جامعة الجيلالي بونعامة – خميس مليانة

كلية العلوم الاقتصادية، التجارية وعلوم التسيير

محاضرات في الإحصاء 02

تمارين مع أمثلة تطبيقية للإحصاء الرياضياتي

لطلبة السنة الأولى جدع مشترك علوم اقتصادية
وتجارية وعلوم التسيير

من إعداد:

د. جمال سعيداني

أستاذ محاضر "أ" بكلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير
بجامعة الجيلالي بونعامة – خميس مليانة

2021/2020

كلمة الباحث:

هذه المطبوعة لمقياس احصاء 02 هي نتيجة لتدريسي هذه المادة على مدار سنوات لطلبة السنة الأولى ل-م-د جذع مشترك في كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير اشتملت على الجانبين النظري مع امثلة تطبيقية زائد تمارين محلولة وغير محلولة، وتم توزيعها إلى محاور مقياس إحصاء 02 –الاحصاء الرياضياتي– للسداسي الثاني في خمسة فصول.

الفصل الاول بمثابة مدخل تمهيدي للعد والتحليل التوفيقي، الفصل الثاني تجسد في طريقة حساب الاحتمالات، الفصل الثالث تمثل في المتغيرات العشوائية ، أما الفصل الرابع فخصص لتوزيعات الاحتمالية والفصل الخامس: المتغيرات الثنائية.

قائمة المحتويات

مقدمة 5

الفصل الأول: التحليل التوافقي 7

1. قاعدتي الجمع والضرب 7
2. التبديلات (المتبادلات) 8
3. الترتيبة 9
4. التوفيقات 10
5. تمارين محلولة 12
6. تمارين 18

الفصل الثاني: الاحتمالات 21

1. التجربة والاحتمال 21

2. التعبير الرياضياتي للاحتمالات 24

1.2. استخدام نظرية المجموعات للتعبير عن الأحداث العشوائية 24
2.2. التعبير الرياضياتي عن قواعد حساب الاحتمالات 25
3.2. نظرية بايز 28
4.2. التعبير الهندسي عن الاحتمالات 30

3. تمارين محلولة 32
4. تمارين 37

الفصل الثالث: المتغيرات العشوائية 39

1. المتغير العشوائي المنفصل 39
1.1. دالة التوزيع التراكمية (تابع التوزيع) 40
2.1. التوقع الرياضياتي والتباين 42
2. المتغير العشوائي المتصل 44
1.2. دالة الكثافة الاحتمالية 44
2.2. دالة التوزيع 45
3.2. التوقع الرياضياتي والتباين 46
3. تمارين محلولة 48

4. تمارين 58

الفصل الرابع: التوزيعات الاحتمالية 60

1. التوزيعات الاحتمالية المتقطعة 60

1.1. التوزيع المنتظم المتقطع 60

2.1. توزيع برنولي 60

3.1. توزيع ثنائي الحد 61

4.1. توزيع بواسون 64

2. التوزيعات الاحتمالية المتصلة 67

1.2. التوزيع الأسي 67

2.2. التوزيع الطبيعي 69

3.2. توزيع قاما 73

4.2. توزيع بيتا 74

3. تمارين محلولة 77

4. تمارين 87

الفصل الخامس: المتغيرات الثنائية 89

1. قانون الثنائية لمتغير منفصل (متقطع) 89

1.1. دالة الكثافة الاحتمالية والحدية 89

2.1. الدالة التوزيع التراكمية 91

3.1. التوزيع الشرطي 92

2. التوزيعات المشتركة 94

1.2. التوزيعات المشتركة المتصلة 94

2.2. دالة التوزيع التراكمية 94

3.2. الدوال الهامشية او الحدية 96

4.2. التوزيع الشرطي 96

3. تمارين محلولة 97

4. تمارين 107

قائمة المراجع 109

مقدمة

الإحصاء علم يهتم بالمعلومات والبيانات –ويهدف إلى تجميعها وتبويبها وتنظيمها وتحليلها واستخلاص النتائج منها بل وتعميم نتائجها– واستخدامها في اتخاذ القرارات، وأدى التقدم في تكنولوجيا المعلومات واستخدام الحاسوب إلى مساعدة الدارسين والباحثين ومتخذي القرار في الوصول إلى درجات عالية من التحليل ووصف الواقع ومتابعته ثم إلى التنبؤ بالوضعيات المستقبلية.

ولم تعد البحوث الاقتصادية والاجتماعية والإدارية وغيرها في وقتنا المعاصر، وفي ظل التقدم التكنولوجي الهائل في كافة الميادين، تكتفي بمجرد عرض المشاكل ودراسة الظواهر وتحديد الأسباب واستخلاص النتائج واتخاذ القرارات بطريقة سطحية مجردة عن أسلوب الإقناع والتقدير والقياس.

لقد أصبح الاتجاه العام في مثل هذه البحوث والدراسات هو استخدام طرق القياس الكمية ووسائل الإقناع الإحصائية وذلك لتحديد الخصائص وإبراز الاتجاهات العامة في الظواهر الاجتماعية والإدارية، وتحليل العلاقات المتشابكة والمتبادلة بين الظواهر علي أساس موضوع غير متميز. فعلم الإحصاء يعطي للباحثين في مجال العلوم الاقتصادية والاجتماعية والإدارية، العديد من الطرق والأساليب اللازمة لضرورة القيام بالدراسات والبحوث الاقتصادية والاجتماعية والإدارية والجغرافية علي أساس من القياس لحركة العديد من المتغيرات المحددة للظواهر موضوع الدراسة.

تشير كلمة إحصاء02 إلي عملية تحديد النماذج الاحتمالية للظواهر القابلة للقياس هذا بعد معالجة البيانات، وهدف هذا المقياس هو تقديم علم الإحصاء الرياضياتي، أي الأساس الرياضياتي للإحصاء التطبيقي.

ولقد حاولنا أن نستفيد من التجربة لصياغة محتوى المقياس بطريقة تلائم مستوى طلبة كلية العلوم الاقتصادية، لتحقيق هذا الغرض حرصنا على ربط المفاهيم والقواعد النظرية باستخداماتها التطبيقية؛ فعملنا على إعطاء أمثلة محلولة عن كل مفهوم جديد بالإضافة الى تمارين محلولة. و لأن فهم القواعد الرياضية يكون أسهل إذا كان للمتلقي خلفية عن المشكلة التي يحتاج حلها إلى استخدام هذه القواعد، عملنا في كثير من الأحيان إلى التقديم لبعض الدروس أو النظريات بمسألة تكون بمثابة التمهيد، وأحيانا بمثابة مشكلة ننطلق منها لنتوصل إلى النظرية. هذا وننبه طلبتنا الأعزاء إلى أنه يفترض بهم عند دراسة الإحصاء الرياضياتي أن يكونوا قادرين على استيعاب المفاهيم الرياضياتية بعموميتها ولا يبقوا خيالهم حبيس الأمثلة والمسائل المعطاة، فالإحصاء الرياضياتي غير الإحصاء التطبيقي الذي يعنى بتطبيقات هذه المفاهيم فيما بعد.

يتضمن البرنامج في خمسة فصول، الفصل الاول بمثابة مدخل تمهيدي لعد الحالات والتحليل التوفيقي، الفصل الثاني تجسد في طريقة حساب الاحتمالات، الفصل الثالث تمثل في المتغيرات العشوائية ، أما الفصل الرابع فخصص لتوزيعات الاحتمالية والفصل الخامس: المتغيرات الثنائية.

يهدف هذا المقياس إلى تعريف طلاب السنة الأول في ميدان العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير بعلم الإحصاء وأهميتها ودورها في تسهيل عمليات البحث الاقتصادية وفي التعامل مع مجتمع البحث بدءا من أخذ العينات وكيفية جدولة البيانات وتفريغها ووصفها (مقاييس النزعة المركزية والتشتت)، وذلك بهدف إكساب الطالب مجموعة من الخبرات تساعده في عرض نتائج البحوث الاقتصادية الكيفية والكمية بصورة محدده وواضحة ودقيقة؛ ذلك من خلال:

1- تعريف الإحصاء الرياضياتي وتبيان أهميته في البحث العلمي.

2- أنواع المتغيرات المختلفة وكيفية التفرقة بين كل نوع منها وتصنيفها.

3- القدرة على تبويب البيانات الإحصائية التي يحصل عليها في بحثه وايجاد الصيغة الاحتمالية لتمثيلها

4- القدرة على وصف وتحليل البيانات من خلال النموذج الاحتمالي لها يمكن اجراء مختلف العمليات الاحتمالية المساعدة غلى اتخاذ القرارات بشأن الحالات الاحتمالية التي يكون احتمال وقوعها عالي.

ولتحقيق ذلك الهدف يستلزم استخدام بعض الوسائل منها:

1- جهاز كمبيوتر وجهاز العرض (داتا شو).

2- سبورة بيضاء وأقلام ملونة.

ويتم قياس ذلك من خلال التقويم وفق الأساليب الآتية:

- مناقشات مع الطلبة
- أوراق عمل تتمة للبرنامج
- مجموعات عمل لحل التمارين
- الاختبار التحريري.

الفصل الأول: التحليل التوفيقي

نتطرق في هذا الفصل الى بعض طرق تحديد عدد نواتج الممكنة لتجربة معينة أو عدد العناصر في مجموعة ما بغير طريقة العد المباشر، وتسمى هذه الطرق بالتحليل التوفيقي، وهو مبني على قاعدتين اساسيتين.

1. قاعدتي الجمع والضرب:

أ. قاعدة الجمع (قاعدة "أو")

إذا كان بالإمكان إنجاز عملية ما بـ n طريقة وكان بالإمكان انجاز عملية ثانية تختلف عن الاولى بـ m طريقة، فإن إنجاز العملية الاولى أو الثانية تحدث بـ m+n طريقة.

مثال 01: لتكن لدينا مجموعة طلبة تتكون من اربعة طلبة ذكور A, B, C, D وأربعة طالبات E, F, G

المطلوب: بكم طريقة يمكن اختيار طالب أو طالبة من هذه المجموعة.

الحل: لدينا 4 طلبة اذا يوجد 4 امكانيات لاختيار طالب، ولدينا 3 طالبات اذا يوجد 3 امكانيات لاختيار طالبة. وبما أن المطلوب هو طالب "أو" طالبة نستخدم قاعدة الجمع، فيصبح عدد الامكانيات هو 7 امكانيات.   7=4+3.

(A) (B) (C) (D) (E) (F) (G)

ب. قاعدة الضرب (قاعدة "و")

إذا كان بالإمكان إنجاز عملية ما بـ n طريقة وكان بالإمكان انجاز عملية ثانية تختلف عن الاولى بـ m طريقة، فإن إنجاز العملية الاولى و الثانية مع بعضهما بـ n×m طريقة.

مثال 02: لتكن لدينا مجموعة طلبة تتكون من اربعة طلبة ذكور A, B, C, D وأربعة طالبات E, F, G

المطلوب: بكم طريقة يمكن اختيار طالب وطالبة من هذه المجموعة.

الحل: لدينا 4 طلبة اذا يوجد 4 امكانيات لاختيار طالب، ولدينا 3 طالبات اذا يوجد 3 امكانيات لاختيار طالبة. وبما أن المطلوب هو طالب "و" طالبة نستخدم قاعدة الضرب، فيصبح عدد الامكانيات هو 12 امكانية.   12=4×3.

$$\begin{cases} A \begin{cases} E \\ F \\ G \end{cases} \\ B \begin{cases} E \\ F \\ G \end{cases} \\ C \begin{cases} E \\ F \\ G \end{cases} \\ D \begin{cases} E \\ F \\ G \end{cases} \end{cases}$$

{(AE) (AF) (AG) (BE) (BF) (BG) (CE) (CF) (CG) (DE) (DF) (DG)}

تعميم:

- اذا كان لدينا تجربة1 (E1) تتم بـ N_1 طريقة، تجربة2 (E2) بـ N_2 طريقة، ... حتى التجربةK (EK) بـ N_K طريقة فإن K عملية تتم وتحدث معا بـ: $N_1\times N_2\times\ldots\times N_K$ طريقة.
- اذا كان لدينا تجربة1 (E1) تتم بـ N_1 طريقة، تجربة2 (E2) بـ N_2 طريقة، ... حتى التجربةK (EK) بـ N_K طريقة فإن E1 او E2 او ... او EK عملية تتم بـ: $N_1+N_2+\ldots+N_K$ طريقة.

2. التبديلات (المتبادلات):

لتكن لدينا المجموعة E تتكون من ثلاثة عناصر A, B, C، اذا كان اهتمامنا هو عدد الطرق التي يمكن ان نرتب بها عناصر هذه المجموعة، فان ايجاد عدد الطرق باستخدام الشكل الموالي

لدينا ثلاثة خانات لتستوعب العناصر الثلاثة لهذه المجموعة، حيث عدد الخانات على حسب الحاجة، ثم نقوم بكتابة داخل كل خانة عدد الامكانيات لشغلها.

عدد الامكانيات	3	2	1
رقم الخانة	01	02	03

الخانة رقم 01 لديها ثلاثة امكانيات (A او B او C) وبعد تثبيت احد العناصر في الخانة رقم 01 يبقى عنصرين مرشحين لشغل الخانة رقم 02 وبعدها تثبيت احد العنصرين في الخانة رقم 02 يبقى عنصر واحد لشغل الخانة رقم 03.

وعليه يكون العد بطريقة الضرب لوجود و في العد: لدينا 3 امكانيات لشغل الخانة 01 و إمكانيتين لشغل الخانة 02 وإمكانية واحدة لشغل الخانة الاخيرة، أي 3×2×1= 3! =6.

اذن لدينا 6 طرق لترتيب هذه العناصر الثلاثة.

نلاحظ أن العناصر الثلاثة مختلفة أي بدون تكرار لها.

تعميم:

نسمي ترتيب n من العناصر المختلفة بأنها تبديلة بدون تكرار، بشرط أن تؤخذ جميع العناصر n، فعدد المجموعات التي يمكن تشكيلها من هذه العناصر التي تختلف باختلاف ترتيب أحدها على الأقل، ونكتب

$$p_n = n!$$

حيث العاملي (!) هو جداء للحدود المتتالية المتناقصة الى غاية الواحد.

$$n! = n(n-1)(n-2)(n-3)\times \ldots.\times 3\times 2\times 1$$

$0! = 1$; $1! = 1$; $2! = 2$; $3! = 6$; $4! = 24$

$5! = 120$; $6! = 720$; $7! = 5040$

في حالة وجود التكرار نسميها تبديلة بتكرار:

في بعض الحالات لا يمكن أن نفرق بين عناصر المجموعة n أي عندما تكون العناصر متماثلة .في هذه الحالة يمكن معرفة عدد التبديلات من خلال الصيغة الموالية:

$$p_n^{n_1,n_2,n_3,\ \dots n_k} = \frac{n!}{n_1! \times n_2! \times n_3! \times \dots \times n_k!}$$

حيث ان $n_1 n_2 n_3 \dots n_k$ هي عدد تكرار العناصر المتشابهة او المتماثلة ومجموعها يساوي n.

مثال 03: ما هو عدد التبديلات التي يمكن تشكيلها بحروف كلمة **probabilité**

نلاحظ ان هذه الكلمة تتشكل من 11 حرف، مع وجود بعض الحروف مكررة اكثر من مرة وعليه يكون:

$n_1 = 1;\ n_2 = 1;\ n_3 = 1;\ n_4 = 2;\ n_5 = 1;\ n_6 = 2;\ \ n_7 = 1;\ \ n_8 = 1;\ \ n_9 = 1.$

$$p_{11}^{1,1,1,1,2,1,2,1,1} = \frac{11!}{1!\times1!\times1!\times1!\times2!\times1!\times2!\times1!\times1!} = \frac{11!}{4}$$

عملية القسمة هنا لحذف تأثير التكرار حيث نلاحظ حرفين مكررين مرتين وهو ما يدعو للقسمة على جداء عاملي التكرارات.

3. الترتيبة

في بعض الحالات يكون الترتيب مهم وبدون تكرار

مثال 04: فوج طلبة به 33 طالب نريد اختيار ممثل للفوج ونائب له، فما هو عدد الامكانيات لاختيار ممثل الفوج ونائبه.

نختار ممثل للفوج اولا ليكون لجميع الطلبة نفس فرصة الظهور في اعلى رتبة وبذلك لدينا 33 امكانية لاختياره، ومن ثم نختار النائب، فيبقى 32 طالب نختاره منهم وبالتالي لدينا 32 امكانية لاختياره.

اذن عدد الامكانيات لاختيار ممثل الفوج ونائبه هو 1056=33×32 امكانية.

اذا اردنا كتابتها على شكل العاملي يكون كما يلي: $1056 = \frac{33!}{(33-2)!} = \frac{33!}{31!}$

تعميم:

اذا كان الترتيب مهم وبدون تكرار، لترتيب k عنصر من اصل n عنصر (n>k)، نحسب عدد الامكانيات بالعلاقة الموالية ونسميها تريبة بدون تكرار لـ k عنصر من اصل n:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

في حالة n=k تصبح تبديلة.

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-n)!} = n!$$

اما اذا كان التكرار مسموح تصبح قائمة

مثال 05: نريد تشكيل عدد هاتفي من خمسة ارقام، كم عدد يمكن تشكيله؟

في ارقام الهاتف التكرار مسموح به وعليه نشكل الخانات المقابلة، حيث ان كل الارقام متاحة من 0 الى 9 يكون عدد الامكانيات لكل خانة هو 10، وعدد الاعداد الممكن تشكيلها هو $10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 100.000 = 10^5$

عدد الامكانيات	10	10	10	10	10
رقم الخانة	01	02	03	04	05

تعميم:

اذا اردنا ترتيب k عنصر من n عنصر وكان التكرار مسموح، فان عدد التراتيب يسمى قائمة يعطى بالعلاقة الموالية: $n^k = \underbrace{\text{n} \times \text{n} \times \dots \times \text{n}}_{\text{k مرة}}$

4. التوفيقات

لتكن لدينا المجموعة E تتكون من أربعة عناصر $E = \{A, B, C, D\}$، اذا كان اهتمامنا هو عدد الطرق التي يمكن ان نشكل لجنة من ثلاثة عناصر من هذه المجموعة، واللجان الترتيب فيها غير مهم

عدد التراتيب التي يمكن تشكيلها هو $A_4^3 = \frac{4!}{1!} = 24$

وبما ان الترتيب غير مهم يصبح عدد اللجان 4 بدل 24 وهي موضحة كما يلي:

اللجنة الاولى: ABC هي نفسها ACB, BAC, BCA, CAB, CBA

اللجنة الثانية: ABD هي نفسها ADB, BAD, BDA, DAB, DBA

اللجنة الثالثة: ACD هي نفسها ADC, CAD, CDA, DAC, DCA

اللجنة الرابعة: BCD هي نفسها BDC, CBD, CDB, DBC, DCB

نلاحظ ان عدد التوفيقات=$\frac{\text{عدد الترتيبات}}{6=3!}$ ، اذن التوفيقة $= \frac{A_4^3}{3!} = \frac{4!}{(4-3)!3!} =$4

يمكننا استنتاج العلاقة العامة التي تحسب لنا عدد التوفيقات؛ عند سحب بدون ارجاع (او في آن واحد) لـ k عنصر من اصل n عنصر (k<n)كما يلي: $C_n^k = \frac{A_n^k}{k\,!} = \frac{n\,!}{(n-k)\,!k\,!}$

مثال 06: ما هي عدد اللجان المختلفة المشكلة من 4 أفراد التي يمكن تكوينها من مجموعة متكونة من 21.

نلاحظ انعناصر المجموعة n=21 وعدد العناصر المسحوبة هو k=4، بتطبيق قانون التوفيقة نحصل على:

$$C_{21}^{4} = \frac{21!}{17!\,4!} = 5985 \text{ لجنةمختلفة}$$

كما تستعمل التوفيقات لحساب نشر نيوتن لـ $(x+y)^n$

$$(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})^{\boldsymbol{n}} = \sum_{\boldsymbol{k}=0}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{C}_{\boldsymbol{n}}^{\boldsymbol{k}} \quad \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{k}} \quad \boldsymbol{y}^{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{k}}$$

مثلث باسكال

k n	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
7	1	7	21	35	35	21	7	1

لاحظ في المثلث 6+4 =10، يمكن تشكيل المثلث بهذه الخاصية

جدول يلخص طرق حساب عدد الحالات الممكنة

نستعمل	في حالة	القانون	حيث
الترتيبية A_n^k (بدون تكرار)	اذاكان الترتيب مهم، حيث n>k، بدون تكرار	$\mathbf{A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}}$	K مجموعة جزئية من n
التبدلية p_n (بدون تكرار)	اذاكان الترتيب مهم، حيث n=k	$\mathbf{A_n^n = n! = p_n}$	K هي نفسها المجموعة n
التوفيقة C_n^k	اذاكان الترتيب غير مهم	$\mathbf{C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}}$	n≥k
التبدلية الدائرية	اذاكان الترتيب مهم، حيث n=k	$\mathbf{p_{n-1} = (n-1)!}$	ينقص من المجموعة عنصر لتجاور العنصر الاول والاخير
القائمة(ترتيبة مع التكرار)	اذاكان التكرار مسموح به	$\mathbf{n^k}$	n≥k
التبديلة مع التكرار		$\mathbf{p}_{(n,ri)} = \frac{\mathbf{n!}}{\mathbf{r_1!\,r_2!\,r_3!\dots r_k!}}$	$\mathbf{r_1.r_2.r_3.\dots r_k}$ هي عدد تكرارات من 1،2،..k

5. تمارين محلولة

التمرين 01 :كم عددا مكون من 3 أرقام يمكن تشكيله من الأرقام التالية 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 :

1–لا يسمح بتكرار الارقام؟

2–العدد يجب أن يكون أقل من 480؟

3–الاعداد الفردية؟

4–الاعداد الزوجية؟

الحل:

1– بما ان الترتيب مهم يمكن استعمال الترتيبة، في هذه الحالة لا يسمح بتكرار: $A_9^3 = \frac{9!}{6!} = 504$

او بطريقة الخانات نتحصل على نفس النتيجة

9×8×7=504

عدد الامكانيات	9	8	7
رقم الخانة	01	02	03

2– بطريقة الخانات: نختار رقم المئات ب 5 طرق ورقم العشرات ب 8 طرق ورقم الآحاد ب 9 طرق.

360=9×8×5

عدد الامكانيات	9	8	5
رقم الخانة	01	02	03

كما يمكن استعمال الترتيبة $A_5^1 A_8^1 A_9^1 = 360$

3– نختار رقم الآحاد ب 4 طرق وذلك حسب عدد الأرقام الفردية الموجودة، تم نختار رقم المئات ب 8 طرق ورقم العشرات ب 8 طرق: 256=4×8×8

4– نختار رقم الآحاد ب 5 طرق وذلك حسب عدد الأرقام الزوجية الموجودة، ورقم المئات 8 طرق ورقم العشرات 8 طرق: 320=5×8×8

التمرين 02 :بكم طريقة يمكن أن يجلس 4 طلبة و 3 طالبات في صف إذا كان:

1–الجلوس كما يبتغون؟

2–الطلبة جنب بعضهم والطالبات جنب بعضهن؟

3–الجلوس كما يبتغون على طاولة مستديرة؟

4–طالبان لا يمكنهما الجلوس جنب بعضهما؟

الحل:

1–عدد الطرق الممكن إذا جلس هؤلاء الطلبة كما يشاؤون هو تبديلة $5040=7!=p_7$

2–الطلبة مع بعضهم والطالبات مع بعضهن $4! \times 3! \times 2! = 288$

3– إذا جلس هؤلاء الطلبة كما يشاؤون على طاولة مستديرة نسميها تبديلة دائرية، ننقص عنصر من المجموعة (n-1)؛ طريقة $P_{n-1} = P_{7-1} = P_6 = 6! = 720$

4–طالبان لا يمكنها الجلوس جنب بعضهما :

لدينا عدد الطرق الممكنة لجلوس هؤلاء الطلبة كما يشاءون هو 5040طريقة.

نعتبر هذان الطالبان شخص واحد وبالتالي يصبح لنا 3 طلبة و 3 طالبات حيث يمكنهم الجلوس بطرق عددها: 720 = !6 طريقة

لكن هذان الطالبان يمكنهما الجلوس جنب بعضهما ب: 2 = !2 طريقة

وبالتالي عدد الطرق الممكنة لجلوس هؤلاء الطلبة والطالبات مع جلوس طالبين جنب بعضهما هو طريقة 1440= !2 × !6

ومنه عدد الطرق الممكنة لجلوس هؤلاء الطلبة والطالبات بحيث طالبين لا يمكنهما الجلوس جنب بعضهما هو طريقة 3600= 1440 – 5040

التمرين 03: كم عدد التبديلات التي يمكن تكوينها من حروف الكلمات ,STATISTIQUES CENTREE, STOCHASTIQUES, GOOGLE.

الحل:

- STATISTIQUES : $p_{12}^{3,3,1,2,1,1,1,1} = \frac{12!}{3!\times3!\times1!\times2!\times1!\times1!\times1!\times1!} = \frac{12!}{72}$
- CENTREE : $p_{7}^{1,3,1,1,1} = \frac{7!}{1!\times3!\times1!\times1!\times1!} = \frac{7!}{6}$
- STOCHASTIQUES: $p_{13}^{3,2,1,1,1,1,1,1,1,1} = \frac{13!}{3!\times2!\times1!\times1!\times1!\times1!\times1!\times1!\times1!\times1!} = \frac{13!}{12}$
- GOOGLE : $p_{6}^{2,2,1,1} = \frac{6!}{2!\times2!\times1!\times1!} = \frac{6!}{4}$

التمرين 04: صندوق به كرات: 5 حمراء و3 صفراء و2 خضراء، نسحب ثلاث كرات في آن واحد.

1. كم هو العدد الكلي للإمكانيات؟
2. عدد الامكانيات لظهور لون واحد؟
3. عدد الامكانيات لظهور لونين؟
4. عدد الامكانيات لظهور كرة خضراء على الاقل؟
5. عدد الامكانيات لظهور كرتان صفراء؟

الحل:

نستخدم التوفيقات للإجابة على الاسئلة

2. العدد الكلي $4320 = \frac{10!}{7!3!} = {}_{10}^{3}$
3. عدد الامكانيات لظهور لون واحد هو: $11 = C_5^3 + C_3^3 = \frac{5!}{2!3!} + \frac{3!}{0!3!}$

4. لظهور 3 الوان: $C_5^1 \times C_3^1 \times C_2^1 = \frac{5!}{4!} \times \frac{3!}{2!} \times \frac{2!}{1!} = 30$

لونين =العدد الكلي-(لون+3الوان) :   امكانية $4320-(11+30)=3981$

5. كرة خضراء على الاقل (واحدة او اثنتين):

$$C_2^1 \times C_8^2 + C_2^2 \times C_8^1 = \frac{2!}{1!} \times \frac{8!}{6!\,2!} + \frac{2!}{2!} \times \frac{8!}{7!} = 64$$

6. لظهور كرتان أصفران $C_3^2 \times C_7^1 = \frac{3!}{2!} \times \frac{7!}{6!} = 21$

التمرين 05: يحوي صندوق 5 كريات مرقمة من 1 إلى 5 لا نفرق بينها عند اللمس . نسحب على التوالي 3 كريات بالإرجاع (أي بعد كل سحبة نعيد الكرية إلى الصندوق) نسجل بالترتيب الأرقام التي تحملها الكريات المسحوبة لنحصل عندئذ على ثلاثة أرقام من بين 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5

1) ما هو عدد الأعداد الممكنة ؟

2) نعيد التجربة هذه المرّة لكن دون إرجاع الكرية المسحوبة . ما هو عدد الأعداد الممكنة ؟

- ما احتمال الحادثة A " الكرية الثانية المسحوبة تحمل الرقم 4 "

الحل :

1) الأعداد المحصل عليها مشكلة من المئات و العشرات و الآحاد (هناك 5 إمكانيات بالنسبة لرقم المئات ، من أجل كل إمكانية هناك 5 إمكانيات لرقم العشرات أي 25 إمكانية و من أجل كل إمكانية للعشرات هنا 5 إمكانيات لرقم الآحاد) و بالتالي هناك $5\times5\times5=125$ عددا ممكنا

2) في الحالة الثانية هناك $5\times4\times3=60$ عددا (باعتبار أن الأرقام مختلفة مثنى مثنى، الكرية المسحوبة لا ترجع)

- المخرج الذي يحقق الحادثة A يناسب وضع الرقم 4 رقما للعشرات فتبقى 4 إمكانيات لرقم المئات و لكل إمكانية تبقى 3 إمكانيات لرقم الآحاد أي $4\times3=12$ حالة ملائمة و بالتالي

التمرين :6 ما هو عدد كلمات السر التي يمكن الحصول عليها من استخدام حرفين من حروف اللغة الإنجليزية

)عددها (26 وثلاثة أرقام يسار الأحرف في الحالات التالية:

1-عدم تكرار الحرف والرقم؟

– **2**تكرار الحرف وعدم تكرار الرقم؟

– **3**تكرار الحرف والرقم؟

الحل:

– **1**عدد الكلمات مع عدم تكرار الحرف والرقم هو

= 8 × 9 × 10 × 25 × 26كلمة468000

2–عدد الكلمات مع تكرار الحرف وعدم تكرار الرقم هو

= 8 × 9 × 10 × 26 × 26كلمة486720

3–عدد الكلمات مع تكرار الحرف والرقم هو

= 10 × 10 × 10 × 26 × 26كلمة676000

التمرين :**7** في مسابقة معينة فرض على الطلبة الإجابة على 5 من 8 أسئلة، بكم طريقة يمكن للطالب أن يختار

عدد الأسئلة في الحالات التالية:

1–اختيار الأسئلة بدون شرط؟

2–إذا كانت الأسئلة الثلاثة الأولى إجبارية؟

3–إذا كان من الضروري الإجابة على ثلاثة أسئلة من الأسئلة الخمسة الأولى؟

الحل:

1–يمكن اختيار الأسئلة الخمسة بطرق عددها: = طريقة56

2–إذا أجاب الطالب على الأسئلة الثلاثة الأولى، يبقى له اختيار السؤالين المتبقيين من بين الأسئلة الخمسة الأخيرة بطرق عددها = :طريقة10

3–يمكنه اختيار الأسئلة الثلاثة الضرورية من الخمسة أسئلة الأولى بطرق عددها =:طريقة10

ويبقى له سؤالين يتم اختيارهما من الأسئلة الثلاثة الأخيرة بطرق عددها3:

وبالتالي يكون إجمالي عدد طرق اختيار الأسئلة الخمسة هو = 3 × 10:طريقة30

التمرين :**8** إذا كان لدينا مجموعة من الطلبة متكونة من 5 طلبة و 7 طالبات .إذا أردنا تكوين لجنة من هؤلاء الطلبة حيث تتكون من 5 أشخاص، ما هي عدد اللجان التي يمكن تكوينها إذا علمت:

1–بدون شرط؟

2–ثلاثة طلبة يرفضون ترشيحهم؟

3–يجب أن يكون ضمن اللجنة طالبين على الأقل؟

4 - الطالبQ والطالبةR يرفضان أن يكونا في اللجنة معا؟

الحل:

1–عدد اللجان التي يمكن تكوينها هي = لجنة792

2–عدد اللجان التي يمكن تكوينها بحيث ثلاثة من الطلبة يرفضون الترشح هو = لجنة126

3–عدد اللجان التي يكون فيها طالبين على الأقل هي

= 1 × 1 + 7 × 5 + 21 × 10 + 35 × 10لجنة596

4–لا يمكنهما أن يكونا في اللجنة معا هو R والطالبة Q

عدد اللجان التي يمكن تكوينها بحيث الطالب أما ضمن اللجنة وبالتالي عدد اللجان التي يجتمعان فيها هي :

Rوالطالبة Q نعتبر الطالب

=لجنة240

من خلال R :والطالبة Q من تم يمكن حساب اللجان التي لا يجتمع فيها الطالب

= 240 − 792 = ,لجنة552

التمرين :**9** عميد كلية يريد تشكيل لجنة تضم 5 أعضاء يتم اختيارهم من 5 رجال و 6 نساء.

