega_2$

2- $\|Au\| \geq \|u\|$ si $u \in P \cap \partial\Omega_1$ et $\|Au\| \leq \|u\|$ si $u \in P \cap \partial\Omega_2$

Alors A admet au moins un point fixe dans $\overline{\Omega_2} \backslash \Omega_1$

Chapitre 2

Théorie de Sturm-Liouville

2.1 Problème de Sturm-Liouville

L'equation de Sturm-Liouville est l'equation differentielle ordinaire

$$\frac{d}{dx}\left(r(x)\frac{dy}{dx}\right)+(q(x)+\lambda p(x))y=0 \qquad \text{ou} \;\; x\in[a,b]\,. \tag{2.1.1}$$

Ici $p(x), r(x), q(x)$ sont des fonctions données à valeurs réelles définies sur l'intervalle $[a,b]$, $r(x)\neq 0 \quad y=y(x)$est une fonction a déterminer, λ est une constante quelconque a déterminer aussi. Bien que l' equation de Sturm-Liouville ait une forme spéciale, beaucoup d'équations diférentielles ordinaires linéaires d'ordre 2 sont equivalentes a une equation de Sturm-Liouville. Plus précisément, si les fonctions $\alpha_1(x), \alpha_2(x)$ *et* $\alpha_3(x)$définies sur l'intervalle $[a;b]$ sont telles que $\alpha_1(x)\neq 0$ pour tout $x\in[a;b]$ et que la fonction $\alpha_1(x)/\ \alpha(x)$ est intégrable sur $[a;b]$, et si nous définissons

$$r(x)=\exp\left[\int_a^x\frac{\alpha_2(t)}{\alpha_1(t)}dt\right], \qquad q(x)=\frac{\alpha_3(x)}{\alpha_1(x)}r(x), \qquad p(x)=\frac{r(x)}{\alpha_1(x)}$$

alors l' equation di erentielle ordinaire

$$\alpha_1(x)\frac{d^2y}{dx^2} + \alpha_2(x)\frac{dy}{dx} + (\alpha_3(x) + \lambda)y = 0 \quad \text{où} \quad x \in [a, b] \tag{2.1.2}$$

est equivalente a l'équation de Sturm-Liouville

$$\frac{d}{dx}\left(r(x)\frac{dy}{dx}\right) + (q(x) + \lambda p(x))y = 0.$$

En effet,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(r(x)\frac{dy}{dx}\right) &= r(x)\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dr}{dx}\frac{dy}{dx} = r(x)\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{\alpha_2(x)}{\alpha_1(x)}\exp\left[\int_a^x \frac{\alpha_2(t)}{\alpha_1(t)}dt\right]\frac{dy}{dx} \\ &= r(x)\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{\alpha_2(x)}{\alpha_1(x)}r(x)\frac{dy}{dx}.\end{aligned}$$

En substituant ceci, ainsi que les expressions pour $p(x)$ et $r(x)$ dans l' equation de Sturm-Liouville, nous obtenons

$$r(x)\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{\alpha_2(x)}{\alpha_1(x)}r(x)\frac{dy}{dx} + \left(\frac{\alpha_3(x)r(x)}{\alpha_1(x)} + \lambda\frac{r(x)}{\alpha_1(x)}\right)y = 0 \Rightarrow \alpha_1(x)\frac{d^2y}{dx^2} + \alpha_2(x)\frac{dy}{dx} + (\alpha_3(x) + \lambda)\,y = 0$$

Nous obtenons cette dernière équation en multipliant les deux côtés de la première équation par $\alpha_1(x)/r(x)$.Parce que $r(x)$ est l'exponentielle d'un nombre réel, alors $r(x) > 0$ et qu'ainsi la division par $r(x)$ pour tout $x \in [a; b]$ est bien définie. Nous avons obtenu l'équation 2.1.2. Si $y = y(x)$ est une solution de l'équation de Sturm-Liouville, alors y sera aussi une solution de l'équation 2.1.2. La réciproque est aussi vraie, i.e. si y est une solution de l'équation 2.1.2, alors y est une solution de l'équation de Sturm-Liouville avec les fonctions p(x), q(x) et r(x) dénfinies comme ci-dessus.

Un probléme de Sturm-Liouville est une équation de Sturm-Liouville

$$\frac{d}{dx}\left(r(x)\frac{dy}{dx}\right)+(q(x)+\lambda p(x))y=0 \quad \text{où} \quad x\in[a,b]\,,$$

avec en plus des conditions aux extrémités de l'intervalle $[a;b]$ de la forme

$$(*)\begin{cases} (a) \quad k_1y(a)+k_2y'(a)=0 & \text{ou } k_1,k_2 \text{ sont deux nombres réels tels que } (k_1,k_2)\neq(0,0)\text{et} \\ (b) \quad l_1y(b)+l_2y'(b)=0 & \text{ou } l_1,l_2 \text{ sont deux nombres reels tels que } (l_1,l_2)\neq(0,0) \end{cases}$$

Ici k_1,k_2,l_1 et l_2 sont des nombres réels donnés et λ est un paramètre quelconque.

Une solution d'un problème deSturm-Liouville est une fonction qui satisfait à la fois l'èquation de Sturm- Liouville et les conditions$(*)$. La fonction triviale $y\neq0$ est clairement une solution pour tout problème de Sturm-Liouville. Les solutions $y\neq0$ (si elles existent) sont dites être les fonctions caractéristiques ou encore fonctions propres du problème et, dans ce cas, la valeur λ pour laquelle une telle solution existe est la valeur propre ou caractéristique de cette solution. Ces notions sont les mêmes que celles de l'algèbre linéaire. Si $p(x)\neq0$ pour tout $x\in[a;b]$, alors nous pouvons considérer l'opérateur linéaire

$$y\longmapsto\frac{1}{p(x)}\left[\frac{d}{dx}\left(r(x)\frac{dy}{dx}\right)+q(x)y\right]=L(y)$$

défini sur l'éspace vectoriel approprié de fonctions. Dans ce cadre, une fonction caractéristique du problème de Sturm-Liouville et sa valeur propre correspondante sont respectivement un vecteur propre de L et la valeur propre associ ee a ce vecteur propre.

Nous pouvons illustrer ces notions pour le problème de Sturm-Liouville:

$$y"+\lambda y=0 \quad \text{sur l'intervalle}[0;\pi]\text{avec les conditions:} \quad (*)\begin{cases} y(0)=0; \\ y(\pi)=0. \end{cases}$$

2.2 Théoreme de Cauchy-Lipschitz linéaire d'odre 1

Soient :

I un intervalle ouvert non vide et non reduit a un point.

$p \in \mathbb{N}^*$.

$A \in C(I, M_p(\Bbbk))$ est une matrice carrée dont les coeficients sont des applications continues de I dans $\Bbbk$.

$B \in C(I, \Bbbk^p)$ est un vecteur dont les coeficients sont des applications continues de I dans $\Bbbk$.

$t_0 \in I$ et $Y_0 \in \Bbbk^p$.

