جامعة الجيلالي بونعامة بخميس مليانة

كلية العلوم الاقتصادية والعلوم التجارية وعلوم التسيير

الرياضيات للتخصصات الاقتصادية

مطبوعة الأعمال الموجهة

مقياس:

رياضيات Maths 1

السنة أولى L.M.D

عبدالقادر خدّاوي مصطفى

2020-2019

بسم الله الرحمن الرحيم

تمهيد

نضع بين يدي الطالب الكريم بجامعة الجيلالي بونعامة بخميس مليانة مطبوعة أعمال توجيهية في مقياس الرياضيات 01، للسنة الأولى جذع مشترك ل.م.د للتخصصات الاقتصادية. وهذه المطبوعة، تشمل ملخصات دروس وتمارين محلولة متنوعة..

تقع مادة المطبوعة، وهي تتناول التحليل العددي، في 6 فصول بـ 202 صفحة من الحجم الكبير، كل فصل بملخص وجيز عن الدرس متبوع بتمارين محلولة متنوعة، وأغلب هذه التمارين كانت قد أُعطيت في حصص الأعمال التوجيهية والامتحانات..

جاءت المطبوعة شاملة وملمة بالبرنامج، وهي تمثل إضافة جديدة للمكتبة من شأنها أن تسهم في توضيح الصورة التي يتم عبرها فهم المقياس.

ونرجو في الختام أن يجد الطالب ما يحتاجه ويساعده من هذه المطبوعة في استيعاب دروسه.

المحتويات

تمهيد

الفصل الأول

المتتاليات والسلاسل

- المتتالية العددية
- متتاليات متقاربة
- متتاليات تدريجية
- سلاسل متقاربة
- اختبارات تقارب السلاسل
- سلاسل هندسية
- تمارين محلولة

ملخص الدرس

المتتاليات العددية

1. تعريف المتتالية العددية

نسمي متتالية منتهية بـ p حد، كل دالة عددية معرفة على الأعداد الطبيعية الأولى $n=1,2,...,p$، وإذا كانت هذه الدالة معرفة على كل الأعداد الطبيعية، نقول عن المتتالية المرفقة بأنها غير منتهية.

نستخدم الرمز $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ لتمثيل المتتالية (غير المنتهية) $u_1,u_2,\cdots,u_n,\cdots$ أو (u_n).

u_n: قيمة الحد من الرتبة n.

2. متتاليات رتيبة

- (u_n) متزايدة $\Leftrightarrow \quad \forall n\ ,\ u_{n+1}\geq u_n$
- (u_n) متزايدة تماما $\Leftrightarrow \quad \forall n\ ,\ u_{n+1}> u_n$
- (u_n) ثابتة $\Leftrightarrow \quad \forall n\ ,\ u_{n+1}= u_n$
- (u_n) رتيبة $\Leftrightarrow$ (u_n) متناقصة أو متزايدة.

1.2 متتاليات حسابية وهندسية

متتالية حسابية: (u_n) متتالية حسابية إذا تحقق $\forall n\in\mathbb{N},\quad u_{n+1}=u_n+r$.

الحد العام: $u_n=u_0+r\cdot n$

مجموع الحدود الأولى: $S_n=(n+1)\cdot\dfrac{u_0+u_n}{2}$

متتالية هندسية: (u_n) متتالية هندسية إذا تحقق $\forall n\in\mathbb{N},\quad u_{n+1}=q\cdot u_n$

الحد العام: $u_n=u_0\times q^n$

إذا كان $q=0$، فإن u_n يكون معدوما؛ ربما ليس كذلك من أجل $n=0$.

إذا كان $q=1$. تكون كل الحدود متساوية .

مجموع الحدود الأولى: $S_n=u_0\cdot\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

3. الحواد

لتكن A جزء من $\mathbb{R}$. نقول عن $M\in\mathbb{R}$ أنه حاد من الأعلى لـ A (A محدودة من الأعلى)، إذا تحقق

$$\forall x\in A\ ,\quad x\leq M$$

ونقول عن $m \in \mathbb{R}$ أنه حاد من الأدنى لـ A (A محدودة من الأدنى)، إذا تحقق

$$\forall x \in A , \quad x \geq m$$

وإذا كان M حاد من الأعلى لـ A بحيث $M \in A$ فإن M يُسمى العنصر الأعظمي لـ A.

ونرمز له بالرمز $\max(A)$

وإذا كان m حاد من الأدنى لـ A بحيث $m \in A$ فإن m يُسمى العنصر الأصغري لـ A.

ونرمز له بالرمز $\min(A)$

ملاحظة : العنصر الأعظمي (أو الأصغري) إن وُجد فهو وحيد.

مثلا المجموعة $A =]1, 2[\cup \{3\}$ محدودة.

1.3 الحد الأعلى والحد الأدنى

لتكن A جزء من $\mathbb{R}$.

نقول عن μ أنه حد أعلى لـ A، ونكتب $\mu = \sup(A)$، إذا تحقق

$$\forall x \in A , \quad x \leq \mu , \ \forall \varepsilon > 0 , \exists a \in A , \ \mu - \varepsilon < a$$

بمعنى أن μ هو حاد من الأعلى لـ A، ومن أجل كل عدد حقيقي أصغر تماما من μ مكتوب بالشكل $\mu - \varepsilon$، مع $\varepsilon > 0$ لن يكون حادا من الأعلى لـ A.

تعريف مشابه للحد الأدنى.

خواص

إذا وُجد $\max(A)$، فإن $\sup(A) = \max(A)$

إذا كان $\sup(A) \in A$، فإن $\max(A)$ موجود و $\sup(A) = \max(A)$

قضية : كل مجموعة محدودة وغير خالية من $\mathbb{R}$ تقبل حدا أعلى.

2.3 متتاليات محدودة

يكون العدد M **حاد من الأعلى** للمتتالية (u_n)، عندما يتحقق $u_n \leq M$ من أجل كل u، ويسمى **أصغر** الحواد العليا **بالحد الأعلى** للمتتالية. وعندئذ نقول عن المتتالية (u_n) بأنها محدودة من الأعلى.

وإذا وجدت أكبر قيمة لـ u_n تساوي a (الحد الأعلى)، فإن هذه القيمة هي ذروة المتتالية.

تعريف مشابه يخص المحدودية من الأدنى.

ملاحظة تكون المتتالية (u_n) **محدودة**، إذا كانت محدودة من الأعلى ومن الأدنى. أي إذا وجد عدد C حيث

$$\forall n , \quad |u_n| \leq C$$

مثلا في المتتالية $u_n = 2-n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$: حدها الأعلى 1، لكنها ليست محدودة من الأدنى.

4. نهاية متتالية

يكون العدد ℓ نهاية للمتتالية (u_n)، ونكتب $\lim u_n = \ell$ أو $\ell \leftarrow u_n$؛ عندما يكون، من أجل كل عدد $\varepsilon > 0$، يوجد n، بحيث يكون لدينا ابتداء من هذه المرتبة: $\ell - \varepsilon < u_n < \ell + \varepsilon$.

أو بعبارة أخرى إذا كان من أجل كل عدد $\varepsilon > 0$، تكون كل حدود المتتالية (u_n) باستثناء عدد منته منها تحقق المتراجحتين $\ell - \varepsilon < u_n < \ell + \varepsilon$، أو تحقق $|u_n - \ell| < \varepsilon$.

- عندما تقبل متتالية نهاية نقول عنها بأنها **متقاربة،** وتكون **متباعدة** بخلاف ذلك.

مثلا في المتتالية $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \to 0$، إذا رمزنا بـ n للمرتبة الأولى الأكبر من $\frac{1}{\varepsilon^2}$، فإنه يكون لدينا ابتداء من هذه المرتبة $\frac{1}{n} < \varepsilon^2$ وبالتالي $-\varepsilon < u_n < +\varepsilon$ والمتتالية متقاربة نحو الصفر.

1.4 متتاليات متقاربة

- كل متتالية تقبل نهاية واحدة على الأكثر.
- كل متتالية متزايدة ومحدودة من الأعلى تكون متقاربة.
- إذا كانت (u_n) و (v_n) متقاربتين، وكان $v_n < u_n$ من أجل كل n، فإن $\lim v_n < \lim u_n$.
- إذا كانت (u_n) و (v_n) متقاربتين، فإن $\lim(u_n - v_n) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim u_n = \lim v_n$
- كل متتالية متقاربة تكون محدودة.
- كل متتالية متزايدة وغير محدودة من الأعلى تكون متباعدة نحو $+\infty$.
- إذا كانت متتالية (u_n) محدودة و (v_n) متقاربة نحو 0، فإن المتتالية $(u_n \cdot v_n)$ تكون متقاربة نحو 0
- إذا حققت متتالية (u_n) الشرط الآتي : $\forall h > 0,\ \exists k \in \mathbb{N},\ p > k \ \wedge\ q > k \quad \Rightarrow \quad |u_p - u_q| < h$ تكون متقاربة.
- إذا لم تنعدم متتاليتان (u_n) و (v_n)، فإنهما تكونان متكافئتين إذا تحقق $\lim \frac{v_n}{u_n} = 1$ ، وعندئذ يكون لهما نفس النهاية.

2.4 عمليات على المتتاليات المتقاربة

إذا تقاربت متتاليتان (u_n) و (u'_n) نحو ℓ و ℓ' على الترتيب، فإنه يكون لدينا:

$$\ell \pm \ell' \leftarrow u_n \pm v_n \quad , \quad \ell \,.\, \ell' \leftarrow u_n \cdot v_n \quad , \quad \frac{\ell}{\ell'} \leftarrow \frac{u_n}{v_n} \quad (\ell' \neq 0)$$

ملاحظة تؤول المتتالية (u_n) نحو النهاية $+\infty$ إذا تحقق: $\forall h>0,\ \exists k\in\mathbb{N},\ n>k \Rightarrow u_n>h$

5. متتاليات مستخرجة

نعتبر المتتالية $u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots$. لنستخرج الحد u_{n_1} ذي الرتبة n_1، ثم الحد الثاني u_{n_2} الذي مرتبته $n_1<n_2$، وهكذا مع بقية الحدود؛ وبذلك نحصل على المتتالية المستخرجة (غير المنتهية):

$$v_1=u_{n_1},\ v_2=u_{n_2},\dots,\ v_n=u_n,\dots$$

مثلا: المتتالية $1,3,5,\dots$ مستخرجة من المتتالية $1,2,3,\dots$

- في كل متتالية محدودة، يمكن استخراج متتالية جزئية متقاربة.
- في كل متتالية عددية، توجد متتالية مستخرجة تكون إما متزايدة، وإما متناقصة، وإما ثابتة.
- إذا آلت متتالية إلى نهاية معلومة، فإن أية متتالية مستخرجة منها ستؤول إلى نفس النهاية.

مثلا: تؤول المتتاليات $\left(\frac{1}{n}\right)$ و $\left(\frac{1}{2n}\right)$ و $\left(\frac{1}{3n}\right)$ إلى نفس النهاية، وهي الصفر.

6. متتاليات متجاورة

تكون المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتين إذا تحقق ما يلي:

- (u_n) متزايدة و (v_n) متناقصة؛ أو بالعكس،
- $\forall n \quad u_n\le v_n \Rightarrow u_n\le u_{n+1}\le v_{n+1}\le v_n$،
- $\lim(u_n-v_n)=0$.

وعندئذ تتقارب المتتاليتين (u_n) و (v_n) نحو نفس النهاية.

7. متتاليات تدريجية

f دالة عددية، نستطيع تعريف المتتالية (u_n) بإعطاء حدها الأول u_0 وعلاقة التدريج $u_n=f(u_{n-1})$

- إذا كانت (u_n) متقاربة وتقبل النهاية ℓ، فإن المتتالية $f(u_n)$ تكون متقاربة وتقبل النهاية $f(\ell)$، حيث f دالة عددية مستمرة. وتكون نهايتها ℓ هي حل للمعادلة $f(x)=x$.

  وهذا ما يدفع بيانيا للاستعانة بمنحنيي $y=f(x)$ و $y=x$.
- لتكن f دالة تقبل الاشتقاق، إذا كان $|f'(x)|\le\omega<1$ على مجال I مركزه ℓ: حل للمعادلة $f(\ell)=\ell$، فإنه توجد متتالية تدريجية $u_n=f(u_{n-1})$ تتقارب نحو ℓ.

لدراسة هذا النمط من المتتاليات، ندرس تغيرات f، ونحدد المجال I الذي يحوي جميع حدود المتتالية (u_n).

- إذا كانت الدالة f متزايدة على مجال I، فإن المتتالية (u_n) تكون رتيبة. مقارنة بين قيمتي الحدين الأولين منها تدلنا على تناقص أو تزايد المتتالية (u_n).

بالفعل، إذا ما اعتبرنا $I=[a;b]$، وكانت $u_0 \leq u_1$، فإن $f(u_0) \leq f(u_1)$. بالتراجع يمكن إثبات أن (u_n) المحدودة من الأعلى بـ b، تكون متزايدة. فهي إذن متقاربة.

وكذلك إذا كانت $u_0 \geq u_1$، فإن $f(u_0) \geq f(u_1)$. ونثبت أيضا بالتراجع إثبات أن (u_n) المحدودة من الأدنى بـ a، تكون متناقصة. إذن فهي متقاربة.

إذا كانت ℓ هي نهاية (u_n)، ولكون f مستمرة على I ، فإن $(f(u_n))$ ستتقارب نحو $f(\ell)$.

إذن لدينا $u_n \longrightarrow \ell$، ومن العلاقة $u_n = f(u_{n-1})$ والمرور على النهاية، نحصل على المساواة $\ell = f(\ell)$.

- أما إذا كانت الدالة f متناقصة على I، فإن المتتاليتين المستخرجتين (u_{2n}) و (u_{2n+1}) تكونان رتيبتين، وبجهتين متعاكستين.

بالفعل، إذا كانت f متناقصة، فإن $f \circ f$ تكون متزايدة. ومنه يكون لدينا:

$$\forall x, y \in I : x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y) \Rightarrow f \circ f(x) \leq f \circ f(y)$$

بتطبيق النظرية السابقة على الدالة $f \circ f$، تكون المتتالية $(u_0; u_2 = f \circ f(u_0); u_4 = f \circ f(u_2); \dots)$ رتيبة ومتقاربة، وكذلك المتتالية $(u_1; u_3 = f \circ f(u_1); u_5 = f \circ f(u_3); \dots)$، تكون رتيبة ومتقاربة.

السلاسل العددية

8. مفهوم السلسلة العددية

لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متتالية. نرفق بـ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$، المتتالية ذات الحد العام:

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = \sum_{r=0}^{n} u_r$$

نرمز لهذه السلسلة بالرمز $\sum u_r$

S_n: المجموع الجزئي من الرتبة n للسلسلة ذات الحد العام u_n.

كما تسمى الكمية $u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots$ بباقي السلسلة من الرتبة n.

- مجموعة السلاسل بعملية الجمع والضرب بعدد حقيقي تؤلف فضاء شعاعيا.

9. تقارب سلسلة

حتى نقول أن السلسلة $\sum u_r$ (ذات الحد العام u_n)، يجب أن تتقارب مجاميعها الجزئية (S_n).

$$(S_n) \to \ell \quad \Rightarrow \quad \sum u_r \to \ell$$
$$\lim S_n = \ell \quad \Rightarrow \quad \sum_{r=0}^{+\infty} u_r = \ell$$

وعندئذ نقول أن السلسلة بأنها متقاربة. وتكون السلسلة **متباعدة** بخلاف ذلك.

ملاحظة هامة $\sum u_r \to \ell \quad \Rightarrow \quad (u_n) \to 0$

وعلى العموم، العكس غير صحيح. مثل ما نراه في السلسة ذات الحد: $u_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$.

1.9 سلاسل متقاربة

لتكن السلسلتين $\sum u_n$ و $\sum v_n$ ذواتا الحدود الموجبة . وليكن a و b من $\mathbb{R}$

- إذا تقاربت $\sum u_n$ نحو U، وإذا كان من أجل كل n : $v_n \le u_n$، فإن $\sum v_n$ نحو V ، بحيث $V \le U$
- إذا آلت $\sum u_n$ نحو $+\infty$، وإذا كان $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \ge u_n$ ، فإن $\sum v_n$ تؤول نحو $+\infty$.
- إذا كان $\forall n \in \mathbb{N},\ a\,u_n \le v_n \le b\,u_n$ ، فإن السلسلتين $\sum u_n$ و $\sum v_n$ من نفس الطبيعة .

فإذا تقاربتا نحو مجموعهما U و V ، فإنهما تحققان $aU \le V \le bU$.

مثال

في السلسلة ذات الحدود الموجبة $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

يكون لدينا من أجل كل $1 \le n$: $\sqrt{n} \le n$. ومنه $\dfrac{1}{\sqrt{n}} \ge \dfrac{1}{n}$، أي $u_n \ge \dfrac{1}{n} \quad \forall n \ge 1$

لكن نعلم بأن السلسلة ذات الحد العام $\dfrac{1}{n}$ متباعدة. ومنه نستنتج أن $\sum u_n$ تكون أيضا متباعدة .

10. اختبارات تقارب السلاسل

1.10 اختبار Riemann

تكون السلسلة ذات الحد العام $\dfrac{1}{n^\alpha}$ متقاربة إذا كان $1 < \alpha$ ، وتكون مباعدة بخلاف ذلك.

