الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Djilali Bounaama Khemis Miliana
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département des Sciences de la Matière

جامعة الجيلالي بونعامة خميس مليانة
كلية العلوم والتكنولوجيا
قسم علوم المادة

Intitulé du polycopié :

Théorie des Champs Quantiques I :

Cours et Exercices

Destiné aux étudiants :

Niveau	Première Année Master
Spécialité	Physique Théorique

Auteur

FERMOUS Rachid

Experts du polycopié	**Grade**	**Etablissement d'affiliation**
BOUKABCHA Hocine	MCA	UDBKM
AMOUR Rabia	MCA	USTHB

Date de validation du polycopié :

CSD ....

CSF ....

Année universitaire : 2021/2022

Table des Matières

Préface

Ce polycopié est destiné aux étudiants de première année Master, spécialité Physique Théorique. Ce support pédagogique contient les éléments de base nécessaires pour l'apprentissage de la matière "Théorie des Champs Quantique I". En plus d'un cours détaillé, le polycopie contient une série d'exercices corrigées, à même d'initier l'étudiant au domaine de la mécanique quantique relativiste. Ce travail est le fruit de longues années de recherches et de préparations, ayant durée plus huit années de dur labeur. Le fait d'assuré le cours de théorie des champs quantiques depuis la première année du lancement de la spécialité "Physique Théorique" au sein du Département des Sciences de la Matières sis au niveau de l'université Djillali Bounaama Khemis Miliana (UDBKM), m'a permis d'avoir une vision plus élargie du sujet, ce qui m'a donner l'opportunité de choisir la méthode la plus efficaces pour le transfert des me connaissances aux étudiants.
Le polycopie étant rédigé conformément au canevas, il offre aux étudiant la possibilité d'approfondir leurs connaissances acquises au préalable dans le domaine des deux théories de mécanique quantique et de relativiste restreinte, tout en prenant en considération l'apport des théorie de l'électromagnétisme et de la théorie de la mécanique analytique.
Intitulé du Master : Physique théorique
Semestre : 1
Intitulé de l'UE : Fondamentale UEF1.1
Intitulé de la matière : Théorie des champs quantique I
Crédits : 6
Coefficients : 3
Objectifs de l'enseignement:

- Comprendre le concept de symétrie globale et locale en théorie quantique des champs et leurs implications.

Connaissances préalables recommandées:

- Mécanique quantique, mécanique analytique, électromagnétisme, relativité restreinte.

Rappels de relativité restreinte

2.1 Rappel sur les lois de l'électromagnétisme

2.1.1 Équations de Maxwell

Les lois de l'électromagnétisme peuvent être exprimées

- Soit en fonction des champs électrique ($\overrightarrow{E}$) et magnétique ($\overrightarrow{B}$).
- Soit en fonction des potentiels scalaires ($\overrightarrow{A}$) et scalaire (ϕ).

Maxwell a exprimé les lois de l'électromagnétisme sous la forme de quatre équations suivantes:

$$div \cdot \overrightarrow{D} = \rho \tag{2.1}$$

$$div \cdot \overrightarrow{B} = 0 \tag{2.2}$$

$$\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{H} = \overrightarrow{j} + \frac{\partial \overrightarrow{D}}{\partial t} \tag{2.3}$$

$$\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{E} = -\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} \tag{2.4}$$

Les équations (2.1), (2.3), (2.4) représentent respectivement la loi de Gauss, la loi de Maxwell-Ampère et la loi de Lenz-Faraday.

- $\overrightarrow{D}$ est le vecteur déplacement électrique.
- $\overrightarrow{H}$ est le vecteur champ d'excitation.
- ρ est une densité de charge électrique.
- $\overrightarrow{j}$ est un courant de charge électrique.

Ces vecteurs sont reliés aux champs électrique $\overrightarrow{E}$ et magnétique $\overrightarrow{B}$ par les équations suivantes:

$$\overrightarrow{D} = \varepsilon\,\overrightarrow{E} \tag{2.5}$$

$$\overrightarrow{B} = \mu \overrightarrow{H} \tag{2.6}$$

Où ε est la permittivité diélectrique et μ la perméabilité magnétique du milieu. Dans le vide, les équations (2.5) et (2.6) deviennent

$$\overrightarrow{D} = \varepsilon_o \overrightarrow{E} \tag{2.7}$$

$$\overrightarrow{B} = \mu_o \overrightarrow{H} \Longrightarrow \overrightarrow{H} = \frac{\overrightarrow{B}}{\mu_o} \tag{2.8}$$

Où ε_o et μ_o sont deux constantes données respectivement par: $\varepsilon_o = 8.854\,\mathrm{pF\,m^{-1}}$ et $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ Henry/meter.
En introduisant l'opérateur $\overrightarrow{\nabla}$, les équations précédentes deviennent:

$$\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{D} = \rho \tag{2.9}$$

$$\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{B} = 0 \tag{2.10}$$

$$\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{H} = \overrightarrow{j} + \frac{\partial \overrightarrow{D}}{\partial t} \tag{2.11}$$

$$\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{E} = -\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} \tag{2.12}$$

En remplaçant les équations (2.7) et (2.8) dans les équations (2.9), (2.10), (2.11) et (2.12), on retrouve:

$$\overrightarrow{\nabla} \cdot (\epsilon_o \overrightarrow{E}) = \rho \Longrightarrow \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{E} = \frac{\rho}{\epsilon_o} \tag{2.13}$$

$$\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{B} = 0 \tag{2.14}$$

$$\overrightarrow{\nabla} \wedge \left(\frac{\overrightarrow{B}}{\mu_o} \right) = \overrightarrow{j} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\overrightarrow{\epsilon_o E} \right) \Longrightarrow \overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{B} = \mu_o \overrightarrow{j} + \mu_o \epsilon_o \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t} \tag{2.15}$$

$$\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{E} = -\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} \tag{2.16}$$

La force de Lorentz qui agit sur une particule de charge q et animée d'une vitesse $\overrightarrow{V}$ est donnée par

$$\overrightarrow{F} = q(\overrightarrow{E} + \overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{B}) \tag{2.17}$$

L'équation de conservation de la charge est donnée par,

$$\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \tag{2.18}$$

<u>**Ramarque:**</u>

- Les équations de Maxwell et l'équation de conservation de la charge électrique sont valables en tout points du milieu et à tout instants. Elles sont, donc, des équations locales.

2.1.2 Potentiels vecteur et scalaire

Les champs magnétique $\overrightarrow{B}$ et électrique $\overrightarrow{E}$ dérivent des potentiels de Lorentz $\overrightarrow{A}$ et ϕ, où

$$\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{grad}\phi - \frac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t} \tag{2.19}$$

$$\overrightarrow{B} = \overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{A} \tag{2.20}$$

Ces dernières équations peuvent être réécrites en fonction de $\overrightarrow{\nabla}$,

$$\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\nabla} \cdot \phi - \frac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t} \tag{2.21}$$

$$\overrightarrow{B} = \overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{A} \tag{2.22}$$

<u>**Ramarque:**</u>
Dans le vide, les potentiels vecteurs $\overrightarrow{A}$ et scalaire ϕ vérifient l'équation suivante:

$$div\,\overrightarrow{A} + \mu_o \epsilon_o \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \tag{2.23}$$

Cette équation est appelée "Jauge de Lorentz". Cette équation peut être écrite en fonction de $\overrightarrow{\nabla}$,

$$\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{A} + \mu_o \epsilon_o \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \tag{2.24}$$

On a,

$$\mu_o \epsilon_o c^2 = 1 \Longrightarrow c = 1/\sqrt{\mu_o \epsilon_o} \tag{2.25}$$

En utilisant les équations de Maxwell et de la jauge de Lorentz, on obtient:

$$\Delta\phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial^2 t} = 0 \tag{2.26}$$

$$\Delta\overrightarrow{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\overrightarrow{A}}{\partial^2 t} = 0 \tag{2.27}$$

La résolution des ces deux équations permet d'avoir les valeurs des potentiels ϕ et $\overrightarrow{A}$.

2.2 Analyse vectorielle dans l'espace de Minkowski

On introduit dans l'espace à quatre dimensions de Minkowski, l'opérateur "quadi-nabla", qu'on définit de la façon suivante:

$$\overrightarrow{\partial} = \left(\overrightarrow{\nabla}, -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right) \tag{2.28}$$

de composantes,

$$\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \partial_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad \partial_3 = \frac{\partial}{\partial z}, \quad \partial_4 = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} \tag{2.29}$$

2.2.1 Quadri-divergence et quadri-gradient

Soit le quadri-vecteur $\overrightarrow{A}$, de composantes:

$$\overrightarrow{A} = (a_x, a_y, a_z, a_4) = (\overrightarrow{a}, a_4) \quad \text{où} \quad \overrightarrow{a} = (a_x, a_y, a_z) \tag{2.30}$$

La métrique de l'espace de Minkowski est donnée par $(+,+,+,-)$. Donc, le produit scalaire de deux quadri-vecteurs $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$ est donné par

$$\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \\ a_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \\ b_4 \end{pmatrix} = +a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z - a_4 b_4 \tag{2.31}$$

La quadri-divergence d'un quadri-vecteur $\overrightarrow{V}$ est donnée par

$$\overrightarrow{\partial} \cdot \overrightarrow{V} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \\ -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ v_4 \end{pmatrix} = +\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{1}{c}\frac{\partial v_4}{\partial t} \tag{2.32}$$

qu'on peut écrire aussi sous la forme,

$$\overrightarrow{\partial} \cdot \overrightarrow{V} = \left(\overrightarrow{\partial}, -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right) \cdot (\overrightarrow{v}, v_4) = \left(\overrightarrow{\partial}\,\overrightarrow{v}, -\frac{1}{c}\frac{\partial v_4}{\partial t}\right) \tag{2.33}$$

De la même façon on définit le quadri-gradient d'une fonction scalaire ϕ par,

$$\overrightarrow{\partial}\phi = \left(\overrightarrow{\partial}\phi, -\frac{1}{c}\frac{\partial \phi}{\partial t}\right) \tag{2.34}$$

2.2.2 Quadri-vecteur densité de courant

L'équation (2.18) exprime le principe de conservation de la charge. Cette équation peut s'écrire sous la forme

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{j} = 0 \Longrightarrow \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(c\rho) = 0 \tag{2.35}$$

qu'en peut écrire sous la forme:

$$\frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} - \left(-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)(c\rho) = 0 \Longrightarrow \left(\overrightarrow{\partial}\,\overrightarrow{j}, -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\rho c)\right) = 0 \tag{2.36}$$

Cette équation apparait comme la quadri-divergence d'un quadri-vecteur

$$\left(\overrightarrow{\partial}, -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\overrightarrow{j}, \rho c\right) = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{\partial}\,\overrightarrow{J} = 0 \tag{2.37}$$

L'équation (2.37) représente l'écriture de l'équation de conservation de la charge dans l'espace de Minkowski et le quadri-vecteur courant est donné par,

$$\overrightarrow{J} = \left(\overrightarrow{j}, \rho c\right) \tag{2.38}$$

2.2.3 Quadri-vecteur potentiel

La jauge de Lorentz donnée dans l'équation (2.24) peut être réécrite comme suit,

$$\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \Longrightarrow \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi}{c}\right) = 0 \tag{2.39}$$

qu'en peut écrire sous la forme:

$$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} - \left(-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\phi}{c}\right) = 0 \Longrightarrow \left(\overrightarrow{\partial}\,\overrightarrow{A}, -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\phi}{c}\right) = 0 \tag{2.40}$$

Cette équation apparait comme la quadri-divergence d'un quadri-vecteur

$$\left(\overrightarrow{\partial}, -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\overrightarrow{A}, \frac{\phi}{c}\right) = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{\partial}\,\overrightarrow{\mathbf{A}} = 0 \tag{2.41}$$

L'équation (2.41) représente l'écriture de la jauge de Lorentz dans l'espace de Minkowski et le quadri-vecteur potentiel est donné par,

$$\overrightarrow{\mathbf{A}} = \left(\overrightarrow{A}, \frac{\phi}{c}\right) \tag{2.42}$$

2.2.4 Tenseur champ électromagnétique

Les champs $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B}$ sont donnés en fonction des potentiels ϕ et $\overrightarrow{A}$ par les deux équations (2.21) et (2.22).
L'écriture de l'équation (2.21) dans l'espace à trois dimensions donne:

$$\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\nabla}\phi - \frac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t} \Longrightarrow \tag{2.43}$$

$$E_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t} \tag{2.44}$$

$$E_y = -\frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial t} \tag{2.45}$$

$$E_z = -\frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial t} \tag{2.46}$$

Ces dernières équations peuvent être réécrite sous la forme suivante:

$$E_x = -c\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\phi}{c}\right) - c\frac{1}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t} \tag{2.47}$$

$$E_y = -c\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\phi}{c}\right) - c\frac{1}{c}\frac{\partial A_y}{\partial t} \tag{2.48}$$

$$E_z = -c\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\phi}{c}\right) - c\frac{1}{c}\frac{\partial A_z}{\partial t} \tag{2.49}$$

Maintenant, en prenant c en facteur, on retrouve:

$$\frac{E_x}{c} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\phi}{c}\right) - \frac{1}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t} \tag{2.50}$$

$$\frac{E_y}{c} = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\phi}{c}\right) - \frac{1}{c}\frac{\partial A_y}{\partial t} \tag{2.51}$$

$$\frac{E_z}{c} = -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\phi}{c}\right) - \frac{1}{c}\frac{\partial A_z}{\partial t} \tag{2.52}$$

