REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DE KHEMIS-MILIANA

Faculté des Sciences et de la Technologie

Département de Mathématiques et informatique

MEMOIRE
Présenté par
BOUREGBA Khadra

Pour obtenir
LE DIPLOME DE MASTER
Spécialité : Mathématiques

Option : Mathématiques appliquées et Traitement du Signal

Intitulé

Absence de solutions pour certains problèmes aux limites du second ordre

Soutenu le **20 juin 2015,** devant les membres du jury :

Mr. SAID Abderrezak	Université de Khemis Miliana.	Président
Mr. BENBACHIR Maamar	Université de Khemis Miliana	Encadreur
Mme. DJOUAMAI Leila	Université de Khemis Miliana	Examinateur
Mr. BEZZIOU Mohamed	Université de Khemis Miliana	Examinateur

Remerciements

Avant et après tout, je remercie **DIEU**, le tout puissant.

J'adresse mes sincères remerciements à tous mes enseignants et toutes les personnes qui par leurs paroles, leurs écrits, leurs conseils et leurs critiques ont guidé mes réflexions et qui ont accepté de répondre à mes questions durant mes recherches.

Résumé

Le but principal de ce travail est de démontrer l'absence de solutions pour le problème du second ordre suivant

$$x''(t) + (Fx)(t) = 0, t \in [0,1]$$

tel que $x \in \mathbb{C}^2(I,\mathbb{R})$ où $\mathbb{C}^2(I,\mathbb{R})$ est l'espace des fonctions continues, avec des conditions aux limites données.

Abstract

The main purpose of this work is to prove absence of solutions of the following problem

$$x''(t) + (Fx)(t) = 0, t \in [0,1]$$

such that $x \in \mathbb{C}^2(I,\mathbb{R})$, where $\mathbb{C}^2(I,\mathbb{R})$ is the space of continuous functions with given boundary conditions.

Table des matières

Préambule

En analyse, un problème aux limites est constitué d'une équation différentielle (ou plus généralement aux dérivées partielles) dont on cherche une solution prenant de plus des valeurs imposées en des limites du domaine de résolution.

Le but de ce travail est principalement axé sur la mise en évidence de certaines conditions suffisantes garantissant l'absence de solutions positives du problème:

$$x''(t) + (Fx)(t) = 0, t \in I$$

assujetie à des conditions aux limites qui seront précisées dans la suite.

Ce travail est divisé en trois chapitres:

Dans le premier chapitre on étale les définitions de quelques notions de topologie, voire la notion de Topologie usuelle de $\mathbb{R}$, les normes sur un espace vectoriel , la définition d'une suite de Cauchy et l'espace complet .

Le deuxième chapitre est consacré à la théorié de la mesure et de l'intégration.

Le troisième chapitre traite le problème de l'absence d'une solution positive d'une équation différentielle de seconde ordre satisfaisant certains conditons initiales et dont nous avons appliqué plusieurs théoremes fondamentales.

0.1 Notations

$\mathbb{N}, \mathbb{N}^*$: Ensemble des entiers naturels, des entiers strictement positifs

$\mathbb{R}$: Ensemble des réels

$\emptyset$: Ensemble vide

I : l'intervalle $[0, 1]$

E : Ensemble quelconque

M : Tribu sur E

$C(I)$: Ensemble des fonctions continues sur I

p.p : Presque partout

L : Espace de Lebesgue.

$\mathcal{L}^\infty = \mathcal{L}^\infty(X, A, \mu)$: L'ensemble de toutes les fonctions mesurables f à valeurs réelles, qui sont essentiellement bornées.

$L^\infty = L^\infty(X, A, \mu)$: L'ensemble des classes d'équivalence des fonctions de $\mathcal{L}^\infty$.

χ : Fonction caractéristique.

PAL : Problème aux limites.

$\mathcal{P}(E)$: L'ensemble de partie de E.

Chapitre 1

Pré-requis

1.1 Notions de Topologie

Définition 1.1.1 *Une topologie sur E est une famille $\theta \subset \mathcal{P}(E)$ de parties de E vérifiant les trois conditions suivantes:*

1. $\emptyset, E \in \theta$.

2. *Toute réunion (finie ou infinie) d'éléments de θ est dans θ (stabilité par union), c'est-à-dire: pour tout ensemble $I \subset \mathbb{N}$ (quelconque), pour toute famille $(\theta_i)_{i\in I}$ pour tout $i \in I$, on a $(\cup_{i\in I}\theta_i) \in \theta$.*

3. *Toute intersection finie d'éléments de θ est dans θ (stabilité par intersection finie), c'est-à-dire: pour tout $J \subset \mathbb{N}$ ensemble fini, pour toute famille $(\theta_i)_{i\in J}$ où $\theta_i \in \theta$ pour tout $i \in J$, on a $(\cap_{i\in J}\theta_i) \in \theta$.*

Les parties de E appartenant à θ sont les parties ouvertes de E et la paire (E, θ) forme un espace topologique. Les compléments des parties ouvertes sont les parties fermées.

Exemple 1.1.2 *Sur un ensemble E, il existe toujours au minimum deux topologies « extrêmes ».*

1. *La topologie discrète $\theta_d = \mathcal{P}(E)$. Un espace muni de la topologie discrète est dit discret.*

2. *La topologie grossière $\theta_g = \{\emptyset, E\}$. Un espace muni de la topologie grossière est dit grossier.*

3. *Un ensemble à deux éléments $E = \{a, b\}$ peut être muni de quatre topologies différentes :*

$$\theta_g = \{\emptyset, E\}, \theta_d = \{\emptyset, a, b, E\}, \theta_1 = \{\emptyset, a, E\}, \theta_2 = \{\emptyset, b, E\}.$$

1.1.1 Topologie usuelle

Définition 1.1.3 (Intervalle ouvert) *Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, l'intervalle ouvert d'extrémités a et b est noté $]a, b[$ et est défini par:*

$$]a, b[= \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\},$$

on note aussi

$$]-\infty, b[= \{x \in \mathbb{R}; x < b\}$$

et

$$]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}; x > a\}.$$

Définition 1.1.4 (Intervalle fermé) *Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, l'intervalle fermé d'extrémités a et b est noté $[a, b]$ et est défini par :*

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}.$$

Exemple 1.1.5 *Sur* $\mathbb{R}$*, l'ensemble*

$$\theta = \{\emptyset, \mathbb{R}, \textit{des intervalles de la forme }]a, b[\},$$

n'est en général pas une topologie, car la deuxième propriété n'est pas vérifiée.

Définition 1.1.6 *La topologie usuelle de* $\mathbb{R}$ *est la topologie engendrée par les intervalles ouverts (c'est-à-dire la plus petite topologie contenant les intervalles ouverts).* $\mathbb{R}$ *muni de cette topologie est appelé* $\mathbb{R}$ *usuel.*

Exemple 1.1.7

1. *Soit l'espace topologique* $(\mathbb{R}, |.|)$, $A =]-1, 1[\cup]3, 5[$ *(ouvert)*

2. *Comme toute intersection finie d'intervalles ouverts de* $\mathbb{R}$ *est soit vide, soit un intervalle ouvert de* $\mathbb{R}$*, les ouverts de* $\mathbb{R}$ *pour la topologie usuelle sont* ϕ*,* $\mathbb{R}$ *et toute réunion* $\cup_{i\in I}]a_i, b_i[$ *d'intervalles* $]a_i, b_i[$ *ouvert de* $\mathbb{R}$*.*

3. *Un intervalle de la forme* $]a, b[$ *est donc ouvert pour cette topologie. En revanche, les intervalles* J *de la forme* $[a, b]$*,* $[a, b[$ *ou* $]a, b]$ *ne sont pas ouverts car si* $J = \cup_{i\in I}]a_i, b_i[$ *, alors il existerait* $i_0 \in I$ *tel que* $a \in]a_{i_0}, b_{i_0}[\subset J$*, ce qui contredit le fait que* a *est la borne supérieure ou inférieure de* J*.*

1.1.2 Normes sur un espace vectoriel

Définition 1.1.8 *Une norme est une application définie sur un espace vectoriel* V *à valeurs dans* $\mathbb{R}^+$*, notée* $\|.\|_V$*, et satisfaisant les trois propriétés suivantes :*

1.

$$\forall u \in V, \|u\|_V = 0 \Longleftrightarrow u = 0_{V,},$$

2.

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall u \in V, \|\lambda u\|_V = |\lambda| \, \|u\|_V \, ,$$

3.

$$\forall u, w \in V, \|u + w\|_V \leq \|u\|_V + \|w\|_V \, ,$$

Quelques Normes usuelles :

a. **Norme 1:**

-Sur l'espace des fonctions continues, soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$,

$$\|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |f(t)| \, dt.$$

-Sur l'espaces de suites, soit u une suite réelle ou complexe,

$$\|u\|_1 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |u_n| \, .$$

-Sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$: soit $X = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\|X\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

b. **Norme 2:**

-Sur l'espace des fonctions continues, soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$,

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 \, dt}.$$

-Sur l'espaces de suites, soit u une suite réelle ou complexe,

$$\|u\|_2 = \sqrt{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |u_n|^2 \, dt}.$$

-Sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$: soit $X = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\|X\|_2 = \sqrt{\sum_{i=0}^{n} |x_i|^2 \, dt}.$$

c. **Norme Sup**:

-Sur l'espace des fonctions continues, soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$,

$$\|f\|_\infty = \sup_t |f(t)| \, .$$

-Sur l'espaces de suites, soit u une suite réelle ou complexe,

$$\|u\|_\infty = \sup_n |u_n| \, .$$

-Sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$: soit $X = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\|X\|_\infty = \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i| \, .$$

d. **Les normes** p:

-Sur l'espace des fonctions continues, soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$,

$$\|f\|_p = (\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^p \, dt)^{1/p}.$$

-Sur l'espaces de suites, soit u une suite réelle ou complexe,

$$\|u\|_p = (\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |u_n|^p \, dt)^{1/p}.$$

-Sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$: soit $X = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\|X\|_p = (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \, dt)^{1/p}.$$

1.1.3 Suite de Cauchy

Définition 1.1.9 *Soit u_n une suite de espace vectoriel V. On dit qu'u_n est une suite de Cauchy si:*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in N, \forall (p,n) \in N^2, (\forall p \geq n_0 \;\; et \; \forall n \geq n_0) \Rightarrow \|u_p - u_n\|_V \leq \varepsilon).$$

Exemples 1.1.10 *1. La suite géométrique (k^n), pour $0 < k < 1$, est une suite de Cauchy dans $[0,1]$.*

On a, pour $p > n > 0$,

$$|k^p - k^n| = k^n \left|k^{p-n} - 1\right| < k^n. \text{ Donc, en prenant } n_0 = \left[\frac{\ln \varepsilon}{\ln k}\right] + 1 \text{ on a:}$$

$$p > n \geq n_0 \Rightarrow |k^p - k^n| < \varepsilon.$$

2. La suite $(\ln n)_{n\geq 1}$ n'est pas une suite de Cauchy

On a, pour $p > n > 0$,

$$0 < \ln p - \ln n, \;\; \text{donc si } p = 2n \text{ on a } \ln p - \ln n = \ln 2.$$

Donc, pour $\varepsilon = \ln 2$, et pour tout entier n_0 entier positif, il existe des entiers $p = 2n$ et n supérieurs à n_0 tels que

$$\ln p - \ln n = \ln 2.$$

Lemme 1.1.11 *Soit (u_n) une suite de Cauchy dans un espace normé $(V, \|.\|_V)$; si elle admet une sous suite (u_{nk}) convergente vers u, alors la suite (u_n) est aussi convergente vers le même élément u.*

Preuve.