Alors il éxiste une unique solution au probléme de Cauchy suivant:

$$Y' = AY + B$$
$$Y(t_0) = Y_0$$

2.3 Problème de Sturm-Liouville initial

Soit l'équation différentielle :

$$-(p(x)u')' + q(x)u = f(x,u) \quad \text{sur} \quad J \tag{2.3.1}$$

associée aux conditions initiales

$$u(c) = h, \quad pu'(c) = k, \quad c \in J, \quad h, k \in \mathbb{R} \tag{2.3.2}$$

où

$$J =]a, b[, \quad -\infty \leq a < b \leq +\infty, \quad 1/p, q, f : J \to \mathbb{R} \tag{2.3.3}$$

2.3.1 Existence et unicité de solutions

Définition 2.3.1 *u est une solution de l'équation (2.3.1) , si $u : J \to \mathbb{R}$ est une fonction absolument continue, ainsi que $u^{[1]} = pu'$ sur tout compact de J, et l'équation (2.3.1) est satisfaite presque pour tout $u \in J$.*

Théorème 2.3.1 *Supposons que*

$$1/p, q, f \in L_{l_{oc}}(J, \mathbb{R}) \tag{2.3.4}$$

alors toute équation différentielle (2.3.1)-(2.3.2) admet une unique solution réelle u non triviale définie sur J.

Preuve. soit $P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{p} \\ q & 0 \end{pmatrix}, \qquad F = \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}, \qquad U = \begin{pmatrix} u \\ pu^{'} \end{pmatrix}$

L'équation (2.3.1) est équivalente au système du premier ordre

$$U^{'} = PU + F \qquad \text{sur } J \tag{2.3.5}$$

dans le sens où, si toute solution u de l'équation (2.3.1), alors le vécteur U est solution du système (2.3.5), et inversement, si U est solution du système, alors u est solution de l'équation(2.3.1). Montrons que le système (2.3.5) admet une unique solution.

On costruit une solution par la méthode des aproximations succéssives;

On définit la suite

$$U_0(x) = C, \quad U_{n+1}(x) = C + \int_u^x (PU_n + F)\,, \quad x \in J, \quad n \in \mathbb{N}^*. \tag{2.3.6}$$

Donc U_n est une fonction continue pour tout $n \in \mathbb{N}$, on vérifie que la suite $\{U_n, n \in \mathbb{N}\}$ converge uniformément vers une fonction U sur tout compact de J et que cette limite est l'unique solution de l'équation intégrale

$$U(x) = C + \int_u^x (PU + F)\,, \quad x \in J. \tag{2.3.7}$$

Soit $b \in J$ telque $b > u$, et posons

$$\varphi(x) = \int_u^x |p(y)|\, dy, \quad \psi_n(x) = \max_{u \leq y \leq x} |U_{n+1} - U_n|\,, \quad u \leq x \leq b. \tag{2.3.8}$$

alors:

$$U_{n+1} - U_n = \int_u^x p(y)\, [U_n(y) - U_{n-1}(y)]\, dy, \quad x \in j, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2.3.9}$$

on a par suite:

$$\begin{array}{rcl}
|U_2 - U_1| & \leq & \psi_0(x) \displaystyle\int_u^x |p(y)|\, dy = \psi_0(x)\varphi(x) \\
 & \leq & \psi_0(b)\varphi(b). \\
|U_3 - U_2| & \leq & \displaystyle\int_u^x |p(y)|\, |U_2 - U_1|\, dy \\
 & \leq & \displaystyle\int_u^x |p(y)|\, \psi_0(y)\varphi(y) dy \\
 & \leq & \psi_0(y) \displaystyle\int_u^x |p(y)|\, \varphi(y) dy \\
 & \leq & \psi_0(y) \dfrac{\varphi^2(x)}{2} \\
 & \leq & \psi_0(b) \dfrac{\varphi^2(b)}{2}. \qquad u \leq x \leq b.
\end{array}$$

On en déduit

$$|U_{n+1} - U_n| \leq \psi_0(b) \tfrac{\varphi^n(b)}{n!}. \quad u \leq x \leq b. \tag{2.3.10}$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$|U_{n+k+1} - U_n| \leq \psi_0(b) \frac{\varphi^n(b)}{n!} \left[1 + \frac{\varphi(b)}{n+1} + \frac{\varphi^2(b)}{(n+1)(n+2)} + \ldots \right] \tag{2.3.11}$$

ce qui implique pour $n \to +\infty$, la suite $\{U_n, n \in \mathbb{N}\}$ converge uniformément vers la fonction U sur $[v, b]$.

Pour voir que la solution est unique, on suppose Z une autre solution, donc Z est continue et par suite $|U - Z|$ est majorée par une constante M sur $[v, b]$; alors

$$\begin{aligned} |U(x) - Z(x)| &= \left| \int_u^x p(y) \, [U - Z] \, dy \right| \\ &\leq M \int_u^x |p(y)| \, dy \\ &\leq M\varphi(x) \end{aligned}$$

Avec le même raisonnement, on trouve

$$|U(x) - Z(x)| \leq M \frac{\varphi^n(x)}{n!} \leq M \frac{\varphi^n(b)}{n!}$$

donc $U = Z$ sur $[u, b]$, on procède de la même façon pour le cas $b < u$. on conclut que l'équation différentielle (2.3.1) avec les conditions initiales (2.3.2) admet une unique solution réelle u dans J. ■

Soit $P \in M_n(L_{loc}(J))$, d'aprés le théorème précédent on sait que pour tout point u de J, il existe une matrice solution X du systeme $U' = PU$ satisfaisant $X(s) = I_n$.

Définition 2.3.2 ***La résolvante***

Pour tout y fixé dans J, on définit la matrice solution fondamentale du systeme $U' = PU$ par la matrice $\Phi(., y, P)$ satisfaisant

1. $\Phi(y, y, P) = I_n$.
2. $\Phi(x, y, P)$ *est inversible* $\forall x, y \in J$.
3. $\Phi(x, y, P) = Y(x)U^{-1}(y)$.

2.3.2 Théorèmes de comparaison et de séparation de Sturm

On considère l'équation différentielle

$$-(p(x)u')' + q(x)u = \lambda w(x, u) \quad \text{sur} \quad x \in J \quad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{2.3.12}$$

où

$$1/p, q, w \in L_{l_{oc}}(J, \mathbb{R}), \quad J =]a, b[. \tag{2.3.13}$$

Les théorèmes de séparation et de comparaison de Sturm sont parmi les plus importants et les plus célèbres résultats dans la théorie des équations différentielles linéaires, mais avant de les annoncer, on rappelle que les zéros des solutions non triviales sont toujours isolés dans touts les points réguliers de l'équation différentielle.

Théorème 2.3.2 *Considérons l'équation (2.3.12)-(2.3.13), et supposons* $p > 0$, *alors les zéros de n'importe quelle solution non triviale* u *de (2.3.12) sont isolés dans l'intérieur de* J, *et aussi sur les points du bord de* J *s'ils sont des points réguliers, et uniquement les points singuliers peuvent être un point d'accumulation des zéros d'une solution non triviales.*

Théorème de séparation de Sturm

Soit $p > 0$, supposons que v, u sont deux solutions linéairement indépendantes de l'équation (2.3.12) , alors u admet au moins un zéro entre n'importe quels deux zéros de v.

On cosidère l'équation

$$-(p(x)u')' + q(x)u = 0 \quad x \in J, \quad p > 0, \quad 1/p, q \in L_{l_{oc}}(J, \mathbb{R}). \tag{2.3.14}$$

Théoreme de comparaison de Sturm

Soit l'équation (2.3.14) , et on considère l'équation

$$-(p_1(x)v')' + q_1(x)v = 0 \quad x \in J, \quad p_1 > 0, \quad 1/p_1, q_1 \in L_{l_{oc}}(J, \mathbb{R}). \tag{2.3.15}$$

satisfaisant

$$q_1 \geq q, \quad 0 < p_1 \leq p. \tag{2.3.16}$$

Si u est une solution de (2.3.14) satisfaisant $u(c) = u(d) = 0$ pour certains $c, d \in J$, alors toute solution de (2.3.15) a au moins un zéro dans l'intervalle fermé $[c, d]$.