1–ما هو عدد اللجان التي يمكن تشكيلها؟

2–ما هو عدد اللجان التي يمكن تشكيلها إذا علمت أن:

أ –من بين الأعضاء يجب أن يكون رجل فقط؟

ب –من بين الأعضاء يجب أن تكون امرأتين على الأكثر؟

ج –يجب أن تتكون اللجنة من رجلين وامرأتين على الأقل؟

3–ما هو عدد اللجان إذا كانت اللجنة تضم الرئيس، النائب والكاتب؟

الحل:

– **1**عدد اللجان التي يمكن تشكيلها هو

=لجنة462

2–عدد اللجان التي يمكن تشكيلها إذا كان:

أ –من بين الأعضاء يجب أن يكون رجل فقط هو:

= 15 × 5 = 1لجنة75

ب –من بين الأعضاء يجب أن تكون امرأتين على الأكثر هو:

= 1 × 1 + 6 × 5 + 15 × 10لجنة181

ج –يجب أن تكون اللجنة متكونة من رجلين وامرأتين على الأقل هو:

= 15 × 10 + 20 × 10لجنة350

3–عدد اللجان إذا كانت اللجنة تضم الرئيس، النائب والكاتب هو

=لجنة990

التمرين 10: تستقبل ثانوية L تلاميذ السنة الأولى من ثلاث متوسطات M1 ، M2 ، M3 .

25 % من التلاميذ يأتون من المتوسطة M1 ، 40 % من المتوسطة M2 و الباقي من المتوسطة M3

5 % من تلاميذ من المتوسطة M1 ، 10 % من تلاميذ M2 و 0,1 % من تلاميذ M3 يعيدون السنة .

نختار تلميذا عشوائيا .

a) كوّن شجرة متوازنة تترجم الوضعية .

b) احسب احتمال الحادثة A " التلميذ الذي تم اختياره يعيد السنة "

الحل:

نرمز بالرمز A_i للحادثة " التلميذ قادم من المتوسطة M_i " مع $1\le i \le 3$

و بالرمز B للحادثة " التلميذ يعيد السنة "

a) بما أن القانون ذو توزيع منتظم (تساوي احتمال) تترجم النسب الى الاحتمالات التالية

$$p(A_1)=0,40 \;\; ; \;\; p(A_2)=0,25 \;\; ; \;\; p(A_3)=1-p(A_1)-p(A_2)=0,35$$

➢ نشكل الشجرة المتوازنة

نضع على الفروع الأولى الاحتمالات السابقة

$$p(A_1)+p(A_2)+p(A_3)=1$$

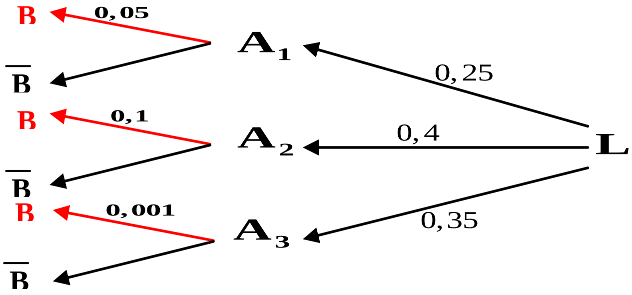
➢ تظهر في نص التمرين الاحتمالات الشرطية كما يلي :

احتمال أن يكون التلميذ معيدا إذا كان قادما من المتوسطة M1 هو 0,05

أي $p_{A_1}(B)=0,05$ و كذلك نقرأ $p_{A_2}(B)=0,1$ و $p_{A_3}(B)=0,001$

➢ نكمل الشجرة بفروع تتجه نحو B أو $\overline{B}$ ($\overline{B}$ الحادثة العكسية للحادثة B)

الفروع مثقلة بالاحتمالات الشرطية



لا تنس أن مجموع احتمالات الفروع في نفس المستوي يساوي 1

$p_{A_1}(B)+p_{A_1}(\overline{B})=1$ و كذلك $p(A_i\cap B)=p(A_i)\times p_{A_i}(B)$

b) نحسب $p(B)$ باستعمال دستور الاحتمالات الكلية

$$p(B)=p(A_1\cap B)+p(A_2\cap B)+p(A_3\cap B)$$
$$=0,25\times 0,05+0,4\times 0,1+0,35\times 0,001=0,05285$$

6. تمارين

التمرين الاول:

1 – أحسب القيم التالية: $3!$, $7!$, $\frac{15!}{12!}$, $\frac{5!}{12!}$,

2-أكتب على أبسط شكل ممكن الكسور التالية:

$$\frac{(n-1)!}{(n+1)!}+\frac{n!}{(n-1)!}\ ,\quad \frac{(n-r+1)!}{(n-r-1)!}\ ,\quad \frac{(n+1)!}{n!}\ ,\quad \frac{n!}{(n-2)!},\quad \frac{5\cdot(6!)^2}{6!\cdot 5!}\ ,\quad \frac{14!\cdot 6!}{12!\cdot 5!}$$

التمرين الثاني:

أثبت أن:

1. $\forall (s,n,p)\epsilon N^3: \quad C_s^p\cdot C_{s-p}^{n-p}=C_s^n\cdot C_n^p$
2. $\forall (n,p)\epsilon N^2: \quad p\cdot C_n^p=n\cdot C_{n-1}^{p-1}$
3. $\forall (n,p)\epsilon N^2: \quad p\cdot C_{n+1}^p=(n+1)\cdot C_n^{p-1}$

التمرين الثالث:

هل يوجد عدد صحيح n موجب حيث يكون:

$$A_n^1+A_n^3=9$$

التمرين الرابع: بين صحة العلاقة التالية:

1. $C_n^k\cdot P_k=A_n^k$
2. $C_n^{n-k}=C_n^k$
3. $C_{n-1}^{k-1}+C_{n-1}^k=C_n^k$

التمرين الخامس: يتكون رقم الهاتف من ستة أرقام ما هو عدد الأرقام الهاتفية الممكنة ؟

التمرين السادس: بكم طريقة يمكن لمجموعة مكونة من خمسة أشخاص أن يجلسوا

1- في صف به خمسة مقاعد ؟

2-حول طاولة مستديرة تشمل خمسة مقاعد ؟

3-إذا أصر شخصين من أن يجلسا جنبا إلى جنب ؟

التمرين السابع: قطار يتكون من عشر عربات مختلفة فبكم طريقة يمكن تركيب هذا القطار (بفرض أن القاطرة موجودة دوما بالرأس) ؟

التمرين الثامن: ما هو عدد التباديل المختلفة التي يمكن تكوينها من أحرف الكلمات التالية:

CENTREE , EQUATION, AGRICULTURE.

التمرين التاسع: كم عدد من ستة أرقام يمكننا أن نكون وذلك بأخذ العدد 1 مرتين ,ثلاث مرات العدد 2 ومرة واحدة العدد 3 ؟

التمرين العاشر: تتشكل كلمة سر من ثلاث أحرف لاتينية متبوعة برقمين مختلفين

1- كم كلمة سر يمكننا تشكيلها بهده الطريقة ؟

2- من بين هده الكلمات كم منها ينتهي بحرف زوجي ؟

التمرين الحادي عشر:

1- كم عدد من 3 أرقام مختلفة يمكن تشكيله بالأرقام ,1, 2, 3 ,4 ,5 ,6 ,7 ,8 ؟

2- ما هو عدد الأعداد الزوجية ؟

3- ما هو عدد الأعداد الفردية ؟

4- ما هو عدد الأعداد الزوجية التي تبدأ بالرقم 1 ؟

التمرين 12: لجنة مكونة من 20 طالب تختار مكتبا لها مكونا من خمسة أعضاء. الرئيس, نائب الرئيس, 3 أمناء.

- فبكم طريقة يمكن تكوين هدا المكتب ؟

التمرين 13: نادي به 8 أعضاء

1- كم عدد اللجان المختلفة المكونة من ثلاثة أعضاء يمكن تكوينها بهذا النادي ؟

2- كم عدد اللجان المختلفة المكونة من ثلاثة أعضاء يمكن تكوينها بهذا النادي إذا علمنا أن لكل رئيس و أمين صندوق و سكرتير ؟

التمرين 14: لنفرض عدم وجود التكرار في هدا التمرين.

1- كم عدد يمكن تشكيله بثلاثة أرقام من بين الأرقام التالية 2, 3 ,5, 6 7, 9 ؟

2- كم من بين هده الأعداد تكون اقل من 400 ؟

3- كم من عدد زوجي يمكن تكوينه ؟

4- كم من عدد فردي يمكن تكوينه ؟

5-كم منها هي من مضاعفات العدد 5 ؟

التمرين 15: لدينا صندوق يحتوي على 5 كريات حمراء و 3 كريات بيضاء نسحب 3 كريات في آن واحد, فما هو عدد الحالات الممكنة للحصول على:

1- كرة حمراء واحدة فقط ؟

2- كرتين بيضاويتين ؟

3- على الأقل كرة حمراء واحدة ؟

التمرين 16: أراد شخص استدعاء 05 اصدقاء من أصل 11 صديقا من المقربين لمأدبة عشاء

1- فبكم طريقة يمكنها استدعاءهم ؟

2- بكم طريقة ممكنة ادا علمت إن اثنين منهم لا يحضران إلا معا ؟

3- كم لديه من خيار اذا كان اثنين منهم لا يستطيعان الحضور معا ؟

التمرين 17: قسم يتكون من 9 طلبة و 3 طالبات

1- بكم طريقة يمكن للأستاذ تكوين لجنة من 4 طلبة ؟

2- بكم من طريقة يمكن تكوين لجنة بها طالبة على الأقل ؟

3- بكم طريقة يمكن تكوين لجنة بها طالبة واحدة فقط ؟

التمرين 18: خلال امتحان على الطالب الإجابة على 8 أسئلة من بين مجموع 10 أسئلة

1- ما هي مجموعة الاختيارات الممكنة ؟

2- كم من اختيار لديه إذا كان عليه الإجابة على الثلاث أسئلة الأولى ؟

3- كم اختيار لديه إذا كان عليه الإجابة على الأقل على 4 من بين الخمس أسئلة الأولى؟

الفصل الثاني: الاحتمالات

يعتبر المبدأ الأساسي للعد أمرا بالغ الأهمية في عناصر نظرية الاحتمالات التي سوف نتطرق إليها في هذه الفصول.

1. التجربة والاحتمال

أ. التجربة

لشرح المفهوم المجرد للتجربة و تمييزها عن الحدث يمكن القول أن التجربة هي أم الحدث أو أم النتيجة. لأن التجربة تتفرع بالضرورة إلى أحداث.

ومفهوم التجربة في علم الاحتمالات مفهوم عام و مرن، فإذا كنا ندرس احتمال الحصول على الوجه 6 عند رمي قطعة نرد تكون التجربة هي الرمي، و إذا كنا ندرس احتمال عدد معين من الوحدات التالفة لآلة ما يمكن اعتبار كل وحدة منتجة كتجربة، وإذا كنا ندرس احتمال عدد معين من الطلبة الراسبين في مقياس ما نعتبر كل طالب كتجربة... نقول احتمال حدث أو احتمال نتيجة ولا نقول إحتمال تجربة.

أما الاحتمال فهو

- عدد موجب تماما أو معدوم (لا يكون سالبا).
- مجموع احتمالات أحداث تجربة ما يساوي الواحد.
- الاحتمال يكون محصورا بين 0 و1.

ب. الأساسيات لحساب الاحتمالات

هناك قواعد أساسية في حساب الاحتمال :

1. احتمال وقوع حدث يساوي 1مطروحا منه احتمال الحدث المعاكس. مجموع احتمال الحدث واحتمال الحدث المعاكس يساوي 1.
2. احتمال وقوع حدثان "A" و "B" يساوي احتمال وقوع الأول مضروبا في احتمال وقوع الثاني لما يكون الأول قد وقع فعلا.
3. احتمال وقوع حدثان مستقلان يساوي جداء الاحتمالين أي احتمال الحدث الأول مضروبا في احتمال الحدث الثاني.
4. احتمال وقوع الحدث وعكسه يساوي الصفر، ونقول أن الحدثان متنافيان.
5. احتمال وقوع حدث "A" أو "B" يساوي جمع احتمالي الحدثين مطروحا منه احتمال تحققهما معا.

6. "احتمال حدث هو عدد الحالات الملائمة لوقوع الحدث مقسوما على عدد الحالات الممكنة، إذا اقترضنا أن كل الحالات لها نفس الاحتمال في الوقوع." [1] بليز باسكال (Blaise Pascal : 1623)

مثال 01 : ما هو احتمال الحصول على عدد زوجي عند رمي قطعة نرد ؟ بين كل من التجربة، الحدث والاحتمال في هذا المثال.

الجواب:

هناك ثلاث حالات ملائمة للحصول على عدد زوجي (2، 4 و6). أما العدد الكلي للحالات الممكنة فهو 6: (1، 2، 3، 4، 5، 6). وبافتراض أن كل الحالات الممكنة لها نفس الاحتمال فإن احتمال الحصول على عدد زوجي هو $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

تنبيه: لا يمكن استخدام هذه العلاقة إذا لم تكن احتمالات الحالات متساوية.

مثال 02: صندوق به 7 كريات منها 5 حمراء. نسحب 3 كريات معا. ما هو احتمال أن تكون كلها حمراء؟ بين كل من التجربة والحدث في هذا المثال.

عدد الحالات الملائمة C_5^3 وعدد الحالات الممكنة: C_7^3. إذا الاحتمال هو $\frac{10}{35}=\frac{C_5^3}{C_7^3}$.

التجربة هي السحب من الصندوق، الحدث أو النتيجة هي الحصول على ...

مثال 03: فوج مكون من 10 طلبة. نسحب بالقرعة اسم من العشرة. ما هو احتمال أن يكون الطالب أحمد؟ بين كل من التجربة والحدث.

نسحب (بدون إعادة) عينة من 3 أسماء من العشرة. ما هو احتمال أن يكون منهم الطالب أحمد؟

الجواب:

1) احتمال الحدث الأول أو النتيجة الأولى هي $\frac{1}{10}$،

2) عدد الطرق الممكنة للعينة: C_{10}^3، عدد الحالات الملائمة لكي يكون أحمد في العينة:

$$C_{10-1}^{3-1} = C_9^2 \qquad C_n^x = \frac{n!}{(n-x)!x!} \Rightarrow C_9^2 = 36$$

الاحتمال هو إذا: $\frac{C_9^2}{C_{10}^3} = \frac{36}{10(9)(8)/3} = \frac{36}{240} = \frac{3}{20}$

التجربة هي السحب، النتيجة أو الحدث هي أن يكون الطالب أحمد مسحوب

---

[1] ريجينالد لافوا 1981، ص 2 و3.

ج. أنواع الحوادث:

–الحدث البسيط: هو الحدث غير القابل للتجزئة، مثلا نقول أن الحدث ظهور الرقم 6 هو حدث بسيط عند رمي حجر النرد، لأن الرقم 6 لا يمكن تقسيمه إلى حوادث أخرى.

–الحدث المركب :هو الحدث الذي يمكن تجزئته إلى حوادث بسيطة.

–الحدث الأكيد : نقول عن الحدث أنه أكيد إذا كان يتكون من جميع الحوادث البسيطة المرتبطة بالتجربة . مثلا نقول أن حدث الحصول على رقم أصغر من 7 عند رمي حجرة نرد هو حدث أكيد لأننا مهما رمينا حجرة النرد فسوف نحصل على رقم من 1 إلى .6 ونرمز له ب $A = \Omega$.

–الحدث المستحيل :الحدث المستحيل هو الحدث المستحيل وقوعه مهما أعدنا التجربة .فمثلا نقول حدث ظهور الرقم 8 عند رمي حجرة نرد، هو حدث مستحيل لأننا مهما رمينا حجرة النرد فمن المستحيل الحصول على الرقم .8 ونرمز له ب $A = \emptyset$.

–الحوادث المتنافية :هي الحوادث التي يستحيل حدوثها في آن واحد حيث أن وقوع أحدها ينفي وقوع الآخر إذا كانوا غير متقاطعي.

–الحوادث غير المتنافية :الحوادث التي يمكن حدوثها في آن واحد حيث أن حدوث أحدها لا ينفي وقوع الآخر

مثال : عند رمي حجرة نرد على الأرض فإن عدد الحالات الممكنة أو فضاء العينة لهذه التجربة هي:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

.ي ـــ

نفترض أنه عند ظهور رقم زوجي هو الحدث A وأنه عند ظهور رقم فردي هو الحدث B وعند ظهور رقم أولي هو الحدث C

$C = \{2, 3, 5\}$، $B = \{1, 3, 5\}$ ، $A = \{2, 4, 6\}$

ومنه يمكن القول أن الحدثين C وA هما حدثين غير متنافيين لأنه يمكن أن يكون العدد زوجي وأولي او غير ذلك من الأمثلة. ونقول أن الحدثين B وA هما حدثين متنافيين لأنه لا يمكن أن يكون العدد فردي وزوجي في نفس الوقت.

–الحوادث المستقلة :هي الحوادث التي عندما يقع أحدها لا يؤثر ولا يتأثر بوقوع الحوادث الأخرى .فمثلا نتائج عدة رميات لقطعة نقود هي حوادث مستقلة، لأن نتائج الرمية الأولى مثلا لا تؤثر ولا تتأثر بنتائج الرمية الثانية أو الثالثة.

–الحوادث غير المستقلة : هي الحوادث التي عند وقوع أحدها يؤثر على احتمال وقوع الحوادث الأخرى أو وقوع أحدها يكون مشروط أو مرتبط بوقوع الحوادث الأخرى. فمثلا عند سحب كرة من صندوق بدون إعادة كرة هي حوادث غير مستقلة لأن السحب الأول يؤثر على احتمال السحب الثاني.

2. التعبير الرياضياتي للاحتمالات

نستخدم الترميز من أجل التوصل إلى تعبير دقيق وواضح لقواعد الحساب الاحتمالي وهي ذاتها القواعد المذكورة في الفصل الأول.

نعبر عن احتمال حدث ما بطريقة رياضية فنكتب $P(A)$

ونعبر عن احتمال وقوع الحدث : $X = x$ كما يلي: $P(X = x)$ أو $P(x)$.

مثال: احتمال الحدث: "الحصول على الوجه 5" عند إلقاء حجر نرد يكتب: $P(X = 5) = 1/6$ ، أو باختصار: $P(5) = 1/6$

و أحيانا نختصر أكثر فنكتب: $P = 1/6$.

1.2. استخدام نظرية المجموعات للتعبير عن الأحداث العشوائية

من خلال البنود التالية تستخدم نظرية المجموعات للتعبير عن الأحداث العشوائية:

1. نعبر عن النتائج الممكنة لتجربة ما ب Ω، وتسمى المجموعة الكلية أو فضاء العينة.
2. نعبر عن الحدث بمجوعة جزئية A من فضاء العينة، حيث A هي مجموعة من النتائج الممكنة للتجربة.
3. إذا انتهت التجربة بنتيجة تمثل عنصرا من A نقول أن الحدث A قد تحقق.
4. الحدث الذي يحتوي على نقطة أو عنصر واحد من Ω يسمى عادة حدث بسيط.

<u>مثال 04</u>: في تجربة إلقاء مكعب نرد. أكتب مجموعة فضاء العينة ثم عبر عمليا عن الأحداث التالية:

الحدث A: الحصول على العدد 6 (حدث بسيط)

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \quad A = \{6\}$$

الحدث B: الحصول على عدد زوجي $B = \{2, 4, 6\}$

الحدث C: الحصول على عدد أولي $C = \{2, 3, 5\}$

الحدث D: الحصول على عدد فردي $D = \{1, 3, 5\}$

<u>مثال 05</u>: لتكن لدينا تجربة هي رمي قطعتين نقديتين على التوالي: أكتب مجموعة فضاء العينة ثم عبر عن:

الحدث A : الحصول على مرتين كتابة (حدث بسيط)

$$\Omega = \{PP, PF, FP, FF\}, \quad A = \{PP\}$$

الحدث B : الحصول على كتابة مرة واحدة $B = \{FP, PF\}$

الحدث C : الحصول على كتابة في الرمية الأولى $C = \{PF, PP\}$

5. من بين الأحداث الممكنة في تجربة ما أيا كانت، الحدث Φ يمثل الحدث المستحيل لأنه لا يمكن أن يتحقق عنصر منها.$P(\Phi) = 0$.

6. من بين الأحداث الممكنة في تجربة ما أيا كانت، حدث المجموعة الأساسية Ω نفسها، وهو الحدث الأكيد لأنه لابد أن يتحقق أحد عناصرها على الأقل. $P(\Omega) = 1$

7. بتطبيق عمليات مثل الإتحاد والتقاطع، الطرح، الجمع .... على المجموعات نحصل على مجموعات جديدة جزئية من Ω ومن ثم أحداث جديدة فيΩ . من ذلك :

$A \cup B$ هو الحدث: إماA أو B أو كلاهما.

$A \cap B$ هو الحدث: A وB في وقت معا.

$\bar{A}$ هو الحدث المعاكس ل A.

$A - B$ هو الحدث: A لكن ليسB .

8. إذا كان $A \cap B = \Phi$ نقول أنA وB متنافيان (أو غير متلائمان) أي لا يمكن وقوعهما معا.

مثال: نرمي قطعة نقدية مرتين: إذ كان A هو الحدث "مرتين كتابة" و B "صورة على الأقل".

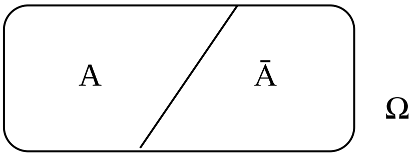
$$\Phi = A \cap B \qquad A = \{PP\}.\ \ B = \{PF, FP, FF\}$$

2.2. التعبير الرياضياتي عن قواعد حساب الاحتمالات

- **الحدث المعاكس**

نعبر عن الحدث المعاكس ل A ب $\bar{A}$ أو A' واحتماله هو احتمال عدم تحقق الحدث A، ونكتب :

$$P(\bar{A}) + P(A) = 1 \iff P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$



مثال: نرمي قطعة نقدية ونرمز ب P للكتابة وF للصورة (الوجه). نلاحظ أن:

$$P(P) = P(F') = 1 - P(F) \iff P(P) + P(F) = 1$$

مثال 2: عند رمي حجر نرد فإن احتمال الحصول على العدد 5 هو: $P(5) = 1/6$ ، فما هو الحدث المعاكس في هذه الحالة وما احتماله؟

الحدث المعاكس هو الحصول على عدد غير 5، واحتماله هو: $P(5') = 1 - P(5) = 1 - (1/6) = 5/6.$

مثال 3: نرمي حجر نرد، ما هو احتمال الحصول على عدد زوجي، ماهو الحدث المعاكس وما هو احتماله؟

$$P(\text{nombre pair}) = P(2 \text{ ou } 4 \text{ ou } 6) = 3/6$$

الحدث المعاكس هو الحصول على عدد غير زوجي، و احتماله:

$$P(\text{impair}) = 1 - P(\text{pair}) = 1 - (3/6) = 3/6.$$

- **احتمال وقوع الحدث "A" و "B"**

$P(A\cap B) = P(A)* P(B/A)$

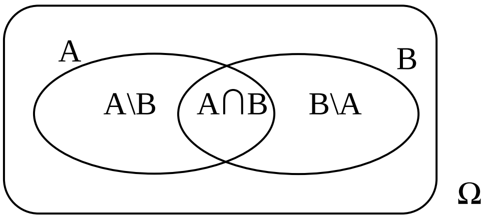
$P(A\cap B\cap C) = P(A)* P(B/A)* P(C/(A\cap B))$

A, B, C أحداث ما (مستقلة أو لا، متنافية أو لا)، P(B/A) يسمى الاحتمال الشرطي لـB علما أن A محقق.

ومن المعادلة الأولى نحصل على:

$$\mathbf{P(B/A) = P(A\cap B) / P(A)} \qquad \text{لما} \ \mathbf{P(A) > 0}$$

حيث A تصبح فضاء المعاينة بما أن A محقق.



شكل 01 : الحدث B/A غير الحدث B\A

مثال: 1) أحسب عند إلقاء حجر نرد احتمال الحصول على قيم أقل من 4 (حدثB).

2) أحسب احتمال الحصول على نتيجة أقل من 4 إذا علمت أن الوجه المحصل لمكعب النرد عدد فردي (حدثA).

3) أحسب احتمال الحصول على قيمة أكبر أو يساوي 4 إذا علمت أن النتيجة عدد فردي.

$P(B) = P(1ou\ 2\ ou\ 3) = P(1) + P(2) + P(3) = 3/6$

$P(B/A) = P(B\cap A)/P(A)$

$P(B\cap A) = P\ (impaire\ et\ \leq)$

$= P(1\ ou\ 3) = P(1) + P(3) = 1/6\ +\ 1/6 = 2/64$

$P(B/A) = P(B\cap A)/P(A) = 2/6\ /\ 3/6\ =\ 2/3$

- **احتمال وقوع الحدث "A" و "B" لما "A" و "B" مستقلان**

$P(A\cap B) = P(A) * P(B) \qquad\qquad P(B/A) = P(B)$

وهو تعريف استقلال حدثين، أي أن وقوع B لا يتأثر بوقوع A أو عدم وقوعه نقول أن A وB مستقلان،

$P(A\cap B\cap C) = P(A) * P(B) * P(C) \qquad\qquad P(C/(A\cap B)) = P(C)$

مثال: نرمي حجر نرد وقطعة نقدية معا. ما هو احتمال الحصول على الصورة والعدد 6 ؟ (نتيجة مكعب النرد مستقلة عن نتيجة القطعة النقدية).

$P(A\cap B) = P(A).P(B) = 0.5 * 1/6\ = 1/12.$

مثال 2. نلقي قطعة نقدية مرتين. أحسب احتمال الحصول على صورة في الرمية الأولى وفي الرمية الثانية.

$P(FF) = P(A\cap B) = P(A)\ P(B) = 0.5 * 0.5 = 0.25$

مثال 3. صندوق به 5 كريات 2 حمراء و3 بيضاء. نسحب كرية نسجل لونها ثم نعيدها للصندوق ونكرر العملية 3 مرات.