Soit (u_n) une suite de Cauchy dans V, c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in N, \forall (p,n) \in N^2, (\forall p \geq n_0 \text{ et } \forall n \geq n_0) \Rightarrow \|u_p - u_n\|_V \leq \varepsilon).$$

En particulier pour $n = nk$ tel que $nk \geq n_0$ on a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in N, \forall (p,n) \in N^2 (\forall p \geq n_0 \text{ et } \forall n \geq n_0 \Rightarrow \|u_p - u_{nk}\|_V \leq \varepsilon).$$

$$\lim_{nk \to \infty} \|u_p - u_{nk}\|_V = \|u_p - u\|_V \leq \varepsilon.$$

D'où la convergence de la suite (u_n) vers u. □

Proposition 1.1.12 *Toute suite convergente est de Cauchy.*

Preuve. Soit (u_n) une suite convergente dont on note l la limite. On écrit l'inégalité :

$$|u_p - u_n| \leq |u_p - l| + |l - u_n|\,.$$

Pour tout $\varepsilon \geq 0$, il existe un entier n_0, tel que les inégalités $p \geq n_0$ et $n \geq n_0$ entraînent :

$$|u_p - l| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ et } |u_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ d'où } |u_p - u_n| < \varepsilon.$$

□

Proposition 1.1.13 *Toute suite de Cauchy est bornée.*

Preuve. Soit (u_n) une suite de Cauchy dans V, c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in N, \forall (p,n) \in N^2, (\forall p \geq n_0 \text{ et } \forall n \geq n_0 \Rightarrow \|u_p - u_n\|_V \leq \varepsilon).$$

soit $\varepsilon = 1$, alors $\exists n_0 \in N, \forall (p,n) \in N^2, (\forall p \geq n_0$ et $\forall n \geq n_0 \Rightarrow \|u_p - u_n\|_V \leq 1$. en particulier on a pour $n \geq n_0$, $\|u_n - u_{n_0}\|_V \leq 1$, et on posant $M = \max_{k \leq n_0} \|u_k - u_{n_0}\|_V$:

$$\forall n \in N, \|u_n - u_{n_0}\|_V \leq \max\{M, 1\}.$$

alors u_n est bornée.

mais la réciprouque est fausse. □

1.1.4 Espace complet

Définition 1.1.14 *Un espace vectoriel normé est dit complet, si toute suite de Cauchy (u_n) dans V est une suite convergente dans V.*

Exemples 1.1.15

1. *$\mathbb{R}^N$ et $\mathbb{C}^N$ sont complets.*
2. *$(\mathbb{Q}, |.|)$ n'est pas complet.*
3. *$C([0,1])$ muni de la norme $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\, dt$ n'est pas complet.*

Définition 1.1.16 (Espace de Banach) *Un espace de Banach est un espace vectoriel (réel ou complexe) normé complet.*

Exemple 1.1.17 *$C([0,1])$ muni de la norme de la convergence uniforme*

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|$$

est un espace de Banach.

Lorsque $(f_n)_{n \in N}$ converge vers f pour $\|.\|_\infty$, on dit que $(f_n)_{n \in N}$ converge uniformément vers f.

On a donc

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in N, \text{ tel que } \forall n \geq n_0, \forall x \in [0,1], |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Corollaire 1.1.18 *Tout espace vectoriel normé de dimension finie est un espace de Banach.*

Preuve. Soit (u_n) une suite de Cauchy dans un espace vectoriel normée V , donc cette suite est bornée (car toute suite de Cauchy est bornée). Comme V est un espace de dimension finie, alors on peut extraire une sous suite (u_{n_k}) convergente vers u, donc V est un espace vectoriel normée complet. $\square$

Corollaire 1.1.19 *Soit w un sous espace vectoriel de dimension finie d'un espace normée V alors w est complet dans V.*

Chapitre 2

Sur la théorie de la mesure

2.0.5 $\sigma-$algèbre ou tribu

Soit E un ensemble quelconque. Une famille M de $\mathcal{P}(E)$ est appelée une Tribu sur E (ou une $\sigma-$algèbre), si elle vérifie les trois axiomes suivantes:

1. $E \in M$.

2. si $A \in M \Rightarrow A^c \in M$ (stabilité par passage au complémentaire).

3. Si $A_n \in M, \forall n \in N \Rightarrow \cup_{n \in N} A_n \in M$ (stabilité par union dénombrable).

Exemples 2.0.20 *1. $\{\phi, E\}$ est appelée tribu grossière, c'est la plus petite des tribus sur E.*

2. L'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E, est connue sous le nom de tribu discrète (c'est la plus grande des tribus).

3. L'ensemble $M = \{\emptyset, A, A^c, E\}$ est une tribu.

4. *Soit $E = \{a, b, c\}$ un ensemble formé de trois points distincts. Alors les classes des parties de E définies par $T_a = \{\phi, \{a\}, \{b, c\}, E\}, T_b = \{\phi, \{b\}, \{a, c\}, E\}, T_c = \{\phi, \{c\}, \{a, b\}, E\}$, sont des tribus.*

5. *L'ensemble $M = \{A \subseteq \mathbb{R},\ A$ dénombrable ou A^c dénombrable$\}$, est une tribu sur $\mathbb{R}$.*

6. *L'ensemble $M = \{A \in P(E),\ A$ ou A^c fini$\}$ n'est pas une tribu.*

Proposition 2.0.21 1. *Toute intersection quelconque de tribus est une tribu.*

2. *Une réunion finie de tribus n'est pas forcément une tribu.*

Preuve.

1. Soit $I \subset \mathbb{N}$, et $(A_i)_{i\in I}$ une famille de tribus. Montrons que $\cap_{i\in I} A_i$ est une tribu:

a) $\forall i \in I, E \in A_i$ donc $E \in \cap_{i\in I} A_i$,

b) soit $A \in \cap_{i\in I} A_i$. Alors $\forall i \in I,\ A \in A_i$ donc $\forall i \in I, A^c \in A$, et finalement $A^c \in \cap_{i\in I} A_i$.

c) soit $(A_n)_{n\in N}$ une famille d'éléments de $\cap_{i\in I} A_i$. Alors $\forall n \in N, \forall i \in I, A_n \in A_i$,

soit $\forall i \in I,\ \cup_{n\in N} A_n \in A_i$ et $\cup_{n\in N} A_n \in \cap_{i\in I} A_i$.

2. Soit $E = \{a, b, c\}$. et soit $A_1 = \{\phi, \{a\}, \{b, c\}, E\}$, et $A_2 = \{\phi, \{b\}, \{a, c\}, E\}$ sont des tribus. Mais

$$A_1 \cup A_2 = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, E\},$$

n'est pas une tribu, car

$$\{a, b\} = \{a\} \cup \{b\} \notin A_1 \cup A_2.$$

$\square$

Définition 2.0.22 (Espace mesurable) *Le couple (E, M) où E est un ensemble muni d'une tribu $M \subset \mathcal{P}(E)$ est appelé espace mesurable.*

Définition 2.0.23 (Tribu engendrée) *Soit $M \subset \mathcal{P}(E)$. L'intersection de toutes les tribus contenant M est une tribu appelée tribu engendrée par M et notée $\sigma(M)$. C'est la plus petite tribu contenant M.*

Exemple 2.0.24 *soit $E = \{1, 2, 3, 4\}$,alors l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des partie de E est:*

$$\mathcal{P}(E) = \{\phi, E, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\},$$

$$\{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 3, 4\}\}.$$

et soit

$$M = \{\{1\}, \{1, 2\}\} \subset \mathcal{P}(E).$$

la tribu engendrée par M est

$$\sigma(M) = \{\phi, E, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{2, 3, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 3, 4\}\}.$$

Propriétés 1 *1. On a*

$$\sigma(\sigma(M)) = \sigma(M).$$

2. On a

$$M_1 \subset M_2 \Rightarrow \sigma(M_1) \subset \sigma(M_2).$$

3. La tribu engendrée est l'intersection de toutes les tribus contenant M

$$\sigma(M) = T, \; ou \; T = \cap_{M \in T_i} T_i \; tribu.$$

Définition 2.0.25 (La tribu borélienne) *Soit E un espace topologique. La tribu engendrée par les ouverts de E s'appelle la tribu borélienne, notée $B(E)$. si $E = \mathbb{R}$, Les éléments de $B(\mathbb{R})$ sont appelés les boréliens de $\mathbb{R}$.*

Propriétés 2 *La tribu borélienne B est aussi engendrée par:*

- les ouverts de $\mathbb{R}$;
- les fermés de $\mathbb{R}$;
- les intervalles de type $\{]-\infty, x], x \in \mathbb{R}\}$;
- les intervalles de type $\{]-\infty, q], q \in \mathbb{Q}\}$.

Preuve.

FIGURE – Illustration de l'égalité $\sigma(\mathcal{G}) = \mathcal{B}$.

On montre pour chaque cas la double inclusion entre B et la tribu engendrée considérée.

–Notons O l'ensemble des ouverts de $\mathbb{R}$. Puisque les intervalles ouverts sont des cas particuliers d'ouverts, on a clairement

$B \subseteq \sigma(O)$. Réciproquement, puisque tout ouvert O de $\mathbb{R}$ peut s'écrire comme union dénombrable d'intervalles ouverts, O est dans B et puisque B est une tribu, on a $\sigma(O) \subseteq B$.

– Notons F l'ensemble des fermés de $\mathbb{R}$. Un fermé est le complémentaire d'un ouvert, or une tribu est stable par passage au complémentaire. Donc :

$$\sigma(F) = \sigma(O) = B.$$

– Notons G l'ensemble des intervalles de la forme $]-\infty, x]$. On a (voir le figure ci-dessus à gauche) :

$$]-\infty, x] = \cap_{n=1}^{+\infty} \left]-\infty, x + \frac{1}{n}\right[\Rightarrow]-\infty, x] \in B,$$

et par suite $\sigma(G) \subseteq B$. Réciproquement, montrons que tout intervalle ouvert $]a, b[$ appartient à la tribu engendrée par les intervalles de la forme $]-\infty, x]$. Or, si $-\infty < a \leq b < +\infty$, on peut écrire (voir le figure à droite) :

$$]a, b[=]-\infty, b[\cap]-\infty, a]^c = (\cup_{n=1}^{+\infty}]-\infty, b - \frac{1}{n}])\cap]-\infty, a]^c,$$

donc $]a, b[\in B$. Si $a = -\infty$ ou $b = +\infty$, le raisonnement est le même. Ainsi on a $B \subseteq \sigma(G)$.