2.3.3 Problème aux limites

On considère l'équation

$$-(p(x)u')' + q(x)u = \lambda wu + f, \quad x \in J, \quad p > 0, \tag{2.3.17}$$

$$AU(a) + BU(b) = 0, \quad U = \begin{pmatrix} u \\ pu' \end{pmatrix} \tag{2.3.18}$$

ou

$$1/p, q, w \in L_{l_{oc}}(J, \mathbb{R}), \quad J =]a, b[.$$

et

$$p = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{p} \\ q & 0 \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ w & 0 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} u \\ pu' \end{pmatrix}, \quad A, B \in M_2(\mathbb{R})$$

On en déduit que l'équation (2.2.17) est équivalent au systeme du premier ordre

$$U\,' = (P - \lambda W)U + F, \quad \text{sur } J, \quad AU(a) + BU(b) = 0, \quad U = \begin{pmatrix} u \\ pu' \end{pmatrix}. \tag{2.3.19}$$

Soit$\Phi(.,.,\lambda)$ la matrice solution fondamentale du systeme homogène $U' = (P - \lambda W)U$. Noter que $\Phi(x, y, \lambda) = \Phi(x, a, \lambda)\ \Phi(a, y, \lambda)$, ceci vient du fait que $\Phi(x, y) = U(x)U^{-1}(y)$.

Théorème 2.3.3 *Soient les équations (2.3.17)-(2.3.18) et (2.3.19) et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. Lorsque $f = 0$, le problème aux limites (2.3.17)-(2.3.18) admet uniqement la solution triviale comme solution.(De même pour (2.3.19)-(2.3.18))

2. La matrice $[A + B\ \Phi(b, a, \lambda)]$ est inversible.

3. Pour tout $f \in L^1(J, R)$, le problème aux limites (2.3.17)-(2.3.18) admet une unique solution.

Si l'une de ces assertions est vérifiée, et pour la fonction matrice $K = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix}$, définie par

$$K(x, y, \lambda) = \begin{cases} \Phi(x, a, \lambda)U\ (\lambda)\ \Phi(b, y, \lambda), & a \leq x < y \leq b \\ \Phi(x, a, \lambda)\ U(\lambda)\ \Phi(b, y, \lambda) + \Phi(x, y, \lambda), & a \leq y < x \leq b \end{cases}$$

où $U\ (\lambda) = -[A + B\ \varphi(b, a, \lambda)]^{-1}B$,

alors, pour tout $f \in L^1$, l'unique solution u de (2.3.17)-(2.3.18) et l'unique solution U de (2.3.19)-(2.3.18) sont données (respectivement) par

$$\begin{aligned} u(x) &= \textstyle\int_a^b k_{12}(x, y, \lambda) f(y) dy, \quad a \leq x \leq b. \\ U(x) &= \textstyle\int_a^b K(x, y, \lambda) F(y) dy, \quad a \leq x \leq b. \end{aligned} \tag{2.3.20}$$

La fonction $k_{12}(x, y)$ est la fonction de Green.

Chapitre 3

Existence de solutions positives pour un PLP

3.1 Notations et définitions

dans ce chapitre, on considére le probléme aux limites périodique:

$$-(p(x)u')' + q(x)u = f(x, u) \qquad x \in [0, T] \tag{3.1.1}$$

$$u(0) = u(T) \qquad\qquad u^{[1]}(0) = u^{[1]}(T) \tag{3.1.2}$$

ou les poinds p et q sont des fonctions reélles mesurables telles que $p > 0$ dans $[0, T]$, $q \geq 0$ dans $[0, T]$ et $q(x) \neq 0$ presque pour tout $x \in [0, T]$ et

$$\int_0^T \frac{dy}{p(y)} < \infty, \qquad \int_0^T q(y)dy < \infty$$

$$u^{[1]}(x) = p(x)u'(x)$$

une fonction u est solution de l'equation (3.1.1) si u est dérivable et pu' est absolument continue et l'equation (3.1.1) est satisfaite presque partout $x \in [0, T]$.

3.2 Fonction de Green

soit le problème homogène associé à (3.1.1) :

$$-(p(x)u')' + q(x)u = 0, \qquad x \in [0, T] \tag{3.2.1}$$

$$u(0) = u(T) \qquad u^{[1]}(0) = u^{[1]}(T) \tag{3.2.2}$$

Définition 3.2.1 *On appelle fonction de Green associée à l'équation (3.2.1) , une fonction* $G : [0, T] \times [0, T] \to \mathbb{R}$ *vérifiant les propriétés suivantes :*

1. *G est continue sur $[0, T] \times [0, T]$*
2. *G est symétrique : $G(x, y) = G(y, x), \forall (x, y) \in [0, T]^2$*
3. *$\frac{\partial G}{\partial x}(x, y)$ est continue pour tout $x \neq y$*
4. *$\frac{\partial G}{\partial x}(0, y) = \frac{\partial G}{\partial x}(T, y)$ pour tout $y \in]0, T[$*
5. *La fonction partielle $x \to G(x, y)$ est solution de l'équation (3.2.1) pour tout $x \neq y$*

Soit φ_1, φ_2 les deux solutions linéairement indépendantes pour l'équation homogène (3.2.1), satisfaisant les conditions initiales

$$\varphi_1(0) = 1 \quad \varphi_1^{[1]}(0) = 0$$
$$\varphi_2(0) = 0 \quad \varphi_2^{[1]}(0) = 1$$

on pose

$$D = \varphi_1(T) + \varphi_2^{[1]}(T) - 2 \tag{3.2.3}$$

Lemme 3.2.1 *soit $k(x, y)$ une fonction positive, continue définie pour $-\infty < a < x$, $y \leq b < +\infty$ et $\psi(x)$ une fonction positive intégrale sur $[a, b]$, alors pour toute fonction positive continue $\varphi(x)$ définie sur $[a, b]$, l'equation integrale de Volterra*

$$u(x) = \varphi(x) + \int_a^x K(x, y)\psi(y)u(y)dy, \qquad a \leq x \leq b \tag{3.2.4}$$

admet une unique solution u, cette solution est continue et vérifie

$$u(x) \geq \varphi(x), \qquad \forall a \leq x \leq b \tag{3.2.5}$$

Preuve. on résoud l'equation (3.2.4) par la méthode des approximations successives, on pose

$$u_0(x) = \varphi(x), \qquad u_n(x) = \int_a^t K(x,y)\psi(y)u_{n-1}(y)dy \tag{3.2.6}$$

si la serie $u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ est uniformément convergente pour $x \in [a,b]$, alorrs cette somme sera une fonction continue solution de l'equation (3.2.4). pour prouver la convergence de cette série, on pose

$$\max_{a \preceq x \leq b} \varphi(x) = c, \qquad \max_{a \preceq x \leq b} K(x,y) = c_1$$

par conséquent, le term général

$$u_n(x) \leq c\frac{c_1^n}{n!}\left[\int_a^x \psi(x)dx\right]^n$$

ce qui implique que u est une solution continue, et puisque $u_0(x) = \varphi(x) \geq 0$, alors l'inégalité (3.2.5) est vérifiée.