مثلا في السلسلة ذات الحد العام $u_n = \dfrac{n^2+4}{\sqrt[3]{n}}$، لدينا بجوار $(+\infty)$ ، u_n تكافئ $\dfrac{1}{n^{-5/3}} = n^{5/3} = n^{2-1/3}$،

فهي حسب هذا الاختبار متباعدة.

2.10 اختبار D'Alembert:

بفرض أن السلسلة $\sum u_n$ ذات حدود موجبة وأن $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \to \ell \in [\,0, +\infty\,]$، عندما $n \to +\infty$ ، يكون لدينا:

إذا كان $\ell < 1$ فإن السلسلة ذات الحد العام u_n تكون متقاربة.

إذا كان $1<\ell$ فإن السلسلة ذات الحد العام u_n تكون متباعدة.

إذا كان $\ell=1$ لا يمكن استنتاج شيء بشأن تقارب أو تباعد $\sum u_n$.

مثل1 في السلسلة $\sum \frac{\ln n}{n^2+3}$ ، لدينا $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\dfrac{\ln(n+1)}{(n+1)^2+3}}{\dfrac{\ln n}{n^2+3}} = 2$ والسلسلة متباعدة

مثل2 وفي السلسلة $\sum \frac{3n+2^n}{4^n}$ ، لدينا $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\dfrac{3(n+1)+2^{n+1}}{4^{n+1}}}{\dfrac{3n+2^n}{4^n}} = \frac{1}{2}$ ومنه السلسلة متقاربة.

مثل3 السلسلة $u_n = \ln\left(1+\frac{2}{n(n+3)}\right)$ بجوار $(+\infty)$ تكافئ $\frac{2}{n^2}$ ، فهي إذن متقاربة.

نلاحظ
$$u_n = \ln\left(1+\frac{2}{n(n+3)}\right) = \ln\frac{(n+1)(n+2)}{n(n+3)}$$
$$= \ln(n+1)+\ln(n+2)-\ln n-\ln(n+3)$$

ومنه المجموع الجزئي $S_n = \ln 3 + \ln\frac{n+1}{n+3}$ ينتهي إلى $S=\ln 3$

3.10 اختبار Cauchy

بفرض أن السلسلة $\sum u_n$ ذات حدود موجبة وأن $\sqrt[n]{u_n} \to \ell \in [0,+\infty[$ عندما $n\to+\infty$ ، يكون لدينا:

إذا كان $\ell<1$ فإن السلسلة ذات الحد العام u_n تكون متقاربة.

إذا كان $1<\ell$ فإن السلسلة ذات الحد العام u_n تكون متباعدة.

إذا كان $\ell=1$ لا يمكن استنتاج شيء بشأن تقارب أو تباعد $\sum u_n$.

مثلا في السلسلة $\sum\left(\frac{1}{\ln n}\right)^n$ ، نحصل على النهاية $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{1}{\ln n}\right)^n} = 0$ والسلسلة متقاربة.

وفي السلسلة $u_n = n^n e^n$ ، نجد $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n^n e^{-n}} = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{e} = +\infty$ والسلسلة متباعدة

ملاحظة

إذا أجاب اختبار D'Alembert عن تقارب سلسلة ، فإن اختبار Cauchy سيجيب أيضا عن التقارب .

4.10 اختبار Raabe-Duhamel:

بفرض أن السلسلة $\sum u_n$ ذات حدود موجبة وأن $n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)\to\ell$ ، عندما $n\to+\infty$ ، يكون:

إذا كان $1<\ell$ فإن السلسلة ذات الحد العام u_n تكون متقاربة.

إذا كان $\ell > 1$ فإن السلسلة ذات الحد العام u_n تكون متباعدة.

مثلا في السلسلة $\sum\left(\frac{1}{n^2+2n+2}\right)$، نحصل على النهاية $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(\frac{\frac{1}{n^2+2n+2}}{\frac{1}{(n+1)^2+2(n+1)+2}}-1\right)=-2$

والسلسلة متباعدة.

5.10 اختبار Cauchy

وهو شرط كافي وضروري لتقارب سلسلة

تكون السلسلة $\sum u_r$ متقاربة $\Leftrightarrow$ $\sum\limits_{r=p+1}^{q} u_r \xrightarrow[q\to+\infty]{p\to+\infty} 0 \quad (p<q)$

مثال1 السلسلة ذات الحد العام $\frac{1}{n}$ $(n\in\mathbb{N}^*)$ ليست متقاربة، لأنها ليست لكوشي.

ولدينا $\sum\limits_{i=n+1}^{2n}\frac{1}{i}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}\geq\frac{1}{2n}+\ldots+\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}$

مثال2 وفي السلسلة ذات الحدود الموجبة $u_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$

يكون لدينا من أجل كل $1\leq n$: $\sqrt{n}\leq n$، ومنه $\frac{1}{\sqrt{n}}\geq\frac{1}{n}$، أي $\forall n\geq 1 \quad u_n\geq\frac{1}{n}$

لكن نعلم بأن السلسلة ذات الحد العام $\frac{1}{n}$ تكون متباعدة. ومنه نستنتج أن $\sum u_n$ تكون أيضا متباعدة.

مثال3 في السلسلة $u_n=\frac{1}{\sqrt[n]{n+5}}$ لدينا $\ln(u_n)=-\frac{1}{n}\ln(n+5)\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$، ومنه

$u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \quad (\neq 0)$ وبالتالي تكون السلسلة $\sum u_n$ متباعدة.

11. التقارب المطلق

تكون السلسلة $\sum u_r$ متقاربة مطلقا، إذا كانت السلسلة $\sum|u_r|$ متقاربة.

مثلا: السلسلة ذات الحد العام $u_n=x^n$ تكون متقاربة، إذا كان $|x|<1$، ولدينا $\sum\limits_{r=0}^{+\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$.

- كل سلسة متقاربة مطلقا، تكون متقاربة.
- حتى تتقارب سلسة ذات حدود موجبة، يكفي أن تكون محدودة من الأعلى.
- لتكن $\sum u_r$ و $\sum v_r$ سلسلتان ذواتا حدود موجبة. لدينا :

– كل سلسلة مستخرجة من سلسة متقاربة $\sum u_r$ ؛ تكون متقاربة.

– إذا تقاربت $\sum u_r$ نحو ℓ، وإذا كان $v_n \le u_n$ من أجل كل n؛ فإن السلسلة $\sum v_r$ ستتقارب نحو ℓ' حيث $\ell' \le \ell$.

مثلا السلسلة $\frac{1}{n!}$ متقاربة، ولها المجموع e.

12. سلاسل هندسية

السلسلة الهندسية هي السلسلة $\sum u_r$ ذات الحد العام $u_n = aq^n$ حيث $a \neq 0$

ملاحظة

إذا كان $a = 0$، تكون السلسلة $\sum u_r$ متباعدة،

وإذا كان $q = 1$، فإن $S_n = (n+1)a$،

وإذا كان $|q| > 1$، فإن السلسلة $\sum u_r$ تكون متباعدة،

وإذا كان $|q| < 1$، فإن $\sum_{r=0}^{+\infty} a\, q^r = \frac{a}{1-q}$، والسلسلة $\sum u_r$ متباعدة.

13. السلسلة الصحيحة ونصف تقاربها

تعريف: x عدد حقيقي مُعطى. تُسمى سلسلة صحيحة بمعاملات حقيقية العبارة الجبرية الآتية:

$$S(x) = a_0 + a_1 x + a_1 x^2 + \cdots a_n x^n + \cdots = \sum_{r=0}^{+\infty} a_r\, x^r$$

وتكون السلسلة الصحيحة $\sum_{r=0}^{+\infty} a_r\, x^r$، متقاربة إذا وُجدت قيمة x_0 من $\mathbb{R}$ بحيث تكون السلسلة الصحيحة $\sum_{r=0}^{+\infty} a_r\, x_0^r$ متقاربة. وعندئذ تكون السلسلة $\sum_{r=0}^{+\infty} a_r\, x^r$ من أجل كل x بحيث $|x| < |x_0|$

نسمي **نصف قطر تقارب** سلسلة صحيحة $\sum_{r=0}^{+\infty} a_r\, x^r$ العدد الحقيقي الموجب R بحيث تكون السلسلة $\sum_{r=0}^{+\infty} a_r\, x^r$: متقاربة مطلقا من أجل كل x بحيث $|x| < R$، ومتباعدة من أجل كل x بحيث $|x| > R$

ملاحظة 1 يمكن اشتقاق ومكاملة حدود السلسلة الصحية داخل مجال تقاربها.

ملاحظة 2 في حالة وجود النهاية $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ يكون نصف قطر التقارب للسلسلة الصحيحة هو R حيث:

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \frac{1}{R}$$

تمارين محلولة

تمرين 1–1

بين أن كل متتالية متزايدة ومحدودة من الأعلى تكون متقاربة، وتتقارب نحو حدها الأعلى.

الحل

لتكن (x_n) متتالية متزايدة ومحدودة من الأعلى. المجموعة $E=\{(x_n), n\in\mathbb{N}\}$ هي مجموعة جزئية غير خالية من $\mathbb{R}$، فهي تقبل حدا أعلى ℓ.

من أجل كل ε موجب تماما، $\ell-\varepsilon$ لن يكون حادا لـ E، يوجد عدد صحيح n_0 بحيث $\ell-\varepsilon \le x_{n_0} \le \ell$

وبما أن المتتالية متزايدة $\ell-\varepsilon \le x_{n_0} \le x_n \le \ell$ $\forall n \ge n_0$ ومنه $\left|x_n-\ell\right| \le \varepsilon$

والمتتالية (x_n) تتقارب نحو ℓ.

تمرين 1–2

بين بأنه إذا كانت الدالة f موجبة ومتناقصة، ومحدودة من الأعلى على المجال $[a,+\infty[$، فإنها تقبل نهاية عندما ينتهي x إلى $+\infty$.

الحل

على المجال $[a,+\infty[$، الدالة f متناقصة وموجبة $(f(x)\ge 0, \forall x>a)$. إذن $f([a,+\infty[)$ هي مجموعة محدودة من الادنى. نرمز بـ m للحد الادنى لهذه المجموعة.

من أجل كل $\varepsilon>0$ يوجد $x(\varepsilon)$ من $[a,+\infty[$ بحيث يكون $m \le (f(x(\varepsilon)) < m+\varepsilon$

إذن $\forall x \ge x(\varepsilon)\; m \le f(x) \le f(x(\varepsilon)) < m+\varepsilon$

وكذلك مهما كان $\varepsilon>0$ يوجد $x(\varepsilon)$ من $[a,+\infty[$ بحيث $x(\varepsilon)\le x$ تستلزم $m \le f(x) \le m+\varepsilon$.

وكنتيجة $\lim_{x\to+\infty} f(x)=m$.

تمرين 1–3

بين أن كل متتالية من الأعداد الصحيحة متقاربة تكون مستقرة.

الحل

لتكن (a_n) متتالية عناصر من $\mathbb{Z}$ متقاربة نحو ℓ. نختار $\varepsilon=\frac{1}{3}$، يوجد عدد صحيح n_0 بحيث

$|a_n - \ell| \le \frac{1}{3} \quad \forall n \ge n_0$. وبما أن المجال $\left[\ell - \frac{1}{3}, \ell + \frac{1}{3}\right]$ لا يمكنه أن يشمل إلا عددا صحيحا، فيكون لدينا بالضرورة $a_n = a_{n_0} \quad \forall n \ge n_0$ والمتتالية (a_n) مستقرة . إذن نهاية المتتالية (a_n) هي a_{n_0} يعني عدد صحيح: إذا تقاربت متتالية أعداد صحيحة، فإنها تتقارب نحو عدد صحيح.

تمرين 1-4

لتكن (x_n) متتالية معرفة بالشكل: $x_n = \frac{n-1}{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

أثبت، باستخدام التعريف التقارب، مع $\ell = 1$.

الحل

لدينا $\left|x_n - 1\right| = \left|\frac{n-1}{n+1} - 1\right| = \frac{2}{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$. وليكن ε، من $\mathbb{R}_+^*$. يكفي أن يكون $n+1 \ge \frac{2}{\varepsilon}$ حتى يكون $|x_n - 1| \le \varepsilon$ يمكن أن نأخذ n_0 هو الجزء الصحيح لـ $\frac{2}{\varepsilon}$.

تمرين 1-5

بين بأنه إذا تقاربت المتتاليان (x_{2n}) و (x_{2n+1}) نحو نفس النهاية ℓ، فإن المتتالية (x_n) تكون متقاربة أيضا نحو ℓ.

الحل

لتكن $\varepsilon > 0$. يوجد n_1 من $\mathbb{N}$ بحيث يكون $\left|x_{2n} - \ell\right| \le \varepsilon \quad \forall n \ge n_1$

و n_2 من $\mathbb{N}$ بحيث يكون $\left|x_{2n+1} - \ell\right| \le \varepsilon \quad \forall n \ge n_2$

من أجل كل عدد p، عدد صحيح زوجي اكبر من او يساوي $2n_1$، أو عدد صحيح فردي اكبر من أو يساوي $2n_2 + 1$. يكون $\left|x_p - \ell\right| \le \varepsilon$.

إذن $\left|x_p - \ell\right| \le \varepsilon \quad \forall p \ge \max(2n_1, 2n_2 + 1)$

ومنه المتتالية (x_p) متقاربة أيضا نحو ℓ.

تمرين 1-6

نعرف المتتالية التدريجية (u_n)، بالشكل: $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = 5u_n - 8 \quad , n \ge 0 \end{cases}$

1. **عين العدد الحقيقي α بحيث تكون المتتالية ذات الحد العام $v_n = u_n - \alpha$ ، واستنتج v_n ثم u_n بدلالة n**

2. **أعد نفس الطريقة من أجل المتتالية** $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_n = 3u_{n-1} + 1 \quad , n \geq 0 \end{cases}$

الحل

1. لدينا $\forall n \in \mathbb{N};\ \ v_{n+1} = u_{n+1} - \alpha = 5u_n - 8 - \alpha = 5(v_n + \alpha) - 8 - \alpha = 5v_n + 4(\alpha - 2)$

إذن من أجل $\alpha = 2$، تكون المتتالية (v_n) هندسية واساسها 5

$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = 5^n v_0$ وبما أن $v_0 = u_0 - \alpha = -3$. إذن $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = -3 \cdot 5^n$

$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = v_n + 2$ ومنه $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 2 - 3 \cdot 5^n$

2. α هو حل المعادلة المرفقة بالمتتالية. ولدينا $\alpha = 3\alpha + 1$ ومنه $\alpha = \frac{1}{2}$.

إذن $\begin{cases} u_n = 3u_{n-1} + 1 \\ \alpha = 3\alpha + 1 \end{cases}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$ وبطرح طرف من طرف بجد

$u_n - \alpha = 3(u_{n-1} - \alpha)$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$ والمتتالية ذات الحد العام $u_n - \alpha$ هي متتالية هندسية بأساس

3. ومنه $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n - \alpha = 3^n (u_0 - \alpha)$

أي $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = -\frac{1}{2} \cdot 3^n \cdot \frac{5}{2}$ وأخيرا $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{1}{2}(5 \cdot 3^n - 1)$

تمرين 1–7

أحسب نهاية المتتالية $x_n = n \ln \sqrt{\frac{n+1}{n-1}}$

الحل

لدينا $\forall n > 1 \quad x_n = \frac{n}{2} \ln \frac{n+1}{n-1} = \frac{n}{2} \ln\left(1 + \frac{2}{n-1}\right)$. وبما أن $\frac{2}{n-1}$ تنتهي إلى 0. فإن

$\ln\left(1 + \frac{2}{n-1}\right) \sim \frac{2}{n-1}$ ومنه $x_n \sim \frac{n}{n-1} \sim 1$ وأخيرا $\lim_{n \to +\infty} x_n = 1$

تمرين 1–8

جد حصرا للمتتالية (S_n) المعرفة كما يلي: $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + k}$

واستنتج تقاربها ثم احسب نهايتها.

الحل

لدينا $\forall n \geq 3 \quad S_n = \frac{n}{n^2 + 1} + \frac{n}{n^2 + 2} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n}$

المتتالية (S_n) بمجموع n حد. أكبر هذه الحدود هو $\frac{n}{n^2+1}$ وأصغرها هو $\frac{n}{n^2+n}$

إذن $\quad n\frac{n}{n^2+n} \le S_n \le n\frac{n}{n^2+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

وبما أن $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^2}{n^2+n}=\frac{n^2}{n^2+1}=1$ فإن المتتالية (S_n) المحصورة بين متتاليتين متقاربتين نحو الواحد.

ومنه المتتالية (S_n) تتقارب نحو 1.

تمرين 1–9

أدرس المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي: $\quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \prod_{k=1}^{2n-1}\left(2-\frac{k}{2n}\right)$

الحل

نلاحظ بأن الجداءات ذات الأدلة k من $\{1, 2,\cdots,n\}$ تكون أكبر من أو تساوي $\frac{3}{2}$ وتكون الأخرى أكبر من أو تساوي 1.