Vu le point précédent, il suffit maintenant de montrer que tout intervalle de type $]-\infty, x]$, avec

$x \in \mathbb{R}$, appartient à la tribu $\sigma(Q)$ engendrée par les intervalles de type $]-\infty, q]$, avec $q \in \mathbb{Q}$.

Soit donc x un réel : par densité de Q dans $\mathbb{R}$, il existe une suite décroissante (q_n) de rationnels de limite x. On a donc:

$$]-\infty, x] = \cap_{n=1}^{+\infty}]-\infty, q_n] \Rightarrow]-\infty, x] \in \sigma(Q),$$

$\square$

Remarque 2.0.26 *Par définition, les boréliens typiques sont les ouverts, les fermés.*

La tribu borélienne $B(\mathbb{R})$ contient aussi les singletons $\{a\}$, les ensembles dénombrables, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$.

2.0.6 Notion de mesure

Définition 2.0.27 *Soit (E, M) un espace mesurable. On appelle mesure positive sur (E, M) toute application μ de E dans $[0; +\infty]$ vérifiant les deux axiomes suivants:*

1. $\mu(\phi) = 0$.

2. pour toute suite (A_n) d'éléments de M deux à deux disjoints, on a: $\mu(U_n A_n) = \sum_n \mu(A_n)$ (propriété de $\sigma-$additivité).

-Une mesure positive μ est dite finie si $\mu(E) < \infty$.

-Une mesure μ est dite $\sigma-$finie sur (E, M), si E est réunion dénombrable d'ensembles de mesure finie. C'est-à-dire s'il existe une suite $(A_n)_N$ d'éléments de E telle que $E = U_n A_n$ et, pour tout $n \in N$, $\mu(A_n) < \infty$.

-On appelle mesure de probabilité (ou simplement probabilité) toute mesure vérifiant:

$$\mu(E) = 1.$$

-L'espace (E, M, μ) est appelé espace mesuré.

Exemples 2.0.28 *1. Mesure de comptage sur un ensemble E*

Sur $(E, \mathcal{P}(E))$, on définit la mesure de comptage $\mu(A), A \subset E$ par:

$$\mu(A) = \begin{cases} card(A) \ si \ A \ fini \\ \infty \qquad sinon. \end{cases}$$

Cette mesure est surtout utilisée sur des ensembles "discrets" ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}^d$,...)

2. Mesure de Dirac en un point

Soit (E, M) un espace mesurable, avec $E \neq \emptyset$ et soit $x \in E$. On définit $\mu : M \to [0, +\infty]$ par

$$\mu(A) = 1_A(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \in A \\ 0 & sinon \end{cases}, A \in M.$$

On note souvent $\mu = \delta_x$.

Proposition 2.0.29 *Soit (E, M, μ) un espace mesuré alors:*

1. Soit $A, B \in M$, si $A \subset B$ alors

$$\mu(A) \leqslant \mu(B).$$

2. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M$ alors

$$\mu(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).$$

3. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M$ telle que $A_n \subset A_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ alors

$$\mu(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).$$

4. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M$ telle que $A_{n+1} \subset A_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ telle que $\mu(A_{n_0}) < +\infty$ alors

$$\mu(\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).$$

5.

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$$

pour tout $A, B \in M$

Preuve. Montrons(1)

soit $A, B \in M$ on a $A \subset B \Rightarrow B = (B/A) \cup A$ alors $\mu(B) = \mu(B/A) + \mu(A) \geq \mu(A)$ Car $\mu(B/A) \geq 0$

Montrons(2)

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M$ on veut montrer que $\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$ on pose $B_0 = A_0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_n = A_n/\bigcup_{i=0}^{n-1} B_i$, par récurrence sur n on montre que $B_n \in M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ on remarqant que $n > 1$, $B_n = A_n \cap (\cap_{i=1}^{n-1} B_i^c)$

la construction des B_n assure que $B_n \cap B_m = \emptyset$ pour tout $m \neq n$ et $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \cup_{n\in\mathbb{N}} B_n$, pour vérifier cette dernière propriété on remarquant que $B_n \subset A_n$ donc $\cup_{n\in\mathbb{N}} B_n \subset \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, puis si $x \in A_n$ et $x \notin \bigcup_{i=0}^{n-1} B_i$ on a alors $x \in (A_n) \bigcap (\bigcap_{i=0}^{n-1} B_i^c) = B_n$.Ceci prouve que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$ finalement $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$ alors $B_n \subset M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On utilise maintenant la σ additivité de μ et la monotonie de μ (car $B_n \subset A_n$) pour ecrire

$$\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(B_n) \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$$

donc

$$\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$$

Montrons (3):

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M$,telle que $(A_n) \subset (A_{n+1})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ montrons que

$$\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}}(\mu(A_n)).$$

par monotonie de μ,on a $\mu(A_n) \leq \mu(A_{n+1})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc

$$\lim_{n\to+\infty} \mu(A_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}}(\mu(A_n)).$$

On pose $A=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n$ et on définit la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $B_0=A_0$ et $B_n=A_n\ /A_{n-1}$ pour tout $n\geq 1,(A_{n-1}\subset A_n)$.

On a $A=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}B_n$ alors $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset M$,et $B_n\cap B_m=\emptyset$ si $n\neq m$ on utilise maintenant la $\sigma-$additivité de μ pour ecrire:

$$\mu(A)=\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n)=\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}B_n)=\sum_{n\in\mathbb{N}}\mu(B_n)=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\mu(B_k)$$

Comme $A_n=\bigcup_{k=0}^{n}B_k$, d'après la $\sigma-$additivité de μ on a $\mu(A_n)=\sum_{k=0}^{n}\mu(B_k)$ alors $\mu(A)=\lim_{n\to+\infty}\mu(A_n)$ donc

$$\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n)=\lim_{n\to+\infty}\mu(A_n)=\sup_{n\in\mathbb{N}}(\mu(A_n)).$$

Montrons(4)

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset M$, telle que $(A_{n+1})\subset(A_n\ )$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ et telle qu'il existe $n_0\in\mathbb{N}$, $\mu(A_{n_0})<\infty$ montrons que

$$\mu(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}A_n)=\lim_{n\to+\infty}\mu(A_n)=\inf_{n\in\mathbb{N}}(\mu(A_n))$$

par la monotonie de μ on a $\mu(A_{n+1})\leq\mu(A_n\ )$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ et donc

$$\lim_{n\to+\infty}\mu(A_n)=\inf_{n\in\mathbb{N}}(\mu(A_n))$$

et par la monotonie de μ on a $\mu(A)\leq\mu(A_n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ avec $A=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}A_n$. Comme $\mu(A_{n_0})<\infty$ alors $\mu(A_n)<\infty$ pour tout $n\geq n_0$ et $\mu(A)<\infty$

On pose $B_n\ =A_{n_0}/A_n=A_{n_0}\cap A_n^c\in M$ pour tout $n\geq n_0$ la suite $(B_n)_{n\geq n_0}$ est croissante $(B_n\subset B_{n+1})$ pour tout $n\geq n_0$ et $B=\bigcup_{n\geq n_0}B_n=\bigcup_{n\geq n_0}A_{n_0}/A_n=A_{n_0}\bigcap(\bigcap_{n\geq n_0}A_n)^c=A_{n_0}/\bigcap_{n\geq n_0}A_n$ alors $B=A_{n_0}/A$ la continuité croissante donne

$$\mu(A_{n_0}/A)=\mu(B)=\lim_{n\to+\infty}\mu(B_n)=\lim_{n\to+\infty}\mu(A_{n_0}/A_n)...(1)$$

Comme $A \subset A_{n_0}$ on a $\mu(A_{n_0}/A) = \mu(A_{n_0}) - \mu(A)$ (car $\mu(A) \leq \mu(A_{n_0}) < \infty$) comme $A_n \subset A_{n_0}$ on a et comme $A_n \subset A_{n_0}$ pour $n \geq n_0$ on a $\mu(A_{n_0}/A_n) = \mu(A_{n_0}) - \mu(A_n)$ (car $\mu(A_n) \leq \mu(A_{n_0}) < \infty$) et d'aprés (1) on deduire $\mu(A) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n)$ donc

$$\mu(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n) = \inf_{n\in\mathbb{N}}(\mu(A_n))$$

Montrons(5)

On a $A\bigcup B = (A/B)\bigcup(B/A)\bigcup(A \cap B)$ et comme $(A/B), (B/A), (A \cap B)$ sont deux à deux disjoins donc

$$\mu(A\bigcup B) = \mu(A/B) + \mu(B/A) + \mu(A \cap B)...(1)$$

Et d'autre par on a $\mu(A) = \mu(A/B)+\mu(A\cap B)$ implique que $\mu(A/B) = \mu(A)-\mu(A\cap B)...(2)$ et $\mu(B) = \mu(B/A) + \mu(A \cap B)$ implique $\mu(B/A) = \mu(B) - \mu(A \cap B)...(3)$

Remplaçant (2) et (3) dans (1) on trouve

$$\mu(A\bigcup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$$

$\square$

2.0.7 Application mesurable

Définition 2.0.30 *Soient (E_1, M_1) et (E_2, M_2) deux espaces mesurables. Une application f : $E_1 \to E_2$ est une application mesurable si:*

$$\forall A \in M_2 \Rightarrow f^{-1}(A) \in M_1,$$

Autrement dit :

$$f^{-1}(M_2) \subset M_1.$$

Cas particulier. Si E_1 et E_2 sont deux espaces topologiques munis de leurs tribus boréliennes, une application $f : E_1 \to E_2$ mesurable est appelée borélienne.

Propriétés 3 *-Soit f et g deux fonctions mesurables. Alors: les fonctions $|f|$, $f+g$, fg, $f \circ g$,$max(f,g)$ et $min(f,g)$ sont mesurables, de même que f/g si celle-ci est bien définie.*

-Soit f_n une suite de fonctions mesurables. Alors les fonctions $inf_{n\in N} f_n(x)$ et $sup_{n\in N} f_n(x)$ sont mesurables. De plus, si f_n converge simplement vers une fonction f, alors f est mesurable.

-Toute fonction continue est mesurable.

-Soit f et g deux fonctions mesurables, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha f + \beta g$ est mesurable.

-Toute fonction monotone est mesurable,

Exemples 2.0.31 1. *Soit $A \in B(\mathbb{R})$ un borélien: on note χ_A sa fonction caractéristique, soit*

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

χ_A est une fonction mesurable.

2. Les fonctions étagées sont les combinaisons linéaires finies de fonctions caractéristiques mesurables, autrement dit toute fonction étagée e peut s'écrire sous la forme

$$e(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}(x)$$

ou les A_i sont des boréliens de $\mathbb{R}$, et $\alpha_i \geq 0$.

Les fonctions étagées sont mesurables.

