الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Djilali BOUNAAMA Khemis Miliana
Faculté des Sciences et de la Technologie

جامعة الجيلالي بونعامة خميس مليانة
كلية العلوم والتكنولوجيا

Adresse : Rue Thniet El Had, Khemis Miliana, Ain Defla , Algérie. Tel :(213) 27556844

Intitulé du polycopié

Cours et Exercices en Algèbre 2

Destiné aux étudiants

Niveau : L1 Mathématiques et informatique

Spécialité : Mathématiques

Auteur

Mohamed HOUASNI

Experts du polycopié	Grade	Établissement d'affiliation
Ali KRELIFA	M.C.A	Univ. D.B.K.M.
Salah ZITOUNI	M.C.A	Univ. de Souk Ahras

Date de validation du polycopié par l'instance scientifique habilitée CSD et/ou CSF

CSD ....../......

CSF 08/06/2022

Année universitaire : 2021/2022

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère De L'enseignement Supérieur Et De La Recherche Scientifique

Université Djilali Bounâama Khemis Miliana
Faculté des Sciences et de la Technologie

Département de Mathématiques et Informatique

Polycopié d'Algèbre 2

Destiné aux étudiants:
Niveau : L1 Mathématiques et informatique
Spécialité : Mathématiques:

Réalisé par:

HOUASNI Mohamed

Cours et Exercices en Algèbre 2

ANNÉE UNIVERSITAIRE: 2021–2022

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

Les étudiants recherchent généralement des références simplifiées pour comprendre les concepts mathématiques qu'ils ont appris d'une manière qui convient à leurs capacités scientifiques, on a donc dû leur fournir ce polycopié qui contient des cours et des exercices corrigés compatibles avec le programme du ministère de l'nseignement supérieur et de la recherche scientifique.

Ce polycopié est composé de quatre chapitres :

1. Espaces vectoriels.
2. Applications linéaires.
3. Matrices.
4. Systèmes d'équations.

Pour bien comprendre ce contenu, le lecteur doit être familiarisé avec les concepts concernant les structures algébriques (groupes, anneaux et corps).

A la fin de chaque chapitre, le lecteur trouvera une série d'exercices corrigés en détails.

Ce cours a été présenté aux étudiants de l'Université Djilali Bounâama de Khemis Miliana, Ain Defla, Algérie.

Nous invitons aussi notre collègues et étudiants qui voudraient bien me faire parvenir leurs remarques, suggestions, critiques et n'hésitez pas à nous les envoyer afin que nous puissions enrichir ce document.

E-mail : *m.houasni@univ-dbkm.dz*

CHAPITRE 1

ESPACES VECTORIELS

Les notions abordées dans ce chapitre sont :

— Espaces vectoriels.

— Sous-espaces vectoriels.

— Base et Dimension d'un espace vectoriel.

— Somme de sous-espaces vectoriels.

Il couvre donc certaines notions fondamentales requises pour ce polycopié. La maîtrise de ces notions est essentielle pour le reste de ce document.

1.1 Espace vectoriel

Dans tout ce chapitre $\mathbb{k}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On va donner les axiomes qui définissent un espace vectoriel.

Definition 1.1 ($\mathbb{k}$-espace vectoriel) *Soit $(\mathbb{k}, \circledast, \times)$ un corps. On appelle espace vectoriel sur le corps K tout ensemble E muni d'une loi de composition interne $\circledast$*

$$\circledast : \begin{cases} E \times E & \to & E \\ (x, y) & \mapsto & x \circledast y \end{cases},$$

et d'une loi de composition externe

$$. : \begin{cases} \mathbb{k} \times E & \to & E \\ (\lambda, y) & \mapsto & \lambda.x \end{cases},$$

telles que

1. *$(E, \circledast)$ est un groupe commutatif (ou Abélien) d'élément neutre noté 0_E.*
2. *$\forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{k}^2$, $\forall(x, y) \in E^2$, on a*

— $(\alpha + \beta).x = \alpha.x \circledast \beta.x$ *Axiome 1*

— $(\alpha \times \beta).x = \alpha.(\beta.x)$ *Axiome 2*

— $\alpha.(x \circledast y) = \alpha.x \circledast \alpha.y$ *Axiome 3*

— $1_{\mathbb{k}}.x = x$ *Axiome 4*

On dit alors que $(E, \circledast, \cdot)$ est un K-espace vectoriel. Les éléments de $\mathbb{k}$ sont appelés scalaires, ceux de E, vecteurs. L'élément neutre de $(E, \circledast)$ est 0_E (appelé vecteur nul).

Exemple 1.1 *Le corps commutatif $\mathbb{k}$, est un espace vectoriel sur luimême, pour l'addition et le produit existant sur $\mathbb{k}$.*

Exemple 1.2 *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier non nul, on définit le produit cartésien $\mathbb{k}^n$ comme suit*

Si $n = 1$, $\mathbb{k}^1 = \mathbb{k}$.

Si $n = 2$, $\mathbb{k}^2 = \mathbb{k} \times \mathbb{k}$ est l'ensemble des couples formés d'éléments de E.

Si $n = 3$, $\mathbb{k}^3 = \mathbb{k}^2 \times \mathbb{k}$ par définition, c'est donc l'ensemble des couples du type (a, z) avec a dans $\mathbb{k}^2$ donc du type $a = (x, y)$ avec x et y dans $\mathbb{k}$. Au lieu de noter $((x, y), z)$ l'élément générique de $\mathbb{k}^3$, on le note (x, y, z) et on parle du triplet, (x, y, z) de $\mathbb{k}^3$.

Plus généralement, $\mathbb{k}^n$ sera, rar définition, le produit cartésien de $\mathbb{k}^{n-1}$ par $\mathbb{k}$, soit $\mathbb{k}^n = \mathbb{k}^{n-1} \times \mathbb{k}$, et par commodité, on notera $(x_1, x_2, ..., x_n)$ l'élément générique de $\mathbb{k}^n$, (avec chaque $x_i \in \mathbb{k}$) appelé n-uplet.

Formellement, on définit donc $\mathbb{k}^n$ à partir des couples. Sur $\mathbb{k}^n$, on définit une structure d'espace vectoriel en posant :

pour $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ *et* $Y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ *dans* $\mathbb{k}^n$, *et* λ *dans* $\mathbb{k}$,

$$\begin{aligned} X + Y &= (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n), \\ \lambda.X &= (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n), \end{aligned}$$

et il est facile de vérifier que l'on a une structure d'espace vectoriel.

Exemple 1.3 *L'ensemble* $\mathbb{R}_n[x]$*des fonctions polynômes à coefficients dans* $\mathbb{R}$ *de degré* $\leq n$, *c'est-à-dire :*

$$\mathbb{R}_n[x] = \{P : \mathbb{R} \to \mathbb{R} |\ P(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n,\ a_i \in \mathbb{R}\},$$

est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ *pour les lois :*

$$\begin{aligned} (a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n) + (b_0 + b_1 x + ... + b_n x^n) &:= (a_0 + b_0) + ... + (a_n + b_n) x^n, \\ \lambda.(a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n) &:= \lambda a_0 + \lambda a_1 x + ... + \lambda a_n x^n. \end{aligned}$$

Plus généralement, l'ensemble $\mathbb{R}[x]$ *des fonctions polynômes de tous les degrés possibles à coefficients dans* $\mathbb{R}$ *est un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$ *avec les lois :*

$$\begin{aligned} \sum_k a_k x^k + \sum_k b_k x^k &:= \sum_k (a_k + b_k) x^k, \\ \lambda. \sum_k a_k x^k &:= \sum_k (\lambda a_k) x^k. \end{aligned} \tag{1.1}$$

(les sommes ne comportent qu'un nombre fini de termes non nuls).

Exemple 1.4 *Soit* A *un ensemble non vide, et* E *un espace vectoriel sur le corps* $\mathbb{k}$. *L'ensemble* $\mathcal{F}(A, E)$ *des applications de* A *dans* E *est muni d'une structure vectorielle sur* $\mathbb{k}$ *de la manière suivante.*

Si f *et* g *sont deux fonctions de* A *dans* E, *et* λ *un scalaire dans* $\mathbb{k}$ *on définit la fonction* $f + g$ *par*

$$\forall x \in A,\ (f + g)(x) = f(x) + g(x),$$

et la fonction $\lambda.f$ *par*

$$\forall x \in A, (\lambda.f)(x) = \lambda.f(x),$$

et là encore c'est un jeu de vérifier qu'on a une structure vectorielle pour l'espace des applications de A *dans l'espace vectoriel* E. *Son vecteur nul est la fonction identiquement nulle sur* A *à valeurs dans* E,

$$\begin{aligned} 0_{E^A} : \ A &\to E \\ x &\mapsto 0_E. \end{aligned}$$

Exemple 1.5 *Soient $E_1, ..., E_n$. n espaces vectoriels sur le corps commutatif $\mathbb{k}$, en procédant par récurrence comme pour $\mathbb{k}^n$, on définit le produit cartésien $E = E_1 \times E_2 \times ... \times E_n$ encore noté $E = \prod_{i=1}^{n} E_i$, dont les éléments sont les n-uplets $X = (X_1, ..., X_n)$, avec $\forall i = 1...n$, $X_i \in E_i$.*
Il est facile de vérifier que pour l'addition + définie par

$$(X_1, ..., X_n) + (Y_1, ..., Y_n) = (X_1 + Y_1, ..., X_i + Y_i, ..., X_n + Y_n),$$

E est un groupe additif, et qu'avec le produit

$$\lambda.X = (\lambda X_1, \lambda X_2, ..., \lambda X_n),$$

on munit E d'une structure vectorielle.

1.2 Règles de calcul

Proposition 1.1 *Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{k}$-espace vectoriel. Pour tous scalaires $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{k}$ et pour tous vecteurs $x, y \in E$, on a*

1. $0_{\mathbb{k}} \cdot x = 0_E$
2. $(-1) \cdot x = -x$
3. $(-\gamma) \cdot x = -(\gamma \cdot x) = \gamma \cdot (-x)$
4. $(\alpha - \beta).x = \alpha.x - \beta.x$
5. $\gamma.(x - y) = \gamma.x - \gamma.y$
6. $\lambda \cdot 0_E = 0_E$
7. $\gamma \cdot x = 0_E \Longleftrightarrow (\gamma = 0_{\mathbb{k}} \quad ou \quad x = 0_E)$.

Preuve. 1. On a

$$\begin{aligned} 0_{\mathbb{k}} \cdot x + 0_E &= 0_{\mathbb{k}} \cdot x \text{ car } (E, +) \text{ est un groupe} \\ &= (0_{\mathbb{k}} + 0_{\mathbb{k}}) \cdot x \text{ car } \mathbb{k} \text{ est un corps} \\ &= 0_{\mathbb{k}} \cdot x + 0_{\mathbb{k}} \cdot x. \end{aligned}$$

D'où $0_{\mathbb{k}} \cdot x = 0_E$ en soustrayant $0_{\mathbb{k}} \cdot x$ à droite des deux membres de cette égalité.
2. On a :

$$\begin{aligned} x + (-1) \cdot x &= 1.x + (-1) \cdot x \text{ grâce à l'axiome 4} \\ &= (1 + (-1)) .x \text{ d'après l'axiome 1} \\ &= 0_{\mathbb{k}} \cdot x \text{ car } \mathbb{k} \text{ est un corps} \\ &= 0_E \text{ d'après 1 précédente.} \end{aligned}$$

donc $(-1).x$ est l'opposé de x. On peut alors écrire : $-x = (-1).x$.

3. On a :

$$\begin{aligned}(-\gamma)x &= (-1.\gamma)x \text{ car } \Bbbk \text{ est un corps}\\ &= (-1).(\gamma.x) \text{ d'après l'axiome 2}\\ &= -\gamma.x \text{ d'après 2 précédente.}\end{aligned}$$

4. On a :

$$\begin{aligned}(\alpha-\beta).x &= (\alpha+(-\beta)).x \text{ car } \Bbbk \text{ est un corps}\\ &= \alpha.x + (-\beta).x \text{ d'après l'axiome 1}\\ &= \alpha.x - \beta.x \text{ d'après 3 précédente.}\end{aligned}$$

5. On a :

$$\begin{aligned}\gamma.(x-y) &= \gamma.(x+(-y)) \text{ car } (E,+) \text{ est un groupe}\\ &= \gamma.x + \gamma.(-y) \text{ d'après l'axiome 3}\\ &= \gamma.x + \gamma.(-1y) \text{ d'après 2 précédente}\\ &= \gamma.x + (\gamma.(-1)).y \text{ d'après l'axiome 2}\\ &= \gamma.x + (-\gamma).y \text{ car } \Bbbk \text{ est un corps}\\ &= \gamma.x - \gamma.y \text{ d'après 3 précédente.}\end{aligned}$$

6. On a :

$$\begin{aligned}\gamma\cdot 0_E &= \gamma\cdot(x-x) \text{ car } (E,+) \text{ est un groupe}\\ &= \gamma\cdot x + \gamma\cdot(-x) \text{ d'après l'axiome 1}\\ &= \gamma\cdot x - \gamma\cdot x \text{ d'après 3 précédente}\\ &= 0_E \text{ car } (E,+) \text{ est un groupe.}\end{aligned}$$

7. Supposons que $\gamma\cdot x = 0_E$, Si $\gamma = 0_\Bbbk$ alors d'après 1, $\gamma\cdot x = 0_E$. Sinon, si $\gamma \neq 0_\Bbbk$ alors comme $\Bbbk$ est un corps γ^{-1} existe et

$$x = 1.x = \left(\gamma.\gamma^{-1}\right).x = \gamma^{-1}.(\gamma.x) = \gamma^{-1}.0_E = 0_E,$$

et donc $x = 0_E$. La réciproque est évidente. □

1.3 Sous-espaces vectoriels

Definition 1.2 (Sous-espace vectoriel) *On appelle sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E sur le corps $\Bbbk$, toute partie F de E qui est sous-groupe additif de E est telle que $\forall\lambda \in \Bbbk$, $\forall x \in F$, $\lambda.x \in F$.*

Remarque 1.1 *Il est alors évident que F est un espace vectoriel sur $\Bbbk$, les conditions de la définition 1.1 étant vérifiées.*

Exemple 1.6 $\{0_E\}$ *et E sont sous-espaces vectoriels de E.*

Definition 1.3 (Combinaison linéaire) *Soient $x_1, x_2, ..., x_n$ n vecteurs d'un $\Bbbk$-espace vectoriel E. On appelle combinaison linéaire de ces n vecteurs tout vecteur $x \in E$ de la forme*

$$x = \lambda_1 x_1 + ... + \lambda_p x_n = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k,$$

où $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \Bbbk^n$.

Si A est une partie de E, on appelle combinaison linéaire d'éléments de A toute combinaison linéaire d'un nombre fini d'éléments de A.

En principe, pour montrer que F est un sous-espace vectoriel, il faudrait vérifier les huit axiomes de la Définition 1.1 En fait, il suffit de vérifier la «stabilité» des lois de composition comme l'affirme la proposition suivante :

Proposition 1.2 *Une partie F d'un espace vectoriel E sur $\Bbbk$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si*

1. $F \neq \varnothing$.
2. $\forall (\alpha, \beta) \in \Bbbk^2$, $\forall (x, y) \in F^2$, $\alpha.x + \beta.y \in F$.

Preuve. $\Longrightarrow$) D'abord si Fest sous-espace de E, en tant que sous-groupe additif F est non vide car contient 0, élément nul de E, puis si x et y sont dans F et α et β dans le corps $\Bbbk$, $\alpha.x$ et $\beta.y \in F$ (cf. définition 1.2) qui est stable pour l'addition, donc $\alpha.x + \beta.y \in F$.

$\Longleftarrow$) si 1. et 2. sont vérifiées, avec $\alpha = 1$ et $\beta = -1$ et x et y dans F on a :

$$(F \neq \varnothing) \text{ et } \left(\forall (x, y) \in F^2, x - y \in F\right),$$

ce qui justifie déjà que F est sous-groupe additif de E, puis le 2. avec $\beta = 0$ donne

$$\forall \lambda \in \Bbbk, \forall x \in F, \lambda.x \in F.$$

On a bien F sous-espace vectoriel de E. □

Remarque 1.2 *Comme on l'a vu au cours de la preuve, si F est un sous-espace vectoriel, alors F contient nécessairement le vecteur nul.*

1.3.1 Exemples fondamentaux

1. Droite vectorielle :

Soit $v \in E$, $v \neq 0$, alors :

$$F = \{y \in E | \; \exists \lambda \in \Bbbk : y = \lambda v\},$$

est un sous-espace vectoriel de E dit droite vectorielle engendrée par v.

En effet $F \neq \emptyset$, car $v \in F$. De plus, F est stable pour les lois de E, car si $x, y \in F$ (c'est-à-dire: $x = \lambda v$, $y = \mu v$), on a :

$$x + y = \lambda v + \mu v = (\lambda + \mu)v \in F.$$

De même, si $x \in F$ (c'est-à-dire $x = \lambda v$), on a : $\mu x = \mu(\lambda v) = (\mu\lambda)v \in F$.

2. Plan vectoriel :

Soient $x_1, x_2 \in E$ alors :

$$F = \{y \in E | \; \exists \lambda_1, \lambda_2 \in \Bbbk : y = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2\},$$

F est un sous-espace vectoriel de E, dit sous-espace engendré par x_1, x_2. Si x_1 et x_2 ne sont pas nuls et x_2 n'appartient pas à la droite vectorielle engendrée par x_1, F est dit plan vectoriel engendré par x_1 et x_2.

3. Sous-espace engendré :

Plus généralement, si $x_1, x_2, ..., x_p \in E$ alors :

$$F = \{y \in E | \; \exists \lambda_1, ..., \lambda_p \in \Bbbk : y = \lambda_1 x_1 + ... + \lambda_p x_p\},$$

est un sous-espace vectoriel de E noté $Vect\{x_1, x_2, ..., x_p\}$, dit sous-espace engendré par $x_1, ..., x_p$, ou aussi espace des combinaisons linéaires de $x_1, x_2, ..., x_p$. Nous verrons par la suite que, au fond, tous les sous-espaces vectoriels sont de ce type, c'est-à-dire obtenus par des "combinaisons linéaires" d'une famille d'éléments de E.

Remarque 1.3 *Soit E l'espace vectoriel des vecteurs d'origine O. Une droite vectorielle est une droite passant par O. De même, un plan vectoriel est un plan passant par O. Plus généralement, un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ peut être visualisé comme un "plan de dimension p" passant par O. On pourrait donner un sens précis à la notion de "plan de dimension p", mais cela n'est pas nécessaire. Retenons pour le moment le fait qu'il doit passer par O, car tout sous-espace vectoriel doit contenir le vecteur nul. Ainsi, par exemple, une droite ne passant pas par O n'est pas un sous-espace vectoriel : les points de la droite sont les extrémités des vecteurs issus de O et le vecteur nul n'est pas parmi eux.*

Exemple 1.7 *Soit*

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ 3x + y + 2z = 0\}.$$

F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. En effet, soient $v_1 = (x_1, y_1, z_1)$ et $v_2 = (x_2, y_2, z_2) \in F$; on a :

$$3x_1 + y_1 + 2z_1 = 0 \ \text{ et } 3x_2 + y_2 + 2z_2 = 0,$$

d'où, en additionnant : $3(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) + 2(z_1 + z_2) = 0$, c'est-à-dire

$$v_1 + v_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \in F.$$

De même, on voit que si $\lambda \in \mathbb{k}$ et $v \in F$ on a $\lambda v \in F$.

Exemple 1.8 *On a :*

$$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ x + 4y + z = 1\},$$

n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ car $0_{\mathbb{R}^3} = (0, 0, 0) \notin G$ $(0 + 4.0 + 0 \neq 1)$.

Proposition 1.3 *Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.*

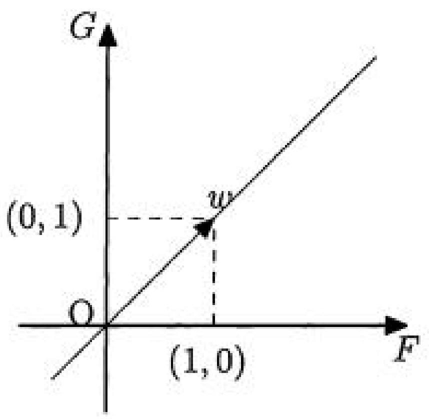
1. *$F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.*
2. *$F \cup G$ n'est pas en général un sous-espace vectoriel de E.*
3. *Le complémentaire $E \backslash F$ d'un sous-espace vectoriel F n'est pas un sous-espace vectoriel de E.*

Preuve. **1.** On a d'abord $F \cap G \neq \varnothing$, car $0_E \in F \cap G$.

Soient $x, y \in F \cap G$, on a : $x, y \in F$ donc $x + y \in F$. De même, si $x, y \in G$, $x + y \in G$ et par conséquent $x + y \in F \cap G$.

Si $\lambda \in \mathbb{k}$ et $x \in F \cap G$, on a : $x \in F$, donc $\lambda x \in F$, et $x \in G$, donc $\lambda x \in G$, d'où : $\lambda x \in F \cap G$.

2. Cela tient au fait qu'en général $F \cup G$ n'est pas stable par la somme. Par exemple, soient $E = \mathbb{R}^2$, F la droite vectorielle engendrée par $(1, 0)$ et G la droite vectorielle engendrée par $(0, 1)$. On a : $(1, 0) \in F$ donc $(1, 0) \in F \cup G$. $(0, 1) \in G$ donc $(0, 1) \in F \cup G$ mais : $w = (1, 0) + (0, 1) = (1, 1) \notin F \cup G$.



3. $E \backslash F$ ne contient pas 0_E, donc il n'est pas un sous-espace vectoriel (Remarque 1.2). □

1.4 Bases (en dimension finie)

Definition 1.4 (Famille génératrice) *Soit $\{v_1, ..., v_p\}$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E, elle est dite génératrice, si $E = Vect\{v_1, ..., v_p\}$, c.-à-d. $\forall x \in E$, se décompose sur les vecteurs v_i, ou encore que tout $x \in E$ est combinaison linéaire des vecteurs v_i,*

$$x = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_p v_p = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k v_k.$$

Remarque 1.4 *Une telle famille (finie) n'existe pas toujours. Considérons par exemple $\mathbb{R}[x]$ avec la structure d'espace vectoriel définie par les lois (1.1) et soit $\{P_1, ..., P_n\}$ une famille finie de polynômes. Elle ne peut être génératrice car, en effectuant des combinaisons linéaires, on n'obtiendra que des polynômes de degré $<$ Sup$\{$degrés des $(P_i)\}$.*

Exemple 1.9 *Dans $\mathbb{R}^2$, soient $v_1 = (1, 1)$ et $v_2 = (1, -1)$. Montrons que $\{v_1, v_2\}$ est génératrice. Soit $x = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec a, b arbitraires : il s'agit de montrer qu'il existe $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tels que $x = x_1 v_1 + x_2 v_2$, c'est-à-dire :*

$$x = (a, b) = (x_1, x_1) + (x_2, -x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2).$$

Ceci signifie que $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$, $\exists\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ vérifiant le système :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = & a \\ x_1 - x_2 = & b. \end{cases}$$

En résolvant, on trouve en effet :

$$x_1 = \frac{a+b}{2} \text{ et } x_2 = \frac{a-b}{2},$$

solution définie pour a, b arbitraires. Donc $\{v_1, v_2\}$ est génératrice.

Definition 1.5 *Un espace vectoriel est dit de dimension finie, s'il existe une famille génératrice finie, dans le cas contraire, on dit qu'il est de dimension infinie.*

Definition 1.6 (Famille libre) *Soit $\{v_1, ..., v_p\}$, une famille finie d'éléments de E. On dit qu'elle est libre, si :*

$$\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_p v_p = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_p = 0.$$

On dit aussi que les vecteurs $v_1, ..., v_p$ sont linéairement indépendants. Une famille qui n'est pas libre est dite liée (on dit aussi que ses vecteurs sont liés ou linéairement dépendants).