- أحسب احتمال الحصول على 2 كريات حمراء، 3 كريات حمراء (أحداث مستقلة).
- كيف يكون الاحتمال في حالة كون السحب بدون إرجاع الكرية (أحداث غير مستقلة)؟

الجواب:

- $P(RR) = P(R_1 \cap R_2) = P(R_1)\ P(R_2) = 2/5 * 2/5 = 4/25$

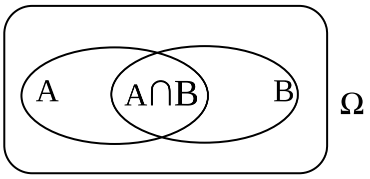
$P(RRR) = P(R_1 \cap R_2 \cap R_3) = P(R_1)\ P(R_2)\ P(R_3) = 2/5 * 2/5 * 2/5 = 8/125$

- $P(RR) = P(R_1 \cap R_2) = P(R_1)\ P(R_2/R_1) = 2/5 * 1/4 = 2/20$

$P(RRR) = P(R_1 \cap R_2 \cap R_3) = P(R_1)\ P(R_2/R_1)\ P(R_3/(R_1\cap R_2)) = 2/5 * 1/4 * 0 = 0$

- **احتمال وقوع حدث "A" أو "B"**

$$\mathbf{P(AUB) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)}$$

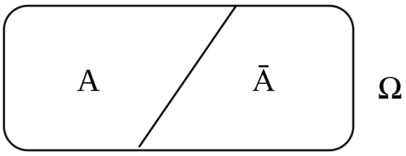


- **احتمال وقوع حدث "A" أو "B" وهما متنافيان**

لتكن الأحداث المتنافية A, B

$$\mathbf{P(AUB) = P(A) + P(B) \quad (P(A\cap B) = 0)}$$

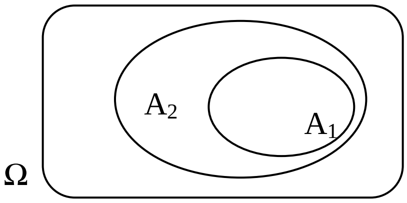
$$P(AUBUC) = P(A) + P(B) + P(C) \quad (P(A\cap B\cap C) = 0)$$



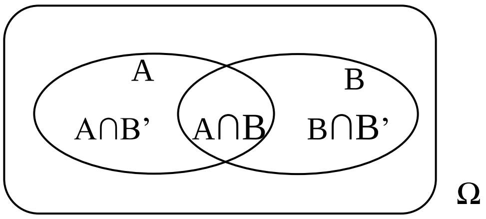
- **قواعد أخرى**

- من أجل $A_1 \subset A_2$ فإن:

$P(A_1) \le P(A_2)$ و $P(A_2 - A_1) = P(A_2) - P(A_1)$

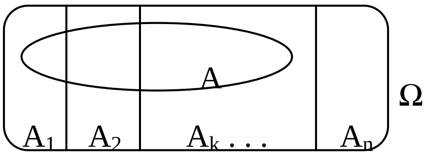


- من أجل A وB أحداث أيا كانت: $P(A \cap B) + P(A \cap B') = P(A)$



- إذا كان A هو نتيجة أحد أو بعض الأحداث المتنافية: $A_1, A_2, A_3, A_4, \ldots\ldots A_n$

$$P(A) = P(A \cap A_1) + P(A \cap A_2) + P(A \cap A_3) + \ldots\ldots + P(A \cap A_n)$$

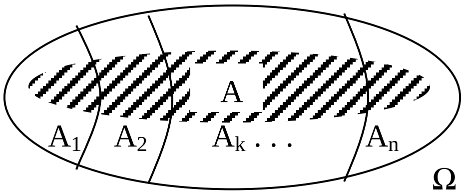


3.2. نظرية بايز

لتكن A_1، A_2، A_3، . . . A_k، . . .، A_n أحداث متنافية فيما بينها حيث اتحادها يشكل المجموعة الكلية (الأساسية) **Ω**، و A حدث ما يتحقق عن طريق واحد أو أكثر من الأحداث A_k، إذا علمنا أن A تحقق، نحسب احتمال تحققه عن طريق الحدث A_k كما يلي:

$$P(A_k / A) = \frac{P(A_k)P(A/A_k)}{\sum_{k=1}^{n} P(A_k)P(A/A_k)} = \frac{P(A \cap A_k)}{P(A)}$$

تسمى هذه النظرية نظرية الاحتمال السببي BAYES لأنها تمكن من حساب احتمال أن يكون حدث ما (A_k) هو المسبب لوقوع حدث آخر (A).



الشكل رقم 02: رسم يوضح نظرية بايز

مثال: وظفت سكريتيرة مكتب (A_1) بمكتب للمحاسبة حيث تولت طبع 20 % من الفواتير. يشغل المكتب عاملتين أخريين إحداهما (A_2) تطبع 30% من الفواتير والأخرى (A_3) 50%.

ترتكب الموظفة الجديدة أخطاء في 5% من الفواتير، بينما نسبة الخطأ لدى الثانية (A_2) 2% ولدى الثالثة (A_3) 1%.

أخذت فاتورة بشكل عشوائي فتبين أن بها أخطاء. استبعدت الأولى أن تكون هي من أنجزت الفاتورة بحجة أنها لا تنجز إلا 20% من الفواتير، وردت عليها العاملات الأخريات بأن نسبة الأخطاء لديها هي الأكبر(5%).

1. أحسب احتمال أن تكون الموظفة الجديدة (A_1) هي التي حررت الفاتورة وقارن مع احتمال أن يكون مصدر الخطأ هو A_2 أو A_3.
2. أحسب مجموع الاحتمالات الثلاث.
3. أحسب احتمال أن تكون فاتورة مختارة عشوائيا من مجموع المراسلات، أن تكون بها أخطاء.

$$P(A_1/A)=\frac{P(A_1)P(A/A_1)}{\sum_{k=1}^{3}P(A_k)P(A/A_k)}=\frac{0.2*0.05}{(0.2*0.05)+(0.3*0.02)+(0.5*0.01)}=0.238$$

$$P(A_2/A)=\frac{P(A_2)P(A/A_2)}{\sum_{k=1}^{3}P(A_k)P(A/A_k)}=\frac{0.3*0.02}{(0.2*0.05)+(0.3*0.02)+(0.5*0.01)}=0.2857$$

$$P(A_3/A)=\frac{P(A_3)P(A/A_3)}{\sum_{k=1}^{3}P(A_k)P(A/A_k)}=\frac{0.5*0.01}{(0.2*0.05)+(0.3*0.02)+(0.5*0.01)}=0.476$$

يظهر من الحساب أن الاحتمال الأكبر هو أن تكون A_3 هي التي حررت الفاتورة.

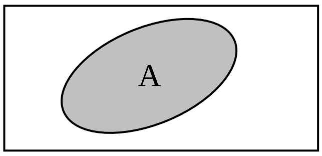
2. مجموع الاحتمالات $P(A_1/A) + P(A_2/A) + P(A_3/A) = 1$ لأنها تمثل احتمالات الأحداث المتنافية الثلاث.

3. احتمال وجود خطأ في مراسلة ما:

$$P(A)=\sum P(A_k)P(A/A_k)=(0.2*0.005)+(0.3*0.02)+(0.5*0.01)=0.012$$

4.2. التعبير الهندسي عن الاحتمالات

قبل الشروع في حل مسألة مركبة للاحتمالات يستحسن تحليلها باستعمال أشكال هندسية توضح عناصر المسألة (الأحداث) والعلاقات بينها. يستخدم لهذا الغرض شجرة الاحتمال او مخطط فين. تبين شجرة الاحتمال الأحداث المتنافية التي تنتج عن التجربة الواحدة أو المكررة وذلك من خلال أغصان تتفرع من أصل، أما مخطط فين فيستخدم لتمثيل الأحداث الفرعية دوائر داخل مستطيل يمثل التجربة.

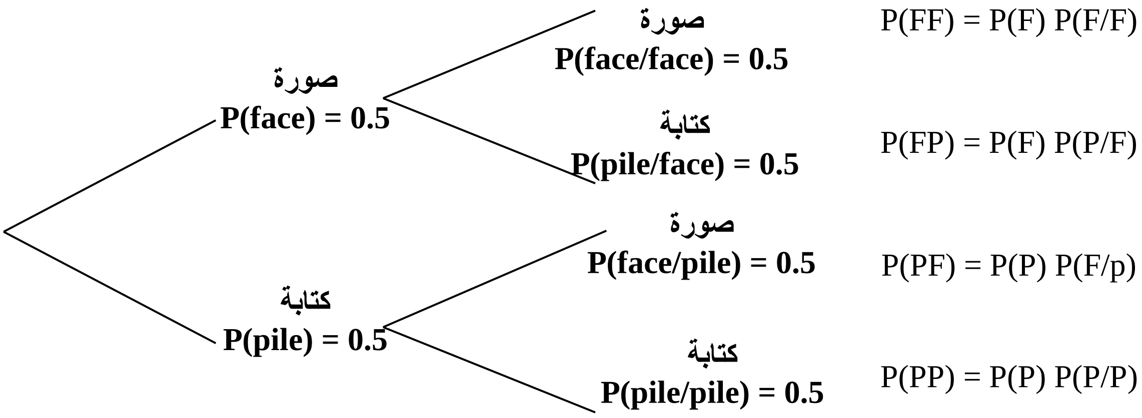


رسم1 مخطط فين

يراعى في رسم الشجرة أن يكون مجموع احتمالات كل تفريعة يساوي الواحد. التفريعة هي بمثابة شجرة فرعية تحتوي أحداث متنافية، لكونها تمثل النتائج المحتملة لتجربة جزئية.

مثال. نرمي قطعة نقدية مرتين. أحسب احتمال الحصول على مرتين صورة.

$P(face \cap face) = P(face) * P(face/face) = 0.5 * 0.5 = 0.25.$



خلاصة : يمكن القول

باستخدام نظرية المجموعات كأساس للترميز في مجال الاحتمالات يمكن الحصول على صياغة أكثر دقة للمفاهيم المختلفة. بهذه الطريقة نستخدم:

رمز التقاطع ∩ بدلا عن عبارة "و"

مثال: احتمال "الوجه 2 و 5" في رميتي نرد: $P("2"\cap "5") = P(2) * P(5)$

رمز الإتحاد U بدلا عن عبارة" أو"

مثال: احتمال الوجه 2 أو 5 في رمية نرد: $P("5"U"2") = P(5) + P(2)$

رمز المتمم C_A أو $\bar{A}$ بدلا عن عبارة "عكس A "؛ $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

من خلال هذا الترميز يمكن أن نعبر بسهولة عن القواعد الخمسة الأساسية لحساب الاحتمالات.

- $P(A\cap B) = P(A)^* P(B/A)$

$\Rightarrow P(B/A) = P(A\cap B) / P(A)$ (بشرط $P(A) > 0$)

- $P(A\cap B) = P(A)^* P(B)$ عندما يكون الحدثان مستقلان

- $P(AUB) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$
- $P(AUB) = P(A) + P(B)$ عندما يكون الحدثان متنافيان أي: ($P(A\cap B) = 0$)

3. تمارين محلولة

التمرين 1 : صندوق يحتوي على 3 كرات بيضاء و 4 سوداء لا نفرق بينهم باللمس .إذا قمنا بإجراء سحبات في كل سحبة نأخذ كرة بطريقة عشوائية .إذا كانت سوداء نتوقف عن السحب وإذا كانت بيضاء لا نعيدها ونواصل سحب الكرة الموالية وهكذا:

1–ما هو احتمال أن تكون الكرة في السحبة الأولى سوداء؟

2–ما هو احتمال أن تكون الكرة في السحبة الثانية سوداء؟

3–استنتج الاحتمال لكي لا نجري السحبة الثالثة؟

الحل:

1–احتمال أن تكون الكرة سوداء في السحبة الأولى هو:

$$P(A) = \frac{C_4^1}{C_7^1} = \frac{4}{7}$$

2–احتمال الكرة المسحوبة في المرة الثانية سوداء هو

نرمز لحدث كون الكرة سوداء بـB ولكي يتحقق الحدث يجب أن تكون الكرة بيضاء في السحبة الأولى ولا نعيدها إلى الصندوق ثم نسحب في المرة الثانية كرة سوداء.

$$P(B) = \frac{C_3^1}{C_7^1} \times \frac{C_4^1}{C_6^1} = \frac{2}{7}$$

3–الاحتمال لكي لا نجري السحبة الثالثة هو:

لكي لا نجري السحبة الثالثة يجب أن نتوقف إما في السحبة الأولى أو الثانية أي يجب أن تكون الكرة سوداء في السحبة الأولى أو الثانية .إذن احتمال لكي لا نجري السحبة الثالثة هو:

$$P(A) + P(B) = \frac{4}{7} + \frac{2}{7} = \frac{6}{7}$$

التمرين02: إذا كانت لدينا تجربة تتمثل في رمي حجرة نرد .ما هو احتمال الحصول على:

1–أقل من3

2–أكثر من3

الحل:

1–احتمال الحصول على أقل من 3 هو:

الحصول على أقل من 3 عند رمي حجرة نرد يعني الحصول على 1 أو .2 وبما أن هذه الأحداث متنافية، فإننا نطبق قاعدة الجمع لهذه الأحداث فنحصل:

$$P(1 \cup 2) = P(1) + P(2) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6}$$

2–احتمال الحصول على أكثر من 3 هو:

الحصول على أكثر من 3 عند رمي حجرة نرد يعني الحصول على 4 أو 5 أو 6. وبما أن هذه الأحداث متنافية، فإننا نطبق قاعدة الجمع لهذه الأحداث فنحصل:

$$P(4 \cup 5 \cup 6) = P(4) + P(5) + P(6) \ = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6}$$

التمرين 3 :عند الإعلان عن نتائج السنة الجامعية وجد أنه في كل 100 طالب يوجد 20 طالب راسب .

فإذا اخترنا طالبين بطريقة عشوائية من مجموعة ما.

1–ما هو احتمال أن يكون الطالب الأول راسب؟

2–ما هو احتمال أن يكون الطالب الثاني راسب علما أن الطالب الأول راسب؟

3–ما هو احتمال أن يكونا كلاهما راسبين؟

الحل:

1–احتمال أن يكون الطالب الأول راسب هو:

نرمز للطالب الراسب بـA وبالتالي الاحتمال يساوي

$$P(\mathrm{A}) = \frac{20}{100} = 0.2$$

2–احتمال أن يكون الطالب الثاني راسب علما أن الطالب الأول راسب هو:

.

نرمز للطالب الراسب الثاني بـB فإذا علمنا أن الطالب الأول راسب يبقى في المجموعة 99 طالب من بينهم 19طالب من الراسبين .وبالتالي فإن احتمال أن يكون الطالب الثاني راسب علما أن الأول راسب هو

$$P(\mathrm{B}/A) = \frac{19}{99} = 0.192$$

3–احتمال أن يكون كلاهما راسبين هو:

$$P(\mathrm{B} \cap A) = P(\mathrm{B}/A)P(\mathrm{A}) = \frac{19}{99} \times \frac{20}{100} = 0.0384$$

التمرين 4: في أحد مخابر التحاليل الطبية تم فحص مجموعة من الأفراد للكشف عن مرض معين .فإذا رمزنا ب A إلى الشخص الذي تم فحصه مصاب بهذا المرض و بـB إلى أن نتيجة الفحص ايجابية .فإذا كان لدينا :

$$P(\mathrm{B}/A) = 0.99 \quad , \quad P(\mathrm{B}/\bar{A}) = 0.005$$

وأن 1 في الألف من الأشخاص يعانون من هذا المرض .اخترنا شخص بطريقة عشوائية .ما هو احتمال أن يكون هذا الشخص مصابا بالمرض علما أن نتيجة الفحص كانت ايجابية؟

الحل:

$$P(\bar{A}) = 0.999 \text{ ،} \ P(A) = 0.001$$

وبالتالي الاحتمال هو

$$P(A/B) = \frac{P(B/A)P(A)}{P(B/A)P(A)+P(B/\bar{A})P(\bar{A})} = \frac{0.99\times0.001}{0.99\times0.001+0.005\times0.999} = 0.165$$

التمرين5: إذا كان لديك الحوادث التالية:

$$P(A) = \frac{1}{4} \qquad P(B) = \frac{1}{3} \qquad P(A\cap B) = \frac{1}{5}$$

أ –أحسب كل من:

$$P(A\cup B), \qquad P(B/A)$$

ب –هل الحدثين A وB مستقلين أم لا؟

الحل:

أ –حساب كل من:

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) = \frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5} = 0.38$$

$$P(B/A) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{3}} = 0.6$$

ب –تكون الحوادث مستقلة إذا تحقق ما يلي:

$$P(A\cap B) = P(A)\times P(B)$$

لدينا: $P(A)\times P(B) = \frac{1}{4}\times\frac{1}{3} = 0.08$

و $P(A\cap B) = 0.2$

وبما أن $P(A)\times P(B) \neq P(A\cap B)$ فأن الحدثان غير مستقلان.

التمرين 6:في الإجابة عن سؤال في اختبار متعدد الخيارات، يكون الطالب في وضعيتين متأكد من الإجابة أو غير متأكد .نفترض p لاحتمال أن يكون الطالب متأكد من الإجابة، و1-p لاحتمال أن يكون الطالب غير متأكد من الإجابة .نفترض أيضا أن الطالب الذي يفكر في الإجابة سيكون صحيحا باحتمال قدره $\frac{1}{m}$ حيث أن m هو عدد الاختيارات المتاحة .ما هو احتمال أن يكون الطالب متأكد من الإجابة عن سؤال معين علما أنه أجاب عليه بشكل صحيح؟

الحل:

–احتمال أن يكون الطالب متأكد من الإجابة عن سؤال معين علما أنه أجاب عليه بشكل صحيح هو نفترض أن A وB يعبران عن احتمال إجابة الطالب على السؤال بشكل صحيح وأنه متأكد من الإجابة على التوالي.

$$P(B/A) = \frac{P(B)\times P(A/B)}{P(B)\times P(A/B)+P(\bar{B})\times P(A/\bar{B})} = \frac{P}{P+\frac{1}{m}(1-P)} = \frac{mP}{1+(m-1)P}$$

على سبيل المثال، إذا كان $m=5,p=0.5$ فإن احتمال أن يكون الطالب متأكد من الإجابة عن سؤال أجاب عليه بشكل صحيح هو0.83

التمرين 7: اشترى طالب 3 كتب في الإحصاء و 2 في الرياضيات و 4 في العلوم .وبعد الرجوع إلى المنزل رتب هذه الكتب في رف.

أ –ما هي عدد الطرق الممكنة لترتيب هذه الكتب؟

ب –ما هو احتمال ترتيب هذه الكتب بحيث يجب ترتيب الكتب من نفس النوع مع بعضها؟

ج –ما هو احتمال ترتيب هذه الكتب بحيث يجب ترتيب كتب العلوم فقط مع بعضها؟

الحل:

أ –عدد الطرق الممكنة لترتيب هذه الكتب هو

$$P_n = 9! = 9 \times 8 \times 7 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 362880$$

ب –احتمال ترتيب هذه الكتب بحيث تكون الكتب من نفس النوع مع بعضها هو

لدينا عدد الحالات الممكنة يساوي362880

وعدد الحالات المتشابهة يساوي $1738 = 3! \times 2! \times 4! \times 3!$

$$p_7^{3,2,4} = \frac{362880}{1738} \cong 209$$

ج –احتمال ترتيب هذه الكتب بحيث تكون كتب العلوم فقط مع بعضها هو

نقوم بحساب عدد الحالات المتشابهة $4! = 24$

$$p_7^4 = \frac{362880}{24} = 15120$$

التمرين 8: في إحدى الأقسام وجد أن 7% طلاب و 3% طالبات أجانب .وأن 80 % من المجموع الكلي للطلبة طالبات.

أ –اختير طالب بطريقة عشوائية ما هو احتمال أن يكون أجنبي؟

ب –إذا كان أجنبي ما هو احتمال أن تكون طالبة؟

الحل:

أ –احتمال أن يكون الطالب المختار أجنبي هو

نرمز لاحتمال كون الطالب أجنبي بA

$$\mathrm{P(A)} = \mathrm{P(B)} \times \mathrm{P}(\mathrm{A}/B) + P(G) \times P(A/G) =$$

$$= 0.2 \times 0.07 + 0.8 \times 0.03 = 0.038$$

$$\mathrm{P(G/A)} = \frac{P(G)\times P(A/G)}{P(G)\times P(A/G)+\mathrm{P(B)}\times\mathrm{P(A}/B)} =$$

$$= \frac{0.8\times0.03}{0.8\times0.03+0.2\times0.07} = \frac{0.024}{0.038} = 0.63$$

التمرين9: يصيب أحد الرماة الهدف باحتمال قدره 0.6 ما هو عدد الرميات التي يجب يطلقها هذا الرامي حتى يكون احتمال إصابة الهدف على الأقل80 %.

الحل:

_ ـ)_0.4_

احتمال أن يخطأ الرامي الهدف هو . 0.4 وبالتالي احتمال أن يخطأ الرامي الهدف n مرة هو$\mathbf{0.4^n}$

وعليه نبحث عن أصغر عدد صحيح n الذي يحقق:

$$(0.4)^n < 0.2 \text{ أو } 1-(0.4)^n > 0.8$$
$$(0.4)^1 = 0.4, (0.4)^2 = 0.16$$

وبالتالي يجب على الرامي إطلاق طلقتين على الأقل.

4. تمارين

تمرين1: صندوق به مصابيح، 5فاسدة و10 سليمة؛ نسحب ثلاثة مصابيح في آن واحد.

اوجد الاحتمالات التالية:

1. جميعها سليمة؟
2. واحد فقط فاسد؟
3. واحد على الاقل فاسد؟
4. اثنان على الاكثر فاسد؟

تمرين 2: القيت ثلاثة قطع نقدية، اوجد ما يلي:

1. المجموعة الاساسية؟
2. احتمال ان تكون القطعة الاولى صورة؟
3. احتمال ان تكون القطع الثلاثة صورة؟
4. احتمال ان تكون القطعة الثانية صورة؟

تمرين 3: ليكن A و B حادثان بحيث: $p(\bar{A}) = \frac{5}{8} \quad ; p(A \cap B) = \frac{1}{4} \;;$

$$p(A \cup B) = 7/8$$

المطلوب: اوجد احتمال الحوادث التالية:

$$p(A \cap \bar{B}) \;\;;\;\; p(A) \;\;;\;\; p(B)$$

تمرين 4: صيادان يقومان بالقذف على هدف معين، وكل واحد منهم يقوم بالقذف مرة واحد.

- احتمال ان الصياد A يصيب الهدف هو 0.7
- احتمال ان الصياد B يصيب الهدف هو 0.6
- احتمال ان الصياد A وB يصيبان الهدف هو 0.5

المطلوب:

- ما هو احتمال ان الصياد A فقط يصيب الهدف؟
- ما هو احتمال ان الصياد Aأو B يصيبان الهدف؟

تمرين 5: الجدول الموالي يوضح توزيع مجموعة طلبة حسب الفوج والنتيجة.

	الفوج 1	الفوج 2
ناجح	20	21
راسب	05	09

نعتبر التجربة العشوائية الممثلة في اختيار طالب بطريقة عشوائية . احسب الاحتمالات التالية:

1- الطالب المختار ينتمي الى الفوج1؟
2- الطالب المختار ناجح؟
3- الطالب المختار راسب؟
4- الطالب المختار ينتمي الى الفوج2؟
5- الطالب المختار ينتمي الى الفوج1 وراسب؟
6- الطالب المختار راسب علما أنه ينتمي الى الفوج1؟
7- الطالب المختار ناجح علما أنه ينتمي الى الفوج1؟
8- الطالب المختار ناجح علما أنه ينتمي الى الفوج2؟
9- الطالب المختار راسب علما أنه ينتمي الى الفوج2؟

تمرين 6: العدد الاجمالي لطلبة السنة الاولى جذع مشترك علوم اقتصادية يتكون من 48% طلبة و52% طالبات، 5% من الطلبة راسبين و25% من الطالبات راسبات، تم اختيار فرد بطريقة عشوائية.

المطلوب:

1. ما هو احتمال أن الفرد المختار راسب؟
2. ما هو احتمال أن الفرد المختار ناجح؟
3. اذا علمت أن الفرد المختار راسب، ما هو احتمال ان يكون طالب؟
4. اذا علمت أن الفرد المختار ناجح، ما هو احتمال ان تكون طالبة؟

الفصل الثالث: المتغيرات العشوائية

المتغير العشوائي هو متغير يمثل النتائج العددية لظاهرة عشوائية غير مضمونة النتائج مسبقا من بين قيم ممكنة له، حيث يجب أن يكون المتغير العشوائي قابل للقياس، وهذه العلاقة تسمى بالمتغير العشوائي الذي يعرف على أنه مجموعة من القيم العددية لتجربة عشوائية، يكون تحقق هذه القيم مرتبط باحتمالات معينة.

رياضياتيا : نرفق بكل عنصر من فضاء العينة قيمة حقيقية فنكون بذلك عرفنا دالة على هذا الفضاء، ان هذه الدالة تسمى بالمتغير العشوائي:

$$f\ :\quad S\ \to\ R$$

وهناك نوعين من المتغيرات العشوائية وهي:

1. المتغيرات العشوائية المنفصلة : في حالة النتائج العددية لظاهرة عشوائية تكون قيمها صحيحة؛ مثلاً، عدد الأطفال في الاسر او عدد السيارات لكل اسرة، عدد المباني، ... . في الغالب يكون المتغير العشوائي المنفصل معدود وليس دائماً.
2. المتغيرات العشوائية المتصلة: في حالة النتائج العددية لظاهرة عشوائية تكون قيمها تقبل التجزئة (الفاصلة)؛ مثلاً، طول اشخاص، أعمار فئة ما، وزن اشخاص، ... .

1. المتغير العشوائي المنفصل

هو المتغير العشوائي الذي قيمه الممكنة تكون في شكل عدد صحيح (لا يقبل الفاصلة)

نسمي قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي الذي يبين لنا كيفية توزيع الاحتمالات بدلالة القيم الممكنة للمتغير العشوائي، حيث يجب أن يكون مجموع الاحتمالات يساوي الواحد الصحيح و$f(x_i) \geq 0$.

مثال 01: في تجربة رمي 3 قطع نقدية، متغير عشوائي X يمثل عدد الصور (f) الظاهرة، فإنه يأخذ القيم التالية: 0، 1، 2، 3 حيث لكل قيمة احتمال معين.

لدينا عدد الحالات الممكنة $\Omega=\{ppp, ppf, pfp, pff, fpp, fpf, ffp, fff\}$

نلاحظ لدينا 8 حالات ممكنة وعليه:

$$p(X=0)=p(ppp)={}^{1}/_{8}$$
$$p(X=1)=p(ppf, pfp, fpp)={}^{3}/_{8}$$
$$p(X=2)=p(pff, ffp, fpf)={}^{3}/_{8}$$
$$p(X=3)=p(fff)={}^{1}/_{8}$$

ويمكن توضيح ذلك من خلال الجدول الموالي:

x_i	0	1	2	3	$\sum$
p_i	1/8	3/8	3/8	1/8	1

نلاحظ ان:

$$p_i \geq 0$$

$$\sum_{i=0}^{k} p_i = 1$$

حيث أنهما شرطان لازمان لكي تكون دالة الاحتمال. ويسمى هذا الجدول بقانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي.