2.0.8 Mesure de Lebesgue sur la tribu borélienne

Mesure extérieure

Définition 2.0.32 *Soit E un ensemble. On appelle mesure extérieure sur E toute application $\mu^* : \mathcal{P}(E) \to \overline{\mathbb{R}^+}$ telle que:*

1. $\mu^*(\phi) = 0$.
2. Monotonie: Soit $A, B \in \mathcal{P}(E)$ et $A \subset B$, alors
$$\mu^*(A) \leq \mu^*(B).$$
3. Sous σ additivité Soit $(A_n)_{n\in N} \subset \mathcal{P}(E)$, alors
$$\mu^*(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(A_n).$$

Définition 2.0.33 *Soit E un ensemble, μ^* une mesure extérieure sur E. Une partie B de E sera dite μ^*-mesurable, ou μ^* -régulière, si pour toute partie A de E,*

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \cap B^c).$$

si $E = \mathbb{R}$, alors l'ensemble B est dit mesurable au sens de Lebesgue.

Notation 2.0.34 *La famille des ensembles mesurables au sens de Lebesgue sera notée $L(\mathbb{R})$.*

Exemple 2.0.35 *Un exemple élémentaire est donné par la mesure extérieure μ^* sur $\mathbb{N}$ définie par:*

$$\mu^*(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } A \text{ fini,} \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

pour la quelle on a

$$\sum_n \mu^*(\{n\}) = 0 < \mu^*(\cup\{n\}) = \mu^*(\mathbb{N}) = 1.$$

Définition 2.0.36 *Soit $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, on pose:*

$$\lambda^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0, +\infty]$$

$$A \to \lambda^*(A) = \inf\{\sum_{n\in\mathbb{N}}(b_n - a_n), -\infty < a_n \leq b_n < +\infty \; et \; A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}}]a_{n,b_n}[\}.$$

Alors λ^* est une mesure exterieure sur $\mathbb{R}$ en plus $\lambda^*(]a, b[) = b - a$.

Théorème 2.0.37 (Théorème de carathéodory) *Il existe une et seule mesure sur $B(\mathbb{R})$ notée λ et qui s'appelle mesure de Lebesgue sur les boréliens, telle que $\lambda^*(]a, b[) = b - a$.*

$\forall(a, b) \in \mathbb{R}^2$ telle que $-\infty < a \leq b < +\infty$ et aussi : $\lambda = \lambda^*/B(\mathbb{R})$ avec

$$\lambda(A) = \inf\{\sum_{n\in\mathbb{N}}(b_n - a_n), -\infty < a_n \leq b_n < +\infty \; et \; A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}}]a_{n,b_n}[\}$$

$\lambda(A)$ mesure extérieure et λ mesure positive unique.

2.0.9 Intégration des fonctions mesurables positives

Définition 2.0.38 *Soit E un borélien de $\mathbb{R}$, soit $\alpha_i \geq 0$ pour $i = 1$ à N, et soit $A_i \subset E$ des ensembles mesurables de $\mathbb{R}$,*

Les fonctions étagées sont les combinaisons linéaires finies de fonctions caractéristiques mesurables, autrement dit toute fonction étagée e peut s'écrire sous la forme

$$e(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}(x)$$

On dit que f est étagée positive si f est étagée et prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^+$.

On appelle intégrale de Lebesgue de e sur E et on note l'élément de $\overline{\mathbb{R}}^+ = \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ défini par

$$\int_E e(x)d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i).$$

On dit que la fonction e est intégrable si $\int\limits_E e(x)d\mu$ *est fini, ce qu'on note aussi*

$$\int\limits_E e(x)d\mu < +\infty.$$

Notation 2.0.39 *-On notera encore*

$$\int\limits_E ed\mu = \int\limits_{x\in E} e(x)d\mu(x).$$

-On note E^+ l'ensemble des fonctions étagées positives (à valeurs dans $\mathbb{R}^+$).

Proposition 2.0.40

$$\int\limits_E \chi_A d\mu = \mu(A), A \in E, E \text{ un borélien de } \mathbb{R}$$

$$\int (f+g)d\mu = \int fd\mu + \int gd\mu, f, g \in E^+(\textit{additivité})$$

$$\int \alpha fd\mu = \alpha \int fd\mu, \alpha \in \mathbb{R}^+, f \in E^+(\textit{Homogénéité})$$

$$f \leq g \Rightarrow \int fd\mu \leq \int gd\mu, f, g \in E^+(\textit{croissance}).$$

Remarque 2.0.41 *On peut exprimer f et $|f|$ par $f = f^+ - f^-$ et $|f| = f^+ + f^-$ où $f^+ = \sup(f, 0)$ et $f^- = -\min(f, 0)$.*

Définition 2.0.42 *Soit $f \in M, f = f^+ - f^-$, f est (μ)-intégrable si*

$$I(f^+) = \int f^+ d\mu < +\infty, I(f^-) = \int f^- d\mu < +\infty.$$

et alors l'intégrale de f par rapport à μ est le nombre réel (fini) défini par

$$I(f) = \int f d\mu = I(f^+) - I(f^-)$$

Définition 2.0.43 *On désigne par $L^1(E, A, \mu)$ (ou simplement $L^1(\mu)$,L^1) l'ensemble des fonctions μ-intégrables.*

Remarque 2.0.44 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ une fonction mesurable , On dit que f admet une intégrale si l'une au moins des deux intégrales $I(f^+), I(f^-)$ est finie. on note encore cette valeur(possiblement ∞) $\int f d\mu$.*

L'intégrale d'une fonction positive est toujours définie, et vaut éventuellement $+\infty$.

Définition 2.0.45 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ une fonction mesurable positive. L'intégrale(supérieure) de f sur $\mathbb{R}$ est par définition :*

$$\int_{\mathbb{R}} f d\mu = \sup\{\int_{\mathbb{R}} h d\mu,\ h \in E^+,\ \ h \leq f\}.$$

On dit que f est intégrable si

$$\int_{\mathbb{R}} f d\mu < +\infty.$$

On définit de même l'intégrabilité d'une fonction mesurable positive sur un borélien X de $\mathbb{R}$

Remarque 2.0.46 *une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ mesurable et bornée est intégrable au sens de Lebesgue sur $[a, b]$.*

Exemple 2.0.47 *soit la fonction f défini par:*

$$f :]0, 1] \to \mathbb{R}$$

$$x \to 1 + \sin \frac{1}{x}$$

est mesurable (car continue), positive et majorée par 2 sur l'ensemble borné $]0,1]$, donc elle est Lebesgue intégrable sur $]0,1]$, d'intégrale inférieure à 2.

2.0.10 Notion de presque partout

Définition 2.0.48 *Une propriété P est vraie (μ) presque partout (P vraie p.p.) si elle est fausse sur un ensemble de mesure nulle (vraie en dehors d'un ensemble de mesure nulle (négligeable)).*

Exemples 2.0.49

1. *$\chi_Q = 0$ presque partout (p.p). pour la mesure de Borel.*
2. *Une fonction est dite définie presque partout sur $[a;b]$ si elle est définie à tous les points de $[a;b]$ sauf des points formant un ensemble de mesure nulle sur $[a;b]$.*
3. *Soit f et g sont deux fonctions sur E, on dit que $f = g$ μ-p.p. si l'ensemble $\{f \neq g\}$ est est de mesure nulle (négligeable).*
4. *Soit f et g sont deux fonctions sur E, on dit que $f < g$ μ-p.p. si l'ensemble $\{f \geq g\}$ est de mesure nulle (négligeable).*

2.1 Supremum essentiel d'une fonction

Soit (X, M, μ) un espace mesuré, et soit $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ est une fonction mesurable.

On dit qu'un nombre $a \in \overline{\mathbb{R}}$ est essentiellement un majorant de f si $f \leq a$ presque partout: $\mu(f(x) > a) = 0$. Le plus petit majorant essentiel s'appelle le sup essentiel:

Soit $a \in \mathbb{R}$, et on définit l'ensemble M_a par:

$$M_a = \{x : f(x) > a\}$$

ensuite, soit A_0 l'ensemble des réels avec, la mesure de M_a est nulle.

$$A_0 = \{a \in \mathbb{R} : \mu(M_a) = 0\}.$$

Le supremum essentiel de la fonction f (le sup essentielle,la borne supérieure essentielle) est définit comme suite:

$$esssup\ f = \inf A_0.$$

alors

$$ess\ sup_{x \in X}\ f = \inf\{a \in \mathbb{R}/\mu(f(x) > a) = 0\}.$$

si $A_0 = \emptyset$, alors le sup essentiel de f est:

$$esssup\ f = \infty.$$

si $A_0 = \mathbb{R}$.alors le sup essentiel de f est:

$$esssup\ f = -\infty.$$

Exemple 2.1.1 *Soit f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par la formule suivante:*

$$f(x) = \begin{cases} 5 & si\ x = 1, \\ -4 & si\ x = -1, \\ 2 & sinon. \end{cases}$$

alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq 5.$$

donc la borne supérieure de cette fonction (plus grande valeur) est 5, et la borne inférieure (plus petite valeur) est de -4. toute fois, la fonction prend ces valeurs uniquement sur les ensem-

bles $\{1\}$ *et* $\{-1\}$, *respectivement, qui sont de mesure nulle. Partout ailleurs, la fonction prend la valeur* 2. *Ainsi, la borne supérieure essentielle de cette fonction essentielle est deux.*

2.1.1 Espaces $\mathcal{L}^{\infty}$

L'espace $\mathcal{L}^{\infty}(X, A, \mu)$ est défini comme l'espace vectoriel des fonctions μ-essentiellement bornées (c'est-à-dire les fonctions mesurables bornées sur le complémentaire d'un ensemble négligeable"bornées presque partout"):

$$\mathcal{L}^{\infty}(X, \mathbb{C}) = \{f : X \to \mathbb{C}/f \text{ est mesurable et } \|f\|_{\infty} < \infty.\}$$

On définit aussi la norme $\mathcal{L}^{\infty}$ de f par:

$$\|.\|_{\infty} : X \to \overline{\mathbb{R}}^{+}$$

$$f \to \inf(a \in \overline{\mathbb{R}}^{+}, |f| \leq a \text{ p.p.}) = ess\ sup_{x \in X} |f| = \|f\|_{\infty},$$

c'est-à-dire les fonctions bornées sur le complémentaire d'un ensemble négligeable,

Exemple 2.1.2

$$1_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 & si \;\; x \in \mathbb{Q} \\ 0 & sinon \end{cases}$$

la fonction indicatrice de $\mathbb{Q}$, *définie sur* $\mathbb{R}$, *qui vaut* 1 *en chaque nombre rationnel et* 0 *partout ailleurs, est dans* L^{∞} *et coïncide, dans cet espace, avec la fonction constante de valeur nulle, du fait que l'ensemble des rationnels est négligeable.*

Chapitre 3

Absence de solutions

Soit l'intervalle $I = [0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ et soit $\mathbb{C}^2(I, \mathbb{R})$ l'espace de Banach des fonctions continues $x : I \longrightarrow \mathbb{R}$, muni de la norme de convergence uniforme, $\|.\|_\infty$, soient α, η deux réels tels que $\alpha \geqslant 0$ et $\eta \epsilon\, [0, 1]$.