pour l'unicité on peut utiliser la preuve standard ■

Remarque 3 *le lemme 3.2.1 reste valable aussi pour l'équation de Volterra*

$$u(x) = \varphi(x) + \int_x^b K(x,y)\psi(y)u(y)dy, \qquad a \leq x \leq b$$

Lemme 3.2.2 *le nombre D définit par (3.2.3) est strictement positif.*

Preuve. en utilisant les conditions initiales des solutions φ_1 et φ_2, on déduit de l'équation (3.2.1) les équations suivantes:

$$\varphi_1(x) = 1 + \int_0^x \left[\int_y^x \frac{ds}{p(s)} \right] q(y)\varphi_1(y)dy \tag{3.2.7}$$

$$\varphi_2(x) = \int_0^x \frac{ds}{p(s)} + \int_0^x \left[\int_y^x \frac{ds}{p(s)} \right] q(y)\varphi_2(y)dy \tag{3.2.8}$$

$$p(x)\varphi_2' = 1 + \int_0^x q(y)\varphi_2(y)dy \tag{3.2.9}$$

par le lemme 3.2.1, on a

$$\varphi_1(x) \geq 1, \qquad \varphi_2(x) \geq \int_0^x \frac{dx}{p(x)}, \qquad x \in [0,T] \tag{3.2.10}$$

et

$$\varphi_1(T) > 1, \qquad \varphi_2^{[1]}(T) > 1 \tag{3.2.11}$$

■

Théorème 3.2.1 *soit $h \in L^1[0,T]$, la fonction u donnée par*

$$u(x) = \int_0^T G(x,y)h(y)dy \tag{3.2.12}$$

est l'unique solution du probléme aux limites

$$\begin{aligned} &-(p(x)u')' + q(x)u = h(x) && x \in [0,T] \\ &u(0) = u(T) && u^{[1]}(0) = u^{[1]}(T) \end{aligned} \tag{3.2.13}$$

ou $G(x,y)$ est la fonction de Green définie par.

$$G(x,y) = \frac{\varphi_2(T)}{D}\varphi_1(x)\varphi_1(y) - \frac{\varphi_1(T)}{D}\varphi_2(x)\varphi_2(y) \\ + \begin{cases} \frac{\varphi_2^{[1]}(T)-1}{D}\varphi_1(x)\varphi_2(y) - \frac{\varphi_1(T)-1}{D}\varphi_1(y)\varphi_2(x) & 0 \preceq y \preceq x \preceq T \\ \frac{\varphi_2^{[1]}(T)-1}{D}\varphi_1(y)\varphi_2(x) - \frac{\varphi_1(T)-1}{D}\varphi_1(x)\varphi_2(y) & 0 \preceq x \preceq y \preceq T \end{cases} \tag{3.2.14}$$

Preuve. Soit φ_1, φ_2 les deux solutions linéairement indépendantes pour l'équation homogène (3.2.1), satisfaisant les conditions initiales

$$\begin{aligned} \varphi_1(0) = 1 \quad \varphi_1^{[1]}(0) = 0 \\ \varphi_2(0) = 0 \quad \varphi_2^{[1]}(0) = 1 \end{aligned}$$

La solution de l'équation générale de (3.2.13) s'écrit sous la forme :

$$v(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \int_0^t (\varphi_2(x)\varphi_1(y) - \varphi_1(x)\varphi_2(y))\, h(y)dy \quad x \in [0,T]$$

Où $c_i \in \mathbb{R}$ sont des constantes. Pour que $u(x)$ soit T-périodique , il est nécéssaire et suffisant que c_i satisfait les conditions

$$\begin{aligned} c_1 &= \varphi_1(T)c_1 + \varphi_2(T)c_2 + \int_0^T (\varphi_2(T)\varphi_1(y) - \varphi_1(T)\varphi_2(y))\, h(y)dy \\ c_2 &= \varphi_1^{[1]}(T)c_1 + \varphi_2^{[1]}(T)c_2 + \int_0^T \left(\varphi_2^{[1]}(T)\varphi_1(y) - \varphi_1^{[1]}(T)\varphi_2(y)\right) h(y)dy \end{aligned}$$

Ce qui nous donne :

$$c_1(1-\varphi_1(T)) = \varphi_2(T)c_2 + \int_0^T (\varphi_2(T)\varphi_1(s) - \varphi_1(T)\varphi_2(s))\, h(s)ds$$

D'autre part

$$-\varphi_1^{[1]}(T)c_1 = (\varphi_2^{[1]}(T)-1)c_2 + \int_0^T \left(\varphi_2^{[1]}(T)\varphi_1(y) - \varphi_1^{[1]}(T)\varphi_2(y)\right) h(y)dy$$

Par suite

$$\begin{aligned}
& (1-\varphi_1(T))\left[(\varphi_2^{[1]}(T)-1)c_2+\int_0^T\left(\varphi_2^{[1]}(T)\varphi_1(y)-\varphi_1^{[1]}(T)\varphi_2(y)\right)h(y)dy\right] \\
= \quad & -\varphi_1^{[1]}(T)\left[\varphi_2(T)c_2+\int_0^T\left(\varphi_2(T)\varphi_1(y)-\varphi_1(T)\varphi_2(y)\right)h(y)dy\right]
\end{aligned}$$

$$D=\varphi_2^{[1]}(T)+\varphi_1(T)-2\neq 0,\quad \varphi_2^{[1]}(T)\varphi_1(T)-\varphi_1^{[1]}(T)\varphi_2(T)=1.$$

On trouve alors :

$$c_2=\frac{1}{2-\left(\varphi_2^{[1]}(T)+\varphi_1(T)\right)}\int_0^T\left((\varphi_2^{[1]}(T)-1)\varphi_1(y)-\varphi_1^{[1]}(T)\varphi_2(y)\right)h(y)dy$$

Puis aprés, on trouve

$$c_1=\frac{1}{2-\left(\varphi_2^{[1]}(T)+\varphi_1(T)\right)}\int_0^T\left(\varphi_2(T)\varphi_1(y)+(1-\varphi_1(T))\varphi_2(y)\right)h(y)dy$$

On remplaçons dans l'équation c_1 et c_2, on trouve

$$\begin{aligned}
u(x)=&\int_0^T\left[\tfrac{\varphi_2(T)}{D}\varphi_1(x)\varphi_1(y)-\tfrac{\varphi_1^{[1]}(T)}{D}\varphi_2(x)\varphi_2(y)\right]h(y)dy\\
&+\begin{cases}\displaystyle\int_0^T\left(\tfrac{\varphi_2^{[1]}(T)-1}{D}\varphi_1(x)\varphi_2(y)-\tfrac{\varphi_1(T)-1}{D}\varphi_1(y)\varphi_2(x)\right)h(y)dy & 0\preceq y\preceq x\preceq T\\ \displaystyle\int_0^T\left(\tfrac{\varphi_2^{[1]}(T)-1}{D}\varphi_1(y)\varphi_2(x)-\tfrac{\varphi_1(T)-1}{D}\varphi_1(x)\varphi_2(y)\right)h(y)dy & 0\preceq x\preceq y\preceq T\end{cases}
\end{aligned}$$

d'ou le résultat . $\blacksquare$

3.3 Positivité de la fonction de Green

Théorème 3.3.1 *la fonction de Green associée au probléme*

$$\begin{aligned} -(p(x)u')' + q(x)u &= h(x) \qquad & x \in [0,T] \\ u(0) &= u(T) \qquad & u^{[1]}(0) = u^{[1]}(T) \end{aligned}$$