L'écriture de l'équation (2.22) dans l'espace à trois dimensions donne:

$$\overrightarrow{B} = \overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{A} \Longrightarrow \tag{2.53}$$

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \tag{2.54}$$

$$B_y = -\left[\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z}\right] \Longrightarrow B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \tag{2.55}$$

$$B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \tag{2.56}$$

2.2.5 Changement de variable

Un point de l'espace de Minkowski est représenté par le quadri-vecteur position

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ ct \end{pmatrix} \tag{2.57}$$

Faisons les changement des variables suivant:

$$\left\{\begin{array}{c} x = x_1 \\ y = x_2 \\ z = x_3 \\ ct = -x_4 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x_3} \\ \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_4} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial x_1} = \partial_1 \\ \frac{\partial}{\partial x_2} = \partial_2 \\ \frac{\partial}{\partial x_3} = \partial_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_4} = \partial_4 \Longrightarrow \partial_4 = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} \end{array}\right. \tag{2.58}$$

$$\left\{\begin{array}{c} A_x = A_1 \\ A_y = A_2 \\ A_z = A_3 \\ \frac{\phi}{c} = A_4 \end{array}\right. \tag{2.59}$$

Les équations (2.50), (2.51), (2.52), (2.54), (2.55) et (2.56) deviennent,

$$\frac{E_x}{c} = -\partial_1 A_4 + \partial_4 A_1 \tag{2.60}$$

$$\frac{E_y}{c} = -\partial_2 A_4 + \partial_4 A_2 \tag{2.61}$$

$$\frac{E_z}{c} = -\partial_3 A_4 + \partial_4 A_3 \tag{2.62}$$

$$B_x = \partial_2 A_3 - \partial_3 A_2 \tag{2.63}$$

$$B_y = \partial_3 A_1 - \partial_1 A_3 \tag{2.64}$$

$$B_z = \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 \tag{2.65}$$

Ces six équations peuvent être écrite sous la forme générale suivante

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \qquad \mu, \nu = 1, 2, 3, 4 \tag{2.66}$$

Où les coefficients $F_{\mu\nu}$ sont les éléments de matrice d'un tenseur de l'espace de Minkowski, appelé "Tenseur champ électromagnétique" et donné par,

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} & F_{14} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} & F_{24} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} & F_{34} \\ F_{41} & F_{42} & F_{43} & F_{44} \end{pmatrix} \tag{2.67}$$

Le tenseur est antisymétrique $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$ et $F^{\mu\mu} = 0$. Donc, les éléments de matrice du tenseur champ électromagnétique sont donnés par,

$$\frac{E_x}{c} = -\partial_1 A_4 + \partial_4 A_1 = F_{41} = -F_{14} \tag{2.68}$$

$$\frac{E_y}{c} = -\partial_2 A_4 + \partial_4 A_2 = F_{42} = -F_{24} \tag{2.69}$$

$$\frac{E_z}{c} = -\partial_3 A_4 + \partial_4 A_3 = F_{43} = -F_{34} \tag{2.70}$$

$$B_x = \partial_2 A_3 - \partial_3 A_2 = F_{23} = -F_{32} \tag{2.71}$$

$$B_y = \partial_3 A_1 - \partial_1 A_3 = F_{31} = -F_{13} \tag{2.72}$$

$$B_z = \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 = F_{12} = -F_{21} \tag{2.73}$$

Finalement, le tenseur champ électromagnétique est donné par,

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & B_z & -B_y & -\frac{E_x}{c} \\ -B_z & 0 & B_x & -\frac{E_y}{c} \\ B_y & -B_x & 0 & -\frac{E_z}{c} \\ \frac{E_x}{c} & \frac{E_y}{c} & \frac{E_z}{c} & 0 \end{pmatrix} \tag{2.74}$$

<u>Exercice</u> 1 :

Les champs électrique et magnétique $\overrightarrow{E_1}$ et $\overrightarrow{B_1}$, mesurés par un observateur **O** lié à un repère Galilléen **R**, sont donnés en fonction des potentiels scalaire et vecteur $\phi_1, \overrightarrow{A_1}$ par les équations

$$\overrightarrow{E_1} = -\overrightarrow{\mathbf{grad}}\,\phi_1 - \frac{\partial \overrightarrow{A_1}}{\partial t}, \quad \overrightarrow{B_1} = \overrightarrow{\mathbf{rot}}\overrightarrow{A_1}$$

1. Quelle sont les nouvelles valeurs des champs $\overrightarrow{E_1}'$ et $\overrightarrow{B_1}'$, mesurées par un observateur $\mathbf{O}'$ lié à un repère Galilléen $\mathbf{R}'$ en déplacement à une vitesse constante $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ par rapport à **R** ?
2. Retrouver les nouvelles composantes du tenseur électromagnétique dans le repère Galilléen $\mathbf{R}'$.

Exercice 2 :

- Retrouver le courant de probabilité de l'équation de Schrodinger $\overrightarrow{j}$ qui vérifie l'équation

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \overrightarrow{j} = 0$$

On donne : $\rho = \psi^*(\vec{r}, t)\psi(\vec{r}, t)$

Équation de Klein-Gordon

3.1 Introduction

Afin de décrire des particules quantiques de spin nul et ayant des vitesses relativistes, on introduit l'équation de Klein-Gordon. Cette dernière est l'équivalent relativiste de l'équation de Schrödinger donnée par,

$$H\psi = E\psi \tag{3.1}$$

En utilisant le principe d'équivalence, sa forme devient

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = \frac{\overrightarrow{P}^2}{2m}\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi, \qquad \overrightarrow{p} = -i\hbar\overrightarrow{\nabla} \tag{3.2}$$

On sait que dans le cas des ondes planes, les fonctions $\psi(\overrightarrow{r}, t)$ qui sont solutions de l'équation de Schrodinger sont données par

$$\psi(\overrightarrow{r}, t) = e^{i(\frac{\overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{r}}{\hbar} - \frac{E\cdot t}{\hbar})} \tag{3.3}$$

On va essayer dans ce qui suit de trouver la forme générale de l'équation de Klein-Gordon, nous permettant de décrire le mouvement de particules libres, de spin nul et ayant des vitesse relativistes, en démarrant de l'équation de Schrodinger.

3.2 Quadri-vecteurs en théorie des champs

Rappelons que l'énergie relativiste d'une particule libre est donnée par

$$E = \sqrt{\overrightarrow{p}^2c^2 + m^2c^4} \tag{3.4}$$

- $\overrightarrow{p}$: impulsion
- c : vitesse de la lumière

– m : masse de la particule

Le quadri-vecteur énergie-impulsion $\overrightarrow{P}$ est définit par,

$$\overrightarrow{\mathbf{P}} = \left(\overrightarrow{p}, \frac{E}{c}\right) \tag{3.5}$$

En théorie des champs, on utilise la convention d'Einstein. Si $\overrightarrow{A}$ est un quadri-vecteur, on le note A_μ avec $\mu = 1, 2, 3, 4$. Le quadri-vecteur A_μ a les composantes suivantes:

$$A_\mu = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ ia_4 \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

Si on calcule le produit scalaire de deux quadri-vecteurs A_μ et B_ν, on trouve

$$A_\mu B_\nu = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ ia_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ ib_4 \end{pmatrix} = +a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 - a_4 b_4 \tag{3.7}$$

Ce produit scalaire vérifie la métrique de l'espace de Minkowski $(+, +, +, -)$.
Donc, en théorie des champs, le quadri-vecteur énergie-impulsion s'écrit:

$$P_\mu = \left(\overrightarrow{p}, i\frac{E}{c}\right) \tag{3.8}$$

Rappelons aussi qu'en mécanique quantique, que E et $\overrightarrow{p}$ sont définit par:

$$E \to i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \qquad\qquad \overrightarrow{p} \to -i\hbar \overrightarrow{\nabla} \tag{3.9}$$

En remplaçant (3.9) dans (3.8), on trouve

$$P_\mu = \left(-i\hbar \overrightarrow{\nabla}, i\frac{i\hbar}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right) = -i\hbar \left(\overrightarrow{\nabla}, -\frac{i}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right) \tag{3.10}$$

Si on pose,

$$\partial_\mu = \left(\overrightarrow{\nabla}, -\frac{i}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right) \tag{3.11}$$

où ∂_μ représente le quadri-vecteur dérivée spatio-temporelle, on trouve

$$P_\mu = -i\hbar\partial_\mu \tag{3.12}$$

3.3 Équation de Klein-Gordon libre

Trouvons maintenant l'équation de Klein-Gordon libre décrivant le mouvement (déplacement) d'une particule quantique, de spin nul et de vitesse relativiste.
En mécanique quantique, une particule libre est décrite par l'équation d'évolution de Schrodinger

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\phi(\overrightarrow{r},t) = E\phi(\overrightarrow{r},t) \quad \text{où} \quad E = H = E_c + V = E_c + 0 = \frac{1}{2}mv^2 \quad \text{avec} \quad v << c \tag{3.13}$$

Pour une particule relativiste libre

$$E_R = \sqrt{\overrightarrow{p}^2c^2 + m^2c^4} \tag{3.14}$$

La dynamique de ces particules relativistes sera décrite par l'équation suivante

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\phi(\overrightarrow{r},t) = E_R \quad \phi(\overrightarrow{r},t) = \sqrt{\overrightarrow{p}^2c^2 + m^2c^4} \quad \phi(\overrightarrow{r},t) \tag{3.15}$$

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 \phi(\overrightarrow{r},t) = \left(\sqrt{\overrightarrow{p}^2c^2 + m^2c^4}\right)^2 \quad \phi(\overrightarrow{r},t) \tag{3.16}$$

$$-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial^2 t}\phi(\overrightarrow{r},t) = \left(\overrightarrow{p}^2c^2 + m^2c^4\right) \quad \phi(\overrightarrow{r},t) \tag{3.17}$$

$$-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial^2 t}\phi(\overrightarrow{r},t) = \left(\left(-i\hbar\overrightarrow{\nabla}\right)^2c^2 + m^2c^4\right) \quad \phi(\overrightarrow{r},t) \tag{3.18}$$

$$-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial^2 t}\phi(\overrightarrow{r},t) = \left(\left(-i\hbar\overrightarrow{\nabla}\right)^2c^2 + m^2c^4\right) \quad \phi(\overrightarrow{r},t) \tag{3.19}$$

$$\frac{-\hbar^2}{\hbar^2c^2}\frac{\partial^2}{\partial^2 t}\phi(\overrightarrow{r},t) + \frac{\hbar^2\overrightarrow{\nabla}^2c^2}{\hbar^2c^2} \quad \phi(\overrightarrow{r},t) - \frac{m^2c^4}{\hbar^2c^2} \quad \phi(\overrightarrow{r},t) = 0 \tag{3.20}$$

Si on pose $\overrightarrow{\nabla}^2 = \Delta$, on retrouve l'équation suivante

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial^2 t} - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right) \quad \phi(\overrightarrow{r},t) = 0 \tag{3.21}$$

Cette dernière équation représente l'équation de Klein-Gordon libre écrite dans l'espace réel. Cherchons la forme de cette équation dans l'espace de Minkowski.
On a

$$\partial_\mu = \left(\overrightarrow{\nabla}, -\frac{i}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right) \Longrightarrow \partial_\mu^2 = \partial_\mu \cdot \partial_\mu = \left(\overrightarrow{\nabla}, -\frac{i}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right) \cdot \left(\overrightarrow{\nabla}, -\frac{i}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right) \tag{3.22}$$

$$\partial_\mu^2 = \left(\Delta, -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial^2 t}\right) = \Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial^2 t} \tag{3.23}$$

En remplaçant (3.23) dans (3.21), on trouve

$$\left(\partial_\mu^2 - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right) \quad \phi(\overrightarrow{r}, t) = 0 \tag{3.24}$$

Si on pose $\hbar = c = 1$ et $(\overrightarrow{r}, t) = x_\mu$ où x_μ représente un point de l'espace de Minkowski et $\mu = 1, 2, 3, 4$, l'équation (3.24) devient

$$\left(\partial_\mu^2 - m^2\right) \phi(x_\mu) = 0 \tag{3.25}$$

Cette équation représente l'équation de Klein-Gordon libre écrite dans l'espace de Minkowski.

3.4 Équation de Klein-Gordon en présence d'un champ électromagnétique extérieur

Cette équation permet de décrire une particule de charge q interagissant avec le champ électromagnétique extérieur, représenté par le quadri-vecteur potentiel $A_\mu = \left(\overrightarrow{A}, i\frac{\phi}{c}\right)$.
Afin d'avoir l'équation de Klein-Gordon en présence d'un champ électromagnétique extérieur, on utilise la méthode du couplage minimale, qui consiste à remplacer l'impulsion et l'énergie $(\overrightarrow{p}, E)$ par

$$E \to E - q\phi \qquad\qquad \overrightarrow{p} \to \overrightarrow{p} - q\overrightarrow{A} \tag{3.26}$$

dans l'équation de Klein-Gordon libre. La transformation donnée dans l'équation (3.26) peut être réécrite en utilisant les quadri-vecteurs. Sa forme est donnée par:

$$P_\mu \to P_\mu - qA_\mu \tag{3.27}$$

<u>Exercice</u> 3 :

- Montrer que les deux transformations données dans les deux équation (3.26) et (3.27) sont équivalentes.