On s'intéresse à l'absenece de solutions de l'équation différentielle du second ordre suivante:

$$x''(t) + (Fx)(t) = 0, t \in I$$

assujeties à des conditions qui seront précisées plus tard. (Fx) est une fonctionnelle, dans la majorité des cas elle prend la forme $(Fx)(t) = q(t)f(x(t))$.

3.1 Absence de solutions d'un PAL à deux points

Dans cette partie nous montrons l'absence de solutions positives du problème suivant:

$$x''(t) + (Fx)(t) = 0, t \in I \tag{3.1}$$

$$x(0) = 0, x'(1) = \alpha x'(0). \tag{3.2}$$

Théorème 3.1.1 *Supposons que F est une fonction définie dans un domaine $D(F)$ de l'espace $\mathbb{C}(I)$ telle que pour chaque $x \in D(F)$, Fx est une fonction Lebesgue mesurable.*

1) Si $\alpha > 1$, alors il n'y a pas de solution positive au problème (3.1) dans $D(F)$ et de telle sorte que $(Fx)(t) \geq 0$, p.p sur I.

2) Si $\alpha \epsilon [0, 1]$, alors il n'y a pas de solution au problème (3.1) dans $D(F)$ et de telle sorte que

$$ess \sup \frac{(Fx)(t)}{x^2(t)} < +\infty. \tag{3.3}$$

Preuve. ('par l'absurde')

1) Supposons que $\alpha > 1$ et soit x une solution positive du problème dans $D(F)$. Considérons un nombre réel $\lambda \neq 0$ en écrivant l'équation (3.1) sous la forme:

$$x''(t) = -(Fx)(t)$$

On ajoute $\lambda x'(t)$ aux deux côtes de l'équation on obtient:

$$x''(t) + \lambda x'(t) = -(Fx)(t) + \lambda x'(t)$$

On multiple les deux cotés de l'équation par $e^{\lambda t}$:

$$e^{\lambda t}(x''(t) + \lambda x'(t)) = (-(Fx)(t) + \lambda x'(t))e^{\lambda t}$$

$$(x'(t)e^{\lambda t})' = e^{\lambda t}(x''(t) + \lambda x'(t)) = (-(Fx)(t) + \lambda x'(t))e^{\lambda t}$$

En intégrant de 0 à t, on obtient

$$\int_0^t (x'(t)e^{\lambda t})' dt = \int_0^t (-(Fx)(t) + \lambda x'(t))e^{\lambda t} dt$$

$$x'(t)e^{\lambda t} - x'(0)e^{\lambda 0} = \lambda \int_0^t x'(s)e^{\lambda s} ds - \int_0^t (Fx)(s)e^{\lambda s} ds$$

$$x'(t)e^{\lambda t} = x'(0) + \lambda \int_0^t x'(s)e^{\lambda s} ds - \int_0^t (Fx)(s)e^{\lambda s} ds$$

$$x'(t)e^{\lambda t} = x'(0) + \lambda[x(t)e^{\lambda t} - x(0) - \lambda \int_0^t x(s)e^{\lambda s} ds] - \int_0^t (Fx)(s)e^{\lambda s} ds$$

$$x'(t)e^{\lambda t} = x'(0) + \lambda[x(t)e^{\lambda t} - 0 - \lambda \int_0^t x(s)e^{\lambda s} ds] - \int_0^t (Fx)(s)e^{\lambda s} ds$$

$$x'(t)e^{\lambda t} = x'(0) + \lambda x(t)e^{\lambda t} - \lambda^2 \int_0^t x(s)e^{\lambda s} ds - \int_0^t (Fx)(s)e^{\lambda s} ds$$

$$x'(t)e^{\lambda t} = x'(0) + \lambda x(t)e^{\lambda t} - \int_0^t \lambda^2 x(s)e^{\lambda s} + (Fx)(s)e^{\lambda s} ds$$

$$x'(t)e^{\lambda t} = x'(0) + \lambda x(t)e^{\lambda t} - \int_0^t (\lambda^2 x(s) + (Fx)(s))e^{\lambda s} ds$$

$$x'(t)e^{\lambda t} = x'(0) + \lambda x(t)e^{\lambda t} - \int_0^t z(s)e^{\lambda s} ds$$

où

$$z(s) = \lambda^2 x(s) + (Fx)(s).$$

On multiple les deux cotés de l'équation par $e^{-\lambda t}$ on obtient:

$$x'(t) = x'(0)e^{-\lambda t} + \lambda x(t) - \int_0^t z(s)e^{\lambda s}e^{-\lambda t} ds$$

$$x'(t) - \lambda x(t) = x'(0)e^{-\lambda t} - \int_0^t z(s)e^{\lambda s}e^{-\lambda t} ds$$

donc

$$x'(t) - \lambda x(t) = x'(0)e^{-\lambda t} - \int_0^t z(s)e^{-\lambda(t-s)} ds. \tag{3.4}$$

En multipliant les deux côtés par $e^{-\lambda t}$, nous obtenons

$$[x'(t) - \lambda x(t)]e^{-\lambda t} = [x'(0)e^{-\lambda t} - \int_0^t z(s)e^{-\lambda(t-s)}ds]e^{-\lambda t}$$

$$(x(t)e^{-\lambda t})' = [x'(t) - \lambda x(t)]e^{-\lambda t} = x'(0)e^{-2\lambda t} - \int_0^t z(s)e^{-\lambda(2t-s)}ds.$$

En intégrant les deux côtés de 0 à t, nous obtenons

$$\int_0^t (x(r)e^{-\lambda r})'dr = \int_0^t (x'(0)e^{-2\lambda r} - \int_0^r z(s)e^{-\lambda(2r-s)}ds)dr.$$

$$x(t)e^{-\lambda t} - x(0)e^{\lambda 0} = x'(0)\int_0^t e^{-2\lambda r}dr - \int_0^t \int_0^r z(s)e^{-\lambda(2r-s)}dsdr.$$

et pour

$$0 \leq s \leq r \leq t \Rightarrow \begin{cases} s \leq r \leq t \\ 0 \leq s \leq t \end{cases}$$

$$x(t)e^{-\lambda t} = \frac{x'(0)}{2\lambda}(1 - 2e^{-2\lambda t}) - \int_0^t z(s)e^{\lambda s}\int_s^t e^{-2\lambda r}drds.$$

$$x(t)e^{-\lambda t} = \frac{x'(0)}{2\lambda}(1 - 2e^{-2\lambda t}) - \frac{1}{2\lambda}\int_0^t z(s)e^{\lambda s}(e^{-2\lambda s} - e^{-2\lambda t})ds.$$

donc

$$x(t) = \frac{x'(0)}{2\lambda}\frac{(1 - e^{-2\lambda t})}{e^{-\lambda t}} - \frac{1}{2\lambda}\int_0^t z(s)\frac{e^{-\lambda s} - e^{-2\lambda t+\lambda s}}{e^{-\lambda t}}ds$$

$$x(t) = \frac{x'(0)}{\lambda}\frac{(1 - e^{-2\lambda t})}{2e^{-\lambda t}} - \frac{1}{2\lambda}\int_0^t z(s)\frac{e^{-\lambda s} - e^{-2\lambda t+\lambda s}}{e^{-\lambda t}} \times \frac{e^{\lambda s}}{e^{\lambda s}}ds$$

$$x(t) = \frac{x'(0)}{\lambda}\frac{(1 - e^{-2\lambda t})}{2e^{-\lambda t}} - \frac{1}{\lambda}\int_0^t z(s)\frac{1 - e^{-2\lambda(t-s)}}{2e^{-\lambda(t-s)}}ds$$

en prenant en compte les conditions aux limites (3.2), nous obtenons

$$x(t) = \frac{x'(0)}{\lambda}sinh(\lambda t) - \frac{1}{\lambda}\int_0^t z(s)sinh(\lambda(t-s))ds \tag{3.5}$$

(3.2) $\Longrightarrow x(0)=0, x'(1)=\alpha x'(0)$.

(3.4) $\Longrightarrow x'(t)-\lambda x(t)=x'(0)e^{-\lambda t}-\int_0^t z(s)e^{-\lambda(t-s)}ds$

et pour $t=1$ et par la condition (3.2) nous obtenons:

$$x'(1)-\lambda x(1)=x'(0)e^{-\lambda}-\int_0^1 z(s)e^{-\lambda(1-s)}ds.$$

$$\alpha x'(0)-\lambda x(1)=x'(0)e^{-\lambda}-\int_0^1 z(s)e^{-\lambda(1-s)}ds.$$

$$\alpha x'(0)=x'(1)=\lambda x(1)+x'(0)e^{-\lambda}-\int_0^1 z(s)e^{-\lambda(1-s)}ds$$

$$\alpha x'(0)=\lambda(\frac{x'(0)}{\lambda}sinh(\lambda)-\frac{1}{\lambda}\int_0^1 z(s)sinh(\lambda(1-s))ds)+x'(0)e^{-\lambda}-\int_0^1 z(s)e^{-\lambda(1-s)}ds$$

$$\alpha x'(0)=x'(0)(sinh(\lambda)+e^{-\lambda})-\int_0^1 z(s)(sinh(\lambda(1-s)+e^{-\lambda(1-s)})ds$$

$$\alpha x'(0)=x'(0)(\frac{e^{\lambda}-e^{-\lambda}}{2}+e^{-\lambda})-\int_0^1 z(s)(\frac{e^{\lambda(1-s)}-e^{-\lambda(1-s)}}{2}+e^{-\lambda(1-s)})ds$$

$$\alpha x'(0)=x'(0)\frac{e^{\lambda}+e^{-\lambda}}{2}-\int_0^1 z(s)\frac{e^{\lambda(1-s)}+e^{-\lambda(1-s)}}{2}ds$$

$$\alpha x'(0)=x'(0)cosh(\lambda)-\int_0^1 z(s)cosh(\lambda(1-s))ds$$

donc la solution x doit satisfaire

$$x'(0)(cosh(\lambda)-\alpha)=\int_0^1 z(s)cosh(\lambda(1-s))ds \tag{3.6}$$

pour tous $\lambda\neq 0$.