Exemple 1.10 *Dans* $\mathbb{R}^3$*, les vecteurs* $v_1 = (1, 1, -1)$*,* $v_2 = (0, 2, 1)$ *et* $v_3 = (0, 0, 5)$ *sont libres. En effet, supposons qu'il existe des réels* λ_1*,* λ_2*,* λ_3 *tels que* $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$*, c'est-à-dire :*

$$\lambda_1(1, 1, -1) + \lambda_2(0, 2, 1) + \lambda_3(0, 0, 5) = 0_{\mathbb{R}^3}.$$

On obtient :

$$(\lambda_1, \lambda_2, -\lambda_1 + \lambda_2 + 5\lambda_3) = 0_{\mathbb{R}^3},$$

donc

$$\begin{cases} \lambda_1 = & 0 \\ \lambda_2 = & 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 + 5\lambda_3 = & 0 \end{cases},$$

ce qui donne immédiatement $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Exemple 1.11 *Dans* $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *la famille* $\{\sin, \cos, \exp\}$ *est libre. Soient* $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ *tels que* $\alpha \sin + \beta \cos + \gamma \exp = 0$*. Alors pour tout* $x \in \mathbb{R}$*,* $\alpha \sin(x) + \beta \cos(x) + \gamma \exp(x) = 0$*, ce qui s'écrit aussi*

$$\alpha \frac{\sin(x)}{\exp(x)} + \beta \frac{\cos(x)}{\exp(x)} + \gamma = 0.$$

On montre facilement en utilisant le théorème des gendarmes que

$$lim_{+\infty} \frac{\sin(x)}{\exp(x)} = lim_{+\infty} \frac{\cos(x)}{\exp(x)} = 0.$$

On en déduit que $\gamma = 0$*. On a alors* $\forall x \in \mathbb{R}$*,* $\alpha \sin(x) + \beta \cos(x) + \gamma \exp(x) = 0$*. Si on fait* $x = 0$ *on obtient* $\beta = 0$ *et si on fait* $x = \pi/2$*, il vient que* $\alpha = 0$*. On a alors bien montré que* $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Proposition 1.4 *Une famille* $\{v_1, ..., v_p\}$ *est liée si et seulement si l'un au moins des vecteurs* v_i *s'écrit comme combinaison linéaire des autres vecteurs de la famille.*

Preuve. $\Longrightarrow$) : Si $\{v_1, ..., v_p\}$ est liée, il existe λ_1,..., λ_p non tous nuls tels que $\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_p v_p = 0$. Si, par exemple $\lambda_1 \neq 0$, on pourra écrire :

$$v_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} v_2 + ... + \frac{-\lambda_p}{\lambda_1} v_p.$$

$\Longleftarrow$) : Supposons par exemple, que v_1 est combinaison linéaire des vecteurs $\lambda_2 v_2, ..., \lambda_p v_p$, alors il existe $\mu_2, ..., \mu_p \in \mathbb{k}$ tels que $v_1 = \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_p v_p$, c'est-à-dire :

$$v_1 - \lambda_2 v_2 - ... - \lambda_p v_p = 0.$$

Il existe donc une combinaison linéaire des vecteurs $\{v_1, ..., v_p\}$ qui est nulle, sans que les coefficients soient tous nuls. Donc la famille est liée. $\square$

Proposition 1.5 *Soit $\{v_1, ..., v_p\}$ une famille libre et x un vecteur quelconque de l'espace engendré par les vecteurs v_i (c'est-à-dire x est combinaison linéaire des v_i). Alors la décomposition de x sur les v_i est unique.*

Preuve. Soient

$$\begin{aligned} x &= \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_p v_p, \\ x &= \beta_1 v_1 + ... + \beta_p v_p, \end{aligned}$$

deux décompositions de x. En faisant la différence on trouve :

$$(\lambda_1 - \beta_1) v_1 + ... + (\lambda_p - \beta_p) v_p = 0.$$

Puisque la famille est libre, on a $(\lambda_1 - \beta_1) = ... = (\lambda_p - \beta_p) = 0$, c'est-à-dire : $\lambda_1 = \beta_1, ..., \lambda_p = \beta_p$. □

Definition 1.7 (Base) *On appelle base une famille à la fois génératrice et libre.*

Proposition 1.6 *Une famille $\{v_1, ..., v_p\}$ est une base de E si et seulement si tout $x \in E$ se décompose d'une façon unique sur les v_i. C'est-à-dire :*
$\forall x \in E$ il existe un unique n-uplet $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \Bbbk^n$ tel que :

$$x = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n.$$

Preuve. L'existence de la décomposition pour tout $x \in E$ équivaut au fait que la famille est génératrice ; l'unicité au fait que la famille est libre. □

Exemple 1.12 (Base canonique de $\mathbb{R}^n$) *Soient les vecteurs :*

$$e_1 = (1, 0, ..., 0), ..., e_i = (0, ..., \underbrace{1}_{i^e rang}, ..., 0), ..., e_n = (0, 0, ..., 1).$$

On sait déjà qu'ils forment une famille génératrice. Montrons qu'elle est libre. On a :

$$\lambda_1 e_1 + ... + \lambda_i e_i + ... + e_n v_n = 0_{\mathbb{R}^n},$$

c'est-à-dire :

$$\lambda_1 (1, 0, ..., 0) + ... + \lambda_i (0, ..., \underbrace{1}_{i^e rang}, ..., 0) + ... + \lambda_n (0, 0, ..., 1) = 0_{\mathbb{R}^n},$$

donc :

$$(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) = 0_{\mathbb{R}^n}.$$

Par conséquent $\{e_1, ..., e_n\}$ est une base de $\mathbb{R}^n$, dite base canonique.

Exemple 1.13 (***Base canonique de*** $\mathbb{R}_n[x]$) *La famille* $\mathcal{B} = \{1, x, ..., x^n\}$ *est une base de* $\mathbb{R}_n[x]$*, En effet, tout* $P(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$*,* $a_i \in \mathbb{R}$ *; B est donc génératrice. De plus :*

$$\lambda_0 1 + \lambda_1 x + ... + \lambda_n x^n = 0 \Longrightarrow \lambda_0 = \lambda_1 = ... = \lambda_n = 0.$$

Exemple 1.14 *Soit* $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ 2x + y + 2z = 0\}$*. Chercher une base de* F*. On a vu* F *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$*, On a :* $(x, y, z) \in F \Leftrightarrow y = -2x - 2z$ *donc :*

$$u \in F \Leftrightarrow u = (x, -2x - 2z, z) \Leftrightarrow u = x(1, -2, 0) + z(0, -2, 1).$$

Par conséquent les vecteurs $v_1 = (1, 2, 0), v_2 = (0, -3, 1)$ *forment une famille génératrice de* F*. D'autre part :*

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1(1, -2, 0) + \lambda_2(0, -2, 1) = (0, 0, 0),$$

ce qui est équivalent à $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$*. Donc* $\{v_1, v_2\}$ *est libre et par conséquent elle est une base de* F*.*

Proposition 1.7 *On a :*

1. $\{x\}$ *est une famille libre* $\Longleftrightarrow x \neq 0_E$*.*
2. *Toute famille contenant une famille génératrice est génératrice.*
3. *Toute sous-famille d'une famille libre est libre.*
4. *Toute famille contenant une famille liée est liée.*
5. *Toute famille* $\{v_1, ..., v_p\}$ *dont l'un des vecteurs* v_i *est nul, est liée.*

Preuve.

1. $\Longleftarrow$) D'après Proposition 1.1 (7), $\lambda \cdot x = 0_E \Longleftrightarrow (\lambda = 0_{\mathbb{k}}$ ou $x = 0_E)$. Donc, si $x \neq 0$, $\lambda x = 0$ implique $\lambda = 0$, ce qui signifie que $\{x\}$ est une famille libre.

   $\Longrightarrow$) Supposons que $\{x\}$ libre. Alors, d'après la définition de famille libre, si $\lambda x = 0$ on a nécessairement $\lambda = 0$, ce qui signifie, toujours d'après la proposition 1.1 (7), que $x \neq 0$.
2. Soit $\{v_1, ..., v_p\}$ une famille génératrice et $x = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_p v_p$ un élément arbitraire de E. On peut aussi écrire :

$$x = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_p v_p + 0w_1 + ... + 0w_q, \quad w_1, ..., w_q \in E.$$

   Donc tout $x \in E$ est combinaison linéaire de $v_1, ..., v_p, w_1, ..., w_q$.
3. Soit $\mathcal{T} = \{v_1, ..., v_p\}$ une famille libre et $\mathcal{T}'$ une sous-famille de $\mathcal{T}$. Quitte à changer la numérotation, on peut supposer que $\mathcal{T}\prime = \{v_1, ..., v_k\}$ (avec $k < p$). Si $\mathcal{T}\prime$ était liée, l'un des vecteurs $v_1, ..., v_k$ serait combinaison linéaire des autres. Il existerait donc un élément de $\mathcal{T}$ qui s'écrirait comme combinaison linéaire de certains éléments de $\mathcal{T}$. Or, cela est impossible car $\mathcal{T}$ est libre (voir Proposition 1.4).

4. Soit $\mathcal{F} = \{v_1, ..., v_p\}$ une famille liée et $\mathcal{G} = \{v_1, ..., v_p, w_1, ..., w_q\}$. D'après proposition 1.4, l'un des v_i est combinaison linéaire des autres. Or, les vecteurs v_i appartiennent à $\mathcal{G}$; donc l'un des éléments de $\mathcal{G}$ est combinaison linéaire des autres, et par conséquent $\mathcal{G}$ est liée.
5. Évident d'après 4., car il s'agit d'une famille contenant $\{0\}$, et $\{0\}$ est liée, d'après 1.

□

1.5 Dimension d'un espace vectoriel

Definition 1.8 (Dimension d'un espace vectoriel) *Si $E = \{0\}$, on dit que E est de dimension 0 et on note $\dim E = 0$. Sinon, si E est un espace vectoriel sur $\mathbb{k}$ de dimension finie non réduit à $\{0\}$, on appelle dimension de E le cardinal d'une base de E et on le note $\dim_{\mathbb{k}} E$.*

Exemple 1.15 $\dim \mathbb{R}^n = n$, $\dim \mathbb{R}_n[x] = n + 1$.

Remarque 1.5 *Une famille f d'au moins $n+1$ vecteurs dans un espace E de dimension n est toujours liée. En effet, si elle était libre alors on aurait une famille libre f de cardinal plus grand que celui de n'importe quelle base $\mathcal{B}$ de E. Or $\mathcal{B}$ est une famille génératrice de E et le cardinal d'une famille libre est toujours plus petit que celui d'une famille génératrice.*

1.6 Dimension d'un sous-espace vectoriel

Proposition 1.8 *Soient E un espace vectoriel de dimension finie n et F un sous-espace vectoriel de E. On a :*

1. *F est de dimension finie et $\dim F \leq \dim E$.*
2. $(\dim F = \dim E) \Leftrightarrow F = E$.

Remarque 1.6 *Pour montrer que deux sous-espaces vectoriels F et G sont égaux, il suffit de*
- *Montrer que $F \subset G$.*
- *Montrer que $\dim F = \dim G$.*

Exemple 1.16 *On considère $E = \mathbb{R}^4$ et*

$$\begin{aligned} F &= Vect((1,1,\alpha,3),(0,1,1,2)), \\ G &= \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 |\ x - y + z = 0, x + 2y - t = 0\}. \end{aligned}$$

Pour quelle condition sur $\alpha \in \mathbb{R}$ a-t-on $F = G$?

On Suppose que $F = G$. *Donc* $(1,1,\alpha,3) \in G$ *et doit vérifier en particulier l'équation* $x - y + z = 0$. *On trouve alors que* $\alpha = 0$.

Prouvons que si $\alpha = 0$ *alors* $F = G$. *On sait que* $F = Vect((1,1,0,3),(0,1,1,2))$. *Les vecteurs* $(1,1,0,3),(0,1,1,2)$ *donc engendrent* F *et ils sont non colinéaires ; alors ils forment une famille libre. C'est une base de* F *et alors* $\dim F = 2$. *Par ailleurs*

$$\begin{aligned} G &= \{(x,y,z,t) \in E \mid x - y + z = 0, x + 2y - t = 0\} \\ &= \{(x,y,y-x,x+2y) \mid x,y \in \mathbb{R}\} \\ &= Vect((1,0,-1,1),(0,1,1,2)), \end{aligned}$$

on prouve alors de la même façon qu'avant que $\dim G = 2$. *De plus* $(1,1,0,3)$ *et* $(0,1,1,2)$ *vérifient le système*

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + 2y - t = 0, \end{cases}$$

donc $(1,1,0,3),(0,1,1,2) \in G$ *et comme* G *est un sous-espace vectoriel,*

$$F = Vect((1,1,\alpha,3),(0,1,1,2) \subset G.$$

Finalement, comme $\dim F = \dim G$ *on obtient* $F = G$.

1.7 Somme de sous-espaces vectoriels

Definition 1.9 (Somme de deux sous-espaces vectoriels) *Considérons* F *et* G *deux sous-espaces vectoriels d'un* $\Bbbk$*-espace vectoriel* E. *On appelle somme de* F *et* G *et on note* $F + G$ *le sous-espace vectoriel de* E *donné par*

$$F + G = \{x + y \mid (x,y) \in F \times G\}.$$

Remarque 1.7 *Le sous-ensemble* $F + G$ *est bien un sous-espace vectoriel de* E. *En effet,* $F + G \subset E$ *car* E *est stable pour l'addition. De plus,* $F + G$ *est non vide car* F *et* G *le sont. Enfin, si* $u = x + y \in F + G$ *et* $u' = x' + y' \in F + G$ *avec* $x, x' \in F$ *et* $y, y' \in G$ *alors, pour* $\alpha, \beta \in \Bbbk$.

$$\alpha u + \beta u' = \underbrace{\alpha x + \beta x'}_{\in F} + \underbrace{\alpha y + \beta y'}_{\in G} \in F + G,$$

car F *et* G *sont des sous-espaces vectoriels.*

Proposition 1.9 *Soient* F *et* G *deux sous-espaces vectoriels d'un* $\Bbbk$*-espace vectoriel* E. *Alors* $F + G$ *est le plus petit sous-espace vectoriel de* E *contenant* $F \cup G$.

Preuve. On a prouvé dans la remarque précédente que $F+G$ est un sous-espace vectoriel de E. Il contient F et G car 0_E est élément de F et G et donc $F = F + 0_E \subset F + G$ et $G = 0_E + G \subset F + G$. De plus, si on considère un sous-espace H de E qui contient $F \cup G$ alors montrons que$F + G \subset H$. Soients$x + y \in F + G$ avec $x \in F$ et $y \in G$. Comme $F \cup G \subset H$, on a aussi $x, y \in H$ et comme H est un sous-espace vectoriel, il s'ensuit que $x + y \in H$. Donc $F + G \subset H$ et $F + G$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant F et G. $\square$

Exemple 1.17 *Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ soient $F = Vect(\sin)$ et $G = Vect(\exp)$ alors :*

$$F + G = Vect\,(\sin, \exp) = \{x \mapsto \alpha \sin(x) + \beta \exp(x) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

Proposition 1.10 *Soient A et B deux parties d'un K-espace vectoriel E alors*

$$Vect(A) + Vect(B) = Vect(A \cup B).$$

Exemple 1.18 *Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, on considère les parties $F = \{(x, 0, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ et $G = \{(x, x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$. Montrons que ce sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ et déterminons le sous-espace $F + G$. On a $F = Vect(1, 0, 0)$ et $G = Vect(1, 1, 0)$ donc F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. De plus $F+G = Vect((1, 0, 0), (1, 1, 0))$ et on reconnait que $F+G$ est le plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par $(1, 0, 0)$ et $(1, 1, 0)$.*

1.7.1 Somme directe, sous-espaces supplémentaires

Definition 1.10 (Somme directe) *On dit que deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont en somme directe si $F \cap G = \{0_E\}$. On note alors $F \oplus G$ leur somme.*

En d'autres termes :

$$\zeta = F \oplus G \Leftrightarrow \begin{cases} \zeta = F + G \\ \quad et \\ F \cap G = \{0_E\}. \end{cases}$$

Exemple 1.19 *Dans $\mathbb{C}$, les sous-espace vectoriels $F = \mathbb{R}$ et $G = i\mathbb{R}$ sont en somme directe :*

Soit $x \in F \cap G$, donc $x \in F$ alors x est réel, et $x \in G$ alors x est imaginaire pur. x est un complexe à la fois réel et imaginaire pur donc $x = 0_E$.

Exemple 1.20 *Dans $E = \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on considère*

$$F = \{f \in E \mid f(0) = 0\}\} \text{ et } G = Vect(x \mapsto 1).$$

Il est clair que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E. G est l'ensemble des applications constantes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Soit $f \in F \cap G$. $f \in F$ donc $f(0) = 0$. De même $f \in G$ donc il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = a$. Mais $a = f(0) = 0$ donc $f = 0_E$. Donc F et G sont en somme directe.

Proposition 1.11 *Soient F et G deux sous-espaces vectoriels du $\mathbb{k}$-espace vectoriel E. F et G sont en somme directe si et seulement si $\forall x \in F+G, \exists!(x_1, x_2) \in F \times G : x = x_1 + x_2$ (c'est-à-dire, la décomposition de x est unique).*

Preuve. $\Longrightarrow$) Supposons que F et G soient en somme directe et soit $x \in F+G$. Par définition, il existe $x_1 \in F$ et $x_2 \in G$ tels que $x = x_1 + x_2$. Supposons qu'il existe $x_1' \in F$ et $x_2' \in G$ tels qu'on ait encore $x = x_1' + x_2'$. Comme $x = x_1 + x_2 = x_1' + x_2'$, on a l'égalité : $x_1 - x_1' = x_2 - x_2'$. Notons y ce vecteur. Comme F et G sont des sous-espaces vectoriels de E, $y = x_1 - x_1' \in F$ et $y = x_2 - x_2' \in G$. Par conséquent $y \in F \cap G$. Mais F et G étant en somme directe, on a $F \cap G$ $= \{0_E\}$ donc $y = 0$. Par conséquent, $x_1 = x_1'$ et $x_2 = x_2'$ et alors l'unicité.

$\Longleftarrow$) Soit $x \in F \cap G$. Il existe alors deux couples de $F \times G$ permettant de décomposer x en un vecteur de F et un vecteur de G :$(x, 0)$ et $(0, x)$. Par hypothèse, elles sont égales : $(x, 0) = (0, x)$. Par conséquent$x = 0$ et les sous-espaces F et G sont en somme directe. □

Definition 1.11 (Sous-espaces supplémentaires) *Soit E un espace vectoriel et F, G deux sous-espaces vectoriels de E. On dit que F et G sont supplémentaires (ou que G est un supplémentaire de F), si $E = F \oplus G$.*

Proposition 1.12 *Soit E un espace vectoriel et F, G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors $E = F \oplus G$ (F et G sont supplémentaires) si et seulement si pour toute base $\mathcal{B}_1$ et F et toute base $\mathcal{B}_2$ de G, $\{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2\}$ est une base de E.*

Preuve. $\Longleftarrow$) Soient $\mathcal{B}_1 = \{v_\alpha\}_{\alpha \in A}$ et $\mathcal{B}_2 = \{w_\beta\}_{\beta \in B}$ des bases de F et G respectivement et supposons que $\{v_\alpha, w_\beta\}_{(\alpha,\beta) \in A \times B}$ est une base de E. Alors tout $x \in E$ s'écrit d'une manière unique :

$$x = \lambda_1 v_{\alpha_1} + ... + \lambda_p v_{\alpha_p} + \mu_1 w_{\beta_1} + ... + \mu_q w_{\beta_q},$$

c'est-à-dire tout $x \in E$ s'écrit d'une manière unique $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in F$ et $x_2 \in G$, donc $E = F \oplus G$.
$\Longrightarrow$) Si $E = F \oplus G$, tout $x \in E$ se décompose d'une manière unique sur F et G et, par conséquent, sur la famille $\mathcal{B} = \{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2\}$. On en déduit que $\mathcal{B}$ est une base de E. □

Corollaire 1.1 *Soit E un espace vectoriel. Pour tout sous-espace vectoriel F, il existe toujours un supplémentaire. Le supplémentaire de F n'est pas unique, mais si E est de dimension finie, tous les supplémentaires de F ont même dimension.*

Théorème 1.1 *Soient E un espace vectoriel de dimension finie et F, G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors*

$$\dim (F+G) \Leftrightarrow \dim F + \dim G - \dim F \cap G.$$

Preuve. Supposons que $\dim F = p$, $\dim G = q$ et $\dim F \cap G = r$. Notons que, puisque $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de F et de G, on a $r < p$ et $r < q$. Considérons une base $\{a_1, ..., a_r\}$ de $F \cap G$. Puisque la famille $\{a_1, ..., a_r\}$ est libre, on peut la compléter en une base de F et aussi en une base de G. On peut donc construire : une base de F du type $\{a_1, ..., a_r, e_{r+1}, ..., e_p\}$ et une base de G du type $\{a_1, ..., a_r, f_{r+1}, ..., f_q\}$.

On sait que tout vecteur de $F + G$ s'écrit comme somme d'un vecteur de F, et d'un vecteur de G et donc il est de la forme :

$$\begin{aligned} x &= \lambda_1 a_1 + ... + \lambda_r a_r + \lambda_{r+1} e_{r+1} + ... + \lambda_p e_p + \\ & \quad \mu_1 a_1, ... + \mu_r a_r + \mu_{r+1} f_{r+1}, ... + \mu_q f_q, \end{aligned}$$

c'est-à-dire, en posant $\tau_i = \lambda_i + \mu_i$, pour $i = 1, ..., r$:

$$x = \tau_1 a_1 + ... + \tau_r a_r + \lambda_{r+1} e_{r+1} + ... + \lambda_p e_p + \mu_{r+1} f_{r+1}, ... + \mu_q f_q. \tag{1.2}$$

Par conséquent, la famille $\{a_1, ..., a_r, e_{r+1}, ..., e_p, f_{r+1}, ..., f_q\}$ engendre $F + G$. Montrons qu'elle est libre. Soit une combinaison linéaire nulle :

$$\underbrace{\tau_1 a_1 + ... + \tau_r a_r}_{\alpha \in F \cap G} + \underbrace{\lambda_{r+1} e_{r+1} + ... + \lambda_p e_p}_{\beta \in F} + \underbrace{\mu_{r+1} f_{r+1}, ... + \mu_q f_q}_{\gamma \in G} = 0.$$

On a $\alpha + \beta + \gamma = 0$, donc $\gamma = -(\alpha + \beta)$. Alors $\gamma \in g$ et $\alpha + \beta \in F$, donc $\gamma \in F \cap G$.
Par conséquent, γ peut s'écrire comme combinaison linéaire des a_i :

$$\mu_{r+1} f_{r+1}, ... + \mu_q f_q = \delta_1 a_1 + ... + \delta_r a_r.$$

Mais $\{a_1, ..., a_r, \mu_{r+1} f_{r+1}, ... + \mu_q f_q\}$ est une base de G donc tous les coefficients de cette combinaison linéaire doivent être nuls. En particulier, $\mu_{r+1} = 0, ..., \mu_q = 0$. De même $\lambda_{r+1} = 0, ..., \lambda_q = 0$. D'après (1.2) on déduit alors que :

$$\tau_1 a_1 + ... + \tau_r a_r = 0.$$

Or la famille $\{a_1, ..., a_r\}$ est libre, donc $\tau_1 = 0, ..., \tau_r = 0$. Ainsi la famille

$$\{a_1, ..., a_r, e_{r+1}, ..., e_p, f_{r+1}, ..., f_q\},$$

est libre et donc elle est une base de $F + G$. On en déduit :

$$\begin{aligned} \dim(F + G) &= r + (p - r) + (q - r) = p + q - r \\ &= \dim E + \dim G + \dim F \cap G. \end{aligned}$$

□

Corollaire 1.2 *Soient E un espace vectoriel de dimension finie et F, G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors*

$$E = F \oplus G \Leftrightarrow \begin{cases} F \cap G = \{0_E\} \\ \dim E = \dim F + \dim G. \end{cases}$$

Exemple 1.21 *Dans $E = \mathbb{C}$, $F = Vect(\{1\})$ et $G = Vect(\{i\})$. On sait que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E. Si $x \in F \cap G$ alors x est à la fois réel et imaginaire pur donc $x = 0$ et $F \cap G = \{0_E\}$. De plus*

$$F + G = Vect(1) + Vect(i) = Vect(1, i) = \mathbb{C},$$

donc $E = F + G$. On a montré alors que F et G sont supplémentaires.

Exemple 1.22 *Dans $\mathbb{R}^3$, soit π un plan vectoriel et v un vecteur non contenu dans ce plan. On a :*

$$\mathbb{R}^3 = \pi \oplus Vect(v),$$

car si $\{e_1, e_2\}$ est une base de π, alors $\{e_1, e_2, v\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

1.8 Exercices corrigés

Exercice 1.

1. Est-ce que la partie $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y = 2x\}$ de $\mathbb{R}^2$, muni des lois habituelles de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ?

2. Est-ce que la partie $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, y^2 = 2x, z = 0\}$ de $\mathbb{R}^3$, muni des lois habituelles de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$?

Solution. 1. $0 = 2 \times 0$ donc $0_{\mathbb{R}^2} \in E$.

Soient $u = (x,y) \in E, y = 2x$ et $u' = (x',y') \in E, y' = 2x'$

$\forall\ \lambda,\ \lambda' \in \mathbb{R}$

$$\lambda u + \lambda' u' = (\lambda x + \lambda' x', \lambda y + \lambda' y') = (X,Y)Y = \lambda y + \lambda' y' = \lambda 2x + \lambda' 2x' = 2\left(\lambda x + \lambda' x'\right) = 2X.$$

Donc $\lambda u + \lambda' u' \in E$. Alors que E est un sous-espace de $\mathbb{R}^2$.

2. Soit $u = (2,2,0) \in F$ car $y^2 = 2^2 = 2 \times 2 = 2x$ et $z = 0$.

$2u = (4,4,0)$, $y^2 = 4^2 = 16 \neq 2 \times 4 = 8$ donc $2u \notin F$ donc F n'est pas un sous-espace vectoriel.

□

Exercice 2.

On considère dans $\mathbb{R}^4$ les vecteurs $u_1 = (1,2,3,4)$ et $u_2 = (1,-2,3,-4)$. Trouver x et y pour que $(x,1,y,1) \in Vect\left(u_1,u_2\right)$? Et pour que $(x,1,1,y) \in Vect\left(u_1,u_2\right)$?

Solution. Le problème est de trouver x et y tels qu'il existe α et β vérifiant $(x,1,y,1) = \alpha u_1 + \beta u_2$

$$\begin{cases} x = \alpha + \beta \\ 1 = 2\alpha - 2\beta \\ y = 3\alpha + 3\beta \\ 1 = 4\alpha - 4\beta \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + \beta \\ -4\beta = 1 - 2x \\ y = y - 3x \\ -8\beta = 1 - 4x \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + \beta \\ -4\beta = 1 - 2x \\ y = y - 3x \\ 0 = -1. \end{cases}$$

D'après la dernière ligne le système n'y a pas de solution.

Le problème est de trouver x et y tels qu'il existe α et β vérifiant $(x,1,1,y) = \alpha u_1 + \beta u_2$

$$\begin{cases} x = \alpha + \beta \\ 1 = 2\alpha - 2\beta \\ 1 = 3\alpha + 3\beta \\ y = 4\alpha - 4\beta \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + \beta \\ -4\beta = 1 - 2x \\ 0 = 1 - 3x \\ -8\beta = y - 4x \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + \beta \\ -4\beta = 1 - 2x \\ x = \frac{1}{3} \\ 0 = y - 4x - 2\left(1 - 2x\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + \beta \\ -4\beta = 1 - 2x \\ x = \frac{1}{3} \\ y = 2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{3} = \alpha + \beta \\ \beta = \frac{-1}{12} \\ x = \frac{1}{3} \\ y = 2 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{5}{12} \\ \beta = \frac{-1}{12} \\ x = \frac{1}{3} \\ y = 2 \end{cases}$$

$$\left(\frac{1}{3}, 1, 1, 2\right) = \frac{5}{12}u_1 - \frac{1}{12}u_2.$$

□

Exercice 3.
Soit dans $\mathbb{R}^4$ l'ensemble E des vecteurs (x_1, x_2, x_3, x_4) vérifiant $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$.
E est-il un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$? Donner une base.

Solution. Un vecteur x de E s'écrit

$$\begin{aligned} x &= (-x_2 - x_3 - x_4, x_2, x_3, x_4) \\ &= x_2(-1, 1, 0, 0) + x_3(-1, 0, 1, 0) + x_4(-1, 0, 0, 1) \end{aligned}$$

Donc $E = Vect((-1, 1, 0, 0), (-1, 0, 1, 0), (-1, 0, 0, 1)), E$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
Il reste donc à montrer que $((-1, 1, 0, 0), (-1, 0, 1, 0), (-1, 0, 0, 1))$ est libre (Puisque cette famille est déjà génératrice).

$$\begin{aligned} \alpha(-1, 1, 0, 0) + \beta(-1, 0, 1, 0) + \gamma(-1, 0, 0, 1) &= (0, 0, 0, 0) \\ &\Rightarrow \begin{cases} -\alpha - \beta - \gamma = 0 \\ \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Cette famille est libre, c'est une base de E.