est strictement positive, pour x, y dans $[0,T]$, c'est a dire

$$G(x,y) > 0, \forall (x,y) \in [0,T]^2 \tag{3.3.1}$$

Preuve. comme la fonction de Green $G(x,y)$ est symmetrique, il suffit de prouver que $G(x,y) > 0$ pour $x \in [0,T]$ et $y \in [0,T]$ on pose

$$E(x,y) = \varphi_1(y)\varphi_2(x) - \varphi_1(x)\varphi_2(y) \tag{3.3.2}$$

$$F(x,y) = [\varphi_2(T)\varphi_1(x) - \varphi_1(T)\varphi_2(x)]\,\varphi_1(y) + \left[\varphi_2^{[1]}(T)\varphi_1(x) - \varphi_1^{[1]}(T)\varphi_2(x)\right]\varphi_2(y) \tag{3.3.3}$$

on a donc pour $y \leq x$

$$G(x,y) = \frac{1}{D}\,[E(x,y) + F(x,y)] \tag{3.3.4}$$

on doit vérifier les propriétés suivantes:

$$E(x,x) = 0, \qquad \forall x \in [0,T], \qquad F(T,0) = 0. \tag{3.3.5}$$

$$E(x,y) > 0, \qquad \forall y \in [0,T], \qquad \forall x \in \left]y,T\right]. \tag{3.3.6}$$

$$F(x,y) > 0, \qquad \forall y \in [0,T], \qquad \forall x \in [y,T], (x,y) \neq (T,0). \tag{3.3.7}$$

la propriété (3.3.5) est évidente.

pour montrer(3.3.6), il suffit de voir que pour $y \in [0,T]$

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dE(x,y)}{dx}\right] = q(x)E(x,y), \qquad \forall x \in [y,T]$$
$$E(y,y) = 0 \qquad p(x)\frac{dE(x,y)}{dx} = 1 \qquad \text{pour } x = y$$

ce qui implique que pour tout $x \in [y,T]$

$$E(x,y) = \int_y^x \frac{dx}{p(x)} + \int_y^x \left[\int_\xi^x \frac{dx}{p(x)}\right] q(\xi)E(\xi,y)d\xi \tag{3.3.8}$$

en utilisant le lemme 3.2.1, et (3.3.8), on a

$$E(x,y) > 0, \qquad \forall x \in]y,T[$$

on passe maintenant a $F(x,y)$, alors pour y fixé dans $[0,T[$, on a

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dF(x,y)}{dx}\right] = q(x)F(x,y) \qquad \forall x \in [y,T]$$

$$F(T,y) = \varphi_2(y), \qquad p(x)\frac{dE(x,y)}{dx} = -\varphi_1(y) \qquad \text{pour } x = T$$

par conséquent, on a pour tout $x \in [y,T]$

$$F(x,y) = \varphi_2(x) + \varphi_1(y)\int_x^T \frac{dx}{p(x)} + \int_x^T \left[\int_x^\xi \frac{dx}{p(x)}\right] q(\xi)F(\xi,y)d\xi \tag{3.3.9}$$

en utilisant (3.2.10), et le lemme 3.2.1, on conclut que $F(x,y) > 0$, par conséquent la fonction de Green est strictement positive pour touts $x, y \in [0,t]$. ■

3.4 Existence des solutions positives

consédérons le probléme aux limites (3.1.1)-(3.1.2), on suppose que la fonction $f(x,t)$ vérifie la condition suivante:

$f : [0,T]\times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue, et $f(x,t) \succ 0$ pour $t \in \mathbb{R}^+$

dans tout ce qui suit, on note

$$m = \min_{(x,y)\in[0,T]^2} G(x,y) \quad M = \max_{(x,y)\in[0,T]^2} G(x,y) \quad \sigma = \tfrac{m}{M} \tag{3.4.1}$$

E disigne l'espace des fonctions continues définies sur $[0,T]$ muni de la norme usuelle $\|u\| = \sup_{x\in[0,T]} |u(x)|$.

P et P_0 sont les cones définis par

$$P = \{u(x) \in E : u(x) \geq 0, \forall x \in [0,T]\}$$

$$P_0 = \left\{u(x) \in P : \min_{x\in[0,T]} u(x) \geq \sigma \|u\|\right\}$$

d'aprés le théoreme 3.2.1, u est solution du probléme aux limites (3.1.1)-(3.1.2) si et seulement si u est un poit fixe de l'opérateur $A : E \to E$ définit par

$$Au(x) = \int_0^T G(x,y)f(y,u(y))dy \qquad x \in [0,T] \tag{3.4.2}$$

A noter que pour tout $u \in E$, $Au(x)$ vérifie les conditions aux limites (3.1.2) en vertu de la définition de la fonction de Green

comme $f(x,t)$ est continue et $G(x,y)$ est une fonction continue, alors on peut en déduire par le théoreme d'Ascoli-Arzéla que l'opérateur A est complétement continue dans E (montrer en Chapitre 1).

Lemme 3.4.1 *pour tout $u \in P, Au \in P_0$. en particulier, A garde le cone P_0 invariant*

Preuve. E, P et P_0 étant ceux définis déja, et l'operateur A définit par (3.4.2), on déduit de (3.3.1) que pour tout $u \in P, Au \geq 0$ dans $x \in [0, X]$

$$\begin{aligned}
\min_{x\in[0,T]} Au(x) &\geq m \int_0^T f(y,u(y))dy \\
&\geq \sigma \int_0^T \left\{ \max_{x\in[0,T]} G(x,y) \right\} f(y,u(y))dy \\
&\geq \sigma \max_{x\in[0,T]} \int_0^T G(x,y) f(y,u(y))ds \\
&= \sigma \|Au\|
\end{aligned}$$

par conséquent $Au \in P_0$ ■

on suppose maintenant que

(H1). il existe deux nombres $0 < r < R < \infty$, tels que pour tout $x \in [0, T]$

$$f(x,t) \leq \tfrac{1}{TM}t \qquad \text{si } 0 \leq t \leq r, \qquad f(x,t) \geq \tfrac{\sigma^{-1}}{Tm}t \qquad \text{si} \quad R \leq t < \infty$$

Théorème 3.4.1 *supposons que la condition (H1) soit vérifiée, alors le pobléme aux limites (3.1.1)-(3.1.2) admet au moins une solution u telle que*

$$\sigma r \leq u(x) \leq \sigma^{-1} R, \qquad x \in [0,T] \tag{3.4.3}$$

Preuve. pour $u \in P_0$ avec $\|u\| = r$, et pour tout $x \in [0, T]$, on a

$$\begin{aligned}
Au(x) &\leq M \int_0^T f(y,u(y))dy \\
&\leq \frac{M}{TM} \int_0^T u(y)dy \\
&\leq \frac{1}{T} \|u\| T \\
&= \|u\|
\end{aligned} \tag{3.4.4}$$

si on pose $\Omega_1 = \{u \in E : \|u\| < r\}$, alors (3.4.4) entraine que

$$\|Au\| \leq \|u\|, \qquad u \in P_0 \cap \partial\Omega_1$$

d'autre part, soit $R_1 = \sigma^{-1}R$, et $\Omega_2 = \{u \in E : \|u\| < R_1\}$

alors $u \in P_0$ et $\|u\| = R_1$ implique:

$$\min_{x\in[0,X]} u(x) \geq \sigma \|u\| = \sigma R_1 = R$$

comme $u(x) \geq R$ pour tout $x \in [0, T]$, alors pour tout $x \in [0, T]$

$$\begin{aligned} Au(x) &\geq m \int_0^T f(y, u(y))dy \\ &\geq m\frac{M}{Tm^2} \int_0^T u(y)dy \\ &\geq \frac{\sigma^{-1}}{T} \int_0^T \sigma \|u\| dy \\ &= \|u\| \end{aligned}$$

par conséquent

$$\|Au\| \geq \|u\|, \qquad u \in P_0 \cap \partial\Omega_2$$

d'apres le theoreme de Kranoselskii, l'operateur A admet un poit fixe u dans $P_0 \cap (\overline{\Omega_2}\backslash\Omega_1)$, c'est a dire pour $x \in [0, T]$.