Notez que le côté droit est une quantité positive

$$\int_0^1 z(s)cosh(\lambda(1-s))ds\geq 0,$$

car

$$z(s)cosh(\lambda(1-s))=(\lambda^2x(s)+(Fx)(s))cosh(\lambda(1-s))$$

$x(s) > 0$, $(Fx)(s) \geq 0$, et $cosh(\lambda(1-s)) \geq 0$, alors $(\lambda^2 x(s) + (Fx)(s)) cosh(\lambda(1-s)) \geq 0$.

tandis que le côté gauche $\{x'(0)(cosh(\lambda) - \alpha)\}$ dépend de λ. Par conséquent, si $x'(0) > 0$, choisir λ tel que $cosh(\lambda) < \alpha$,et si $x'(0) < 0$, choisir λ tel que $cosh(\lambda) > \alpha$, contradiction . On voit la contradiction dans ce qui suit

Le premier cas : soit $x'(0) > 0$ et $cosh(\lambda) < \alpha$ alors

$$\cosh(\lambda) - \alpha < 0$$

et pour $x'(0) > 0$ on a

$$x'(0)(cosh(\lambda) - \alpha) < 0$$

Le deuxième cas : si $x'(0) < 0$, choisir λ tel que $cosh(\lambda) > \alpha$,

$$\cosh(\lambda) - \alpha > 0$$

ce qui implique que

$$x'(0)(cosh(\lambda) - \alpha) < 0$$

La même chose, nous obtenons une contradiction.

1. soit $\alpha \epsilon [0, 1]$. Soit x une solution qui satisfait la relation (3.3), alors on peut choisir λ négatif suffisamment grand tel que

$$z(s) = (Fx)(t) + \lambda x^2 < 0$$

et on a

$$cosh(\lambda(1-s)) > 0$$

alors le côté droit de (3.6) est:

$$-\int_0^1 -z(s) cosh(\lambda(1-s)) ds < 0$$

pour le côté gauche nous obtenons:

$$\cosh(\lambda) - \alpha > 0$$

car on a

$$\begin{cases} \cosh(\lambda) > 1 \\ \alpha < 1 \Rightarrow -\alpha > -1 \end{cases}$$

$\Rightarrow \cosh(\lambda) - \alpha > 0.$

Ce impliquent que $x'(0) < 0$,

$$x'(0)(\cosh(\lambda) - \alpha) < 0$$

à cause du fait que $x(0) = 0$, la solution x ne peut pas être positive. La preuve est terminée.

$\square$

Dans la suite on suppose que $0 < \alpha < 1$ et que la fonction F satisfait la condition (C) suivante:

(C) **La fonction** F **est définie dans le domaine** $D(F)$ **de** $C(I)$ **tel que pour tout** $x \in D(F)$ **la quantité** $Fx : I \longrightarrow \mathbb{R}$ **est un élément de** $\mathcal{L}^{\infty}$.

Pour chaque $\rho > 0$ **on désigne par** A_{ρ}, **l'ensemble des fonctions** $x \in D(F)$ **satisfaisant l'inégalité**

$$\|Fx\|_{\infty} < \rho\|x\|$$

Théorème 3.1.2 *Supposons que* F *satisfait la condition* (C). *Alors , il n'y a aucun élément* $x \in A_{\rho_1}$ *, solution au problème* $(3.1) - (3.2)$ *tel que* $\rho_1 = 1 - \alpha$.

Preuve. On suppose qu'il existe une solution qui satisfait aux exigences du théorème et prendre ρ' tel que $\rho' < \rho_1$ et $\|Fx\|_{\infty} < \rho'\|x\|$.

Comme $1-\alpha$ est le maximum de la fonction

$$\psi(\lambda)=\frac{cosh(\lambda)-sinh^2(\lambda)-\alpha}{sinh^2(\lambda)}\lambda^2,\ \lambda\geqslant 0$$

Nous pouvons choisir $\lambda\geqslant 0$ tel que

$$\rho'<\psi(\lambda). \tag{3.7}$$

Comme dans le théorème (3.1.1), on obtient la relation (3.5). En utilisant la relation (3.4) et la condition aux limites (3.2), nous obtenons

$$\alpha x'(0)=x'(1)=\lambda x(1)+x'(0)e^{-\lambda}-\int_0^1 z(s)e^{-\lambda(1-s)}ds$$

$$\alpha x'(0)=x'(0)cosh(\lambda)-\int_0^1 z(s)cosh(\lambda(1-s))ds$$

$$x'(0)(\alpha-cosh(\lambda))=-\int_0^1 z(s)cosh(\lambda(1-s))ds$$

donc

$$x'(0)=\frac{1}{cosh(\lambda)-\alpha}\int_0^1 z(s)cosh(\lambda(1-s))ds.$$

En effet par la relation (3.5), on a

$$x(t)=\frac{sinh(\lambda t)}{\lambda[cosh(\lambda)-\alpha]}\int_0^1 z(s)cosh(\lambda(1-s))ds-\frac{1}{\lambda}\int_0^t z(s)sinh(\lambda(t-s))ds \tag{3.8}$$

Supposons que $\|x\|=x(t_0)$, pour un certain $t_0\in]0,1]$. Divisant les deux côtés de (3.8) par $x(t_0)$, nous obtenons:

$$\frac{x(t)}{\parallel x\parallel}=\frac{1}{\parallel x\parallel}\left(\frac{sinh(\lambda t)}{\lambda[cosh(\lambda)-\alpha]}\int_0^1 z(s)cosh(\lambda(1-s))ds-\frac{1}{\lambda}\int_0^t z(s)sinh(\lambda(t-s))ds\right)$$

$$\frac{x(t)}{\parallel x \parallel} = \frac{sinh(\lambda t)}{\parallel x \parallel \lambda[cosh(\lambda) - \alpha]} \int_0^1 z(s)cosh(\lambda(1-s))ds - \frac{1}{\parallel x \parallel \lambda} \int_0^t z(s)sinh(\lambda(t-s))ds)$$

posons:

$$a = \frac{x(t)}{\parallel x \parallel}, b = \frac{sinh(\lambda t)}{\parallel x \parallel \lambda[cosh(\lambda) - \alpha]} \int_0^1 z(s)cosh(\lambda(1-s))ds,$$
$$c = \frac{1}{\parallel x \parallel \lambda} \int_0^t z(s)sinh(\lambda(t-s))ds.$$

On montre que b et c sont positifs

$$b = \frac{sinh(\lambda t)}{\parallel x \parallel \lambda[cosh(\lambda) - \alpha]} \int_0^1 z(s)cosh(\lambda(1-s))ds \geq 0$$

et

$$c = \frac{1}{\parallel x \parallel \lambda} \int_0^t z(s)sinh(\lambda(t-s))ds) \geq 0,$$

car($z(s) \geq 0$,et $0 \leq s \leq t \Rightarrow t - s \geq 0$, et pour $\lambda \geq 0$

alors

$$sinh(\lambda(t-s)) \geq 0,$$

donc

$$\int_0^t z(s)sinh(\lambda(t-s))ds \geq 0$$

en plus $\parallel x \parallel \geq 0 \Rightarrow c \geq 0$).

D'autre part on a $a = b - c, \forall b, c \geq 0, \Rightarrow a \leq b,$

donc

$$\frac{x(t)}{\| x \|} \leq \frac{sinh(\lambda t)}{\| x \| \lambda[cosh(\lambda) - \alpha]} \int_0^1 z(s)cosh(\lambda(1-s))ds$$
$$\leq \frac{1}{\lambda[cosh(\lambda) - \alpha]} \int_0^1 \frac{sinh(\lambda t)}{\| x \|} z(s)cosh(\lambda(1-s))ds$$
$$\Longrightarrow \frac{x(t)}{\| x \|}\lambda[cosh(\lambda) - \alpha] \leq \int_0^1 \frac{sinh(\lambda t)}{\| x \|} z(s)cosh(\lambda(1-s))ds$$

et pour $t = t_0$ on obtient :

$$\frac{x(t_0)}{\| x \|}\lambda[\cosh(\lambda) - \alpha] \leq \int_0^1 \frac{\sinh(\lambda t_0)}{\| x \|} z(s)\cosh(\lambda(1-s))ds$$

$$\lambda[\cosh(\lambda) - \alpha] \leq \sinh(\lambda t_0) \int_0^1 \frac{z(s)}{\| x \|} \cosh(\lambda(1-s))ds$$

et on a λ positive et $t_0 \in]0,1]$, alors

$$\lambda t_0 \leq \lambda \Rightarrow \sinh(\lambda t_0) \leq \sinh(\lambda)$$

(car sinh est une fonction croissante)

On obtient finalement

$$\lambda[cosh(\lambda) - \alpha] \leq sinh(\lambda) \int_0^1 [\lambda^2 \frac{x(s)}{\| x \|} + \frac{|(Fx)(s)|}{\| x \|}]cosh(\lambda(1-s))ds.$$

$$\lambda[cosh(\lambda) - \alpha] \leq sinh(\lambda) \int_0^1 [\lambda^2 \frac{x(s)}{\| x \|} + \frac{\|(Fx)\|_\infty}{\| x \|}]cosh(\lambda(1-s))ds.$$

$$\lambda[cosh(\lambda) - \alpha] \leq sinh(\lambda) \int_0^1 \left(\lambda^2 \frac{x(s)}{\| x \|} + \frac{\|(Fx)\|_\infty}{\| x \|}\right) cosh(\lambda(1-s))ds$$

a partir de cette relation, on obtient

$$\lambda(cosh(\lambda) - \alpha) \leq sinh(\lambda) \int_0^1 (\lambda^2 + \rho')cosh(\lambda(1-s))ds$$

$$\lambda(cosh(\lambda) - \alpha) \leq sinh(\lambda)(\lambda^2 + \rho') \int_0^1 cosh(\lambda(1-s))ds$$

$$\lambda(cosh(\lambda)-\alpha) \leq sinh(\lambda)(\lambda^2+\rho')(\frac{1}{\lambda}sinh(\lambda))$$

donc

$$\lambda^2(cosh(\lambda)-\alpha)) < sinh^2(\lambda)[\lambda^2+\rho']$$

ce qui implique que:

$$\lambda^2+\rho' > \frac{\lambda^2(cosh(\lambda)-\alpha))}{sinh^2}$$

$$\rho' > \frac{\lambda^2(cosh(\lambda)-\alpha))}{sinh^2(\lambda)} - \lambda^2$$

$$\rho' > \frac{\lambda^2(cosh(\lambda)-\alpha)) - \lambda^2 sinh^2(\lambda)}{sinh^2(\lambda)}$$

$$\rho' > \frac{\lambda^2(cosh(\lambda)-\alpha - sinh^2(\lambda))}{sinh^2(\lambda)}$$

$$\rho' > \psi(\lambda)$$

Ceci contredit (3.7). □

3.2 Absence de solutions d'un PAL à deux points croisés type 1

Dans cette partie nous montrons l'absence de solution positive du problème suivant:

$$x''(t)+(Fx)(t)=0, t \in I \tag{3.9}$$

$$x(0)=0, x(1)=\alpha x'(0) \tag{3.10}$$

Soit la fonction suivante

$$\phi(\lambda) = \frac{\sinh(\lambda)}{\lambda}(2 - \cosh(\lambda)), \lambda \in [0,1]$$

qui jouera un role important la preuve.

Remarquons que

$$2 - \cosh(\lambda) > 0 \text{ pour } \lambda \in [0,1]$$

et comme $\phi(0) = 1$,on conclut que pour chaque $\alpha \in (0,1)$ il existe un $\lambda \in (0,1)$ tel que $\alpha < \phi(\lambda)$.