On a

$$P_\mu = -i\hbar\,\partial_\mu \Longrightarrow P_\mu = -i\,\partial_\mu \quad \text{pour } \hbar = 1 \tag{3.28}$$

La transformation (3.27) devient alors,

$$-i\,\partial_\mu \rightarrow -i\,\partial_\mu - qA_\mu \Longrightarrow \partial_\mu \rightarrow \partial_\mu - iqA_\mu \Longrightarrow \partial_\mu \cdot \partial_\mu \rightarrow \left(\partial_\mu - iqA_\mu\right)\left(\partial_\mu - iqA_\mu\right) \tag{3.29}$$

Si on remplace dans l'équation de Klein-Gordon libre

$$\left[\left(\partial_\mu - iqA_\mu\right)\left(\partial_\mu - iqA_\mu\right) - m^2\right]\phi(x_\mu) = 0 \tag{3.30}$$

Cette équation est appelée, équation de Klein-Gordon en présence d'un champs électromagnétique extérieur A_μ. Si on pose $D_\mu = \left(\partial_\mu - iqA_\mu\right)$, alors l'équation (3.30) s'écrit

$$\left[D_\mu D_\mu - m^2\right]\phi(x_\mu) = 0 \tag{3.31}$$

Le conjugué de cette dernière équation est donné par

$$\left[D_\mu^* D_\mu^* - m^2\right]\phi^*(x_\mu) = 0 \Longrightarrow \left[\left(\partial_\mu + iqA_\mu\right)\left(\partial_\mu + iqA_\mu\right) - m^2\right]\phi^*(x_\mu) = 0 \tag{3.32}$$

Exercice 4 :

En présence d'un champ électromagnétique extérieur $A_\mu(\overrightarrow{A}, iV)$, le mouvement d'une particule de masse m, de spin nul et de vitesse relativiste c est décrit par l'équation Klein-Gordon suivante

$$\left[(\partial_\mu - iqA_\mu)(\partial_\mu - iqA_\mu) - m^2\right]\phi(x_\mu) = 0$$

- Montrer que cette équation est invariante dans la transformation de jauge suivante

$$\begin{cases} A_\mu \longrightarrow A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \alpha(x_\mu) \\ \phi(x_\mu) \longrightarrow \phi'(x_\mu) = e^{-iq\alpha(x_\mu)}\phi(x_\mu) \quad , \quad \phi(x_\mu), \alpha(x_\mu) \text{ sont deux réels arbitraires.} \end{cases}$$

Exercice 5 :

L'équation de Klein-Gordon décrivant le mouvement d'une particule relativiste, de masse m, de charge q et en présence d'un champ électromagnétique-magnétique extérieur $A_\mu(\overrightarrow{A}, i\phi)$ est donnée

$$\left[(\partial_\mu - iqA_\mu)(\partial_\mu - iqA_\mu) - m^2\right]\psi(x) = 0$$

Trouver l'expression du quadri-vecteur courant de Klein-Gordon J_μ qui est solution de l'équation

$$\partial_\mu J_\mu = 0$$

On donne : $(\partial_\mu^* - iqA_\mu^*)(\partial_\mu^* - iqA_\mu^*) = (\partial_\mu + iqA_\mu)(\partial_\mu + iqA_\mu)$

3.5 Solutions de l'équation de Klein-Gordon libre

L'équation de Klein-Gordon libre est donnée par

$$\left(\partial_\mu^2 - m^2\right)\phi(x_\mu) = 0 \quad \text{qu'on peut écrire} \quad \left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial^2 t} - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\quad \phi(\overrightarrow{r}, t) = 0 \tag{3.33}$$

Cette équation admet une solution en états stationnaires. Sa forme générale est donnée par,

$$\phi(\overrightarrow{r}, t) = f(t)\cdot\psi(\overrightarrow{r}) \tag{3.34}$$

On dit qu'une solution en états stationnaires est une solution à variables séparables. Remplaçons (3.34) dans (3.33), on trouve

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial^2 t} - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\quad f(t)\cdot\psi(\overrightarrow{r}) = 0 \tag{3.35}$$

$$f(t)\Delta\psi(\overrightarrow{r}) - \psi(\overrightarrow{r})\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial^2 t}f(t) - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}f(t)\psi(\overrightarrow{r}) = 0 \tag{3.36}$$

Si on divise toute l'équation sur $f(t)\psi(\overrightarrow{r})$, on trouve

$$\frac{f(t)\Delta\psi(\overrightarrow{r})}{f(t)\psi(\overrightarrow{r})} - \frac{1}{f(t)\psi(\overrightarrow{r})}\psi(\overrightarrow{r})\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial^2 t}f(t) - \frac{1}{f(t)\psi(\overrightarrow{r})}\frac{m^2c^2}{\hbar^2}f(t)\psi(\overrightarrow{r}) = 0 \tag{3.37}$$

$$\frac{\Delta\psi(\overrightarrow{r})}{\psi(\overrightarrow{r})} - \frac{1}{f(t)}\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial^2 t}f(t) - \frac{m^2c^2}{\hbar^2} = 0 \tag{3.38}$$

Cette équation est une équation du second ordre à deux variables indépendantes.

$$\frac{\Delta\psi(\overrightarrow{r})}{\psi(\overrightarrow{r})} - \frac{m^2c^2}{\hbar^2} = \frac{1}{c^2}\frac{f''(t)}{f(t)} = \text{constante}, \quad \text{avec} \quad f'' = \frac{\partial^2}{\partial^2 t}f(t) \tag{3.39}$$

Si on pose $constante = \omega^2$, on retrouve

$$\frac{\Delta\psi(\overrightarrow{r})}{\psi(\overrightarrow{r})} - \frac{m^2c^2}{\hbar^2} = \frac{1}{c^2}\frac{f''(t)}{f(t)} = \omega^2 \tag{3.40}$$

A partir de cette équation on obtient les deux équations suivantes:

$$\frac{\Delta\psi(\overrightarrow{r})}{\psi(\overrightarrow{r})} - \frac{m^2c^2}{\hbar^2} = \omega^2 \Longrightarrow \frac{\Delta\psi(\overrightarrow{r})}{\psi(\overrightarrow{r})} = \omega^2 + \frac{m^2c^2}{\hbar^2} \Longrightarrow \Delta\psi(\overrightarrow{r}) - \left(\omega^2 + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\psi(\overrightarrow{r}) = 0 \tag{3.41}$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{f''(t)}{f(t)} = \omega^2 \Longrightarrow \frac{f''(t)}{f(t)} = c^2\omega^2 \Longrightarrow f''(t) = c^2\omega^2 f(t) \Longrightarrow f''(t) - c^2\omega^2 f(t) = 0 \tag{3.42}$$

L'équation (3.42) peut s'écrire sous la forme générale suivante

$$f''(t) \pm (c\omega)^2 f(t) = 0 \tag{3.43}$$

L'équation (3.42) admet alors des solutions de la forme

$$f(t) = A\,e^{c\omega t} + B\,e^{-c\omega t} \tag{3.44}$$

Pour avoir des solutions continues partout, on pose

$$c\,\omega = \frac{i\,E}{\hbar}, \quad E \text{ est un réel.} \tag{3.45}$$

On remplaçant (3.44) dans (3.45), on trouve

$$f(t) = A\,e^{\frac{i\,E}{\hbar}t} + B\,e^{-\frac{i\,E}{\hbar}t} \tag{3.46}$$

On a

$$c\,\omega = \frac{i\,E}{\hbar} \Longrightarrow c^2\,\omega^2 = -\frac{E^2}{\hbar^2} \Longrightarrow \omega^2 = -\frac{E^2}{c^2\hbar^2} \tag{3.47}$$

Remplaçons maintenant dans l'équation (3.41)

$$\Delta\psi(\overrightarrow{r}) - \left(-\frac{E^2}{c^2\hbar^2} + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\psi(\overrightarrow{r}) = 0 \Longrightarrow \tag{3.48}$$

En réduisant au même dénominateur, on trouve

$$\Delta\psi(\overrightarrow{r}) - \left(-\frac{E^2}{c^2\hbar^2} + \frac{m^2c^4}{c^2\hbar^2}\right)\psi(\overrightarrow{r}) = 0 \Longrightarrow \Delta\psi(\overrightarrow{r}) - \left(\frac{-E^2 + m^2c^4}{c^2\hbar^2}\right)\psi(\overrightarrow{r}) = 0 \tag{3.49}$$

Or,

$$E^2 = \overrightarrow{p}^2c^2 + m^2c^4 \Longrightarrow -\overrightarrow{p}^2c^2 = -E^2 + m^2c^4 \tag{3.50}$$

En remplaçons dans l'équation précédente, on trouve

$$\Delta\psi(\overrightarrow{r}) - \left(\frac{-\overrightarrow{p}^2c^2}{c^2\hbar^2}\right)\psi(\overrightarrow{r}) = 0 \Longrightarrow \Delta\psi(\overrightarrow{r}) - \left(\frac{-\overrightarrow{p}^2}{\hbar^2}\right)\psi(\overrightarrow{r}) = 0 \Longrightarrow \tag{3.51}$$

$$\Delta\psi(\overrightarrow{r}) - \left(\frac{i\overrightarrow{p}}{\hbar}\right)^2\psi(\overrightarrow{r}) = 0 \tag{3.52}$$

Cette équation admet des solutions de la forme suivante

$$\psi(\overrightarrow{r}) = C\,e^{\frac{i\overrightarrow{p}\overrightarrow{r}}{\hbar}} + D\,e^{-\frac{i\overrightarrow{p}\overrightarrow{r}}{\hbar}} \tag{3.53}$$

3.6 Interprétation physique des solutions de l'équation de Klein-Gordon libre

Pour donner un sens physique aux solutions, on pose

- $e^{-\frac{iE}{\hbar}t}$ représente une particule créée dans le passé $(-\infty)$ et qui voyage vers le futur $(+\infty)$
- $e^{\frac{iE}{\hbar}t}$ représente une particule créée dans le futur $(+\infty)$ et qui voyage vers le passé $(-\infty)$.
- A représente la probabilité pour que la particule soit crée dans le futur $(+\infty)$ et qui voyage vers le passé $(-\infty)$.
- B représente la probabilité pour que la particule soit crée dans le passé $(-\infty)$ et qui voyage vers le futur $(+\infty)$.

Donc, la solution physique est donnée par

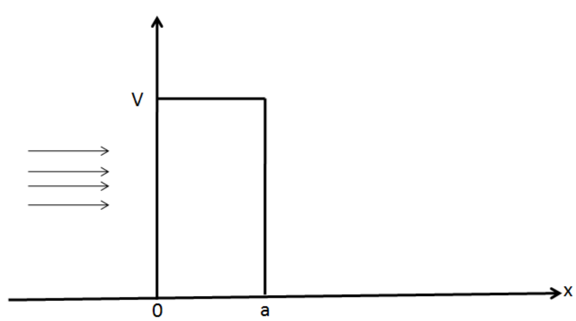
$$f(t) = e^{-\frac{iE}{\hbar}t} \tag{3.54}$$

Où la probabilité B pour que la particule est créée dans le passé et elle voyage vers le futur est égale à 1. Donc la probabilité A pour que la particule est créée dans le futur et elle voyage vers le passé est égale à 0. La solution Finale est donnée par

$$\phi(\overrightarrow{r},t) = f(t)\cdot\psi(\overrightarrow{r}) = e^{-\frac{iE}{\hbar}t}\left(C\,e^{\frac{i\overrightarrow{p}\,\overrightarrow{r}}{\hbar}} + D\,e^{-\frac{i\overrightarrow{p}\,\overrightarrow{r}}{\hbar}}\right) \tag{3.55}$$

<u>Exercice</u> 6 :

Des particules de spin 0, de charge q et de masse m sont incidentes de $(+\infty)$ vers $(-\infty)$ sur une barrière de potentiel de hauteur V et de largeur a. Sachant que l'énergie de ces particules est donnée par $E = qV/2$, tel que $qV > 2mc^2$,



1. Calculer les coefficients de transmission T et de réflexion R.
2. Calculer la densité de courant J_x dans chaque région.

<u>Indication</u>: travailler à une dimension.

Formulation lagrangien de la théorie des champs

4.1 Rappel du formalisme de Lagrange

Le formalisme de Lagrange représente un outil extrêmement puissant pour décrire l'évolution d'un problème physique. Initialement aborder sous la forme du principe de moindre action, il permet de déterminer le comportement d'un système, dès que l'expression d'une grandeur physique, le lagrangien, est connue.
L'objectif de ce rappel est de revoir les notions fondamentales de la théorie lagrangienne, tout d'abord dans le cadre de l'étude d'une particule massive, puis dans celui de la théorie des champs.