□

Exercice 4.
Soit E un $\mathbb{R}-$espace vectoriel, on considère v_1, v_2, v_3 et v_4 une famille libre d'éléments de E, Dire si les familles suivantes sont libres ou non ? Justifier

1. $(v_1, 2v_2, v_3)$.
2. (v_1, v_3) .
3. $(v_1, 2v_1 + v_4, v_4)$.
4. $(3v_1 + v_3, v_3, v_2 + v_3)$.

5. $(2v_1 + v_2, v_1 - 3v_2, v_4, v_2 - v_1)$.

Solution. 1. Oui évidemnet, sinon

$$\begin{aligned}
\alpha v_1 + 2\beta v_2 + \gamma v_3 &= 0_E \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ 2\beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases} \\
&\Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

2. Une sous famille d'une famille libre est libre.

3.

$$2v_1 - (2v_1 + v_4) + v_4 = 0_{\mathbb{R}^n}.$$

Il existe une combinaison linéaire non identiquement nulle de ces trois vecteurs, la famille est liée.

4.

$$\begin{aligned}
\alpha(3v_1 + v_3) + \beta v_3 + \gamma(v_2 + v_3) &= 0_{\mathbb{R}^n} \\
&\Rightarrow 3\alpha v_1 + \gamma v_2 + (\alpha + \beta + \gamma) v_3 = 0_E \\
&\Rightarrow \begin{cases} 3\alpha = 0 \\ \gamma = 0 \\ \alpha + \beta + \gamma = 0 \end{cases} \\
&\Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

La famille est libre.

5. Il y a trois vecteurs $2v_1 + v_2, v_1 - 3v_2, v_2 - v_1$ dans le plan $Vect(v_1, v_2)$ donc ces trois vecteurs forment une famille liée, en rajoutant v_4 cela ne change rien, la famille est liée.

□

Exercice 5.

On considère dans $\mathbb{R}^4$ les sous-espaces F et G suivants :

$$F = Vect((1,0,1,1), (-1,-2,3,-1), (-5,-3,1,5)),$$

$$G = \mathrm{Vect}((-1,-1,1,-1), (4,1,2,4)).$$

Comparer F et G.

Solution. On a :

$u = (x, y, z, t) \in F \Leftrightarrow$ il existe α, β, γ réels tels que

$$u = \alpha(1, 0, 1, 1) + \beta(-1, -2, 3, -1) + \gamma(-5, -3, 1, 5)$$

$$\begin{cases} \alpha - \beta - 5\gamma = x \\ -2\beta - 3\gamma = y \\ \alpha + 3\beta + \gamma = z \\ \alpha - \beta + 5\gamma = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - \beta - 5\gamma = x \\ -2\beta - 3\gamma = y \\ 3\beta + 6\gamma = -x + z \\ 10\gamma = -x + t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - \beta - 5\gamma = x \quad \ldots \quad \text{L1} \\ -2\beta - 3\gamma = y \quad \ldots \quad \text{L2} \\ -x + z + 2y = 0 \quad \ldots \quad \text{L3} \\ 10\gamma = -x + t \quad \ldots \quad \text{L4} \end{cases}$$

α, β, γ sont donnés par les équations L_1, L_2 et L_4 donc

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, -x + 2y + z = 0\}$$
$$-(-1) + 2(-1) + 1 = 0 \Rightarrow (-1, -1, 1, -1) \in F$$
$$-4 + 2 \times 1 + 2 = 0 \Rightarrow (4, 1, 2, 4) \in F.$$

Cela montre que $G \subset F$.
On reprend calcul de $u = \alpha(1, 0, 1, 1) + \beta(-1, -2, 3, -1) + \gamma(-5, -3, 1, 5)$ avec $u = (0, 0, 0, 0)$
On trouve

$$\begin{cases} \alpha - \beta - 5\gamma = x \\ -2\beta - 3\gamma = y \\ 0 = -x + z + 2y \\ 10\gamma = -x + t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - \beta - 5\gamma = 0 \\ -2\beta - 3\gamma = 0 \\ 0 = -0 + 0 + 2 \times 0 \\ 10\gamma = -0 + 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0. \end{cases}$$

C'est bon, $\dim(F) = 3$.

$$F \subset G, \dim(G) < \dim(F) \Rightarrow G \subsetneq F.$$

Alors G est inclus dans F mais G n'est pas égal à F.

$\square$

Exercice 6.
On considère dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ la famille des fonctions $x \mapsto \sin(x), x \mapsto \sin(2x)$ et $x \mapsto \sin(3x)$, cette famille est-elle libre ?

Solution. On a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \alpha \sin(x) + \beta \sin(2x) + \gamma \sin(3x) = 0.$$

Pour $x = \frac{\pi}{3}$,

$$\begin{aligned}&\alpha \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + \beta \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \gamma \sin(\pi) = 0\\ &\Leftrightarrow \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 0 \Leftrightarrow \beta = -\alpha\\ &\forall x \in \mathbb{R}, \alpha \sin(x) - \alpha \sin(2x) + \gamma \sin(3x) = 0.\end{aligned}$$

Pour $x = \frac{\pi}{2}$,

$$\begin{aligned}&\alpha \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \alpha \sin(\pi) + \gamma \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \gamma = \alpha\\ &\forall x \in \mathbb{R}, \alpha \sin(x) - \alpha \sin(2x) + \alpha \sin(3x) = 0.\end{aligned}$$

Pour $x = \frac{2\pi}{3}$

$$\begin{aligned}&\alpha \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) - \alpha \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) + \alpha \sin(2\pi) = 0\\ &\Leftrightarrow \alpha\left(\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)\right) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0.\end{aligned}$$

Donc $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Cette famille est libre.

□

Exercice 7.

On considère $f(x) = \cos(x), g(x) = \cos(x)\cos(2x)$ et $h(x) = \sin(x)\sin(2x)$. Trouver $Vect(f, g, h)$.

Solution. $F \in \text{Vect}(f, g, h) \Leftrightarrow$ il existe α, β et γ tels que $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}F(x) &= \alpha \cos(x) + \beta \cos(x)\cos(2x) + \gamma \sin(x)\sin(2x)\\ &= \alpha \cos(x) + \beta \cos(x)\left(1 - 2\cos^2(x)\right) + 2\gamma \sin^2(x)\cos(x)\\ &= \alpha \cos(x) + \beta \cos(x) - 2\beta \cos^3(x) + 2\gamma\left(1 - \cos^2(x)\right)\cos(x)\\ &= (\alpha + \beta + 2\gamma)\cos(x) + (-2\beta - 2\gamma)\cos^3(x).\end{aligned}$$

Donc $F \in \text{Vect}\left(\cos, \cos^3\right)$

Ce qui signifie que $\text{Vect}(f, g, h) \subset \text{Vect}\left(\cos, \cos^3\right)$, l'inclusion dans l'autre sens l'inclusion est évidente donc

$$\text{Vect}(f, g, h) = \text{Vect}\left(\cos, \cos^3\right).$$

Qui est évidemment un espace vectoriel de dimension 2. □

Exercice 8.

On considère $a = (2, 3, -1), b = (1, -1, -2), c = (3, 7, 0)$ et $d = (5, 0, -7)$.

Soient les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ $E = Vect(a, b)$ et $F = Vect(c, d)$. Prouver que $E = F$.

Solution. On a

$$\begin{aligned}c &= 2a - b \in \text{Vect}\,(a, b) = E\\ d &= a + 3b \in \text{Vect}\,(a, b) = E.\end{aligned}$$

Donc $F \subset E$, or a et b ne sont pas proportionnels donc (a, b) est une base de E et $\dim(E) = 2$, de même c et d ne sont pas proportionnels donc (c, d) est une base de F et $\dim(F) = 2$.

On a : (a, b) est une famille génératrice de E et que (c, d) est une famille génératrice de F.

$$\begin{cases} E \subset F \\ \dim(E) = \dim(F) \end{cases} \Rightarrow E = F.$$

□

Exercice 9.

On considère $E = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_2 = 0 \text{ et } x_3 - x_4 = 0\}$

On suppose que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

1. Donner une base de E.
2. Compléter cette base en une base de $\mathbb{R}^4$.

Solution. 1. On a :

$$\begin{aligned} x &= (x_1, x_2, x_3, x_4) \in E \Leftrightarrow \begin{cases} x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \\ x_1 - x_2 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = (x_2, x_2, x_4, x_4) \\ x_1 = x_2 \\ x_3 = x_4, \end{cases} \\ x &= (x_2, x_2, x_4, x_4) = x_2(1, 1, 0, 0) + x_4(0, 0, 1, 1). \end{aligned}$$

On pose $a = (1, 1, 0, 0)$ et $b = (0, 0, 1, 1)$.

$E = \text{Vect}(a, b)$ ce qui entraine que $\{a, b\}$ est une famille génératrice de E, et d'autre part $\{a, b\}$ est une famille libre, donc c'est une base de E.

2. Soit $c = (1, 0, 0, 0) \notin E$ car les composantes de c ne vérifient pas les équations caractérisant E. $\{a, b\}$ est libre dans E et $c \notin E$ donc $\{a, b, c\}$ est libre.

$$\begin{aligned} x &= (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \text{Vect}(a, b, c) \\ &\Leftrightarrow \exists(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3, x = \alpha a + \beta b + \gamma c, \\ x &= \alpha a + \beta b + \gamma c \\ &\Leftrightarrow (x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha(1, 1, 0, 0) + \beta(0, 0, 1, 1) + \gamma(1, 0, 0, 0) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \alpha + \gamma \\ x_2 = \alpha \\ x_3 = \beta \\ x_4 = \beta \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \alpha + \gamma \\ x_2 = \alpha \\ x_3 = \beta \\ x_4 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Donc $\text{Vect}(a, b, c) = \{x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4, x_4 - x_3 = 0\}$.

Soit $d = (0, 0, 0, 1), d \notin \text{Vect}(a, b, c)$ car les composantes de d ne vérifient pas $x_3 - x_4 = 0$. $\{a, b, c\}$ est libre et $d \notin \text{Vect}(a, b, c)$ donc $\{a, b, c, d\}$ est une famille libre, elle a 4 éléments, c'est une base de $\mathbb{R}^4$.

$\square$

Exercice 10.
On considère $E = \{P \in \mathbb{R}_2[X], P(1) = 0\}$.
1. Prouver que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer une base de E et en déduire sa dimension.

Solution. 1. Le vecteur nul de $\mathbb{R}_2[X]$ est le polynôme nul, en 1 ce polynôme vaut 0 , le vecteur nul de $\mathbb{R}_2[X]$ est dans E.
Soit $P_1 \in E$ et $P_2 \in E$, donc $P_1(1) = 0$ et $P_2(1) = 0$.
Pour tout λ_1 et λ_2 deux réels,

$$(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)(1) = \lambda_1 P_1(1) + \lambda_2 P_2(1) = \lambda_1 \times 0 + \lambda_2 \times 0 = 0.$$

Donc $\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 \in E$
E est un sous-espace vectoriel de E.
2. Soit $P = aX^2 + bX + c \in E$,

$$P(1) = 0 \Leftrightarrow a \times 1^2 + b \times 1 + c = 0 \Leftrightarrow c = -a - b.$$

Donc

$$P = aX^2 + bX - a - b = a\left(X^2 - 1\right) + b(X - 1).$$

$X^2 - 1$ et $X - 1$ sont deux polynômes non proportionnels, ils forment une famille libre qui engendre E, c'est une base de E, et donc $\dim(E) = 2$.

$\square$

Exercice 11.
Soient les vecteurs $v_1 = (1,0,0,1), v_2 = (0,0,1,0), v_3 = (0,1,0,0), v_4 = (0,0,0,1)$ et $v_5 = (0,1,0,1)$ dans $\mathbb{R}^4$.
1. $Vect(v_1, v_2)$ et $Vect(v_3)$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?
2. Même question pour $Vect(v_1, v_3, v_4)$ et $Vect(v_2, v_5)$.
3. Même question pour $Vect(v_1, v_2)$ et $Vect(v_3, v_4, v_5)$

Solution. 1. $\dim(\mathrm{Vect}(v_1, v_2)) \leq 2$ et $\dim(\mathrm{Vect}(v_3)) = 1$ donc la somme des dimensions n'est pas 4 , ces espaces sont peut-être en somme directe mais cette somme n'est pas $\mathbb{R}^4$, ils ne sont donc pas supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.
Remarque : en fait $\dim(\mathrm{Vect}(v_1, v_2)) = 2$ car v_1 et v_2 ne sont pas colinéaires.
2.
D'abord on va regarder si la famille (v_1, v_3, v_4) est libre, si c'est le cas la réponse sera non car la dimension de cet espace sera 3 et celle de $\mathrm{Vect}(v_2, v_5)$ est manifestement 2 , donc la somme

des dimensions sera 5.

$$\begin{aligned}
\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_4 &= 0_{\mathbb{R}^4} \\
&\Rightarrow \alpha(1,0,0,1), +\beta(0,0,1,0) + \gamma(0,0,0,1) = (0,0,0,0) \\
&\Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ 0 = 0 \\ \beta = 0 \\ \alpha + \gamma = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0, \end{cases}$$

(v_1, v_3, v_4) est une famille libre qui engendre $\operatorname{Vect}(v_1, v_3, v_4)$, c'est donc une base de cet espace donc $\dim(\operatorname{Vect}(v_1, v_3, v_4)) = 3$, comme v_2 et v_5 ne sont pas proportionnels, (v_2, v_5) est une famille libre qui engendre $\operatorname{Vect}(v_2, v_5)$, c'est donc une base de cet espace et $\dim(\operatorname{Vect}(v_2, v_5)) = 2$.

De plus

$$\dim(\operatorname{Vect}(v_1, v_3, v_4)) + \dim(\operatorname{Vect}(v_2, v_5)) = 5 \neq \dim\left(\mathbb{R}^4\right).$$

Donc ces espace ne sont pas supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.

3. v_1 et v_2 ne sont pas colinéaires donc (v_1, v_2) est une famille libre qui engendre $\operatorname{Vect}(v_1, v_2)$, c'est une base de cet espace et $\dim(\operatorname{Vect}(v_1, v_2)) = 2$.

Manifestement $v_5 = v_3 + v_4$, $\operatorname{Vect}(v_3, v_4, v_5) = \operatorname{Vect}(v_3, v_4, v_3 + v_4) = \operatorname{Vect}(v_3, v_4)$, v_3 et v_4 ne sont pas colinéaires donc (v_3, v_4) est une famille libre qui engendre $\operatorname{Vect}(v_3, v_4, v_5) = \operatorname{Vect}(v_3, v_4)$ c'est donc une base de cet ensemble et $\dim(\operatorname{Vect}(v_3, v_4, v_5)) = 2$.

$$\dim(\operatorname{Vect}(v_1, v_2)) + \dim(\operatorname{Vect}(v_3, v_4, v_5)) = 4 = \dim\left(\mathbb{R}^4\right).$$

Il reste à prouver que l'intersection de ces espaces est réduite au vecteur nul.

Ce coup-ci je vais détailler un peu plus. Soit $u \in \operatorname{Vect}(v_1, v_2) \cap \operatorname{Vect}(v_3, v_4)$, il existe α, β, γ et δ réels tels que :

$$u = \alpha v_1 + \beta v_2 \text{ et } u = \gamma v_3 + \delta v_4.$$

Ce qui entraine que

$$\alpha v_1 + \beta v_2 = \gamma v_3 + \delta v_4 \Leftrightarrow \alpha v_1 + \beta v_2 - \gamma v_3 - \delta v_4 = 0_{\mathbb{R}^4}.$$

Cela montre que

$u = 0_{\mathbb{R}^4} \Leftrightarrow (\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (0,0,0,0) \Leftrightarrow (v_1, v_2, v_3, v_4)$ est libre. Résultat que l'on utilise sans avoir à le montrer.

Mais ici, si on montre que la famille est libre, comme elle a 4 vecteurs, cela montrera que c'est une base de $\mathbb{R}^4$ et que

$$\text{Vect}\,(v_1, v_2) \oplus \text{Vect}\,(v_3, v_4) = \mathbb{R}^4.$$

Mais dans cet exercice il fallait quand prouver qu'on y va :

$$\text{Vect}\,(v_3, v_4, v_5) = \text{Vect}\,(v_3, v_4, v_3 + v_4) = \text{Vect}\,(v_3, v_4)\,.$$

$$\begin{aligned}
\alpha v_1 + \beta v_2 - \gamma v_3 - \delta v_4 &= 0_{\mathbb{R}^4} \\
&\Leftrightarrow \alpha(1,0,0,1), +\beta(0,0,1,0) - \gamma(0,1,0,0) - \delta(0,0,0,1) = (0,0,0,0) \\
&\Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ -\gamma = 0 \\ \beta = 0 \\ \alpha - \delta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \\ \delta = 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

Donc $u = \alpha v_1 + \beta v_2 = 0_{\mathbb{R}^4}$ et $\text{Vect}\,(v_1, v_2) \cap \text{Vect}\,(v_3, v_4) = \{0_{\mathbb{R}^4}\}$

Comme la somme des dimensions est 4 on a :

$$\text{Vect}\,(v_1, v_2) \oplus \text{Vect}\,(v_3, v_4, v_5) = \text{Vect}\,(v_1, v_2) \oplus \text{Vect}\,(v_3, v_4) = \mathbb{R}^4.$$

□

CHAPITRE 2

APPLICATIONS LINÉAIRES

En algèbre linéaire, on s'intéresse aux applications qui préservent la structure d'espace vectoriel, c'est-à-dire, les applications d'un espace vectoriel dans un autre qui préservent les combinaisons linéaires. Dans ce chapitre, qui est un peu l'axe de tout le reste du document, nous allons donner essentiellement les définitions et les résultats elémentaires de base.

Les notions abordées dans ce chapitre sont :

— Définitions : Application linéaire, Noyau, image et rang d'une application linéaire.

2.1 Définitions

Definition 2.1 *Soient E et E' deux espaces vectoriels sur le même corps $\mathbb{k}$ et f une application de E dans E'. On dit que f est linéaire, si :*

1. $f(v+w) = f(v) + f(w)$, $\forall v, w \in E$,
2. $f(\lambda v) = \lambda f(v), \forall v \in E, \forall \lambda \in \mathbb{k}$.

L'ensemble des applications linéaires de E dans E' est noté $\mathcal{L}_{\mathbb{k}}(E, E')$ ou, plus simplement, $\mathcal{L}(E, E')$.

Si une application linéaire f de E dans E (même espace de départ et d'arrivée). on dit que f est un ***endomorphisme*** *de E. L'ensemble des endomorphismes de E est noté $End_{\mathbb{k}}(E)$ ou, plus simplement $End(E)$.*

Si une application linéaire f est bijective, on dit que f est un ***isomorphisme*** *d'espaces vectoriels.*

Remarque 2.1
1. *Si f est linéaire, on a : $f(0) = 0$. Il suffit de faire $\lambda = 0$ dans $f(\lambda x) = \lambda f(x)$.*
2. *D'après 1) et 2), une application $f : E \to E'$ est linéaire, si et seulement si, pour tout $\lambda \in \mathbb{k}$ et pour tout $x, y \in E$, on a*
$$f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y).$$

Exemple 2.1 *Soient E un $\mathbb{k}$-espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E. On appelle injection canonique de F dans E, l'application $i : F \to E$ définie par :*
$$\forall x \in F,\ i(x) = x.$$
Alors i est une application linéaire.

Exemple 2.2
$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z) & \mapsto & (2x+y, y-z), \end{array}$$
est une application linéaire.

Si $v = (x, y, z)$ et $w = (x', y\prime, z')$, on a :
$$\begin{array}{rcl} f(v+w) & = & f(x+x', y+y', z+z') \\ & = & (2(x+x') + (y+y'), y+y'-z-z') \\ & = & (2x+y, y-z) + (2x'+y', y'-z') \\ & = & f(v) + f(w), \\ f(\lambda v) & = & f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) \\ & = & (2\lambda x + \lambda y, \lambda y - \lambda z) \\ & = & \lambda(2x+y, y-z) \\ & = & \lambda f(v). \end{array}$$

Comme on peut s'en rendre compte par cet exemple, la linéarité de f tient au fait que les composantes x, y, z dans l'espace d'arrivée (ici $\mathbb{R}^2$) apparaissent toutes à la puissance 1. plus précisément chaque composante dans l'espace d'arrivée est un polynôme homogène de degré 1 en x, y, z. Nous verrons cela d'une manière plus précise dans la suite.

Ainsi, par exemple, l'application

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z) & \mapsto & (x^2-y, y+z). \end{array}$$

n'est pas linéaire (ni 1), ni 2) de la définition 2.1 ne sont satisfaites à cause du terme au carré).

Exemple 2.3 *Soient* $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ *et* $\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ *les espaces vectoriels des applications* f *de* $[0,1]$ *dans* $\mathbb{R}$*, continues et continues à dérivée continue, respectivement. L'application :*

$$\begin{array}{cccc} D: & \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R}) & \to & \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) \\ & f & \mapsto & f', \end{array}$$

est une application linéaire, puisque :

$$\begin{array}{lcll} D(f+g) & = & (f+g)' = f'+g' & = Df + Dg \\ D(\lambda f) & = & (\lambda f)' & = \lambda f', \end{array}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$*, et* f *et* $g \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$.

Exemple 2.4 *Soit* $v_0 \neq 0_E$ *un vecteur de* E*, l'application translation définie par*

$$\begin{array}{cccc} t: & E & \to & E \\ & v & \mapsto & v+v_0, \end{array}$$

n'est pas linéaire (noter, par exemple, que : $t(0) = v_0 \neq 0_E$*).*

Exemple 2.5 *Soient* E *un* $\Bbbk$*-espace vectoriel de dimension finie* n *et* $(e_1, e_2, ..., e_n)$ *une base de* E*. Alors l'application* f *définie par,*

$$\begin{array}{cccc} t: & \Bbbk^n & \to & E \\ & (\alpha_1, ..., \alpha_n) & \mapsto & f((\alpha_1, ..., \alpha_n)) = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i, \end{array}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels. On en déduit donc que tout $\Bbbk$*-espace vectoriel de dimension finie* n *est isomorphe à* $\Bbbk^n$*.*

Proposition 2.1 *i) Soient* E, F *et* G *trois espaces vectoriels sur le même corps* $\Bbbk$*.* $f: E \to F$ *et* $g: F \to G$ *deux applications linéaires. Alors* $g \circ f$ *est une application linéaire.*

$ii)$ Soit $f : E \to F$ un isomorphisme d'espaces vectoriels, alors $f^{-1} : F \to E$ est aussi un isomorphisme d'espaces vectoriels.

$iii)$ Deux espaces vectoriels de dimension finie et de même dimension sont isomorphes.

Preuve. $i)$ Soient $x \in E, y \in E$ et $\alpha \in \Bbbk$, alors on a

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x+y) &= g(f(x+y)) \\ &= g(f(x)+f(y)) \quad (\text{ car } f \text{ est linéaire }) \\ &= g(f(x))+g(f(y)) \quad (\text{ car } g \text{ est linéaire }) \\ &= (g \circ f)(x)+(g \circ f)(y).\end{aligned}$$

On a aussi

$$\begin{aligned}(g \circ f)(\alpha x) &= g(f(\alpha x)) \\ &= g(\alpha f(x)) \quad (\text{ car } f \text{ est linéaire }) \\ &= \alpha g(f(x)) \quad (\text{ car } g \text{ est lincaire }) \\ &= \alpha(g \circ f)(x).\end{aligned}$$

Donc $g \circ f$ est linéaire.

$ii)$ Supposons que $f : E \longrightarrow F$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Soient $x \in F, y \in F$ et $\alpha \in \Bbbk$. Soient $a \in E$ et $b \in E$, tels que $f(a) = x$ et $f(b) = y$. Comme f est linéaire, alors on a $f(a+b) = x+y$, donc on atra

$$f^{-1}(x+y) = f^{-1}(f(a+b)) = a+b = f^{-1}(x)+f^{-1}(y).$$

On a aussi

$$f^{-1}(\alpha x) = f^{-1}(\alpha f(a)) = f^{-1}(f(\alpha a)) = \alpha a = \alpha f^{-1}(x).$$

Donc f^{-1} est lincaire.

$iii)$ Soient E et F deux espaces vectoricls de même dimension n, alors d'après l'exemple précédent, E et F sont isomorphes à $\Bbbk^n$. Donc si $\varphi : E \longrightarrow \Bbbk^n$ et $\psi : F \longrightarrow \Bbbk^n$ sont deux isomorphismes d'espaces vectoriels, alors $\psi^{-1} \circ \varphi : E \longrightarrow F$ est un isomorphisme d'espaces vectoriel. $\square$

Proposition 2.2 *Soient E et E' deux $\Bbbk$-espaces vectoriels. Pour f et g deux éléments de $L_{\Bbbk}(E, E')$ et pour α élément de $\Bbbk$, on définie $f+g$ et $\alpha \cdot f$, par*

$$\forall x \in E, \quad (f+g)(x) = f(x)+g(x) \text{ et } (\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot f(x).$$

Alors $(L_{\Bbbk}(E, E'), +, \cdot)$ est un $\Bbbk$-espace vectoriel.