إذن: $u_n \ge \left(\frac{3}{2}\right)^n$. وبما أن $\left(\frac{3}{2}\right)^n$ تنتهي إلى $+\infty$ فإن المتتالية (u_n) تنتهي أيضا إلى $+\infty$.

تمرين 1–10

عين اتجاه التغيرات، والحد الأعلى المحتمل والحد الأدنى المحتمل وتصرف المتتالية (u_n) في الما لانهاية. في كل حالة من الحالات الآتية:

$$1)\ u_n=\frac{3-n^2}{n+1},\quad 2)\ u_n=n-\sqrt{n}\ ,\quad 3)\ u_n=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right),\quad 4)\ u_n=\frac{e^n}{1+n^2}$$

الحل

- لدينا $\quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1}-u_n=\frac{3-(n+1)^2}{(n+1)+1}-\frac{3-n^2}{n+1}=\frac{2-2n-n^2}{n+2}-\frac{3-n^2}{n+1}=-\frac{n^2+3n+4}{(n+1)(n+2)}$

وبما أن $\forall n \in \mathbb{N} \quad n \ge 0$ فإن $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1}-u_n \le 0$ والمتتالية متناقصة. فهي محدودة من الأعلى بالحد $u_0 = 3$. و $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n = \lim\limits_{x\to+\infty} u_n\ \frac{-n^2}{n}=-\infty$

والمتتالية متناقصة ومتباعدة نحو $-\infty$، ومحدودة من الاعلى بـــ3 وغير محدودة من الادنى

- لدينا $\quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1}-u_n=\left[(n+1)-\sqrt{n+1}\right]-(n-\sqrt{n}\ )=1+\sqrt{n}-\sqrt{n+1}$

نضرب ونقسم في $1+\sqrt{n}+\sqrt{n+1}$:

$$u_{n+1}-u_n=\frac{(1+\sqrt{n}-\sqrt{n+1})(1+\sqrt{n}+\sqrt{n+1})}{1+\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=\frac{2\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$$

وكل الحدود موجبة ومنه $u_{n+1}-u_n\geq 0 \quad \forall n\in\mathbb{N}$ والمتتالية متزايدة فهي محدودة من الادنى بـ $u_0=0$

ولدينا $u_n=\sqrt{n}(\sqrt{n}-1) \quad \forall n\in\mathbb{N}$ ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty}u_n=+\infty$

والمتتالية متزايدة ومتباعدة نحو $+\infty$، ومحدودة من الأدنى بـــ0 وغير محدودة من الأعلى.

- المتتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$ $\quad 0<n<n+1 \quad \forall n\in\mathbb{N}^*$ ومنه $\frac{1}{n+1}\leq\frac{1}{n}$ ومنه $1+\frac{1}{n+1}\leq 1+\frac{1}{n}$

ومنه $\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\leq\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ إذن $u_{n+1}\leq u_n \quad \forall n\in\mathbb{N}^*$ والمتتالية متناقصة، فهي محدودة من الأعلى

بـ$u_1=\ln 2$، ولدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}u_n=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=0$

والمتتالية متناقصة ومتقاربة نحو 0، ومحدودة من الأدنى بـــ0 وغير محدودة من الأعلى.

- لدينا $\quad \forall n\in\mathbb{N} \quad u_{n+1}-u_n=\frac{e^{n+1}}{1+(n+1)^2}-\frac{e^n}{1+n^2}=\frac{e^n\left[(e+1)n^2-2n+(e+1)\right]}{\left[1+(n+1)^2\right](1+n^2)}$

المقام موجب وكذلك e^n. ندرس إشارة العبارة $\quad P(n)=(e+1)x^2-2x+(e+1)$. نلاحظ بأن محدد

هذه العبارة هو $\Delta=-4e^2+12e-4$ وهو سالب، ومنه إشارة $P(n)$ من إشارة $(e+1)$ فهي إذن موجبة.

ومنه $u_{n+1}-u_n\geq 0 \quad \forall n\in\mathbb{N}$ والمتتالية متزايدة، فهي محدودة من الأدنى بـ $u_0=\frac{1}{2}$، ولدينا

$u_n=\frac{e^n}{n^2}\cdot\frac{n^2}{1+n^2} \quad \forall n\in\mathbb{N}^*$، $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{e^n}{n^2}=+\infty$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^2}{1+n^2}=1$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$

والمتتالية متزايدة ومتباعدة نحو $+\infty$، ومحدودة من الأدنى بـــ$\frac{1}{2}$ وغير محدودة من الأعلى.

تمرين 1-11

(u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان على $\mathbb{N}$ بحديهما الأولين u_0 و v_0 مع $0<v_0<u_0$

ومن أجل كل $n\geq 1$:
$$\begin{cases} u_n=\frac{1}{2}\left(u_{n-1}+v_{n-1}\right) \\ v_n=\sqrt{u_{n-1}v_{n-1}} \end{cases}$$

بين أن (u_n) و (v_n) متقاربتان، ولهما نفس النهاية.

الحل

المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتين.

- لدينا $\quad u_1-v_1=\frac{1}{2}\left(u_0+v_0\right)-\sqrt{u_0v_0}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{u_0}+\sqrt{v_0}\right)^2>0$

بفرض $u_{n-1}-v_{n-1}>0$، إذن $u_n-v_n=\frac{1}{2}\left(\sqrt{u_{n-1}}+\sqrt{v_{n-1}}\right)^2>0$، وكذلك من أجل كل $n\geq 0$،

$u_n>v_n$

- نثبت أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) رتيبتان ومن جهتين متعاكستين من أجل كل $n\geq 0$، لدينا:

$$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{2}\left(u_n+v_n\right)-u_n=-\frac{1}{2}\left(u_n-v_n\right)<0$$
$$v_{n+1}-v_n=\sqrt{u_n v_n}-v_n=\sqrt{u_n}\left(\sqrt{u_n}-\sqrt{v_n}\right)>0$$

إذن المتتالية (u_n) متناقصة تماما، والمتتالية (v_n) متزايدة تماما.

- ليكن k عدد صحيح موجب كيفي، لدينا:

$$0<u_k-v_k=\frac{1}{2}\left(\sqrt{u_{k-1}}-\sqrt{v_{k-1}}\right)^2=\frac{1}{2}\left(\sqrt{u_{k-1}}-\sqrt{v_{k-1}}\right)\left(\sqrt{u_{k-1}}-\sqrt{v_{k-1}}\right)$$

نحد من الأعلى الكمية $\left(\sqrt{u_{k-1}}-\sqrt{v_{k-1}}\right)$ بالحد $\left(\sqrt{u_{k-1}}+\sqrt{v_{k-1}}\right)$، فنحصل على:

$$0<u_k-v_k=\frac{1}{2}\left(u_{k-1}-v_{k-1}\right)$$

نعطي لـ k، على الترتيب القيم 1، ...، k فنحصل على المتراجحات:

$$\begin{cases} 0<u_1-v_1=\frac{1}{2}\left(u_0-v_0\right) \\ 0<u_2-v_2=\frac{1}{2}\left(u_1-v_1\right) \\ \quad\quad \cdots\cdots\cdots \\ 0<u_n-v_n=\frac{1}{2}\left(u_{n-1}-v_{n-1}\right) \end{cases}$$

ثم نجري جداء طرف إلى طرف لهذه المتراجحات، فنحصل على $0<u_n-v_n=\frac{1}{2^n}\left(u_0-v_0\right)$

وعندما ينتهي $n\to+\infty$، فإن $\frac{1}{2^n}$ تنتهي إلى الصفر. ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-v_n)=0$.

والمتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتين، وتتقاربان نحو نفس النهاية.

تمرين 1–12

أحسب النهايتين : $1)\ \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2^n+n!}{n^2+\cos n}\ ,\quad 2)\ \lim\limits_{n\to+\infty}e^{n^2+n\sin n}$

الحل

1) لدينا $2^n=o(n!)$، ومنه $2^n+n!\sim n!$. وبالمثل $|\cos n|\leq 1$ و $\lim(n^2)=+\infty$.

إذن $\cos n=o(n^2)$ و $n^2+\cos n\sim n^2$. ومنه $\frac{2^n+n!}{n^2+\cos n}\sim\frac{n!}{n^2}$ وبما أن $n^2=o(n!)$

فإن $\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{n!}=0$ و $\lim_{n\to+\infty}\frac{n!}{n^2}=+\infty$ وأخيرا $\lim_{n\to+\infty}\frac{2^n+n!}{n^2+\cos n}=+\infty$

2) لدينا $n^2+n\sin n\geq n^2-n$ ، إذن بما أن الدالة الاسية متزايدة فإن $e^{n^2+n\sin n}\geq e^{n^2-n}$

ولدينا ايضا $n^2-n=n(n-1)$ إذن $\lim_{n\to+\infty}(n^2-n)=+\infty$ و $\lim_{n\to+\infty}e^{n^2-n}=+\infty$

وأخيرا نستنتج $\lim_{n\to+\infty}e^{n^2+n\sin n}=+\infty$

تمرين 1–13

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ **حيث:**
$$\begin{cases} u_1=1 \\ u_{n+1}=\dfrac{2u_n}{u_n-1}, \quad n\geq 2\end{cases}$$

أ) **نضع** $v_n=\frac{u_n-3}{u_n}$.

بين أن (v_n) **متتالية هندسية؛ جد أساسها واكتب حدها العام.**

أكتب u_n **بدلالة** n، **ثم احسب** $\lim_{x\to+\infty}u_n$

ب) **ادرس** u_n **في الحالتين** $u_1=0$ ،$u_1=-1$.

الحل

- v_{n+1} بدلالة v_n:

$$v_{n+1}=\frac{u_{n+1}-3}{u_{n+1}}=1-\frac{3}{u_{n+1}}=1-\frac{3}{\frac{2u_n}{u_n-1}}=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2u_n}=-\frac{1}{2}\left(1-\frac{3}{u_n}\right)=-\frac{1}{2}v_n$$

والمتتالية (v_n) هندسية؛ أساسها $-\frac{1}{2}$ وحدها الأول $v_1=\frac{u_1-3}{u_1}=-2$.

عبارة v_n بدلالة n:

$$v_n=(-2)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

ومنه عبارة u_n:

$$v_n=\frac{u_n-3}{u_n}\iff u_n=\frac{3}{1-v_n}$$

$$u_n=\frac{3}{1-v_n}=\frac{3}{1-4(-1/2)^n}$$

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{3}{1-4(-1/2)^n}=3$$

- الحالة $u_1 = 0$:

المتتالية (v_n) ليس لها معنى. لكن (u_n) ثابتة، ومساوية للصفر $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 0$.

- الحالة $u_1 = -1$:

المتتالية (v_n) هندسية، حدها الأول 4 وأساسها $-\frac{1}{2}$؛ وحدها العام:

مهما يكون n: $v_n = 4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = -8\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ ، ومنه $u_n = \dfrac{3}{1-8(-1/2)^n}$

وفي هذه الحالة تكون أيضا (u_n) متقاربة (نحو 3).

تمرين 1–14

أدرس المتتالية: $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{1+u_n}\ , \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

الحل

نلاحظ بأن كل حدود u_n موجبة وتنتمي إلى المجال $[0,1]$:

لننظر في تغيرات الدالة المستمرة f على المجال $[0,1]$: $\forall x \in [0,1],\ f'(x) < 0$

و f متناقصة على المجال $[0,1]$، إذن توجد متتاليتين مستخرجتين (u_{2n}) و(u_{2n+1}) رتيبتان وفي اتجاه معاكس:

نلاحظ بأن $u_0 = 0$ ، $u_1 = 1$، $u_2 = \frac{1}{2}$، ومنه (u_{2n}) متزايدة و (u_{2n+1}) متناقصة.

ولكون (u_n) متقاربة ولتكن ℓ نهايتها، فإن (u_{2n}) و(u_{2n+1}) متقاربتان أيضا نحو نفس النهاية ℓ:

$\ell = (f\circ f)(\ell)$ (لأن $u_{2(n+1)} = (f\circ f)(u_{2n})$ و $f\circ f$ مستمرة).

لدينا إذن $\ell = \dfrac{1+\ell}{2-\ell}$ التي تعطي القيمة $0.618 \approx \ell = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

تمرين 1–15

نعرف المتتالية التدريجية (u_n)، بالشكل: $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}_+ \\ u_{n+1} = \dfrac{1+u_n^2}{2}\ , n \geq 0 \end{cases}$

1. **ما هي النهايات الممكنة لـ (u_n) ؟**

2. **بين أن المتتالية (u_n) متزايدة مهما كان $n \ni \mathbb{N}$** .
3. **من أجل $u_0 \ni [0,+1]$، أثبت أنه من أجل كل $n \ni \mathbb{N}$ يكون لدينا $0 \le u_n < 1$**.
واستنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة. ما هي نهايتها في هذه الحالة ؟
4. **من أجل $1 < u_0$، أثبت أنه من أجل كل $n \ni \mathbb{N}$ يكون لدينا $1 < u_n$، استنتج أن** $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$.

الحل

أ) **المتتالية التدريجية** $u_{n+1} = \dfrac{1+u_n^2}{2}$ **مع** $u_0 \ni \mathbb{R}_+$:

3. **النهايات الممكنة لـ (u_n)** :

إذا تقاربت المتتالية (u_n) نحو ℓ، فإن ℓ يحقق: $\ell = \dfrac{1+\ell^2}{2}$، ومنه $\ell^2 - 2\ell + 1 = 0$.
وبالتالي إذا تقاربت (u_n) فإن نهايتها ستكون هي: $\ell = 1$.

4. **تزايد المتتالية (u_n)** :

نضع: $u_n = x$ ، $u_{n+1} = f(x)$ ، فيكون $f(x) = \dfrac{1+x^2}{2}$.

لدينا $$f(x) - x = \frac{1+x^2}{2} - x = \frac{1}{2}(x-1)^2$$

إذن $$f(x) - x \ge 0$$

المتتالية (u_n) تحقق : $u_{n+1} - u_n \ge 0 \quad \forall n \in \mathbb{N};$ ومنه (u_n) متزايدة مهما كان $n \ni \mathbb{N}$.

5. **من أجل $u_0 \ni [0,+1]$، نثبت بالتراجع أنه من أجل كل $n \ni \mathbb{N}$ يكون لدينا $0 \le u_n < 1$** :

الدالة $f(x) = \dfrac{1+x^2}{2}$ معرفة ومستمرة وتقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$، حيث: $f'(x) = x$

إذن $$f'(x) \ge 0, \quad \forall x \ge 0$$

لدينا: $$\sup_{[0,+1]} f = 1 \quad و \quad \inf_{[0,+1]} f = \frac{1}{2}$$

ومنه $$f\left([0,+1]\right) \subseteq \left[\tfrac{1}{2},+1\right] \subseteq [0,+1]$$

وأخيرا $\forall n \in \mathbb{N};\ 0 \le u_n < 1$.

نتيجة: بما أن (u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى، فهي متقاربة. (u_n) تتقارب نحو النهاية $\ell = 1$.

6. **من أجل** $1 < u_0$**، نثبت من أجل كل** $n \ni \mathbb{N}$ **، يكون** $1 < u_n$:

بوضع: $u_n = x$ و $u_{n+1} = f(x)$ ، وبما أن $f(x)$ متزايدة ، فإنه إذا كان $1 < u_0$، يكون:

$\forall n \in \mathbb{N};\quad u_n > 1$ ،

وتكون المتتالية (u_n) أيضا متزايدة، لكنها لن تكون متقاربة في هذه الحالة، لأننا لو فرضنا أن (u_n) محدودة، فستصبح (u_n) متقاربة نحو ℓ . $(\ell = 1)$، وعندئذ : $\forall n \in \mathbb{N};\quad u_n > u_0$

بالمرور على النهاية لما $n \to \infty$، يكون : $\ell > u_0$. لكن $1 < u_0$ ، ومنه $1 < \ell$.

وهذا يناقض الفرض. إذن المتتالية المتزايدة (u_n) فهي ليست متقاربة. ومنه $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$

تمرين 1–16

لتكن المتتالية ذات الحد العام $u_n = \dfrac{1}{n+1} + \cdots + \dfrac{1}{2n} = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{n+k}$ ، $(n \geq 1)$

بين أن المتتالية ذات الحد العام (u_n) **متزايدة ومحدودة من الأعلى، فهي إذن متقاربة**

الحل

لدينا $$u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} > 0$$

والمتتالية (u_n) متزايدة تماما.