تعريف قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المنفصل :

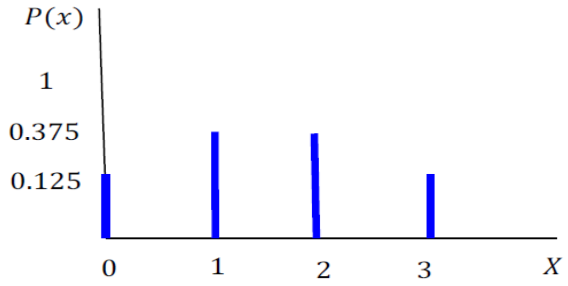
ليكن X متغير عشوائي منفصل ولتكن ${}_1, x_2, \ldots, x_n$ قيمها الممكنة مرتبة تصاعديا. ولتكن الدالة المعرفة كما يلي:

$$f(x_k) = p(X = x_k) \quad ; k = 1,2, \ldots n$$

نسمي الدالة السابقة دالة احتمالات اذا حققت الشرطين التاليين:

- $p_i \geq 0$
- $\sum_{i=0}^{k} p_i = 1$

التمثيل البياني لقانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المنفصل للمثال أعلاه مبين في الشكل الموالي:



1.1. دالة التوزيع التراكمية (تابع التوزيع)

ليكن X متغير عشوائي منفصل ولتكن $x_1, x_2, \ldots, x_n$ قيمها الممكنة ومرتبة تصاعديا. ولتكن الدالة المعرفة كما يلي:

$$F(x) = p(X \leq x_k) \quad ; k = 1,2, \ldots n$$

تسمى هذه الدالة بدالة التوزيع التراكمية (تابع التوزيع) للمتغير العشوائي المنفصل وهي تشبه التكرار التجميعي الصاعد في الاحصاء الوصفي

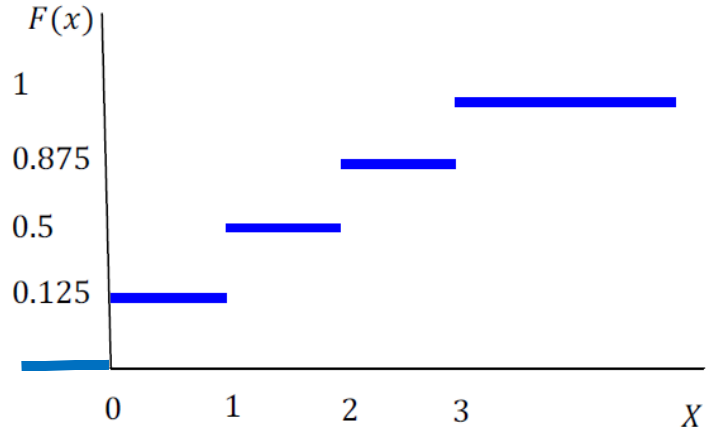
يمكن حساب تابع التوزيع للمتغير العشوائي في المثال 1 من خلال الجدول الموالي:

x_i	0	1	2	3	$\sum$
p_i	1/8	3/8	3/8	1/8	1
F(x)	1/8	1/2	7/8	1	–

ويمكن التعبير عنه ايضا ب

$$F(X) = \begin{cases} 0 & X < 0 \\ 0.125 & 0 \leq X < 1 \\ 0.5 & 1 \leq X < 2 \\ 0.875 & 2 \leq X < 3 \\ 1 & X \geq 3 \end{cases}$$

ويكون التمثيل البياني لتابع التوزيع كما يلي:



فمثلا إذا أردنا حساب احتمال x≤ 2 أو احتمال x< 1.5 او x≥ 1.5 فإنه يمكن استنتاجه مباشرة من الجدول:

$$p(x \geq 1.5) = p(x \geq 2) = p(x = 2) + p(x = 3) = \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$$

$$p(x < 1) = p(x = 0) + p(x = 1) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{1}{2}$$

$$p(x \leq 2) = p(x = 0) = p(x = 1) + p(x = 2) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8}$$

يمكن القول ان دالة التوزيع للمتغير العشوائي التطبيق $(X) \rightarrow R$ للأعداد الحقيقية من المجال $[0 - 1]$ المعرفة كما يلي:

$$F_x(a) = p(X \leq a) \quad ; \quad \forall a \in R$$

خصائص دالة التوزيع:

1. دالة التوزيع F دالة مستمرة على يمين كل نقطة من R.
2. F دالة متزايدة تماما.
3. $\lim_{\mathrm{n}\to+\infty} F(x) = 1 \quad ; \quad \lim_{n\to-\infty} F(x) = 0$

دالة التوزيع تمكن من حساب الاحتمالات الخاصة بالمجالات أي:

$$p(a \leq x \leq b) = p(x \leq b) - p(x \leq a) = F(b) - F(b)$$

2.1. التوقع الرياضياتي والتباين:

أ. التوقع الرياضياتي (الامل)

هو احد مقاييس النزعة المركزية، فمن اجل معرفة القيمة المتوسطة التي تتمركز حولها قيم المتغير نحسب الامل الرياضياتي، ليكن X متغير عشوائي منفصل، ذو القانون الاحتمالي $p(X = x_k)$ ولتكن $x_1, x_2, \dots, x_n$ قيمه الممكنة ومرتبة تصاعديا. فان التوقع الرياضياتي لهذا المتغير يعرف كما يلي:

$$E(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \, p(X = x_i)$$

في المثال السابق التوقع الرياضياتي يحسب كما يلي:

x_i	0	1	2	3	$\sum$
p_i	1/8	3/8	3/8	1/8	1
$x_i \, p_i$	0	3/8	6/8	3/8	1.5=12/8

وعليه فان:

$$E(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \, p(X = x_i) = 1.5$$

<u>خصائص التوقع الرياضياتي</u>

اذا كان a,b ثابتين، X,Y متغيرين عشوائيين مستقلين فان

$$E(a) = a$$
$$E(x + a) = E(x) + a$$
$$E(ax) = a \, E(x)$$
$$E(bx + a) = b \, E(x) + a$$
$$E(x - E(x)) = 0$$
$$E(x + y) = E(x) + E(y)$$
$$E(xy) = E(x)E(y)$$

يعرف العزم المركزي من الدرجة r للمتغير عشوائي منفصل X كما يلي:

العزم من الدرجة 0 $\mu_0 = 1$ $\mu_0 = E\left[(X - \mu)^0\right] = E(1) = 1$

العزم من الدرجة 1 $\mu_1 = 0$ $\mu_1 = E\left[(X - \mu)^1\right] = E(X) - E(\mu) = 0$

العزم من الدرجة 2 $\mu_2 = \sigma^2$ $\mu_2 = E\left[(X - \mu)^2\right] = V(X)$

العزم من الدرجة r

$$\mu_r = E\left((X - \mu)^r\right), \qquad r = 0, 1, 2, \dots$$

يحسب العزم المركزي حسب طبيعة المتغير متقطع أو مستمر كما يلي:

$$\mu_r = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^r f(x)dx \qquad \mu_r = \sum_i (x_i - \mu)^r f(x)$$

ب. التباين:

على الرغم من أن التوقع الرياضياتي يمكن أن يعطينا المتوسط المرجح لقيم المتغير العشوائي الا أنه لا يخبرنا عن توزع أو انتشار هذه القيم، ما يدفعنا لحساب التباين بواسطة العلاقة الموالية:

$$V(x) = E\big(X - E(X)\big) = E(X^2) - (E(X))^2$$

كما يمكن حساب الانحراف المعياري الذي هو عبارة عن الجدر التربيعي للتباين .

$$\sigma = \sqrt{V(x)}$$

في المثال السابق يمكن حساب التباين للمتغير العشوائي

x_i	0	1	2	3	$\sum$
p_i	1/8	3/8	3/8	1/8	1
$x_i^2\ p_i$	0	3/8	12/8	9/8	3=24/8

$$V(x) = 3 - 1.5^2 = 3 - 2.25 = 0.75$$

وبالتالي الانحراف المعياري هو: $\sigma = \sqrt{V(x)} = \sqrt{0.75} = 0.86$

خصائص التباين:

اذا كان a,b ثابتين، X,Y متغيرين عشوائيين مستقلين فان

$$V(a) = 0$$
$$V(x+a) = V(x)$$
$$V(ax) = a^2\,V(x)$$
$$V(bx+a) = b^2\,V(x)$$
$$V(x+y) = V(x) + V(y)$$

2. المتغير العشوائي المتصل

المتغير العشوائي المتصل هو المتغير الذي يأخذ عدد غير منتهي من القيم في مجال محدود. وتوجد الكثير من الأمثلة عن المتغيرات العشوائية المتصلة، مثل أوزان مجموعة أشخاص، دخل الأسر، أعمار أشخاص، طول فئة معينة من المجتمع، ...

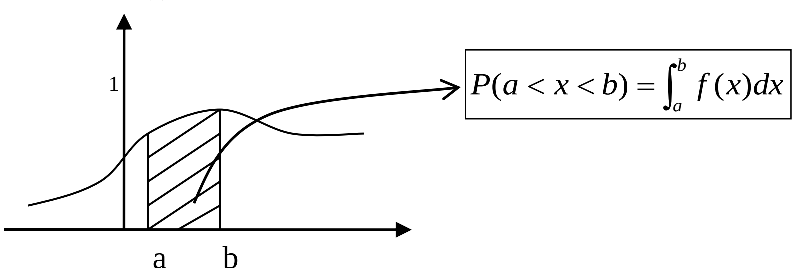
1.2. دالة الكثافة الاحتمالية:

نعتبر X متغير عشوائي مستمر اذا كان له دالة موجبة f معرفة على كل عدد حقيقي لأي مجموعة في الفضاء الاحتمالي A من الأعداد الحقيقية، تعرف بما يلي:

1. $f(x) \geq 0 \quad ; \forall x \in R$
2. f مستمرة على مجال أو مجالات
3. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)d(x) = 1$

الدالة f تسمى دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي المتصل X.

لاحظ أنه بما أن X تأخذ عددا لا متناهيا من القيم داخل أي مجال، فإن احتمال قيمة بعينها هو احتمال يؤول إلى الصفر.$P(X=x) \to 0$ لذلك فإن دالة الكثافة تستعمل لحساب احتمال مجال. ويكون ذلك بحساب المساحة تحت منحنى f(x) بين حدود المجال.



$$P(a < x < b) = \int_a^b f(x)dx$$

الشكل 06: التمثيل البياني لدالة الكثافة لمتغير العشوائي المستمر

نلاحظ أن إشارة التكامل هنا تقابل إشارة المجموع في حالة المتغير ع المتقطع.

هذه الخصائص تفيدنا في حساب احتمالات بعض المجالات من خلال احتمالات مجالات أخرى.

مثال 02: أوجد قيمة الثابت C من أجل ان تكون دالة الكثافة الاحتمالية في الدالة التالية وأحسب احتمال أن يكون X تنتمي للمجال من 1 إلى 2.

$$f(x) = \begin{cases} cx^2 & 0 < x < 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 => \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_0^3 Cx^2dx + \int_3^{+\infty} 0dx = 1 => C\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 = 9C = 1 => C = 1/9$$

لكي تكون x دالة كثافة يجب أن يكون C = 1/9 .

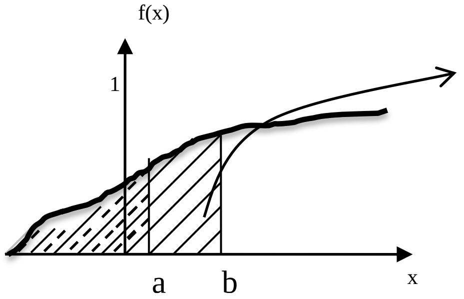
$$P(1<x\le 2)=\int_1^2 f(x)dx=\int_1^2 (1/9)x^2dx=\frac{1}{9}\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2=\frac{1}{9}\left[\frac{8-1}{3}\right]=\frac{7}{27}$$

2.2. دالة التوزيع

تعرف دالة التوزيع للمتغير المستمر كما يلي:

$$\boxed{F(x)=P(X\le x)=\int_{-\infty}^{x} f(u)du}$$

ومنه فان مشتق دالة التوزيع يعطينا دالة الكثافة الاحتمالية، كما أن لدالة التوزيع أهمية أكبر بالنسبة للمتغير المستمر. السبب في ذلك أننا نهتم، في حالة المتغير المستمر، باحتمال مجال وليس باحتمال نقطة، ولحساب احتمال مجال من الأيسر التعويض في دالة التوزيع بدلا من حساب التكامل في كل مرة. يتضح ذلك من القاعدة التالية: بفرض a, b نقطتان من مجال تعريف X، بحيث b > a . لحساب احتمال أن تكون X تنتمي إلى المجال]a, b] :



$$\boxed{P(a<x\le b)=P(X\le b)-P(X\le a)=F(b)-F(a)}$$

الشكل 07: حساب الاحتمال من خلال دالة التوزيع

مثال:

أوجد دالة التوزيع للمتغيرة المذكورة في المثال السابق.

استخدم دالة التوزيع لحساب الاحتمال: P(1< x <2).

$$*x<0: \qquad F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(u)du=\int_{-\infty}^{0} 0du=0$$

$$*0\le x<3: \qquad F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(u)du=\int_{-\infty}^{0} 0du+\int_{0}^{x}\frac{1}{9}u^2du=\frac{1}{9}\left[\frac{u^3}{3}\right]_0^x=\frac{x^3}{27}$$

$$*x\ge 3: \qquad F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(u)du=\int_{-\infty}^{0} 0du+\int_{0}^{3}\frac{1}{9}u^2du+\int_{3}^{x}0du=0+\frac{1}{9}\left[\frac{u^3}{3}\right]_0^3+0=\frac{27}{27}=1$$

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ x^3/27 & 0\le x<3\\ 1 & x\ge 3\end{cases} \qquad P(1<x\le 2)=F(2)-F(1)=\frac{2^3}{27}-\frac{1^3}{27}=\frac{7}{27}$$

3.2. التوقع الرياضياتي والتباين

أ. التوقع الرياضياتي

يعرف التوقع الرياضياتي لمتغير عشوائي مستمر هو تكامل لجداء المتغير في دالة الكثافة الاحتمالية على مجال تعريفها، يحسب بالعبارة الموالية:

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

نرمز للتوقع أحيانا ب μ أو μ_x.

مثال 04: إذا كانت دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي كما يلي:

$$f(X)=\begin{cases}\frac{1}{2}x & 0<X<2\\ 0 & \text{بخلاف ذلك}\end{cases}$$

احسب التوقع الرياضي للمتغير العشوائي؟

الحل:

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

$$E(X)=\int_0^2 x\left(\frac{1}{2}x\right)dx=\frac{x^2}{2}=\left[\frac{x^3}{6}\right]_0^2=\frac{4}{3}$$

$$E(X)=1.33$$

ب. التباين

إذا كان X متغير عشوائي متصل له دالة كثافة احتمالية f(x) فإننا يمكن حساب تباينه من خلال القانون التالي:

$$V(x)=E\big(X-E(X)\big)=E(X^2)-(E(X))^2$$

$$V(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2 f(x)dx$$

$$V(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx-\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

كما يمكن حساب الانحراف المعياري الذي هو عبارة عن الجذر التربيعي للتباين .

$$\sigma=\sqrt{V(x)}$$

ملاحظة: التوقع والتباين لهما نفس الخصائص في حالتي المتغيرات المنفصلة والمستمرة.

مثال 06: احسب التباين والانحراف المعياري في المثال السابق؟

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - [E(X)]^2$$

$$V(X) = \int_0^2 x^2\left(\frac{1}{2}x\right)dx - \left[\frac{4}{3}\right]^2 = \int_0^2 \frac{x^3}{2}\,dx - \left[\frac{4}{3}\right]^2$$

$$= \left[\frac{x^4}{8}\right]_0^2 - \left[\frac{4}{3}\right]^2 = 2 - 1.77 = 0.23$$

ويمكن حساب الانحراف المعياري من خلال:

$$\delta(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{0.23} = 0.47$$

خلاصة

يتم تعريف التوزيع الاحتمالي (أو القانون الاحتمالي) لمتغيرة عشوائية من خلال تحديد القيم الممكنة للمتغيرة و الاحتمالات المقابلة لها، إما من خلال جدول (جدول التوزيع الاحتمالي) أو دالة، تسمى دالة كثافة الاحتمالية.

لكي نقول عن دالة ما أنها دالة كثافة احتمالية يجب أن تكون موجبة دوما و أن يكون مجموع الاحتمالات مساويا للواحد.

الدالة التجميعية (أو دالة التوزيع) تمثل احتمال مجال من أصغر قيمة للمتغيرة إلى نقطة ما:

$F(x) = P(X \le x) = \sum_{u \le x} f(u)$ في حالة م متقطعة و $F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$ في حالة م مستمرة.

نظرا لتعريفها تأخذ دالة التوزيع مسارا متزايدا (أو ثابتا على أجزاء من المجال). تبرز أهمية الدالة التجميعية أكثر عندما تكون المتغيرة مستمرة لأننا نهتم حينها باحتمالات مجالات. يمكن استنتاج دالة الكثافة من خلال اشتقاق دالة التوزيع.

التوقع والتباين لهما نفس الخصائص قي حالتي المتغيرات المنفصلة والمستمرة.

3. تمارين محلولة

التمرين :**1** نرمي حجرة نرد . نعتبر المتغير العشوائي X هو ضعف الرقم الذي يظهر على الوجه العلوي.

أ –حدد قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي ومثله بيانيا؟

ب –حدد دالة التوزيع المتغير العشوائي وتمثيلها البياني؟

ج –احسب التوقع الرياضي، التباين والانحراف المعياري؟

الحل:

أ –تحديد قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي:

عدد الحالات الممكنة هو :

_Ω_x={2,4,6,8,10,12}

في ــ :فإنه يمكن إيجاد احتمالات المتغير

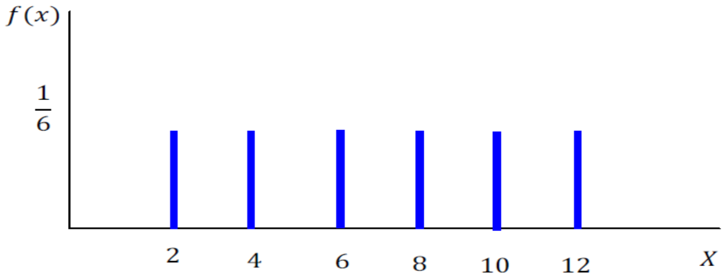
x_i	2	4	6	8	10	12	∑
p_i	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1

من خلال الجدول نلاحظ أن الشرطين محققتين :

$f(x_i) \geq 0$

$\sum_{i=0}^{n} p_i = 1$

التمثيل البياني:

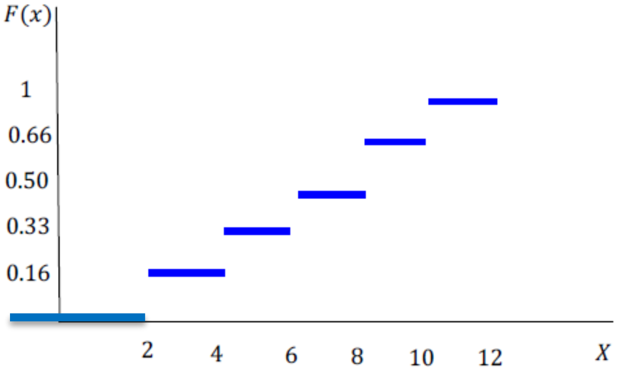


ت. تحديد دالة التوزيع المتغير العشوائي

x_i	2	4	6	8	10	12	∑
p_i	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1
x_i	1/6	2/6	3/6	4/6	5/6	1	–

$$F(X)=\begin{cases}0 & X<2\\ \frac{1}{6} & 2\le X<4\\ \frac{2}{6} & 4\le X<6\\ \frac{3}{6} & 6\le X<8\\ \frac{4}{6} & 8\le X<10\\ \frac{5}{6} & 10\le X<12\\ 1 & X\ge 12\end{cases}$$

التمثيل البياني:



ج –حساب التوقع الرياضي والتباين

–التوقع الرياضي

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$
$$=2\times\frac{1}{6}+4\times\frac{1}{6}+6\times\frac{1}{6}+8\times\frac{1}{6}+10\times\frac{1}{6}+12\times\frac{1}{6}=7$$

–التباين

$$V(X)=E(X^2)-(E(X))^2$$
$$=4\times\frac{1}{6}+16\times\frac{1}{6}+36\times\frac{1}{6}+64\times\frac{1}{6}+100\times\frac{1}{6}+144\times\frac{1}{6}=60.7-7^2$$
$$V(X)=11.7$$

–الانحراف المعياري

$$\delta(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{11.7}=3.4$$

التمرين 02: ليكن قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي مبين في الجدول الموالي:

x_i	0	1	2	3	$\sum$
p_i	1/64	18/64	18/64	27/64	1

أ – حدد تابع التوزيع للمتغير العشوائي حسابيا وبيانيا؟

ب – احسب التوقع الرياضي، التباين والانحراف المعياري؟

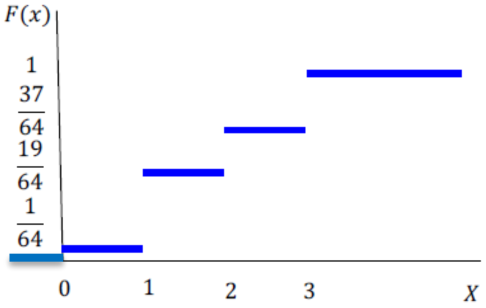
الحل:

أ- تابع التوزيع للمتغير العشوائي

x_i	0	1	2	3	$\sum$
p_i	1/64	18/64	18/64	27/64	1
	1/64	19/64	37/64	1	/

$$F(X) = \begin{cases} 0 & X < 0 \\ \frac{1}{64} & 0 \leq X < 1 \\ \frac{19}{64} & 1 \leq X < 2 \\ \frac{37}{64} & 2 \leq X < 3 \\ 1 & X \geq 3 \end{cases}$$

يكون التمثيل البياني لتابع التوزيع كما يلي



ب- حساب التوقع الرياضي والتباين

-التوقع الرياضي

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$
$$= 0 \times \frac{1}{64} + 1 \times \frac{18}{64} + 2 \times \frac{18}{64} + 3 \times \frac{27}{64} = 2.1$$

-التباين

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$
$$= 0 \times \frac{1}{64} + 1 \times \frac{18}{64} + 4 \times \frac{18}{64} + 9 \times \frac{27}{64} = 5.2 - 2.1^2$$
$$V(X) = 0.8$$

-الانحراف المعياري

$$\delta(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{0.8} = 0.9$$

التمرين 3: يحتوي صندوق على 6 كرات سوداء و 4 حمراء قمنا بسحب 3 كرات بطريقة عشوائية .إذا كان متغير عشوائي يمثل عدد الكرات الحمراء المسحوبة.

1-حدد قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي؟

2-أوجد تابع التوزيع للمتغير العشوائي؟

3–أحسب التوقع الرياضي، التباين والانحراف المعياري؟

الحل:

1–قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي:

بما أن المتغير العشوائي يمثل عدد الكرات الحمراء فإنه يمكن أن يأخذ القيم التالية: 0,1,2,3.

حيث أن عدد الحالات الممكنة هو $120 = \frac{10!}{7!3!} = {}^{3}_{10}$

حساب الاحتمالات المقابلة لكل قيمة في:

$$P(X=0)=\frac{C_4^0\times C_6^3}{C_{10}^3}=\frac{20}{120}$$

$$P(X=1)=\frac{C_4^1\times C_6^2}{C_{10}^3}=\frac{60}{120}$$

$$P(X=2)=\frac{C_4^2\times C_6^1}{C_{10}^3}=\frac{36}{120}$$

$$P(X=3)=\frac{C_4^3\times C_6^0}{C_{10}^3}=\frac{4}{120}$$

وبالتالي قانون التوزيع الاحتمالي يكون كما يلي:

$\sum$	3	2	1	0	x_i
1	1/30	9/30	15/30	5/30	p_i

2–تابع التوزيع للمتغير العشوائي هو

$$F(X)=\begin{cases}0 & X<0\\ \frac{20}{120} & 0\le X<1\\ \frac{80}{120} & 1\le X<2\\ \frac{116}{120} & 2\le X<3\\ 1 & X\ge 3\end{cases}$$

3–حساب التوقع الرياضي والتباين

–التوقع الرياضي

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n}p_ix_i$$
$$=0\times\frac{20}{120}+1\times\frac{60}{120}+2\times\frac{36}{120}+3\times\frac{4}{120}=1.2$$

–التباين

$$V(X)=E(X^2)-(E(X))^2$$
$$=0\times\frac{1}{120}+1\times\frac{60}{120}+4\times\frac{36}{120}+9\times\frac{4}{120}=2-1.2^2$$
$$V(X)=0.56$$

–الانحراف المعياري

$$\delta(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{0.56}=0.74$$

التمرين .4 إذا كان متغير عشوائي مستمر معرف بالتابع التالي

$$f(X) = \begin{cases} 2x & 0 \le X \le 1 \\ 0 & \text{بخلاف ذلك} \end{cases}$$

1–تأكد أن التابع المعطى هو تابع كثافة احتمالية؟ ومثله بيانيا؟

2–احسب الاحتمال p(0<X<0,5)

3–حدد تابع التوزيع للمتغير العشوائي؟ ومثله بيانيا؟

4–احسب التوقع الرياضي، التباين والانحراف المعياري؟

الحل:

1–التأكد أن التابع المعطى هو تابع كثافة احتمالية:

تابع كثافة احتمالية يجب توفر شرطين أساسيين ___< :حتى يكون

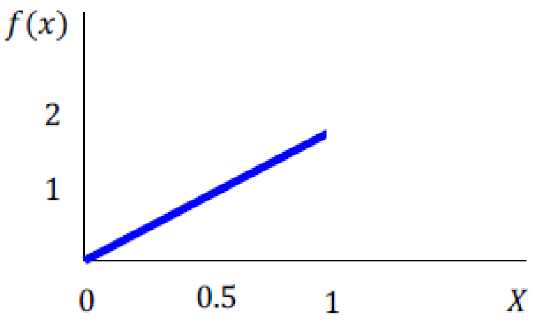
بما ان المتغير موجب فان الدالة موجبة ومنه الشرط الأول دوما محققة مهما كانت قيمة ضمن مجال تعريفه

الشرط الثاني أيضا محقق ومنه نستنتج أن التابع المعطى هو تابع كثافة احتمالية.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

$$= \int_0^1 2xdx = \left[\frac{2x^2}{2}\right]_0^1 = 0 - 1 = 1$$

التمثيل البياني:



2–حساب الاحتمال p(0<X<0,5)

$$P\left(0 < X < \frac{1}{2}\right) = \int_0^{0.5} 2xdx = \left[\frac{2x^2}{2}\right]_0^{0.5} = 0.25$$

3–تحديد تابع التوزيع للمتغير العشوائي

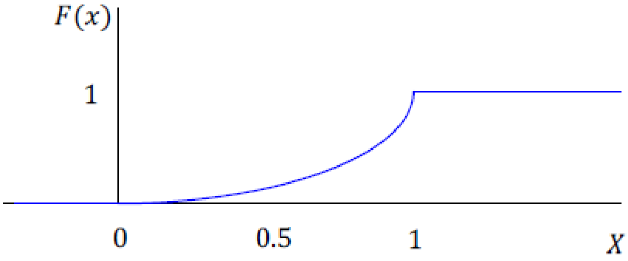
$$F(X) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_0^x 2xdx = \frac{2x^2}{2}$$

حيث أن : $X \le 1$

وبالتالي يكون تابع التوزيع كما يلي:

$$F(X)=\begin{cases}0 & X<0\\ \frac{2x^2}{2} & 0\le X\le 1\\ 1 & X>1\end{cases}$$

ويمكن تحديد التمثيل البياني لتابع التوزيع في مثالنا هذا في الشكل التالي:



3–حساب التوقع الرياضي والتباين

–التوقع الرياضي

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx$$
$$E(X)=\int_0^1 x(2x)dx=2x^2=\left[\frac{2x^3}{3}\right]_0^1=\frac{2}{3}$$
$$E(X)=0.66$$

–التباين

$$V(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx-[E(X)]^2$$
$$V(X)=\int_0^1 x^2(2x)dx-\left[\frac{2}{3}\right]^2=\int_0^1 2x^3dx-\left[\frac{2}{3}\right]^2$$
$$=\left[\frac{2x^4}{4}\right]_0^1-\left[\frac{2}{3}\right]^2=0.5-0.44=0.06$$

–الانحراف المعياري

$$\delta(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{0.06}=0.24$$

التمرين :5 نفترض أن متغير عشوائي مستمر معرف بالتابع التالي:

$$f(X)=\begin{cases}K(4x-2x^2) & 0<X<2\\ 0 & \text{بخلاف ذلك}\end{cases}$$

1–أحسب قيمة الثابتK حتى يكون التابع المعطى هو تابع كثافة احتمالية؟

2–احسب الاحتمال p(x>1)

3–حدد دالة التوزيع التراكمية للمتغير العشوائي؟

الحل:

1– حساب قيمة الثابتK :

بما أن التابع المعطى هو تابع كثافة احتمالية فهو يحقق:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$
$$= \int_0^2 K(4x - 2x^2)dx = 1$$
$$= K\int_0^2 (4x - 2x^2)dx = 1$$
$$= K\left[2x^2 - \frac{2x^3}{3}\right]_0^2 = K\frac{8}{3} = 1$$
$$K = \frac{3}{8}$$

2–احسب الاحتمال $p(x>1)$

$$P(X > 1) = \int_1^2 \frac{3}{8}(4x - 2x^2)dx$$
$$= \frac{3}{8}\left[2x^2 - \frac{2x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{1}{2}$$

3–حساب تابع التوزيع للمتغير العشوائي

$$F(X) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_0^x \frac{3}{8}(4x - 2x^2)dx = \frac{3}{8}(2x^2 - \frac{2x^3}{3})$$

وبالتالي يكون تابع التوزيع كما يلي:

$$F(X) = \begin{cases} 0 & X < 0 \\ \frac{3}{8}(2x^2 - \frac{2x^3}{3}) & 0 \le X \le 2 \\ 1 & X > 2 \end{cases}$$

التمرين :**6** نفترض أن متغير عشوائي مستمر له تابع كثافة احتمالية معطى

$$f(X) = \begin{cases} cx^4 & 0 < X < 2 \\ 0 & \text{بخلاف ذلك} \end{cases}$$

1–أحسب قيمة الثابتc ؟

2– احسب الاحتمال$p(x>1.5)$

3–حدد تابع التوزيع للمتغير العشوائي؟

4–أحسب التوقع الرياضي، التباين والانحراف المعياري؟

الحل:

1–حساب قيمة الثابت

بما أن التابع المعطى هو تابع كثافة احتمالية فإنه:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$
$$= \int_0^2 cx^4 dx = 1$$
$$= c\int_0^2 x^4 dx = 1$$
$$= c\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^2 = c\frac{32}{5} = 1$$
$$c = \frac{5}{32}$$

2–حساب الاحتمال

$$P(X < 1.5) = \int_0^{1.5} \frac{5}{32} x^4 dx$$

$$= \frac{5}{32}\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^{1.5} = 0.23$$

3–حساب تابع التوزيع للمتغير العشوائي

$$F(X) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_0^{x} \frac{5}{35}(x^4)dx = \frac{5}{32}(\frac{x^5}{5})$$

وبالتالي يكون تابع التوزيع كما يلي:

$$F(X) = \begin{cases} 0 & X < 0 \\ \frac{5}{32}x^5 & 0 \leq X \leq 2 \\ 1 & X > 2 \end{cases}$$

4–حساب التوقع الرياضي والتباين

–التوقع الرياضي:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

$$E(X) = \int_0^2 x\left(\frac{5}{32}x^4\right)dx = \int_0^2 \left(\frac{5}{32}x^5\right)dx = \frac{5}{32}\left[\frac{x^6}{6}\right]_0^2 = \frac{5}{3}$$

$$E(X) = 1.66$$

–التباين:

$$V(X) = V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - [E(X)]^2$$

$$\int_0^2 x^2\left(\frac{5}{32}x^4\right)dx - \left[\frac{5}{3}\right]^2 = \int_0^2 \frac{5}{32}x^6 dx - \left[\frac{5}{3}\right]^2$$

$$= \frac{5}{32}\left[\frac{x^7}{7}\right]_0^2 - \left[\frac{2}{3}\right]^2 = 2.85 - 2.77 = 0.07$$

$$V(X) = 0.07$$

–الانحراف المعياري:

$$\delta(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{0.07} = 0.28$$

التمرين :7إذا كان متغير عشوائي مستمر معرف بالتابع التالي

$$f(X) = \begin{cases} 30x^2(1-x)^2 & 0 \leq X \leq 1 \\ 0 & \text{بخلاف ذلك} \end{cases}$$

1–أثبت أن التابع المعطى هو تابع كثافة احتمالية ؟

2–احسب الاحتمال$p(x>1/3)$

الحل:

1–إثبات أن التابع المعطى هو تابع كثافة احتمالية:

حتى يكون تابع كثافة احتمالية يجب توفر شرطين :

$$f(X) \geq 0$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

الخاصية الأولى دوما محققة مهما كانت قيمة ضمن مجال تعريفه

الخاصية الثانية:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$
$$= \int_0^1 30x^2(1-x)^2dx = 30x^2(1-2x+x^2)dx$$
$$= \int_0^1 30x^2 - 60x^3 + 30x^4dx$$
$$= \left[\frac{30x^3}{3} - \frac{60x^4}{4} + \frac{30x^5}{5}\right]_0^1 = [10x^3 - 15x^4 + 6x^5]_0^1$$
$$= (10\times 1 - 15\times 1 + 6\times 1) - (10\times 0 - 15\times 0 + 6\times 0)$$
$$= 10 + 6 - 15 = 1$$

الخاصية الثانية أيضا محققة ومنه التابع المعطى هو تابع كثافة احتمالية.