Ainsi, l'ensemble

$$D_\alpha = \{\lambda \in [0,1) : \phi(\lambda) > \alpha\}$$

n'est pas vide et il contient le voisinage droit de 0.

Théorème 3.2.1 *Supposons que F satisfait la condition (C). Alors , il n'y a aucun élément $x \in A_{\rho_2}$, solution du problème $(3.9) - (3.10)$ tel que $\rho_2 = 2\,(1 - \alpha)$.*

Preuve. On suppose qu'il existe une solution qui répond aux conditions du théorème

soit ρ' tel que $\rho' < \rho_2$ et $\|Fx\|_\infty < \rho' \|x\|$. Etant donné que $2(1 - \alpha)$ est le maximum de la quantité

$$\psi_1(\lambda) = \frac{\phi(\lambda) - \alpha}{[\cosh(\lambda) - 1]\sinh(\lambda)}\lambda^3, \ \ \lambda \geq 0.$$

nous pouvons choisir $\lambda > 0$ tel que

$$\rho' < \psi_1(\lambda). \tag{3.11}$$

En suivant le même procédé que dans le théorème 3.1.1, on obtient la relation (3.5):

$$x(t) = \frac{x'(0)}{\lambda} sinh(\lambda t) - \frac{1}{\lambda}\int_0^t z(s) sinh(\lambda(t-s))ds$$

la condition limite (3.10):

$$x(0) = 0, x(1) = \alpha x'(0),$$

implique que

$$\alpha x'(0) = x(1) = \frac{x'(0)}{\lambda}\sinh(\lambda) - \frac{1}{\lambda}\int_0^1 z(s)\sinh(\lambda(1-s))ds$$

$$\alpha x'(0) - \frac{x'(0)}{\lambda}\sinh(\lambda) = -\frac{1}{\lambda}\int_0^1 z(s)\sinh(\lambda(1-s))ds$$

$$x'(0)(\frac{\alpha\lambda - \sinh(\lambda)}{\lambda}) = -\frac{1}{\lambda}\int_0^1 z(s)\sinh(\lambda(1-s))ds$$

d'où il résulte que

$$x'(0) = \frac{1}{\sinh(\lambda) - \lambda\alpha}\int_0^1 z(s)\sinh(\lambda(1-s))ds$$

on peut écrire

$$x(t) = \frac{\sinh(\lambda t)}{\lambda[\sinh(\lambda) - \lambda\alpha]}\int_0^1 z(s)\sinh(\lambda(1-s))ds - \frac{1}{\lambda}\int_0^t z(s)\sinh(\lambda(t-s))ds. \tag{3.12}$$

ce qui nous permis de déduire que $\sinh(\lambda) > \lambda\alpha$.

Soit $\|x\| = x(t_0)$, pour un certain $t_0 =]0,1]$.

En divisant les deux côtés de (3.12) par $x(t_0)$, on obtient

$$\lambda[\sinh(\lambda) - \lambda\alpha] \leq \sinh(\lambda)\int_0^1 [\lambda^2\frac{x(s)}{\|x\|} + \frac{|(Fx)(s)|}{\|x\|}]\sinh(\lambda(1-s))ds$$

cette relation, implique que

$$\lambda[\sinh(\lambda) - \lambda\alpha] \leq \sinh(\lambda)\int_0^1 [\lambda^2 + \rho']\sinh(\lambda(1-s))ds$$

$$\lambda[\sinh(\lambda) - \lambda\alpha] \leq \sinh(\lambda)[\lambda^2 + \rho'] \int_0^1 \sinh(\lambda(1-s))ds$$

$$\lambda[\sinh(\lambda) - \lambda\alpha] \leq \sinh(\lambda)[\lambda^2 + \rho'] \frac{1}{\lambda}(-1 + \cosh(\lambda))$$

alors, nous obtenons la relation suivante :

$$\lambda^2(\sinh(\lambda) - \lambda\alpha) < \sinh(\lambda)[\lambda^2 + \rho'](\cosh(\lambda) - 1).$$

Ce dernier est en contradiction à (3.11) et on montre la contradiction comme suit :

on a

$$\lambda^2(\sinh(\lambda) - \lambda\alpha) < \sinh(\lambda)[\lambda^2 + \rho'](\cosh(\lambda) - 1),$$

$$\lambda^2 + \rho' > \frac{\lambda^2(\sinh(\lambda) - \lambda\alpha)}{\sinh(\lambda)(\cosh(\lambda) - 1)},$$

$$\rho' > \frac{\lambda^2(\sinh(\lambda) - \lambda\alpha)}{\sinh(\lambda)(\cosh(\lambda) - 1)} - \lambda^2,$$

$$\rho' > \frac{\lambda^2(\sinh(\lambda) - \lambda\alpha) - \lambda^2 \sinh(\lambda)(\cosh(\lambda) - 1)}{\sinh(\lambda)(\cosh(\lambda) - 1)},$$

$$\rho' > \lambda^2 \frac{\sinh(\lambda)(2 - \cosh(\lambda)) - \lambda\alpha}{\sinh(\lambda)(\cosh(\lambda) - 1)},$$

$$\rho' > \lambda^3 \frac{\frac{1}{\lambda}(\sinh(\lambda)(2 - \cosh(\lambda)) - \lambda\alpha)}{\sinh(\lambda)(\cosh(\lambda) - 1)},$$

$$\rho' > \lambda^3 \frac{\frac{1}{\lambda}(\sinh(\lambda)(2 - \cosh(\lambda)) - \lambda\alpha)}{\sinh(\lambda)(\cosh(\lambda) - 1)},$$

$$\rho' > \lambda^3 \frac{\frac{1}{\lambda}(\sinh(\lambda)(2 - \cosh(\lambda))) - \alpha}{\sinh(\lambda)(\cosh(\lambda) - 1)},$$

$$\rho' > \frac{\phi(\lambda) - \alpha}{\sinh(\lambda)(\cosh(\lambda) - 1)} \lambda^3,$$

$$\rho' > \psi_1(\lambda).$$

donc il n'y a pas de solution au problème considéré. $\square$

3.3 Absence de solutions d'un PAL à deux points avec condition mobile de type 1

Soit le problème limites suivant:

$$x''(t) + (Fx)(t) = 0, t \in I \tag{3.13}$$

$$x'(0) = 0, x(1) = \alpha x(\eta). \tag{3.14}$$

Théorème 3.3.1 *Supposons que F satisfait la condition (C). Alors , il n'y a aucun élément $x \in A_{\rho_3}$, solution du problème $(3.13) - (3.14)$ tel que $\rho_3 = \sup_{\lambda>0} \frac{2-\cosh(\lambda)-\alpha e^{\lambda(\eta-1)}}{\cosh(\lambda)-1}\lambda^2$.*

Preuve. On suppose qu'il existe une solution qui satisfait aux exigences du théorème et prendre ρ', tel que $\rho' < \rho_3$ et $\|Fx\|_\infty < \rho'\|x\|$,Choisir $\lambda > 0$, tel que

$$\rho' < \frac{2-\cosh(\lambda)-\alpha e^{\lambda(\eta-1)}}{\cosh(\lambda)-1}\lambda^2. \tag{3.15}$$

En copiant la technique utilisée dans théorème (3.1.1), on obtient

$$x'(t) - \lambda x(t) = x'(0)e^{-\lambda t} - \int_0^t z(s)e^{-\lambda(t-s)}ds,$$

la condition aux limites (3.14), transforme l'équation précédente en

$$x'(t) - \lambda x(t) = 0e^{-\lambda t} - \int_0^t z(s)e^{-\lambda(t-s)}ds$$
$$\Longrightarrow x'(t) - \lambda x(t) = -\int_0^t z(s)e^{-\lambda(t-s)}ds.$$

En multipliant les deux côtés par $e^{-\lambda t}$, nous obtenons:

$$[x'(t) - \lambda x(t)]e^{-\lambda t} = [-\int_0^t z(s)e^{-\lambda(t-s)}ds]e^{-\lambda t}$$

$$\Longrightarrow$$

$$(x(t)e^{-\lambda t})' = [x'(t) - \lambda x(t)]e^{-\lambda t} = -\int_0^t z(s)e^{-\lambda(2t-s)}ds.$$

En intégrant les deux côtés de 0 à t, nous obtenons

$$\int_0^t (x(r)e^{-\lambda r})'dr = -\int_0^r z(s)e^{-\lambda(2r-s)}ds)dr.$$

$$x(t)e^{-\lambda t} - x(0)e^{\lambda 0} = -\int_0^t \int_0^r z(s)e^{-\lambda(2r-s)}dsdr.$$

et pour

$$0 \leq s \leq r \leq t \Rightarrow \begin{cases} s \leq r \leq t \\ 0 \leq s \leq t \end{cases}$$

$$x(t)e^{-\lambda t} - x(0) = -\int_0^t z(s)e^{\lambda s}\int_s^t e^{-2\lambda r}drds.$$

$$x(t)e^{-\lambda t} - x(0) = -\frac{1}{2\lambda}\int_0^t z(s)e^{\lambda s}(e^{-2\lambda s} - e^{-2\lambda t})ds.$$

donc

$$x(t) = \frac{x(0)}{e^{-\lambda t}} - \frac{1}{2\lambda}\int_0^t z(s)\frac{e^{-\lambda s} - e^{-2\lambda t+\lambda s}}{e^{-\lambda t}}ds$$

$$x(t) = x(0)e^{\lambda t} - \frac{1}{2\lambda}\int_0^t z(s)\frac{e^{-\lambda s} - e^{-2\lambda t+\lambda s}}{e^{-\lambda t}} \times \frac{e^{\lambda s}}{e^{\lambda s}}ds$$

$$x(t) = x(0)e^{\lambda t} - \frac{1}{\lambda}\int_0^t z(s)\frac{1 - e^{-2\lambda(t-s)}}{2e^{-\lambda(t-s)}}ds$$

Enfin, nous obtenons

$$x(t) = x(0)e^{\lambda t} - \frac{1}{\lambda}\int_0^t z(s)sinh(\lambda(t-s))ds \tag{3.16}$$