ومن أجل $k \geq 1$، يكون $\dfrac{1}{n+k} < \dfrac{1}{n}$ فنحصل على المحدودية $u_n < 1$

وبما أن المتتالية (u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى، فهي متقاربة

تمرين 1–17

لتكن (u_n) **و** (v_n) **و** (w_n) **ثلاثة متتاليات معرفة على** $\mathbb{N}$ **كما يلي :**

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}\left(u_n + 2v_n\right) \end{cases} ، \quad \begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = \frac{1}{4}\left(u_n + 3v_n\right) \end{cases} ، \quad w_n = u_n - v_n$$

1. **بين أن** (w_n) **متتالية هندسية، يُطلب تحديد أساسها وحدها الأول. ثم أحسب** $\lim\limits_{n\to\infty} w_n$.
2. **بين أن** (u_n) **و** (v_n) **متجاورتان، ولهما نفس النهاية** ℓ **(لا يُطلب حساب** ℓ **في هذا السؤال).**
3. **نعتبر المتتالية** (C_n) **المعرفة بالشكل :** $\forall n \in \mathbb{N},\ C_n = 3u_n + 8v_n$
   أثبت أن (C_n) **متتالية ثابتة، واستنتج النهاية** ℓ**.**

الحل

1. **نبين أن (w_n) هندسية**

$$w_{n+1}=u_{n+1}-v_{n+1}=\frac{1}{3}\left(u_n+2v_n\right)-\frac{1}{4}\left(u_n+3v_n\right)$$
$$=\frac{1}{12}u_n-\frac{1}{12}v_n=\frac{1}{12}\left(u_n-v_n\right)=\frac{1}{12}w_n$$

ومنه (w_n) هي متتالية هندسة أساسها $\frac{1}{12}$، وحدها الأول $w_0=u_0-v_0=2-1=1$،

حدها العام هو $w_n=\frac{1}{12^n}$ ولدينا النهاية $\lim\limits_{n\to\infty}w_n=\lim\limits_{n\to\infty}(u_n-v_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{12^n}=0$

2. **بين أن (u_n) و (v_n) متجاورتان**

$$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{3}\left(u_n+2v_n\right)-u_n=-\frac{2}{3}u_n+\frac{2}{3}v_n=-\frac{2}{3}\left(u_n-v_n\right)=-\frac{2}{3}w_n<0$$

$$v_{n+1}-v_n=\frac{1}{4}\left(u_n+3v_n\right)-v_n=\frac{1}{4}u_n-\frac{1}{4}v_n=\frac{1}{4}\left(u_n-v_n\right)=\frac{1}{4}w_n>0$$

ولدينا أيضا $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n\geq v_n\quad\Rightarrow\quad v_n\leq v_{n+1}\leq u_{n+1}\leq u_n$

إذن (u_n) و (v_n) متجاورتان، فسيكون لهما نفس النهاية ℓ.

3. **نبين أن المتتالية (c_n) ثابتة**

$$c_{n+1}-c_n=3u_{n+1}+8v_{n+1}-3u_n-8v_n$$
$$=3(u_{n+1}-u_n)+8(v_{n+1}-v_n)=3(-\tfrac{2}{3})w_n+8(\tfrac{1}{4})w_n=0$$

ومنه (c_n) ثابتة.

إذن
$$\forall n\in\mathbb{N},\ c_n=c_0$$
$$=3u_0+8v_0=3(2)+8(1)=14$$

وبما أن (u_n) و (v_n) لهما نفس النهاية ℓ:

$$\lim c_n=3\lim u_n+8\lim v_n=3\ell+8\ell$$
$$14=11\ell$$

ومنه $\ell=\frac{14}{11}$

تمرين 1–18

أدرس المتتالية ذات الحد العام $u_n=n\sum\limits_{p=1}^{n}\frac{1}{n^2+p}$

الحل

من أجل $1\leq p\leq n$، يكون لدينا $\frac{1}{n^2+n}\leq\frac{1}{n^2+p}\leq\frac{1}{n^2+1}$. وبجمع الحدود من $p=1$ إلى $p=n$،

نحصل على $\frac{n^2}{n^2+n} \le u_n \le \frac{n^2}{n^2+1}$

إذا ما انتهت $n \to +\infty$ فإن $\frac{n^2}{n^2+n}$ و $\frac{n^2}{n^2+1}$ ستتقاربان نحو نفس النهاية $\ell = 1$. ومنه $\lim_{n\to\infty} u_n = 1$.

تمرين 1–19

يرمز (Γ) لمنحنى الدالة $f(x) = \frac{4x+1}{x+1}$ في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$

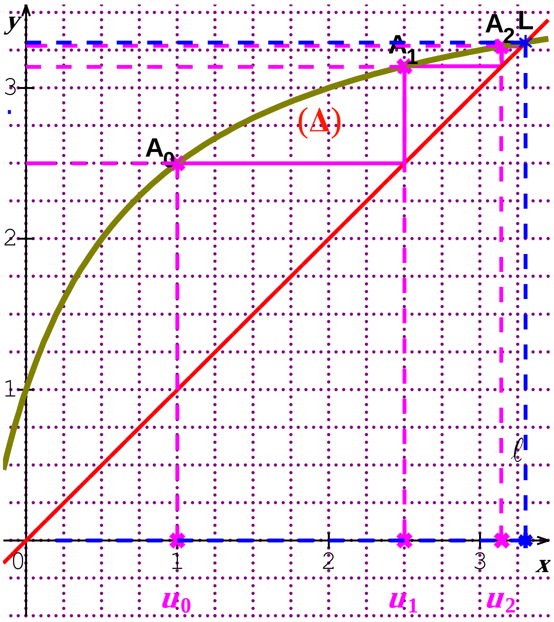
(u_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$: $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{4u_n + 1}{u_n + 1} \end{cases}, n \ge 0$

حساب الحدود. والنهايات الممكنة لـ (u_n)

لدينا: $u_0 = 1$ ، $u_1 = 2.5$ ، $u_2 \simeq 3.14$ ،
$u_3 \simeq 3.28$

• إذا تقاربت (u_n) نحو ℓ ، فإنها تحقق: $\ell = \frac{4\ell+1}{\ell+1}$ ،
أي $\ell^2 - 3\ell + 1 = 0$ ومنه $\ell = \frac{\sqrt{13} \pm 3}{2}$.

نستخدم المنحنى (Γ) والمستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$ في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ، لإنشاء النقط A_0 و A_1 و A_2 و A_3 على (Γ) ذات الفواصل u_0 و u_1 و u_2 و u_3 (الشكل **2.1**).



شكل **2.1**

• **نثبت بالتراجع أنه من أجل كل** n **من** $\mathbb{N}$ **يكون** $1 \le u_n < (\sqrt{13}+3)/2$

بدء التراجع مُحقق. بفرض أن $1 \le u_n < (\sqrt{13}+3)/2$ وبما أن f متزايدة:

$$f(1) \le f(u_n) < f((\sqrt{13}+3)/2)$$

وبالتالي $5/4 \le f(u_n) < (\sqrt{13}+3)/2$ ومنه أيضا $1 \le u_{n+1} < (\sqrt{13}+3)/2$ وهو المطلوب.

إذن $1 \le u_n < (\sqrt{13}+3)/2$ والمتتالية (u_n) محدودة (من الأعلى والأسفل).

• **تزايد المتتالية (u_n) وتقاربها. وتعيين نهايتها.**

إشارة: $u_{n+1} - u_n = (4u_n+1)/(u_n+1) - u_n = u_{n+1} - u_n = (u_n^2 - 3u_n - 1)/(u_n+1)$ ، موجبة على المجال $I = \left[1; (\sqrt{13}+3)/2\right[$ الذي يشمل جميع حدود (u_n) ، وبالتالي (u_n) متزايدة من أجل كل n من $\mathbb{N}$.

وبما أن (u_n) محدودة من الأعلى، فهي إذن متقاربة. وتتقارب نحو $\ell = (\sqrt{13}+3)/2 \simeq 3.30$.

تمرين 1–20

أ) **نعتبر الدالة** $f(x)=\frac{1}{3}x^2-x+3$

1. **أدرس تغيرات** $f(x)$ **، واستنتج أنه إذا كان** $x\in[0;3]$ **فإن** $f(x)\in[0;3]$.

2. **بين أنه من أجل كل** $x\in\mathbb{R}$ **أن** $f(x)\geq x$.

ب) **نعرف المتتالية التدريجية** (u_n) **، بالشكل:**

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}^+ \\ u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n^2-u_n+3 \quad , n\geq 0 \end{cases}$$

1. **باستخدام السؤال (أ–2)، استنتج أن المتتالية** (u_n) **متزايدة.**

2. **من أجل** $u_0\in[0;3]$ **وباستخدام السؤال (أ–1)، أثبت من أجل كل** $n\in\mathbb{N}$ **أن** $0\leq u_n\leq 3$.

واستنتج أن (u_n) **متقاربة، ما هي نهايتها في هذه الحالة ؟**

3. **من أجل** $3<u_0$ **، أثبت من أجل كل** $n\in\mathbb{N}$ **أن** $3<u_n$ **. ثم استنتج أن** $\lim_{n\to\infty}u_n=+\infty$.

الحل

أ) **1.** الدالة $f(x)=\frac{1}{3}x^2-x+3$ معرفة ومستمرة وتقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ، حيث:

$$f'(x)=\frac{2}{3}x-1$$

جدول تغيرات $f(x)$:

x	$-\infty$	$2/3$	$+\infty$
$f'(x)$		0	$-\ +$
$f(x)$	$-\infty$ ↘	$9/4$	↗ $+\infty$

تغيرات $f(x)$ ، والاستلزام $x\in[0;3] \Leftarrow f(x)\in[0;3]$.

لدينا: $\inf_{[0,3]} f = f(3/2) = 9/4$ و $\sup_{[0,3]} f = f(0) = f(3) = 3$

ومنه $f\left([0,+3]\right) \subseteq [9/4, 3] \subseteq [0,+3]$

2. نبين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ يكون $f(x) \geq x$.

نضع $g(x) = f(x) - x$ فيكون: $g(x) = \frac{1}{3}x^2 - x + 3 - x = \frac{1}{3}(x-3)^2$

ومنه المطلوب $\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) \geq 0$

ب)

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n^2 - u_n + 3 \ ; \ n \geq 0 \end{cases}$$

1. من (**أ-2**)، استنتاج أن (u_n) متزايدة.

من (أ-2) وبأخذ x للقيمة u_n نحصل على:

$$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$$
$$= \frac{1}{3}(u_n - 3)^2 \geq 0$$

ومنه (u_n) متزايدة.

2. دراسة تقارب المتتالية (u_n)

من أجل u_0 من $[0\,;3]$ وبوضع $x = u_n$، يكون لدينا :

$$u_n \in [0,3] \Rightarrow u_{n+1} \in [0,3]$$

أو استخدام برهان التراجع.

المتتالية (u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى (بـ 3) فهي متقاربة.

وهي تتقارب نحو العدد الحقيقي ℓ الذي يحقق: $f(\ell) = \ell$ و ℓ من $[0,3]$

لدينا $f(\ell) = \ell \Leftrightarrow \frac{1}{3}(\ell - 3)^2 = 0$. ومنه $\lim\limits_{+\infty} u_n = \ell = 3$,

3. من أجل $3 < u_0$، نثبت من أجل كل n من $\mathbb{N}$ أن $3 < u_n$. واستنتاج النهاية $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

من أجل $3 < u_0$؛ نحسب نهاية (u_n) على $]3,+\infty[$ بوضع $x = u_n$

$$u_{n+1} = f(u_n) = \frac{1}{3}u_n^2 - u_n + 3$$

$$f(x) = \frac{1}{3}x^2 - x + 3$$

$$f'(x) = \frac{2}{3}x - 1 > 0 \ , \ \forall x > 3$$

إذن من أجل $3<u_0$ يكون $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n > 3$

ومن السؤال (أ-2) نستنتج أن المتتالية في هذه الحالة متزايدة.

ولنفرض أن (u_n) محدودة. فتصبح المتتالية في هذه الحالة متزايدة ومحدودة فهي إذن متقاربة، لتكن ℓ نهايتها. التي تحقق $\ell = \frac{\ell^2}{3} - \ell + 3 \Leftrightarrow \ell = 3$

لكن (u_n) متزايدة إذن: $\forall n \geq 0 \quad u_n \geq u_0$

بالمرور على النهاية نجد: $\ell \geq u_0$

لكن نعلم بأن $u_0 > 3$ إذن $3 < \ell$.

وهذا يناقض الفرض بأن: (u_n) محدودة.

وبما أن (u_n) متزايدة، فهذا يؤدي إلى أن (u_n) تؤول إلى $+\infty$. أي $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

تمرين 1-21

نعتبر المتتالية ذات الحد العام: $v_n = \frac{1}{n!}$ $(n \in \mathbb{N})$.

1. **أحسب** $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ **وأثبت أن المتتالية** (v_n) **متناقصة مهما كان** $n \in \mathbb{N}$.
2. **أثبت أنه من أجل كل** $n \geq 1$ **يكون** $\frac{v_{n+1}}{v_n} \leq \frac{1}{2}$.
3. **استنتج أن** $v_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ ، $\forall n \geq 1$ **. ماذا نقول عن المتتالية** (v_n) **والسلسلة** $\sum v_n$ ؟

الحل

1. ح لدينا : $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1}{n+1} \leq 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$. ومنه المتتالية ذات الحدود الموجبة (v_n)، متناقصة .

لدينا : $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1}{n+1} \leq 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$. ومنه المتتالية ذات الحدود الموجبة (v_n)، متناقصة .

2. إذا كان $n \geq 1$ فإن $n+1 \geq 2$ ، وبما أن $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1}{n+1}$، فإن $\frac{v_{n+1}}{v_n} \leq \frac{1}{2}$ مهما كان $n \geq 1$.

3. لنثبت بالتراجع صحة الخاصية P_n : $0 \leq v_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ من أجل كل $n \geq 1$.

لدينا P_1 صحيحة. إذا انتقلنا إلى القيمة $n \geq 1$ ، فسيكون لدينا $0 \leq v_{n+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$،

أي أن P_n مهما كان $n \geq 1$.

وبالمرور على النهاية لما $n \to \infty$، نستنتج أن $\lim\limits_{n \nearrow +\infty} v_n = 0$.

تمرين 1–22

أ) **نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بالشكل:** $f(x)=3-\frac{2}{x+1}$

1. **أدرس تغيرات f على المجال** $]0,+\infty[$.
2. **برهن بأنه إذا كان** $x\in\left[0\ ;\ 1+\sqrt{2}\right]$ **فإن** $f(x)\in\left[0\ ;\ 1+\sqrt{2}\right]$.

ب) **نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$، بالشكل:**

$$\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=3-\dfrac{2}{u_n+1} \quad , n\geq 0 \end{cases}$$

1. **أحسب** u_1 **و** u_2 **و** u_3. **ما هي النهايات الممكنة لـ** (u_n) ؟
2. **مثل بيانيا المنحنيَيْن اللذيْن معادلتيهما** $y=f(x)$ **و** $y=x$ **في معلم متعامد ومتجانس** $(O;\vec{i},\vec{j})$، **ثم استخدمهما لإنشاء النقط** A_0 **و** A_1 **و** A_2 **ذات الفواصل** u_0 **و** u_1 **و** u_2. **على الترتيب. (الوحدة 4 سم).**
3. **أثبت باستخدام البرهان بالتراجع أنه من أجل كل** $n\in\mathbb{N}$ **يكون** $0\leq u_n\leq u_{n+1}\leq 1+\sqrt{2}$. **ماذا تستنتج ؟**

جـ) **نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة بحدها الأول $v_0=3$ والعلاقة** $v_{n+1}=3-\frac{2}{v_n+1}$ **مهما كان** $n\in\mathbb{N}$

1. **أثبت، من أجل كل** $n\in\mathbb{N}$ **، أن المتتالية (v_n) متناقصة.**
2. **بين من أجل كل** $n\in\mathbb{N}$ **، أن** $v_n-u_n\leq 2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^n$. **واستنتج بأن (u_n) و (v_n) متجاورتان.** **ما هي** $\lim\limits_{n\to\infty}v_n$ ؟

الحل

أ) **1.** الدالة $f(x)=3-\frac{2}{x+1}$ مستمرة وتقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}^+$ حيث $f'(x)=\frac{2}{(x+1)^2}$

ومنه $f(x)$: متزايدة على المجال $]0,+\infty[$.

2. ليكن $x\in\left[0,1+\sqrt{2}\right]$. بما أن $0\leq x\leq 1+\sqrt{2}$ و f متزايدة على $]0,+\infty[$، فإن

$$f(0)\leq f(x)\leq f(1+\sqrt{2})$$

ومنه أيضا $1 \le f(x) \le 1+\sqrt{2}$ وأخيرا نحصل على : $f\left(\left[0,1+\sqrt{2}\right]\right) = \left[1,1+\sqrt{2}\right] \subset \left[0,1+\sqrt{2}\right]$

ب) 1. الحدود u_1 و u_2 و u_3، والنهايات الممكنة لـ (u_n)

- بالحساب نجد: $u_1 = 2$ ، $u_2 = \frac{7}{3} \approx 2.33$ ، $u_3 = \frac{12}{5} = 2.4$
- إذا تقاربت المتتالية ذات الحدود الموجبة (u_n) نحو النهاية ℓ، فإن هذه النهاية تحقق: $\ell = 3 - \frac{2}{\ell+1}$،

أي: $\ell^2 - 2\ell - 1 = 0$. وبالتالي إذا تقاربت (u_n) فإن نهايتها ستكون هي: $\ell = 1+\sqrt{2} \approx 2.41$.

3. **أثبات باستخدام البرهان بالتراجع : من أجل كل n من $\mathbb{N}$ يكون**

$$(*) \ldots 0 \le u_n \le u_{n+1} \le 1+\sqrt{2}$$

بما أن: $u_0 = 1$ و $u_1 = f(u_0) = 2$ ، فإن المتراجحات $(*)$ تتحقق من أجل $n = 0$.