2–حساب الاحتمال $p(x>1/3)$

$$P\left(X \leq \frac{1}{3}\right) = \int_0^{\frac{1}{3}} 30x^2(1-x)^2dx$$
$$= \int_0^{\frac{1}{3}} 30x^2(1-x)^2dx = 30x^2(1-2x+x^2)dx$$
$$= \int_0^{\frac{1}{3}} 30x^2 - 60x^3 + 30x^4dx$$
$$= \left[\frac{30x^3}{3} - \frac{60x^4}{4} + \frac{30x^5}{5}\right]_0^{\frac{1}{3}} = [10x^3 - 15x^4 + 6x^5]_0^{\frac{1}{3}}$$
$$= [10x^3 - 15x^4 + 6x^5]_0^{\frac{1}{3}}$$
$$= (10(\tfrac{1}{3})^3 - 15(\tfrac{1}{3})^4 + 6(\tfrac{1}{3})^5) - (10\times 0 - 15\times 0 + 6\times 0)$$
$$= 10\frac{1}{27} - 15\frac{1}{81} + 6\frac{1}{243}$$
$$P\left(X \leq \frac{1}{3}\right) = 0.2098$$

التمرين :6 إذا كان متغير عشوائي مستمر معرف بتابع الكثافة الاحتمالية التالي

$$f(X) = \begin{cases} Kx^3 & 0 < X \leq 1 \\ 0 & \text{بخلاف ذلك} \end{cases}$$

1–أحسب قيمة الثابتc ؟

2–احسب الاحتمال $p(X \leq \frac{2}{3} \ / \ X > \frac{1}{3})$

3–أحسب التوقع الرياضي، التباين والانحراف المعياري؟

الحل:

1–حساب قيمة الثابتK: بما أن التابع المعطى هو تابع كثافة احتمالية فإنه:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$
$$= \int_0^1 Kx^3dx = 1$$
$$= c\int_0^1 x^3dx = 1$$
$$= c\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = c\frac{1}{4} = 1$$
$$c = 4$$

2–حساب الاحتمال $p(X \leq \frac{2}{3} \,/\, X > \frac{1}{3})$

$$P(X \leq \frac{2}{3}/X > \frac{1}{3}) = \frac{P(X\leq\frac{2}{3}/X>\frac{1}{3})}{P(X>\frac{1}{3})}$$

$$= \frac{\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} 4x^3dx}{\int_{\frac{1}{3}}^{1} 4x^3dx} = \frac{\left[\frac{4x^4}{4}\right]_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}}}{\left[\frac{4x^4}{4}\right]_{\frac{1}{3}}^{1}} = 0.1875$$

3–حساب التوقع الرياضي والتباين

–التوقع الرياضي:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$
$$E(X) = \int_0^1 x(4x^3)dx = \int_0^1 4x^4dx = \left[\frac{4x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{4}{5}$$
$$E(X) = 0.8$$

التباين:

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2f(x)dx - [E(X)]^2$$
$$V(X) = \int_0^1 x^2(4x^3)dx - \left[\frac{4}{5}\right]^2 = \int_0^1 4x^5dx - \left[\frac{4}{5}\right]^2$$
$$= \left[\frac{4x^6}{6}\right]_0^1 - \left[\frac{4}{5}\right]^2 = 0.66 - 0.64 = 0.02$$
$$V(X) = 0.02$$

–الانحراف المعياري : $\delta(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{0.02} = 0.14$

4. تمارين

تمرين1: ليكن X متغير عشوائي يمثل الفرق بين عدد مرات ظهور الصورة والكتابة عند رمي قطعة نقدية n مرة.

- ما هي القيم الممكنة للمتغير؟

من أجل n =5

- اعطي التوزيع الاحتمالي؟
- احسب اللامل الرياضياتي والتباين وكذا الانحراف المعياري؟
- مثل بيانيا الدالة؟

تمرين 2: نختار قطعتين نقديتين من صندوق به قطتين ذات 5 دينار و3 قطع ذات 10 دينار. X متغير عشوائي يمثل مجموع القيميتين المحصل عليهما .

المطلوب:

- اوجد التوزيع الاحتمالي؟
- احسب اللامل الرياضياتي ؟
- أحسب التباين والانحراف المعياري؟
- مثل بيانيا الدالة الاحتمالية ؟
- مثل بيانيا دالة التوزيع التراكمية؟

تمرين 3: في دراسة اجتماعية نختار عشوائيا عائلة ذات 4 اطفال ونسجل جنس الاطفال (ذكر M او انثى F) حيث نبدأ الطفل الاكبر.

المطلوب:

- اعطي المجموعة الاساسية

T متغير عشوائي يبين عدد البنات في العائلة المختارة.

- اوجد التوزيع الاحتمالي؟
- احسب اللامل الرياضياتي ؟
- أحسب التباين والانحراف المعياري؟
- مثل بيانيا الدالة الاحتمالية ؟
- مثل بيانيا دالة التوزيع التراكمية؟
- احسب الاحتمالات التالية: $p(t > 1)$; $p(t \geq 2)$; $p(1 < t \leq 4)$; $p(1 \leq t < 4)$

تمرين4: لتكن دالة التوزيع التراكمية للمتغير العشوائي المنفصل معرفة كما يلي

$$F(X) = \begin{cases} 0 & si\ x < 0 \\ 0{,}5 & si\ 0 \leq x < 1 \\ 0{,}6 & si\ 1 \leq x < 2 \\ 0{,}8 & si\ 2 \leq x < 3 \\ 0{,}9 & si\ 3 \leq x < 4 \\ 1 & si\ x \geq 4 \end{cases}$$

المطلوب:

- اوجد جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير؟
- احسب اللامل الرياضياتي ؟
- أحسب التباين والانحراف المعياري؟
- مثل بيانيا الدالة الاحتمالية ؟
- مثل بيانيا دالة التوزيع التراكمية؟

تمرين 5: ليكن X متغير عشوائي له التوزيع الاحتمالي التالي:

X	-1	0	1	3
Px	0.2	0.2	0.5	0.1

المطلوب:

- احسب اللامل الرياضياتي E(XX) ; E(3X-1)؟
- أحسب التباين والانحراف المعياري؟
- مثل بيانيا الدالة الاحتمالية ؟
- مثل بيانيا دالة التوزيع التراكمية؟

تمرين 5: لتكن الدلة المعرفة كما يلي:

$$F(X) = \begin{cases} 0 & si\ x < 0 \\ \dfrac{x}{x+1} & si\ x \geq 0 \end{cases}$$

1. هل هذه الدالة هي دالة توزيع تراكمية؟
2. أعطي دالة التوزيع الاحتمالية؟
3. أحسب الاحتمال $p(2 < x < 3)$

الفصل الرابع: التوزيعات الاحتمالية

1. التوزيعات الاحتمالية المتقطعة

بعد تبيان مفهوم المتغيرات العشوائية والتوزيع الاحتمالي يمكننا الآن أن نتطرق لعدد من التوزيعات الاحتمالية الشهيرة، تستخدم هذه التوزيعات في حل العديد من المسائل في مجال التسيير الصناعي والتجاري وفي الإدارة. ومن أكثر هذه التوزيعات شيوعا: التوزيع ذي الحدين (الثنائي) وتوزيع بواسون. في النهاية يفترض أن يكون الطالب قادرا على استذكار القوانين المدروسة وخصائصها الأساسية، ومعرفة متى وكيف يمكن استخدام كل قانون.

1.1. التوزيع المنتظم المتقطع

هو توزيع الاحتمالات حيث يكون عددًا محدودًا من القيم المتباعدة بالتساوي ويمكن ملاحظتها بشكل متساوٍ تقريبًا؛ فكل قيمة من القيم n يكون لها احتمال متساوٍ مع $1/n$. وبمعنى آخر فإن "التوزيع المنتظم المتقطع" سيكون "عددًا معرفًا من النتائج المتباعدة بالتساوي والتي لها نفس نسبة احتمال الحدوث."

ليكن n عدد طبيعي موجب، نقول عن المتغير العشوائي X أنه يتبع التوزيع المنتظم في المجال $[1-n]$ اذا كانت قيمه الممكنة 1، 2، ... n مع الاحتمالات $p(X=k)=\frac{1}{n}$

وعليه يكون

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}=1$$

$$E(X)=\frac{n+1}{2}$$

$$V(X)=\frac{n^2-1}{12}$$

هذا القانون يسمح بنمذجة الظواهر ذات نتيجة عشوائية تأخذ قيم طبيعية محصورة بين $[1-n]$.

2.1. توزيع برنولي

نقول عن تجربة أنها تتبع توزيع برنولي[1] إذا كانت تحتمل نتيجتين (حدثين) متنافيتين A و’A. نسمي A نجاح و’A فشل.

نعتبر المتغير عشوائي X التي تمثل **عدد مرات النجاح**، تأخذ X القيمة 1 عند تحقق الحدث A و0 في الحالة المعاكسة.

نرمز عادة ب p "احتمال النجاح" لاحتمال تحقق الحدث A

---

[1] بإسم Jacques Bernoulli الذي درس هذا التوزيع في أواخر القرن 17.

و$q = 1 - p$ احتمال الحدث المعاكس (الفشل). يعين توزيع برنولي كما يلي :

$$\boxed{P(X=1)=p, \qquad P(X=0)=q, \qquad X=0,1.}$$

ونكتب **X ~ B(1, p)**

خصائص توزيع برنولي

$E(X) = \Sigma x_i p_i = 1.p + 0.q = p \Rightarrow \quad E(X) = p.$

$V(X) = E(X^2) – E(X)^2 = (1^2.p + 0^2.q) – p^2 = p – p^2 = p(1- p) = pq \Rightarrow \quad \mathbf{V(X) = qp.}$

3.1. توزيع ثنائي الحد

يستخدم هذا التوزيع لإيجاد الاحتمالات في الحالات التي يكون للتجربة العشوائية ذات نتيجتان فقط: (النجاح أو الفشل). حيث إذا كررنا تجربة برنولي n مرة فإن X (عدد مرات النجاح) تأخذ القيم:

$$X = 0, 1, 2, 3, . . . n$$

لنفترض في التجربة لرمي قطعة نقدية مكررة عدد n من المرات، وX عدد مرات الحصول على صورة (F):

حالة : $n = 2$ $\qquad X = 0, 1, 2.$

$P(X = 0) = q*q = q^2, \quad P(X=1) = P(FP) + P(PF) = p*q + q*p = \mathbf{2p^1q^1}$

حالة : $n = 3$ $\qquad X = 0, 1, 2, 3.$

$P(X=3) = P(FFF) = p*p*p = p^3, P(X=2) = P(FFP \text{ ou } PFF \text{ ou } FPF) = \mathbf{3p^2q^1}$

حالة : $n = 4$ $\qquad X = 0, 1, 2, 3, 4.$

$P(X=3) = P(FFFP \text{ ou } PFFF \text{ ou } FPFF \text{ ou } FFPF) = \mathbf{4\, p^3q^1}$

في النتيجة الأخيرة نلاحظ العدد 3 هو x ، العدد 1 هو n-x ، والعدد 4 هو عدد الطرق الملائمة للحصول على ثلاث نجاحات من بين (n=4) تجارب، ويمكن حسابه كما يلي:

$$C_n^x = \frac{n!}{x!(n-x)!}$$

وبالتالي فاحتمال عدد ما x من النجاحات من بين n تجربة برنولية يحسب كما يلي:

$$\boxed{P(X=x)=C_n^x p^x q^{n-x}, \qquad x=0,1,2,3,\ldots,n \qquad , \qquad n=1,2,3,\ldots}$$

حيث x عدد مرات النجاح، p احتمال النجاح في التجربة الواحدة (يبقى ثابت عند تكرار التجربة)، $q = 1-p$ احتمال الفشل وn عدد التجارب. و هو تعريف " قانون التوزيع الثنائي" ويكتب قانون التوزيع الاحتمالي أيضا كما يلي:

$$P(X=x)=C_n^x p^x (1-p)^{n-x}$$

ونكتب **X ~ B(n, p)**.

شروط استخدام التوزيع الثنائي

- o تجربة برنولية مكررة عدد محدد من المرات
- o احتمال النجاح في التجربة ثابت (التجارب مستقلة)

مثال 1: أحسب عند رمي قطعة نقدية متوازنة 4 مرات، ما هو احتمال الحصول على:

ولا مرة صورة، مرة واحدة، مرتين، 3 مرات، 4 مرات.

$P(X = x) = C^x_n \ p^x q^{n-x} \Rightarrow P(X = 0) = C^0_4 \ 0.5^0 \, 0.5^4 = 1/16$

$P(X = 1) = C^1_4 \ 0.5^1 \, 0.5^3$

$P(X = 2) = C^2_4 \ 0.5^2 \, 0.5^2$

مثال 2: نسحب بالإرجاع 3 كريات من صندوق يحتوي 5 كريات منها 3 حمراء.

أحسب احتمال الحصول على كريتين حمراء.

$P(X=2) = C^2_3 \ (3/5)^2 \, (2/5)^1$

خصائص التوزيع الثنائي

التوقع والتباين:

يمكن اعتبار X مجموع متغيرات مستقلة برنولية $X = X_1 + X_2 + \dots X_i + \dots + X_n$ لها نفس المعلمة p وبالتالي نفس التوقع $(E(Xi) = p)$ أيضا.

إذا باستخدام خصائص التوقع والتباين نجد:

$E(X) = E(X_1 + X_2 + \dots X_i + \dots + X_n) = \Sigma E(Xi) = \Sigma pi = n\,p \Rightarrow \mathbf{E(X) = np}$

$V(X) = V(X_1 + X_2 + \dots X_i + \dots + X_n),$

Xi مستقلة إذن:

$$V(X) = \Sigma V(Xi) = \Sigma pq \Rightarrow \mathbf{V(X) = npq}$$

مثال 3: إذا كانت نسبة نجاح الطلبة الذين يحضرون المحاضرة في مقياس الإحصاء هي 0.6 ، وإذا كان عدد الطلبة الذين يحضرون المحاضرة بانتظام هو 10 طلبة. فإذا افترضنا المتغير العشوائي يمثل عدد الطلبة الناجحين الذين يحضرون المحاضرة.

1 –حدد شكل دالة الاحتمال لهذا المتغير

2–احسب الاحتمالات التالية:

أ –ما هو احتمال نجاح **3** طلبة الذين يحضرون المحاضرة ؟

ب –ما هو احتمال نجاح طالب واحد على الأقل؟

ج –ما هو احتمال نجاح طالبين على الأكثر من الذين يحضرون المحاضرة ؟

3–احسب المتوسط الحسابي، والانحراف المعياري لعدد الطلبة الناجحين.

الحل:

1 –شكل دالة الاحتمال لهذا المتغير

$n = 10 \quad q = p - 1 = 0.4 \quad P = 0.6$ وبالتالي:

$$f(x) = c_n^X p^x (1-p)^{n-x}$$
$$f(x) = c_{10}^X 0.6^x (0.4)^{10-x}$$
$$x = 0,1,2 \dots \dots \dots \dots \dots .10$$

2–حساب الاحتمالات:

أ –حساب احتمال نجاح **3** طلبة الذين يحضرون المحاضرة:

$$P(x = 3) = f(3)$$
$$f(3) = c_{10}^3 0.6^3 (0.4)^{10-3}$$
$$= 120 \times 0.216 \times 1.6384 \times 10^{-3} = 0.04$$

ب –حساب احتمال استجابة مريض واحد على الأقل:

$$P(x \geq 1) = 1 - f(0)$$
$$= 1 - c_{10}^0 0.6^0 (0.4)^{10-0}$$
$$= 1 - 1 \times 1 \times 1.048576 \times 10^{-4} = 0.99$$

ج –حساب احتمال نجاح طالبين على الأكثر من الذين يحضرون المحاضرة:

$$P(x \leq 2) = f(2) + f(1) + f(0)$$
$$= c_{10}^2 0.6^2 (0.4)^{10-2} + c_{10}^1 0.6^1 (0.4)^{10-1} + c_{10}^0 0.6^0 (0.4)^{10-0}$$
$$= 0.01$$

3–حساب التوقع الرياضي، والانحراف المعياري لعدد الطلبة الناجحين:

–التوقع الرياضي

$$E(x) = np = 10 \times 0.6 = 6$$

– التباين

$$V(x) = np(1-p) = 10 \times 0.6 \times 0.4 = 2.4$$

–الانحراف المعياري

$$\sigma(x) = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{2.4} = 1.54$$

4.1. توزيع بواسون

يستخدم هذا التوزيع لتحديد احتمال عدد معين من الوقائع او الأحداث او النجاحات في مدة زمنية أو في منطقة مكانية محددة، وذلك عندما تكون الأحداث مستقلة عن بعضها البعض ويبقى متوسطها (معدل وقوعها) ثابتا لوحدة زمنية او مكانية معينة، مثل عدد حوادث السيارات في منطقة مكانية، عدد الاخطاء الكتابية في صفحة، عدد المكالمات خلال ساعة او اسبوع او شهر ... الخ.

التوزيع الاحتمالي لمتغير بواسون والذي يعبر عن عدد مرات النجاح التي تحدث في مدة زمنية أو في منطقة مكانية محددة هو:

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k \; e^{-\lambda}}{k!} \qquad ; x = 0,1,2, \ldots n$$

ونكتب: $X \sim P(\lambda)$

حيث أن:

k :عدد النجاحات .

$P(X = k)$: _ .احتمال عدد k من النجاحات

λ : متوسط عدد النجاحات في وحدة زمانية او مكانية.

e : .أساس نظام اللوغاريتم الطبيعي

يمتاز هذا التوزيع بتساوي الامل الرياضياتي مع التباين

$$\mathrm{E(X) = V(X) = \lambda}$$

مثال 4 : إذا كان عدد حوادث السيارات في مدينة معينة يتبع التوزيع البواسوني بمتوسط 5 حوادث خلال الأسبوع .إذا افترضنا أن X متغير عشوائي يمثل عدد حوادث السيارات خلال أسبوع .

1–حدد شكل دالة الاحتمال f(x) لهذا المتغير

2–أحسب الاحتمالات التالية:

أ –ما هو احتمال حدوث حادثين خلال أسبوع؟

ب –ما هو احتمال حدوث حادث واحد على الأقل خلال أسبوع؟

ج –ما هو احتمال حدوث ثلاثة حوادث على الأكثر خلال أسبوع؟

3–احسب التوقع الرياضي، التباين والانحراف المعياري لعدد الحوادث.

4–حدد شكل التوزيع.

الحل:

1–شكل دالة الاحتمال:

بما أن متوسط عدد حوادث السيارات خلال أسبوع هو 5 وبالتالي تكون دالة الاحتمال هي توزيع بواسون كما يلي:

$$P(X=k)=\frac{5^k\ e^{-5}}{k!} \qquad ; x=0,1,2,\dots n$$

ونكتب: $X \sim P(5)$

2–حساب الاحتمالات:

أ –احتمال حدوث حادثين خلال أسبوع هو (من اجل $k=2$)

$$f(2)=\frac{5^2 e^{-5}}{2!}=\frac{0.16}{2\times 1}=0.08$$

ب –احتمال حدوث حادث واحد على الأقل خلال أسبوع هو

$$f(X\geq 1)=1-f(X<1)=1-f(X=0)$$

$$=1-\frac{5^0 e^{-5}}{0!}=0.99$$

ج –احتمال حدوث ثلاثة حوادث على الأكثر خلال أسبوع هو

$$f(X\leq 3)=f(3)+f(2)+f(1)+f(0)$$

$$=\frac{5^3 e^{-5}}{3!}+\frac{5^2 e^{-5}}{2!}+\frac{5^1 e^{-5}}{1!}+\frac{5^0 e^{-5}}{0!}=0.25$$

3–حساب التوقع الرياضي، والانحراف المعياري لعدد الحوادث:

- التوقع الرياضي

$$E(x)=\lambda=5$$

- التباين

$$V(x)=\lambda=5$$

- الانحراف المعياري

$$\sigma(x)=\sqrt{\lambda}=\sqrt{5}=2.23$$

4–تحديد شكل التوزيع:

التوزيع البواسوني دائما موجب الالتواء.

خلاصة : الجدول الملحق يلخص أهم النقاط حول التوزيعات المتقطعة الشهيرة.

التوزيع	متى يستخدم	القيم الممكنة للمتغيرة	الاحتمال	التوقع والتباين
برنـــولي **$X \sim B(1, p)$**	تجربــة واحــدة (غــير مكررة) تقبل نتيجتين.	$X = \{0, 1\}$	$P(X = 1) = p,$ $P(X = 0) = 1 - p = q$	$\mu = p, \quad \sigma^2 = pq$
الثنائي **$X \sim B(n, p)$**	تجارب ثنائية النتيجة، مكررة ومستقلة (p ثابت).	$X = \{0,1,2\ldots,n\}$	$P(X = x) = C^x_n p^x q^{n-x}$ $C_n^x = \dfrac{n!}{x!(n-x)!}$	$\mu = np, \sigma^2 = npq$
باسـكال (الثنـائي السالب)	X هي عدد التجارب اللازمة للحصول على عدد r من النجاحات في تجـــارب برنوليـــة مكررة.	$X = \{r, r+1, r+2, \ldots, +\infty\}$	$P(X = x) = C^{r-1}_{x-1} p^r q^{x-r}$	$\mu = r/p ,$ $\sigma^2 = rq/p^2$
الهندسي	X هي عدد التجارب اللازمة للحصول على النجـــــاح الأول في تجارب برنولية مكررة.	$X = \{1,2,\ldots,+\infty\}$	$P(X = x) = q^{x-1}p$	$\mu = 1/p,$ $\sigma^2 = q/p^2$
التوزيع المتعدد	هــو تعمـيم للتوزيـع الثنــائي علــى تجربــة مكررة متعددة النتائج.	$\forall i, 0 \leq xi \leq Ni,$ $\sum_{i=1}^{k} xi = n,$ $\sum_{i=1}^{k} Ni = N$	$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_k = x_k) = \dfrac{n!}{x_1! x_2! \ldots x_k!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \ldots p_k^{x_k}$	$E(X_k) = np_k$ $V(X_k) = np_k q_k$
بواســــــــون **$X \sim P(\lambda)$** **$\lambda > 0$**	X عدد النجاحات في عــدد كبــير مــن التجارب البرنولية (عدد الوحـدات التالفــة في شـحنة). أو عـدد مـن الأحداث في فترة زمن.	$X = \{0,1,2,\ldots,+\infty\}$	$P(X = x) = \dfrac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$ $P(X = 0) = e^{-\lambda}$ $P(X \geq 1) = 1 - e^{-\lambda}$	$E(x) = V(x) = \lambda$

2. التوزيعات الاحتمالية المتصلة

1.2. التوزيع الأسي

عادة ما يستخدم التوزيع الأسي في مسائل متعلقة بقياس الزمن. من ذلك مدة خدمة شباك البريد، مدة مكالمة هاتفية، مدة تفريغ باخرة شحن، مدة تصليح آلة، مدة انتظار زبون قبل الحصول على الخدمة...في العلوم الدقيقة يستخدم التوزيع الأسي لتمثيل مدة حياة الذرات المشعة (atomes radioactives) قبل أن تتفكك، حيث يعبر الوسيط عن اللحظة التي يبقى فيها نصف المجتمع الأصلي.

من الضروري فهم الآتي: كقاعدة عامة يستخدم التوزيع الأسي لتمثيل مدة حياة ظاهرة ما إذا كان لها متوسط ثابت $1/\lambda$ وكانت هذه الظاهرة لا تخضع للتقادم (vieillissement) أي أن مدة حياة الظاهرة بعد لحظة ما T لا تتبع اللحظة T؛ أي لا تتأثر بالمدة التي دامتها الظاهرة من قبل. مثلا قد نستبعد استخدام التوزيع الأسي لتمثيل مدة حياة آلة عاملة قبل تعطلها لأن احتمال تعطلها في لحظة ليس مستقلا عن المدة التي عملتها الآلة من قبل، كذلك الأمر بالنسبة لمدة حياة الإنسان.

عمليا، نتحقق من دقة تمثيل التوزيع الأسي ــأو أي توزيع آخرــ لظاهرة ما من خلال تقنيات اختبارات الفروض، وبالتحديد اختبار التجانس و التعديل.

نشير أخيرا إلى أن للتوزيع الأسي علاقة بالتوزيع بواسون، فإذا كان وقوع أحداث ما يتبع هذا التوزيع، فإن المدة بين وقوع حدثين تتبع التوزيع الأسي؛ كمثال على ذلك، إذا كان وصول الزبائن إلى مركز خدمة ما يتبع التوزيع بواسون فإن المدة الزمنية بين وصول زبون "أ" والزبون الموالي تتبع التوزيع الأسي. تتبين هذه العلاقة عند استنتاج صيغة القانون الأسي.

أ. دالة الكثافة والدالة التجميعية للتوزيع.

بينت دراسة أن عدد حوادث العمل في معمل معين تتبع توزيع بواسون بمعدل λ حادث يوميا.

أوجد احتمال أن يسجل حادث على الأقل (حادث أو أكثر) في مدة t يوم.

$P(X \geq 1) = 1 - P(0) = 1 - [\lambda^{0t} * e^{-\lambda t}/0!] \quad => \mathbf{P(X \geq 1) = 1 - e^{-\lambda t}}$

لنرمز ب T للزمن (باليوم) بين حادثين إذن سيكون لدينا f(t) دالة الكثافة للزمن بين حادثين، و $F(t) = P(T \leq t)$ دالة التوزيع ل T.

لنحسب احتمال P أن يكون الزمن بين حادثين يوم أو أقل:

لدينا $P = P(T \leq t = 1)$ إذن:

$P = F(t = 1)$ ………… (1)

نلاحظ من ناحية أخرى أن P هو معادل لاحتمال أن يسجل على الأقل حادث في يوم معين:

$P = P(X \geq 1) = 1 - e^{-\lambda t}$ ……….(2)

من (1) و(2) نستنتج أن $\boxed{\mathbf{F(t) = 1 - e^{-\lambda t}}}$...........(3)

و منه $f(t) = F(t)' = (1 - e^{-\lambda t})'$

إذن $\mathbf{f(t) = \lambda\, e^{-\lambda t}}$

قاعدة: إذاكان حدث عشوائي ما يتكرر في الزمن وفق توزيع بواسون:

$$\boxed{p_\tau(x) = \frac{(\lambda\tau)^x e^{-\lambda\tau}}{x!}}$$

فإن الزمن t بين حادثين يتبع التوزيع التالي:

$$f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & ; t > 0 \\ 0 & ; t \leq 0 \end{cases}$$

حيث λ عدد حقيقي موجب. ويسمى هذا التوزيع التوزيع الأسي ويسمى أيضا التوزيع الأسي السالب لعلاقته بتوزيع بواسون.