En utilisant (3.14), nous obtenons

$$x(1) = x(0)e^{\lambda} - \frac{1}{\lambda}\int_0^1 z(s)\sinh(\lambda(1-s))ds.$$

$$e^{\lambda}x(0) = x(1) + \frac{1}{\lambda}\int_0^1 z(s)\sinh(\lambda(1-s))ds.$$

$$e^{\lambda}x(0) = \alpha x(\eta) + \frac{1}{\lambda}\int_0^1 z(s)\sinh(\lambda(1-s))ds.$$

$$e^{\lambda}x(0) = \alpha(x(0)e^{\lambda\eta} - \frac{1}{\lambda}\int_0^{\eta} z(s)\sinh(\lambda(\eta-s))ds) + \frac{1}{\lambda}\int_0^1 z(s)\sinh(\lambda(1-s))ds].$$

$$e^{\lambda}x(0) = \alpha x(0)e^{\lambda\eta} - \alpha\frac{1}{\lambda}\int_0^{\eta} z(s)\sinh(\lambda(\eta-s))ds) + \frac{1}{\lambda}\int_0^1 z(s)\sinh(\lambda(1-s))ds.$$

$$e^{\lambda}x(0) - \alpha x(0)e^{\lambda\eta} = -\alpha\frac{1}{\lambda}\int_0^{\eta} z(s)\sinh(\lambda(\eta-s))ds) + \frac{1}{\lambda}\int_0^1 z(s)\sinh(\lambda(1-s))ds.$$

$$x(0)(e^{\lambda} - \alpha e^{\lambda\eta}) = \frac{1}{\lambda}(-\alpha\int_0^{\eta} z(s)\sinh(\lambda(\eta-s))ds) + \int_0^1 z(s)\sinh(\lambda(1-s))ds).$$

$$x(0) = \frac{1}{\lambda(e^{\lambda} - \alpha e^{\lambda\eta})}(\int_0^1 z(s)\sinh(\lambda(1-s))ds - \alpha\int_0^{\eta} z(s)\sinh(\lambda(\eta-s))ds)).$$

et par conséquent, on aura

$$x(t) = \frac{e^{\lambda t}}{\lambda(e^{\lambda} - \alpha e^{\lambda\eta})}(\int_0^1 z(s)\sinh(\lambda(1-s))ds - \alpha\int_0^{\eta} z(s)\sinh(\lambda(\eta-s))ds)) \qquad (3.17)$$
$$- \frac{1}{\lambda}\int_0^t z(s)sinh(\lambda(t-s))ds$$

Supposons que $\|x\| = x(t_0)$, pour un certain $t_0 \in]0,1]$. Divisant les deux côtés de (3.17) par $x(t_0)$, nous obtenons

$$\lambda^2[e^{\lambda} - \alpha e^{\lambda\eta}] \leq e^{\lambda}[\lambda^2 + \rho'](\cosh(\lambda) - 1).$$

Ceci est en contradiction avec (3.15), en effet on a

$$\lambda^2[e^{\lambda} - \alpha e^{\lambda\eta}] \leq e^{\lambda}[\lambda^2 + \rho'](\cosh(\lambda) - 1).$$

$$[\lambda^2 + \rho'] \geq \frac{\lambda^2[e^\lambda - \alpha e^{\lambda\eta}]}{e^\lambda(\cosh(\lambda) - 1)},$$

$$\rho' \geq \frac{\lambda^2[e^\lambda - \alpha e^{\lambda\eta}]}{e^\lambda(\cosh(\lambda) - 1)} - \lambda^2,$$

$$\rho' \geq \frac{\lambda^2[e^\lambda - \alpha e^{\lambda\eta}] - \lambda^2 e^\lambda(\cosh(\lambda) - 1)}{e^\lambda(\cosh(\lambda) - 1)},$$

$$\rho' \geq \frac{\lambda^2 e^\lambda - \alpha\lambda^2 e^{\lambda\eta} - \lambda^2 e^\lambda \cosh(\lambda) + \lambda^2 e^\lambda}{e^\lambda(\cosh(\lambda) - 1)},$$

$$\rho' \geq \frac{e^\lambda(\lambda^2 - \alpha\lambda^2 e^{\lambda(\eta-1)} - \lambda^2\cosh(\lambda) + \lambda^2)}{e^\lambda(\cosh(\lambda) - 1)},$$

$$\rho' \geq \frac{(1 - \alpha e^{\lambda(\eta-1)} - \cosh(\lambda) + 1)}{(\cosh(\lambda) - 1)}\lambda^2,$$

$$\rho' \geq \frac{(2 - \cosh(\lambda) - \alpha e^{\lambda(\eta-1)})}{(\cosh(\lambda) - 1)}\lambda^2,$$

donc il n'y a pas de solution au problème aux limites $(3.13) - (3.14)$. $\square$

Quelques valeurs de ρ_3 en fonction des coefficient α et l'argument η.

η/α	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
0	1.808	1.628	1.464	1.307	1.160	1.020	0.888	0.761	0.639
0.1	1.806	1.625	1.453	1.291	1.137	0.990	0.849	0.714	0.585
0.2	1.805	1.620	1.444	1.275	1.114	0.959	0.811	0.667	0.529
0.3	1.804	1.615	1.434	1.260	1.092	0.929	0.772	0.620	0.472
0.4	1.803	1.611	1.426	1.246	1.071	0.900	0.735	0.573	0.416
0.5	1.802	1.608	1.418	1.233	1.051	0.873	0.699	0.528	0.361
0.6	1.801	1.605	1.412	1.221	1.034	0.849	0.667	0.487	0.310
0.7	1.800	1.603	1407	1.212	1.019	0.828	0.639	0.451	0.265
0.8	1.800	1.599	1.403	1.205	1.009	0.813	0.618	0.423	0.230
0.9	1.800	1.600	1.400	1.201	1.002	0.803	0.604	0.379	0.207

3.4 Absence de solutions d'un PAL à deux points croisés type 2

Dans cette partie nous montrons l'absence de solution du problème suivant:

$$x''(t) + (Fx)(t) = 0, t \in I \tag{3.18}$$

$$x'(0) = 0, x'(1) = \alpha x(0), \tag{3.19}$$

Théorème 3.4.1 *Supposons que F satisfait la condition (C). Alors , il n'y a aucun élément $x \in A_{\rho_4}$, solution du problème $(3.18)-(3.19)$ tel que $\rho_4 = \sup_{\lambda>0} \frac{\lambda[e^{\lambda}-\alpha]}{\lambda\cosh(\lambda)-\lambda+1-e^{-\lambda}} - \lambda^2$.*

Preuve. On suppose qu'il existe une solution qui satisfait aux exigences du théorème et prendre ρ', tel que $\rho' < \rho_4$ et $\|Fx\|_\infty < \rho'\|x\|$,

On choisi $\lambda > 0$, tel que:

$$\rho' < \frac{\lambda[e^\lambda - \alpha]}{\lambda\cosh(\lambda) - \lambda + 1 - e^{-\lambda}} - \lambda^2. \tag{3.20}$$

En suivant le même procédé que dans le théorème (3.1.1), on obtient la relation

$$x(t) = \frac{e^{\lambda t}}{\lambda e^\lambda - \alpha}\int_0^1 z(s)[\sinh(\lambda(1-s)) + e^{-\lambda(1-s)}]ds - \int_0^t z(s)e^{\lambda(t-s)}ds. \tag{3.21}$$

Soit $\|x\| = x(t_0)$, pour un certain $t_0 \in]0,1]$. Divisant les deux côtés de (3.21) par $x(t_0)$, on obtient

$$\lambda(\lambda - e^{-\lambda}\alpha) \leq (\lambda^2 + \rho')(\lambda\cosh(\lambda) - \lambda + 1 - e^{-\lambda}.$$

chose contradictoire avec (3.20), donc il n'y a pas de solution. $\square$

Remarque 3.4.2 *Le paramètre ρ_4 fonction du coefficient α*

α	*0.1*	*0.2*	*0.3*	*0.4*	*0.5*	*0.6*	*0.7*	*0.8*	*0.9*
ρ_4	*1.480*	*1.375*	*1.271*	*1.167*	*1.063*	*0.961*	*0.859*	*0.757*	*0.657*

3.5 Absence de solutions d'un PAL à deux points avec condition mobile de type 2

Cette partie est dédie à l'étude de l'absence de solution du problème suivant:

$$x''(t) + (Fx)(t) = 0, t \in I \tag{3.22}$$

$$x(0) = 0, x(1) = \alpha x(\eta). \tag{3.23}$$

Théorème 3.5.1 *Supposons que F satisfait la condition (C). Alors , il n'y a aucun élément $x \in A_{\rho 5}$, solution du problème $(3.22)-(3.23)$ tel que $\rho_5 = \sup_{\lambda>0} \frac{\lambda^2[\sinh(\lambda)-\alpha\sinh(\eta\lambda)]}{\sinh(\lambda)(\cosh(\lambda)-1)} - \lambda^2$.*

Preuve. On suppose qu'il existe une solution qui satisfait aux exigences du théorème et prendre ρ', tel que $\rho' < \rho_4$ et $\|Fx\|_\infty < \rho'\|x\|$,

On choisi $\lambda > 0$, tel que:

$$\rho' < \frac{\lambda^2[\sinh(\lambda)-\alpha\sinh(\eta\lambda)]}{\sinh(\lambda)(\cosh(\lambda)-1)} - \lambda^2, \tag{3.24}$$

En suivant le même procédé que dans le théorème (3.1.1), on obtient la relation

$$x(t) = \frac{\sinh(\lambda t)}{\lambda(\sinh(\lambda)-\alpha\sinh(\lambda\eta))}[\int_0^1 z(s)[\sinh(\lambda(1-s)) - \int_0^\eta z(s)\sinh(\lambda(\eta-s))ds)] \tag{3.25}$$
$$-\frac{1}{\lambda}\int_0^t z(s)\sinh(\lambda(t-s))ds$$

Soit $\|x\| = x(t_0)$, pour un certain $t_0 \in]0,1]$. Divisant les deux côtés de (3.25) par $x(t_0)$, on obtient

$$\lambda^2(\sinh(\lambda)-\alpha\sinh(\lambda\eta)) \leq \sinh(\lambda)(\lambda^2+\rho')(\cosh(\lambda)-1).$$

ce qui met (3.24) en défaut. $\square$

Remarque 3.5.2 *Le tableau suivant donne quelques valeurs de la ρ_5 pour certaines valeurs du* *coefficient α et de l'argument η.*

α/η	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
0.1	1.978	1.959	1.939	1.919	1.899	0.878	0.858	0.839	0.818
0.2	1.958	1.919	1.878	1.839	1.798	1.759	1.718	1.679	0.637
0.3	1.938	1.919	1.878	1.839	1.798	1.759	1.718	1.518	1.458
0.4	1.917	1.838	1.758	1.679	1.598	1.519	1.439	1.355	1.267
0.5	1.879	1.797	1.679	1.599	1.498	1.398	1.298	1.195	1.097
0.6	1.879	1.759	1.638	1.519	1.399	1.279	1.159	1.037	0.918
0.7	1.858	1.719	1.578	1.439	1.296	1.159	1.017	0.879	0.736
0.8	1.839	1.678	1.518	1.359	1.195	1.039	0.879	0.719	0.559
0.9	1.819	1.637	1.458	1.278	1.099	0.917	0.738	0.559	0.379

REFERENCES

1 Debagh Mohamed, Sur les équations diérentielles stochastiques fractionnaires: théorie et applications, méméoire de magistère, université de Bechar 2014.

2 karakostas George L., Non existence of solution to some boundary-value problems for second ordinary differential equation », Electronic J. Differential Equations, Vol. 2012 (2012), No. 20, pp. 1-10.

3 Leborgne Gilles, Rappels (et plus) de Topologie», http://www.isima.fr/,21 juillet 2009.