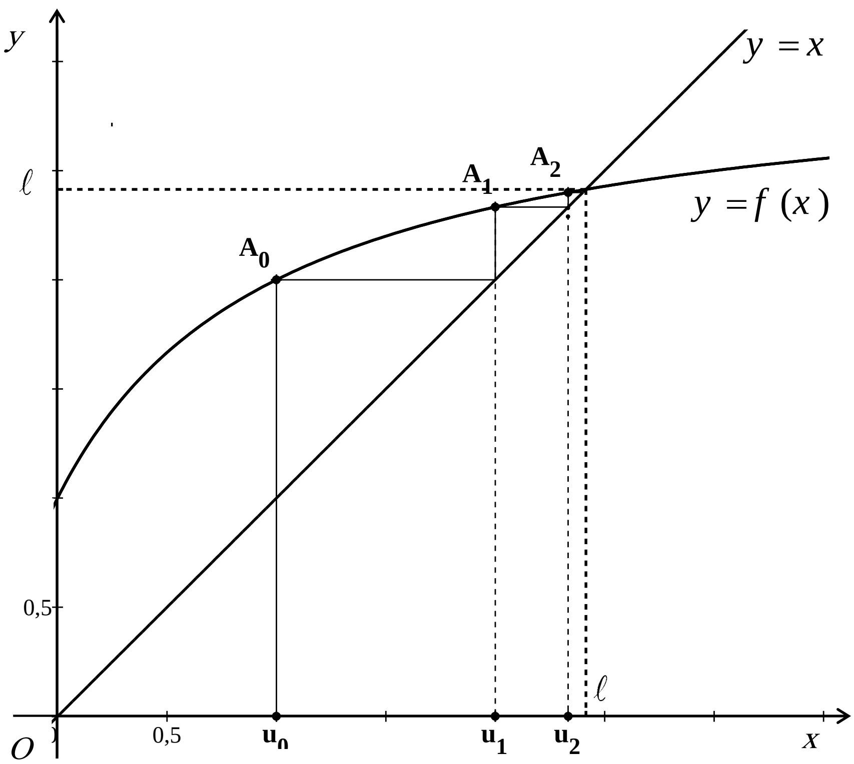
من أجل $0 \le n$، نفرض أن $0 \le u_n \le u_{n+1} \le 1+\sqrt{2}$.

بما أن f متزايدة على $[0, +\infty[$، يكون $f(0) \le f(u_n) \le f(u_{n+1}) \le f(1+\sqrt{2})$

أي $1 \le u_{n+1} \le u_{n+2} \le 1+\sqrt{2}$ ، ومنه : $0 \le u_{n+1} \le u_{n+2} \le 1+\sqrt{2}$

إذن : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \le u_n \le u_{n+1} \le 1+\sqrt{2}$

إذن (u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى بـ $1+\sqrt{2}$ فهي متقاربة. تتقارب نحو $\ell = 1+\sqrt{2} \approx 1.41$.



شكل 2.1

جـ) 1. نثبت، من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ، أن المتتالية (v_n) متناقصة

نثبت بالتراجع أن: $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} \le v_n \quad \dots (**)$

(v_n) ذات حدود موجبة. لدينا $v_0 = 3$ و $v_1 = f(u_0) = 2.5$ ، ومنه المتراجحة(**) متحققة من أجل $n = 0$. ومن أجل $n \ge 0$، نفرض أن $v_{n+1} \le v_n$، بما أن الدالة f متزايدة على $[0, +\infty[$، يكون لدينا أيضا $f(v_{n+1}) \le f(v_n)$ ، أي $v_{n+2} \le v_{n+1}$

وحسب مبدأ التراجع نحصل على : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} \le v_n$

2. نثبت أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ أن $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n - u_n \le 2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^n$.

ليكن n عدد طبيعي.

لدينا : $$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{3v_n+1}{v_n+1} - \frac{3u_n+1}{u_n+1} = \frac{2}{(u_n+1)(v_n+1)}\left(v_n - u_n\right)$$

وبما أن الجداء $(u_n+1)(v_n+1)$ موجب تماما، فإن إشارة $v_{n+1}-u_{n+1}$ هي من نفس إشارة $v_n - u_n$، التي هي من إشارة $v_0 - u_0 = 3-1 = 2$ (الموجبة تماما). ومن جهة أخرى، ولكون $1 \le u_n$ و $3 \le v_n$، فإن $2 \le u_n + 1$ و $4 \le v_n + 1$ ، ينتج من ذلك أن $8 \le (u_n+1)(v_n+1)$. وبالتالي $\frac{1}{(u_n+1)(v_n+1)} \le \frac{1}{8}$.

وبالتالي يكون $$\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} - u_{n+1} \le \frac{1}{4}\left(v_n - u_n\right)$$

لنستخدم الآن البرهان بالتراجع لإثبات الخاصية $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n - u_n \le 2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^n$

لدينا $v_0 - u_0 = 2$ و $2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^0 = 2$ ومنه $v_0 - u_0 \le 2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^0$. ومنه المتراجحة متحققة من أجل $n = 0$.

ومن أجل $n \ge 0$، وبفرض $v_n - u_n \le 2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^n$ ، يكون لدينا :

$$v_{n+1} - u_{n+1} \le \frac{1}{4}\left(v_n - u_n\right) \le \frac{1}{4}\cdot 2\left(\frac{1}{4}\right)^n = 2\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$$

وأخير نحصل على $$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n - u_n \le 2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

إذن، من أجل كل عدد طبيعي n ، يكون لدينا $0 \le v_n - u_n \le 2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^n$

بأخذ نهاية أطراف هذه المتراجحة عندما $n \to +\infty$، نجد $\lim\limits_{n\to\infty}(v_n - v_n) = 0$. وهذا يدل على أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان. لهما نفس النهاية، أي $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = \lim\limits_{n\to\infty} u_n = \ell = 1+\sqrt{2}$.

تمرين 1–23

يرمز (Γ) لمنحنى الدالة $f(x) = 0.5x + 1$ في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

(u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$، بالشكل: $\begin{cases} u_0 = 0.5 \\ u_{n+1} = 0.5\,u_n + 1 \quad , n \geq 0 \end{cases}$

1. **عين نقطة تقاطع (Γ) مع المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$**
2. **أحسب الحدود u_1 و u_2 و u_3 و u_4 ، ما هي النهايات الممكنة لـ (u_n) ؟**
3. **بين أن (u_n) متقاربة . ما هي نهايتها ؟**
4. **ليكن $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$، برهن أن:** $\forall n \in \mathbb{N};\quad 2-\varepsilon < u_n < 2+\varepsilon \quad\Rightarrow\quad 2-\varepsilon < u_{n+1} < 2+\varepsilon$

واستنتج أن $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 2$

الحل

يرمز (Γ) للمستقيم الذي معادلته $y = 0.5x + 1$ في مستوي منسوب إلى المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. نعين نقطة تقاطع (Γ) مع المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$.

فاصلة نقطة تقاطع (Γ) و (Δ) تحقق: $x = 0.5x + 1$، أي $x = 2$. وإحداثيات النقطة المشتركة هما $(2;2)$

2. حساب الحدود u_1 و u_2 و u_3 . والنهايات الممكنة للمتتالية (u_n)

- بالحساب، نحصل على: $u_0 = 0.5$ ، $u_1 = 1.25$ ، $u_2 = 1.625$ ، $u_3 = 1.8125$.
- إذا تقاربت (u_n) نحو ℓ، فإنها تحقق: $\ell = 0.5\,\ell + 1$، أي $0.5\,\ell = +1$ ومنه $\ell = 2$.

استخدام المنحنى (Γ) والمستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$ في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$، لإنشاء النقط A_0 و A_1 و A_2 و A_3 على (Γ) ذات الفواصل u_0 و u_1 و u_2 و u_3 على الترتيب (**الشكل 1.1**) تقارب (u_n) ونهايتها.

3. تقارب (u_n) ونهايتها.

- نثبت بالتراجع أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$ يكون $0 < u_n < 2$

بدء التراجع مُحقق. نفرض أن $0 < u_n < 2$. ومنه يكون $0 < 0.5u_n < 0.5\times 2$ وبالتالي $0 < 0.5u_n + 1 < 1 + 1$

أي $0 < u_{n+1} < 2$ وهو المطلوب.

إذن $\forall n \in \mathbb{N},\quad 0 < u_n < 2$ و (u_n) محدودة (من الأعلى والأسفل).

- إشارة المقدار $u_{n+1}-u_n=(0.5u_n+1)-u_n=-0.5u_n+1$ ، موجبة تماما على المجال $]0\,;\,2[$ الذي يشمل جميع حدود المتتالية (u_n) ، وكذلك (u_n) محدودة من الأعلى، فهي متقاربة. (u_n) تتقارب نحو $\ell=2$

4. **من أجل** $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ ، **نبرهن:** $\forall n\in\mathbb{N};\ \ 2-\varepsilon<u_n<2+\varepsilon \ \Rightarrow\ 2-\varepsilon<u_{n+1}<2+\varepsilon$

ليكن $0<\varepsilon$، نفرض أن: $2-\varepsilon<u_n<2+\varepsilon$

فيكون $1-0.5\varepsilon<0.5u_n<1+0.5\varepsilon$

وأيضا $2-0.5\varepsilon<1+0.5u_n<2+0.5\varepsilon$

وبما أن $0<\varepsilon$ فإن $0.5\varepsilon<\varepsilon$ و $-\varepsilon<-0.5\varepsilon$

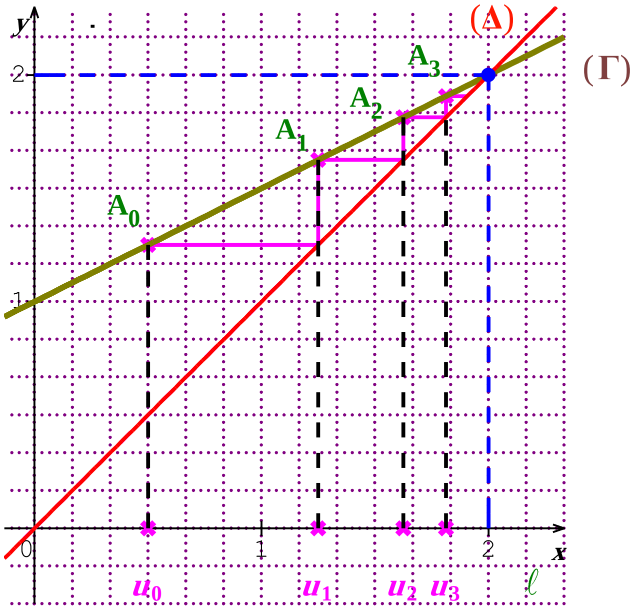
فإنه يكون لدينا $2-\varepsilon<u_{n+1}<2+\varepsilon$

وهذا يعني من أجل $0<\varepsilon$، ولو وضعنا $n=\mathrm{N}_0$ ، يمكن في ضوء ما سبق أن نصوغ التعريف:

$$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*,\exists \mathrm{N}_0\in\mathbb{N},\ \forall n\geq \mathrm{N}_0\,;\ |u_n-2|<\varepsilon$$

وهو يعني أيضا : $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=2$

وهذا تمثيل بياني لحدود المتتالية (u_n): (الشكل **3.1**).



شكل 3.1

تمرين 1–24

أ) **نعتبر الدالة** f **المعرفة على** $[0;+\infty[$ **كما يلي** : $f(x)=\dfrac{3x^2}{x+3}$

أحسب المشتقة $f'(x)$ ، **واستنتج بأن** f **متزايدة على** $[0;+\infty[$.

ب) نعتبر المتتالية العددية (u_n) **المعرفة على** $\mathbb{N}$ ، **بالشكل:**

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n^{\ 2}}{u_n + 3} \quad , n \geq 0 \end{cases}$$

- **أحسب الحدود** u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 . **ما هي النهايات الممكنة للمتتالية** (u_n) ؟
- **مثل بيانيا المنحيَيْن اللذيْن معادلتيهما في معلم متعامد ومتجانس** $(O;\vec{i},\vec{j})$ **هما** $y = f(x)$

و $y = x$ ، **ثم استخدمهما لتعيين النقط** A_0 ، A_1 ، A_2 ، A_3 **من منحنى** $y = f(x)$ **وذات الفواصل** u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 **على الترتيب.**

- **برهن بأنه من أجل كل عدد طبيعي** n **يكون لدينا** $0 < u_n \leq 1$.
- **بين أن المتتالية** (u_n) **متناقصة، استنتج بأنها متقاربة . ما هي نهايتها ؟**

الحل

أ) • الدالة f تقبل الاشتقاق على $[0;+\infty[$: $f'(x) = \dfrac{6x\cdot(x+3) - 3x^2}{(x+3)^2} = \dfrac{3x\cdot(x+6)}{(x+3)^2}$

ومنه $0 \leq f'(x)$ مهما كان $0 \leq x$. والدالة f متزايدة على $[0;+\infty[$

ب) الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 والنهايات الممكنة لـ (u_n)

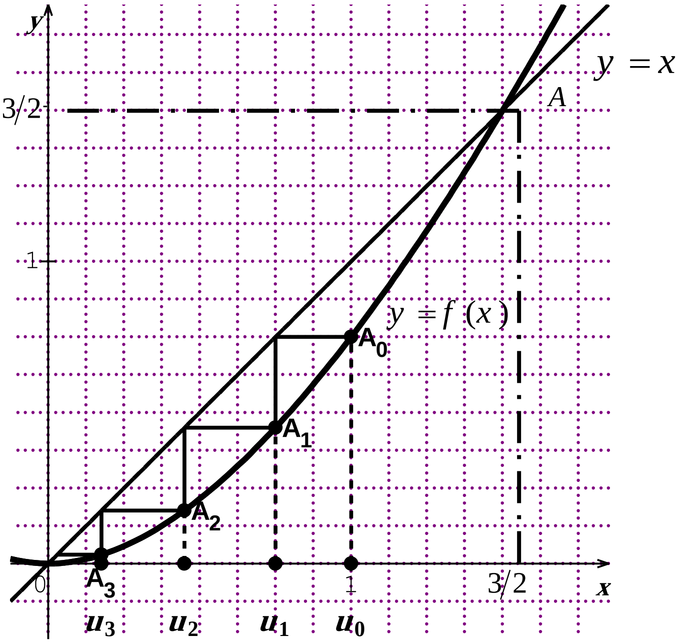
- بالحساب، نحصل على: $u_0 = 1$ ، $u_1 = \dfrac{3}{4} = 0.75$ ، $u_2 = \dfrac{9}{20} = 0.45$ ،

$u_3 = \dfrac{81}{460} \approx 0.18$

- إذا تقاربت المتتالية (u_n) نحو ℓ ، فإن ℓ تحقق: $\ell = \dfrac{3\ell^2}{\ell + 3}$ ، ومنه $3\ell^2 - \ell^2 - 3\ell = \ell\cdot(2\ell - 3) = 0$

وبالتالي إذا تقاربت (u_n) فإن نهايتها ستكون هي إما 0 وإما $\ell = \dfrac{3}{2}$. $\ell = \dfrac{3}{2}$

البيان في الشكل **4.1**



شكل 4.1

- نبرهن، بأنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون $0 < u_n \leq 1$.

لدينا: $\inf_{[0;+1]} f = \frac{3}{4}$ و $\sup_{[0;+1]} f = 1$، ومنه

$$f\left([0,+1]\right) = \left[\frac{3}{4},+1\right] \subset \left]0,+1\right]$$

وأخيرا $\forall n \in \mathbb{N};\quad 0 < u_n \leq 1$. أي ان المتتالية (u_n) محدودة.

- نبين أن المتتالية (u_n) متناقصة ونستنتج تقاربها:

بوضع: $u_n = x$ ، $u_{n+1} = f(x)$ ، فيكون $u_{n+1} - u_n = f(x) - x = \frac{3x^2}{x+3} - x = \frac{x\cdot(2x-3)}{x+3}$

إذن $f(x) - x < 0$ مهما كان $x \in]0;1]$. وبالتالي (u_n) تحقق :

$$\forall n \in \mathbb{N};\quad u_{n+1} - u_n < 0$$

والمتتالية (u_n) متناقصة تماما مهما كان $n \in \mathbb{N}$.

نتيجة: بما أن (u_n) متناقصة ومحدود من الأدنى، فهي متقاربة، (u_n) تتقارب نحو النهاية $\ell = 0$.

تمرين 1-25

أ) نعتبر الدالة $f(x) = \frac{1}{1+2x}$

أدرس تغيرات $f(x)$ على $\mathbb{R}^+$، واستنتج أنه إذا كان x من $[0,1]$ فإن $f(x)$ سيكون من $[0,1]$.

2. **أحسب** $f\circ f$ **على** $\mathbb{R}^+$.