$$\sigma r \leq \sigma \|u\| \leq u(x) \leq R_1 \leq \sigma^{-1}R.$$

ce qui preuve l'inégalité (3.4.3) $\blacksquare$

Remarque 4 *l'inégalité (3.4.3) montre que la solution u est positive pour tout $x \in [0, T]$*

Remarque 5 *si les limites*

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{f(x,t)}{t} = 0, \qquad \lim_{t\to\infty} \frac{f(x,t)}{t} = \infty$$

existent uniformément pour $x \in [0,T]$, *alors la condition (H1) est vérifiée pour* $r > 0$ *infiniment petit, et* $R > 0$ *infiniment grand.*

dans le théoreme qui suit, on suppose la conditiion suivante:

(H2). il existe deux nombres $0 < r < R < \infty$, tels que pour tout $x \in [0,T]$

$$f(x,t) \geq \frac{\sigma^{-1}}{Tm}t \qquad \text{si } 0 \leq t \leq r, \qquad f(x,t) \leq \frac{1}{TM}t \qquad \text{si } R \leq t < \infty$$

Théorème 3.4.2 *supposons que la condition (H2) soit vérifiée, alors le pobléme aux limites (2.1.1)-(2.1.2) admet au moins une solution* u *telle que*

$$\sigma r \leq u(x) \leq \sigma^{-1}R, \qquad x \in [0,T] \tag{3.4.5}$$

Remarque 6

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{f(x,t)}{t} = \infty, \qquad \lim_{t\to\infty} \frac{f(x,t)}{t} = 0$$

existent uniformément pour $x \in [0,T]$, *alors la condition (H2) est vérifiée pour* $r > 0$ *infiniment petit, et* $R > 0$ *infiniment grand.*

3.5 Probléme aux limites dépendant d'un paramétre

dans cette section, on considére le probléme aux limites suivant dépendant d'un paramétre réel λ.

$$-(p(x)u')' + q(x)u = \lambda f(x,u) \qquad x \in [0,T] \tag{3.5.1}$$

$$u(0) = u(T) \qquad u^{[1]}(0) = u^{[1]}(T) \tag{3.5.2}$$

on suppose $f(x,t)$ vérifie la condition suivante

(H3). il existe deux nombres $0 < r < R < \infty$, tels que pour tout $x \in [0,T]$

$$f(x,t) \leq f_0(x)t \qquad \text{si } 0 \leq t \leq r, \qquad f(x,t) \geq f_\infty(x)t \qquad \text{si } R \leq t < \infty$$

ou $f_0(x), f_\infty(x)$ sont des fonctions positives définies sur $[0,T]$

Théorème 3.5.1 *supposons la condition (H3) vérifiée, et*

$$M^2 \int_0^T f_0(y)dy \leq m^2 \int_0^T f_\infty(y)dy$$

alors pour tout λ qui vérifie

$$\frac{M}{m^2 \int_0^T f_\infty(y)dy} \leq \lambda \leq \frac{1}{M \int_0^T f_0(y)dy} \tag{3.5.3}$$

alors le pobléme aux limites (3.5.1)-(3.5.2) admet au moins une solution u telle que

$$\sigma r \leq u(x) \leq \sigma^{-1}R, \qquad x \in [0,T] \tag{3.5.4}$$

Preuve. le pobléme aux limites (3.5.1)-(3.5.2) est équivalent a l'équation intégrale

$$u(x) = \lambda \int_0^T G(x,y)f(y,u(y))dy, \qquad x \in [0,T]$$

par conséquent, il est équivalent a la recherche d'un point fixe pour l'opérateur $A : E \to E$ définit par

$$Au(x) = \lambda \int_0^T G(x,y)f(y,u(y))dy, \qquad x \in [0,T] \tag{3.5.5}$$

A est complétement continue et garde le cone P_0 invariant pour $\lambda > 0$, supposons que

λ vérifie (3.5.3) alors pour $u \in P_0$, avec $\|u\| = r$, on a pour tout $x \in [0, T]$

$$\begin{aligned} Au(x) &\leq \lambda M \int_0^T f(y, u(y))dy \\ &\leq \lambda M \int_0^T f_0(y, u(y))u(y)dy \\ &\leq \lambda M \|u\| \int_0^T f_0(y)dy \\ &\leq \|u\| \end{aligned}$$

donc, si on pose $\Omega_1 = \{v \in E : \|v\| < r\}$, alors

$$\|Au\| \leq \|u\|, \qquad u \in P_0 \cap \partial\Omega_1$$

d'autre part, soit $R_1 = \sigma^{-1}R$, et $\Omega_2 = \{u \in E : \|u\| < R_1\}$
alors $u \in P_0$ et $\|u\| = R_1$ implique:

$$\min_{x \in [0,T]} u(x) \geq \sigma \|u\| = \sigma R_1 = R$$

comme $u(x) \geq R$ pour tout $x \in [0, T]$, alors pour tout $x \in [0, T]$

$$\begin{aligned} Au(x) &\geq \lambda m \int_0^T f(y, u(y))dy \\ &\geq \lambda m \int_0^T f_\infty(y)u(y)dy \\ &\geq \lambda m\sigma \|u\| \int_0^T f_\infty(y)dy \\ &= \|u\| \end{aligned}$$

par conséquent

$$\|Au\| \geq \|u\|\,, \qquad\qquad u \in P_0 \cap \partial\Omega_2$$

d'apres le theoreme de Kranoselskii, l'operateur A admet un poit fixe u dans $P_0 \cap (\overline{\Omega_2} \backslash \Omega_1)$. $\blacksquare$

Corollaire 3.5.2 *si les limites*

$$\lim_{t \to 0^+} \tfrac{f(x,t)}{t} = f_0(x), \qquad \lim_{t \to \infty} \tfrac{f(x,t)}{t} = f_\infty(x) \tag{3.5.6}$$

éxistent uniformément pour $x \in [0, T]$, *et si*

$$M^2 \int\limits_0^T f_0(y)dy \leq m^2 \int\limits_0^T f_\infty(y)dy$$

Remarque 7 *alors, pour tout λ qui vérifiie*

$$\frac{M}{m^2 \int\limits_0^T f_\infty(y)dy} \leq \lambda \leq \frac{1}{M \int\limits_0^T f_0(y)dy} \tag{3.5.7}$$

le probléme aux limites (3.5.1)-(3.5.2) admet au moins une solution u telle que $u(x) > 0$ pour tout $x \in [0, T]$