4.1.1 Principe de moindre action

Étant dans un état initial donné, un système physique a une infinité de façons d'évoluer jusqu'à un état final donné: Pour tant, lors d'une transformation réelle une seule de ces transformations

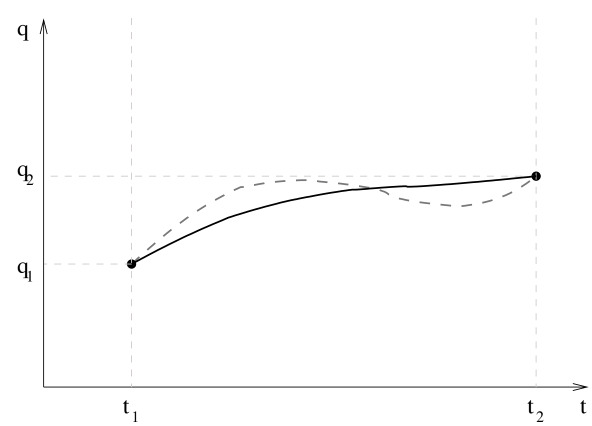


Figure 4.1: Transformation dans l'espace des coordonnées généralisées.

(évolutions) est effectivement réalisées. Comment peut-on déterminer cette évolution privilégiée

et la différentiée des autres? C'est à cette question que répond le principe de moindre action, qui peut être considérer comme l'un des postulats de la physique.
D'après le principe de moindre action, il existe une quantité appelée "Action" définit par,

$$S[q] = \int_{t_1}^{t_2} dt\ L(q_i(t), \dot{q}_i(t), t) \qquad , \qquad i = 1 - - - - N \tag{4.1}$$

dont la valeur change lors de l'évolution du système et qui doit être minimale le long de la transformation réelle. L'action S est définie comme l'intégrale d'une quantité appelée "Lagrangien", et qui est fonction des coordonnées généralisées q et des vitesses généralisées $\dot{q}(t) = \frac{dq}{dt}$.

4.1.2 Équations d'Euler-Lagrange

Parmi toutes les trajectoires qui passent par les deux points fixes ($\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$) de coordonnées généralisées $Q_1 = q(t_1)$ et $Q_2 = q(t_2)$, les trajectoires physiques sont celles qui rendent l'action S minimale $\Delta S \simeq 0$.

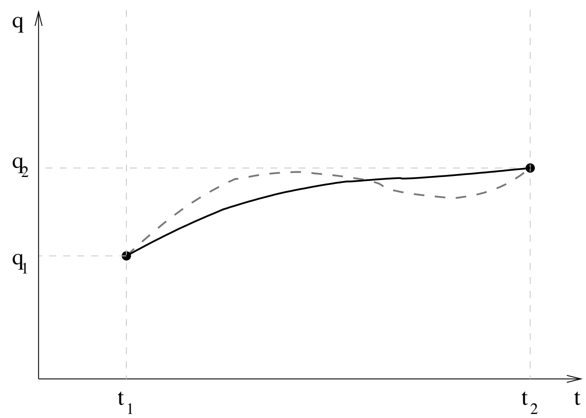


Figure 4.2: Transformation dans l'espace des coordonnées généralisées.

Si $\delta(q(t))$ est une fonction infinitésimale, alors

$$\Delta S[q] \simeq S(q + \delta q) - S(q) \tag{4.2}$$

On a

$$S[q] = \int_{t_1}^{t_2} dt\ L(q, \dot{q}, t) \quad \Longrightarrow \quad \Delta S[q] = \int_{t_1}^{t_2} dt[\ L(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}, t) -\ L(q, \dot{q}, t)] \tag{4.3}$$

Or,

$$L(q+\delta q, \dot{q}+\delta\dot{q}, t) = L(q,\dot{q},t) + \frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial \dot{q}}\delta\dot{q} \tag{4.4}$$

Donc,

$$\begin{aligned}\Delta S[q] &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left[L(q,\dot{q},t) + \frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial \dot{q}}\delta\dot{q} - \; L(q,\dot{q},t)\right] \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial \dot{q}}\delta\dot{q}\right] \simeq 0\end{aligned} \tag{4.5}$$

Si on pose

$$\delta\dot{q} = \frac{d}{dt}(\delta q) \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial \dot{q}}\delta\dot{q} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{d}{dt}(\delta q) \tag{4.6}$$

On aussi,

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q\right] = \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right]\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{d}{dt}(\delta q) \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{d}{dt}(\delta q) = \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q\right] - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right]\delta q \tag{4.7}$$

En remplaçant dans l'équation (4.5), on retrouve,

$$\begin{aligned}\Delta S[q] &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q\right] - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right]\delta q\right] \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt\delta q \left[\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right]\right] + \int_{t_1}^{t_2} dt\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q\right] \simeq 0\end{aligned} \tag{4.8}$$

Où

$$\int_{t_1}^{t_2} dt\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q\right] = \int_{t_1}^{t_2} d\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q\right] = \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q\right] = 0 \tag{4.9}$$

Finalement, les équations d'Euler-Lagrange sont données par,

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = 0 \tag{4.10}$$

4.1.3 Choix du lagrangien

Le choix du lagrangien n'est pas unique.

- Si on remplace le lagrangien L par (αL), où α est un réel, alors les équations de mouvement restent inchangées.

- Si on remplace le lagrangien L par $(\beta + L)$, où β est une constante, alors les équations de mouvement restent inchangées.
- Si on remplace le lagrangien L par $(L + \frac{dF}{dt})$, où $F = F(q, \dot{q}, t)$ est un lagrangien, alors les équations de mouvement restent inchangées.

Exercice 7 :
Montrer que la variation ΔS reste invariante par changement du lagrangien L par $L + \frac{dF}{dt}$.

4.1.4 Formulation hamiltonienne

L'hamiltonien H est donné par

$$H(p, q, t) = P_i \dot{q}_i - L \tag{4.11}$$

L'impulsion généralisée est donnée par

$$P_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \tag{4.12}$$

Exercice 8 :
Montrer que si le lagrangien L ne dépend pas explicitement du temps t, alors $\frac{dH}{dt} = 0$
Solution 1 :

$$\frac{dH}{dt} = p\frac{\partial \dot{q}}{\partial t} + \dot{q}\frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\partial L}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial t} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{\partial \dot{q}}{\partial t} \tag{4.13}$$

Or, on a

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \quad \text{et} \quad \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0 \tag{4.14}$$

Donc,

$$\frac{dH}{dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q}\right)\frac{\partial q}{\partial t} = -\left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\right)\frac{\partial q}{\partial t} = 0 \tag{4.15}$$

4.2 Théorie des champs classiques

4.2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons examiner comment généraliser le formalisme de la mécanique analytique au cas de systèmes comportant un nombre infini de particules (degrés de libertés). Un champ par définition est un système possédant un nombre infini de degrés de libertés. Le passage de la mécanique classique à la théorie des champs peut se faire en remplaçant les coordonnées

généralisées $q_i(t)$ par un champ scalaire $\phi(\vec{r},t) \equiv \phi_{\vec{r}}(t)$, et qu'on notera dans le cas relativiste par $\phi(x_\mu)$ où x_μ est un point de l'espace de Minkowski.
Par analogie, on définit la forme générale du lagrangien en théorie des champs et qu'on écrit,

$$L = \int_V \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi, x_\mu)\, d^3x \tag{4.16}$$

où $\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi, x_\mu)$ est une densité lagrangienne.

4.2.2 Équations d'Euler-Lagrange pour un champ

L'action S est donnée par

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L\, dt = \int_{t_1}^{t_2} dt \int \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi, x_\mu)\, d^3x = \int_\Omega \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi, x_\mu)\, d^4x \tag{4.17}$$

où Ω est un volume d'espace-temps sur lequel on intègre la densité lagrangienne pour avoir l'action. L'élément de volume d'espace-temps est donnée par: $d\Omega = d^4x = dt\, d^3x$.
La méthode à utiliser pour avoir les équations de mouvement est exactement la même qu'en mécanique analytique. On fait alors varier l'action $S(\phi(x_\mu))$ sur une trajectoire en effectuant la transformation suivante,

$$\phi(x_\mu) \longrightarrow \phi(x_\mu) + \delta\phi(x_\mu) \quad \text{où} \quad \delta\phi(x_\mu) << 1 \tag{4.18}$$

L'application du principe de moindre action revient à prendre $\delta S \simeq 0$.

$$\delta S \simeq 0 \Leftrightarrow S(\phi + \delta\phi) - S(\phi) \simeq 0 \tag{4.19}$$

On a

$$S(\phi) = \int_\Omega \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi, x_\mu)\, d^4x \tag{4.20}$$

Donc,

$$S(\phi + \delta\phi) = \int_\Omega \mathcal{L}(\phi + \delta\phi, \partial_\mu \phi + \delta(\partial_\mu \phi), x_\mu)\, d^4x \tag{4.21}$$

$$\delta S = \int_\Omega \left[\mathcal{L}(\phi + \delta\phi, \partial_\mu \phi + \delta(\partial_\mu \phi), x_\mu) - \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi, x_\mu) \right]\, d^4x \simeq 0 \tag{4.22}$$

En appliquant un développement limité, $\mathcal{L}(\phi+\delta\phi,\partial_\mu\phi+\delta(\partial_\mu\phi),x_\mu)$ peut s'écrire sous la forme suivante,

$$\mathcal{L}(\phi+\delta\phi,\partial_\mu\phi+\delta(\partial_\mu\phi),x_\mu)=\mathcal{L}(\phi,\partial_\mu\phi,x_\mu)+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta(\partial_\mu\phi)+... \tag{4.23}$$

On pose,

$$\delta(\partial_\mu\phi)=\partial_\mu(\delta\phi) \tag{4.24}$$

Maintenant, en calculant le terme,

$$\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta\phi\right)=\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right)\delta\phi+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\partial_\mu(\delta\phi) \tag{4.25}$$

On retrouve,

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\partial_\mu(\delta\phi)=\mathcal{L}(\phi,\partial_\mu\phi,x_\mu)+\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta\phi\right)-\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right)\delta\phi \tag{4.26}$$

En remplaçant (4.26) dans (4.23), on retrouve

$$\mathcal{L}(\phi+\delta\phi,\partial_\mu\phi+\delta(\partial_\mu\phi),x_\mu)=\mathcal{L}(\phi,\partial_\mu\phi,x_\mu)+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi+\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta\phi\right)-\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right)\delta\phi \tag{4.27}$$

Après simplification, on trouve les équations d'Euler-Lagrange appliquées à N champs scalaires,

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_i}-\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)}\right)=0 \tag{4.28}$$

4.2.3 Moment conjugué

En mécanique analytique, le moment conjugué ou impulsion généralisée P_i d'une variable généralisée q_i est définit par,

$$P_i=\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i} \tag{4.29}$$

Par analogie à cette définition, on définit le moment conjugué à un champ $\phi(x_\mu)$ comme suit,

$$\Pi_{\phi_i}=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}_i}=\Pi_i \tag{4.30}$$

4.2.4 Densité hamiltonienne

En mécanique classique, l'hamiltonien total d'un système physique est donné par

$$H = P_i \, \dot{q}_i - L \tag{4.31}$$

Par analogie à cette définition, on définit la densité hamiltonienne h par,

$$h = \Pi_i \, \dot{\phi}_i - \mathcal{L} \tag{4.32}$$

L'hamiltonien total sera définit par,

$$H = \int_V h(\phi, \partial_\mu \phi, x_\mu) \, d^3x \tag{4.33}$$

4.3 Principe de base de la théorie des champs

Dans un cas général, on associe à chaque particules de spin nul un champ scalaire. Pour décrire N particules, on définit N champs scalaires. Donc le système de ces N champs sera décrit par une densité lagrangienne ayant la forme suivante,

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}\left(\phi_1, \partial_\mu \phi_1, \phi_2, \partial_\mu \phi_2 \ldots \phi_N, \partial_\mu \phi_N, x_\mu\right) = \mathcal{L}\left(\phi_i, \partial_\mu \phi_i, x_\mu\right) \text{ avec } i = 1 \longrightarrow N \tag{4.34}$$

Le mouvement des ces N champs scalaires sera décrit par N équations d'Euler-Lagrange suivantes,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} \right) = 0 \tag{4.35}$$

On dit alors que le champ scalaire $\phi(x_\mu)$ est un système à N degrés de libertés.
Par définition, le champ scalaire est le cas le plus simple. Il se transforme de la façon suivante,

$$\phi(x_\mu) = \phi'(x'_\mu) \tag{4.36}$$

- Le champs scalaire (champ de Klein-Gordon) permet de décrire la physique de particules de spin nul et ayant des vitesses relativistes c.
- Le champ scalaire peut être soit réel $\phi(x_\mu) = \phi^*(x_\mu)$, soit complexe $\phi(x_\mu) \neq \phi^*(x_\mu)$.