ب) نعرف المتتالية التدريجية (u_n)**، بالشكل:** $\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=\dfrac{1}{1+2u_n} \quad ; n\in\mathbb{N} \end{cases}$

1. **أثبت، بالتراجع، أنه من أجل كل** n **من** $\mathbb{N}$**، يكون لدينا** $0\le u_n\le 1$.
2. **أحسب** u_1 **و** u_2 **و** u_3 **و** u_4**. واستنتج رتابة كل من المتتاليتين المستخرجتين** (u_{2n}) **و** (u_{2n+1})
3. **أستنتج أن** (u_n) **متقاربة، ثم أحسب نهايتها.**
4. **مثل بيانيا المنحنيَيْن اللذيْن معادلتيهما** $y=f(x)$ **و** $y=x$ **في معلم متعامد ومتجانس** $(O;\vec{i},\vec{j})$**، ثم استخدمهما لإنشاء النقط** A_0 **و** A_1 **و** A_2 **و** A_3 **و** A_4 **ذات الفواصل** u_0 **و** u_1 **و** u_2 **و** u_3 **و** u_4 **على الترتيب.** (**الوحدة** 8 **سم**)

الحل

أ) 1. • الدالة f مستمرة وتقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}^+$: $f'(x)=\dfrac{-2}{(2x+1)^2}$. ومنه f متناقصة **على** $\mathbb{R}^+$.

• ليكن x من $[0,1]$. بما أن $0\le x\le 1$ و f متناقصة على $[0,1]$، فإن

$f(1)\le f(x)\le f(0)$ ومنه أيضا : $\dfrac{1}{3}\le f(x)\le 1$ وبالتالي $0\le f(x)\le 1$

وأخيرا نحصل على : $f([0,1])\subset\left[\dfrac{1}{3},1\right]\subset[0,1]$

2. حساب $f\circ f$

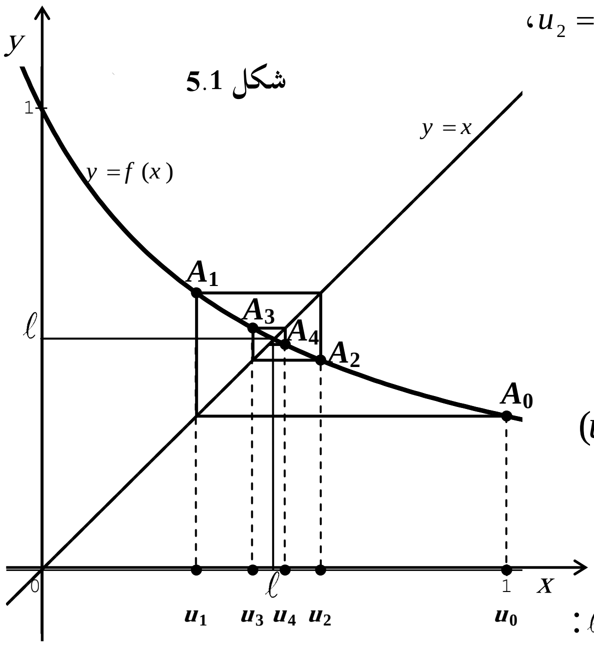
من أجل كل x من $\mathbb{R}^+$: $(f\circ f)(x)=f(f(x))=f\left(\dfrac{1}{1+2x}\right)=\dfrac{1}{1+2\left(\dfrac{1}{1+2x}\right)}=\dfrac{1+2x}{3+2x}$

ب) 1. إثبات: $\forall n\in\mathbb{N}\ ,\quad 0\le u_n\le 1$ **.**

بالتدريج : بدء التدريج $(n=0)$: لدينا $u_0=1$ ومنه $1=1$ مُحققة.

إذا افترضنا أنه من أجل n من $\mathbb{N}$: $0\le u_n\le 1$، فسيكون $0\le 2u_n\le 2$ وأيضا $1\le 1+2u_n\le 3$

وبالتالي $\dfrac{1}{3}\le\dfrac{1}{1+2u_n}\le 1$ أي : $0\le u_{n+1}\le 1$ وهو المطلوب. أي جميع الحدود u_n تنتمي إلى المجال $[0,1]$.



2. • بالحساب نجد: $u_1=\frac{1}{3}\approx 0.33$ ، $u_2=\frac{3}{5}\approx 0.6$ ، $u_3=\frac{5}{11}\approx 0.45$ ، $u_4=\frac{11}{21}\approx 0.52$.

• حسب السؤال (أ-1)، f متناقصة على $[0,1]$، وبالتالي، فإن المتتاليتين المستخرجتين (u_{2n}) و (u_{2n+1}) رتيبتان وفي اتجاه معاكس:

مقارنة بين الحدين الأولين لكل منهما، نجد: $u_2<u_0$ و $u_3>u_1$، وبالتالي المتتالية (u_{2n}) متناقصة والمتتالية (u_{2n+1}) متزايدة، وهما أيضا متقاربتان.

2. المتتالية (u_n) متقاربة، لتكن ℓ هي نهايتها. إذن المتتاليتان (u_{2n}) و (u_{2n+1}) ستتقاربان نحو نفس النهاية ℓ:

$\ell=(f\circ f)(\ell)$ (لأن $u_{2(n+1)}=(f\circ f)(u_{2n})$ و $f\circ f$ مستمرة).

ولدينا إذن $\ell=\frac{1+2\ell}{3+2\ell}$ أي $2\ell^2+\ell-1=0$

التي تعطي القيمة الموجبة $\ell=\frac{1}{2}$. (الشكل 5.1)

تمرين 1–26

نعتبر المتتالية التدريجية (u_n)، المعرفة كما يلي:
$$\begin{cases} u_0=\sqrt{2} \\ u_{n+1}=\sqrt{2+u_n}\ , \quad \forall n\in\mathbb{N}^* \end{cases}$$

- **بين باستخدام بيان الدالة $y=f(x)=\sqrt{2+x}$ بأن $u_{n+1}=f(u_n)$**
- **برهن بأن هذه المتتالية محدودة من الأعلى بـ 2. وبين أنها متزايدة، واستنتج تقاربها.**

الحل

- إن قيمة $f(x)$ من أجل $x=u_n$، هي $f(u_n)=u_{n+1}=\sqrt{2+u_n}$

$f(x)$ متزايدة على المجال $]-2,+\infty[$.

بيانيا، تقترب النقط $M(x_0,f(x_0))$، $M(x_1,f(x_1))$، ...، $M(x_n,f(x_n))$ من النقطة $L(\ell,f(\ell))$: نقطة تقاطع منحنى f مع المستقيم $y=x$.

وبالتالي ℓ تحقق $\ell=\sqrt{2+\ell}>0$ ومنه $\ell=2$.

- بالتراجع، من أجل $n=0$، $u_0=\sqrt{2}<2$.

بفرض أن $u_n<2$، يكون $u_n<2 \Rightarrow u_n+2<2+2=4 \Rightarrow \sqrt{u_n+2}<\sqrt{4}=2$

ومنه المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى بـ 2.

- و (u_n) متزايدة لأن

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_{n+1}-u_n=\sqrt{2+u_n}-u_n=\frac{2+u_n-u_n^2}{\sqrt{2+u_n}+u_n}=\frac{(1+u_n)(2-u_n)}{\sqrt{2+u_n}+u_n}>0$$

إذن (u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى بـ 2؛ فهي متقاربة. لتكن ℓ نهايتها.

بما أن (u_n) و (u_{n+1}) لهما نفس النهاية ℓ، فإن ℓ تحقق $\ell=\sqrt{2+\ell}$ ومنه $\ell=2$.

تمرين 1–27

لتكن (u_n) المتتالية المعرفة بالشكل:

$$\begin{cases} u_0=\dfrac{1}{2} \\ u_{n+1}=\sqrt{\dfrac{1+u_n}{2}} \end{cases}$$

1. **أحسب u_1 و u_2. ما هي النهايات الممكنة للمتتالية (u_n) ؟**
2. **أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، يكون لدينا:** $0<u_n<u_{n+1}<1$.
   واستنتج أن المتتالية (u_n) تكون متقاربة.
3. **أثبت أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ ، يكون لدينا:** $\left|u_{n+1}-1\right|\leq\dfrac{1}{2}\left|u_n-1\right|$.
   واستنتج من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ ، يكون لدينا: $\left|u_n-1\right|\leq\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$.

الحل

1. الحدان u_1 و u_2 ، وتقارب المتتالية (u_n) .

الدالة $x\mapsto f(x)=\sqrt{\dfrac{1+x}{2}}$ مستمرة ومتزايدة على $[-1,+\infty[$، ولدينا $f\left([-1,+\infty[\right)=\mathbb{R}_+$

لدينا
$$u_1=f(u_0)=\sqrt{\frac{1+u_0}{2}}=\sqrt{\frac{1+1/2}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\approx 0.866$$
$$u_2=f(u_1)=\sqrt{\frac{1+u_1}{2}}=\sqrt{\frac{1+\sqrt{3}/2}{2}}=\frac{1}{4}\sqrt{2}(1+\sqrt{3})\approx 0.966$$

النهايات الممكنة للمتتالية (u_n) :

المتتالية (u_n) ذات حدود موجبة، إذا تقاربت (u_n) نحو ℓ، فإن ℓ يحقق: $\ell=\sqrt{\frac{1+\ell}{2}}$، أي ℓ هو الحل الوحيد للمعادلة $2\ell^2-\ell-1=0$. وهذه النهاية هي: $\ell=1$.

2. إثبات $\forall n\in\mathbb{N}\ ,\quad 0<u_n<u_{n+1}<1$.

بالتدريج : بدء التدريج $(n=0)$: لدينا $u_0=0.5$ و $u_1\approx 0.866$, ومنه $0<u_0<u_1<1$.

نفرض من أجل n من $\mathbb{N}$: $0<u_n<u_{n+1}<1$، بما أن الدالة f متزايدة على $[0,1]$ (لأنها متزايدة على $]-1,+\infty[$)، يكون لدينا : $f(0)<f(u_n)<f(u_{n+1})<f(1)$ ، أي $\frac{\sqrt{2}}{2}<f(u_n)<f(u_{n+1})<1$.

ومنه صحة المتراجحات : $0<u_{n+1}<u_{n+2}<1$.

وأخيرا $\forall n\in\mathbb{N}\ ,\quad 0<u_n<u_{n+1}<1$.

إذن المتتالية (u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى بـ(1) ، فهي متقاربة .

3. إثبات من أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $|u_{n+1}-1|\le\frac{1}{2}|u_n-1|$.

لدينا :
$$u_{n+1}-1=\sqrt{\frac{1+u_n}{2}}-1=\frac{\frac{1+u_n}{2}-1}{\sqrt{\frac{1+u_n}{2}}+1}=\frac{1}{2}\,\frac{u_n-1}{\sqrt{\frac{1+u_n}{2}}+1}$$

وبملاحظة $0\le\sqrt{\frac{1+u_n}{2}}\Rightarrow 1\le\sqrt{\frac{1+u_n}{2}}+1$ ، ينتج $\frac{1}{\sqrt{\frac{1+u_n}{2}}+1}\le 1$

وبالتالي يكون $|u_{n+1}-1|\le\frac{1}{2}|u_n-1|$

- استنتاج $\forall n\in\mathbb{N}\ ,\quad |u_n-1|\le\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

بالتدريج : لدينا $|u_0-1|=\left(\frac{1}{2}\right)^{0+1}$ صحيحة . $(u_0=0.5)$.

نفرض من أجل $n\in\mathbb{N}$ أن $|u_n-1|\le\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$. وقد برهنا أن : $|u_{n+1}-1|\le\frac{1}{2}|u_n-1|$.

إذن $|u_{n+1}-1|\le\frac{1}{2}|u_n-1|\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}|u_n-1|$

ومنه $|u_{n+1}-1|\le\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}|u_n-1|$ صحيحة .

إذن $$\forall n \in \mathbb{N}\ ,\quad |u_n - 1| \le \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

وبما أن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ ، يكون $\lim\limits_{n\to+\infty}|u_n - 1| = 0$ ، أي $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$

تمرين 1–28

نعتبر المجموع: $S_n = 2 + \frac{5}{3^3} + \frac{8}{3^6} + \ldots + \frac{3n+2}{3^{3n}}$

أحسب المجموع $S_n - \frac{1}{3^3}S_n$، **واستنتج** S_n **بدلالة** n. **واستنتج قيمة النهاية** $\lim\limits_{x\to+\infty} S_n$.

الحل

لنحسب $S_n - \frac{1}{3^3}S_n$

$$S_n - \frac{1}{3^3}S_n = \left(2 + \frac{5}{3^3} + \frac{8}{3^6} + \ldots + \frac{3n+2}{3^{3n}}\right) - \left(\frac{2}{3^3} + \frac{5}{3^6} + \ldots + \frac{3n-1}{3^{3n}} + \frac{3n+2}{3^{3(n+1)}}\right)$$

$$S_n - \frac{1}{3^3}S_n = 2 + \left(\frac{5-2}{3^3} + \frac{8-5}{3^6} + \ldots + \frac{(3n+2)-(3n-1)}{3^{3n}}\right) - \frac{3n+2}{3^{3(n+1)}}$$

$$= 2 + \left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^5} + \ldots + \frac{1}{3^{3n-1}}\right) - \frac{3n+2}{3^{3(n+1)}}$$

$$= 2\,\frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{3^{3n-1}}\right] - \frac{3n+2}{3^{3(n+1)}}$$

$1 + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{3^{3n-1}}$: هو مجموع $(n-1)$ حد الأولى من متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{3^3}$،

يكون إذن: $$S_n - \frac{1}{3^3}S_n = 2 + \frac{1}{3^2}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{3^3}\right)^n}{1-\frac{1}{3^3}} - \frac{3n+2}{3^{3(n+1)}}$$

$$\frac{26}{27}S_n = 2 + \frac{3}{26}\left(1 - \frac{1}{3^{3n}}\right) - \frac{3n+2}{3^{3(n+1)}}$$

ومنه

$$S_n = 2\cdot\frac{27}{26} + \frac{3\times 27}{26^2}\left(1 - \frac{1}{3^{3n}}\right) - \frac{27}{26}\cdot\frac{3n+2}{3^{3(n+1)}}$$

$$= \frac{1486}{676} - \frac{1}{676}\cdot\frac{1}{3^{3(n-1)-1}} - \frac{1}{26}\cdot\frac{3n+2}{3^{3n}}$$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1486}{676} \cong 2{,}1967$$

تمرين 1–29

نعتبر $(n \in \mathbb{N}^*) \quad S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}$

بين أن $\left(S_{2p}\right)$ **و** $\left(S_{2p+1}\right)$ **هما متتاليتان متجاورتين.**

الحل

نضع $v_p = S_{2p}$ ، $v_p = \sum_{k=1}^{2p} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$

$$v_{p+1} - v_p = S_{2p+2} - S_{2p} = \frac{(-1)^{2p+1}}{2p+2} + \frac{(-1)^{2p}}{2p+1}$$
$$= \frac{1}{2p+1} - \frac{1}{2p+2} = \frac{1}{(2p+2)(2p+1)} > 0$$

والمتتالية $\left(v_p\right)$ متزايدة

لتكن $w_p = S_{2p+1} = \sum_{k=1}^{2p+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$

$$w_{p+1} - w_p = S_{2p+3} - S_{2p+1} = \frac{(-1)^{2p+2}}{2p+3} + \frac{(-1)^{2p+1}}{2p+2}$$
$$= \frac{1}{2p+3} - \frac{1}{2p+2} = \frac{-1}{(2p+2)(2p+3)} < 0$$

والمتتالية $\left(w_p\right)$ متناقصة

وأخيرا، $w_p - v_p = S_{2p+1} - S_{2p} = \frac{(-1)^{2p}}{2p+1} = \frac{1}{2p+1}$

إذن $\lim(w_p - v_p) = 0$ والمتتاليتان $\left(S_{2p}\right)$ و $\left(S_{2p+1}\right)$ متجاورتين. فهما تتقاربان نحو نفس النهاية. ومنه المتتالية $\left(S_n\right)$ متقاربة.

تمرين 1–30

ادرس المتتالية $\left(S_n\right)$ **المعرفة كما يلي:** $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$ **واستنتج أنها متقاربة عين نهايتها.**

الحل

$$\forall n \geq 3 \qquad S_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n}$$

S_n هي مجموع n حد، أكبر هذه الحدود هو $\frac{n}{n^2+1}$ وأصغرها هو $\frac{n}{n^2+n}$

إذن $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad n\,\frac{n}{n^2+n} \leq S_n \leq n\,\frac{n}{n^2+1}$

ولدينا $\lim \frac{n}{n^2+n} = \lim n \frac{n}{n^2+1} = 1$

المتتالية محصورة بين متتاليتين متقاربتين وتنتهيان نحو الواحد، إذن (S_n) متقاربة وتتقارب نحو الواحد.

تمرين 1-31

نعتبر المتتالية المعرفة بالشكل: $u_0 = 0$ و $u_{n+1} = \ln(2+u_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

1. **ادرس تغيرات الدالة** f **المعرفة بالشكل** $f(x) = \ln(2+x)$. **وبين** $f'(x) \leq \frac{1}{2} \quad \forall x \in [0,2]$
2. **برهن من أجل كل عدد طبيعي** n **أن المتتالية** u_n **معرفة تماما وتحقق** $0 \leq u_n \leq 2$.
3. **أدرس اتجاه المتتالية، واستنتج تقاربها.**
4. **لتكن** ℓ **نهايتها. أثبت أن** $|u_{n+1} - \ell| \leq \frac{1}{2}|u_n - \ell| \quad \forall n \in \mathbb{N}$
5. **استنتج بأن** $|u_n - \ell| \leq \frac{1}{2^{n-1}} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

الحل

1. الدالة f مركبة من الدالتين $x \mapsto 2+x$ و $\ln$. وكلاهما متزايدة. ومنه f متزايدة على $]-2,+\infty[$.