Preuve. Il suffit de vérifier que $L_{\Bbbk}(E, E')$ est un sous-espace vectoriel de E'^E le $\Bbbk$-cspace vectoriel de toutes les applications de E vers E'. $\square$

Théorème 2.1 *Soient E et E' deux $\mathbb{k}$-espaces vectoriels de dimension finie. Alors $L_{\mathbb{k}}(E,E')$ est de dimension finie et on a*

$$\dim\left(L_K(E,E')\right)=\dim(E)\times\dim(E').$$

Preuve. Soient $m=\dim(E), n=\dim(E'), (e_1,e_2,\ldots,e_m)$ une base de E et $(e'_1,e'_2,\ldots,e'_n)$ une base de E'. Pour $(i,j)\in\mathbb{N}_m\times\mathbb{N}_n$, où pour tout $p\in\mathbb{N}^*$, on pose $\mathbb{N}_p=\{1,2,\ldots,p\}$, on définit l'application $f_{ij}:E\longrightarrow E'$ par,

$$\forall x\in E,\quad f_{ij}(x)=x_je'_i\quad \text{où } x=\sum_{j=1}^m x_je_j.$$

Alors, $B=\{f_{ij}:(i,j)\in\mathbb{N}_m\times\mathbb{N}_n\}$ forme une base de $L_K(E,E')$. En effet,
Soit $f\in L_{\mathbb{k}}(E,E')$, alors pour chaque $j\in\mathbb{N}_{m,}$, on a $f(e_j)=\sum_{i=1}^n\alpha_{ij}e'_i$.
Donc pour tout $x\in E$ avec $x=\sum_{j=1}^m x_je_j$, on a

$$\begin{aligned}f(x)&=\sum_{j=1}^m x_jf(e_j)=\sum_{j=1}^m x_j\left(\sum_{i=1}^n\alpha_{ij}e'_i\right)\\&=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m\alpha_{ij}x_je'_i=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m\alpha_{ij}f_{ij}(x).\end{aligned}$$

Donc B est une partie génératrice finie de $L_K(E,E')$.
Il est facile de vérifier que B est une partie libre, en remarquant que

$$\forall k\in\mathbb{N}_m,\quad f_{ij}(e_k)=\begin{cases}e'_i & \text{si } k=j\\ 0 & \text{si } k\neq j.\end{cases}$$

$\mathrm{Card}(B)=\mathrm{Card}(\mathbb{N}_m\times\mathbb{N}_n)=m\times n$, donc $\dim\left(L_K(E,E')\right)=m\times n$. □

2.2 Noyau, image et rang

Proposition 2.3 *Soient E et F deux $\mathbb{k}$-espaces vectoriels et $f:E\longrightarrow F$ une application linéaire. Alors,*

i) L'image par f d'un sous-espace vectoriel de E est un sous-espace vectoriel de F. En particulier, $f(E)$ est un sous-espace vectoriel de F, appelé image de f et noté $\mathrm{Im}\, f$. *Sa dimension est appelée rang de f et est notée*

$$rg\ f=\dim\left(\mathrm{Im}\, f\right).$$

ii) L'image réciproque par f d'un sous-espace vectoriel de F est un sous-espace vectoriel de E. En particulier, $f^{-1}(\{0_F\})$ est un sousespace vectoriel de E, appelé noyau de f et noté $\ker(f)$.

Preuve. i) Soit A un sous-espace vectoriel de E. Alors, $f(A) \neq \emptyset$, car $0_F = f(0_E)$, donc $0_F \in f(A)$.

Si $x \in A$, $y \in A$ et $\alpha \in K$, on a

$$f(x) + f(y) = f(x+y) \text{ et } \alpha \cdot f(x) = f(\alpha \cdot x).$$

Comme $x + y \in A$ et $\alpha \cdot x \in A$, alors $f(x) + f(y) \in f(A)$ et $\alpha \cdot f(x) \in f(A)$.

ii) Soit, maintenant, B un sous-espace vectoriel de F. Alors $f^{-1}(B) \neq \emptyset$, car $f(0_E) = 0_F$ et $0_F \in B$, donc $0_E \in f^{-1}(B)$.

Si $x \in f^{-1}(B), y \in f^{-1}(B)$ et $\alpha \in K$, alors on a $f(x) \in B$ et $f(y) \in B$ et comme B est un sous-espace vectoriel de F et f linéaire, alors $f(x+y) \in f(B)$ et $f(\alpha \cdot x) \in f(B)$, donc $x + y \in f^{-1}(B)$ et $\alpha \cdot x \in f^{-1}(B)$. Rappelons que

$$z \in f^{-1}(B) \Longleftrightarrow f(z) \in B.$$

□

Remarque 2.2 *Soient E et F deux $\mathbb{k}$-espaces vectoriels et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Alors*

1. $$\ker(f) = \{x \in E : f(x) = 0_F\}$$
$$x \in \ker(f) \Longleftrightarrow f(x) = 0_F.$$

2. $$\mathrm{Imf} = \{f(x) : x \in E\}$$
$$y \in \mathrm{Imf} \Longleftrightarrow \exists x \in E : y = f(x).$$

Proposition 2.4 *Soient E et F deux $\mathbb{k}$-espaces vectoriels et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Alors*

i) f est injetive $\Longleftrightarrow \ker(f) = \{0_E\}$.

ii) f est surjetive $\Longleftrightarrow \operatorname{Im} f = F$.

Preuve. i) $\Longrightarrow$) Supposons que f est injective et soit $x \in \ker(f)$. On a $f(x) = 0_F$ et comme f est linéaire, alors $f(0_E) = 0_F$, donc $f(x) = f(0_E)$ et puisque f est injective, alors $x = 0_E$. Ainsi, $\ker(f) = \{0_E\}$.

$\Longleftarrow$) Supposons que $\ker(f) = \{0_E\}$.

Soient $x \in E$ et $y \in E$, tels que $f(x) = f(y)$, a-t-on $x = y$?

Comme f est linéaire et $f(x) = f(y)$, alors on a $f(x-y) = 0_F$, donc $x - y \in \ker(f)$, puis comme $\ker(f) = \{0_F\}$, alors on s $x = y$ et par suite, f est injective.

ii) Trivial, car une application $f : E \longrightarrow F$ est surjective, si et seulement si, $f(E) = F$. □

Exemple 2.6 *Soit :*

$$D : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[x] & \longrightarrow & \mathbb{R}[x] \\ P & \mapsto & P'. \end{array}$$

Le noyau de D est formé par les polynômes constants. D'autre part, $\operatorname{Im} D = \mathbb{R}[x]$, car si $P \in \mathbb{R}[x], Q(x) := \int_0^x P(t)dt$ est un polynôme et on a $Q' = P$ c'est-à-dire $DQ = P$.

Exemple 2.7 *Soit :*

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3(x, y, z) \longmapsto (x', y', z') \quad \text{où :} \quad \begin{cases} x' = x + y - z \\ y' = 2x + y - 3z \\ z' = 3x + 2y - 4z. \end{cases}$$

Ker$f$ est l'ensemble des triplets $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ qui vérifient le système :

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x + y - 3z = 0 \\ 3x + 2y - 4z = 0. \end{cases}$$

On trouve facilement $x = 2\lambda, y = -\lambda, z = \lambda$; c'est-à-dire Ker f est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $(2, -1, 1)$.

Pour ce qui est de Im f, on a :

$(x', y', z') \in \operatorname{Im} f$, si et seulement si, il existe $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ vérifiant le système :

$$\{x + y - z = x'2x + y - 3z = y'3x + 2y - 4z = z'$$

Il s'agit donc de savoir pour quelles valeurs de x', y', z' ce système est compatible. En échelonnant, on trouve :

$$\begin{cases} x + y - z = x' \\ -y - z = y' - 2x' \\ -y - z = z' - 3x' \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x - y - z = x' \\ y + z = 2x' - y' \\ 2x' - y' + z' - 3x' = 0, \end{cases}$$

la condition de compatibilité est $2x' - y' + z' - 3x' = 0$ c'est-à-dire $x' + y' - z' = 0$. L'image de f est donc le plan de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x' + y' - z' = 0$.

Proposition 2.5 *Soit $f \in \mathcal{L}(E, E')$ et $\{v_i\}_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E.*

1. *Si f est injective et la famille de E $\{v_i\}_{i\in I}$ est libre, alors la famille $\{f(v_i)\}_{i\in I}$ de E' est libre.*
2. *Si f est surjective et la famille $\{v_i\}_{i\in I}$ est génératrice de E alors la famille $\{f(v_i)\}_{i\in I}$ est génératrice de E'.*

En particulier si f est bijective l'image d'une base de E est une base de E'.

Preuve. 1. Supposons la famille $\{v_i\}_{i\in I}$ libre et soit f injective. Pour toute famille extraite $\{v_{\alpha_1},\ldots,v_{\alpha_q}\}$, la relation

$$\lambda_1 f\left(v_{\alpha_1}\right)+\cdots+\lambda_q f\left(v_{\alpha_q}\right)=0,$$

implique $f\left(\lambda_1 v_{\alpha_1}+\cdots+\lambda_q v_{\alpha_q}\right)=0$, c'est-à-dire $\lambda_1 v_{\alpha_1}+\cdots+\lambda_q v_{\alpha_q}\in \operatorname{Ker} f$. Or $\operatorname{Ker} f=\{0\}$, donc

$$\lambda_1 v_{\alpha_1}+\cdots+\lambda_q v_{\alpha_q}=0,$$

et puisque la famille $\{v_i\}_{i\in I}$ est libre, on a $\lambda_1=0,\ldots,\lambda_q=0$. Donc la famille $\{f\left(v_i\right)\}_{i\in I}$ est libre.2. Soit $y\in E'$ quelconque; puisque f est surjective, il existe $x\in E$ tel que $y=f(x)$. D'autre part la famille $\{v_i\}_{i\in I}$ est génératrice, donc x est de la forme

$$x=\lambda_1 v_{\alpha_1}+\cdots+\lambda_p v_{\alpha_p},$$

d'où : $f(x)=\lambda_1 f\left(v_{\alpha_1}\right)+\cdots+\lambda_p f\left(v_{\alpha_p}\right)$ .y est donc combinaison linéaire d'éléments de la famille $\{f\left(v_i\right)\}_{i\in I}$ et, puisqu'il est choisi arbitrairement dans E', la famille $\{f\left(v_i\right)\}_{i\in I}$ est génératrice.
□

Théorème 2.2 *Deux espaces vectoriels de dimension finie sont isomorphes, si et seulement si, ils ont même dimension.*

Preuve. En effet, s'il existe un isomorphisme $f: E\longrightarrow E'$, l'image par f d'une base de E est une base de E', donc E et E' ont même dimension. Réciproquement, supposons que $\dim E=\dim E'$ et soient $\{e_1,\ldots,e_n\},\{e'_1,\ldots,e'_n\}$ deux bases respectivement de E et E'. Considérons l'application $f: E\longrightarrow E'$ construite de la manière suivante :

- Pour $k=1,\ldots,n$ on pose : $f\left(e_k\right)=e'_k$;
- Si $x=\sum_{k=1}^{n} x_k e_k$ on pose : $f(x)=\sum_{k=1}^{n} x_k f\left(e_k\right)=\sum_{k=1}^{n} x_k e'_k$,

(en d'autres termes, on définit f sur la base de E et on la prolonge par linéarité sur E tout entier). On vérifie facilement que f est linéaire et bijective (la vérification est laissée en exercice). □

Remarque 2.3 *Comme on le voit de la démonstration, l'isomorphisme de E sur E' dépend du choix des bases dans E et dans E' et en général il n'y a pas d'isomorphisme canonique.*

Proposition 2.6 *Soient E et F deux K-espaces vectoriels et $f: E\longrightarrow F$ une appligation linéaire. Alors*

$a)$ Pour tout sous-espace vectoriel G de E, on a

$$f^{-1}(f(G))=G+\ker(f).$$

$b)$ f est injective, si et seulement si, pour tout sous-espace vectoriel G de E, on a

$$f^{-1}(f(G)) = G.$$

$c)$ Pour tout sous-espace vectoriel H de F, on a

$$f\left(f^{-1}(H)\right) = H \cap \operatorname{Im} f.$$

$d)$ f est surjective, si et seulement si, pour tout sous-espace vectoriel H de F, on a

$$f\left(f^{-1}(H)\right) = H.$$

Preuve. $a)$ Soit $x \in E$, alors on a

$$\begin{aligned}
& x \in f^{-1}(f(G)) \Longleftrightarrow f(x) \in f(G) \\
& \Longleftrightarrow \exists a \in G : f(x) = f(a) \\
& \Longleftrightarrow \exists a \in G : f(x-a) = 0 \\
& \Longleftrightarrow \exists a \in G : x - a \in \ker(f) \\
& \Longleftrightarrow \exists a \in G, \exists b \in \ker(f) : x = a + b \\
& \Longleftrightarrow x \in G + \ker(f).
\end{aligned}$$

$b)$ $\Longrightarrow)$ Si on suppose que f est injective, alors $\ker(f) = \{0\}$, donc, d'après a), pour tout sous-espace vectoriel G de E,

$$f^{-1}(f(G)) = G.$$

$\Longleftarrow)$ Si on suppose que pour tout sous-espace vectoriel G de E, on a $f^{-1}(f(G)) = G$, alors en particulier, on a

$$f^{-1}\left(f\left(\{0_E\}\right)\right) = \{0_{E^3}\}.$$

Or $f\left(\{0_E\}\right) = \{f\left(0_E\right)\} = \{0_F\}$, donc

$$\ker(f) = f^{-1}\left(\{0_F\}\right) = \{0_E\}.$$

$c)$ $\subset)$ Soit $y \in f\left(f^{-1}(H)\right)$. alors il existe $x \in f^{-1}(H)$, tel que $y = f(x)$.Comme $x \in f^{-1}(H)$, alors $f(x) \in H$, donc $y \in H \cap \operatorname{Im} f$.

$\supset)$ Soit $y \in H \cap \operatorname{Im} f$, alors on a

$$\begin{aligned}
& y \in H \cap \operatorname{Im} f \Longrightarrow y \in H \text{ et } y \in \operatorname{Im} f \\
& \Longrightarrow y \in H \text{ et } \exists x \in E, : y = f(x) \\
& \Longrightarrow x \in f^{-1}(H) \quad \text{ ar } f(x) \in H \\
& \Longrightarrow f(x) \in f\left(f^{-1}(H)\right) \\
& \Longrightarrow y \in f\left(f^{-1}(H)\right).
\end{aligned}$$

$d)$ $\Longrightarrow)$ Supposons que f est surjective, alors $\operatorname{Im} f = F$, donc pour tout sous-espace H de E, on a

$$f\left(f^{-1}(H)\right) = H \cap F = H.$$

$\Longleftarrow$) Supposons que pour tout sous-espace vectoriel H de F. on a

$$f\left(f^{-1}(H)\right) = H,$$

alors en particulier, on aura $f\left(f^{-1}(F)\right) = F$. Or $f^{-1}(F) = E$, donc $f(E) = F$, par suite, f est surjective. $\square$

Dans le cas où les espaces E et E' sont de dimension finie, les dimensions du noyau et de l'image de f sont liées par la relation donnée dans le théorème suivant, l'un des plus importants en Algèbre Linéaire :

Théorème 2.3 (Théorème du rang) *Soient E et E' deux espaces vectoriels de dimension finie et $f : E \longrightarrow E'$ une application linéaire. On a alors :*

$$\dim E = \operatorname{rg} f + \dim(\operatorname{Ker} f).$$

Preuve. Supposons $\dim E = n$, $\dim\operatorname{Ker} f = r$ et montrons que $\dim(\operatorname{Im} f) = n - r$. Soit $\{w_1, \ldots, w_r\}$ une base de $\operatorname{Ker} f$, et $\{v_1, \ldots, v_{n-r}\}$ une famille de vecteurs telle que

$$\{w_1, \ldots, w_r, v_1, \ldots, v_{n-r}\},$$

soit une base de E. Soit $\mathcal{B} = \{f(v_1), \ldots, f(v_{n-r})\}$. Montrons que $\mathcal{B}$ est une base de $\operatorname{Im} f$.

- $\mathcal{B}$ engendre $\operatorname{Im} f$. Soit $y = f(x) \in \operatorname{Im} f$. Comme $x \in E$, x est de la forme

$$x = a_1 w_1 + \cdots + a_r w_r + b_1 v_1 + \cdots + b_{n-r} v_{n-r}.$$

On a donc :

$$\begin{aligned} y &= a_1 f(w_1) + \cdots + a_r f(w_r) + b_1 f(v_1) + \cdots + b_{n-r} f(v_{n-r}) \\ &= b_1 f(v_1) + \cdots + b_{n-r} f(v_{n-r}), \end{aligned}$$

ce qui montre que $\mathcal{B}$ engendre $\operatorname{Im} f$.

- $\mathcal{B}$ est libre. Supposons que $\lambda_1 f(v_1) + \cdots + \lambda_{n-r} f(v_{n-r}) = 0$; on aura

$$f(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_{n-r} v_{n-r}) = 0,$$

donc :

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_{n-r} v_{n-r} \in \operatorname{Ker} f.$$

Par conséquent, il existe $a_1, \ldots, a_r \in \mathbb{k}$ tels que :

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_{n-r} v_{n-r} = a_1 w_1 + \cdots + a_r w_r,$$

c'est-à-dire :

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_{n-r} v_{n-r} - a_1 w_1 - \cdots - a_r w_r = 0.$$

Puisque la famille $\{v_1, \ldots, v_{n-r}, w_1, \ldots, w_r\}$ est libre, les coefficients de cette combinaison linéaire sont tous nuls ; en particulier : $\lambda_1 = 0, \ldots, \lambda_{n-r} = 0$, c'est-à-dire $\mathcal{B}$ est libre. □

Pour montrer qu'une application linéaire est bijective, il faut montrer qu'elle est injective et surjective ; cependant, dans le cas de dimension finie, si la dimension de l'espace de départ et celle de l'espace d'arrivée sont les mêmes, il suffit de démontrer l'une des deux propriétés - soit l'injectivité, soit la surjectivité, on donc ce corollaire important.

Corollaire 2.1 *Soit $f \in \mathcal{L}(E, E')$, E, E' étant deux espaces vectoriels de même dimension finie (en particulier, par exemple, si $f \in End\ E$, avec E de dimension finie). Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *f est injective.*
2. *f est surjective.*
3. *f est bijective.*

Preuve. Il suffit, bien entendu de montrer que 1 . est équivalent à 2.Comme on l'a vu, f est injective si et seulement si Ker $f = \{0\}$. Puisque $\dim E = \operatorname{rg} f + \dim(\ker f)$, f est injective si et seulement si $\dim E = \operatorname{rg} f$, c'est-à-dire $\dim E = \dim(\operatorname{Im} f)$. Or, par hypothèse, $\dim E = \dim E'$, donc f est injective si et seulement si $\dim(\operatorname{Im} f) = \dim E'$. Puisque $\operatorname{Im} f \subset E'$ cela équivaut à $\operatorname{Im} f = E'$, c'est-à-dire f surjective. □

Remarque 2.4 *Ce résultat est faux en dimension infinie, un contre-exemple : l'application :*

$$D : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[x] & \longrightarrow & \mathbb{R}[x] \\ P & \mapsto & P', \end{array}$$

est surjective et non injective.

Théorème 2.4 *Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie et $u : E \longrightarrow E$ un endomorphisme de E. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :*

i) $E = \ker u \oplus \operatorname{Im} u$.
ii) $\operatorname{Im} u = \operatorname{Im} u^2$.
iii) $\ker u = \ker u^2$.
iv) $\ker u \cap \operatorname{Im} u = \{0\}$.

Preuve. $i) \Longrightarrow ii)$ Supposons que $E = \ker u \oplus \operatorname{Im} u$ et montrons que $\operatorname{Im} u = \operatorname{Im} u^2$. Pour cela, remarquons d'abord que tout $u \in L_K(E)$, on a $\operatorname{Im} u^2 \subseteq \operatorname{Im} u$. Donc, il suffit de montrer que $\operatorname{Im} u \subseteq \operatorname{Im} u^2$. Pour cela, soit $y \in \operatorname{Im} u$, alors il existe $x \in E$, tel que $y = u(x)$. Puisque $E = \ker u \oplus \operatorname{Im} u$, alors $x = x_1 + u(x_2)$, avec $x_1 \in \ker u$, donc $y = u^2(x)$, par suite, $y \in \operatorname{Im} u^2$.

ii) $\Rightarrow$ *iii)* Supposons que $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Im}\, u^2$ et montrons que $\ker u = \ker u^2$. Pour cela, remarquons aussi que tout $u \in L_K(E)$, on a $\ker u \subseteq \ker u^2$. Donc, il suffit de montrer que $\ker u^2 \subseteq \ker u$. D'après le théorème du rang, on a

$$\dim(E) = \dim(\ker u) + \dim(\mathrm{Im}\, u) = \dim\left(\ker u^2\right) + \dim\left(\mathrm{Im}\, u^2\right).$$

Puisque $\mathrm{Im}\, u = \mathrm{Im}\, u^2$ alors $\dim(\ker u) = \dim(\ker u^2)$, par suite, on aura $\ker u = \ker u^2$.

iii) $\Longrightarrow$ *iv)* Supposons que $\ker u = \ker u^2$ et montrons que $\ker u \cap \mathrm{Im}\, u = \{0\}$. Soit $y \in E$, alors on a

$$\begin{aligned} & y \in \ker u \cap \mathrm{Im}\, u \Leftrightarrow u(y) = 0 \text{ et } \exists x \in E : y = u(x) \\ & \Rightarrow u^2(x) = u(y) = 0 \qquad \Rightarrow x \in \ker u^2 \\ & \Rightarrow x \in \ker u \qquad \Rightarrow u(x) = 0 \qquad \Rightarrow y = 0. \end{aligned}$$

iv) $\Rightarrow$ *i)* Trivial, car on sait que

$$E = \ker u \oplus \mathrm{Im}\, u \Leftrightarrow \begin{cases} \dim(\ker u) + \dim(\mathrm{Im}\, u) = \dim(E) \\ \text{ et} \\ \ker u \cap \mathrm{Im}\, u = \{0\}. \end{cases}$$

$\square$

2.3 Exercices corrigés

Exercice 1.

On considère l'application $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ définie pour tout $u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ par :

$$f(x, y, z, t) = (x + y, z + t, x + y + z + t).$$

1. Prouver que f est une application linéaire.
2. Donner une base de $\ker(f)$.
3. Donner une base de $\mathrm{Im}(f)$.

Solution. 1. Soient $u = (x, y, z, t)$ et $u' = (x', y', z', t')$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^4$. Soient λ et λ' deux réels.

$$\lambda u + \lambda' u' = \lambda(x, y, z, t) + \lambda'(x', y', z', t') = (\lambda x + \lambda' x', \lambda y + \lambda' y', \lambda z + \lambda' z', \lambda t + \lambda' t')$$

donc

$$\begin{aligned}
&f(\lambda u + \lambda' u') = f(\lambda x + \lambda' x', \lambda y + \lambda' y', \lambda z + \lambda' z', \lambda t + \lambda' t')\\
&= (\lambda x + \lambda' x') + (\lambda y + \lambda' y'), (\lambda z + \lambda' z') + (\lambda t + \lambda' t'), (\lambda x + \lambda' x') + (\lambda y + \lambda' y')\\
&+ (\lambda z + \lambda' z') + (\lambda t + \lambda' t')\\
&= (\lambda(x + y) + \lambda'(x' + y'), \lambda(z + t) + \lambda'(z' + t'), \lambda(x + y + z + t)\\
&+\lambda'(x' + y' + z' + t')\\
&= \lambda(x + y, z + t, x + y + z + t) + \lambda'(x' + y', z' + t', x' + y' + z' + t')\\
&= \lambda f(u) + \lambda f(u').
\end{aligned}$$

f est linéaire.

On a :

$$\begin{aligned}
&u \in \ker(f) \Leftrightarrow f(u) = 0_{\mathbb{R}^3}\\
&\Leftrightarrow (x + y, z + t, x + y + z + t) = (0, 0, 0, 0)
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ z + t = 0 \\ x + y + z + t = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ t = -z \end{cases} \Leftrightarrow u = (x, -x, z, -z) = x(1, -1, 0, 0) + z(0, 0, 1, -1).$$

On pose $a = (1, -1, 0, 0)$ et $b = (0, 0, 1, -1)$, a et b engendrent $\ker(f)$, d'autre part ces vecteurs ne sont pas proportionnels, ils forment donc une famille libre, finalement (a, b) est une base de $\ker(f)$.

3. On a :

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4))\\
&f(e_1) = (1, 0, 1); f(e_2) = (1, 0, 1); f(e_3) = (0, 1, 1); f(e_4) = (0, 1, 1).
\end{aligned}$$

Comme $f(e_1) = f(e_2)$ et $f(e_3) = f(e_4)$

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\left(f(e_1), f(e_3)\right),$$

$f(e_1)$ et $f(e_3)$ ne sont pas proportionnels, ils forment une famille libre, comme cette famille est génératrice de $\mathrm{Im}(f)$, c'est une base de $\mathrm{Im}(f)$. $\square$

Exercice 2.

On considère l'application $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par :

$$u(x_1, x_2, x_3) = (-2x_1 + 4x_2 + 4x_3, -x_1 + x_3, -2x_1 + 4x_2 + 4x_3).$$

1. Prouver que u est linéaire.
2. Donner une base de $\ker(u)$ et une base de $\mathrm{Im}(u)$.
3. A-t-on $\ker(u) \oplus \mathrm{Im}(u) = \mathbb{R}^3$?

Solution. 1. Soient $x = (x_1, x_2, x_3)$ et $y = (y_1, y_2, y_3)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Soient λ et μ deux réels.

$$\begin{aligned}
&\lambda x + \mu y = (\lambda x_1 + \mu y_1, \lambda x_2 + \mu y_2, \lambda x_3 + \mu y_3)\\
&u(\lambda x + \mu y) = (-2(\lambda x_1 + \mu y_1) + 4(\lambda x_2 + \mu y_2) + 4(\lambda x_3 + \mu y_3), -(\lambda x_1 + \mu y_1)\\
&+\lambda x_3 + \mu y_3, -2(\lambda x_1 + \mu y_1) + 4(\lambda x_2 + \mu y_2) + 4(\lambda x_3 + \mu y_3))\\
&= (\lambda[-2x_1 + 4x_2 + 4x_3] + \mu[-2y_1 + 4y_2 + y_3], \lambda[-x_1 + x_3]\\
&+\mu[-y_1 + y_3], \lambda[-2x_1 + 4x_2 + 4x_3] + \mu[-2y_1 + 4y_2 + y_3])\\
&= \lambda(-2x_1 + 4x_2 + 4x_3, -x_1 + x_3, -2x_1 + 4x_2 + 4x_3)\\
&+\mu(-2y_1 + 4y_2 + 4y_3, -y_1 + y_3, -2y_1 + 4y_2 + 4y_3) = \lambda u(x) + \mu u(y).
\end{aligned}$$

Donc u est linéaire.