4.3.1 Champ scalaire libre

Quelle est la forme générale de la densité lagrangienne qu'il faut choisir pour avoir l'équation de Klein-Gordon libre donnée par l'équation suivante,

$$\left(\partial_\mu \partial_\mu - m^2\right) \phi(x_\mu) = 0 \tag{4.37}$$

Réponse: Le choix n'est pas unique. Notre choix est le suivant,

$$\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi, x_\mu) = -\frac{1}{2} \left(\partial_\mu \phi\right)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \tag{4.38}$$

Vérification: Remplaçons dans les équations d'Euler-Lagrange, avec $\phi_i = \phi = \phi^*$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) = 0 \tag{4.39}$$

Avec $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -m^2 \phi, \quad \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = -\partial_\mu \phi.$
En remplaçant dans l'équation (4.39), on retrouve l'équation de Klein-Gordon,

$$\left(\partial_\mu \partial_\mu - m^2\right) \phi(x_\mu) = 0 \tag{4.40}$$

4.3.2 Champ scalaire complexe libre

Si $\phi = \phi^*$, quelle est la forme générale de la densité lagrangienne qu'il faut choisir pour avoir les deux équations suivantes,

$$\left(\partial_\mu \partial_\mu - m^2\right) \phi(x_\mu) = 0 \ \ , \ \left(\partial_\mu \partial_\mu - m^2\right) \phi^*(x_\mu) = 0 \tag{4.41}$$

Réponse: Notre choix est le suivant,

$$\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi, \phi^*, \partial_\mu \phi^*, x_\mu) = -\left(\partial_\mu \phi\right)\left(\partial_\mu \phi^*\right) - m^2 \phi \phi^* \tag{4.42}$$

Vérification: Remplaçons dans les deux équations d'Euler-Lagrange pour $\phi_i = \phi$, ϕ^*,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^*} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^*)} \right) = 0 \tag{4.43}$$

Avec $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^*} = -m^2\phi, \quad \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^*)} = -\partial_\mu \phi, \quad \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -m^2\phi^*, \quad \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = -\partial_\mu \phi^*.$
En remplaçant dans l'équation (4.43), on retrouve les deux équations suivantes,

$$\left(\partial_\mu \partial_\mu - m^2\right) \phi(x_\mu) = 0 \;\;,\;\; \left(\partial_\mu \partial_\mu - m^2\right) \phi^*(x_\mu) = 0 \tag{4.44}$$

4.3.3 Champ scalaire complexe en présence d'un champ électromagnétique extérieur

Quelle est la forme générale de la densité lagrangienne qu'il faut choisir pour avoir les deux équations suivantes,

$$\left[\left(\partial_\mu - iqA_\mu\right)\left(\partial_\mu - iqA_\mu\right) - m^2\right] \phi(x_\mu) = 0 \tag{4.45}$$

$$\left[\left(\partial_\mu + iqA_\mu\right)\left(\partial_\mu + iqA_\mu\right) - m^2\right] \phi^*(x_\mu) = 0 \tag{4.46}$$

Réponse: Notre choix est le suivant,

$$\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi, \phi^*, \partial_\mu \phi^*, x_\mu) = -\left(\partial_\mu + iqA_\mu\right) \phi^* \left(\partial_\mu - iqA_\mu\right) \phi - m^2 \phi \phi^* \tag{4.47}$$

Exercice 9 :
Vérifier que la densité lagrangienne donnée dans l'équation (4.47) nous permet d'avoir les deux équations de mouvements dans (4.45) et (4.46).

4.3.4 Remarque

– Le champ de Klein-Gordon complexe est équivalent à deux champs scalaires réels ϕ_1 et ϕ_2. Ce dernier est donné par,

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2), \;\; \phi^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 - i\phi_2) \tag{4.48}$$

– La densité lagrangienne du champ scalaire en présence d'un champ électromagnétique extérieur A_μ peut s'écrire sous la forme suivante,

$$\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi, \phi^*, \partial_\mu \phi^*, x_\mu) = \mathcal{L}_o + \mathcal{L}_I \tag{4.49}$$

Notons que $\mathcal{L}_o$ représente la densité lagrangienne du champ scalaire complexe libre. Cette dernière est la somme des termes cinétique $\left(\left(\partial_\mu \phi^*\right)\left(\partial_\mu \phi\right)\right.$ et du terme de masse $(m^2 \phi \phi^*)$.

$$\mathcal{L}_o = -\left(\partial_\mu \phi^*\right)\left(\partial_\mu \phi\right) - m^2 \phi \phi^* \tag{4.50}$$

Alors que $\mathcal{L}_I$ représente la densité lagrangienne due à l'interaction du champ scalaire complexe (ϕ, ϕ^*) avec le champ électromagnétique extérieur A_μ.

$$\mathcal{L}_I = -iqA_\mu \phi^* \left(\partial_\mu - iqA_\mu\right)\phi + iqA_\mu \phi \left(\partial_\mu + iqA_\mu\right)\phi^* \tag{4.51}$$

<u>Exercice</u> 10 :

On donne l'expression de la densité lagrangienne du champ scalaire complexe libre par,

$$\mathcal{L} = -\left(\partial_\mu \phi^*\right)\left(\partial_\mu \phi\right) - m^2 \phi \phi^* \tag{4.52}$$

- Réécrire la densité lagrangienne en fonction des champs scalaires réels (ϕ_1, ϕ_2) donnés par,

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2), \;\; \phi^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 - i\phi_2) \tag{4.53}$$

- Retrouver les équations de mouvement des champs scalaires (ϕ_1, ϕ_2).

<u>Exercice</u> 11 :

Considérons la densité lagrangienne suivante,

$$\mathcal{L}1 = -\frac{\hbar}{2i}(\psi^* \partial_t \psi - \psi \partial_t \psi^*) - \frac{\hbar^2}{2m}(\overrightarrow{\partial}\psi)(\overrightarrow{\partial}\psi^*) - V(\overrightarrow{r}, t)\psi^* \psi \tag{4.54}$$

1. Retrouver les équations de mouvement.
2. Calculer les moments conjugués.
3. Retrouver la forme de la densité hamiltonienne.
4. Déduire la forme de l'hamiltonien total.

4.4 Symétries et lois de conservation

Dans cette section, on supposera que la densité lagrangienne ne dépend pas explicitement de (x_μ). On supposera aussi que les équations de mouvement (donc de l'action) restent inchangées lors d'une transformation (continue) infinitésimale définit par,

$$\begin{cases} x_\mu \longrightarrow x'_\mu = x_\mu + \delta x_\mu \\ \phi(x_\mu) \longrightarrow \phi'(x'_\mu) = \phi(x_\mu) + \delta\phi(x_\mu) \end{cases} \tag{4.55}$$

Avec,

$$\begin{cases} x_\mu \longrightarrow \text{position spatio-temporelle (coordonnées)} \\ \delta x_\mu \longrightarrow \text{variation infinitisimale (deplacement l'espace et dans le temps)} \\ \phi(x_\mu) \longrightarrow \text{champ scalaire (variable)} \\ \delta\phi(x_\mu) \longrightarrow \text{variation de phase (dûe à une rotation)} \end{cases}$$

4.4.1 Exemple de transformation

Transformation spatio-temporelle

Une transformation spatio-temporelle est définit par

$$\begin{cases} x_\mu \longrightarrow x'_\mu = x_\mu + a_\mu \ , \quad (a_\mu = \delta x_\mu) \\ \phi(x_\mu) \longrightarrow \phi'(x'_\mu) = \phi(x_\mu) \ , \quad (\delta\phi(x_\mu) = 0) \end{cases} \tag{4.56}$$

Avec a_μ représente le quadri-vecteur déplacement dans l'espace-temps.
D'après la transformation infinitésimale donnée dans l'équation (4.56),

$$\phi'(x'_\mu) = \phi'(x_\mu + a_\mu) = \phi(x_\mu) \tag{4.57}$$

donc,

$$\phi'(x_\mu + a_\mu) = \phi(x_\mu) \tag{4.58}$$

Transformation de phase globale $(\phi(x_\mu) \neq \phi^*(x_\mu))$

Cette transformation est donnée par,

$$\begin{cases} x_\mu \longrightarrow x'_\mu = x_\mu \ , \quad (\delta x_\mu = 0) \\ \phi(x_\mu) \longrightarrow \phi'(x'_\mu) = \phi(x_\mu) + \delta\phi(x_\mu) = e^{-iq\theta(x_\mu)}\phi(x_\mu) \end{cases} \tag{4.59}$$

Avec $\theta(x_\mu)$ est un scalaire réel.
D'après la transformation infinitésimale donnée dans l'équation (4.59),

$$\phi^{'}(x_\mu^{'}) = \phi^{'}(x_\mu) = \phi(x_\mu) + \delta\phi(x_\mu) = e^{-iq\theta(x_\mu)}\phi(x_\mu) \tag{4.60}$$

donc,

$$\phi^{'*}(x_\mu) = e^{+iq\theta(x_\mu)}\phi^*(x_\mu) \tag{4.61}$$

Transformation de phase locale $(\phi(x_\mu) = \phi^*(x_\mu))$

Cette transformation est donnée par,

$$\begin{cases} x_\mu \longrightarrow x_\mu^{'} = x_\mu \ , \quad (\delta x_\mu = 0) \\ \phi(x_\mu) \longrightarrow \phi^{'}(x_\mu^{'}) = \phi(x_\mu) + \delta\phi(x_\mu) = e^{-iq\theta(x_\mu)}\phi(x_\mu) \end{cases} \tag{4.62}$$

Avec $\theta(x_\mu)$ est un scalaire réel.
D'après la transformation infinitésimale donnée dans l'équation (4.62),

$$\phi^{'}(x_\mu^{'}) = \phi^{'}(x_\mu) = \phi(x_\mu) + \delta\phi(x_\mu) = e^{-iq\theta(x_\mu)}\phi(x_\mu) \tag{4.63}$$

donc,

$$\phi^{'*}(x_\mu) = e^{+iq\theta(x_\mu)}\phi(x_\mu) \tag{4.64}$$

4.4.2 Théorème de Noether

Énoncé

Pour toute transformation continue de l'action S, il existe un courant J_μ vérifiant l'équation

$$\partial_\mu J_\mu = 0 \tag{4.65}$$

Ceci implique qu'il existe une charge qui se conserve, définit par

$$Q = \int \rho \, d^3x \tag{4.66}$$

Démonstration

On dit que les équations de mouvement sont invariantes si l'action S est stationnaire

$$\delta S = S^{'} - S \simeq 0 \tag{4.67}$$

On a

$$S = \int d^4x\, \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \Rightarrow S^{'} = \int d^4x^{'}\, \mathcal{L}(\phi^{'}, \partial_\mu^{'} \phi^{'}) \tag{4.68}$$

Avec $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$ (la densité lagrangienne ne dépend pas explicitement de x_μ).
Considérons des transformations infinitésimales de la forme,

$$\begin{cases} x_\mu \longrightarrow x_\mu^{'} = x_\mu + \delta x_\mu \\ \phi(x_\mu) \longrightarrow \phi^{'}(x_\mu^{'}) = \phi(x_\mu) + \delta\phi(x_\mu) \end{cases} \tag{4.69}$$

où

$$\delta\phi(x) = \phi^{'}(x^{'}) - \phi(x) \tag{4.70}$$

Avec $\delta\phi(x_\mu)$ représente la variation du champ dû à la fois à la transformation du champ (variable) et la transformation de la coordonnées (x_μ).
Donc, la variation en un point fixe de l'espace à 4-dimensions est donnée par

$$\delta_o\phi(x) = \phi^{'}(x) - \phi(x) \;\; , \quad \text{pour } x^{'} = x \tag{4.71}$$

Le lien entre les dérivées d'espace-temps est donné par

$$d^4x^{'} = [1 + \partial_\mu(\delta x_\mu)]d^4x \tag{4.72}$$

Cherchons maintenant la relation entre la variation champ en deux points différents $\delta\phi$ et la variation du champ en un point fixe $\delta_o\phi$.
La variation du champ en deux point différents est donnée par

$$\delta\phi(x) = \phi^{'}(x^{'}) - \phi(x) = \phi^{'}(x^{'}) - \phi^{'}(x) + \phi^{'}(x) - \phi(x) \tag{4.73}$$

$$\delta\phi(x) = \phi^{'}(x) + (\partial_\nu\phi)\delta x_\nu - \phi^{'}(x) + \delta_o\phi(x) \tag{4.74}$$

Avec

$$\phi^{'}(x^{'}) = \phi^{'}(x_\mu + \delta x_\mu) = \phi^{'}(x_\mu) + (\partial_\nu\phi)\delta x_\nu = \phi^{'}(x) + (\partial_\nu\phi)\delta x_\nu \tag{4.75}$$

Donc,

$$\delta\phi(x) = \delta_o\phi(x) + (\partial_\nu\phi)\delta x_\nu \tag{4.76}$$

Calculons le terme $\partial'_\mu\phi'$
On a

$$\partial'_\mu\phi'(x') = \partial'_\mu(\phi + \delta\phi) = \frac{\partial}{\partial x'_\mu}(\phi + \delta\phi) \tag{4.77}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_\nu}\frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\mu}(\phi + \delta\phi) = \frac{\partial}{\partial x_\nu}(\phi + \delta\phi)\frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\mu} \tag{4.78}$$

On a aussi

$$x'_\nu = x_\nu + \delta x_\nu \Rightarrow x_\nu = x'_\nu - \delta x_\nu \tag{4.79}$$

Donc,

$$\frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\mu} = \frac{\partial x'_\nu}{\partial x'_\mu} + \frac{\partial}{\partial x'_\mu}(\delta x_\nu) \tag{4.80}$$

Finalement on trouve que,

$$\frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\mu} = \delta_{\mu\nu} - \partial_\mu(\delta x_\nu) \tag{4.81}$$