$f'(x) = \frac{1}{2+x} \quad \forall x \in]-2,+\infty[$. وبما أن $f'(x) = 2 \leq 2+x \leq 4 \quad \forall x \in [-2,+\infty]$.

إذن $\frac{1}{4} \leq f'(x) \leq \frac{1}{2} \quad \forall x \in [-2,+\infty]$. ومنه $|f'(x)| \leq \frac{1}{2} \quad \forall x \in [-2,+\infty]$

2. البرهان بالتراجع

من أجل $n=0$، $u_0 = 0$ موجود و $0 \leq u_0 \leq 2$. والخاصية متحققة

ليكن n عدد طبيعي بحيث u_n موجودة: $0 \leq u_n \leq 2$. إذن $2+u_n > 0$ ومنه تكون $u_{n+1} = \ln(2+u_n)$ معرفة. وزيادة f متزايدة على $]-2,+\infty[$، إذن $f(0) \leq f(u_n) \leq f(2)$، ونلاحظ بأن $0 \leq f(0)$ و $f(2) \leq 2$. ومنه يكون $0 \leq f(u_n) \leq 2$

خلاصة: كل حدود المتتالية معرفة تماما و $0 \leq u_n \leq 2$

3. نبرهن أيضا بالتراجع لإثبات $u_n \leq u_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

من أجل $n=0$، $u_0 = 0$ و $u_1 = \ln 2$. والخاصية $0 \leq \ln 2$ متحققة

ليكن n عدد طبيعي بحيث $u_n \leq u_{n+1}$. إذن بما أن f مستمرة $f(u_n) \leq f(u_{n+1})$، ومنه $u_{n+1} \leq u_{n+2}$

خلاصة: $u_n \leq u_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ والمتتالية (u_n) متزايدة. وكذلك المتتالية محدودة بـ 2، فهي متقاربة.

4. نهايتا ℓ تحقق $0 \leq \ell \leq 2$ و $f(\ell) \leq \ell$ لأن f مستمرة على $[0,2]$. و f تقبل الاشتقاق على $[0,2]$:

$f'(x) \leq \frac{1}{2}$ $\forall x \in [0,2]$ وحسب متراجحة التزايدات المنتهية، من أجل كل a و b من $[0,2]$:

$|f(b)-f(a)| \leq \frac{1}{2}|b-a|$. وكحالة خاصة ℓ ينتمي إلى $[0,2]$ و $u_n \in [0,2]$ $\forall n \in \mathbb{N}$

إذن $|f(u_n)-f(\ell)| \leq \frac{1}{2}|u_n-\ell|$ $\forall n \in \mathbb{N}$

أخيرا $|u_{n+1}-\ell| \leq \frac{1}{2}|u_n-\ell|$ $\forall n \in \mathbb{N}$

5. الخاصية تبرهن أيضا بالتراجع

من أجل $n=0$، $u_0=0$ و $0 \leq \ell \leq 2$. إذن $|u_0-\ell| \leq 2$ ومنه $|u_0-\ell| \leq \frac{1}{2^{0-1}}$ محققة

ليكن n عدد طبيعي بحيث $|u_n-\ell| \leq \frac{1}{2^{n-1}}$. إذن $|u_{n+1}-\ell| \leq \frac{1}{2}|u_n-\ell| \leq \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^{n-1}}$

ومنه $|u_{n+1}-\ell| \leq \frac{1}{2^{n-1+1}}$ وأخيرا $|u_n-\ell| \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

تمرين 1–32

أدرس المتتالية (u_n) المعرفة بعلاقة التدريج $u_{n+1}=u_n^2+0,25$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$ مع $u_0=0,4$

الحل

يتعلق الأمر بدراسة متتالية من النمط $u_{n+1}=f(u_n)$، $f(x)=x^2+0,5$

بما أن كل الحدود u_n موجبة يكفي دراسة تغيرات الدالة f على المجال $]0,+\infty[$.

$$\forall x \in [0,+\infty[, \quad f'(x)=2x$$

الدالة f متزايدة على المجال $]0,+\infty[$، وبالتالي، حسب النظرية، المتتالية (u_n) رتيبة.

لدينا $u_1=0,66$، وبالتالي $u_0<u_1$، والمتتالية (u_n) متزايدة.

وبما أنها محدودة من الأعلى بـ $0,5$ على سبيل المثال، فإنها متقاربة.

لتكن ℓ نهايتها، بما أن الدالة f مستمرة فإن ℓ تحقق المعادلة $f(\ell)=\ell$، التي تكافئ $\ell^2-\ell+0,25=0$.

ومنه $\ell=0,5$.

تمرين 1–33

نعرف المتتالية التدريجية (u_n)، حيث :

$$\begin{cases} u_0=\frac{1}{2} \\ u_{n+1}=u_n^2+\frac{3}{16} \quad ; \; n \geq 1 \end{cases}$$

1. **برهن أن :** $\forall n \in \mathbb{N}, \; \frac{1}{4} \leq u_n \leq \frac{3}{4}$

2. **بين أن (u_n) متناقصة تماما، واستنتج أنها متقاربة نحو عدد حقيقي ℓ يُطلب تعيينه.**

الحل

1. **نثبت بالتراجع** $\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{1}{4} \le u_n \le \frac{3}{4}$

بدء التدريج متحقق $\frac{1}{4} < u_0 < \frac{3}{4}$.

نفرض من أجل n من $\mathbb{N}$ أن : $\frac{1}{4} \le u_n \le \frac{3}{4}$ فيكون $\frac{1}{4^2} \le u_n^2 \le \frac{3^2}{4^2}$ ومنه

$\frac{1}{4^2}+\frac{3}{16} \le u_n^2+\frac{3}{16} \le \frac{3^2}{4^2}+\frac{3}{16}$ أي $\frac{1}{4} \le u_{n+1} \le \frac{3}{4}$ وهو المطلوب.

والمتتالية (u_n) محدودة (من الأعلى والأسفل).

2. **بين أن (u_n) متناقصة تماما**

$$u_{n+1}-u_n = u_n^2+\frac{3}{16}-u_n$$
$$=\frac{1}{16}\left(16u_n^2-\frac{1}{16}u_n+3\right)=\frac{1}{16}(4u_n-1)(4u_n-3)$$
$$\forall u_n \in \left]\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right[,\quad u_{n+1}-u_n<0$$

المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل ومتناقصة، فهي متقاربة. لتكن نهايتها هي ℓ.

هذه النهاية ℓ تحقق: $\ell=\ell^2+\frac{3}{16}$ التي تكافئ $0=(4\ell-3)(4\ell-1)\frac{1}{16}=\left(16\ell^2-\frac{1}{16}\ell+3\right)\frac{1}{16}$

ومنه $\lim_{n\to\infty} u_n = \ell = \frac{1}{4}$

تمرين 1–34

أدرس المتتالية التدريجية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$، بالشكل:

$$\begin{cases} u_0 > \frac{4}{3} \\ u_n = \sqrt{4+3u_{n-1}} \quad , n \ge 1 \end{cases}$$

الحل

- نلاحظ من أجل $n \ge 1$، يكون $0 < u_n$

من أجل $u_0 = 4$، يكون $u_1 = 4$. وإذا اقترضنا بأن $u_n = 4$ يكون $u_{n+1} = \sqrt{4+12} = 4$ والمتتالية مستقرة

ومن أجل $u_0 \ne 4$، والدالة f المعرفة من أجل $-\frac{4}{3} < x$ بالشكل $f(x) = \sqrt{4+3x}$. والدالة f تكون متزايدة ومنه المتتالية (u_n) تكون رتيبة.

من جهة أخرى لدينا $u_1-u_0=\sqrt{4+3u_0}-u_0=\frac{4+3u_n-u_0^2}{\sqrt{4+3u_0}+u_0}=\frac{(1+u_0)(4-u_0)}{\sqrt{4+3u_0}+u_0}$

- من أجل $u_0 < 4$، $u_1 > u_0$، تكون المتتالية (u_n) متزايدة. الشرط $u_0 < 4$ يستلزم $u_1 < 4$. وإذا اقترضنا $u_n < 4$ (يتم البرهان بالتراجع)
- نحصل على $u_{n+1} < \sqrt{4+12} = 4$. ومنه كذلك المتتالية (u_n) المتناقصة تكون محدودة من الأدنى. فهي إذن متقاربة
- ليكن ℓ هو نهاية المتتالية (u_n) بالمرور على النهاية في علاقة التدريج عندما يؤول $n \to +\infty$، نحصل على النهاية. $\ell = \sqrt{4+3\ell}$. نتيجة لذلك يكون ℓ هو الجذر الموجب للمعادلة $\ell^2 - 3\ell - 4 = 0$ ومنه $\ell = 4$.

تمرين 1-35

لتكن المتتالية التدريجية (u_n) **حيث** $u_0 \in]0, \pi[$ **و** $u_{n+1} = \sin u_n$ **من أجل** $0 \le n$

1) **ادرس تقارب المتتالية** (u_n).

2) **بين أن** $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ **تنتهي إلى** 1. **أحسب النهاية** $\dfrac{u_n + u_{n+1}}{u_n}$

3) **بين أن** $\dfrac{u_n - u_{n+1}}{u_n^3}$ **تنتهي إلى** $\dfrac{1}{6}$.

الحل

1) الدالة $x \mapsto \sin x$ مستمرة على $]0, \pi[$ وتأخذ قيمها في $]0, +1]$. ومنه $u_n \in]0, +1]$ مهما كان $1 \le n$. ومن جهة أخرى الدالة sin متزايدة على المجال $]0, +1] \subset]0, +\pi/2[$، مما يعني أن المتتالية $(u_n)_{n\ge 1}$ رتيبة، وبما أن $\sin x \le x$ فإن هذه المتتالية تكون متناقصة.

وبما أنها محدودة من الادنى بالصفر، فهي متقاربة نحو الحل الوحيد للمعادلة $\sin x = x$ على $[0, \pi]$ ومنه المتتالية (u_n) متقاربة نحو الصفر.

2) حينما يكون $u_n \to 0$ نحصل على التكافؤ $\sin u_n \sim u_n$، ومنه $u_{n+1}/u_n \sim 1$ وأيضا $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$.

وبالتالي يكون $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n + u_{n+1}}{u_n} = 2$.

3) بما أن $u_n \to 0$، يجوز حساب النشر المحدود لـ $\sin u_n$ عندما ينتهي n إلى $+\infty$:

لدينا $u_{n+1} = \sin u_n = u_n - \dfrac{u_n^3}{6} + o(u_n^3)$ ومنه $\dfrac{u_n - u_{n+1}}{u_n^3} = \dfrac{1}{6} + o(1)$ واخيرا $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n - u_{n+1}}{u_n^3} = \dfrac{1}{6}$

تمرين 1–36

نعتبر المتتالية ذات الحد العام $u_n = n-(\ln n)^2$

1. **لتكن** f **دالة عددية معرفة على** $]0,+\infty[$ **بالشكل** $f(x)=x-(\ln x)^2$.
بين أن إشارة مشتقتها من إشارة $g(x)=x-2\ln x$
2. **أدرس تغيرات الدالة** g **واستنتج إشارتها.**
3. **أدرس تغيرات** f **ثم اتجاه تغيرات المتتالية** (u_n).
4. **أدرس سلوك** f **في الما لانهاية.**

الحل

1. الدالتان f و g قابلتان للاشتقاق على $]0,+\infty[$.
$f'(x)=1-2\dfrac{1}{x}\ln x=\dfrac{1}{x}(x-2\ln x)$ $\forall x\in]0,+\infty[$. وبما أن x يبقى موجب على $]0,+\infty[$،
فإن إشارة $f(x)$ من نفس إشارة $g(x)$ من أجل كل x ينتمي إلى $]0,+\infty[$.
2. $g'(x)=1-\dfrac{2}{x}=\dfrac{x-2}{x}$ $\forall x\in]0,+\infty[$. على $]0,+\infty[$، وإشارة $g(x)$ من إشارة $(x-2)$
إذن $g'(x)<0$ على $]0,2[$ و $g'(x)>0$ على $]2,+\infty[$.
ومنه g متناقصة على $]0,2[$ و g متزايدة على $]2,+\infty[$. إذن g تقبل نهاية حدية عند 2
$g(2)=2(1-\ln 2)\approx 0.61$ ومنه $g(x)>0$ $\forall x\in]0,+\infty[$
3. إذن $f'(x)>0$ $\forall x\in]0,+\infty[$ ومنه f متزايدة تماما على $]0,+\infty[$ ومنه يكون
$\forall n\in\mathbb{N}\quad f(n+1)-f(n)\geq 0$ إذن $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_{n+1}-u_n\geq 0$
$\forall n\in\mathbb{N}\quad u_{n+1}-u_n=f(n+1)-f(n)$ والمتتالية متزايدة.
4. توجد حالة عدم تعيين في $+\infty$. لنحلل عبارة u_n بـ n
$u_n=n\left(1-\dfrac{(\ln n)^2}{n}\right)=n\left(1-\left(\dfrac{\ln n}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$. وبما أن $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\ln n}{\sqrt{n}}=0$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$
والمتتالية متباعدة نحو $+\infty$.

تمرين 1–37

لكن n **عدد طبيعي أكبر من أو يساوي** 4. **أحسب المجاميع الآتية:**

$$\sum_{k=0}^{n}k(k+1)\ ،\ \sum_{k=2}^{n-1}(k+3)\ ،\ \sum_{k=2}^{n}2^{k-1}$$

الحل

لدينا $\sum_{k=2}^{n} 2^{k-1} = \sum_{j=1}^{n-1} 2^{j} = \sum_{j=0}^{n-1} 2^{j} - 2^{0} = \frac{1-2^{n}}{1-2} - 1$ ، مع $j = k-1$ إذن $\sum_{k=2}^{n} 2^{k-1} = 2^{n} - 2$

لدينا $\sum_{k=2}^{n-1}(k+3) = \sum_{j=0}^{n-3}(j+5) = \sum_{j=0}^{n-3} j = \sum_{j=0}^{n-3} 5 = \frac{(n-3)(n-2)}{2} + 5(n-2)$ ، مع $j = k-2$

إذن $\sum_{k=2}^{n-1}(k+3) = \frac{(n-2)(n+7)}{2}$

لدينا $\sum_{k=0}^{n} k(k+1) = \sum_{k=0}^{n} k^{2} + \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+4)}{6}$

إذن $\sum_{k=0}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(2n+4)}{6}$.

تمرين 1–38

نعتبر السلسلة ذات الحد العام $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$.

1. **عين العددين الحقيقيين** a **و** b **: من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم** n : $u_n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1}$
2. **استنتج حساب** $\sum_{k=1}^{n} u_k$ **بدلالة** n ، **ثم تقارب السلسلة ومجموعها.**

الحل

1. لدينا $\frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} = \frac{(a+b)n + a}{n(n+1)}$ ، إذن حتى يكون من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n :
$u_n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1}$ يكفي أن يكون $\begin{cases} a+b=0 \\ a=1 \end{cases}$ ، أي يكفي أن يكون $a=1$ و $b=-1$
2. $u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$ إذن $\sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1}$. وبما أن
$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} = \sum_{j=2}^{n+1} \frac{1}{j} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} + \frac{1}{n+1} - 1$. ومنه $\sum_{k=1}^{n} u_k = 1 - \frac{1}{n+1}$ ، $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$

إذن المتتالية ذات الحد العام u_n و $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = 1$.

تمرين 1–39

في كل حالة من الحالات الآتية، أدرس التقارب للسلسلة ذات الحد العام u_n $(n \in \mathbb{N})$. وإذا كانت متقاربة أحسب مجموعها.

$$u_n = \frac{n(n-1)}{3^n} \text{ ، } u_n = \frac{2^{n+1}}{3^{n-1}} \text{ ، } u_n = 2^{n+2}$$

الحل

- لدينا $u_n = 4 \cdot 2^n$، السلسلة الهندسية ذات الحد العام 2^n متباعدة لأن $1 < 2$

إذن السلسلة الهندسية ذات الحد العام $u_n = 4 \cdot 2^n$ متباعدة

- لدينا $u_n = 6 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n$، السلسلة الهندسية ذات الحد العام $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ متقاربة لأن $-1 < \frac{2}{3} < 1$ و $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 3$

إذن السلسلة الهندسية ذات الحد العام $u_n = \frac{2^{n+1}}{3^{n-1}}$ تتقارب، و $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{n+1}}{3^{n-1}} = 18$

- لدينا $u_n = \frac{1}{9} \cdot n(n-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}$، السلسلة الهندسية ذات الحد العام $n(n-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}$ هي السلسلة المشتقة الثانية للسلسلة الهندسية وهي متقاربة لأن $-1 < \frac{1}{3} < 1$ و $\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} = \frac{27}{4}$

إذن السلسلة الهندسية ذات الحد العام $u_n = \frac{n(n-1)}{3^n}$ متقاربة، و $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{3^n} = \frac{3}{4}$.

تمرين 1–40

لتكن (x_n) متتالية أعداد حقيقية والمتتالية (y_n) المعرفة بالشكل : $y_n = x_{n+1} - x_n$

بين أن السلسلة $\sum_n y_n$ والمتتالية (x_n) من نفس الطبيعة.