2. Soit $x = (x_1, x_2, x_3) \in \ker(u)$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ ses coordonnées dans la base canonique.

$$\begin{aligned}
x \in \ker(u) &\Leftrightarrow \begin{cases} -2x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 0 \\ -x_1 + x_3 = 0 \\ -2x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 = x_3 \end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 = x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -\frac{1}{2}x_3 \\ x_1 = x_3 \end{cases}\\
x &= \left(x_3, -\frac{1}{2}x_3, x_3\right) = \frac{x_3}{2}(2, -1, 2).
\end{aligned}$$

$a = (2, -1, 2) = 2e_1 - e_2 + 2e_3$ est un vecteur non nul qui engendre $\ker(u)$, c'est une base de $\ker(u)$.

$$\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}\left(u(e_1), u(e_2), u(e_3)\right).$$

D'après le théorème du rang,

$$\begin{aligned}\dim(\ker(u))+\dim(\operatorname{Im}(u)) &= \dim\left(\mathbb{R}^3\right)\\ &\Leftrightarrow 1+\dim(\operatorname{Im}(u))=3 \Leftrightarrow \dim(\operatorname{Im}(u))=2,\end{aligned}$$

$u(e_1)=-2e_1-e_2-2e_3=(-2,-1,-2)$ et $u(e_2)=4e_1+4e_3=(4,0,4)$, ces deux vecteurs ne sont pas proportionnels, ils forment une famille libre de $\operatorname{Im}(u)$ qui est de dimension 2, $(u(e_1),u(e_2))$ est une base de $\operatorname{Im}(u)$.

3. $\ker(u)\oplus\operatorname{Im}(u)=\mathbb{R}^3 \Leftrightarrow (a,u(e_1),u(e_2))$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Il est presque évident que

$$u(e_1)+u(e_3)=a.$$

Sinon on calcule $\alpha a+\beta u(e_1)+\gamma u(e_3)=0_{\mathbb{R}^3}$ et on s'aperçoit que $\alpha=1,\beta=-1$ et $\gamma=-1$ est une solution non nulle.

$(a,u(e_1),u(e_2))$ n'est pas une base, donc on n'a pas $\ker(u)\oplus\operatorname{Im}(u)=\mathbb{R}^3$. □

Exercice 3.

Soit $\beta=(e_1,e_2,e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$

On considère u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$u(e_1)=2e_1+e_2+3e_3;\quad u(e_2)=e_2-3e_3;\quad u(e_3)=-2e_2+2e_3.$$

1. Soit $x=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$ un vecteur. Donner l'image par u du vecteur x. (déterminer $u(x)$).
2. On considère $E=\{x\in\mathbb{R}^3, u(x)=2x\}$ et $F=\{x\in\mathbb{R}^3, u(x)=-x\}$

   Prouver que E et F sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
3. Donner une base de E et une base de F.
4. Y a-t-il $E\oplus F=\mathbb{R}^3$?

Solution. 1. On a :

$$\begin{aligned}u(x)&=ux_1e_1+x_2e_2+x_3e_3=x_1u(e_1)+x_2u(e_2)+x_3u(e_3)\\&=x_1(2e_1+e_2+3e_3)+x_2(e_2-3e_3)+x_3(-2e_2+2e_3)\\&=2x_1e_1+(x_1+x_2-2x_3)e_2+(3x_1-3x_2+2x_3)e_3\\&=(2x_1,x_1+x_2-2x_3,3x_1-3x_2+2x_3).\end{aligned}$$

2. $f(0_{\mathbb{R}^3})=0_{\mathbb{R}^3}=2\times 0_{\mathbb{R}^3}\Rightarrow 0_{\mathbb{R}^3}\in E$.

Soient x et y deux vecteurs de E, alors $u(x)=2x$ et $u(y)=2y$.

Soient λ et μ deux réels

$$u(\lambda x+\mu y)=\lambda u(x)+\mu u(y)=\lambda(2x)+\mu(2y)=2(\lambda x+\mu y).$$

Donc $\lambda x+\mu y\in E$ et E est un sous-espace-vectoriel de $\mathbb{R}^3$

$f(0_{\mathbb{R}^3})=0_{\mathbb{R}^3}=-0_{\mathbb{R}^3}\Rightarrow 0_{\mathbb{R}^3}\in F$.

Soient x et y deux vecteurs de F, alors $u(x) = -x$ et $u(y) = -y$.
Soient λ et μ deux réels

$$u(\lambda x + \mu y) = \lambda u(x) + \mu u(y) = \lambda(-x) + \mu(-y) = -(\lambda x + \mu y).$$

Donc $\lambda x + \mu y \in F$ et F est un sous-espace-vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
3. On a :

$$x \in E \Leftrightarrow u(x) = 2x \Leftrightarrow (2x_1, x_1 + x_2 - 2x_3, 3x_1 - 3x_2 + 2x_3) = 2\,(x_1, x_2, x_3)$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 = 2x_1 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 2x_2 \\ 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_3 = 0. \end{cases}$$

Donc $x = (x_1, x_1, x_3) = x_1(1,1,0) = x_1\,(e_1 + e_2)$.
$e_1 + e_2 \neq 0_{\mathbb{R}^3}$, il s'agit d'une base de E.

$$x \in F \Leftrightarrow u(x) = -x \Leftrightarrow (2x_1, 3x_1 - x_2, 3x_1 - 3x_2 + 2x_3) = -\,(x_1, x_2, x_3)$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 = -x_1 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = -x_2 \\ 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = x_3. \end{cases}$$

Donc $x = (0, x_3, x_3) = x_3(0,1,1) = x_3\,(e_2 + e_3)$.
$e_2 + e_3 \neq 0_{\mathbb{R}^3}$, il s'agit d'une base de F.
4.

$$\dim(E) + \dim(F) = 1 + 1 = 2.$$

Donc il n'y a pas somme directe.

□

Exercice 4.
Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$
On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ défini par :

$$\begin{aligned} f(e_1) &= -\frac{1}{3}e_1 + \frac{2}{3}e_2 + \frac{2}{3}e_3 = \frac{1}{3}(-e_1 + 2e_2 + 2e_3), \\ f(e_2) &= \frac{2}{3}e_1 - \frac{1}{3}e_2 + \frac{2}{3}e_3 = \frac{1}{3}(2e_1 - e_2 + 2e_3) \text{ et} \\ f(e_3) &= \frac{2}{3}e_1 + \frac{2}{3}e_2 - \frac{1}{3}e_3 = \frac{1}{3}(2e_1 + 2e_2 - e_3). \end{aligned}$$

$$\text{Soient } E_{-1} = \left\{u \in \mathbb{R}^3 \mid f(u) = -u\right\} \text{ et } E_1 = \left\{u \in \mathbb{R}^3 \mid f(u) = u\right\}.$$

1. Prouver que E_{-1} et E_1 sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
2. Prouver que $e_1 - e_2$ et $e_1 - e_3 \in E_{-1}$ et que $e_1 + e_2 + e_3 \in E_1$.
3. En déduire les dimensions de E_{-1} et de E_1 ?
4. Donner $E_{-1} \cap E_1$.

5. A-t-on $E_{-1} \oplus E_1 = \mathbb{R}^3$?
6. déterminer $f^2 = f \circ f$ et en déduire que f est bijective et donner f^{-1}.

Solution. 1. Soient u, u' deux vecteurs de E_{-1}, alors $f(u) = -u$ et $f(u') = -u'$. Soient λ, λ' deux réels.

$$f(\lambda u + \lambda' u') = \lambda f(u) + \lambda' f(u') = \lambda(-u) + \lambda(-u') = -(\lambda u + \lambda' u').$$

La première égalité car f est linéaire, la seconde car u et u' sont dans E_{-1}.

La troisième montre que $\lambda u + \lambda' u' \in E_{-1}$

$$f(0_{\mathbb{R}^3}) = 0_{\mathbb{R}^3} = -0_{\mathbb{R}^3}.$$

La première égalité car l'image du vecteur nul par une application linéaire est toujours le vecteur nul, la seconde égalité montre que $0_{\mathbb{R}^3} \in E_{-1}$.

E_{-1} est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Soient u, u' deux vecteurs de E_1, alors $f(u) = u$ et $f(u') = u'$. Soient λ, λ' deux réels.

$$f(\lambda u + \lambda' u') = \lambda f(u) + \lambda' f(u') = \lambda u + \lambda' u'.$$

La première égalité car f est linéaire, la seconde car u et u' sont dans E_1.

La seconde montre que $\lambda u + \lambda' u' \in E_1$

$$f(0_{\mathbb{R}^3}) = 0_{\mathbb{R}^3}.$$

La première égalité car l'image du vecteur nul par une application linéaire est toujours le vecteur nul, cela montre aussi que $0_{\mathbb{R}^3} \in E_1$.

E_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

2. On a :

$$\begin{aligned} f(e_1 - e_2) &= f(e_1) - f(e_2) \\ &= -\frac{1}{3}e_1 + \frac{2}{3}e_2 + \frac{2}{3}e_3 - \left(\frac{2}{3}e_1 - \frac{1}{3}e_2 + \frac{2}{3}e_3\right) \\ &= -e_1 + e_2 = -(e_1 - e_2). \end{aligned}$$

Donc $e_1 - e_2 \in E_{-1}$.

$$\begin{aligned} f(e_1 - e_3) &= f(e_1) - f(e_3) \\ &= -\frac{1}{3}e_1 + \frac{2}{3}e_2 + \frac{2}{3}e_3 - \left(\frac{2}{3}e_1 + \frac{2}{3}e_2 - \frac{1}{3}e_3\right) \\ &= -e_1 + e_3 = -(e_1 - e_3). \end{aligned}$$

Donc $e_1 - e_3 \in E_{-1}$.

$$\begin{aligned} f(e_1 + e_2 + e_3) &= f(e_1) + f(e_2) + f(e_3) \\ &= -\frac{1}{3}e_1 + \frac{2}{3}e_2 + \frac{2}{3}e_3 + \frac{2}{3}e_1 - \frac{1}{3}e_2 + \frac{2}{3}e_3 + \frac{2}{3}e_1 + \frac{2}{3}e_2 - \frac{1}{3}e_3 \\ &= e_1 + e_2 + e_3. \end{aligned}$$

Donc $e_1 + e_2 + e_3 \in E_1$.

3. Les vecteurs $e_1 - e_2$ et $e_1 - e_3$ ne sont pas proportionnels, ils forment une famille de E_{-1}, donc la dimension de E_1 est supérieur ou égal à 2.

E_1 a un vecteur non nul, donc sa dimension est supérieur ou égal à 1 .

4. Soit $u \in E_{-1} \cap E_1$, $f(u) = -u$ et $f(u) = u$ donc $-u = u$, ce qui signifie que le seul vecteur de $E_{-1} \cap$ E_1 est le vecteur nul.

$$E_{-1} \cap E_1 = \{0_{\mathbb{R}^3}\}.$$

5. On a :

$$\begin{aligned} \dim(E_{-1} + E_1) &= \dim(E_{-1}) + \dim(E_1) - \dim(E_{-1} \cap E_1) \\ &= \dim(E_{-1}) + \dim(E_1) \geq 2 + 1 = 3. \end{aligned}$$

Comme

$$E_{-1} + E_1 \subset \mathbb{R}^3.$$

On a

$$\dim(E_{-1} + E_1) \leq 3.$$

Finalement

$$\dim(E_{-1} + E_1) = 3.$$

Remarque : cela entraine que $\dim(E_{-1}) = 2$ et $\dim(E_1) = 1$

L'intersection de ces sous-espaces vectoriels étant réduit au vecteur nul on a

$$E_{-1} \oplus E_1 = \mathbb{R}^3.$$

6. On peut calculer $f^2(e_1), f^2(e_2)$ et $f^2(e_3)$ pour s'apercevoir que ces vecteurs valent respectivement e_1, e_2 et e_3. Mais c'est long.

Autre méthode

D'après la question précédente $(e_1 - e_2, e_1 - e_3, e_1 + e_2 + e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(Une base de E_{-1} collée à une base de E_1 donne une base de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si $E_{-1} \oplus E_1 = \mathbb{R}^3$). Tous les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ s'écrive de manière unique comme une combinaison linéaire de ces trois vecteurs, il suffit de montrer que $f^2(e_1 - e_2) = e_1 - e_2, f^2(e_1 - e_3) = e_1 - e_3$ et que $f^2(e_1 + e_2 + e_3) = e_1 + e_2 + e_3$

Là, j'ai fait long, en fait il suffit de montrer les égalités ci-dessous

$$\begin{aligned} f^2(e_1 - e_2) &= f(f(e_1 - e_2)) = f(-(e_1 - e_2)) \\ &= -f(e_1 - e_2) = -(-(e_1 - e_2)) = e_1 - e_2. \end{aligned}$$

Car $e_1 - e_2 \in E_{-1}$.

$$\begin{aligned} f^2(e_1 - e_3) &= f(f(e_1 - e_3)) = f(-(e_1 - e_3)) \\ &= -f(e_1 - e_3) = -(-(e_1 - e_3)) = e_1 - e_3. \end{aligned}$$

Car $e_1 - e_3 \in E_{-1}$.

$$\begin{aligned} f^2(e_1+e_2+e_3) &= f(f(e_1+e_2+e_3)) \\ &= f(e_1+e_2+e_3) = e_1+e_2+e_3. \end{aligned}$$

Car $e_1+e_2+e_3 \in E_1$.

Par conséquent $f^2 = id_{\mathbb{R}^3}$.

Cela montre que $f^{-1} = f$ et que f est bijective. □

Exercice 5.

Soit $\beta = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On considère u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ tel que $u(e_1) = e_1 + e_2$ où $\dim(\ker(u)) = 1$.

1. Donner $u(e_2)$ en fonction d'un paramètre $a \in \mathbb{R}$.
2. Donner l'image d'un vecteur $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}$ en fonction de a.
3. Donner une base du noyau de $\ker(u)$.

Solution. 1. D'après le théorème du rang

$$\begin{aligned} \dim(\ker(u)) + \dim(\mathrm{Im}(u)) &= \dim\left(\mathbb{R}^2\right) \\ &\Leftrightarrow \dim(\mathrm{Im}(u)) = 2-1 = 1. \end{aligned}$$

Donc $u(e_1)$ et $u(e_2)$ sont proportionnels et alors

$$u(e_2) = au(e_1) = ae_1 + ae_2.$$

2.

$$\begin{aligned} u(x) &= u(x_1e_1 + x_2e_2) = x_1u(e_1) + x_2u(e_2) \\ &= x_1(e_1+e_2) + a(x_1e_1 + x_2e_2) = (x_1+ax_2)e_1 + (x_2+ax_2)e_2 \\ &= (x_1+ax_2, x_2+ax_2). \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} u(e_2) &= au(e_1) \Leftrightarrow u(e_2) - au(e_1) = 0_{\mathbb{R}^2} \\ &\Leftrightarrow u(e_2 - ae_1) = 0_{\mathbb{R}^2}. \end{aligned}$$

$e_2 - ae_1$ est un vecteur non nul de $\ker(u)$ et $\ker(u)$ est une droite, donc il s'agit d'une base de $\ker(u)$. □

Exercice 6 **.**

On considère $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ l'application définie pour tout $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ par

$$f(x) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4.$$

Où $\beta = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ signifie la base canonique de $\mathbb{R}^4$.
1. Déterminer les images des vecteurs de la base canonique par f. En déduire $\dim(\mathrm{Im}(f))$.
2. Calculer $\dim(\ker(f))$ et en donner une base de $\ker(f)$.

Solution. 1. On a :

$$f(e_1) = f(e_2) = f(e_3) = f(e_4) = 1.$$

Donc

$$\mathrm{Im}(f) = \{1\} \text{ et } \dim(\mathrm{im}(f)) = 1.$$

2. D'après le théorème du rang

$$\begin{aligned}
&\dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(\mathbb{R}^4) \Leftrightarrow \dim(\ker(f)) = 3,\\
&x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \ker(f) \Leftrightarrow x = (-x_2 - x_3 - x_4, x_2, x_3, x_4)\\
&= x_2(-1, 1, 0, 0) + x_3(-1, 0, 1, 0) + x_4(-1, 0, 0, 1).
\end{aligned}$$

On pose $a = (-1, 1, 0, 0), b = (-1, 0, 1, 0)$ et $c = (-1, 0, 0, 1)$.

(a, b, c) est une famille génératrice de $\ker(f)$ avec trois vecteurs et $\dim(\ker(f)) = 3$ donc (a, b, c) est une base de $\ker(f)$. □

Exercice 7.

On cosidère u une endomorphisme de E, où E étant un espace vectoriel de dimension n avec n pair. Prouver que les deux assertions suivantes sont équivalentes (a) $u^2 = O_E$ et $n = 2\dim(\mathrm{Im}(u))$ (b) $\mathrm{Im}(u) = \ker(u)$.

Solution. On Suppose (a)

Si $y \in \mathrm{Im}(u)$ alors il existe $x \in Ey = u(x)$ alors $u(y) = u^2(x) = 0_E$ alors $y \in \mathrm{Ker}(u)$.

Donc $\mathrm{Im}(u) \subset \ker(u)$.

D'après le théorème du rang

$$\begin{aligned}
\dim(\ker(u)) + \dim(\mathrm{Im}(u)) &= \dim(E)\\
&\Leftrightarrow \dim(\ker(u)) + \frac{n}{2} = n\\
&\Leftrightarrow \dim(\ker(u)) = \frac{n}{2}.
\end{aligned}$$

$\mathrm{Im}(u) \subset \ker(u)$ et ces deux espaces ont la même dimension, donc ils sont égaux.

Supposons (b),

d'après le théorème du rang

$$\dim(\ker(u)) + \dim(\mathrm{Im}(u)) = \dim E \Leftrightarrow 2\dim(\mathrm{Im}(u)) = n \Leftrightarrow 2\,\mathrm{rg}(u) = n.$$

Pour tout $x \in E, u(x) \in \mathrm{Im}(u)$ donc $u(x) \in \ker(u)$ donc $u(u(x)) = 0_E$ donc $u^2 = O_E$.

□

Exercice 8.

Soit $u : E \to E$ une application linéaire et λ un réel.

1. On cosidère $E_\lambda = \ker(u - \lambda id_E)$. Calculer $u(x)$ pour $x \in E_\lambda$: Prouver que est un sous-espace vectoriel de E.
2. On cosidère $F \subset E$ un sous-espace vectoriel de E, Prouver que $u(F)$ est un sous-espace vectoriel de E.
3. Si $\lambda \neq 0$, Prouver que $u(E_\lambda) = E_\lambda$.

Solution. 1. $(u - \lambda id_E)(x) = 0_E \Leftrightarrow u(x) - \lambda x = 0_E \Leftrightarrow u(x) = \lambda x$

$$u(0_E) = 0_E = \lambda \times 0_E \Rightarrow 0_E \in E_\lambda.$$

Soient x_1 et x_2 deux vecteurs de E_λ, on a $u(x_1) = \lambda x_2$ et $u(x_2) = \lambda x_2$.

Soient α_1 et α_2 deux réels,

$$\begin{aligned} u(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) &= \alpha_1 u(x_1) + \alpha_2 u(x_2) \\ &= \alpha_1 \lambda x_1 + \alpha_2 \lambda x_2 = \lambda(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2). \end{aligned}$$

Donc $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \in E_\lambda$.

E_λ est un sous-espace vectoriel de E.

2. F est un sous-espace vectoriel de E donc $0_E \in F$ par conséquent $u(0_E) = 0_E \in u(F)$.

Pour tout x_1 et x_2 dans F. Pour tout α_1 et α_2 réels. On a $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \in F$.

Soient y_1 et y_2 dans $u(F)$, il existe x_1 et x_2 dans F tels que $y_1 = u(x_1)$ et $y_2 = u(x_2)$.

Alors

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 = \alpha_1 u(x_1) + \alpha_2 u(x_2) = u(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2).$$

Car u est linéaire, donc

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 = u(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \in u(F).$$

Car $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \in F$.

Par conséquent $u(F)$ est un sous-espace vectoriel de E.

3. Si $x \in E_\lambda$ alors $x = \frac{1}{\lambda} u(x) = u\left(\frac{1}{\lambda} x\right) \in u(E_\lambda)$ donc $E_\lambda \subset u(E_\lambda)$.

Si $y \in u(E_\lambda)$ il existe $x \in E_\lambda$ tel que $y = u(x)$ donc $y = \lambda x \in E_\lambda$, ce qui montre que $u(E_\lambda) \subset E_\lambda$ Finalement

$$u(E_\lambda) = E_\lambda.$$

□

Exercice 9.

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension respectives n et p. On cosidère $u : E \to F$ une application linéaire

1. Prouver que si $n < p$ alors u n'est pas surjective.
2. Prouver que si $n > p$ alors u n'est pas injective.

Solution. 1. Supposons que u soit surjective, alors $\mathrm{Im}(u) = F$ par conséquent $\dim(\mathrm{Im}(u)) = p$ et d'après le théorème du rang

$$\begin{aligned}\dim(\ker(u)) + \dim(\mathrm{Im}(u)) &= \dim(E)\\ &\Leftrightarrow \dim(\ker(u)) + p = n\\ &\Leftrightarrow \dim(\ker(u)) = n - p < 0.\end{aligned}$$

Ce qui n'est pas possible, donc u n'est pas surjective.

2. Supposons que u soit injective, alors $\ker(u) = \{0_E\}$ par conséquent $\dim(\ker(u)) = 0$ et d'après le théorème du rang, comme $\mathrm{Im}(u) \subset F$ entraine que $\dim(\mathrm{Im}(u)) < p$

$$\begin{aligned}\dim(\ker(u)) + \dim(\mathrm{Im}(u)) &= \dim(E)\\ &\Leftrightarrow \dim(\mathrm{Im}(u)) = n\\ &\Leftrightarrow n = \dim(\mathrm{Im}(u)) < p.\end{aligned}$$

Ce qui n'est pas possible, donc u n'est pas injective. □

CHAPITRE 3

MATRICES

Dans le cas où $\mathcal{L}_{\Bbbk}(E, E')$ est de dimension finie, disons de dimension r, moyennant le choix d'une base on peut associer à toute application linéaire f un r-uplet d'éléments de $\Bbbk$, les composantes de f. Pour des raisons que nous verrons par la suite, ces composantes sont rangées non pas sur une ligne mais sur un tableau ayant un certain nombre de lignes et de colonnes, que l'on appelle matrice associée à l'application linéaire f.

Les notions abordées dans ce chapitre sont :

— Matrices associées aux applications linéaires.
— Produit de deux matrices.
— Matrice de l'inverse d'une application.
— Calcul de l'inverse d'une matrice.
— Changement de base.
— Rang d'une matrice.

Definition 3.1 *On appelle matrice de type (p, n) à cœfficients dans $\mathbb{k}$ un tableau A de pn éléments de $\mathbb{k}$ rangés sur p lignes et n colonnes :*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pn} \end{pmatrix} \quad \text{ou, enabrégé : } A = (a_{ik}), \text{ ou aussi : } A = \|a_{ik}\|.$$

L'ensemble des matrices à p lignes et n colonnes est noté $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{k})$. Si $n = p$, $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{k})$ est noté : $\mathcal{M}_n(\mathbb{k})$.

Exemple 3.1

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R}) \quad \begin{pmatrix} 1 & 2-i & 3+i \\ 0 & 1+i & i \\ -i & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}).$$

Remarquons que dans la notation que nous venons d'adopter, a_{ik} désigne l'élément de la i-ème ligne et de la k-ème colonne.

Une autre notation que nous emploierons aussi dans la suite, est la «notation par colonnes» :

$$A = \|c_1, \dots, c_n\|, \quad \text{où} \quad c_k = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{pk} \end{pmatrix} \text{ est la } k^{\text{ème}} \text{ colonne .}$$

Sur l'ensemble $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{k})$ on définit les lois :

- Addition : si $A = (a_{ik}), B = (b_{ik})$, on note $C = A + B$ la matrice (c_{ik}) telle que :

$$c_{ik} = a_{ik} + b_{ik}, \quad \forall i, k.$$

- Produit par un scalaire : si $A = (a_{ik})$ et $\lambda \in \mathbb{k}$ on note λA la matrice (λa_{ik}) c'est-à-dire la matrice obtenue en multipliant tous les éléments par λ.

Exemple 3.2

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 7 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$5\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -5 & 0 & 15 \\ 5 & 10 & 5 & -5 \end{pmatrix}.$$

Il est facile de voir que, muni de ces lois, $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{k})$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{k}$. L'élément neutre est la matrice dont tous les éléments sont nuls, dite matrice nulle, notée 0 . L'opposée de la matrice (a_{ik}) est la matrice $(-a_{ik})$.

Proposition 3.1 *On a :*

$$\dim_{\mathbb{k}} \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{k}) = pn.$$

Preuve. On vérifie facilement que les pn matrices, dites *matrices élémentaires*

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \dots, E_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{i}^{\text{ème}} \text{ ligne}, \dots$$

$$E_{pn} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

forment une base de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{k})$ dite base canonique. □

3.1 Matrices d'un application linéaire

Considérons E et E' deux espaces vectoriels sur $\mathbb{k}$, de dimension n et p respectivement, et $f : E \longrightarrow E'$ une application linéaire. On choisit une base $\{e_1, \dots, e_n\}$ de E et une base $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p\}$ de E'. Les images des vecteurs $e_1, \dots, e_n$ par f se décomposent dans la base $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p\}$ comme suit :

$$\begin{aligned} f(e_1) &= a_{11}\varepsilon_1 + a_{21}\varepsilon_2 + \cdots + a_{p1}\varepsilon_p \\ f(e_2) &= a_{12}\varepsilon_1 + a_{22}\varepsilon_2 + \cdots + a_{p2}\varepsilon_p \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f(e_n) &= a_{1n}\varepsilon_1 + a_{2n}\varepsilon_2 + \cdots + a_{pn}\varepsilon_p. \end{aligned}$$

Definition 3.2 *On note par $M(f)_{e_i,\varepsilon_j}$, la matrice de f dans les bases $\{e_1, \dots, e_n\}, \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p\}$, appartenant à $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{k})$ dont les colonnes sont les composantes des vecteurs $f(e_1), \dots, f(e_n)$ dans la base $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p\}$:*

$$M(f)_{e_i,\varepsilon_j} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pn} \end{pmatrix}.$$

On utilisera aussi la notation : $\|f(e_1), \dots, f(e_n)\|_{\varepsilon_j}$.

S'il n'y a pas d'ambiguité possible, on écrira aussi $M(f)$ au lieu de $M(f)_{e_i,\varepsilon_j}$, il est clair que la matrice associée à f dépend du choix des bases de E et E'.

Dans le cas où f est un endomorphisme, on peut choisir la même base dans E considéré comme espace de départ et d'arrivée. Dans ce cas, on notera $M(f)_{e_i}$ au lieu de $M(f)_{e_i,e_j}$.