En remplaçant l'équation (4.81) dans l'équation (4.77), on trouve

$$\partial'_\mu\phi'(x') = \frac{\partial}{\partial x_\nu}(\phi + \delta\phi)\frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\mu} \tag{4.82}$$

$$= \left(\frac{\partial\phi}{\partial x_\nu} + \frac{\partial}{\partial x_\nu}(\delta\phi)\right)(\delta_{\mu\nu} - \partial_\mu(\delta x_\nu)) \tag{4.83}$$

$$= (\partial_\nu\phi + \partial_\nu(\delta\phi))(\delta_{\mu\nu} - \partial_\mu(\delta x_\nu)) \tag{4.84}$$

$$= (\partial_\nu\phi)\delta_{\mu\nu} - (\partial_\nu\phi)\partial_\mu(\delta x_\nu) + \partial_\nu(\delta\phi)\delta_{\mu\nu} - \partial_\nu(\delta\phi)\partial_\mu(\delta x_\nu) \tag{4.85}$$

$$\partial'_\mu\phi'(x') = (\partial_\mu\phi) - (\partial_\nu\phi)\partial_\mu(\delta x_\nu) + \partial_\mu(\delta\phi) \tag{4.86}$$

On néglige le terme $\partial_\nu(\delta\phi)\partial_\mu(\delta x_\nu)$, car c'est un terme d'ordre supérieur.
La densité lagrangienne ne dépend pas explicitement de $x_\mu \Rightarrow \mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi)$
Donc

$$\mathcal{L}(\phi', \partial'_\mu\phi') = \mathcal{L}(\phi + \delta\phi, (\partial_\mu\phi) - (\partial_\nu\phi)\partial_\mu(\delta x_\nu) + \partial_\mu(\delta\phi)) \tag{4.87}$$

$$= \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}[\partial_\mu(\delta\phi) - (\partial_\nu\phi)\partial_\mu(\delta x_\nu)] \tag{4.88}$$

Donc, on trouve

$$\mathcal{L}(\phi^{'},\partial^{'}_{\mu}\phi^{'}) = \mathcal{L}(\phi,\partial_{\mu}\phi) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi)}\partial_{\mu}(\delta\phi) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi)}(\partial_{\nu}\phi)\partial_{\mu}(\delta x_{\nu}) \tag{4.89}$$

En remplaçant l'équation (4.72) dans l'équation (4.67), on trouve

$$\delta S = \int d^4x^{'}\,\mathcal{L}(\phi^{'},\partial^{'}_{\mu}\phi^{'}) - \int d^4x\,\mathcal{L}(\phi,\partial_{\mu}\phi) \simeq 0 \tag{4.90}$$

$$= \int [1+\partial_{\mu}(\delta x_{\mu})]d^4x\,\mathcal{L}(\phi^{'},\partial^{'}_{\mu}\phi^{'}) - \int d^4x\,\mathcal{L}(\phi,\partial_{\mu}\phi) \simeq 0 \tag{4.91}$$

$$\delta S = \int [\mathcal{L}(\phi^{'},\partial^{'}_{\mu}\phi^{'}) - \mathcal{L}(\phi,\partial_{\mu}\phi) + \partial_{\mu}(\delta x_{\mu})\mathcal{L}]d^4x \simeq 0 \tag{4.92}$$

Calculons le terme: $\mathcal{L}(\phi^{'},\partial^{'}_{\mu}\phi^{'}) - \mathcal{L}(\phi,\partial_{\mu}\phi)$

$$\mathcal{L}(\phi^{'},\partial^{'}_{\mu}\phi^{'}) - \mathcal{L}(\phi,\partial_{\mu}\phi) = \mathcal{L}(\phi,\partial_{\mu}\phi) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi)}\partial_{\mu}(\delta\phi) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi)}(\partial_{\nu}\phi)\partial_{\mu}(\delta x_{\nu}) - \mathcal{L}(\phi,\partial_{\mu}\phi)$$

$$\mathcal{L}(\phi^{'},\partial^{'}_{\mu}\phi^{'}) - \mathcal{L}(\phi,\partial_{\mu}\phi) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi)}\partial_{\mu}(\delta\phi) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi)}(\partial_{\nu}\phi)\partial_{\mu}(\delta x_{\nu}) \tag{4.93}$$

D'après les équations d'Euler-Lagrange,

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_{\mu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi)}\right) = 0$$

Donc

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = \partial_{\mu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi)}\right) \tag{4.94}$$

On a aussi

$$\partial_{\mu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi)}\delta\phi\right) = \partial_{\mu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi)}\right)\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi)}\partial_{\mu}(\delta\phi)$$

Donc,

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi)}\partial_{\mu}(\delta\phi) = \partial_{\mu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi)}\delta\phi\right) - \partial_{\mu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi)}\right)\delta\phi \tag{4.95}$$

En remplaçant les équations (4.94) et (4.95) dans l'équation (4.93), on trouve

$$\mathcal{L}(\phi^{'},\partial^{'}_{\mu}\phi^{'}) - \mathcal{L}(\phi,\partial_{\mu}\phi) = \partial_{\mu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi)}\right)\delta\phi + \partial_{\mu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi)}\delta\phi\right) - \partial_{\mu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi)}\right)\delta\phi - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi)}(\partial_{\nu}\phi)\partial_{\mu}(\delta x_{\nu})$$

$$\mathcal{L}(\phi', \partial'_\mu \phi') - \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta\phi \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} (\partial_\nu \phi) \partial_\mu (\delta x_\nu) \tag{4.96}$$

On a

$$\delta\phi = \delta_o \phi + (\partial_\nu \phi) \delta x_\nu$$

Donc

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta\phi \right) = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} (\delta_o \phi + (\partial_\nu \phi)(\delta x_\nu)) \right)$$

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta\phi \right) = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta_o \phi \right) + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} (\partial_\nu \phi)(\delta x_\nu) \right) \tag{4.97}$$

Calculons le terme $\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} (\partial_\nu \phi)(\delta x_\nu) \right)$:

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} (\partial_\nu \phi)(\delta x_\nu) \right) = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) (\partial_\nu \phi)(\delta x_\nu) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\mu \left((\partial_\nu \phi) \right) (\delta x_\nu) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} (\partial_\nu \phi) \partial_\mu \left(\delta x_\nu \right)$$

En négligeant les termes d'ordre supérieur, on trouve

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} (\partial_\nu \phi)(\delta x_\nu) \right) = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) (\partial_\nu \phi)(\delta x_\nu) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} (\partial_\nu \phi) \partial_\mu \left(\delta x_\nu \right) \tag{4.98}$$

Donc,

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta\phi \right) = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta_o \phi \right) + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) (\partial_\nu \phi)(\delta x_\nu) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} (\partial_\nu \phi) \partial_\mu \left(\delta x_\nu \right) \tag{4.99}$$

En remplaçant l'équation (4.99) dans l'équation (4.96), on trouve

$$\mathcal{L}(\phi', \partial'_\mu \phi') - \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta\phi \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} (\partial_\nu \phi) \partial_\mu (\delta x_\nu)$$

$$= \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta_o \phi \right) + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) (\partial_\nu \phi)(\delta x_\nu) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} (\partial_\nu \phi) \partial_\mu \left(\delta x_\nu \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} (\partial_\nu \phi) \partial_\mu \left(\delta x_\nu \right)$$

Donc,

$$\mathcal{L}(\phi', \partial'_\mu \phi') - \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta_o \phi \right) + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) (\partial_\nu \phi)(\delta x_\nu)$$

Calculons le terme $\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) (\partial_\nu \phi)(\delta x_\nu)$:

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) (\partial_\nu \phi)(\delta x_\nu) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} (\partial_\nu \phi)(\delta x_\nu) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_\mu} \frac{\partial x_\mu}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial x_\nu} \delta x_\nu$$

$$= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_\mu} \frac{\partial x_\mu}{\partial \partial x_\nu} \delta x_\nu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_\mu} \delta_{\mu\nu} \delta x_\nu = \partial_\mu \mathcal{L} \; \delta x_\mu$$

Finalement, on trouve

$$\mathcal{L}(\phi', \partial'_\mu \phi') - \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta_o \phi \right) + \partial_\mu \mathcal{L} \; \delta x_\mu \tag{4.100}$$

La variation de l'action dans l'équation (4.92) devient,

$$\delta S = \int \left[\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta_o \phi \right) + \partial_\mu \mathcal{L} \; \delta x_\mu + \partial_\mu (\delta x_\mu) \mathcal{L} \right] d^4x \simeq 0$$

On a

$$\partial_\mu \mathcal{L} \; \delta x_\mu + \partial_\mu (\delta x_\mu) \mathcal{L} = \partial_\mu (\mathcal{L} \, \delta x_\mu)$$

Alors,

$$\delta S = \int \left[\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta_o \phi \right) + \partial_\mu (\mathcal{L} \, \delta x_\mu) \right] d^4x \simeq 0$$

$$\delta S = \int \partial_\mu \left[\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta_o \phi \right) + \mathcal{L} \, \delta x_\mu \right] d^4x \simeq 0$$

$$\Rightarrow \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta_o \phi + \mathcal{L} \, \delta x_\mu \right] = 0$$

Cette dernière équation peut être écrite sous la forme

$$\partial_\mu J_\mu = 0$$

Avec,

$$J_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta_o \phi + \mathcal{L} \, \delta x_\mu \longrightarrow \text{ Courant de Noether}$$

<u>Exercice</u> 12 :

1. Montrer que la densité lagrangienne du champ scalaire complexe libre est invariante dans la transformation de phase globale suivante,

$$\begin{cases} \phi(x) \longrightarrow \phi'(x) = e^{i\theta} \phi(x) \\ \phi^*(x) \longrightarrow \phi'^*(x) = e^{-i\theta} \phi^*(x) \end{cases}$$

   où θ est un réel indépendants de x_μ.

2. Quels sont les courant et charge qui se conservent?

4.5 Tenseur Énergie-Impulsion du champ scalaire

Étant donner que densité lagrangienne $\mathcal{L}$ ne dépend pas explicitement du quadri-vecteur position x_μ, sa dérivée par rapport à x_μ est donnée par

$$\partial_\mu \mathcal{L} = \partial_\mu \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \quad \text{où} \quad \partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} \tag{4.101}$$

Donc,

$$\partial_\mu \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_\mu} \tag{4.102}$$

On a,

$$\partial_\mu \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}\frac{\partial \phi}{\partial x_\mu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \phi)}\frac{\partial(\partial_\nu \phi)}{\partial x_\mu} \tag{4.103}$$

Or, d'après l'équation d'Euler-Lagrange on a

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \phi)}\right) = 0 \quad \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = \partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \phi)}\right) \quad \text{pour} \qquad \mu = \nu \tag{4.104}$$

Donc,

$$\partial_\mu \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_\mu} = \partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \phi)}\right) \partial_\mu \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \phi)} \partial_\mu \left(\partial_\nu \phi\right) \tag{4.105}$$

On pose,

$$\partial_\mu \left(\partial_\nu \phi\right) = \partial_\nu \left(\partial_\mu \phi\right) \tag{4.106}$$

On trouve,

$$\partial_\mu \mathcal{L} = \partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \phi)}\right) \partial_\mu \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \phi)} \partial_\nu \left(\partial_\mu \phi\right) = \partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \phi)} \partial_\mu \phi\right) \tag{4.107}$$

Le terme $\partial_\mu \mathcal{L}$ peut être écrit aussi sous la forme:

$$\partial_\mu \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_\nu}\frac{\partial x_\nu}{\partial x_\mu} = \left(\partial_\nu \mathcal{L}\right) \delta_{\mu\nu} = \partial_\nu \left(\mathcal{L} \delta_{\mu\nu}\right) \tag{4.108}$$

Finalement, en comparant les équation (4.107) et (4.108), on trouve

$$\partial_\mu \mathcal{L} = \partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \phi)} \partial_\mu \phi\right) = \partial_\nu \left(\mathcal{L} \delta_{\mu\nu}\right) \tag{4.109}$$

Donc,

$$\partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \phi)} \partial_\mu \phi - \mathcal{L} \delta_{\mu\nu} \right) = 0 \tag{4.110}$$

Maintenant, si on remplace ν par μ

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\nu \phi - \mathcal{L} \delta_{\mu\nu} \right) = 0 \tag{4.111}$$

Cette dernière équation peut être réécrite sous la forme suivante,

$$\partial_{\mu\nu} T_{\mu\nu} = 0 \text{ avec } T_{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\nu \phi - \mathcal{L} \delta_{\mu\nu} \tag{4.112}$$

Où $T_{\mu\nu}$ représente le tenseur énergie-impulsion du champ scalaire.