ب. خصائص التوزيع الأسي

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \quad ; \quad V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

كما يمتاز التوزيع الاسي بخاصية تسمى غياب الذاكرة، ليكن متغير عشوا X ئ ي يتبع التوزيع الاسي

$$X \sim \xi(\lambda)$$

اذن:

$$p(X > t + s / X > s) = \frac{p(x > t + s /\ \ X > s)}{p(X > s)} = \frac{p(X > t + s)}{p(X > s)} = \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda s}}$$
$$= e^{-\lambda(t+s-s)} = e^{-\lambda t} = p(X > t)$$

2.2. التوزيع الطبيعي

يعد التوزيع الطبيعي[1] أو توزيع لابلاس قوس من أهم التوزيعات الاحتمالية شائعة الاستخدام لما له من خصائص تنطبق على نسبة كبيرة من الظواهر الطبيعية والاجتماعية والاقتصادية. فلو اخترنا بالصدفة مئة أو ألفا من المارين في شارع ما وقسنا أطوالهم لوجدنا نسبة كبيرة منها قريبة من متوسط ما، ونسبة قليلة من طوال القامة ونسبة مقاربة لها من قصار القامة. ومثل هذا بالنسبة للأوزان.

أ. دالة الكثافة

لو مثلنا هذه البيانات في معلم متعامد متجانس لكان المنحنى الذي يمثل النسبة، أو ما يمكن أن نسميه الاحتمال، ذا شكل جرسي متماثل حول المتوسط وهي صفات التوزيع الطبيعي (الشكل1 و3).

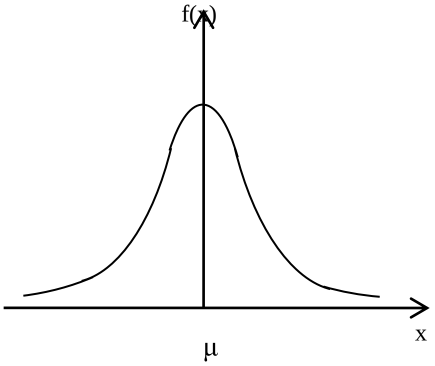
تكتب دالة الكثافة لمنحنى للتوزيع الطبيعي كما يلي

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp\left\{\frac{-1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right\} \qquad ; \forall x \in R}$$

حيث μ وσ هما على التوالي التوقع والانحراف المعياري.

ونكتب: $X \sim \mathbb{N}(\mu, \sigma)$

تمثيلها البياني التقريبي في الشكل 1 المقابل



الشكل:1 الشكل العام للتوزيع الطبيعي

دالة التوزيع (الدالة التجميعية) للتوزيع الطبيعي تكتب كما يلي:

$$F(x) = P(X \leq x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-1/2\left(\frac{v-\mu}{\sigma}\right)^2} dv$$

استخدام المتغير المعياري: يستخدم المتغير المعياري Z = (X-μ)/σ لتكوين الجداول الإحصائية للاحتمالات:

---

[1] باسم العالمان الرياضيان الفيزيائيان و الفلكيان الفرنسي Pière Simon de Laplace (1749-1827) والألماني Carl Freidrich Gauss – الصورة لهذا الأخير–، (1777-1855) الذين كانا من أوائل من اكتشف هذا القانون. أما من أعطاه تسمية التوزيع الطبيعي فهو Pearson في 1893. أنظر J. J. Droesbeke (1997) ، ص329 .

$P(0 \le Z \le z)$ أو $F(z) = P(Z \le z)$،

حيث تسمح بكتابة الدالة f وF بدلالة مجهول واحد Z بدلا من 3 مجاهيل x وµ و σ وذلك كما يلي:

$$\boxed{f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} \qquad -\infty < z < \infty}$$

$$F(z) = P(Z \le z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{\frac{-u^2}{2}} du$$

بالنظر إلى العلاقة الخطية بين المتغيرتين X و Z، فإن Z تتبع نفس توزيع X أي التوزيع الطبيعي. ونعلم أن:

$$E(z) = 0 \qquad ; \qquad V(z) = 1$$

ب. خصائص التوزيع الطبيعي

من خصائص التوزيع الطبيعي أنه يعتبر معتدلا لا مدببا ولا مفلطحا، حيث يعتبر معامل التفلطح $\alpha_4 = 3$ للتوزيع الطبيعي معيارا لاعتدال المنحنيات.

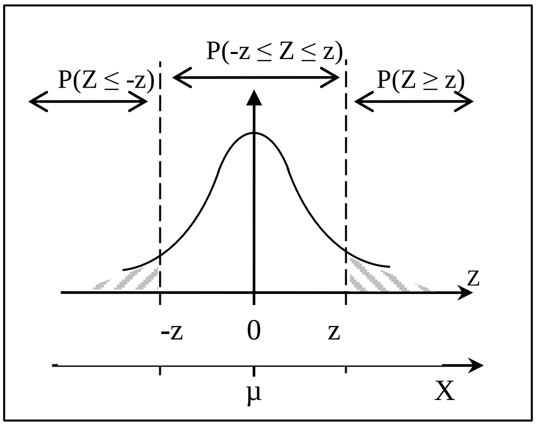
من خصائص التوزيع الطبيعي أيضا أنه متماثل حول $\alpha_3 = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = 0$ القيمة المتوقعة

تماثل منحنى X حول المتوسط (أنظر الشكل 3) يعني تماثل لمنحنى Z حول 0، مما يعني أنه من أجل أي قيمة للمتغيرة المعيارية

$z > 0$:

$$P(0 \le Z \le z) = P(-z \le Z \le 0) = P(-z \le Z \le z) / 2$$

$$P(Z \le -z) = 1- P(Z \le z) = P(Z \ge z)$$



الشكل 2: استخدام تماثل الوزيع الطبيعي في حساب الاحتمالات

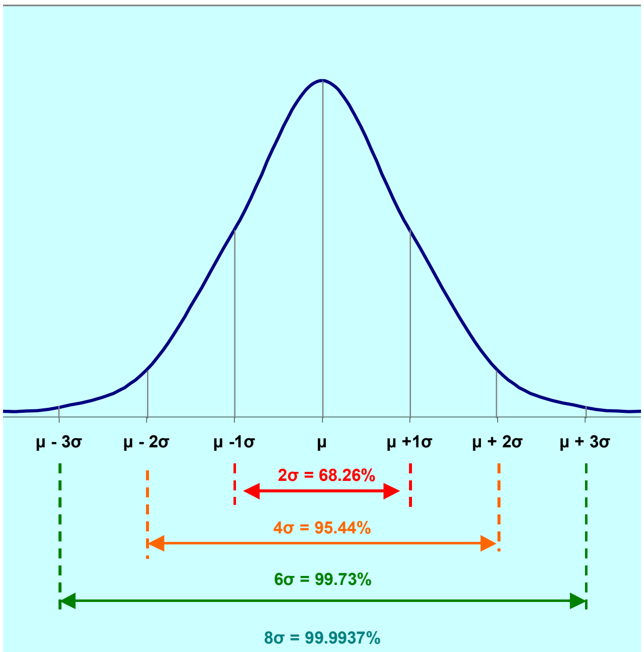
و لقد تم باستخدام المتغيرة المعيارية Z حساب الاحتمالات (المساحات) تحت المنحنى ومنها خاصة:

$$P(-\sigma \le X \le \sigma) = P(-\sigma \le Z \le \sigma) = 0.6837,$$

$$P(-2\,\sigma \le X \le 2\,\sigma) = P(-2 \le Z \le 2) = 0.9544,$$

$$P(-3\,\sigma \le X \le 3\,\sigma) = P(-3 \le Z \le 3) = 0.9973.$$

هذه القيم وغيرها متوفرة في الجداول الإحصائية التي نجدها في الكثير من المراجع، كما يمكن حسابها باستخدام الحاسوب.



رسم 2 المساحات الأساسية تحت منحنى التوزيع الطبيعي

مثال 1: باستعمال الجداول الاحصائية

1) أحسب : $P(0 \le Z \le z)$ حيث $z = 1, 2, 3$

2) أحسب $P(-z \le Z \le z)$ من أجل نفس القيم ل z.

الحل:

1) 0.3413 ، 0.47725 ، 0.49865

2) 0.6827، 0.9545، 0.9973

مثال 2 . إذا كانت علامات الطلبة في قسم معين تتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط حسابي يساوي10 وتباين يساوي4

1–حدد معالم التوزيع الاحتمالي لعلامات الطلبة؟

2–حدد شكل دالة كثافة الاحتمال؟

3–احسب احتمال أن تكون علامات الطلبة بين 8 و12 ؟

4–ما هو احتمال أن تكون علامات الطلبة أقل أو يساوي6 ؟

الحل:

1–تحديد معالم التوزيع الاحتمالي لعلامات الطلبة (نرمز لها بـ X)

بما أن علامات الطلبة هي متغير عشوائي يتبع التوزيع الطبيعي فإن معالمه تكون كالأتي:

التباين =4 الوسط الحسابي=10 وبالتالي:

$$\mu = 10 \quad ; \quad \sigma^2 = 4 \Longrightarrow \sigma = 2$$

$$X \sim \mathbb{N}(10; 2)$$

2–تحديد شكل دالة كثافة الاحتمال:

$$f(X) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{(x-10)^2}{4})}$$

3–احتمال أن تكون علامات الطلبة بين 8 و 12 هو

$$p(8 < X < 12) = p(8 - 10 < X - 10 < 12 - 10)$$
$$= p\left(\frac{-2}{2} < z < \frac{2}{2}\right) = 2p(0 < z < 1)$$

نستخدم جدول التوزيع الطبيعي المعياري لحساب الاحتمال

حيث نجد ان :

$$p(0 < z < 1) = 0.3413$$

وعليه

$$p(8 < X < 12) = 2(0.3413) = 0.6826$$

4–احتمال أن تكون علامات الطلبة أقل أو يساوي 6 هو

$$p(X \leq 6) = p(X - 10 \leq 6 - 10)$$
$$= p\left(z \leq \frac{-4}{2}\right) = p(z \leq -2) = p(z > 2) = 1 - p(z \leq 2)$$
$$= 1 - [0.5 + p(0 < z < 2)] = 0.5 - p(0 < z < 2)$$

نستخدم جدول التوزيع الطبيعي المعياري لحساب الاحتمال

حيث نجد ان : $p(0 < z < 2) = 0.4772$

$$p(X \leq 6) = 0.5 - 0.4772 = 0.0228$$

ج. العلاقة بين التوزيع الطبيعي والتوزيع الثنائي

في حالة n كبيرة وp غير قريب من 0 يمكن اعتبار التوزيع الثنائي كتقريب جيد للتوزيع الطبيعي. ويعطي التوزيعان نتائج أكثر تقاربا كلما كانت n كبيرة أكثر. ونكتب:

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} P(a \le z \le b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-z^2/2}dz, \qquad z = \frac{x-np}{\sqrt{npq}}$$

ويسرع تقارب التوزيع الثنائي من التوزيع الطبيعي كون p قريب من 0.5.

قاعدة التقريب:

- عموما نعتبر التقريب إلى التوزيع الثنائي ملائما عندما np و nq كلاهما أكبر من 5.
- عدد من الاحصائيين[1] يعتمد قاعدة أخرى هي أن يكون أحد الشرطين التاليين متوفرين:

$$npq \ge 9 \qquad ou \qquad n \ge 20, np \ge 10, nq \ge 10$$

3.2. توزيع قاما

توزيعي قاما و بيتا يمثلان مجموعة واسعة من التوزيعات ذات معلمتين تتميز بمرونة وقدرة على توليد توزيعات متعددة حسب قيم المعلمتين. ندرس هذين التوزيعين أيضا لعلاقتهما بالتوزيعات F، t، و ك2. يستخدم توزيع قاما لتمثيل بعض الظواهر مثل توزيع الدخل والادخار تحت شروط معينة[2].

أ. صيغة القانون.

نقول عن متغيرة عشوائية أنها تتبع توزيع قاما إذا كانت دالة كثافتها كما يلي:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{\alpha-1}e^{-x/\beta}}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}, & x > 0 \\ 0 \quad , & x \le 0 \end{cases} \quad , \alpha > 0, \beta > 0$$

حيث Γ(α) هي الدالة قاما:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}dt \qquad \alpha > 0$$

ونكتب $X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$

ب. خصائص توزيع قاما

$$\mu = \alpha\beta \quad , \quad \sigma^2 = \alpha\beta^2, \quad M(t) = (1 - \beta t)^{-\alpha}$$

---

[1] أنظر دراوزبيك 1997. ص 262.

[2] أنظر: آيفازيان و آخرون، مبادئ النمذجة و المعالجة الأولية للبيانات، سلسلة : Mathématiques، Editions Mir، موسكو، 1983، ترجمه من الروسية إلى الفرنسية جيلالي مبارك، 1986. ص158.

Pour α>1: Γ(α) = (α-1)Γ(α-1) et si α ∈ N : Γ(α) = (α-1) ! , Γ(1/2) = √π

من خصائص توزيع قاما علاقته بالتوزيع الأسي كما سنرى في السلسلة.

مثال. أحسب ما يلي:

$$\int_0^\infty t^4e^{-t}dt, \qquad \int_0^\infty x^6e^{-x}dx, \qquad \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{x^{1/2}}dx, \qquad \Gamma(7), \quad \Gamma(4.5), \qquad \Gamma(2.5).$$

$$\int_0^\infty t^4e^{-t}dt=\Gamma(5)=4!=24, \int_0^\infty x^6e^{-x}dx=\Gamma(7)=6!=720, \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{x^{1/2}}dx=\int_0^\infty x^{-1/2}e^{-x}dx=\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(4.5)=\Gamma(3.5+1)=3.5\Gamma(3.5)=3.5(2.5)\Gamma(2.5)=3.5(2.5)(1.5)(0.5)\Gamma(0.5)=3.5(2.5)(1.5)(0.5)\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(7)=6!=720, \qquad \Gamma(2.5)=1.5\Gamma(0.5)=1.5\sqrt{\pi}$$

مثال2. أحسب المتوسط والتباين للمتغيرات العشوائية X و Y و Z المعرفة كما يلي:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^4e^{-x/2}}{2^5\Gamma(5)}, & x>0\\ 0 \quad , & x\le 0\end{cases}, \quad f(y)=\begin{cases}\dfrac{y^3e^{-y/4}}{4^4(6)}, & y>0\\ 0 \quad , & y\le 0\end{cases}, \quad f(z)=\begin{cases}\dfrac{z^2e^{-z}}{6}, & z>0\\ 0 \quad , & z\le 0\end{cases}$$

$$\mu_x=\alpha\beta=5(2)=10, \sigma^2{}_x=\alpha\beta^2=5(2^2)=20, \mu_y=4(4)=16, \sigma^2{}_y=4(4^2)=64, \mu_z=3(1)=3, \sigma^2{}_z=3$$

4.2. توزيع بيتا

يتميز توزيع بيتا بمرونته الكبيرة تبعا لقيم معلمتيه (أنظر الرسم 14) حيث يستخدم لحساب توزيع t²، F، التوزيع الثنائي، الثنائي السالب وغيرها[1]، وتستخدم لتمثيل بعض المتغيرات التي تتراوح بين 0 و 1، مثل نسبة ما كنسبة التالف أو المبيعات، إلخ.

أ. صيغة القانون.

نقول عن متغيرة عشوائية أنها تتبع توزيع بيتا إذا كانت دالة كثافتها كما يلي:

$$\boxed{f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{\beta(\alpha,\beta)} & 0<x<1\\ 0 & ailleurs\end{cases} \qquad (\alpha,\beta>0)}$$

حيث B(α, β) هي الدالة بيتا: $B(\alpha,\beta)=\int_0^1 u^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-1}du, \qquad \alpha,\beta>0$

و نكتب X ~ B(α, β)

α = 4, β = 2

ب. خصائص توزيع بيتا

$$\alpha=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}, \qquad \sigma^2=\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$$

---

[1] المرجع السابق.

ج. العلاقة بين الدالتين قاما وبيتا:

$$B(\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

مثال. أحسب ما يلي:

$$B(3,4),\qquad B(1/2,1/2),\quad B(n,2),\qquad B(1,n),\qquad B(n,1)\ \ (n\in N)$$

$$B(3,4)=\frac{(3-1)!(4-1)!}{(7-1)!}=\frac{2}{120}=\frac{1}{60},\ \ B(1/2,1/2)=\frac{\left(\sqrt{\pi}\right)\left(\sqrt{\pi}\right)}{(1/2)+(1/2)}=\pi,$$

$$B(n,\ 2)=\frac{(n-1)!1!}{(2+1)!}=\frac{1}{n(n+1)!},\qquad B(1,n)=\frac{1(n-1)!}{n!}=\frac{(n-1)!}{n(n-1)!}=\frac{1}{n},\qquad B(n,1)=\frac{(n-1)!1}{n!}=\frac{1}{n}$$

مثال2. أحسب ما يلي: $\int_0^1 x(1-x)dx$ $\quad \int_0^1 x^4(1-x)^3dx,\quad B(3,2),$

$$B(3,2)=1/[n(n+1)]=1/[3(4)]=1/12$$

$$\int_0^1 x^4(1-x)^3dx=B(5,4)=\frac{\Gamma(5)\Gamma(4)}{\Gamma(5+4)}=\frac{4!3!}{8!}=\frac{1}{280},\qquad \int_0^1 x(1-x)dx=B(2,2)=\frac{1!1!}{3!}=1/6$$

وباستعمال العلاقة $B(\alpha,\beta)=\dfrac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$ نجد أن دالة الكثافة للتوزيع بيتا تكتب أيضا:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}, & 0<x<1\\ 0\qquad\qquad\qquad\qquad , & ailleurs\end{cases}$$

للتوزيعين قاما وبيتا علاقة بعدد من التوزيعات المهمة كالتوزيع الأسي وتوزيع كاي تربيع، من ذلك **مثلا** أن التوزيع الأسي هو حالة خاصة من توزيع قاما عندما **α = 1 , β = 1/λ**.

مثال3. أحسب النسبة المتوقعة للإنتاج التالف والتباين، إذا كانت نسبة الإنتاج التالف تتبع التوزيع التالي:

$$f(x)=\begin{cases}6(1-x)^5, & 0<x<1\\ 0\qquad\quad , & \text{sinon}\end{cases}$$

من المثال السابق لدينا: $B(1,n)=1/n\Rightarrow 6=1/B(1,6).$

بوضع α و β يساويان 1 و 6 على التوالي، نجد أن X ~ B(1, 6)

ومنه: $\mu=\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}=1/2,\qquad \sigma^2=\dfrac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}=\dfrac{4}{16(5)}=1/20.$

مثال4. نسبة الإنتاج المباع في مؤسسة تتبع التوزيع التالي. أحسب النسبة المتوقعة، واحتمال أن تبلغ النسبة أكثر من 35% .

$$f(x)=\begin{cases}12x^2(1-x), & 0<x<1\\ 0 & \text{, sinon}\end{cases}$$

$$12=3*4 \Rightarrow 12=1/B(3,2) \Rightarrow X \sim B(3,2) \Rightarrow \mu=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}=\frac{3}{3+2}=3/5=60\%$$

$$P(X>0.35)=\int_{0,35}^{1}12x^2(1-x)dx.$$

$$soit: v=x^2dx\ et\, u=1-x \Rightarrow P(X>0.35)=12\left(\left[(1-x)\frac{x^3}{3}\right]_{0,35}^{1}+\int_{0,35}^{1}x^2dx\right)=0.3125$$

خلاصة

الجدول التالي يلخص خصائص التوزيعات الاحتمالية المستمرة الأكثر استخداما.

التوزيع	دالة الكثافة ، التوقع والتباين	خصائص التوزيع
التوزيع الطبيعي المعياري X~N(0, 1)	$\boxed{f(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-z^2/2} \qquad -\infty<z<\infty}$ E(Z) = 0, V(Z) = 1	P(Z ≤ -z) = 1- P(Z ≤ z) = P(Z ≥ z) P(-σ ≤ X ≤ σ) = P(-1 ≤ Z ≤ 1) = 0.6837, P(-2 σ ≤ X ≤ 2 σ) = P(-2 ≤ Z ≤ 2) = 0.9544, P(-3 σ ≤ X ≤ 3 σ) = P(-3 ≤ Z ≤ 3) = 0.9973.
التوزيع الأسي	$f(\tau)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda\tau} & , \quad \tau>0\\ 0 & , \quad \tau\le 0\end{cases}$ μ = 1/λ, $\sigma^2 = 1/\lambda^2$ $F(x) = 1- e^{-\lambda x}$	P(X ≤ μ) = 0.63
توزيع قاما X~Γ(α,β)	$\begin{cases}\frac{^{-x/\beta}}{(\alpha)}, & x>0\\ , & x\le 0\end{cases}, \alpha>0,\beta>0$ μ = α β, $\sigma^2 = \alpha\beta^2$	$\Gamma(\alpha)=\int_0^{\infty}t^{\alpha-1}e^{-t}dt \qquad \alpha>0$
توزيع بيتا X~ B(α, β)	$f(x)=\begin{cases}\frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{\beta(\alpha,\beta)} & 0<x<1\\ 0 & ailleurs\end{cases} \quad (\alpha,\beta>0)$ $\alpha=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}, \quad \sigma^2=\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$	$B(\alpha,\beta)=\int_0^1 u^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-1}du, \qquad \alpha,\beta>0$ $B(\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$

3. تمارين محلولة

التمرين :**1** صندوق به 6 كرات مرقمة من 1–6 نسحب كرة مع الارجاع في كل مرة ولـ 4 مرات متتالية، ونسجل في كل مرة الرقم الذي يظهر .

1–ما هو احتمال ظهور الرقم 5 ثلاث مرات؟

2–ما هو احتمال ظهور الرقم 5 مرة واحدة على الأقل؟

إذا كان لدينا المتغير العشوائي X حيث يمثل عدد مرات ظهور الرقم 5 في الأربع رميات

3–حدد قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي؟

4–أحسب التوقع الرياضي، التباين والانحراف المعياري؟

الحل:

أ –احتمال ظهور الرقم 5 ثلاث مرات هو

احتمال ظهور الرقم 5 عند رمي حجرة نرد مرة واحدة هو p=1/6

وبما أن عدد الرميات مستقلة عن بعضها البعض فإنه يمكن تطبيق توزيع ذي الحدين حيث أن:

$$P(X) = c_n^X p^x (1-p)^{n-x}$$

$$P(X=3) = c_4^3 (\frac{1}{6})^3 (\frac{5}{6})^{4-3} = 0.01$$

2–احتمال ظهور الرقم 5 مرة واحدة على الأقل هو

$$P(A) = 1 - P(\bar{A})$$

$$P(\bar{A}) = P(X=0) = c_4^0 \frac{1}{6}^0 (\frac{5}{6})^{4-0} = 0.48$$

$$P(A) = 1 - 0.48 = 0.52$$

3–تحديد قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي

وبما أن المتغير العشوائي يتبع توزيع ذي الحدين فإنه يمكننا حساب الاحتمالات المقابلة من خلال القيم : 0,1,2,3,4

$$P(X=0) = c_4^0 (\frac{1}{6})^0 (\frac{5}{6})^{4-0} = \frac{625}{1296}$$

$$P(X=1) = c_4^1 (\frac{1}{6})^1 (\frac{5}{6})^{4-1} = \frac{125}{324}$$

$$P(X=2) = c_4^2 (\frac{1}{6})^2 (\frac{5}{6})^{4-2} = \frac{25}{216}$$

$$P(X=3) = c_4^3 (\frac{1}{6})^3 (\frac{5}{6})^{4-3} = \frac{5}{324}$$

$$P(X=4) = c_4^4 (\frac{1}{6})^4 (\frac{5}{6})^{4-4} = \frac{1}{1296}$$

x_i	0	1	2	3	4	**Σ**
p_i	$\frac{625}{1296}$	$\frac{125}{324}$	$\frac{25}{216}$	$\frac{5}{324}$	$\frac{1}{1296}$	1

4–حساب التوقع الرياضي، التباين والانحراف المعياري:

–التوقع الرياضي

$$\begin{aligned} E(X) &= np \\ &= 4 \times \frac{1}{6} = 0.66 \end{aligned}$$

–التباين

$$\begin{aligned} V(X) &= np(1-p) \\ &= 4 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = 0.55 \end{aligned}$$

–الانحراف المعياري

$$\delta(X) = \sqrt{V(X)}$$
$$\delta(X) = \sqrt{0.55}$$
$$\delta(X) = 0.74$$

التمرين 2: تشير الإحصائيات للسنوات السابقة أنه في المتوسط يتوقف 6 طلاب جدد عن الدراسة في كل قسم كل سنة في كلية معينة.

1–ما هو احتمال توقف 3 طلاب عن الدراسة في سنة معينة؟

2–ما هو احتمال توقف 3 طلاب أو أقل عن الدراسة في سنة معينة؟

3–أحسب التوقع الرياضي، التباين والانحراف المعياري؟

الحل:

1–احتمال توقف 3 طلاب عن الدراسة في سنة معينة هو

$$P(X) = \frac{\lambda^X e^{-\lambda}}{X!}, \quad x = 0,1,2 \ldots \ldots n$$

$$P(3) = \frac{6^3 e^{-6}}{3!} = \frac{216 \times 0.00248}{3 \times 2 \times 1} = 0.08928$$

2–احتمال توقف 3 طلاب أو أقل عن الدراسة في سنة معينة هو

$$P(X \leq 3) = f(3) + f(2) + f(1) + f(0)$$

$$P\ (3) = 0.08928$$

$$P(2) = \frac{6^2 e^{-6}}{2!} = \frac{36 \times 0.00248}{2 \times 1} = 0.04464$$

$$P(1) = \frac{6^1 e^{-6}}{1!} = \frac{6 \times 0.00248}{1} = 0.01488$$

$$P(0) = \frac{6^0 e^{-6}}{0!} = \frac{1 \times 0.00248}{1} = 0.00248$$

$$P(X \leq 3) = 0.08928 + 0.04464 + 0.01488 + 0.00248$$
$$= 0.15128$$

3–حساب التوقع الرياضي، والانحراف المعياري لعدد الحوادث:

–التوقع الرياضي

$$E(X) = \lambda = 6$$

–التباين

$$V(X) = \lambda = 6$$

–الانحراف المعياري

$$\sigma = \sqrt{6} = 2.45$$

التمرين :**3** في امتحان مقياس الإحصاء وجد الطالب 4 تمارين .فإذا كان احتمال أن يجيب هذا الطالب عن كل تمرين صحيحا هو2/3

1–ما هو احتمال أن يجيب صحيحا عن تمرينين فقط؟

2–ما هو احتمال أن يجيب صحيحا عن تمرين واحد أو أكثر؟

3–ما هو احتمال أن يجيب صحيحا عن أكثر من نصف التمارين؟

الحل:

1–احتمال أن يجيب صحيحا عن تمرينين فقط هو

$$n = 4, \quad P = \frac{2}{3}, \quad q = 1 - P = \frac{1}{3}$$

$$P(2) = c_4^2 (\frac{2}{3})^2 (\frac{1}{3})^{4-2} = 0.2962$$

2–احتمال أن يجيب صحيحا عن تمرين واحد أو أكثر هو

$$P(X \geq 1) = P(1) + P(2) + P(3) + P(4)$$

$$P(1) = c_4^1 (\frac{2}{3})^1 (\frac{1}{3})^{4-1} = 0.0987$$

$$P(2) = c_4^2 (\frac{2}{3})^2 (\frac{1}{3})^{4-2} = 0.2962$$

$$P(3) = c_4^3 (\frac{2}{3})^3 (\frac{1}{3})^{4-3} = 0.3950$$

$$P(4) = c_4^4 (\frac{2}{3})^4 (\frac{1}{3})^{4-4} = 0.1975$$

$$P(X \geq 1) = 0.0987 + 0.2962 + 0.3950 + 0.1975$$
$$= 0.9876$$

3–احتمال أن يجيب صحيحا عن أكثر من نصف التمارين هو

يجيب هذا الطالب على أكثر من نصف التمارين يعني إذا أجاب صحيحا على 3 أو 4 تمارين.

$$P(X \geq 3) = P(3) + P(4) = 0.3950 + 0.1975 = 0.5925$$

التمرين :**4** تشير الإحصائيات أن 1 في المائة من السيارات المنتجة في مصنع ما فيها بعض المشاكل التقنية .فرضا أننا اخترنا عينة متكونة من 30 سيارة .أحسب احتمال وجود أكثر من سيارة فيها مشاكل تقنية –:باستخدام التوزيع البواسوني كتقريب لتوزيع ذي الحدين–؟

الحل:

باستخدام التوزيع البواسوني كتقريب لتوزيع ذي الحدين:

بما أن n=30 و $np = 30 \times 0.01 = 0.3$ فإنه يمكننا استخدام تقريب التوزيع البواسوني لتوزيع ذي الحدين .حيث أن $\lambda = np = 0.3$

يمكننا حساب $p(X > 1) = 1 - p(X \leq 1)$ حيث أن X هو عدد السيارات غير الجيدة .