Preuve. soit λ satisfaisant (3.5.7)

on choisit $\alpha > 0$ tel que

$$\frac{M}{m^2 \int\limits_0^T [f_\infty(y) - \delta(y)]dy} \leq \lambda \leq \frac{1}{M \int\limits_0^T [f_0(y) + \alpha]dy}$$

ou $\delta(y) = \min\{\alpha, f_\infty(x)\}$, en appliquant la définition de la limite pour α, oon peut trouver $0 < r < R < \infty$, tels que pour tout $x \in [0, T]$

$$f(x,t) \leq (f_0(x) + \alpha)t \qquad \text{si } 0 \leq t \leq r, \qquad f(x,t) \geq (f_\infty(x) - \delta(y))t \quad \text{si } R \leq t < \infty$$

ainsi, le corollaire est obtenu par application directe du theoreme 3.5. ■

on suppose maintenant que $f(x,t)$ vérifie la condition suivante

(H4). il existe deux nombres $0 < r < R < \infty$, tels que pour tout $x \in [0,T]$

$$f(x,t) \geq f_0(x)t \quad \text{si } 0 \leq t \leq r, \qquad\qquad f(x,t) \leq f_\infty(x)t \quad \text{si } R \leq t < \infty$$

ou $f_0(x), f_\infty(x)$ sont des fonctions mesurable positives définies sur $[0,T]$

Théorème 3.5.3 *supposons la condition (H4) vérifiée, et*

$$M^2 \int_0^T f_0(y)dy \leq m^2 \int_0^T f_\infty(y)dy$$

alors pour tout λ qui vérifie (3.5.7), le probléme aux limites (3.5.1)-(3.5.2) admet au moins une solution u telle quelim

$$\sigma r \leq u(x) \leq \sigma^{-1}R, \qquad\qquad x \in [0,T]$$

la preuve est analogue a celle du theoreme 3.5, en utilisant la deuxiéme assertion du theoréme de Kranoselskii, et on a l'analogue du corollaire (3.5.2)

Corollaire 3.5.4 *si les limites*

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{f(x,t)}{t} = f_0(x), \qquad\qquad \lim_{t\to\infty} \frac{f(x,t)}{t} = f_\infty(x) \tag{3.5.8}$$

éxistent uniformément pour $x \in [0,T]$, *et si*

$$M^2 \int_0^T f_\infty(y)dy \leq m^2 \int_0^T f_0(y)dy$$

Remarque 8 *alors, pour tout λ qui vérifiie*

$$\frac{M}{m^2 \int_0^T f_0(y)dy} \leq \lambda \leq \frac{1}{M \int_0^T f_\infty(y)dy} \tag{3.5.9}$$

le probléme aux limites (3.5.1)-(3.5.2) admet au moins une solution u *telle que* $u(x) > 0$ *pour tout* $x \in [0, T]$

3.6 Existence de deux solutions positives

on suppose que $f(x,t)$ vérifie la condition

(H5). il existe deux nombres $0 < r < a < R < \infty$, tels que $r < \sigma a$ et pour tout $x \in [0, T]$

$$\begin{array}{lll} f(x,t) \geq \frac{\sigma^{-1}}{Tm} t & \text{si } 0 \leq t \leq r & \text{et } R \leq t < \infty \\ f(x,t) \geq \frac{1}{TM} a & \sigma a \leq t \leq a & \end{array}$$

Théorème 3.6.1 *supposons que la condition (H5) soit vérifiée, alors le pobléme aux limites (3.1.1)-(3.1.2) admet au moins deux solutions* u_1 *et* u_2 *telle que*

$$\|u_1\| < a < \|u_2\|$$

et

$$\sigma r \leq u_1(x) \leq a, \qquad \sigma a \leq u_2(x) \leq \sigma^{-1} R \quad x \in [0, T]$$

Preuve. soit E, P et P_0, et A l'operateur définit par (3.4.2) si on pose $\Omega_1 = \{u \in E : \|u\| < r\}$, alors

$$\begin{aligned} Au(x) &\geq m\int_0^T f(y,u(y))dy \\ &\geq m\frac{M}{Tm^2}\int_0^T u(y)dy \\ &\geq \frac{\sigma^{-1}}{T}\int_0^T \sigma\,\|u\|\,dy \\ &= \|u\| \end{aligned}$$

par conséquent

$$\|Au\| \geq \|u\|, \qquad\qquad u \in P_0 \cap \partial\Omega_1$$

encore, pour $u \in P_0$,avec $\|u\| = a$, on a

$$\sigma a \leq u(x) \leq a, \qquad\qquad x \in [0,T]$$

donc

$$\begin{aligned} Au(x) &\leq M\int_0^T f(y,u(y))dy \\ &\leq \frac{M}{TM}\int_0^T a\ dy \\ &\leq \frac{1}{T}\ a\ T \\ &= \|u\| \end{aligned}$$

si on pose $\Omega_2 = \{u \in E : \|u\| < a\}$, alors

$$\|Au\| \leq \|u\|, \qquad\qquad u \in P_0 \cap \partial\Omega_2$$

donc, d'apres la deuxieme assertion du theoreme de Kranoselskii, l'opérateur A admet un point fixe u_1 dans $P_0 \cap (\overline{\Omega_2} \backslash \Omega_1)$, comme $Au \neq u$ pour $u \in P_0$ avec $\|u\| = a$, alors $r \leq u_1 \leq a$. pour $u \in P_0$ on a $u(x) \geq \sigma \|u\|$ par suite $\sigma r \leq u_1(x) \leq a$ pour tout $x \in [0, T]$

soit maintenant $R_1 = \sigma^{-1} R$, et $\Omega_3 = \{u \in E : \|u\| < R_1\}$

alors $u \in P_0$ et $\|u\| = R_1$ implique:

$$\min_{x \in [0,T]} u(x) \geq \sigma \|u\| = \sigma R_1 = R$$

comme $u(x) \geq R$ pour tout $x \in [0, T]$, alors pour tout $x \in [0, T]$

$$\begin{aligned} Au(x) &\geq m \int_0^T f(y, u(y)) dy \\ &\geq m \frac{M}{Tm^2} \int_0^T u(y) dy \\ &\geq \frac{\sigma^{-1}}{T} \int_0^T \sigma \|u\| dy \\ &= \|u\| \end{aligned}$$

par conséquent

$$\|Au\| \geq \|u\|, \qquad u \in P_0 \cap \partial\Omega_3$$

donc, d'apres la premiere assertion du theoreme de Kranoselskii, l'operateur A admet un poit fixe u_2 dans $P_0 \cap (\overline{\Omega_3} \backslash \Omega_2)$ et

$$\sigma a \leq u_2(x) \leq \sigma^{-1} R. \qquad x \in [0, T]$$

on ne peut pas avoir la meme solution puisque

$$\|u_1\| < a < \|u_2\| \qquad \partial\Omega_2$$

$\blacksquare$

Remarque 9 *si les limites*

$$\lim_{t\to 0^+} \tfrac{f(x,t)}{t} = \infty, \qquad \lim_{t\to \infty} \tfrac{f(x,t)}{t} = \infty$$

existent uniformément pour $x \in [0,T]$ *, alors la condition (H5) est vérifiée pour* $r > 0$ *infiniment petit, et* $R > 0$ *infiniment grand.*

on suppose que $f(x,t)$ vérifie la condition suivante

(H6). il existe deux nombres $0 < r < R < \infty$, tels que $r < \sigma a$, et pour tout $x \in [0,T]$

$$\begin{array}{lll} f(x,t) \leq \frac{1}{TM} t, & \text{si } 0 \leq t \leq r, & \text{et } R \leq t < \infty \\ f(x,t) \geq \frac{1}{Tm} a, & \sigma a \leq t \leq a & \end{array}$$