Équation de Dirac

5.1 Introduction

Afin d'éviter de travailler avec des particules ayant des énergies négatives, comme c'était le cas pour l'hamiltonien (l'énergie totale) à partir duquel on a pu avoir l'équation de Klein-Gordon pour une particule libre, Paul Dirac proposa en 1928 d'écrire la forme générale de l'hamiltonien sous la forme suivante:

$$H_{Dirac} = \overrightarrow{\alpha}.\overrightarrow{p}c + \beta mc^2 = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i.p_i c + \beta mc^2 = \alpha_i.p_i c + \beta mc^2 \tag{5.1}$$

où les coefficients β et α_i sont des constantes qui ne commutent pas.
- Cherchons les valeurs de ces deux constantes.
En Calculant le carré de l'hamiltonien de Dirac H^2_{Dirac}, on retrouve l'expression suivante

$$H^2 = \left(\alpha_i.p_i c + \beta mc^2\right)\left(\alpha_j.p_j c + \beta mc^2\right) = \overrightarrow{p}^2 c^2 + m^2 c^4 \tag{5.2}$$

$$H^2 = p_i p_j \alpha_i \alpha_j c^2 + \beta^2 mc^2 c^4 + mc^3 p_i \left(\beta\alpha_j + \alpha_j \beta\right) = \overrightarrow{p}^2 c^2 + m^2 c^4 \tag{5.3}$$

- On remarque par comparaison que

$$\beta^2 = 1 \Longrightarrow \beta\beta^{-1} = 1 \Longrightarrow \beta = \beta^{-1} \tag{5.4}$$

$$\beta\alpha_j + \alpha_j\beta = 0 \tag{5.5}$$

$$p_i p_j \alpha_i \alpha_j = p^2 \tag{5.6}$$

Pour $i = j = 1, 2, 3$ on trouve:

$$p_i p_j \alpha_i \alpha_j = p_1^2 \alpha_1^2 + p_2^2 \alpha_2^2 + p_1 p_2 \left(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_1\right) + p_1 p_3 \left(\alpha_1\alpha_3 + \alpha_3\alpha_1\right) + p_2 p_3 \left(\alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_2\right) \tag{5.7}$$

$$p_i p_j \alpha_i \alpha_j = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 \tag{5.8}$$

Pour (5.7) soit égale à (5.8), il faut que

$$\alpha_1^2 = \alpha_2^2 = \alpha_3^2 = 1 \tag{5.9}$$
$$\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_1 = \alpha_1\alpha_3 + \alpha_3\alpha_1 = \alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_2 = 0 \tag{5.10}$$

Donc, si on pose $\alpha_i^2 = 1$ où $i = 1, 2, 3$ alors

$$\{\alpha_i, \alpha_j\} = 2\delta_{ij} \tag{5.11}$$

où $\{A, B\} = AB + BA$ est l'anticommutateur des deux grandeurs A et B.
Finalement les constantes sans dimensions α_i et β vérifient les relation d'anti-commutation suivantes

$$\beta^2 = 1 \tag{5.12}$$
$$\{\beta, \alpha_i\} = 0 \tag{5.13}$$
$$\{\alpha_i, \alpha_j\} = 2\delta_{ij} \tag{5.14}$$
$$\alpha_i^2 = 1 \tag{5.15}$$
$$\tag{5.16}$$

Donc,

$$\alpha_1^2 = \alpha_2^2 = \alpha_3^2 = \beta^2 = 1, \tag{5.17}$$
$$\{\alpha_1, \alpha_2\} = \{\alpha_1, \alpha_3\} = \{\alpha_2, \alpha_3\} = \{\beta, \alpha_1\} = \{\beta, \alpha_2\} = \{\beta, \alpha_3\} = 0, \tag{5.18}$$

5.2 Équation de Dirac libre

On va essayer dans ce qui suit de retrouver l'équation de Dirac, à partir de l'équation d'évolution de Schrodinger,

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = H_{Shrodinger}\psi, \quad \text{avec} \qquad H_{Shrodinger} = -\frac{\hbar^2}{2m}\overrightarrow{\nabla}^2 \tag{5.19}$$

L'hamiltonien de Dirac étant donné par,

$$H_{Dirac} = \alpha_i . p_i c + \beta\, mc^2 \tag{5.20}$$

et

$$\overrightarrow{p} = -i\hbar\overrightarrow{\nabla} = -i\hbar\overrightarrow{\partial} = -i\,\hbar\,\partial_i \tag{5.21}$$

On a aussi

$$\partial_4 = \frac{-i}{c}\frac{\partial}{\partial t} \Longrightarrow i\frac{\partial}{\partial t} = -c\,\partial_4 \tag{5.22}$$

En remplaçant dans (5.19), on obtient

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left(\alpha_i.p_i c + \beta\, mc^2\right)\psi \Longrightarrow -c\,\hbar\,\partial_4\psi = \left(-i\,\hbar\,\alpha_i\,\partial_i\,c + \beta\, mc^2\right)\psi \tag{5.23}$$

Si on devise les deux membres de l'équation (5.23) par c, on obtient

$$-\hbar\,\partial_4\psi = \left(-i\,\hbar\,\alpha_i\,\partial_i + \beta\,m\,c\right)\psi \tag{5.24}$$

Maintenant, si on devise les deux membres de l'équation (5.24) par β, on obtient

$$-\beta\,\hbar\,\partial_4\psi = \left(-i\,\beta\,\hbar\,\alpha_i\,\partial_i + m\,c\right)\psi \text{avec} \quad \beta = \beta^{-1} \tag{5.25}$$

$$\left(\partial_4\,\beta + \partial_i\left(-i\,\beta\,\alpha_i\right) + \frac{m\,c}{\hbar}\right)\psi = 0 \tag{5.26}$$

$$\left(\partial_4\,\gamma^4 + \partial_i\,\gamma^i + \frac{m\,c}{\hbar}\right)\psi = 0 \tag{5.27}$$

Avec

$$\gamma^4 = \beta \tag{5.28}$$

$$\gamma^i = -i\,\beta\,\alpha_i \tag{5.29}$$

Finalement, on trouve

$$\left(\partial_4\,\gamma^4 + \partial_i\,\gamma^i + m\right)\psi = 0 \quad \text{avec} \quad \hbar = c = 1 \tag{5.30}$$

En utilisant l'expression des deux quadr-vecteurs

$$\partial_\mu = \left(\partial_i, \partial_4\right) \tag{5.31}$$

$$\gamma^\mu = \left(\gamma^i, \gamma^4\right) \tag{5.32}$$

où

$$\left(\partial_i, \partial_4\right)\cdot\left(\gamma^i, \gamma^4\right) = \partial_4\,\gamma^4 + \partial_i\,\gamma^i \tag{5.33}$$

L'équation peut être réécrite comme suit

$$\left(\partial_\mu \, \gamma^\mu + m\,\right) \psi = 0 \tag{5.34}$$

Cette dernière équation représente l'équation de Dirac pour une particule libre.
Si on pose

$$\not{\partial} = \partial_\mu \, \gamma^\mu \tag{5.35}$$

On obtient

$$(\not{\partial} + m\,)\,\psi(x) = 0 \quad \text{avec} \quad \psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \\ \psi_3(x) \\ \psi_4(x) \end{pmatrix} \longrightarrow \quad \text{spineur de dirac} \tag{5.36}$$

Donc les matrices de Dirac possèdent les propriétés suivantes: pour $\mu, \nu = 1, 2, 3, 4$

$$\begin{aligned} (\gamma^\mu)^+ &= \gamma^\mu & (5.37) \\ (\gamma^\mu)^2 &= 1 & (5.38) \\ \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} &= 2\delta_{\mu\nu} & (5.39) \end{aligned}$$

5.3 Interprétation physique des énergies négatives

L'intérêt de travailler avec des vecteurs à composantes (spineurs) réside dans le fait que pour des fermions (électrons), deux composantes du spineurs de Dirac permettent de décrire les deux états ($\pm\frac{1}{2}$) du spin de la particule ayant une énergie ($\sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$). Les deux autres composantes du spineur permettent de décrire l'état du spin de l'anti-particule ayant une énergie ($-\sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$).
L'anti-particule traduit tout simplement l'absence de matière (trou).
Exemple: Si une particule passe d'un niveau d'énergie bas à un niveau d'énergie plus haut. Le vide laissé par la particule (trou) est interprété comme étant l'anti-particule d'énergie ($E = -\sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$), appelée aussi positron. Un positron possède en fait la même masse que l'électron et une charge positive ($+q$).

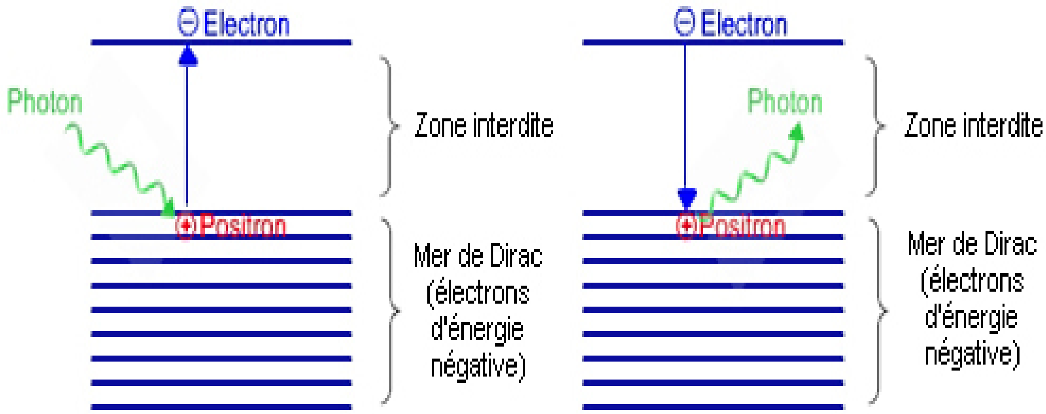


Figure 5.1: Schéma de la mer de Dirac.

Lorsque un électron revient à son état initial, il libère un photon d'énergie ($h\nu$)

$$e^- + e^+ \longrightarrow \gamma \tag{5.40}$$

Ce processus est appelé phénomène d'annihilation. Ce phénomène peut être rencontré dans les accélérateurs de particules, où des électrons et des positrons sont accélérés à des vitesses proches de la vitesse de la lumière, puis on les fait rentrés en collision pour donner naissance à de nouvelles particules (pions, mésons, $\cdots$) ayant des durées de vies infiniment petite

5.4 Représentation standard

L'écriture des matrices de Dirac dans la représentation standard est donnée par

$$\gamma^k = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & -i\sigma_k \\ i\sigma_k & \mathbb{O} \end{pmatrix} \tag{5.41}$$

$$\gamma^4 = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & -\mathbb{I} \end{pmatrix} \tag{5.42}$$

où σ_k sont les matrices de Pauli (matrices 2×2), données par

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{5.43}$$

et

$$\mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \text{matrice unitaire}, \qquad \mathbb{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.44}$$

Exercice 13 :

1. Donner la forme explicite des matrices de Dirac suivantes: γ^1, γ^2, γ^3 et γ^4.
2. Montrer que

$$(\gamma^\mu)^+ = \gamma^\mu, \quad (\gamma^\mu)^1 = 1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\delta_{\mu\nu} \tag{5.45}$$

5.5 Courant de l'équation de Dirac libre

Cherchons l'expression du courant associé à l'équation de Dirac, vérifiant l'équation de continuité donnée par

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \Longrightarrow \partial_\mu J_\mu = 0 \quad \text{avec} \quad \mu = 1, 2, 3, 4 \tag{5.46}$$

On a aussi l'équation de Dirac est donnée par

$$(\not{\partial} + m)\, \psi(x) = 0 \Longrightarrow (\partial_\mu \gamma^\mu + m)\, \psi(x) = 0 \tag{5.47}$$

- Calculons le conjugué de l'équation de Dirac, on trouve

$$\left[(\partial_\mu \gamma^\mu + m)\, \psi(x) \right]^* = 0 \Longrightarrow \psi^+(x) \left(\partial_\mu^* \, (\gamma^\mu)^+ + m \right) = 0 \tag{5.48}$$

On a

$$\partial_\mu = (\partial_i, \partial_4) \Longrightarrow \partial_\mu^* = (\partial_i^*, \partial_4^*) \tag{5.49}$$

avec

$$\partial_i^* = \partial_i, \quad \partial_4^* = -\partial_4 \tag{5.50}$$

Donc
$$\partial_\mu^* = (\partial_i, -\partial_4) \tag{5.51}$$
et
$$\gamma^\mu = \left(\gamma^i, \gamma^4\right) \Longrightarrow (\gamma^\mu)^+ = \gamma^\mu = \left(\gamma^i, \gamma^4\right) \tag{5.52}$$
Alors,
$$\partial_\mu^* \, (\gamma^\mu)^+ = \partial_i \, \gamma^i - \partial_4 \, \gamma^4 \tag{5.53}$$
En remplaçant (5.53) dans (5.48) on trouve,
$$\psi^+(x) \left(\partial_i \, \gamma^i - \partial_4 \, \gamma^4 + m \right) = 0 \tag{5.54}$$
En multipliant les deux membres de l'équation (5.54) par (γ^4), on trouve
$$\left[\psi^+(x) \left(\partial_\mu^* \, (\gamma^\mu)^+ + m \right) = 0\right] \times \gamma^4 \tag{5.55}$$
$$\psi^+(x) \left(\partial_i \, \gamma^i \gamma^4 - \partial_4 \, \gamma^4 \gamma^4 + m \, \gamma^4\right) = 0 \tag{5.56}$$
Or
$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2 \, \delta_{\mu\nu} \Longrightarrow \{\gamma^1, \gamma^4\} = \gamma^1\gamma^4 + \gamma^4\gamma^1 = 0 \Longrightarrow \gamma^1\gamma^4 = -\gamma^4\gamma^1 \tag{5.57}$$
Donc,
$$\psi^+ \left(-\gamma^4 \, \partial_i \, \gamma^i - \gamma^4 \, \partial_4 \, \gamma^4 + \gamma^4 \, m\right) = 0 \Longrightarrow \tag{5.58}$$
$$\psi^+ \, \gamma^4 \left(-\partial_i \, \gamma^i - \partial_4 \, \gamma^4 + m\right) = 0 \Longrightarrow \psi^+ \, \gamma^4 \left(-\partial_\mu \, \gamma^\mu + m\right) = 0 \tag{5.59}$$
Si on pose $\overline{\psi} = \psi^+ \, \gamma^4$, l'équation adjointe de l'équation de Dirac libre devient
$$\overline{\psi} \left(-\partial_\mu \, \gamma^\mu + m\right) = 0 \Longrightarrow \overline{\psi} \left(\partial_\mu \, \gamma^\mu - m\right) = 0 \tag{5.60}$$
qu'on peut écrire sous la forme finale suivante,
$$\overline{\psi} \left(\overleftarrow{\not\partial} - m\right) = 0 \tag{5.61}$$
Maintenant en multipliant l'équation (5.47) par $\overline{\psi}$ et l'équation (5.61) par ψ on trouve
$$\overline{\psi} \left(\partial_\mu \, \gamma^\mu + m \right) \psi = 0 \tag{5.62}$$

$$\overline{\psi}\left(\partial_{\mu}\,\gamma^{\mu}-m\right)\psi=0 \tag{5.63}$$

En calculant la somme des deux équations (5.62) (5.63) on trouve,

$$\overline{\psi}\left(\partial_{\mu}\,\gamma^{\mu}+m\,\right)\psi+\overline{\psi}\left(\partial_{\mu}\,\gamma^{\mu}-m\right)\psi=0\Longrightarrow \tag{5.64}$$

$$\overline{\psi}\,\overleftarrow{\partial_{\mu}}\,\gamma^{\mu}\psi+m\overline{\psi}\,\psi+\overline{\psi}\,\overrightarrow{\partial_{\mu}}\,\gamma^{\mu}\psi-m\overline{\psi}\psi=0\Longrightarrow \tag{5.65}$$

$$\partial_{\mu}\left(\overline{\psi}\,\gamma^{\mu}\,\psi\right)=0\Longrightarrow\partial_{\mu}J_{\mu}^{Dirac}=0 \tag{5.66}$$

avec

$$J^{Dirac}=k\,\overline{\psi}\,\gamma^{\mu}\,\psi=i\,\overline{\psi}\,\gamma^{\mu}\,\psi\quad avec\quad k=i \tag{5.67}$$