باستخدام قانون التوزيع البواسوني نحصل على:

$$P(1) = \frac{0.3^1 e^{-0.3}}{1!} = \frac{0.3\times0.74082}{1} = 0.222246$$

$$P(0) = \frac{0.3^0 e^{-0.3}}{0!} = \frac{1\times0.74082}{1} = 0.74082$$

$$P(X \leq 1) = P(1) + P(0) = 0.222246 + 0.74082$$
$$= 0.963066$$

$$P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1)$$
$$= 1 - 0.963066 = 0.036934$$

التمرين 5: إذا كان طول عمال في مصنع ما يتبع التوزيع الطبيعي، بمتوسط حسابي 170 وانحراف معياري10

1–ما هو احتمال أن يكون طول عامل اختير عشوائيا بين 150 و160

2–ما هو احتمال أن يكون طول عامل اختير عشوائيا أقل أو يساوي175

3–ما هو احتمال أن يكون طول عامل اختير عشوائيا أكثر أو يساوي185

الحل:

1–احتمال أن يكون طول عامل اختير عشوائيا بين 150 و 160 هو

$$p(150 < X < 160) = p(150 - 170 < X - 170 < 160 - 170)$$

$$= p\left(\frac{-20}{10} < z < \frac{-10}{10}\right) = p(-2 < z < -1) = p(0 < z < 2) - p(0 < z < 1)$$

نستخدم جدول التوزيع الطبيعي المعياري لحساب الاحتمال

حيث نجد ان :

$$p(0 < z < 1) = 0.3413$$
$$p(0 < z < 2) = 0.4772$$

وعليه

$$p(150 < X < 160) = 0.4772 - 0.3413 = 0.1359$$

2–احتمال أن يكون طول عامل اختير عشوائيا أقل أو يساوي 175 هو

$$p(X \leq 175) = p(X - 170 \leq 175 - 170)$$

$$= p\left(z \leq \frac{5}{10}\right) = p(z \leq 0.5) = p(z \leq 0) + p(0 < z < 0.5)$$

$$= 0.5 + p(0 < z < 0.5)$$

نستخدم جدول التوزيع الطبيعي المعياري لحساب الاحتمال

حيث نجد ان : $p(0 < z < 0.5) = 0.1915$

$$p(X \leq 175) = 0.5 + 0.1915 = 0.6915$$

3–احتمال أن يكون طول عامل اختير عشوائيا أكثر أو يساوي 185 هو

$$p(X \geq 185) = p(X - 170 \geq 185 - 170)$$

$$= p\left(z \geq \frac{15}{10}\right) = p(z \geq 1.5) = p(z \geq 0) - p(0 < z < 1.5)$$

$$= 0.5 - p(0 < z < 1.5)$$

نستخدم جدول التوزيع الطبيعي المعياري لحساب الاحتمال

حيث نجد ان : $p(0 < z < 1.5) = 0.4332$

$$p(X \leq 185) = 0.5 - 0.4332 = 0.0668$$

التمرين 6: إذا كان الوسط الحسابي والانحراف المعياري للعلامات في أحد المسابقات هو 74 و 12 على التوالي.

1–أحسب العلامات بالوحدات القياسية واحتمالاتها للمتسابقين الحاصلين على 60،85 ، 75،93؟

2–أحسب العلامات المناظرة للوحدات القياسية: 2، 1.5، 0.5،1-؟

الحل:

1–حساب العلامات بالوحدات القياسية للمتسابقين الحاصلين على:

$$z_1 = \frac{X_1-\mu}{\delta} = \frac{60-74}{12} = -1.16, \qquad P(z_1 = 1.16) = 0.3770$$

$$z_2 = \frac{X_2-\mu}{\delta} = \frac{75-74}{12} = 0.08, \qquad P(z_2 = 0.08) = 0.0319$$

$$z_3 = \frac{X_3-\mu}{\delta} = \frac{85-74}{12} = 0.91, \qquad P(z_3 = 0.91) = 0.3186$$

$$z_4 = \frac{X_4-\mu}{\delta} = \frac{93-74}{12} = 1.58, \qquad P(z_4 = 1.58) = 0.4429$$

2–العلامات المناظرة للوحدات القياسية: 2، 1.5، 0.5،1 - هي

$$X_1 = z_1 \times \delta + \mu = 12 \times (-1) + 74 = 62$$

$$X_2 = z_2 \times \delta + \mu = 12 \times (0.5) + 74 = 80$$

$$X_3 = z_3 \times \delta + \mu = 12 \times (1.5) + 74 = 92$$

$$X_4 = z_4 \times \delta + \mu = 12 \times (2) + 74 = 98$$

التمرين 7 :إذا ألقينا 12 قطعة نقدية متماثلة .أحسب احتمال أن نحصل على الصورة عددا من المرات يتراوح بين 4 و7 ، وذلك باستخدام:

1–توزيع ذي الحدين؟

2–التقريب الطبيعي لتوزيع ذي الحدين؟

الحل:

1–باستخدام توزيع ذي الحدين: لدينا :

$$n = 12, \quad P = 0.5, \quad q = 1 - P = 0.5$$

$$P(4 \le X \le 7) = P(4) + P(5) + P(6) + P(7)$$

$$P(4) = c_{12}^{4}(\tfrac{1}{2})^{4}(\tfrac{1}{2})^{12-4} = 0.1208$$

$$P(5) = c_{12}^{5}(\tfrac{1}{2})^{5}(\tfrac{1}{2})^{12-5} = 0.1933$$

$$P(6) = c_{12}^{6}(\frac{1}{2})^{6}(\frac{1}{2})^{12-6} = 0.2255$$

$$P(7) = c_{12}^{7}(\frac{1}{2})^{7}(\frac{1}{2})^{12-7} = 0.1933$$

$$P(4 \leq X \leq 7) = 0.1208 + 0.1933 + 0.2255 + 0.1933$$
$$\approx 0.7332$$

2–باستخدام التقريب الطبيعي لتوزيع ذي الحدين:

$$\mu = np = 12 \times 0.5 = 6$$

$$\delta = \sqrt{npq} = \sqrt{12 \times 0.5 \times 0.5} = 1.78$$

إذا كان X يمثل عدد ظهور الصورة .وبالتالي نقوم بحساب الاحتمال $p(4 \leq X \leq 7)$

ولكن إذا افترضنا عدد النتائج متصل من أجل تطبيق تقريب التوزيع الطبيعي .في هذه الحالة يجب أن نحسب الاحتمال: $p(3.5 \leq X \leq 7.5)$

نقوم بحساب 3.5 و 7.5 بالوحدات المعيارية:

$$z_1 = \frac{X_1-\mu}{\delta} = \frac{3.5-6}{1.78} = -1.45, \qquad P(z_1 = 1.45) = 0.4265$$

$$z_2 = \frac{X_2-\mu}{\delta} = \frac{7.5-6}{1.78} = 0.87, \qquad P(z_2 = 0.87) = 0.3078$$

$$P \approx P(4 \leq X \leq 7) = P(-1.45 \leq X \leq 0.87)$$
$$= 0.4265 + 0.3078 = 0.7343$$

التمرين 8 : نفترض أنه هناك 300 خطأ مطبعيا موزعة على صفحات كتاب متكون من 500 صفحة .

أحسب احتمال أن تحتوي صفحة معينة على:

1–خطأين بالضبط؟

2–خطأين أو أكثر؟

3– 5أخطاء بالضبط؟

الحل:

1–احتمال وجود خطأين بالضبط هو:

بما أن عدد الأخطاء هو 300 وعدد الصفحات هو 500 فإن معدل الأخطاء لكل صفحة هو 300/500 من الأفضل استخدام توزيع بواسون حيث أن:

$$\lambda = np = 0.6$$

باستخدام توزيع بواسون نحصل على:

$$P(X=2)=\frac{0.6^2e^{-0.6}}{2!}=\frac{0.36\times0.549}{2}=0.0988$$

2–احتمال خطأين أو أكثر هو

$$P(X\geq2)=1-P(X=0)+P(X=1)$$

$$P(X=0)=\frac{0.6^0e^{-0.6}}{0!}=\frac{1\times e^{-0.6}}{1}=0.549$$

$$P(X=1)=\frac{0.6^1e^{-0.6}}{1!}=\frac{0.6\times0.549}{1}=0.329$$

$$P(X\geq2)=1-0.549+0.329$$

$$=0.122$$

3–احتمال وجود 5 أخطاء بالضبط هو

$$P(X=5)=\frac{0.6^5e^{-0.6}}{5!}=\frac{0.0777\times0.549}{120}=3.554775\times10^{-4}$$

التمرين :**9** في مركز تلقي المكالمات الهاتفية، يتم استقبال المكالمات من خارج الوطن باحتمال قدره 0.1 في الساعة .قمنا بسحب 100 مكالمة خلال ساعة معينة .ما هو احتمال أن نجد أكثر من 3 مكالمات دولية في العينة المسحوبة وذلك باستخدام:

1–توزيع ذي الحدين؟

2–التوزيع البواسوني؟

3–التوزيع الطبيعي؟

الحل:

1–احتمال أن نجد أكثر من 3 مكالمات دولية باستخدام توزيع ذي الحدين يجب أن نحسب الاحتمال:

$$p(X>3)$$

لدينا :المكالمة يمكن أن تكون محلية أو دولية وبالتالي يمكن تطبيق توزيع ذي الحدين.

$$P(X>3)=1-P(X\leq3)$$

$$=1-P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)$$

$$P(X=0)=c_{100}^{0}(0.1)^0(0.9)^{100-0}=0.0000265$$

$$P(X=1)=c_{100}^{1}(0.1)^1(0.9)^{100-1}=0.0005951$$

$$P(X=2)=c_{100}^{2}(0.1)^2(0.9)^{100-2}=0.0016231$$

$$P(X=3)=c_{100}^{3}(0.1)^3(0.9)^{100-3}=0.0078363$$

$$P(X \leq 3) = 0.000026 + 0.000595 + 0.001623 + 0.007836$$
$$= 0.0078363$$

وبالتالي:

$$P(X > 3) = 1 - 0.0078363$$
$$= 0.9921$$

2-احتمال أن نجد أكثر من 3 مكالمات دولية باستخدام توزيع بواسون هو:

$$\lambda = np = 100 \times 0.1 = 10$$

باستخدام قانون توزيع بواسون نحصل على:

$$P(X = 0) = \frac{10^0 e^{-10}}{0!} = \frac{1\times0.00005}{1} = 0.00005$$
$$P(X = 1) = \frac{10^1 e^{-10}}{1!} = \frac{10\times0.00005}{1} = 0.0005$$
$$P(X = 2) = \frac{10^2 e^{-10}}{2!} = \frac{100\times0.00005}{2} = 0.0023$$
$$P(X = 3) = \frac{10^3 e^{-10}}{3!} = \frac{1000\times0.00005}{6} = 0.008$$
$$P(X \leq 3) = 0.00005 + 0.0005 + 0.0023 + 0.008 = 0.0104$$
$$P(X > 3) = 1 - 0.0104 = 0.9896$$

3-احتمال أن نجد أكثر من 3 مكالمات دولية باستخدام التوزيع الطبيعي هو:

نقوم بحساب الاحتمال:

$$P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3)$$
$$\mu = np = 100 \times 0.1 = 10$$
$$\delta = \sqrt{npq} = \sqrt{100 \times 0.1 \times 0.9} = 3$$

بافتراض أن X يمثل عدد المكالمات الدولية. وبالتالي نقوم بحساب الاحتمال

$$p(X > 3) = 1 - p(0 \leq X \leq 3)$$

ولكن إذا افترضنا عدد النتائج متصلة من أجل تطبيق تقريب التوزيع الطبيعي. في هذه الحالة يجب أن نحسب الاحتمال$p(-0.5 \leq X \leq 3.5)$:

نقوم بحساب 3.5 و ‎-0.5 بالوحدات المعيارية:

$$z_1 = \frac{X_1-\mu}{\delta} = \frac{-0.5-10}{3} = -3.5, \qquad P(z_1 = 3.5) = 0.4998$$
$$z_2 = \frac{X_2-\mu}{\delta} = \frac{3.5-10}{3} = -2.16, \qquad P(z_2 = 2.16) = 0.4846$$
$$P \approx P(0 \leq X \leq 3) = P(-3.5 \leq X \leq -2.16)$$
$$= 0.4998 + 0.4846 = 0.9844$$

التمرين 10: تتكون عائلة من 7 أطفال، ما هو احتمال أن يكون في هذه العائلة:

1–4أولاد ؟

2–عدد الأولاد أقل من عدد البنات؟

الحل:

1–احتمال أن يكون في هذه العائلة 4 أولاد هو

احتمال أن يكون الطفل ولد هو0.5

لدينا:

$$n = 7, \quad P = \frac{1}{2}, \quad q = 1 - P = \frac{1}{2}$$

$$P(X = 4) = c_7^4 (\frac{1}{2})^4 (\frac{1}{2})^3 = 0.2734$$

2–احتمال أن يكون في هذه العائلة عدد الأولاد أقل من عدد البنات هو

$$P(X) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$$

$$P(X = 0) = c_7^0 (\frac{1}{2})^0 (\frac{1}{2})^7 = 0.0081$$

$$P(X = 1) = c_7^1 (\frac{1}{2})^1 (\frac{1}{2})^6 = 0.0546$$

$$P(X = 2) = c_7^2 (\frac{1}{2})^2 (\frac{1}{2})^5 = 0.1640$$

$$P(X = 3) = c_7^3 (\frac{1}{2})^3 (\frac{1}{2})^4 = 0.2734$$

$$P(X) = 0.0081 + 0.0546 + 0.1640 + 0.2734$$
$$= 0.5001$$

4. تمارين

تمرين 1: ليكن x متغير عشوائي يتبع التوزيع المنتظم في المجال] **a;** [

اوجد الاحتمالات:

$$p(x<3)$$

$p(x>6);\ \ p(3<x<8)$; والتوقع والتباين.

تمرين 2: X متغير عشوائي يتبع التوزيع الاسي بالمعلمة φ اثبت ان :

$$p(X\geq a)=e^{-\varphi a}\quad ;\ p(X>s+t\ \ /X>t)=p(X>s)\qquad s,t>0$$

تمرين3: بفرض ان مدة حياة سيارة من علامة معينة يتبع التوزيع الاسي بالمعلمة γ=0.1 .

- اوجد احتمال بقائها اكثر من 10 سنوات علما ان هذه السيارة تجاوزت مدة حياتها 10 سنوات ؟
- ما احتمال بقائها اكثر من 12 سنة؟
- ما احتمال بقائها اكثر من 18 سنة؟
- ما احتمال بقائها اكثر من 22 سنة؟

تمرين4: مدة حياة مصباح بالساعات تتبع التوزيع الاسي بالمعلمة γ=0.1 .

- ما هو عدد الساعات لبقاء المصباح صالحا باحتمال 0.9
- اوجد احتمال بقائها اكثر من 5 ساعات علما ان هذه السيارة تجاوزت مدة حياتها 100 ساعة ؟

تمرين 5: ليكن Z متغير عشوائي يتبع التوزيع الطبيعي المعياري، احسب الاحتمالات:

1- $P(1.98<Z<4.25)$

2- $P(-1.85<Z<0)$

3- $P(-1.5<Z<-0.74)$

4- $P(-2.45<Z<0.87)$

5- $P(1.15<Z<2.33)$

6- $P(Z>-1.74)$

7- $P(Z<-1.24)$

تمرين 5: ليكن X متغير عشوائي يتبع التوزيع الطبيعي ، بتوقع 3 وتباين 16. احسب الاحتمالات:

1- $p(|X-3|<4)$

2- $P(1.3<x<2.85)$

3- $P(x>3.22)$

4- $P(2.15<x<3.93)$

تمرين 6: ليكن X متغير عشوائي يتبع التوزيع الطبيعي ،حيث لدينا $p(X>9)=0.0228$ و $p(X\geq3)=0.8413$.

احسب التوقع والتباين ؟

تمرين 7: حسب مصلحة الارصاد الجوية فان درجة الحرارة اليومية خلال شهر جويلية تتوزع طبيعيا بمتوسط 35° وانحراف معياري 2° .

ما هو احتمال ان يكون هناك يوم:

1- تفوق درجة حرارته 37°؟
2- تفوق درجة حرارته 40°؟
3- تقل درجة حرارته عن 35°؟
4- درجة حرارته ما بين 33° و38°؟
5- ما هي درجة الحرارة حتى يكون احتمال ان تفوق الحرارة المتوسط هو 0.95.

تمرين 8: في تجربة القاء قطعة نقود 120 مرة . أحسب احتمال الحصول على الصورة ما بين 4 و 7 مرات باستخدام :

1- التوزيع الثنائي؟
2- تقريب التوزيع الثنائي الى توزيع بواسون؟
3- تقريب التوزيع الثنائي الى التوزيع الطبيعي؟
6-

تمرين 9: لدينا 625 رقم (مجموعة الارقام 0،1،2،،...9). أحسب احتمال ان يظهر الرقم 7 ما بين 50 و 60 مرة باستخدام :

4- التوزيع الثنائي؟
5- تقريب التوزيع الثنائي الى توزيع بواسون؟
6- تقريب التوزيع الثنائي الى التوزيع الطبيعي؟

الفصل الخامس: المتغيرات الثنائية

1. قانون الثنائية لمتغير منفصل (متقطع)

1.1. دالة الكثافة الاحتمالية والحدية

المتغيرات الثنائية هي متغيرات تتوقف على قيمة متغيرين اثنتين. مثال ذلك، معدل الطالب يتوقف على نقطة الرقابة المستمرة و نقطة التطبيق أو نقطة السداسي الأول ونقطة السداسي الثاني. كذلك نتيجة السنة المالية تتوقف على متغيرتي التكاليف و الإيرادات، وهكذا. التعريف الدقيق للمتغيرة الثنائية يتأتى باستخدام الترميز كما يلي:

ليكن لدينا متغيرين عشوائيين متقطعتين X و Y، نسمي دالة الكثافة الاحتمالية لمتغير عشوائي ذو بعدين (X و Y) الدالة المعرفة بالاحتمال كما يلي: $P(X = x,Y = y)$ ب $f(x,y)$:

$$f(x,y) = P(X = x,Y = y)$$

حيث تحقق الشرطين:

$$f(x,y) \geq 0$$

$$\sum_x\sum_y f(x,y) = 1$$

تسمى الثنائية (X,Y) متغير ذات بعدين و$f(x,y)$ دالة الكثافة الاحتمالية لها ونقول أيضا دالة الكثافة المشتركة للمتغيرتين X و Y ويمكن التعبير عنها عن طريق جدول للاحتمالات المشتركة (جدول التوزيع المشترك).

Y X	y_1	y_2	. . .	y_m	$f_1(x)$
x_1	$f(x_1,y_1)$	$f(x_1,y_2)$	. . .	$f(x_1,y_m)$	$f_1(x_1)$
x_2	$f(x_2,y_1)$	$f(x_2,y_2)$	. . .	$f(x_2,y_m)$	$f_1(x_2)$
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
x_n	$f(x_n,y_1)$	$f(x_n,y_2)$	. . .	$f(x_n,y_m)$	$f_1(x_n)$
$f_2(y)$	$f_2(y_1)$	$f_2(y_2)$	. . .	$f_2(y_n)$	1

احتمال $X = x$ يحسب ويكتب كما يلي $P\ (X = x) = f_1(x) = \sum_{k=1}^{m} f(x,y_k)$

احتمال $Y = y$ يحسب و يكتب كما يلي $P\ (Y = y) = f_2(y) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i,y)$

الدالتين $f_1(x)$ و$f_2(y)$ تسميان الدالتان الهامشيتان (الحديتان) حيث : $\sum f_1(x) = 1$ و$\sum f_2(y) = 1$

مثال 1: صندوق به 2 كريات حمراء و3بيضاء و4سوداء، نسحب 3كريات في آن واحد . نسمي X وY على التوالي عدد الكرات الحمراء والبيضاء المسحوبة.

حدد قانون الثنائية (X، Y)

نقوم بتحديد $p_{ij} = p\{(X = i)(Y = j)\}$

i={0,1,2} ;   j={0,1,2,3}

لدينا عدد الحالات الممكنة هو :

$$C_9^3 = \frac{9!}{6!\,3!} = \frac{504}{6} = 84$$

$$p(x = 0, y = 0) = \frac{C_4^3}{84} = \frac{4}{84} = 0.048$$

$$p(x = 1, y = 0) = \frac{C_4^2 C_2^1}{84} = \frac{12}{84} = 0.143$$

$$p(x = 2, y = 0) = \frac{C_4^1 C_2^2}{84} = \frac{4}{84} = 0.048$$

$$p(x = 0, y = 1) = \frac{C_4^2 C_3^1}{84} = \frac{18}{84} = 0.214$$

$$p(x = 0, y = 2) = \frac{C_4^1 C_3^2}{84} = \frac{12}{84} = 0.143$$

$$p(x = 0, y = 3) = \frac{C_3^3}{84} = \frac{1}{84} = 0.012$$

$$p(x = 1, y = 1) = \frac{C_4^1 C_2^1 C_3^1}{84} = \frac{24}{84} = 0.285$$

$$p(x = 2, y = 1) = \frac{C_4^0 C_2^2 C_3^1}{84} = \frac{3}{84} = 0.036$$

$$p(x = 1, y = 2) = \frac{C_4^0 C_2^1 C_3^2}{84} = \frac{6}{84} = 0.071$$

$$p(x = 2, y = 2) = p(x = 2, y = 3) = p(x = 1, y = 3) = 0$$

ثم نقوم بوضع النتائج في جدول متقاطع وهو يمثل دالة الكثافة المشتركة للمتغيرتين X وY.

Y / X	0	1	2	3	$p(X=i)$
0	0,048	0,214	0,143	0,012	0,417
1	0,143	0,285	0,071	0	0,499
2	0,048	0,036	0	0	0,084
$p(Y=j)$	0,239	0,535	0,214	0,012	1

نستطيع استخراج القانون الحدي لـX $p(X=i)$ من مجموع الاسطر

والقانون الحدي لـY $p(Y=j)$ من مجموع الاعمدة.

2.1. الدالة التوزيع التراكمية

الدالة التجميعية للمتغيرة الثنائية (X,Y) تكتب كما يلي:

$$F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \sum_{u \leq x} \sum_{v \leq y} f(u, v)$$

مثال: نرمي قطعة نقدية وحجر نرد، نرمز بـX لعدد مرات ظهور الصورة، وY للرقم الذي يظهر من مكعب النرد.

- أكتب التوزيع الاحتمالي المشترك للمتغيرتين،
- أحسب احتمالات الأحداث التالية: الحصول على صورة مع الرقم 6، الحصول على الصورة، الحصول على الرقم 6.
- أحسب الاحتمال $P(X \leq 1, Y \leq 3)$ ، $P(X \leq 2, Y \leq 6)$.

X\Y	1	2	3	4	5	6	$f_1(x)$
0	1/12	1/12	1/12	1/12	1/12	1/12	/2
1	1/12	1/12	1/12	1/12	1/12	**1/12**	**1/2**
$f_2(y)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1

احتمال الحصول على صورة مع الرقم 6 : $P(X = 1 \text{ et } Y = 6) = f(1, 6) = 1/12$

احتمال الحصول على الصورة

$$P(X = 1) = f_1(1) = \sum_{k=1}^{n} f(1, y_k) = 1/12 + 1/12 + \ldots = 1/2$$

احتمال الحصول على الرقم 6

$P(Y = 6) = f_2(6) = \sum_{i=1}^{m} f(x_i,6) = 1/12 + 1/12 = 1/6$

$P(X \le 1, Y \le 3) = F(1, 3) = \sum_{u\le1} \sum_{v\le3} f(u,v) = 6(1/12)$

$= 1/2$, $P(X \le 2, Y \le 6) = 1$

الامل الرياضياتي

ليكن X، Y ثنائي عشوائي منفصل وf(x,y) دالة كثافتهما المشتركة ، فإن الامل الرياضياتي لهذه الدالة هو عبارة مجموع جداءات قيم المتغيرين مضروب في الاحتمال المشترك بينهما لكل قيمة من قيمهما :

$$E[f(x,y)] = \sum_{i} \sum_{j} x_i y_j \, p\big(X = x_i; Y = y_j\big) = E(x,y)$$

3.1. التوزيع الشرطي

في حالة X، Y متغيرتان عشوائيتان متقطعتان، فإن دالة الكثافة الاحتمالية الشرطية ل (X/Y = y) تكتب كما يلي f(x/y) وتحسب كما يلي: $f(x/y) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)} = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(X = x)}$

و هذا استنادا إلى القانون التقليدي للاحتمالات الشرطية: $P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

التوزيع الاحتمالي ل X حيث Y = y هو مجموعة قيم المتغيرة X عند تثبيت Y والاحتمالات f(x/y) المقابلة لها.

مثال 1: ليكن لدينا قانون الثنائية المشترك معطى في الجدول الموالي:

X / Y	-2	0	2	
-1	0.1	0.2	0.1	0.4
2	0.2	0.2	0.2	0.6
	0.3	0.4	0.3	1

اوجد القانون الشرطي لX مع العلم ان Y=-1

x	-2	0	2	
P(X/Y=-1)	0.1/0.4	0.2/0.4	0.1/0.4	1
	0.25	0.5	0.25	

مثال2. لتكن X عدد مرات الحصول على صورة عند رمي قطعة نقدية مرتين وY الفرق بالقيمة المطلقة بين عدد مرات الصورة وعدد مرات الكتابة.

أكتب التوزيع الاحتمالي لـ$Y/X = 1$، أكتب التوزيعان الاحتماليان ل $X/Y = 0$ و$X/Y = 2$.

Y	1	0
P(y/x=1)	0	1

X	0	1	2
P(X/Y=0)	0	1	0
P(X/Y=2)	1/2	0	1/2

في حالة X وYمتغيرتان ع متصلتان نكتب: $P(c \leq Y \leq d / x \leq X \leq x + dx) = \int_c^d f(y/x)\, dy$

خلاصة

احتمال ثنائية عشوائية و يحسب كما يلي:

$$f(x,y) = P(X = x, Y = y)$$

للتعبير عن احتمال قيمة ما لإحدى المتغيرتين نكتب: $P(X = x) = f_1(x)$ و تسمى دالة الكثافة الهامشية.

الاحتمال التجميعي لمتغيرتين فيعبر عنه من خلال دالة التوزيع المشتركة:

$$F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$$

تنطبق هذه التعاريف على كل من المتغيرات المتقطعة و المستمرة.

للتعبير عن التوزيع الاحتمالي لإحدى المتغيرتين بشرط أن تأخذ المتغيرة الثانية قيمة ما (0، مثلا) فنكتب:

$$P(X/Y = 0)$$

لحساب الاحتمالات الشرطية ل X تستخدم القاعدة:

$$P(X/Y = y) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)} = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(X = x)}$$

2. التوزيعات المشتركة

1.2. التوزيعات المشتركة المتصلة

ليكن لدينا X وYمتغيرين عشوائيين متصلين، نعرف دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة لهما كما يلي:

$$P(X = x, Y = y) = f(x, y)=\iint_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy$$

وهي تحقق الشروط لان تكون دالة كثافة احتمالية:

- الاستمرارية على مجال او مجالات
- $f(x, y) \geq 0$
- $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\, dx\, dy = 1$

دالة الكثافة الاحتمالية للثنائية (X,Y) .

2.2. دالة التوزيع التراكمية

نكتب دالة التوزيع (الدالة التجميعية) كما يلي:

$$F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \int_{u=-\infty}^{x}\int_{v=-\infty}^{y} f(u, v)\, du\, dv$$

و يمكن استنتاج دالة الكثافة المشتركة من الدالة التراكمية بالاشتقاق كما يلي: $f(x, y) = \partial^2F / (\partial x\, \partial y)$

من جهة أخرى $F_1(x) = P(X \leq x) = \int_{u=-\infty}^{x}\int_{v=-\infty}^{\infty} f(u, v)\, du\, dv$

$$F_2(y) = P(Y \leq y) = \int_{u=-\infty}^{\infty}\int_{v=-\infty}^{y} f(u, v)\, du\, dv$$

ونسمي الدالتان $F_1(x)$ و$F_2(y)$ الدالتان التراكميتان (التجميعيتان) الهامشيتان (الحديتان).