Théorème 3.6.2 *supposons que la condition (H5) soit vérifiée, alors le pobléme aux limites (3.1.1)-(3.1.2) admet au moins deux solutions* u_1 *et* u_2 *telle que*

$$u_1 < a < \|u_2\|$$

et

$$\sigma r \leq u_1(x) \leq a, \qquad \sigma a \leq u_2(x) \leq \sigma^{-1} R \qquad x \in [0,T]$$

Remarque 10 *si les limites*

$$\lim_{t\to 0^+} \tfrac{f(x,t)}{t} = 0, \qquad \lim_{t\to \infty} \tfrac{f(x,t)}{t} = 0$$

existent uniformément pour $x \in [0,T]$ *, alors la condition (H6) est vérifiée pour* $r > 0$ *infiniment petit, et* $R > 0$ *infiniment grand.*

3.7 Existence de solutions périodiques

considérons l'equation définie sur $\mathbb{R}$ tout entier

$$-(p(x)u')' + q(x)u = f(x, u(x)) \qquad x \in \mathbb{R} \tag{3.7.1}$$

on suppose que les coefficients de l'équation sont T-périodique:

(H7) $\quad p(x+T) = p(x), \qquad q(x+T) = q(x), \qquad x \in \mathbb{R}$

(H8) $\quad f(x+T, t) = f(x, t), \qquad x, t \in \mathbb{R}$

on s'intéresse a l'existence des solutions T-périodique pour l'équation (3.7.1), il est clair que si les conditions (H7) et (H8) sont vérifiées, alors toute solution du probléme aux limites (3.1.1)-(3.1.2) se prolenge de $[0, T]$ a $\mathbb{R}$ toute entier comme étant une fonction T-périodique, et sera par suite une solution de l'équation (3.7.1)

les theoremes 4.1 et 4.2 entrainent respectivement les resultats suivants

Théorème 3.7.1 *supposons les conditions (H1), (H7) et (H8) vérifiées, alors l'equation (3.7.1) admet aux moins une solution T-périodique u telle que*

$$\sigma r \leq u(x) \leq \sigma^{-1} R, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Théorème 3.7.2 *supposons les conditions (H2), (H7) et (H8) vérifiées, alors l'equation (3.7.1) admet aux moins une solution T-périodique u telle que*

$$\sigma r \leq u(x) \leq \sigma^{-1} R, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Remarque 11 *de meme, on peut en déduire des résultats d'éxistence de solution posi-*

tives a partir des theoreme 5.1 et 5.3 pour le probleme

$$-(p(x)u')' + q(x)u = \lambda f(x,t) \qquad\qquad x \in \mathbb{R}$$

les résultats suivants découlent respectivement des théoremes 6.1 et 6.2

Théorème 3.7.3 *supposons les conditions (H5), (H7) et (H8) vérifiées, alors l'equation (3.7.1) admet aux moins deux solutions T-périodiques u_1 et u_2 telles que*

$$\|u_1(x)\| < a < \|u_2(x)\|$$

et

$$\sigma r \leq u_1(x) \leq a, \qquad\qquad \sigma a \leq u_2(x) \leq \sigma^{-1} R \qquad\qquad x \in \mathbb{R} \tag{3.7.2}$$

Théorème 3.7.4 *supposons les conditions (H6), (H7) et (H8) vérifiées, alors l'equation (3.7.1) admet aux moins deux solutions T-périodiques u_1 et u_2 telles que*

$$\|u_1(x)\| < a < \|u_2(x)\|$$

et

$$\sigma r \leq u_1(x) \leq a, \qquad\qquad \sigma a \leq u_2(x) \leq \sigma^{-1} R \qquad\qquad x \in \mathbb{R}$$

3.8 Remarques

afin d'appliquer les théorémes énoncés plus haut, il suffit de donner des bornes inférieures et superieures pour la fonction de Green, et pas nécéssairement connaitre m et M éxactement. si par exemple

$$m_1 < G(x,y) < M_1 \qquad \text{ou} \qquad 0 < m_1 \leq m < M \leq M_1 < \infty$$

et on suppose qu'il éxiste deux nombres $0 \prec r \prec R \prec \infty$, tels que pour tout $x \in [0, T]$

$$f(x,t) \leq \tfrac{1}{TM_1}t \qquad \text{si } 0 \leq t \leq r, \qquad f(x,t) \geq \tfrac{M_1}{Tm_1^2}t \qquad \text{si} \quad R \leq t < \infty$$

pour r et R, la condition (H1) reste toujours valable parceque

$$\tfrac{1}{M_1} < \tfrac{1}{M} \quad \tfrac{M}{m^2} < \tfrac{M_1}{m_{\&}^2}$$

et le théoréme 3.3 est applicable, on en déduit que le probléme (2.1.1)-(2.1.2) admet au moins une solution positive u ttelle que

$$\frac{m_1}{M_1}r < u(x) < \frac{M_1}{m_1}R.$$

Conclusion

On a vu dans ce mémoire comment l'auteur (F. M. Atici and G. Sh. Guseinov) a utiliser la positivité de la fonction de Green pour montré des résultats d'existence de solution périodiques, les résultats qu'il prouvé sont à la base de beaucoup de résultat plus tard, donc on peut dire qu'il a traité le travaille de base pour les problème périodique

Dans [4] JOHN R.GRAEF AND LINGJU KONG à étudie un problème similaire sans poser le question, de le positivité de ,et il a montrer qu'on peut avoir des solutions sous certaines conditions sans que soit de signe constant.

On trouve aussi ses résultat dans des équations au différence périodiques.

Les problème périodique étaient considérés très difficiles et les auteur ont pu ouvrir une petite porte pour facilité leurs études cet article on le cité dans la plupart des problèmes périodiques étudier récemment d'où l'importance de son étude

Bibliographie

[1] A. Zettl. Sturm-Liouville Theory, vol. 121 of Mathematical Surveys and Monographs. American Mathematical Society, Providence, RI, USA, 2005.

[2] D.Guo and V.Lakshmikantham. Nonlinear Problems in Abstract Cones. Academic Press, San Diego, 1988.

[3] G.Birkhoff and G.C.Rota. Ordinary differential equations. Jhon wiley and sons, 4 édition, 1989.

[4] J Graef and L Kong. Existence results for nonlinear péridic boundary- value problems. Received 20 June 2007

[5] K. Deimling. Nonlinear Functional Analysis. Springer-Verlag, Berlin, 1985.

[6] M. Tvrdy´ I. Rachunkova and I. Vrkoc. Existence of nonnegative and nonpositive solutions for second order periodic boundary value problems. J. Differential <Equations, 176 :445 469, 2001.

[7] S . Djebali. Degré topologique : théorie et applications aux. EDO-EDP. E.N.S, Kouba, cours policopiés.

[8] S.Hu L.H. Erbe and H.Wang. Multiple positive solutions of some boundary value problems. J.Math.Anal.Appl, 184 :640 648, 1994. 141

[9] F. M. Atici and G. Sh. Guseinov. On the existence of positive solutions for nonlinear differential equations with periodic boundary conditions. J. Computat. Appl. Math, 132 :341 – 356, 2001.

[10] Z. Zhang and J.Wang. On existence and multiplicity of positive solutions to periodic boundary-value problems for singular nonlinear second-order differential equations. J. Math. Analysis Applic., 281 :99 107, 2003.