5.5.1 Vecteur impulsion- charge totale

Calculons les expressions des composantes du vecteur impulsion de j_4 et j_i

$$J_4=i\,\overline{\psi}\,\gamma^4\,\psi=i\,\psi^+\,\gamma^4\,\gamma^4\,\psi=i\,\psi^+\,\psi=\rho \tag{5.68}$$

$$J_i=i\,\overline{\psi}\,\gamma^i\,\psi=i\,\psi^+\,\gamma^4\,\gamma^i\,\psi \tag{5.69}$$

Or

$$\gamma^i=-i\,\beta\,\alpha_i,\quad\beta=\gamma^4\Longrightarrow\gamma^i=-i\,\gamma^4\,\alpha_i\Longrightarrow \tag{5.70}$$

$$\gamma^4\,\gamma^i=-i\,\gamma^4\,\gamma^4\,\alpha_i\Longrightarrow\alpha_i=i\,\gamma^4\,\gamma^i \tag{5.71}$$

Donc

$$J_i=\psi^+\,\alpha_i\,\psi\Longrightarrow\overrightarrow{J}=\psi^+\,\overrightarrow{\alpha}\,\psi \tag{5.72}$$

Finalement, la charge totale est donnée par

$$Q=\int d^3x\,\rho=i\int d^3x\,\psi^+\,\psi \tag{5.73}$$

5.6 Équation de Dirac en présence d'un champ électromagnétique extérieur

Afin de retrouver l'équation de Dirac en présence d'un champ électromagnétique extérieur A_μ, on utilise la méthode du couplage minimal

$$\partial_\mu \to \partial_\mu - iqA_\mu \tag{5.74}$$

$$\left(\partial\!\!\!/ + m \right) \psi(x) = 0 \Longrightarrow \left(\partial_\mu \gamma^\mu + m \right) \psi(x) = 0 \tag{5.75}$$

En remplaçant (5.74) dans (5.75) on trouve,

$$\left(\left(\partial_\mu - iqA_\mu \right) \gamma^\mu + m \right) \psi(x) = 0 \Longrightarrow \left(\partial_\mu \gamma^\mu - iqA_\mu \gamma^\mu + m \right) \psi(x) = 0 \tag{5.76}$$

$$\left(\partial\!\!\!/ - iq \; A\!\!\!/ + m \right) \psi(x) = 0 \tag{5.77}$$

c'est l'équation de Dirac en présence d'un champ électromagnétique extérieur A_μ.

5.7 Lagrangien du champ spinoriel complexe

Il est possible de retrouver les équation de Dirac et l'équation Dirac adjointe en utilisant la formulation lagrangienne. Notre choix du lagrangien est le suivant

$$\mathcal{L}(\psi, \partial_\mu \psi, \overline{\psi}, \partial_\mu \overline{\psi}, x_\mu) = -\overline{\psi}\,(\not{\partial} + m\,)\,\psi \tag{5.78}$$

<u>Vérification</u>: Vérifions que cette densité lagrangienne nous permet d'avoir les équations de mouvement du champs spinoriel complexe libre $(\psi, \overline{\psi})$. Pour faire cette vérification, il faut remplacer l'expression de la densité lagrangienne dans les équations d'Euler-Lagrange pour un champ,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) = 0 \quad \text{avec} \quad \phi_i = \psi = \overline{\psi} \tag{5.79}$$

Donc, à chaque valeurs de ϕ_i correspond une équation de mouvement

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)} \right) = 0 \longrightarrow \text{permet d'avoir l'équation adjointe de Dirac,} \tag{5.80}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \overline{\psi}} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \overline{\psi})} \right) = 0 \longrightarrow \text{permet d'avoir l'équation de Dirac,} \tag{5.81}$$

1- Retrouvons l'équation adjointe

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \overline{\psi}} = -\partial_\mu \gamma^\mu - m\,\psi, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \overline{\psi})} = 0 \tag{5.82}$$

alors

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \overline{\psi}} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \overline{\psi})} \right) = 0 \Longrightarrow -\left(\partial_\mu\,\gamma^\mu + m\,\right)\psi = 0 \Longrightarrow (\not{\partial} + m\,)\,\psi = 0 \tag{5.83}$$

2- Retrouvons l'équation de Dirac,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = -m\,\overline{\psi}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)} = -\overline{\psi}\gamma^\mu \tag{5.84}$$

alors

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)} \right) = 0 \Longrightarrow -m\,\overline{\psi} + \overline{\psi}\gamma^\mu \Longrightarrow \overline{\psi}\left(\overleftarrow{\partial_\mu}\,\gamma^\mu - m\right) = 0 \Longrightarrow \overline{\psi}\left(\overleftarrow{\not{\partial}} + m\right) = 0 \tag{5.85}$$

Donc la densité lagrangienne du champ spinoriel complexe libre est donnée par

$$\mathcal{L} = -\overline{\psi}\,(\not{\partial} + m\,)\,\psi = -\overline{\psi}\,\left(\partial_\mu\,\gamma^\mu + m\,\right)\,\psi = -\overline{\psi}\overrightarrow{\partial_\mu}\,\gamma^\mu\psi - m\overline{\psi}\psi \tag{5.86}$$

5.8 Lagrangien du champ spinoriel complexe en présence d'un champ électromagnétique extérieur

Afin d'avoir les deux équations de mouvement des champs spinoriels ψ et $\overline{\psi}$, en présence d'un champ électromagnétique extérieur A_μ, on utilise la densité lagrangienne suivante,

$$\mathcal{L} = -\overline{\psi}\,(\not{\partial} - iq\,\not{A} + m\,)\,\psi = -\overline{\psi}\,\left(\partial_\mu\,\gamma^\mu - iq\,A_\mu\gamma^\mu + m\,\right)\,\psi \tag{5.87}$$

qu'on peut écrire sous la forme,

$$\mathcal{L} = -\overline{\psi}\overrightarrow{\partial_\mu}\,\gamma^\mu\psi - iq\,A_\mu\,\gamma^\mu\,\overline{\psi}\psi + m\overline{\psi}\psi \tag{5.88}$$

Rappelons que les équations de Dirac et l'équation de Dirac adjointe en présence d'un champ électromagnétique extérieur sont données par,

$$(\not{\partial} - iq\,\not{A} + m\,)\,\psi(x) = 0 \tag{5.89}$$

$$\overline{\psi}\left(\overleftarrow{\not{\partial}} + iq\,\not{A} - m\right) = 0 \tag{5.90}$$

<u>**Vérification**</u>: Vérifions que cette densité lagrangienne nous permet d'avoir les équations de mouvement du champs spinoriel complexe en présence d'un champ électromagnétique. Pour faire cette vérification, il faut remplacer l'expression de la densité lagrangienne dans les équations d'Euler-Lagrange pour un champ,

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right) = 0 \quad \text{avec} \quad \phi_i = \psi = \overline{\psi} \tag{5.91}$$

Donc, à chaque valeurs de ϕ_i correspond une équation de mouvement

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\right) = 0 \tag{5.92}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \overline{\psi}} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \overline{\psi})} \right) = 0 \tag{5.93}$$

1- Retrouvons l'équation adjointe

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \overline{\psi}} = -\left(\partial\!\!\!/ - iq \; A\!\!\!/ + m \right) \psi, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \overline{\psi})} = 0 \tag{5.94}$$

alors

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \overline{\psi}} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \overline{\psi})} \right) = 0 \Longrightarrow -\left(\partial\!\!\!/ - iq \; A\!\!\!/ + m \right) \psi = 0 \Longrightarrow \left(\partial\!\!\!/ - iq \; A\!\!\!/ + m \right) \psi = 0 \tag{5.95}$$

2- Retrouvons l'équation de Dirac,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = iq \, A_\mu \, \gamma^\mu \, \overline{\psi} - m \, \overline{\psi}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)} = -\overline{\psi} \gamma^\mu \tag{5.96}$$

alors

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)} \right) = 0 \Longrightarrow iq \, A_\mu \, \gamma^\mu \, \overline{\psi} - m \, \overline{\psi} + \overline{\psi} \gamma^\mu = 0 \Longrightarrow \overline{\psi} \left(\overleftarrow{\partial\!\!\!/} + iq \, A_\mu \, \gamma^\mu - m \right) = 0 \tag{5.97}$$

5.9 Exercices d'application

Exercice 14 :

1^o/ En présence d'un champ électromagnétique extérieur A_μ, la dynamique d'une particule relativiste de charge q, de masse m et de spin non nul, peut être décrite par la densité lagrangienne du champ spinoriel suivante:

$$\mathcal{L}_2 = -\bar{\psi}(\partial\!\!\!/ - iq \; A\!\!\!/ + m)\psi = -\psi^\dagger \gamma^4 (\partial_\mu \gamma^\mu - iq A_\mu \gamma^\mu + m)\psi$$

1. Retrouver les équations de mouvement, en utilisant les équations d'Euler-Lagrange.

2^o/ En absence du champ électromagnétique, la dynamique de la particule libre peut être décrite par

$$\mathcal{L}_3 = -\bar{\psi} \; \partial\!\!\!/ \psi = -\psi^\dagger \gamma^4 \partial_\mu \gamma^\mu \psi$$

1. Montrer que cette densité lagrangienne est invariante dans la transformation de phase suiv-

ante:

$$\begin{cases} \psi(x) \longrightarrow \psi^{'}(x) = e^{-i\theta\gamma^5}\psi(x) \\ \bar{\psi}(x) \longrightarrow \bar{\psi}^{'}(x) = \bar{\psi}(x)e^{-i\theta\gamma^5} \quad , \quad \theta \text{ est une constante.} \end{cases}$$

ou $\gamma^5 = \gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^4$ et vérifie les relations: $\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0$, $\left(\gamma^5\right)^\dagger = \gamma^5$ et $(\gamma^5)^2 = 1$.

2. Utiliser le Théorème de Noether pour retrouver les constantes de mouvement associées à cette transformation.

3^o/ Si on pose:

$$\begin{cases} \psi_L(x) = \left(\frac{1+\gamma^5}{2}\right)\psi(x) \\ \psi_R(x) = \left(\frac{1-\gamma^5}{2}\right)\psi(x) \end{cases}$$

1. Réécrire l'expression de la densité lagrangienne $\mathcal{L}_3$ en fonction de ψ_L et ψ_R.
2. Étudier l'invariance de la densité lagrangienne $\mathcal{L}_3$ dans la transformation de phase suivante:

$$\begin{cases} \psi_L(x) \longrightarrow \psi_L^{'}(x) = \psi_L(x)e^{-i\alpha} \\ \psi_R(x) \longrightarrow \psi_R^{'}(x) = \psi_R(x) \quad , \quad \alpha \text{ est une constante.} \end{cases}$$

Liste de Références

1. J. P. Derendinger, Théorie quantique des champs, Presses polytechnique et universitaires romandes, 2001.
2. S. Weinberg, Quantum theory of fields, 3 vols, Cambridge University Press, 1995,1996
3. J. J. Sakurai, Advanced quantum rnechanics, Addison-Wesley, 1967
4. J. D. Bjorken and S.D. Drell, Relativistic quantum fields, McGraw-Hill, 1965
5. F. Mandl et G.Shaw., Quantum field theory, Addison-Wesley, 1993
6. N. N. Bogoliubov, D. V. Shirkov, Introduction to the Theory of Quantized Fields (Interscience Monographs in Physics and Astronomy), John Wiley & Sons, 1959
7. R. Balian, du microscopique au macroscopique, vol. 2. École polytechnique, ellipses, 1982