ولتحديد احتمال X وY محصورتان في مجالين ما نكتب:

$$P(a \leq x \leq b, c \leq y \leq d) = \int_{x=a}^{b}\int_{y=c}^{d} f(x, y)\, dx\, dy$$

مثال 3: ليكن لدينا X وYمتغيرين عشوائيين متصلين، نعرف دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة لهما كما يلي:

$$f(x,y) = \begin{cases} c(2x+y) & 0 < x \leq 2\ ;\ 0 < y \leq 3 \\ 0 & \text{خارج المجالين} \end{cases}$$

المطلوب:

1- اوجد قيمة الثابت c ؟

2- اوجد دالة التوزيع؟

3- احسب $p(x > 1; y < 2)$

الحل:

1- قيمة الثابت c

$$\iint_R f(x,y)dxdy = 1$$

$$= \int_0^2 \int_0^3 c(2x+y)dxdy$$

$$= \int_0^2 [c(2xy + 0.5y^2]_0^3 dx$$

$$= \int_0^2 c(6x+4.5)dx = [3cx^2 + 4.5c]_2^4 = 12c + 9c = 21c = 1$$

$$\Rightarrow c = \frac{1}{21}$$

2- دالة التوزيع

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(x,y)dudv = \frac{1}{21}\int_0^x\int_0^y (2x+y)dudv = \frac{1}{21}x^2y + \frac{1}{42}y^2x$$

$$F(x,y) = \begin{cases} 0 & x \le 0, y \le 0 \\ \frac{1}{21}x^2y + \frac{1}{42}y^2x & 0 < x \le 2\ ; 0<y \le 3 \\ 1 & x > 2\ ;\ y > 3 \end{cases}$$

3- $p(x > 1; y < 2)$

$$
\begin{aligned}
&p(x>1;y<2)\\
&\qquad =\int_0^1\int_0^2 f(x,y)dxdy\\
&\qquad =\int_0^1\int_0^2 \frac{1}{21}(2x+y)dxdy\\
&\qquad =\int_0^1 \frac{1}{21}[2xy+0.5y^2]_0^2=\int_0^1 \frac{1}{21}(4x+2)dx=\frac{2}{21}[x^2+x]_0^2\\
&\qquad =8/21
\end{aligned}
$$

3.2. الدوال الهامشية او الحدية

الدالتان الهامشيتان (الحديتان) للكثافة الاحتمالية للثنائية (X, Y) فيعبر عنها كما يلي:

$$f_1(x) = \int_{v=-\infty}^{+\infty} f(x, v)\, dv\ , \qquad f_2(y) = \int_{u=-\infty}^{+\infty} f(u, y)\, du$$

4.2. التوزيع الشرطي

في حالة X، Y متغيرتان عشوائيتان متقطعتان، فإن دالة الكثافة الاحتمالية الشرطية ل (X/Y = y) تكتب كما يلي f(x/y) وتحسب كما يلي: $f(x/y)=\dfrac{f(x,y)}{f_1(x)}=\dfrac{P(X=x,Y=y)}{P(X=x)}$

و هذا استنادا إلى القانون التقليدي للاحتمالات الشرطية: $P(B/A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$

التوزيع الاحتمالي ل X حيث Y = y هو مجموعة قيم المتغيرة X عند تثبيت Y والاحتمالات f(x/y) المقابلة لها.

3. تمارين محلولة

تمرين 1: إذا كانت دالة الاحتمال المشتركة لعدد الأطفال في الأسر ما بين طفل و3 أطفال (X : x = 1,2 ,3) وعدد الوحدات المستهلكة من حليب الجاف من نوع معين كل أسبوعين (Y : y = 0 ,1,2) تأخذ الشكل الموالي

$$f(x,y) = \frac{y - 0{,}6x + 2}{18} \qquad ; x = 1,2\ ,3\ \ ; y = 0\ ,1,2$$

1. اوجد جدول التوزيع الاحتمالي المشترك بين المتغيرين
2. أحسب احتمال أن أسرة عدد أطفالها 3 ، واستهلاكها الاسبوعي من الحليب وحدة واحدة
3. شكل دوال التوزيع الهامشية للمتغيرين، ثم احسب المتوسط والتباين لكل منها
4. أحسب معامل الارتباط بين عدد الأطفال وعدد الوحدات المستهلكة، وما هو مدلوله
5. أوجد التوزيع الاحتمالي الشرطي لعدد الوحدات المستهلكة عند معلومية عدد الأطفال. وما هو متوسط عدد الوحدات المستهلكة إذا علم أن عدد الأطفال في الأسرة طفالان
6. أحسب مصفوفة التباين والتغاير للمتغيرين

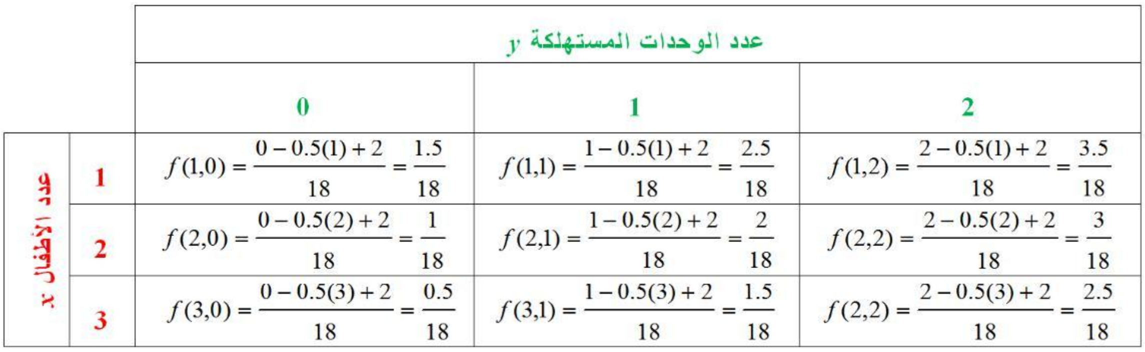
الحل:

بالتعويض في معادلة االحتمال المشترك :

$$f(x,y) = \frac{y - 0{,}6x + 2}{18} \qquad ; x = 1,2\ ,3\ \ ; y = 0\ ,1,2$$

حيث عدد الأطفال 3, 2, X=1 ، عدد الوحدات المستهلكة y = 0 ,1,2

نحصل على الاحتمالات التالية:



		عدد الوحدات المستهلكة y		
		0	1	2
عدد الأطفال x	1	$f(1,0) = \frac{0 - 0.5(1) + 2}{18} = \frac{1.5}{18}$	$f(1,1) = \frac{1 - 0.5(1) + 2}{18} = \frac{2.5}{18}$	$f(1,2) = \frac{2 - 0.5(1) + 2}{18} = \frac{3.5}{18}$
	2	$f(2,0) = \frac{0 - 0.5(2) + 2}{18} = \frac{1}{18}$	$f(2,1) = \frac{1 - 0.5(2) + 2}{18} = \frac{2}{18}$	$f(2,2) = \frac{2 - 0.5(2) + 2}{18} = \frac{3}{18}$
	3	$f(3,0) = \frac{0 - 0.5(3) + 2}{18} = \frac{0.5}{18}$	$f(3,1) = \frac{1 - 0.5(3) + 2}{18} = \frac{1.5}{18}$	$f(2,2) = \frac{2 - 0.5(3) + 2}{18} = \frac{2.5}{18}$

ومن ثم نكتب جدول التوزيع االاحتمالي المشترك على الصورة التالية

$f(x)$	عدد الوحدات المستهلكة y				
	2	**1**	**0**		
(7.5/18)	(3.5/18)	(2.5/18)	(1.5/18)	**1**	عدد الأطفال x
(6/18)	(3/18)	(2/18)	(1/18)	**2**	
(4.5/18)	(2.5/18)	(1.5/18)	(0.5/18)	**3**	
1	**(9/18)**	**(6/18)**	**(3/18)**	$f(y)$	

2. احتمال أن أسرة عدد أطفالها 3 ، واستهلاكها الأسبوعي من الحليب وحدة واحدة

$$p(x=3, y=1) = \frac{1-0{,}6(3)+2}{18} = \frac{1}{9} = 0{,}06$$

3. دوال التوزيع الهامشية للمتغيرين، ثم احسب المتوسط والتباين لكل منها

دالة الاحتمال الهامشية لعدد الأطفال، أي للمتغير X تحسب بتطبيق المعادلة التالية:

$$p(X=x) = \sum_{j} p(X=x_i; Y=y_j) = \sum_{j=0}^{2} \frac{y_j - 0{,}6x + 2}{18}$$

$$= \frac{9-1{,}8x}{18} = 0{,}5 - 0{,}1x \qquad ; x=0,1,2,3 \quad \dots.(1)$$

دالة الاحتمال الهامشية لعدد الوحدات المستهلكة Y تحسب بتطبيق المعادلة التالية:

$$p(Y=y) = \sum_{i} p(X=x_i; Y=y_j) = \sum_{i=0}^{3} \frac{y - 0{,}6x_i + 2}{18}$$

$$= \frac{4{,}4+4y}{18} = 0{,}24 + 0{,}22y \qquad ; y=0,1,2 \quad \dots.(2)$$

ولحساب المتوسط والتباين للمتغيرين تستخدم دوال التوزيع الهامشية الموضحة بالمعادلتين 1و2 ويتم تطبيق المعادلات التالية

عدد الوحدات المستهلكة y	عدد الأطفال في الأسرة x	
$\mu_y = \sum_{y}^{c} y\, f(y)$	$\mu_x = \sum_{x}^{r} x\, f(x)$	المتوسط μ
$\sigma_y^2 = \sum_{y}^{c} y^2 f(y) - \mu_y^2$	$\sigma_x^2 = \sum_{x}^{r} x^2 f(x) - \mu_x^2$	التباين σ^2

كما يمكن أيضا اشتقاق التوزيعين الهامشين من دوال التوزيع الاحتمالي المشترك ، وتطبيق معادلتي المتوسط والتباين كما يلي:

$f(x) = (9 - 1.5x)/18$					$f(y) = (3y+3)/18$			
x	$f(x)$	$x\ f(x)$	$x^2\ f(x)$		y	$f(y)$	$y\ f(y)$	$y^2\ f(y)$
1	(7.5/18)	(7.5/18)	(7.5/18)		0	(3/18)	0	0
2	(6/18)	(12/18)	(24/18)		1	(6/18)	(6/18)	(6/18)
3	(4.5/18)	(13.5/18)	(40.5/18)		2	(9/18)	(18/18)	(36/18)
Total	1	**(33/18)**	**(72/18)**		Total	1	**(24/18)**	**(42/18)**

وبتطبيق معادلتي المتوسط والتباين:

عدد الوحدات المستهلكة y	عدد الأطفال في الأسرة x	
$\mu_y = (24/18) = 1.33$	$\mu_x = (33/18) = 1.83$	المتوسط μ
$\sigma_y^2 = \sum_y^c y^2 f(y) - \mu_y^2$ $= (42/18) - (1.33)^2 = 0.5556$	$\sigma_x^2 = \sum_x^r x^2 f(x) - \mu_x^2$ $= (72/18) - (1.83)^2 = 0.6389$	التباين σ^2

أي أن متوسط عدد الأطفال في الأسرة التي بها الث أطفال تقريبا 1.83 طفل، بتباين 0.638. بينما وجد أن متوسط عدد الوحدات المستهلكة للأسرة 1.33 علبة، بتباين 0.555.

4. معامل الارتباط بين عدد الأطفال وعدد الوحدات المستهلكة، وما هو مدلوله

يبين معامل الارتباط نوع وقوة العلاقة بين متغيرين ، ولحساب معامل الارتباط بين المتغيرين (X, Y) ، ويرمز له بالرمز ρ_{xy} ، تطبق المعادلة التالية:

$$\rho_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} \qquad (8)$$

حيث أن:

σ_{xy} **هو التغاير بين المتغيرين** (X, Y) **ويحسب بالمعادلة التالية**

$$\sigma_{xy} = \sum_y^c \sum_x^r xy\ f(x, y) - \mu_x \mu_y \qquad (9)$$

ويمكن حسابه من جدول التوزيع الاحتمالي المشترك كالتالي:

حساب المجموع $\sum_{y}^{c}\sum_{x}^{r} xy \ \ f(x,y)$

عدد الوحدات المستهلكة y				
2	**1**	**0**		
$1\times2\times\ (3.5/18)=(7/18)$	$1\times1\times\ (2.5/18)=\ (2.5/18)$	$1\times0\times(1.5/18)\ =0$	**1**	عدد الأطفال x
$2\times2\times\ (3/18)=(12/18)$	$2\times1\times\ (2/18)=(4/18)$	$2\times0\times(1/18)=0$	**2**	
$3\times2\times\ (2.5/18)=(15/18)$	$3\times1\times\ (1.5/18)=(4.5/18)$	$3\times0\times\ (0.5/18)=0$	**3**	

$$\sum_{y}^{c}\sum_{x}^{r} xy \ \ f(x,y)=\left\{\left(0+\frac{2.5}{18}+\frac{7}{18}\right)+\left(0+\frac{4}{18}+\frac{12}{18}\right)+\left(0+\frac{4.5}{18}+\frac{15}{18}\right)\right\}=\frac{45}{18}=2.5$$

إذا التغاير قيمته هي:

$$\sigma_{xy}=\sum_{y}^{c}\sum_{x}^{r} xy \ \ f(x,y)-\mu_x\mu_y$$
$$=2.5-(1.83)(1.33)=0.0556$$

σ_x : هو الانحراف المعياري لعدد الأطفال x وهو الجذر التربيعي للتباين، أي أن:

$$\sigma_x=\sqrt{\sigma_x^2}=\sqrt{0.6389}=0.7993$$

σ_y : هو الانحراف المعياري لعدد الوحدات المستهلكة y ويحسب أيضا كالتالي:

$$\sigma_y=\sqrt{\sigma_y^2}=\sqrt{0.5556}=0.7454$$

ويكون معامل الارتباط هو:

$$\rho_{xy}=\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x\sigma_y}=\frac{0.0556}{(0.7993)(0\ \ .7454)}=0.0933$$

يوجد ارتباط طردي ضعيف بين عدد الأطفال في الأسرة وعدد الوحدات المستهلكة من الحليب الجاف.

5. التوزيع الاحتمالي الشرطي لعدد الوحدات المستهلكة عند معلومية عدد الأطفال. وما هو متوسط عدد الوحدات المستهلكة إذا علم أن عدد الأطفال في الأسرة طفلان

يعرف التوزيع الشرطي للمتغير، بأنه التوزيع الاحتمالي لأحد المتغيرين عند معلومية المتغير الآخر، ولحساب التوزيع الشرطي لعدد الوحدات المستهلكة Y إذا علم عدد الأطفال في الآسرة X تطبق المعادلة التالية

$$f(y \mid x) = \frac{f(x,y)}{f(x)} = \frac{((y - 0.5x + 2)/18)}{((9 - 1.5x)/18)}$$

$$= \frac{(y - 0.5x + 2)}{(9 - 1.5x)}, \quad y = 0,1,2$$

6. مصفوفة التباين والتغاير للمتغيرين

تعرف مصفوفة التباين والتغاير بأنها مصفوفة مربعة عناصر قطرها الرئيسي تمثل التباينات وعناصرها الأخرى تمثل التغايرات، وحيث أن لدينا متغيرين فقط تكون هذه من الدرجة (2 × 2) ويعبر عنها كالتالي

$$\begin{array}{c} \\ x \\ y \end{array} \begin{array}{cc} x & y \\ \left(\begin{array}{c} \sigma_x^2 \\ \sigma_{xy} \end{array}\right. & \left.\begin{array}{c} \sigma_{xy} \\ \sigma_y^2 \end{array}\right) \end{array} = \begin{pmatrix} 0.6389 & 0.0556 \\ 0.0556 & 0.5556 \end{pmatrix}$$

تمرين 3:

ليكن المتغيرين العشوائيين ذوالقانون الاحتمالي المشترك المبين في الجدول المقابل .

y x	1	2	3	4
1	0,08	0,04	0,16	0,12
2	0,04	0,02	0,08	0,06
3	0,08	0,04	0,16	0,12

المطلوب:

1. حدد القوانين الحدية للمتغيرين؟
2. أحسب قيمة التباين المشترك؟ وماذا تستنتج؟
3. حدد القانون الشرطي ل **X** مع العلم ان **Y=2**
4. حدد القانون الشرطي ل **Y** مع العلم ان **X=3**

حل :

1- القانون الحدي (الهامشي) هو مجاميع الاسطر او الاعمدة

	1	2	3	4	$P_{i.}$
1	0,08	0,04	0,16	0,12	0,4
2	0,04	0,02	0,08	0,06	0,2
3	0,08	0,04	0,16	0,12	0,4
$P_{.j}$	0,2	0,1	0,4	0,3	1

وعليه يكون القانون الهامشي لـ x

x	1	2	3	
p(x)	0,4	0,2	0,4	1

القانون الهامشي لـ y

y	1	2	3	4	
p(y)	0,2	0,1	0,4	0,3	1

2- التباين المشترك

Cov(x,y)=E(x.y)-E(x)*E(y)=$\sum x_i * y_j * p(ij) - E(x) * E(y)$

x	1	2	3	
p(x)	0,4	0,2	0,4	1
x*p(x)	0,4	0,4	1,2	2

E(x)=2

y	1	2	3	4	
p(y)	0,2	0,1	0,4	0,3	1
y*p(y)	0,2	0,2	1,2	1,2	2,8

E(y)=2,8

E(x.y) = جداء x*y*الاحتمال المشترك بينهما

X*y*pij= 0,08 0,08 0,48 0,48

0,08 0,08 0,48 0,48

0,24 0,24 1,44 1,44 = 5,6

E(x.y)=5,6

Cov(x.y)=5,6-(2)*(2,8)=5,6-5,6=0

نستنتج ان الارتباط بينهما معدوم لان معامل الاتباط $r = \frac{cov(xy)}{SD(x)*SD(y)}$

3- القانون الشرطي

x

x	p(x/y=2)	
1	0,04/0,1=	0,4
2	0,02/0,1=	0,2
3	0,04/0,1=	0,4
	1	1

x	1	2	3	
p(x/y=2)	0,04/0,1=	0,02/0,1=	0,04/0,1=	1
	0,4	0,2	0,4	1

Y

y	1	2	3	4	
p(y/x=3)	0,08/0,4=	0,04/0,4=	0,16/0,4=	0,12/0,4=	1
	0,2	0,1	0,4	0,3	1

تمرين 04: لتكن دالة الكثافة الاحتمالية التالية

$$f(x)=\begin{cases} c\,x^2(1-x) & si \quad 0<x<1; c>0 \\ 0 & si\ non \end{cases}$$

المطلوب:

1. اوجد قيمة الثابت ؟
2. اوجد دالة التوزيع التراكمية
3. احسب الامل الرياضي والتباين
4. احسب الاحتمالات: $p(x\le 0.5)\ \ ; p(x\ge 0.5)\ \ ; p(x=0.5)\ \ ; p(0.5<x\le 1)$

حل

لدينا دالة الكثافة الاحتمالية التالية

$$f(x)=\begin{cases} c\,x^2(1-x) & si \quad 0<x<1; c>0 \\ 0 & si\ non \end{cases}$$

1- ايجاد قيمة c

من اجل ان تكون دالة كثافة احتمالية تحقق 3 شروط

- $0\le f(x)\le 1$
- $f(x)$ مستمرة على مجال او مجالات
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$

نعتمد على الشرط الاخير لحساب المجهول

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1=\int_{-\infty}^{0} 0dx+\int_{0}^{1} cx^2(1-x)dx+\int_{1}^{+\infty} 0dx$$

$$=\int_{0}^{1} cx^2(1-x)dx=c\int_{0}^{1}(x^2-x^3)dx=c\ \left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4\right]_0^1$$

$$=c\left[\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)-0\right]=\frac{c}{12}=1\Rightarrow c=12$$

2- دالة التوزيع التراكمية F(x)

$$F(x) = p(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$$

- Pour $x \leq 0$

$$F(x) = p(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du = \int_{-\infty}^{x} 0du = 0$$

- Pour $0 \leq x \leq 1$

$$F(x) = p(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du = \int_{-\infty}^{0} 0du + \int_{0}^{x} 12u^2(1-u^2)du = 12\int_{0}^{x}(u^2 - u^3)du = 12 \left[\frac{1}{3}u^3 - \frac{1}{4}u^4\right]_0^x = 12\left[\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right) - 0\right] = 4x^3 - 3x^4$$

- Pour $x \geq 1$

$$F(x) = p(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$$

$$= \int_{-\infty}^{0} 0du$$

$$+ \int_{0}^{1} 12u^2(1-u^2)du + \int_{1}^{x} 0du = 12\int_{0}^{1}(u^2 - u^3)du = 1$$

وعليه نكتب دالة التوزيع التراكمية كما يلي:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 4x^3 - 3x^4 & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

3– الامل الرياضي والتباين

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} 0dx$$

$$+ \int_{0}^{1} 12x^2(1-x^2)dx + \int_{1}^{+\infty} x0du$$

$$= 12\int_{0}^{1}(x^3 - x^4)dx = 12 \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{5}x^5\right]_0^1 = 12\left[\left(\frac{1}{20}\right) - 0\right] = \frac{3}{5}$$

التباين

$$V(x) = E(x^2) - (E(x))^2$$

$$E(x^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = 12\int_{0}^{1}(x^4 - x^5)dx = 12\left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{6}x^6\right]_0^1 = \frac{2}{5}$$

$$V(x) = \frac{2}{5} - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{1}{25}$$

4. حساب الاحتمالات

$$p(x \leq 0.5) = \int_{-\infty}^{0.5} f(x)dx = F(0.5) = 4(0.5)^3 - 3(0.5)^4 = \frac{5}{16}$$

$$p(x \geq 0.5) = 1 - p(x \leq 0.5) = \frac{11}{16}$$

$$p(x = 0.5) = \int_{0.5}^{0.5} f(x)dx = 0$$

$$p(0.5 \leq x \leq 1) = p(x \leq 1) - p(x \leq 0.5) = F(1) - F(0.5) = \frac{11}{16}$$

تمرين 5: لدينا دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة للمتغيرتين X وY المعرفة كما يلي:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{96} & , \quad 0 < x < 4,\ 1 < y < 5 \\ 0 & \quad \text{sinon} \end{cases}$$

1- أكتب دالة التوزيع الهامشية للمتغيرين

2- أحسب احتمال 2 > x > 0 ؟

3- أحسب احتمال 3 > y > 1؟

الحل:

1- دالة التوزيع الهامشية للمتغيرين

$$F_1(x) = P(X \leq x) = \int_{u=-\infty}^{x}\int_{v=-\infty}^{\infty} f(u, v)\, du\, dv$$

* $x < 0 : F_1(x) = 0,$

* $0 \leq x < 4 :$

$F_1(x) = \int_{u=-\infty}^{x}\int_{v=-\infty}^{\infty} uv/96\, du\, dv = 0 + \int_{u=0}^{x}\int_{v=1}^{5} uv/96\, du\, dv$

$= 1/96 \int_{u=0}^{x}[\int_{v=1}^{5} uv\, dv]\, du = 1/96\int_{u=0}^{x}[12u]\, du = x^2/2\ (12/96) = \mathbf{x^2/16}.$

* $x \geq 4: F_1(x) = 1$

$$F_1(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x^2/16 & 0 \leq x < 4 \\ 1 & x \geq 4 \end{cases}$$

$F_2(y) = P(Y \leq y) = \int_{u=-\infty}^{\infty}\int_{v=-\infty}^{y} f(u, v)\, du\, dv$

Pour $y < 1 : F_2(y) = 0$,

* $1 \leq y < 5$:

$F_2(y) = 0 + \int_{u=0}^{4}\int_{v=1}^{y} uv/96 \, dudv = 1/96 \int_{u=0}^{4}[\int_{v=1}^{y} uv \, dv] \, du = 1/96 \int_{u=0}^{4}[u (y^2 - 1) / 2] \, du$

$= (1/2 * 1/96) (y^2 - 1) (u^2/2)_0^4 = (1/(2*96)) (y^2 - 1) (16/2) = (y^2 - 1) / 24$

* $y \geq 5 : F_2(y) = 1$

$$F_2(y) = \begin{cases} 0 & y < 1 \\ (y^2 - 1)/24 & 1 \leq y < 5 \\ 1 & y \geq 5 \end{cases}$$

2- احتمال $0 < x < 2$

$P(0 < x < 2) = F_1(2) – F_1(0) = 4/16 = ¼$,

3- احتمال $1 < y < 3$

$P(1 < y < 3) = 8 / 24 = 1/3$

4. تمارين

01: لدينا دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة للمتغيرتين X وY المعرفة كما يلي:

$$f(x,y)=\begin{cases}8xy & 0< x<y<1\\ 0 & \text{خارج المجال}\end{cases}$$

1- حدد الكثافة الحدية للمتغيرين ؟

02. ليكن المتغيرين العشوائيين ذو القانون الاحتمالي المشترك المبين في الجدول المقابل .

y \ x	0	1	2	3
0	c	2c	0	3c
1	0	3c	4c	0
2	0	4c	2c	c

المطلوب:

1. حدد قيمة **C**
2. حدد القوانين الحدية للمتغيرين؟
3. أحسب قيمة التباين المشترك؟
4. حدد القانون الشرطي ل **X** مع العلم ان **Y=1**
5. حدد القانون الشرطي ل **Y** مع العلم ان **X≥1**

3. إذا كانت دالة التوزيع الاحتمالي الثنائية ($Bi\text{var}iate\ \ p.d.f$) للمتغيرين العشوائيين X و Y هي:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{9}x(y-x) & ,0\le x\le 3\quad 2\le y\le 4\\ \\ 0 & ,otherwise\end{cases}$$

احسب : 1- $E(X+Y)$ ؟ 2- $E(X-Y)$ ؟ 3- احسب التباين للتوزيع الهامشي (Marginal Dist.) لـ X و Y ؟ 4- احسب معامل الارتباط (Correlation cof.) بين X و Y ؟

5. اذا كان المتغيرين العشوائيين X و Y لهما دالة التوزيع التجميعية المشتركة الآتية:

$$F(x,y)=\begin{cases} 0 & ,x\le 0 \quad or \quad y\le 0 \\ xy/\{(1+x)(1+y)\} & ,x,y>0 \end{cases}$$

أوجد دالة التوزيع الاحتمالية المشتركة للمتغيرين X و Y، ثم أوجد دوالهما التوزيعية الهامشية، وبين أن المتغيرين العشوائيين مستقلين؟

6. اذا كان المتغيرين العشوائيين X و Y لهما الدالة التالية:

$$f(x,y)=\begin{cases} x^3y+\frac{\lambda^3}{16}y^2 & ,0<x<1,0<y<2 \\ 0 & ,otherwise \end{cases}$$

تحقق من كون $f(x,y)$ هي دالة توزيع احتمالي مشتركة؟ ،ثم اوجد الدوال التوزيعية الهامشية للمتغيرين العشوائيين ؟، ثم اوجد دالة التوزيع الاحتمالي الشرطي إلى X عندما $Y=y$ معطى؟.

7. اذا كان X و Y متغيرين عشوائيين ،وان $U=\alpha_1+\beta_1X$ ، $V=\alpha_2+\beta_2Y$، حيث أن α_1 و α_2 و β_1 و β_2 ثوابت اختيارية، بين ان معامل الارتباط بين U و V يساوي معامل الارتباط بين X و Y ؟

8. اذا كان X و Y متغيرين عشوائيين مستمرين لهما دالة التوزيع الاحتمالية المشتركة التالية :

$$f(x,y)=\begin{cases} 1/(2x^2y) & ,1<x<\infty, 1/x<y<x \\ 0 & ,otherwise \end{cases}$$

اشتق دالة التوزيع الهامشية للمتغيرين X و Y ؟، ثم اوجد دالة التوزيع الاحتمالية الشرطية إلى X عندما $Y=y$ معطى؟

قائمة المراجع:

باللغة العربية:

1. جبار عبد مضحي، مقدمة في نظرية الاحتمالات، دار المسيرة للنشر، عمان، الاردن، 2011.
2. جنيدي نكو و خينتشين، المبادئ الأولية لنظرية الاحتمالات، دار مير للطباعة والنشر.
3. دومينيك سالفاتور، ترجمة سعدية حافظ منتصر، الإحصاء والاقتصاد القياسي، ملخصات شوم، الطبعة الثالثة، الدار الدولية للاستثمارات الثقافية، مصر، 2011.
4. السعدي رجال، نظرية الاحتمالات، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 1995
5. سيمور ليبشتز، ترجمة سماح داود، نظريات ومسائل في الاحتمالات، ملخصات شوم، الدار الدولية للاستثمارات الثقافية، مصر، 2003 .
6. موراي سبيجل، جون شيلر وألو سرينيفاسان، ترجمة محمود على أبو النصر ومصطفى جلال مصطفى، الاحتمالات والاحصاء، ملخصات شوم، الطبعة الأولى، الدار الدولية للاستثمارات الثقافية، 2004.

باللغة الأجنبية:

7. Ben Lambert, A Student's Guide to Bayesian Statistics, SAGE Publication Ltd, United Kingdom, 2018.
8. Charles M. Grinstead and J. Laurie Snell, Introduction to Probability, Swarthmore College, 2005.
9. Dimitri P. Bertsekas and John N. Tsitsiklis, Introduction to Probability: Problem Solutions, 2nd Edition, Massachusetts Institute of Technology, 2015.
10. Dimitri P. Bertsekas and John N. Tsitsiklis, Introduction to Probability, Massachusetts Institute of Technology, 2000.
11. Dirk P. Kroese, A Short Introduction to Probability, The University of Queensland, 2009.
12. F.M. Dekking, Kraaikamp, H.P. Lopuhaa,¨ L.E. Meester, A Modern Introduction to Probability and Statistics, Understanding Why and How, Springer-Verlag London Limited, 2005.
13. Hervé Carrieu, PROBABILITÉ (Exercices, corrigés), EDP Sciences, France, 2008.
14. Heather Haney and Ernest Johnson, Probability and Statistics, 4ed Edition CK-12 Foundation, 2011.
15. Hwei P. Hsu, Theory and Problems of Probability, Random Variables, and Random Processes, Schaum's Outline, The McGraw-Hill Companies, 1997.
16. Kai Lai Chung, A Course in Probability Theory, Third Edition, Academic Press, 2001.
17. Miroslav Lovri, Students' Solutions Manual Probability and Statistics, McMaster University, 2011.

18. Renée Veysseyre, Statistique et probabilités pour l'ingénieur, 2eme ED, DUNOD, Paris, 2006.
19. Rick Durrett, Probability: Theory and Examples, Edition 4, Cambridge University Press, 2013.
20. Sheldon Ross, A first course in probability, 8th ed. Pearson Prentice Hal, 2010.