Proposition 3.2 *Soient E et E' deux espaces vectoriels sur $\mathbb{k}$ de dimension n et p respectivement, $\{e_i\}$ et $\{\varepsilon_j\}$ des bases de E et E'. Alors l'application :*

$$\begin{array}{rlcl} M: & \mathcal{L}_K(E,E') & \longrightarrow & \mathcal{M}_{p,n}(K) \\ & f & \longmapsto & M(f)_{e_i,\varepsilon_j}, \end{array}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels c'est-à-dire :

$$\begin{cases} M(f+g) = M(f) + M(g) \\ M(\lambda f) = \lambda M(f), \end{cases}$$

et M est bijective.

En particulier : $\dim_{\mathbb{k}} \mathcal{L}(E,E') = np$.

Preuve. On a en effet :

$$\begin{aligned} M(f+g)_{e_i,\varepsilon_j} &= \|(f+g)(e_1), \ldots, (f+g)(e_n)\|_{\varepsilon_j} \\ &= \|f(e_1) + g(e_1), \ldots, f(e_n) + g(e_n)\|_{\varepsilon_j} \\ &= \|f(e_1), \ldots, f(e_n)\|_{\varepsilon_j} + \|g(e_1), \ldots, g(e_n)\|_{\varepsilon_j}. \end{aligned}$$

d'après la définition de l'addition des matrices, c'est-à-dire :

$$M(f+g)_{e_i,\varepsilon_j} = M(f)_{e_i,\varepsilon_j} + M(g)_{e_i,\varepsilon_j}.$$

De même, si $\lambda \in \mathbb{k}$:

$$\begin{aligned} M(\lambda f)_{e_i,\varepsilon_j} &= \|(\lambda f)(e_1), \ldots, (\lambda f)e_n\|_{\varepsilon_j} \\ &= \|\lambda f(e_1), \ldots, \lambda f(e_n)\|_{e_j} = \lambda \|f(e_1), \ldots, f(e_n)\|_{\varepsilon_j}. \end{aligned}$$

Donc M est linéaire.

D'autre part M est surjective. Soient, en effet :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{pn}(K),$$

et $f \in \mathcal{L}(E,F)$ définie de la manière suivante. On pose d'abord :

$$\begin{gathered} f(e_1) = a_{11}\varepsilon_1 + a_{21}\varepsilon_2 + \cdots + a_{p1}\varepsilon_p \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f(e_n) = a_{1n}\varepsilon_1 + a_{2n}\varepsilon_2 + \cdots + a_{pn}\varepsilon_p. \end{gathered}$$

On prolonge, ensuite, f par linéarité sur E, c'est-à-dire, si :

$$x = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n \in E,$$

on pose :

$$f(x) = \lambda_1 f(e_1) + \cdots + \lambda_n f(e_n).$$

Il est facile de vérifier que f est linéaire et que $A = M(f)_{e_i,\varepsilon_j}$. Enfin M est injective. Soit en effet $f \in \operatorname{Ker} M$:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Ceci signifie que $f(e_1) = 0, \ldots, f(e_n) = 0$. Donc, si $x = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n \in E$, on aura $f(x) = \lambda_1 f(e_1) + \cdots + \lambda_n f(e_n) = 0$, c'est-à-dire $f = 0$. D'après la proposition 2.4, f est injective. □

Exemple 3.3 *Soit E de dimension n et :*

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{id}_E : & E & \longrightarrow & E \\ & x & \mapsto & x. \end{array}$$

Considérons une base $\{e_i\}$. On a : $id_E(e_i) = e_i$. Donc :

$$M\left(\underset{E}{\mathrm{id}}\right)_{e_i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1 \textit{ est l'élément unité de } \mathbb{k}).$$

Cette matrice est notée I_n ou simplement I et est appelée matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{k})$.

Exemple 3.4 *Soit $\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On considère l'application linéaire :*

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x, y, z) & \mapsto & (x - y, z - y). \end{array}$$

On a

$$\begin{aligned} f(e_1) &= f(1,0,0) = (1,0) = \epsilon_1 \\ f(e_2) &= f(0,1,0) = (-1,-1) = -\epsilon_1 - \epsilon_2 \\ f(e_3) &= f(0,0,1) = (0,1) = \epsilon_2, \end{aligned}$$

donc

$$M(f)_{e_i,\varepsilon_j} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exemple 3.5 *On considère l'application*

$$\begin{array}{rlcl} w: & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ & (x_1, ..., x_n) & \mapsto & a_1x_1 + ... + a_nx_n. \end{array}$$

En munissant $\mathbb{R}^n$ *de la base canonique* $\{e_1, ..., e_n\}$ *et* $\mathbb{R}$ *de la base canonique* $\{1\}$*, on a :*

$$\begin{array}{l} f(e_1) = f(1, ..., 0) = a_1 = a_1\epsilon_1 \\ f(e_2) = f(0, 1, ..., 0) = a_2 = a_2\epsilon_2 \\ .... \\ f(e_n) = f(0, 0, ..., 1) = a_n = a_n\epsilon_n. \end{array}$$

Alors

$$M(w)_{e_i,\varepsilon_j} = (a_1, ..., a_n).$$

3.2 Produit de deux matrices

Au paragraphe précédent, nous avons défini sur les matrices les opérations d'addition et de produit par un scalaire. En vertu de la proposition 3.2, ces opérations correspondent aux opérations analogues sur les applications linéaires, c'est-à-dire on a :

$$\begin{array}{c} M(f+g) = M(f) + M(g) \\ M(\lambda f) = \lambda M(f). \end{array}$$

Nous allons maintenant définir une nouvelle opération, le produit de matrices. Comme nous le verrons (cf. proposition 3.5), elle correspond à la composition des applications, en ce sens que :

$$M(f \circ g) = M(f) \cdot M(g).$$

Tout d'abord, remarquons que la composition des applications ne peut se faire pour tout couple d'applications, mais uniquement si l'espace d'arrivée de g est inclus dans l'espace de départ de f. Cette situation va se retrouver sur les matrices : le produit ne peut s'effectuer qu'entre matrices d'un certain type.

Definition 3.3 *On appelle produit de matrices l'application :*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{p,n}(K) \times \mathcal{M}_{n,q}(K) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{p,q}(K) \\ (a_{ji}), (b_{mk}) & \longmapsto & (c_{jk}), \end{array}$$

où :

$$c_{jk} = a_{j1}b_{1k} + a_{j2}b_{2k} + ... + a_{jn}b_{nk}.$$

En d'autres termes, l'élément c_{jk} de la j^{ème} ligne et k^{ème} colonne du produit $C = AB$ est la somme des produits des éléments de la jéme ligne de A par les éléments de même rang de la k^{ème} colonne de B. Brièvement, on dit que le produit de deux matrices s'effectue «lignes par colonnes». Voici le schéma de cette définition.

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1k} & \cdots & b_{1q} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & \cdots & b_{ik} & \cdots & b_{iq} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nk} & \cdots & b_{nq} \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & & \\ \boxed{a_{j1} \quad \cdots \quad a_{ji} \quad \cdots \quad a_{jn}} & & & & \\ \vdots & & & & \\ a_{p1} & \cdots & a_{pi} & \cdots & a_{pn} \end{pmatrix} \longrightarrow & \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & \cdots & \cdots & c_{1q} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & \cdots & \boxed{c_{jk}} & \cdots & b_{iq} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{p1} & \cdots & \cdots & \cdots & c_{pq} \end{pmatrix}
\end{array}$$

Remarque 3.1 *Le produit AB ne peut s'effectuer que si le nombre des colonnes de A est égal au nombre des lignes de B.*

Exemple 3.6 *Soit*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a :

$$\begin{array}{ccc}
 & \times & \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{B} \\
\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{A} & = & \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & -2 \\ 4 & 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}}_{C=AB}
\end{array}$$

Exemple 3.7 *Soit*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

On a :

$$\begin{array}{cc} & \times \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}}_{B} \\ \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}_{A} & = \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 11 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}}_{AB} \end{array}$$

Les remarques suivantes sont importantes :

Remarque 3.2 *1. On peut avoir $AB = 0$ sans que A ou B soient nulles.*

2. $AB = AC$ avec $A \neq 0$ n'implique pas nécessairement $B = C$ (c'est-à-dire, en général on ne peut pas "simplifier" par A, même si $A \neq 0$).

3. En général on a $AB \neq BA$ (c'est-à-dire : la multiplication entre matrices n'est pas commutative).

Exemple 3.8 *Soient*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

En effectuant les produits, on trouve :

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(ce qui montre 1.)}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{donc } BA \neq AB \text{(ce qui montre 3.)}$$

et $AB = AC$ (ce qui montre 2. puisque on a $B \neq C$).

Proposition 3.3 *La multiplication est associative, c'est-à-dire :*

$$A(BC) = (AB)C, \quad (\forall A \in \mathcal{M}_{p,n}, \forall B \in \mathcal{M}_{n,q}, \forall C \in \mathcal{M}_{q,m}).$$

La multiplication est distributive à gauche et à droite par rapport à l'addition, c'està-dire :

$$A(B+C) = AB + AC, \quad (A+D)B = AB + DB, \quad (\forall A, D \in \mathcal{M}_{p,n}, \forall B, C \in \mathcal{M}_{n,q}).$$

Preuve. Laissée comme exercice. □

Remarquons enfin que la multiplication est une loi interne sur l'ensemble $\mathcal{M}_n(K)$ des matrices carrées d'ordre n, c'est-à-dire elle est une application :

$$\mathcal{M}_n(K) \times \mathcal{M}_n(K) \longrightarrow \mathcal{M}_n(K).$$

On vérifie immédiatement que la matrice I_n est l'élément neutre de la multiplication, c'est-à-dire : $\forall A \in \mathcal{M}_n(K)$: $\quad I_n A = A I_n = A$.

3.3 Matrice d'un vecteur

Definition 3.4 *Soit E un espace vectoriel de dimension $n, \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de E et $x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$ un vecteur de E. On appelle matrice de x dans la base $\{e_i\}$ la matrice colonne des composantes de x dans la base $\{e_i\}$:*

$$M(x)_{e_i} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

(notée aussi $M(x)$).

Remarque 3.3 *Cette définition est cohérente avec la définition de matrice associée à une application linéaire. En effet, on peut identifier tout vecteur de E à une application linéaire de K dans E : à tout x de E on associe l'application linéaire.*

Si l'on écrit la matrice de f dans la base $\varepsilon = 1$ de K et $\{e_i\}$ de E, on a :

$$f(\varepsilon) = x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n,$$

donc :

$$M(f)_{\varepsilon, e_i} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{k} & \longrightarrow & E \\ & \lambda & \longmapsto & \lambda x. \end{array}$$

Proposition 3.4 *Soient E, F deux espaces vectoriels sur $K, \{e_1, \ldots, e_n\}$ et $\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p\}$ deux bases de E et F respectivement. Pour toute application $f \in \mathcal{L}_K(E, F)$ et pour tout $x \in E$, on a :*

$$M(f(x))_{\varepsilon_j} = M(f)_{e_i, \varepsilon_j} M(x)_{e_i},$$

ou plus brièvement :

$$M(f(x)) = M(f)M(x).$$

Preuve. Soit

$$M(f)_{e_i, \varepsilon_j} = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \ldots & a_{pn} \end{pmatrix},$$

ce qui veut dire que : $f(e_j) = a_{1j}\varepsilon_1 + \cdots + a_{pj}\varepsilon_p = \sum_{k=1}^{p} a_{kj}\varepsilon_k$. On a :

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_1e_1 + \cdots + x_ne_n) = \sum_{j=1}^{n} x_j f(e_j) \\ &= \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{k=1}^{p} a_{kj}\varepsilon_k = \sum_{k=1}^{p} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j\right)}_{y_k} \varepsilon_k \\ &= \sum_{k=1}^{p} y_k\varepsilon_k. \end{aligned}$$

Donc :

$$M(f(x))_{\varepsilon_j} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix},$$

avec

$$y_k = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j.$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} M(f)_{e_i,\varepsilon_j} \cdot M(x)_{e_i} &= \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \dots & a_{pn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{pj}x_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

donc :

$$M(f)_{e_i,\varepsilon_j} \cdot M(x)_{e_i} = M(f(x))_{\varepsilon_j}.$$

□

Exemple 3.9 *Soit le plan $\mathbb{R}^2$ rapporté à sa base canonique. Déterminer l'image du vecteur $x = (3,2)$ par la rotation de centre O et d'angle $\pi/6$.*

On a :

$$M(f(x)) = M(f) \cdot M(x) = \begin{pmatrix} \cos\pi/6 & -\sin\pi/6 \\ \sin\pi/6 & \cos\pi/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{3}}{2} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{3}-2}{2} \\ \frac{3+2\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

3.4 Produits de matrices

Proposition 3.5 *Soient E, F, G trois espaces vectoriels de dimension finie sur K, $\{e_1, \dots, e_n\}$ $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p\}$, $\{\eta_1, \dots, \eta_q\}$ des bases de E, F et G respectivement. Si $g \in \mathcal{L}(E, F)$ et $f \in \mathcal{L}(F, G)$ (c'est-à-dire : $E \xrightarrow{g} F \xrightarrow{f} G$), on a :*

$$M(f \circ g)_{e_i,\eta_k} = M(f)_{\varepsilon_j,\eta_k} M(g)_{e_i,\varepsilon_j},$$

ou, plus brièvement :

$$M(f \circ g) = M(f)M(g).$$

Preuve. Soit $x \in E$ arbitraire. En utilisant le résultat de la proposition 3.4, on a :

$$M(f \circ g)M(x) = M((f \circ g)(x)) = M(f(g(x))) = M(f)M(g(x)) = M(f)M(g)M(x),$$

d'où, puisque x est arbitraire :

$$M(f \circ g) = M(f)M(g).$$

□

Exemple 3.10 *Déterminer dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ la matrice de l'application h qui est la composée de la rotation g autour de O d'angle θ, suivie de la projection f sur la première bissectrice parallèlement à la seconde bissectrice.*

On a :

$$\begin{aligned} M(h) &= M(f \circ g) = M(f)M(g) \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \cos\theta + \sin\theta & -\sin\theta + \cos\theta \\ \cos\theta + \sin\theta & -\sin\theta + \cos\theta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Definition 3.5 *Une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(K)$ est dite inversible s'il existe une matrice $A' \in \mathcal{M}_n(K)$ telle que :*

$$AA' = A'A = I.$$

A' est dite inverse de A et est notée A^{-1}.

Exemple 3.11 *la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},$$

est inversible : son inverse est

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

comme on le vérifie immédiatement en effectuant les produits AA^{-1} et $A^{-1}A$.

Il existe des matrices non inversibles, par exemple la matrice nulle. Mais la matrice nulle n'est pas la seule matrice non inversible. Considérons par exemple la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

S'il existait une matrice

$$A' = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix},$$

telle que $AA' = I$, on aurait :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{c'est-à-dire :} \quad \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ce qui, évidemment, est impossible.

3.5 Matrice de l'inverse d'une application

En fait, les matrices inversibles sont les matrices qui représentent les applications linéaires bijectives. On a en effet :

Proposition 3.6 *Soient E et F deux espaces vectoriels de même dimension n sur $K, \{e_i\}$ une base de $E, \{\varepsilon_j\}$ une base de F. Une application linéaire $f : E \longrightarrow F$ est bijective (c'est-à-dire est un isomorphisme) si et seulement si $M(f)_{e_i,\varepsilon_j}$ est inversible. De plus :*

$$M(f)^{-1}_{e_i,\varepsilon_j} = M\left(f^{-1}\right)_{\varepsilon_j,e_i},$$

ou, d'une manière plus concise :

$$M\left(f^{-1}\right) = M(f)^{-1}.$$

Preuve. On a $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_E$; d'où $M\left(f^{-1} \circ f\right)_{e_i,e_i} = M\left(\mathrm{id}_E\right)_{e_i,e_i}$ Donc, d'après la proposition 3.19 :

$$M\left(f^{-1}\right)_{\varepsilon_j,e_i} M(f)_{e_i,\varepsilon_j} = I.$$

De même, on voit que

$$M(f)_{e_i,\varepsilon_j} M\left(f^{-1}\right)_{\varepsilon_j,e_i} = I.$$

□

3.6 Calcul de l'inverse d'une matrice

Il existe différentes méthodes pour calculer l'inverse d'une matrice, sur lesquelles nous reviendrons. Pour le moment, on peut retenir la suivante qui est d'ailleurs d'un usage courant.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\Bbbk), x$ et $x' \in K^n$ et X, X' les matrices colonnes qui représentent x et x' dans la base canonique de $\Bbbk^n$. Considérons l'équation matricielle :

$$X' = AX. \tag{3.1}$$

Si A est inversible, en multipliant les deux membres à gauche par A^{-1} on obtient $A^{-1}X' = (A^{-1}A)\,X$, c'est-à-dire :

$$X = A^{-1}X'.$$

Donc A^{-1} est la matrice du système obtenu en résolvant le système (3.1) en les composantes x_i de x.

Exemple 3.12 *Calculer l'inverse de la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ecrivons l'équation matricielle (3.1) avec

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ et } X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}.$$

On a :

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

ce qui est équivalent au système

$$\begin{cases} x'_1 &= x_1 + 2x_2 \\ x'_2 &= x_1 + 3x_2. \end{cases}$$

En résolvant en x_1 et x_2, on trouve :

$$\begin{cases} x_1 = 3x'_1 - 2x'_2 \\ x_2 = -x'_1 + x'_2, \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$X = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} X',$$

donc

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Definition 3.6 *L'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{k})$ est noté $\mathrm{GL}(n, \mathbb{k})$ et est dit groupe linéaire.*

3.7 Changement de base

La matrice qui représente une application linéaire a été construite à l'aide d'un choix des bases dans l'espace de départ et dans l'espace d'arrivée. Dans ce paragraphe, nous allons voir comment sont reliées deux matrices qui représentent la même application linéaire en des bases différentes.

3.7.1 Matrice de passage

Soit E un espace vectoriel de dimension n, $\{e_1, \dots, e_n\}$ et $\{e'_1, \dots, e'_n\}$ deux bases de E. Les vecteurs e'_i s'écrivent comme combinaisons linéaires des vecteurs e_i :

$$\begin{aligned}
e'_1 &= p_{11}e_1 + p_{21}e_2 + \cdots + p_{n1}e_n \\
e'_2 &= p_{12}e_1 + p_{22}e_2 + \cdots + p_{n2}e_n \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
e'_n &= p_{1n}e_1 + p_{2n}e_2 + \cdots + p_{nn}e_n.
\end{aligned}$$

Definition 3.7 *On appelle matrice de passage de la base $\{e_i\}$ à la base $\{e'_i\}$ la matrice notée $P_{e_i \longrightarrow e'_i}$ dont les colonnes sont les composantes des vecteurs e'_i dans la base $\{e_i\}$:*

$$P_{e_i \longrightarrow e'_i} = \|e'_1, \dots, e'_n\|_{e_i} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}.$$

On a, bien entendu :

$$P_{e_i \longrightarrow e'_i} = M\left(id_E\right)_{e'_i, e_i}.$$

On en déduit immédiatement (propositions 3.5 et 3.6) :

Proposition 3.7 *1. Propriété transitivité :*

$$P_{e_i \to e_{i'}} P_{e_{i'} \to e_{i''}} = P_{e_i \to e_{i''}}.$$

2. Les matrices de passage sont inversibles et on a :

$$\left(P_{e_i \to e'_i}\right)^{-1} = P_{e'_i \longrightarrow e_i}.$$

3.7.2 Changement de base sur les composantes d'un vecteur

Soit $x \in E$, de composantes $(x_1, \ldots, x_n)$ dans la base $\{e_i\}$ et de composantes $(x'_1, \ldots, x'_n)$ dans la base $\{e'_i\}$. Il est facile de déterminer les relations entre les x_i et x'_i à l'aide de la matrice de passage $P_{e_i \longrightarrow e'_i}$.

Notons

$$X := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = M(x)_{e_i}, \quad X' := \begin{pmatrix} x'_i \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = M(x)_{e'_i} \quad \text{et} \quad P = P_{e_i \to e'_i}.$$

On a :

$$PX' = M\left(\underset{E}{\mathrm{id}}\right)_{e'_i, e_i} \times M(x)_{e'_i} = M\left(\underset{E}{\mathrm{id}}(x)\right)_{e_i} = M(x)_{e_i} = X,$$

c'est-à-dire $PX' = X$, d'où $X' = P^{-1}X$.

Nous avons donc démontré la relation importante :

Proposition 3.8 *Soient $x \in E, \{e_i\}$ et $\{e'_i\}$ deux bases de E, $P = P_{e_i \to e'_i}$ et $X = M(x)_{e_i}$, $X' = M(x)_{e'_i}$. Alors :*

$$X' = P^{-1}X.$$

Remarque 3.4 *On dit que les composantes d'un vecteur x se transforment d'une manière "contravariante" pour exprimer le fait que si les bases sont transformées par la matrice P, les composantes de x sont transformées par la matrice P^{-1}.*

Exemple 3.13 *Soit $\mathbb{R}^2$ muni de deux bases : la base canonique $\{e_1, e_2\}$ et la base $\{e'_1, e'_2\}$ définie par :*

$$\begin{cases} e'_1 = 2e_1 + e_2 \\ e'_2 = 3e_1 + 2e_2. \end{cases} \tag{3.2}$$

Soit $x = 2e_1 + 3e_2$. On a deux méthodes pour calculer les composantes de x dans la base $\{e'_1, e'_2\}$.

$1^{\text{ère}}$ **méthode (méthode matricielle)**

On a :

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } X = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

En appliquant la relation de la proposition 3.25, on trouve :

$$X' = P^{-1}X = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix},$$

donc

$$x = -5e'_1 + 4e'_2.$$

$2^{\text{ème}}$ **méthode (calcul direct)**

On exprime e_1 et e_2 en fonction de e'_1 et e'_2 en résolvant le système (3.2).

On a :

$$\begin{cases} e_1 = 2e'_1 - e'_2 e_2 & = -3e'_1 + 2e'_2. \end{cases}$$

En remplaçant dans l'expression de x, on trouve :

$$x = 2e_1 + 3e_2 = 2\,(2e'_1 - e'_2) + 3\,(-3e'_1 + 2e'_2) = -5e'_1 + 4e'_2.$$

3.7.3 Changement de base sur la représentation matricielle d'une application linéaire.

Proposition 3.9 *Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $\{e_1, \dots, e_n\}$ et $\{e'_1, \dots, e'_n\}$ deux bases de E et $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p\}$ $\{\varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_p\}$ deux bases de F. Notons :*

$$A = M(f)_{e_i,\varepsilon_j} \quad A' = M(f)_{e'_i,\varepsilon'_j}, \quad P = P_{e_i \to e'_i}, \quad Q = P_{\varepsilon_j \longrightarrow \varepsilon'_j}.$$

On a alors :

$$A' = Q^{-1}AP.$$

Preuve. Soit $x \in E$ un vecteur arbitraire. D'après la proposition 3.8, on a :

$$M(f(x))_{\varepsilon'_j} = Q^{-1}M(f(x))_{\varepsilon_j} = Q^{-1}M(f)_{e_i,\varepsilon_j}M(x)_{e_i} = Q^{-1}AX,$$

où on a posé $X = M(x)_{e_i}$. D'autre part, si $X' = M(x)_{e'_i}$:

$$M(f(x))_{\varepsilon'_j} = M(f)_{e'_i,\varepsilon'_j}M(x)_{e'_i} = A'X' = A'P^{-1}X.$$

Donc :

$$A'P^{-1}X = Q^{-1}AX.$$

Comme x est arbitraire, cela implique que $A'P^{-1} = Q^{-1}A$, d'où : $A' = Q^{-1}AP$. □

Corollaire 3.1 *Soit $f = E \longrightarrow E$ un endomorphisme de E et $\{e_1, \dots, e_n\}$, $\{e'_1, \dots, e'_n\}$ deux bases de E. Notons :*

$$A = M(f)_{e_i}, \quad A' = M(f)_{e'_i} \quad \text{et} \quad P = P_{e_i \longrightarrow e'_i}.$$

On a alors :

$$A' = P^{-1}AP.$$

Definition 3.8 *Deux matrices $A, A' \in \mathcal{M}_n(K)$ sont dites semblables s'il existe une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_n(K)$ telle que :*

$$A' = P^{-1}AP.$$

Il est clair que deux matrices semblables représentent le même endomorphisme en des bases différentes.

Exemple 3.14 *Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui dans la base canonique $\{e_i\}$ est représenté par la matrice :*

$$A = M(f)_{e_i} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Déterminer la matrice A' qui représente f dans la base $\{e'_i\}$ où :

$$\begin{cases} e'_1 = (1,0,-1) \\ e'_2 = (0,1,\ \ 1) \\ e'_3 = (1,0,\ \ 1) \end{cases}.$$

On a $A' = P^{-1}AP$ avec

$$P = \|e'_1, e'_2, e'_3\|_{e_i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

D'après la proposition 3.7: $P^{-1} = P_{e'_i \longrightarrow e_i} = \|e_1, e_2, e_3\|_{e'_i}$.

Il s'agit donc d'exprimer e_1, e_2, e_3 dans la base $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$. Or :

$$\begin{cases} e'_1 = e_1 - e_3 \\ e'_2 = e_2 + e_3 \\ e'_3 = e_1 + e_3. \end{cases}$$

En résolvant en e_1, e_2, e_3 :

$$\begin{cases} e_1 = \frac{1}{2}\left(e'_1 + e'_3\right) \\ e_2 = \frac{1}{2}\left(e'_1 + 2e'_2 - e'_3\right) \\ e_3 = \frac{1}{2}\left(-e'_1 + e'_3\right), \end{cases}$$

donc

$$P^{-1} = \|e_1, e_2, e_3\|_{e'_i} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

En effectuant le produit $A' = P^{-1}AP$, on trouve :

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Remarque 3.5 *Puisque $A' = M(f)_{e'_i}$, ceci veut dire que :*

$$f(e'_1) = 2e'_1 \quad , \quad f(e'_2) = 2e'_2 \quad , \quad f(e'_3) = 4e'_3$$

comme d'ailleurs on le vérifie directement. On a, en effet :

$$f(e'_1) = f(e_1 - e_3) = f(e_1) - f(e_3).$$

Or $f(e_1) = 3e_1 + e_3$ (cf. la première colonne de la matrice A); de même $f(e_3) = e_1 + 3e_3$.
Donc : $f(e'_1) = 2e_1 - 2e_3 = 2e'_1$, etc.

3.8 Rang d'une matrice

Comme nous l'avons vu (proposition 2.3), on appelle rang d'une application linéaire f la dimension de $\operatorname{Im} f$. Puisque $\mathcal{L}_K(E, F)$ est isomorphe à $\mathcal{M}_{p,n}(K)$, il faut s'attendre à ce que l'on puisse calculer le rang de f à l'aide de la matrice associée à f. C'est ce que nous allons voir dans ce paragraphe.

Definition 3.9 *1. Soit $\mathcal{F} = \{v_i\}_{i\in I}$ une famille de vecteurs. On appelle rang de la famille la dimension de l'espace engendré par les vecteurs $\{v_i\}_{i\in I}$.*
2. Soit $A \in \mathcal{M}_{p,n}(K), A = \|c_1, \ldots, c_n\|$ où l'on a noté c_i les vecteurs colonnes de A (notons que $c_i \in K^p$). On appelle rang de la matrice A le rang de la famille des vecteurs colonnes de A :

$$\operatorname{rg} \|c_1, \ldots, c_n\| = \operatorname{rg}\{c_1, \ldots, c_n\} = \dim \operatorname{Vect}\{c_1, \ldots, c_n\}.$$

Proposition 3.10 *Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Soient $\{e_1, \ldots, e_n\}, \{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p\}$ deux bases quelconques de E et F respectivement, et $A = M(f)_{e_i,\varepsilon_j}$. On a alors :*

$$\operatorname{rg} f = \operatorname{rg} A.$$

En particulier : deux matrices qui représentent la même application linéaire en des bases différentes ont même rang. En particulier, deux matrices semblables ont même rang.

Preuve. En effet :

$$A = M(f)_{e_i,\varepsilon_j} = \|f(e_1), \ldots, f(e_n)\|_{\varepsilon_j},$$

donc

$$\operatorname{rg} A = \dim(\operatorname{Vect}\{f(e_1), \ldots, f(e_n)\}) = \dim(\operatorname{Im} f) = \operatorname{rg} f.$$

□

Soit $A \in \mathcal{M}_{p,n}(K)$ et ${}^tA$ la matrice dont les lignes sont les colonnes de A. Par exemple, si :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}, \quad {}^tA = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

${}^tA$ est dite transposée de A.

Proposition 3.11 *Pour toute matrice A, on a :*

$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}({}^tA).$$

Exemple 3.15 *Calculer le rang de la matrice :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 8 & 2 \end{pmatrix}.$$

D'après la définition, il faudrait calculer le rang des vecteurs colonnes en échelonnant la matrice :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 5 & 3 & 8 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Mais d'après la proposition 3.11, cela revient à calculer le rang des vecteurs lignes (c'est-à dire à échelonner la matrice elle-même), ce qui est plus simple a priori. On voit, d'ailleurs, que la troisième ligne est la somme des deux premières lignes qui sont indépendantes entre elles. Donc $\operatorname{rg} A = 2$.

3.9 Exercices corrigés

Exercice 1.
On cosidère

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}.$$

1. Calculer A^2 et A^3. Calculer A^3-A^2+A-I.
2. Donner A^{-1} en fonction de A^2, A et I.
3. Même auestion pour A^4.

Solution. 1.

$$A^2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}.$$

$$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}.$$

$$A^3-A^2+A-I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

$$+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=O.$$

2. $A^3-A^2+A-I=O\Leftrightarrow A\left(A^2-A+I\right)=I$ donc $A^{-1}=A^2-A+I$.
3. $A^3=A^2-A+I$, donc

$$A^4=A\left(A^2-A+I\right)=A^3-A^2+A=\left(A^2-A+I\right)-A^2+A=I.$$

□

Exercice 2.
On cosidère la matrice A

$$A=\begin{pmatrix}3&0&1\\-1&3&-2\\-1&1&0\end{pmatrix}.$$

Calculer $(A-2I)^3$, en déduire que A est inversible et déterminer A^{-1} en fonction de I, A et de A^2.

Solution. On a :

$$\begin{aligned}
A-2I &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}. \\
(A-2I)^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}. \\
(A-2I)^3 &= (A-2I)(A-2I)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Ce qui entraine que

$$A^3 - 3\times 2A^2 + 3\times 2^2 A - 2^3 I = 0.$$

Car A et I commutent.

Ce qui équivaut à

$$A^3 - 6A^2 + 12A - 8I = 0.$$

Soit encore

$$A^3 - 6A^2 + 12A = 8I.$$

Puis en divisant par 8 et en mettant A en facteur

$$A\left(\frac{1}{8}A^2 - \frac{3}{4}A + \frac{3}{2}I\right) = I.$$

Ce qui montre que A est inversible et que

$$A^{-1} = \frac{1}{8}A^2 - \frac{3}{4}A + \frac{3}{2}I.$$

□

Exercice 3.

Soit $\beta = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

On cosidère u l'application linéaire définie pour tout $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ par

$$u(x) = (x_2 - 2x_3, 2x_1 - x_2 + 4x_3, x_1 - x_2 + 3x_3).$$

1. Donner la matrice A de u dans la base canonique.

2. Donner une base (a,b) de $\ker(u-Id)$.
3. Déterminer un vecteur c tel que $\ker(u) = \text{vect}(c)$.
4. Prouver que $\beta' = (a,b,c)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
5. Donner la matrice D de u dans la base β'.
6. Prouver que $\text{Im}(u) = \ker(u-Id)$
7. Prouver que $\ker(u) \oplus \text{Im}(u) = \mathbb{R}^3$.

Solution. 1. Les coordonnées de $u(x)$ dans la base canonique sont

$$\begin{pmatrix} x_2 - 2x_3 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Donc la matrice de u dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ les coordonnées d'un vecteur $x = (x_1, x_2, x_3)$ dans la base canonique

$$\begin{aligned} x &= (x_1,x_2,x_3) \in \ker(u-Id) \Leftrightarrow (A-I)X = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0 \Leftrightarrow x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 - 2x_3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Donc $x = (x_2 - 2x_3, x_2, x_3) = x_2(1,1,0) + x_3(-2,0,1)$

On pose $a = (1,1,0)$ et $b = (-2,0,1)$, (a,b) est une famille de deux vecteurs non proportionnels, donc libre, qui engendrent $\ker(u-Id)$, c'est une base de $\ker(u-Id)$.

3. Soit

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

les coordonnées d'un vecteur $x = (x_1, x_2, x_3)$ dans la base canonique

$$\begin{aligned} x=(x_1,x_2,x_3) &\in \ker(u) \Leftrightarrow AX=0\\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2\\ 2 & -1 & 4\\ 1 & -1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_2-2x_3=0\\ 2x_1-x_2+4x_3=0\\ x_1-x_2+3x_3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2=2x_3\\ 2x_1-2x_3+4x_3=0\\ x_1-2x_3+3x_3=0\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_2=2x_3\\ 2x_1+2x_3=0\\ x_1+x_3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=-x_3\\ x_2=2x_3.\end{cases}\end{aligned}$$

Donc $x=(-x_3,2x_3,x_3)$, si on pose $c=(-1,2,1)$ alors $\ker(u)=\mathrm{Vect}(c)$.

4.

$$\begin{aligned}\det(a,b,c) &= \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1\\ 1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -2 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}\\ &= -2-(-2+1)=-1\neq 0.\end{aligned}$$

En développant par rapport à la première colonne, donc (a,b,c) est une base de $\mathbb{R}^3$.

5. $u(a)-a=0_{\mathbb{R}^3}\Rightarrow u(a)=a$, de même $u(b)=b$ et $u(c)=0_{\mathbb{R}^3}$ donc

$$D=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

6. D'après la matrice de u dans la base β', $\mathrm{Im}(u)=\mathrm{Vect}(a,b)=\ker(u-Id)$.

7. D'après le théorème du rang

$$\dim(\ker u)+\dim(\mathrm{Im}\, u)=\dim\left(\mathbb{R}^3\right).$$

Il reste à montrer que l'intersection de $\ker(u)$ et de $\mathrm{Im}(u)$ est le vecteur nul.

$$\begin{aligned} x &\in \ker(u)\cap\mathrm{Im}(u) \Leftrightarrow \begin{cases} x\in\mathrm{Im}(u)\\ x\in\ker(u)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in\ker(u)\\ x\in\ker(u-Id)\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases} u(x)=0_{\mathbb{R}^3}\\ u(x)-x=0_{\mathbb{R}^3}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u(x)=0_{\mathbb{R}^3}\\ u(x)=x\end{cases} \Leftrightarrow x=0_{\mathbb{R}^3}.\end{aligned}$$

On a donc $\ker(u)\oplus\mathrm{Im}(u)=\mathbb{R}^3$. □

Exercice 4.
On cosidère l'application $u : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}[X]$ défini par $u(P) = P + (1 - X)P'$.
Soit $\beta = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
1. Prouver que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Donner la matrice de u dans β.
3. Donner le noyau et l'image de u.

Solution. 1.

$$\begin{aligned}u(\alpha P + \beta Q) &= \alpha P + \beta Q + (1 - X)(\alpha P + \beta Q)' \\ &= \alpha P + \beta Q + (1 - X)(\alpha P' + \beta Q') \\ &= \alpha(P + (1 - X)P') + \beta(Q + (1 - X)Q') = \alpha u(P) + \beta u(Q).\end{aligned}$$

Donc u est une application linéaire

$$d^\circ P \leq 2 \Rightarrow d^\circ u(P) \leq 2.$$

Elle va de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}_2[X]$ il s'agit d'un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2.

$$\begin{aligned}&u(1) = 1 + (1 - X) \times 0 = 1 \\ &u(X) = X + (1 - X) \times 1 = 1 \\ &u(X^2) = X^2 + (1 - X) \times 2X = 2X - X^2 \\ &A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

3. $P \in \ker(u)$

$$\begin{aligned}u(P) &= 0 \Leftrightarrow u\left(aX^2 + bX + c\right) = au\left(X^2\right) + bu(X) + cu(1) \\ &= a\left(2X - X^2\right) + b + c = 0 \\ &\Leftrightarrow -aX^2 + 2aX + b + c = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ c = -b \end{cases}, \\ P &= bX - b = b(X - 1).\end{aligned}$$

Donc $\ker(u)$ est la droite vectorielle engendrée par le polynôme $X - 1$.

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}(u) &= \operatorname{Vect}\left(u(1), u(X), u\left(X^2\right)\right) = \operatorname{Vect}\left(1, 1, 2X - X^2\right) \\ &= \operatorname{Vect}\left(1, 2X - X^2\right)\end{aligned}$$

On peut prendre donc la famille $(1, 2X - X^2)$ comme une base de $\operatorname{Im}(u)$. □

CHAPITRE 4

SYSTÈMES D'ÉQUATIONS

Les déterminants fournissent un outil efficace et indispensable pour la discussion des systèmes linéaires : ils permettent d'avoir les conditions de compatibilité sous forme de relations liant les coefficients et fournissent aussi des formules qui donnent explicitement la solution (formules de **Cramer**).

Les notions essentielles abordées dans ce chapitre sont :

— Déterminant.
— Permutations.
— Convention d'écriture.
— Systèmes d'équations linéaires
— Définitions et interprétations.
— Expression matricielle et rang d'un système.
— Expression vectorielle.
— Interprétation en termes d'applications linéaires.
— Systèmes de Cramer.

4.1 Déterminant

4.1.1 Permutations

Definition 4.1 *Une permutation est une bijection $\sigma : S \to S$, où S est un ensemble.*

On dénote généralement une permutation sous la forme d'un tableau à deux rangées où chaque élément de la rangée du bas représente l'image de l'élément qui se retrouve immédiatement au-dessus. On utilise cette notation, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ est une permutation telle que $\sigma(1) = 3, \sigma(2) = 1$, et $\sigma(3) = 2$. On dénoté par S_n, l'ensemble de toutes les permutations de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$. Notons que $|S_n| = n!$.

Les éléments de S_2 sont

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

et ceux de S_3 sont

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

La permutation $\sigma \in S_n$ telle que $\sigma(i) = i$ pour $i = 1, \ldots, n$ est dite la permutation identité.

Considérons $\sigma, \gamma \in S_n$. II est facile de vérifier que $\gamma \circ \sigma \in S_n$.

Exemple 4.1 *Considérons*

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } \gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculer $\gamma \circ \sigma$?

On a :

$$(\gamma \circ \sigma)(1) = \gamma(\sigma(1)) = \gamma(3) = 1,$$
$$(\gamma \circ \sigma)(2) = \gamma(\sigma(2)) = \gamma(1) = 3,$$
$$(\gamma \circ \sigma)(3) = \gamma(\sigma(3)) = \gamma(2) = 2.$$

Ainsi, $\gamma \circ \sigma$ est la permutation $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Si $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, alors $\gamma \circ \sigma$ est la permutation identité. On appelle donc γ permutation inverse de σ.

On verra plus tard que la définition du déterminant d'une matrice A de taille $n \times n$ est une somme de certains termes, chacun contenant un produit de la forme $a_{1,\sigma(1)}a_{2,\sigma(2)}\cdots a_{n,\sigma(n)}$, pour une permutation $\sigma \in S_n$, où $a_{i,j}$ dénote l'élément (i,j) de $\mathbf{A}$.

Rappelons que l'on utilise les indices (i,j) pour les lignes et pour les colonnes respectivement. Alors, le produit $a_{1,\sigma(1)}a_{2,\sigma(2)}\cdots a_{n,\sigma(n)}$ contient exactement un élément de chacune des lignes de A. De même, puisque $\sigma(1),\ldots,\sigma(n)$ est une permutation des nombres $1,\ldots,n$, le produit

$$a_{1,\sigma(1)}a_{2,\sigma(2)}\cdots a_{n,\sigma(n)},$$

contient aussi exactement un élément de chacune des colonnes de A.

Exemple 4.2 *On considère*

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ u & v & w \end{bmatrix} \text{ et } \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Alors $a_{1,\sigma(1)}a_{2,\sigma(2)}a_{3,\sigma(3)} = a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2} = cdv.$

Exercice 4.1 *1. Donner la permutation inverse de chacune des permutations suivantes :*

$$a. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \ b. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \ c. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. Soient

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ -5 & 7 & 4 \end{bmatrix}, \quad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculer $a_{1,\sigma(1)}a_{2,\sigma(2)}a_{3,\sigma(3)}$.

Solution. 1. a. La permutation inverse est

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

b. La permutation inverse est

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

c. La permutation inverse est

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. $a_{1,\sigma(1)}a_{2,\sigma(2)}a_{3,\sigma(3)} = a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1} = 3 \cdot 1 \cdot (-5) = -15.$ □

Definition 4.2 *Soit $\sigma \in S_n$. La paire (i, j) est une inversion de σ si $i < j$ et $\sigma(i) > \sigma(j)$. On dénote par $\operatorname{inv}(\sigma)$, le nombre total d'inversions de σ.*

Exemple 4.3 *Soit*

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

La paire $(1, 3)$ est une inversion de σ car on a $1 < 3$ et $\sigma(1) = 3 > 2 = \sigma(3)$. De même pour la paire $(1, 2)$. Donc $\operatorname{inv}(\sigma) = 2$.

Exemple 4.4 *On considère $\sigma \in S_n$, Trouver $i, j \in \{1, \ldots, n\}, i < j$ tels que $\sigma(i) = j$, $\sigma(j) = i$, et $\sigma(k) = k$ pour tout les autres indices. On va déterminer $\operatorname{inv}(\sigma)$.*

On a : pour chaque $k = i + 1, \ldots, j - 1, (i, k)$ est une inversion car $i < k$ et $\sigma(i) = j > k = \sigma(k)$.

De même, pour chaque $k = i + 1, \ldots, j - 1, (k, j)$ est une inversion car $k < j$ et $\sigma(k) = k > i = \sigma(j)$.

La paire (i, j) est une inversion. Ainsi,

$$\operatorname{inv}(\sigma) = 2(j - 1 - (i + 1) + 1) + 1 = 2(j - i) - 1.$$

Oa a par exemple, les inversions de

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix},$$

sont $(2, 3), (3, 4)$ et $(2, 4)$.

Definition 4.3 *Soit $A = (a_{ij})$, on dénote par $\det(\mathbf{A})$, le déterminant de A défini par*

$$\sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\operatorname{inv}(\sigma)} a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{n,\sigma(n)},$$

où $a_{i,j}$ dénote l'élément de la j-ième colonne et de la i-ième ligne de A.

4.1.2 Cas de matrices de petite taille

Il y a des formules permettant de simplifier les calculs dans le cas des matrices de taille 2×2 ou 3×3.

Considérons

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Les deux permutations de S_2 sont

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Puisque $\operatorname{inv}(\sigma_1) = 0$ et $\operatorname{inv}(\sigma_2) = 1$, on a

$$\det(A) = (-1)^{\operatorname{inv}(\sigma_1)} a_{1,\sigma_1(1)} a_{2,\sigma_1(2)} + (-1)^{\operatorname{inv}(\sigma_2)} a_{1,\sigma_2(1)} a_{2,\sigma_2(2)} = ad - bc.$$

De même ;

$$A = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{bmatrix}.$$

Les six permutations de S_3 sont énumérées dans le tableau suivant.

i	1	2	3
σ_i	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$
$\operatorname{inv}(\sigma_i)$	0	1	1
$(-1)^{\operatorname{inv}(\sigma_i)}$	1	-1	-1
i	4	5	6
σ_i	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
$\operatorname{inv}(\sigma_i)$	2	2	3
$(-1)^{\operatorname{inv}(\sigma_i)}$	1	1	-1

Donc

$$\begin{aligned} \det(A) &= \textstyle\sum_{i=1}^{6} (-1)^{\operatorname{inv}(\sigma_i)} a_{1,\sigma_i(1)} a_{2,\sigma_i(2)} a_{3,\sigma_i(3)} \\ &= p_1q_2r_3 - p_1q_3r_2 - p_2q_1r_3 + p_2q_3r_1 + p_3q_1r_2 - p_3q_2r_1. \end{aligned}$$

Remarque 4.1 *On écrit simplement*

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ p & q & r \end{vmatrix}.$$

Au lieu d'écrire

$$\det\left(\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ p & q & r \end{bmatrix}\right).$$

Exercice 4.2 *1. Donner le nombre d'inversions pour chacune des permutations suivantes :*

$$a. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \; b. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \; c. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. Calculer le déterminant de chacune des matrices suivantes :

$$a. \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \; b. \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{bmatrix}, \; c. \begin{bmatrix} 0 & 0 & p \\ q & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \end{bmatrix}.$$

3. Considérons A et B des matrices de taille $n \times n$ telles que B est obtenue de A en multipliant une ligne de A par le scalaire α. Prouver que $\det(B) = \alpha \det(A)$.

Solution. 1. a. Le nombre d'inversions est 1, b. Le nombre d'inversions est 6, c. Le nombre d'inversions est 6.

2. a. 1, b. $ad - bc$, c. pqr.

3. On suppose que B soit obtenue de A en multipliant la i-ième ligne par α. Alors

$$\begin{aligned} \det(B) &= \textstyle\sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\mathrm{inv}(\sigma)} \prod_{p=1}^{n} b_{p,\sigma(p)} \\ &= \textstyle\sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\mathrm{inv}(\sigma)} \left(\prod_{p \neq i} a_{p,\sigma(p)} \right) \left(\alpha a_{i,\sigma(i)} \right) \\ &= \alpha \left(\textstyle\sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\mathrm{inv}(\sigma)} \prod_{p=1}^{n} a_{p,\sigma(p)} \right) \\ &= \alpha \det(A). \end{aligned}$$

□

4.1.3 Matrices spéciales

Matrices de permutations

Une matrice de permutation de taille $n \times n$ est une matrice obtenue de la matrice identité I_n en permutant ses lignes. Par exemple,

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

est une matrice de permutation.

Une telle matrice permet d'encoder directement une permutation de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$. Si σ est encodée par la matrice de permutation, alors $\sigma(i)$ est l'indice de la colonne de l'élément contenant 1 à la i-ième ligne. Dans I'exemple précédent, puisaue dans la ligne 1, la colonne 2 contient 1 ; dans la ligne 2, la colonne 4 contient 1 ; dans la ligne 3, la colonne 1 contient 1 ; dans la ligne 4, la colonne 3 contient 1. Alors la permutation correspondante est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Pour une matrice de permutation P donnée qui encode σ, tout simplement, le déterminant de P est $(-1)^{\text{inv}(\sigma)}$. À l'exemple précédent, le déterminant est $(-1)^3 = -1$, car il y a trois inversions.

D'après la définition du déterminant ; chaque terme de la somme contient un facteur $(-1)^{\text{inv}(\sigma')}$ qui multiplie le produit de n éléments d'exactement un élément de chaque colonne et un élément de chaque ligne. La seule façon d'obtenir un terme non nul est d'utiliser une permutation qui extrait l'élément non nul de chaque ligne. II n'y a qu'une permutation pour laquelle c'est le cas, celle qui est encodée par σ.

Matrices ayant une ligne ou une colonne nulle

On considére A une matrice carré ayant une colonne ou une ligne nulle. Donc $\det(A) = 0$. En effet, notons que pour une permutation σ, chaque terme de $\det(A)$ est un produit de la forme $a_{1,\sigma(1)}a_{2,\sigma(2)}\cdots a_{n,\sigma(n)}$. Alors, chaque terme contient exactement un élément de chaque colonne et de chaque ligne de A, ce qui implique que chaque terme est nul, et donc $\det(A) = 0$.

Matrices triangulaires

On considére A une matrice carrée triangulaire supérieure (c-à-d que $a_{i,j} = 0, \forall\ i > j$). Par exemple, la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

est triangulaire supérieure.

On a donc $\det(A)$ est le produit des éléments sur la diagonale. Ici, le déterminant est $1\cdot2\cdot3\cdot1 = 6$.

Expliquons pourquoi c'est le cas. considérons $\sigma \in S_n$. On commence par prouver que si σ n'est pas la permutation identité, alors $\prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)} = 0$.

On suppose que $\sigma(1) \neq 1$. Alors il doit y avoir un $i \geq 2$ tel que $\sigma(i) = 1$. Ceci donne $a_{i,\sigma(i)} = 0$ car A est triangulaire supérieure et $i > \sigma(i)$. Ainsi, $\prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)} = 0$ si $\sigma(1) \neq 1$.

On suppose que $\sigma(1) = 1$ mais $\sigma(2) \neq 2$. Donc il doit y avoir un $i \neq 2$ tel que $\sigma(i) = 2$. Mais $i \neq 1$ car on a déjà $\sigma(1) = 1$. Alors, $i \geq 3$. Ceci donne encore $a_{i,\sigma(i)} = 0$, car $i > \sigma(i)$. Ainsi, $\prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)} = 0$ si $\sigma(1) = 1$ et $\sigma(2) \neq 2$.

On peut continuer de cette manière pour prouver que si $\sigma(i) = i$ et $\sigma(i+1) \neq i+1$, donc $\prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)} = 0$. Ainsi, le seul terme de $\det(A)$ qui être non nul est celui où $\sigma(i) = i$, $\forall i = 1, \ldots, n$, ce qui nous donne $\det(A) = a_{1,1}a_{2,2}\cdots a_{n,n}$.

On peut conclure en utilisant un argument semblable que le déterminant d'une matrice triangulaire inférieure est aussi donné par le produit des éléments sur la diagonale.

Exercice 4.3 *On considére les matrices suivantes :*

$$a.\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},\ b.\begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix}\ et\ c.\begin{bmatrix} 2-i & 0 \\ 3 & 1+i \end{bmatrix}.$$

Calculer leurs déterminants.

Solution. a. 4, b. adf, c. $(2-i)(1+i)=3+i$. □

4.1.4 Quelques propriétés

Proposition 4.1 *Considérons $A, B \in S^{n\times n}$ où S un anneau. Alors*

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

Remarque 4.2 *Une conséquence immédiate de cette proposition est que*

$$\det\left(A^k\right) = \det(A)^k,\ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Exemple 4.5 *Soient $A, B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ telles que $\det(A) = -2$ et $\det(B) = 3$. Alors $\det(AB) = \det(A)\det(B) = -6$.*

Exemple 4.6 *Soit*

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Donc $\det\left(A^{100}\right) = \det(A)^{100} = (-1)^{100} = 1$.

Remarque 4.3 *Le déterminant satisfait aussi aux propriétés suivantes :*

- Si $\mathbf{B}$ est obtenue de $\mathbf{A}$ en échangeant deux lignes det $\mathbf{A}$, alors $\det(\mathbf{B}) = -\det(\mathbf{A})$.
- Si $\mathbf{B}$ est obtenue de $\mathbf{A}$ en ajoutant un multiple d'une ligne de $\mathbf{A}$ à une autre ligne de $\mathbf{A}$, alors $\det(\mathbf{B}) = \det(\mathbf{A})$.
- Si $\mathbf{A}$ est inversible, alors $\det\left(\mathbf{A}^{-1}\right) = \det(\mathbf{A})^{-1}$.
- Si α est un scalaire et $\mathbf{A}$ est de taille $n\times n$, $\det(\alpha\mathbf{A}) = \alpha^n\det(\mathbf{A})$.

$\det\left(\mathbf{A}^\top\right) = \det(\mathbf{A})$.

Exemple 4.7 *Soit* $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. *Notons que* $\det(\mathbf{A}) = 3$.

$\det(2\mathbf{A}) = 2^2\det(\mathbf{A}) = 4\cdot 3 = 12$ *puisque* $\mathbf{A}$ *est* 2×2.

- *Notons que* $\mathbf{A}$ *est inversible. Donc,* $\det\left(\mathbf{A}^{-1}\right) = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} = \frac{1}{3}$.

$\det(-\mathbf{A}) = \det((-1)\mathbf{A}) = (-1)^2\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}) = 3$. *Notons que dans ce cas,* $\det(-\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A})$.

$\det\left(\mathbf{A}^\top\right) = \det(\mathbf{A}) = 3$.

Exercice 4.4 *1. Prouver que :* $\mathbf{A}$ *est inversible, alors* $\det\left(\mathbf{A}^{-1}\right)=\frac{1}{\det(\mathbf{A})}$.

2.Prouver que : si $\mathbf{A}\in\mathbb{R}^4$, alors $\det(-\mathbf{A})=\det(\mathbf{A})$.

Solution. 1. Notons que :

$$\det\left(A^{-1}\right)\det(A)=\det\left(A^{-1}A\right)=\det(I)=1,$$

d'où $\det\left(A^{-1}\right)=\frac{1}{\det(\mathbf{A})}$.

2. $\det(-A)=\det((-1)A)=(-1)^4\det(A)=\det(A)$. □

4.1.5 Méthodes efficaces

Dans cette section, nous présentons deux méthodes efficaces permettant le calcul du déterminant.

Opérations élémentaires sur les lignes.

On considère $A\in\mathbb{K}^{n\times n}$. Rappelons que l'échange de deux lignes modifie la valeur du déterminant par un facteur de -1 et que l'ajout d'un multiple d'une ligne de A à une autre ligne de A n'affecte pas la valeur du déterminant. Si nous n'utilisons que ces deux types d'opérations afin de transformer A en une matrice D triangulaire supérieure, donc $\det(A)=(-1)^m\det(D)$, où m est le nombre d'échanges.

Exemple 4.8

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} -4 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 0\\ -1 & 1 & 1\end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 0 & 9 & 1\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 3 & 1\end{vmatrix} \quad (L_1\leftarrow L_1+4L_2)\\
&= \begin{vmatrix} 0 & 0 & -2\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 3 & 1\end{vmatrix} \quad (L_1\leftarrow L_1-3L_2)\\
&= -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -2\\ 0 & 3 & 1\end{vmatrix} \quad (L_1\leftrightarrow L_2)\\
&= -\left(-\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & -2\end{vmatrix}\right) \quad (L_2\leftrightarrow L_3)\\
&= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & -2\end{vmatrix} = 1\cdot 3\cdot(-2)=-6.
\end{aligned}$$

Cofacteurs

Considérons $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{n\times n}$ et $i, j \in \{1, \dots, n\}$. On définit $A(i \mid j)$ par la matrice obtenue de $\mathbf{A}$ en supprimant la j-ième colonne et la i-ième ligne de $\mathbf{A}$. On appelle la matrice $\mathbf{A}(i \mid j)$ le (i, j)-ième mineur de A.

Exemple 4.9 *Soit*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

Alors

$$A(1 \mid 1) = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}, A(2 \mid 2) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{bmatrix},$$
$$A(3 \mid 1) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

Nous pouvons calculer le déterminant d'une matrice $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ à l'aide de la formule du cofacteur.

On Choisit $i \in \{1, \dots, n\}$. Donc

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(A(i \mid j)).$$

Le côté droit est dit l'expansion du cofacteurs selon la i-ième ligne.

Nous pouvons aussi le faire selon la j-ième colonne :

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(\mathbf{A}(i \mid j)).$$

En utilisant $C_{\mathbf{A}}(i, j)$ pour dénoter $(-1)^{i+j} \det(\mathbf{A}(i \mid j))$ et pour simplifier la notation. Le terme $C_{\mathbf{A}}(i, j)$ est un cofacteur de $\mathbf{A}$.

Ainsi, on peut écrire l'expansion en cofacteurs selon la i-ième ligne sous la forme :

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} C_{\mathbf{A}}(i, j),$$

et selon la j-ième colonne comme suit

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} C_{\mathbf{A}}(i, j).$$

Exemple 4.10 *Soit*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

L'expansion en cofacteurs selon la seconde ligne nous donne.

$$\begin{aligned} &\det(\mathbf{A}) = \textstyle\sum_{j=1}^{3}(-1)^{2+j}a_{2,j}\det(\mathbf{A}(2\mid j)) \\ &= -4\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} \\ &= -4(2\cdot 9 - 3\cdot 8) + 5(1\cdot 9 - 3\cdot 7) - 6(1\cdot 8 - 2\cdot 7) \\ &= 24 - 60 + 36 = 0. \end{aligned}$$

Exemple 4.11 *Dans le cas où une matrice contient plusieurs éléments nuls l'expansion en cofacteurs peut s'avérer très utile. Soit*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{a}^\top \\ 0_{n-1} & \mathbf{B} \end{bmatrix},$$

telle que $\mathbf{a}^\top \in \mathbb{K}^{1\times(n-1)}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{K}^{(n-1)\times(n-1)}$ *et* $\mathbf{0}_{n-1}$ *est le* $(n-1)$*-uplet nul. En utilisant l'expension en cofacteurs selon la première colonne, on trouve*

$$\det(\mathbf{A}) = (-1)^{1+1}a_{1,1}\det(\mathbf{A}(1\mid 1)) = 1.\det(\mathbf{B}) = \det(\mathbf{B}),$$

car $a_{i,1} = 0,\ \forall i \geq 2$.

Exercice 4.5 *1. Considérons*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

Calculer $C_{\mathbf{A}}(2,3)$.

2. En utilisant la méthode des cofacteurs sur la deuxième colonne, déterminer

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & -4 \end{vmatrix}.$$

Solution. 1. On a

$$C_{\mathbf{A}}(2,3) = (-1)^{2+3}\det(\mathbf{A}(2\mid 3)) = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -(8-14) = 6.$$

2. On a

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & -4 \end{vmatrix} &= (-1)^{1+2}(0)\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2}(4)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} \\ &\quad +(-1)^{3+2}(-1)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} \\ &= -32 + (-1) = -33.\end{aligned}$$

□

4.2 Systèmes d'équations linéaires

4.2.1 Définitions et interprétations

Considérons un système linéaire de p équations en n inconnues :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots\cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots\cdots + a_{pn}x_n = b_p, \end{cases} \tag{4.1}$$

où les a_{ij} et les b_{ij} appartiennent à un corps K (commutatif).

On appelle solution tout vecteur $x = (x_1, \ldots, x_n) \in K^n$ dont les composantes x_i satisfont toutes les équations. Le système est dit compatible s'il admet au moins une solution.

4.2.2 Interprétation en termes d'applications linéaires

Soient $E = \mathbb{K}^n$ et $F = \mathbb{K}^p$ munis de leurs bases canoniques respectives e et f. Considérons $u \in \mathcal{L}(E, F)$ l'unique application linéaire de E dans F telle que $Mat_{e\to f}(u) = A$ et $x \in E$ tel que

$$Mat_e(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

On a :

$$u(x) = b \Longleftrightarrow (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n \text{ est solution de } (4.1).$$

Alors :

- Si u est surjective, le système (4.1) est compatible.
- Le système (4.1) est compatible si et seulement si $b \in \operatorname{Im} u$.

- Si u est à la fois surjective et injective alors l'ensemble des solutions de (4.1) ne possède qu'une et une seule solution.

- Si u est injective et si le système (4.1) est compatible donc l'ensemble des solutions de (4.1) ne possède qu'un et un seul élément.

4.2.3 Expression matricielle et rang d'un système

Definition 4.4 *Soient :*

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,n}(K),$$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(K) \quad \text{et} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(K).$$

On peut écrire le système (4.1) sous la forme matricielle :

$$AX = B,$$

et donc le ***rang*** *du système est le rang de la matrice A.*

4.2.4 Expression vectorielle

Notons $\vec{c}_1, \ldots, \vec{c}_n$ les vecteurs colonnes de la matrice A :

$$\vec{c}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{p1} \end{pmatrix} \in K^p, \ldots, \vec{c}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{pn} \end{pmatrix} \in K^p.$$

On a :

$$x_1\vec{c}_1 = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 \\ \vdots \\ a_{p1}x_1 \end{pmatrix}, \ldots, x_n\vec{c}_n = \begin{pmatrix} a_{1n}x_n \\ \cdots \\ a_{pn}x_n \end{pmatrix}.$$

Si donc

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix} \in K^p,$$

le système peut s'écrire :

$$x_1\vec{c}_1 + \cdots + x_n\vec{c}_n = \vec{b}. \tag{4.2}$$

Résoudre le système signifie déterminer les coefficients de la décomposition du vecteur $\vec{b} \in K^p$ sur les vecteurs $\{\vec{c}_1, \ldots, \vec{c}_n\}$ de K^p : donc, pour que le système soit compatible il faut et il suffit que $\vec{b}$ appartienne à l'espace engendré par les vecteurs $\vec{c}_1, \ldots, \vec{c}_n$.

4.2.5 Systèmes de Cramer

Definition 4.5 *On appelle système de Cramer un système linéaire dont la matrice A est carrée et inversible.*

Il s'agit donc d'un système de n équations en n inconnues de rang n :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad \text{avec} \qquad \det(\mathbf{A}) \neq 0 \tag{4.3}$$

Sous forme matricielle, le système s'écrit :

$$AX = B. \tag{4.4}$$

Comme A est inversible, en multipliant par A^{-1} à gauche, on trouve :

$$X = A^{-1}B. \tag{4.5}$$

Réciproquement, $X = A^{-1}B$ satisfait l'équation (4.4). Aussi :
un système de Cramer admet toujours une et une seule solution donnée par (4.5).

La solution peut être exprimée aussi par les formules de Cramer. Considérons l'interprétation vectorielle du système (4.2) ; la solution $(x_1, \ldots, x_n)$ est telle que :

$$x_1\vec{c}_1 + \cdots + x_n\vec{c}_n = \vec{b}.$$

Or : Pour $k \neq i$ les déterminants de cette somme sont nuls (deux colonnes égales). Il reste le terme avec $k = i$, c'est-à-dire x_i dét A. Ainsi :

$$\det \left\| \overrightarrow{c_1}, \ldots, \vec{c}_{i-1}, \vec{b}, \vec{c}_{i+1}, \ldots, \overrightarrow{c_n} \right\| = x_i \det A,$$

d'où :

$$x_i = \frac{\det \left\| \overrightarrow{c_1}, \ldots, \vec{c}_{i-1}, \vec{b}, \vec{c}_{i+1}, \ldots, \overrightarrow{c_n} \right\|}{\det A}.$$

On peut résumer les résultats dans le théorème suivant :

Théorème 4.1 (Théorème de Cramer) *Un système de Cramer :*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases} \qquad \textit{(avec } A = (a_{ij}) = \left\| \overrightarrow{c_1}, \ldots, \overrightarrow{c_n} \right\|, \quad \det A \neq 0)$$

admet toujours une et une seule solution, quel que soit le vecteur $\vec{b} = (b_1, \ldots, b_n)$, solution donnée par les formules de Cramer :

$$x_i = \frac{\det \left\| \overrightarrow{c_1}, \ldots, \vec{c}_{i-1}, \vec{b}, \vec{c}_{i+1}, \ldots, \overrightarrow{c_n} \right\|}{\det A},$$

$$\begin{aligned} & det \left\| \vec{c}_1, \ldots, \vec{c}_{i-1}, \vec{b}, \vec{c}_{i+1}, \ldots, \vec{c_n} \right\| \\ & = \det \| \overrightarrow{c_1}, \ldots, \vec{c}_{i-1}, \textstyle\sum_{k=1}^n x_k \overrightarrow{c_k}, \vec{c}_{i+1}, \ldots, \overrightarrow{c_n} \| \\ & = \textstyle\sum_{k=1}^n x_k \ det \ \| \overrightarrow{c_1}, \ldots, \vec{c}_{i-1}, \overrightarrow{c_k}, \vec{c}_{i+1}, \ldots, \overrightarrow{c_n} \| \, . \end{aligned}$$

Exemple 4.12 *Soit le système :*

$$\begin{cases} 2x - 5y + 2z = 7 \\ x + 2y - 4z = 3 \\ 3x - 4y - 6z = 5. \end{cases}$$

On a :

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 2 \\ 1 & 2 & -4 \\ 3 & -4 & -6 \end{vmatrix} = -46.$$

Le système est donc de Cramer. Les formules de Cramer donnent :

$$x = -\frac{1}{46} \begin{vmatrix} 7 & -5 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \\ 5 & -4 & -6 \end{vmatrix} = 5, \ \ y = -\frac{1}{46} \begin{vmatrix} 2 & 7 & 2 \\ 1 & 3 & -4 \\ 3 & 5 & -6 \end{vmatrix} = 1, z = -\frac{1}{46} \begin{vmatrix} 2 & -5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & -4 & 5 \end{vmatrix} = 1.$$

Exemple 4.13

$$(S) : \begin{cases} 2x + 2y + z = 1 \\ 2x + y - z = 2 \\ 3x + y + z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$\det A = -7 \neq 0$, $\operatorname{rg} A = n = p = 3$ ((S) est un système de cramer).

$$x = \tfrac{-1}{7} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 9/7.$$

$$y = \tfrac{-1}{7} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -5/7.$$

$$z = \tfrac{-1}{7} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -1/7.$$

4.2.6 Cas où $n = p$ et $r < n$

Si on considère maintenant un système de n équations à n inconus, mais $\operatorname{rg} A < n$, c'est à dire

$$\det A = 0,$$

dans ce cas on extrait une matrice M de A sachant que c'est la plus grande matrice carrée inversible, c'est à dire $\det M \neq 0$ contenue dans A et d'ordre r c'est ce qu'on appelle une sous-matrice, les inconnus associés à M deviennent des inconnus principales et les $(n-r)$ autres inconnus deviennent des paramètres où bien ce qu'on appelle valeurs arbitraires et on considère le système suivant :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r & = b_1 - (a_{1r+1}x_{r+1} + \ldots + a_{1n}x_n) = b'_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2r}x_r & = b_2\,(a_{2r+1}x_{r+1} + \ldots + a_{2n}x_n) = b'_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rr}x_r & = b_n\,(a_{rr+1}x_{r+1} + \ldots + a_{rn}x_n) = b'_r. \end{cases}$$

ce dernier est un système de cramer, donc il admet une seule solution $(x_1, \ldots, x_r)$ qui dépend de $(x_{r+1}, \ldots, x_n)$. Si cette solution vérifie les $(n-r)$ équations restantes, alors le système globale admet une infinité de solutions. Si par contre $(x_1, \ldots, x_r)$ ne vérifie pas une seule équation parmis les $(n-r)$ équations restantes alors le système globale n'admet de solution.

Exemple 4.14

$$(S) : \begin{cases} 3x - y + 2z = 3 \\ 2x + 2y + z = 2 \\ x - 3y + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$\det A = 0$, (S) *n'est pas un système de Cramer, comme* $|A'| = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 8 \neq 0$. *Alors* $rgA = 2$ *et on considère* x, y *les inconnus et* z *paramètre, alors on obtient le système :*

$$\begin{cases} 3x - y = 3 - 2z \\ 2x + 2y = 2 - z. \end{cases}$$

qui est un système de Cramer et admet une unique solution (x, y) dépendante de z.

$$x = \frac{1}{8}\begin{vmatrix} 3-2z & -1 \\ 2-z & 2 \end{vmatrix} = 1 - \frac{5}{8}z, y = \frac{1}{8}\begin{vmatrix} 3 & 3-2z \\ 2 & 2-z \end{vmatrix} = \frac{1}{8}z.$$

Reste à voir si (x, y) vérifie $x - 3y + z = 1$ (équation réstante) on a :

$$1 - \frac{5}{8}z - \frac{3}{8}z + z = 1 \Rightarrow 1 = 1 \ (\textit{vraie}\ \forall z \in \mathbb{R}),$$

donc le système admet une infinité de solutions données par :

$$(1 - \frac{5}{8}z, \frac{1}{8}z, z) : z \in \mathbb{R}.$$

4.2.7 Cas où $n \neq p$

Si le nombre d'équations n'est pas égale au nombre d'inconnus, alors on cherche d'abord le rang de A et on procède comme précédement. Si M est une matrice contenue dans A et d'ordre r et $\det M \neq 0$ alors on considère le système de r équations à r inconnus correspondant à M qui est un système de Cramer.

Si la solution vérifie les équation restantes alors le système globale admet une infinité de solutions sinon il n'admet aucune solution.

Exemple 4.15

$$(S) : \begin{cases} 3x - y = 4 \\ 2x + 2y = 3 \\ x - 5y = -5 \end{cases} \Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

On a $\operatorname{rg} A \leq 2$ choisissons

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det M = 8 \neq 0 \Rightarrow rgM = 2,$$

on prend le système :

$$\begin{cases} 3x - y = 4 \\ 2x + 2y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 11/8 \\ y = 1/8, \end{cases}$$

on a l'équation réstante :

$$x - 5y = -5 \Rightarrow 11/8 - 5/8 = 6/8 = 3/2 \neq -5,$$

alors le système n'admet pas de solutions.

4.3 Exercices corrigés

Exercice 1

Expliquer sans les calculer pourquoi les déterminants suivants sont nuls :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 10 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 5 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}, \ \Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_5 = \begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix}, \ \Delta_6 = \begin{vmatrix} 1 & \cos 2x & 2\cos^2 x \\ 1 & -\cos 2x & 2\sin^2 x \\ \cos x \sin x & \cos x \sin x & \sin 2x \end{vmatrix}.$$

Solution. 1. Une colonne de Δ_1 est nulle donc $\Delta_1 = 0$.
2. Les deux premières colonnes de Δ_2 sont proportionnelles, donc $\Delta_2 = 0$.
3. La première colonne de Δ_3 est somme des deux autres donc $\Delta_3 = 0$.
4. Δ_4 étant diagonale, le déterminant Δ_4 est égal au produit de ces termes diagonaux. Un de ceux-ci étant nul, il en est de même de Δ_4.
5.

$$\Delta_5 \overset{C_3 \to C_2 + C_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & a & a+b+c \\ 1 & b & a+b+c \\ 1 & c & a+b+c \end{vmatrix},$$

et les première et troisième colonnes de Δ_5 sont proportionnelles. Il vient $\Delta_5 = 0$.
6. La dernière colonne de Δ_6 est somme des deux autres donc $\Delta_6 = 0$.

□

Exercice 2
Prouver que :

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 60.$$

Solution. Facile par permutations des colonnes.

□

Exercice 3
Considérons les nombres $119, 153$ et 289 qui sont tous divisibles par 17. Prouver que le déterminant :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 9 \\ 1 & 5 & 3 \\ 2 & 8 & 9 \end{vmatrix},$$

est divisible par 17.

Solution. Notons Δ ce déterminant. On a :

$$\begin{aligned} 1000\Delta &= \begin{vmatrix} 100 & 10 & 9 \\ 100 & 50 & 3 \\ 200 & 80 & 9 \end{vmatrix} \overset{C_1 \to C_1 + C_2 + C_3}{=} \begin{vmatrix} 119 & 10 & 9 \\ 153 & 50 & 3 \\ 289 & 80 & 9 \end{vmatrix} \\ &= 17 \begin{vmatrix} a & 10 & 9 \\ b & 50 & 3 \\ c & 80 & 9 \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

où a, b et c désignent respectivement le quotient de $119, 153$ et 289 par 17. On obtient : $\Delta = 17m$ avec

$$m = \begin{vmatrix} a & 10 & 9 \\ b & 50 & 3 \\ c & 80 & 9 \end{vmatrix},$$

qui est un entier. Comme 17 est premier avec 1000 , appliquant le lemme de Gauss, 17 divise Δ.

□

Exercice 4

Considérons $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Soient les polynômes $P_a = (X-a)^2$, $P_b = (X-b)^2$ et $P_c = (X-c)^2$. Trouver les valeurs a, b et c où la famille $\mathcal{P} = (P_a, P_b, P_c)$ forme une base de $\mathbb{R}_2[X]$?

Solution. La matrice de la famille $\mathcal{P}$ dans la base canonique $(1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$ est

$$M = \begin{pmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ -2a & -2b & -2c \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Utilisant les déterminants de Vandermonde, on trouve

$$\det M = -2(b-a)(c-a)(c-b).$$

La famille $\mathcal{P}$ forme une base de $\mathbb{R}_2[X]$ si et seulement si les scalaires a, b et c sont deux à deux distincts. □

Exercice 5

Prouver que

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} \cos(a-b) & \cos(b-c) & \cos(c-a) \\ \cos(a+b) & \cos(b+c) & \cos(c+a) \\ \sin(a+b) & \sin(b+c) & \sin(c+a) \end{vmatrix} \\ &= -2\sin(a-b)\sin(b-c)\sin(c-a). \end{aligned}$$

Solution. On développe suivant la première ligne et on reconnaît les formules d'addition :

$$\begin{aligned} &\Delta = \cos(a-b)[\cos(b+c)\sin(c+a) - \cos(c+a)\sin(b+c)] \\ &- \cos(b-c)[\cos(a+b)\sin(c+a) - \cos(c+a)\sin(a+b)] \\ &+ \cos(c-a)[\cos(a+b)\sin(b+c) - \cos(b+c)\sin(a+b)] \\ &= \cos(a-b)\sin(a-b) + \cos(b-c)\sin(b-c) \\ &+ \cos(c-a)\sin(c-a) = \tfrac{1}{2}(\sin 2(a-b) + \sin 2(b-c) + \sin 2(c-a)), \end{aligned}$$

puis on utilise les deux formules

$$\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2},$$

et

$$\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2},$$

$$\begin{aligned}\Delta &= \tfrac{1}{2}(2\sin(a-c)\cos(a+c-2b) + \sin 2(c-a)) \\ &= \sin(a-c)\cos(a+c-2b) + \sin(c-a)\cos(c-a) \\ &= \sin(a-c)(\cos(a+c-2b) - \cos(c-a)) \\ &= -2\sin(a-b)\sin(b-c)\sin(c-a).\end{aligned}$$

□

Exercice 6

Considérons

$$P_1 = 2X^2 - X + 1,\ \ P_2 = X^2 + 2X \text{ et } P_3 = X^2 - 1.$$

Prouver que la famille $\mathcal{P} = (P_1, P_2, P_3)$ forme une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Solution. Notant $e = (X^2, X, 1)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$, on a :

$$\underset{e}{\mathrm{Mat}}(\mathcal{P}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

qui est inversible. La famille $\mathcal{P}$ est donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

□

Exercice 7

Trouver le réel a où la famille $e = (e_1, e_2, e_3)$:

$$e_1 = (a, 1, 1) \quad e_2 = (1, a, 1) \quad e_3 = (1, 1, a),$$

forme une base de $\mathbb{R}^3$.

Solution. La famille e forme une base de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} \neq 0.$$

Ce déterminant vaut : $(a-1)^2(a+2)$.
La famille e est donc libre si et seulement si $a \neq 1$ et $a \neq -2$.

□

Exercice 8

Trouver les solutions dans $\mathbb{R}^3$ des systèmes :

$$1. \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 3y - z = 2 \\ 2z = 8 \end{cases} \quad 2. \begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ 2x - 3y + z = 4 \\ x - 3y - 4z = 5 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x+2y+3z=1 \\ -x-3y+5z=2 \\ x+y+z=-1 \end{cases} \quad 4. \begin{cases} y+3z=0 \\ x+2y+6z=2 \\ 7x+3y+9z=14 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} x+2y+z=2 \\ 2x+y+z=-1 \\ x-3y+2z=-1 \end{cases} \quad 6. \begin{cases} 2x-y+3z=1 \\ x+y-z=2 \\ x-2y+4z=1 \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} 2x-y+3z=0 \\ x+y+2z=0 \end{cases} \quad 8. \begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+2y-2z=2 \\ -x-y+z=-1 \end{cases}.$$

Solution. 1. En remontant, on trouve successivement : $z=4; y=2; x=-1$.
2.

$$\begin{cases} x-y+2z=1 \\ 2x-3y+z=4 \\ x-3y-4z=5 \end{cases} \iff \begin{cases} x-y+2z=1 \\ -y-3z=2 \\ -2y-6z=4 \end{cases}.$$

Les deux dernières équations sont équivalentes. Le système est de rang 2 et compatible. En prenant z comme paramètre, l'ensemble des solutions est $\{(-5z-1,-3z-2,z) \mid z \in \mathbb{K}\}$.
3. Système de Cramer : $\left\{\left(-\frac{5}{2},1,\frac{1}{2}\right)\right\}$.
4. Système de rang 2 et compatible. $\{(2,-3z,z) \mid z \in \mathbb{K}\}$.
5. Système de Cramer : $\{(-2,1,2)\}$.
6. Système de rang 2 mais pas compatible. Pas de solution.
7. $\begin{cases} 2x-y+3z=0 \\ x+y+2z=0 \end{cases}$ soit $\begin{cases} 2x-y+3z=0 \\ 3x+5z=0 \end{cases}$. Le système est de rang 2, donc compatible. En prenant z comme paramètre, l'ensemble des solutions est $\left\{\left(-\frac{5}{3}z,-\frac{1}{3}z,z\right) \mid z \in \mathbb{K}\right\}$.
8. Le système est clairement de rang 1 et compatible (on a trois fois la même équation). L'ensemble des solutions est le plan d'équation $x+y-z=1$.

□

Exercice 9
Discuter la nature de l'ensemble de solution sans chercher à résoudre les systèmes suivants :

$$\begin{cases} x+y-z=0 \\ x-y=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}, \begin{cases} x+3y+2z=1 \\ 2x-2y=2 \\ x+y+z=2 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} x+3y+2z=1 \\ 2x-2y=2 \\ x+y+z=3 \end{cases}.$$

Solution. Premier système : Matrice de rang 3 (inversible) donc une unique solution $(0,0,0)$.
Deuxième système : Matrice de rang 2, système non compatible, pas de solution.
Troisième système : Matrice de rang 2, système non compatible, pas de solution.

□

Exercice 10

Discuter la dimension de l'espace des solutions des systèmes suivants selon la valeur de m :

1.

$$\begin{cases} x + my + z = 0 \\ mx + y + mz = 0. \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} x + y + mz = 0 \\ x + my + z = 0 \\ mx + y + z = 0. \end{cases}$$

Solution. 1. Si $m = 1$ ou $m = -1$, alors le système est de rang 1. L'espace des solutions est de dimension 2. Sinon le système est de rang 2 et l'espace des solutions est de dimension 1. Dans ce dernier cas, l'ensemble des solutions est $\{(x, 0, -x), x \in \mathbb{R}\}$.
2. Si $m = 1$, alors le système est de rang 1. L'espace des solutions est de dimension 2. Si $m = -2$, alors le système est de rang 2. L'espace des solutions est de dimension 1. Sinon le système est de Cramer. L'espace des solutions est de dimension 0. $\square$

BIBLIOGRAPHIE

[1] K. Cheung et M. Lemire : Algèbre Linéaire et Applications, (2018) .

[2] B. Gostiaux : Cours de mathématiques spéciales Tome 1 Algèbre, 1^{re} édition, Presses Universitaires de France, Paris, (1993) ISBN 213 045835 1

[3] J. Grifone : Algèbre linéaire 4^{e} édition, Cépaduès Éditions, Toulouse-France. (2011) ISBN : 978.2.85428.962.6.

[4] M. Houimdi : Algèbre linéaire, algèbre bilinéaire, Cours et exercices corrigés, Édition Ellipses, (2021) ISBN-102340045576

[5] I. Medjadj : Cours d'Algèbre I et II Avec Exercices Corrigés, U.S.T.O.M.B., Oran, (2018).

[6] J. L. Ovaert et L. Chambadal : Cours de mathématiques Tome 2 Algèbre II, Gauthier-Villars Éditeur, (1972).

[7] A. Soyeur, F. Capaces et E. Vieillard-Baron : Cours de Mathématiques Sup MPSI PCSI PTSI TSI, (2011).