نعرف المتتالية (u_n) بالشكل $u_n = \frac{n^n e^{-n} \sqrt{n}}{n!}$. ما هي طبيعة السلسلة ذات الحد العام $v_n = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ ؟

الحل

لدينا المجموع الجزئي $\sum_n^N y_n = (x_N - x_{N-1}) + (x_{N-1} - x_{N-2}) + \cdots + (x_2 - x_1) = (x_N - x_1)$

وبالتالي تكون متتالية المجموع الجزئي $\left(\sum_n^N y_n\right)$ متقاربة إذا وفقط كانت المتتالية (x_N) متقاربة.

لدينا
$$v_n=\ln\left(\frac{n!(n+1)^{n+1}e^{-n-1}\sqrt{n+1}}{(n+1)!n^n e^{-n}\sqrt{n}}\right)=\ln\left(\frac{(n+1)^n\sqrt{n+1}}{(n^n e\sqrt{n})}\right)$$
$$=\ln\left((n+1)^n\sqrt{n+1}\right)-\ln\left((n^n e\sqrt{n}\right)=\ln\left((n+1)^n\right)+\ln\left(\sqrt{n+1}\right)-\ln\left(n^n\right)-\ln\left((\sqrt{n}\right)-1$$
$$v_n=n\ln(n+1)-n\ln n+\frac{1}{2}\ln(n+1)-\frac{1}{2}\ln n-1=n\ln(\frac{n+1}{n})+\frac{1}{2}\ln(\frac{n+1}{n})=(n+\frac{1}{2})\ln(1+\frac{1}{n})-1$$

ولدينا النشر المحدود للدالة اللوغاريتمية حتى المرتبة الثالثة: $\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+o\left(x^3\right)$

ومنه
$$v_n=(n+\frac{1}{2})\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-1=(n+\frac{1}{2})\left[\frac{1}{n}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{n}\right)^3\right]-1+o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

وأخيرا نجد $v_n=\dfrac{1}{12n^2}+o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. ومنه السلسلة ذات الحد العام v_n متقاربة.

تمارين إضافية

تمرين 1 أثبت أن المتتالية (u_n) المعرفة بحدها العام على $\mathbb{N}^*$ بـ : $u_n=\dfrac{n^2+n+9}{n}$ محدودة من الأسفل.

تمرين 2 أثبت أن المتتالية (u_n) المعرفة بحدها العام على $\mathbb{N}$ بـ : $u_n=\dfrac{2n^2+1}{n^2+4}$ محدودة من الأعلى بالعدد 2.

تمرين 3 لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها العام $u_n=\dfrac{1}{(2n+1).(2n+3)}$

بين أن (u_n) متناقصة وتنتهي إلى الصفر.

عين العددين a و b بحيث $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n=\dfrac{a}{2n+1}+\dfrac{b}{2n+3}$

جد المجموع $S_n=u_0+u_1+...+u_n$ بدلالة n واستنتج نهاية S_n.

تمرين 4 بين أن كل من المتتاليات المعرفة من أجل $1\le n$ ، تقبل كلها نهايات يُطلب حسابها:

$u_n=\dfrac{n+1}{n}$ ، $u_n=\dfrac{n}{n+1}$ ، $u_n=\dfrac{1}{n^2+1}$ ، $u_n=\dfrac{n}{n^2+1}$

تمرين 5 أحسب، عندما تتقارب، نهاية المتتالية u_n في الحالات الآتية:

$n-\sqrt{n^2-n}$ ، $n+\sqrt[3]{1-n^3}$ ، 2^n-n^2 ، $2^n-3^{n+1}+n^{10}$ ، $(-2)^n+\dfrac{1}{3^n}$

تمرين 6 أدرس المتتالية الآتية $u_{n+1}=\sqrt{1+u_n}$ مع $u_0=\sqrt{3}$.

تمرين 7 أدرس المتتالية الآتية $u_n = \ln(1+u_{n-1})$ مع $u_0 \geq 0$. أحسب نهاية u_n.

تمرين 8 بين أن كل من المتتاليات المعرفة من أجل $1 \leq n$ ، تقبل كلها نهايات يُطلب حسابها:

$$u_n = \frac{n}{n^2+1} \quad ، \quad u_n = \frac{1}{n^2+1} \quad ، \quad u_n = \frac{n}{n+1} \quad ، \quad u_n = \frac{n+1}{n}$$

تمرين 9 نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بالتدريج كما يلي:

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + 4, \quad n \geq 1 \end{cases}$$

أ) أثبت أن المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى بـ5. بين أن (u_n) متزايدة تماما، ماذا تستنتج؟

ب) نضع من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $v_n = u_n - 5$

أثبت أن (v_n) متتالية هندسية. أكتب u_n بدلالة n، ثم احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n$.

تمرين 10 نعتبر المتتالية (u_n) حيث $u_n = \frac{2^n - 6}{3}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

أحسب u_0, u_1, u_2, u_3 وادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n). ثم أحسب نهايتها.

تمرين 11 نعرف المتتالية التدريجية (u_n)، حيث: $u_0 = \frac{3}{2}$ و $u_n = \frac{2}{3-u_{n-1}}$ $(1 \leq n)$

3. ما هي النهايات الممكنة لـ(u_n) ؟
4. أثبت بالتراجع أنه من أجل كل $n \ni \mathbb{N}$ ، يكون لدينا $1 \leq u_n \leq 2$.
5. بين أن (u_n) متناقصة، واستنتج أنها متقاربة .

تمرين 12 أ) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[0, +\infty[$ بالشكل: $f(x) = 3 + \frac{1}{2}x$

1. حل في $\mathbb{R}_+$، المعادلة $f(x) = x$.
2. برهن بأنه إذا كان $x \ni [0\ ;\ 6]$ فإن $f(x) \ni [0\ ;\ 6]$.

ب) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$، بالشكل:

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 3 + \frac{1}{2}u_n \quad , n \geq 0 \end{cases}$$

1. أحسب u_1 و u_2 و u_3 و u_4. ما هي النهايات الممكنة لـ(u_n) ؟
2. مثل بيانيا المنحيَيْن اللذيْن معادلتيهما في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ هما $y = f(x)$ و $y = x$. ثم استخدمهما لإنشاء النقط A_0 و A_1 و A_2 و A_3 و A_4 من منحنى $y = f(x)$ ذات الفواصل u_0 و u_1 و u_2 و u_3 و u_4 على الترتيب. (الوحدة 2 سم).

3. أثبت باستخدام البرهان بالتراجع أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ يكون: $0 \le u_n \le u_{n+1} \le 6$.
ماذا تستنتج ؟

تمرين 13 أ) نعرف المتتالية التدريجية (u_n)، حيث:

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{4+7u_n}{3+3u_n} \quad ; n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. أحسب الحدين u_1 و u_2. ما هي النهايات الممكنة لـ (u_n) ؟
2. أثبت بالتراجع أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ، يكون لدينا $0 \le u_n < 2$.
3. بين أن المتتالية (u_n) رتيبة مهما كان $n \in \mathbb{N}$.
4. أستنتج أن (u_n) متقاربة، ثم أحسب نهايتها. عين إن أمكن $\mathrm{Sup}(u_n)$ و $\mathrm{Inf}(u_n)$

تمرين 14 ما طبيعة كل من السلاسل الآتية المعرفة بحدودها العامة ؟

$$\frac{1}{9n+6},\quad \frac{1}{9n+6},\quad \frac{3n}{n\cdot(2n-1)\cdot(n+1)},\quad \frac{1}{\sqrt{n}},\quad \frac{n}{(2n+1)!},\quad n^n\cdot e^{-n}$$

تمرين 15 أدرس السلاسل الآتية:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4n^2-n+3}{n^2+2n} \text{ ،} \sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{n}{\sqrt{n^5+1}} \text{ ،} \sum_{n\in\mathbb{N}}\left(\sqrt{(n+1)^5}-\sqrt{n^3}\right) \text{ ،} \sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{(n!)^2}{(2n!)}$$

$$\text{،} \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n+1} \text{ ،} \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{3n+1}{3n+3}\right)^2 \text{ ،} \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)} \text{ ،} \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2^n} \text{ ،} \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n+\sqrt{n}}{n^3+1}$$

$$\text{،} \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{-1}{\ln n}\right)^n \text{ ،} \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n \text{ ،} \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n}{n^{10}} \text{ ،} \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1+n}{3n+2} \text{ ،} \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{3n-1} \text{ ،} \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\left(\sqrt{5}-1\right)^n}{n^2+1}$$

الفصل الثاني

الدوال العددية

- عموميات حول الدوال العددية.
- الدوال القابلة للاشتقاق
- تطبيقات المشتقات
- الدالة العكسية
- الدوال اللوغاريتمية والأسية
- تمارين محلولة

ملخص الدرس

1. عموميات حول الدوال العددية

1.1 تمهيد ومراجعة

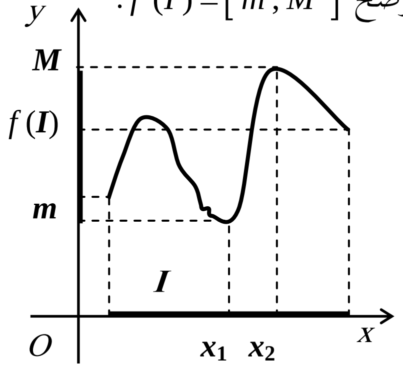
- الدالة العددية (الحقيقية) لمتغير حقيقي: هي الدالة التي مجموعة بدئها $\mathbb{R}$، ومجموعة وصولها هي $\mathbb{R}$.
  ونكتب $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ حيث $x \mapsto f(x)$
- **مجموعة التعريف دالة:** هي مجموعة القيم x التي تجعل $f(x)$ معرفة.
- **الدالة الزوجية** تحقق: $\forall x \in D_f \quad -x \in D_f \wedge f(-x) = f(x)$
- **الدالة الفردية** تحقق: $\forall x \in D_f \quad -x \in D_f \wedge f(-x) = -f(x)$
- تكون الدالة f **دورية** إذا وجد عدد حقيقي غير معدوم T : $\forall x \in D_f \quad f\left(x+T\right) = f\left(x\right)$
- **بيان** الدالة f $\left(\supset \mathbb{R}\times\mathbb{R}\right)$ هو منحنى المعادلة $f(x) = 0$ في معلم كيفي للمستوى.
- **المجالات المفتوحة** في $\mathbb{R}$ تكون من الشكل: $\left]a,b\right[, \left]-\infty,b\right[, \left]a,+\infty\right[, \{\ \}$
  حيث a و b من $\mathbb{R}$ مع $a<b$.
- **الدالة** المتزايدة: $\forall a,b \quad b \neq a \quad \Rightarrow \quad \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \geq 0$
- **الدالة المتزايدة تماما:** $\forall a,b \quad b \neq a \quad \Rightarrow \quad \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} > 0$

تعريف مشابه للدالة المتناقصة.

- **الدالة الرتيبة** هي الدالة التي تكون إما متزايدة وإما متناقصة.
- **دالة رتيبة على مجال** هي الدالة التي يكون اقتصارها على هذا المجال رتيبة.

2.1 صورة مجال مغلق بدالة مستمرة

كل دالة f مستمرة على مجال مغلق I، تكون محدودة من الأعلى بحدها الأعلى $M = \mathrm{Sup}\, f$ ومحدودة من الأدنى بحدها الأدنى $m = \mathrm{Inf}\, f$ (الشكل **1.2**) يوضح $f(I) = \left[m, M\right]$.



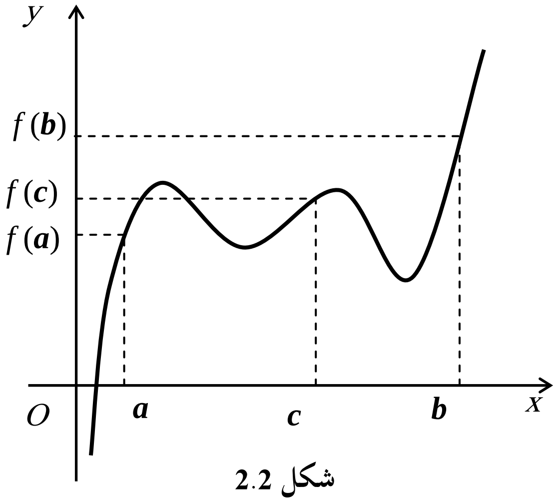
شكل 1.2

3.1 نظرية القيم المتوسطة

f دالة معرفة ومستمرة على $[a,b]$

من أجل كل قيمة y محصورة بين $f(a)$ و $f(b)$، توجد قيمة c محصورة بين a و b بحيث $y=f(c)$

(الشكل **2.2**) يوضح $f(c)$ بين $f(a)$ و $f(b)$.



شكل 2.2

نتيجة

إذا كانت f معرفة ومستمرة على مجال مغلق ومحدود $[a,b]$، بحيث يكون $f(a)$ و $f(b)$ من إشارتين مختلفتين، فإن f تنعدم على الأقل عند قيمة c من $]a,b[$.

2. النهاية

1.2 مفهوم النهاية

ليكن x_0 من $]a,b[$ و f دالة عددية معرفة على $]a,b[$، لا تشترط أن تكون f معرفة عند x_0. تعني العبارة "**عندما يؤول** x **إلى** x_0، **تؤول** $f(x)$ **إلى** ℓ " أنه بإعطاء $\varepsilon>0$، يمكن إيجاد $\eta>0$ يرتبط بـ ε، بحيث $|x-x_0|<\eta$، الذي يضمن $|f(x)-\ell|<\varepsilon$.

ونكتب $\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell$ ، مع x قد يختلف عن x_0.

مثلا: الدالة f التي تساوي $-x$ من أجل $x<0$ و 1 من أجل $x>0$ غير معرفة من أجل $x=0$، ولا تقبل نهاية عند $x=0$، $\lim_{x\to 0^+} f(x)\neq \lim_{x\to 0^-} f(x)$.

2.2 تعريف

ليكن $c\in D_f$ مجموعة تعريف دالة. نقول أن f تقبل عن يمين c النهاية ℓ، ونكتب : $\lim_{x\to c^+} f(x)=\ell$ إذاا

$$\forall\varepsilon>0,\exists\eta>0, x\in D_f\cap]c,c+\eta[\Rightarrow |f(x)-\ell|<\varepsilon$$

ولدينا أيضا :

$$\lim_{x\to c^+} f(x)=+\infty \Leftrightarrow \forall M>\mathbb{R},\exists\eta>0, x\in D_f\cap]-\infty,c[\wedge]-\infty,c[<\eta \Rightarrow f(x)>M$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\ell \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists\rho>0, x\in D_f \wedge x>\rho \Rightarrow |f(x)-\ell|<\varepsilon$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \text{ ssi } \forall M>\mathbb{R},\exists P>0, x\in D_f \wedge x>\rho \Rightarrow f(x)>M$$

وإذا قبلت الدالتان f و g نهايتين عند c فإن الدوال الآتية: $f+g$, $g\times f$, $\frac{f}{g}$ $(g\neq 0)$ ستقبل أيضا نهايات مأخوذة عند c.

إضافة إلى ذلك، إذا قبلت دالة h نهاية عند $f(c)$ ، فإن $h\circ f$ ستقبل نهاية عند c.

3.2 نتائج

- ليكن $c\in D_f$. f دالة تقبل النهاية ℓ عند c . إذا قبلت الدالة g النهاية ℓ' عند c ، فإنه يكون :

  إذا كان $f=g$ على مجال مفتوح I من $D_f\cap D_g$، فإن $\ell=\ell'$

  إذا كان $f\geq g$ على مجال مفتوح I من $D_f\cap D_g$، فإن $\ell\geq\ell'$
- بفرض أن الدالة f تقبل النهاية ℓ عند c ، والدالة g تقبل نفس النهاية ℓ عند c . فإنه إذا ما تحققت المتراجحة المزدوجة $g\leq h\leq f$ على مجال مفتوح يشمل c ، فستقبل الدالة h النهاية ℓ عند c .
- بفرض أن $I=]a,+\infty[\subset D_f\cap D_g$.

  إذا كانت $f\leq g$ على I و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ، فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$.
- ليكن $c\in\mathbb{R}$، الدالة $f(x)$ تقبل النهاية ℓ عند c إذا وإذا فقط من أجل كل متتالية $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من عناصر D_f متقاربة نحو c، تكون المتتالية $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة نحو ℓ.

3. الاستمرار

1.3 مفهوم الاستمرار

إذا افترضنا أن الدالة $f(x)$ المعرفة على المجال $]a,b[$ تقبل، عندما $x\to x_0$، النهاية ℓ (التي قد تختلف عن $f(x_0)$. في حالة العكس $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ نقول أن f مستمرة عند x_0.

تكون الدالة f مستمرة عند x_0 إذا تحقق: $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$ $\quad x_0\in D_f$

مثلا ندرس استمرارية الدالة:

$$f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & , x\neq 0\\ 0 & , x=0\end{cases}$$

f معرفة على $D_f=\mathbb{R}$. على $\mathbb{R}^*$ الدالة f مستمرة.

الاستمرار عن 0: $f(0)=0$ و $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$. ومنه f مستمرة عند 0.

- إذا كانت دالة $f(x)$ مستمرة عند كل نقطة من مجال I من $\mathbb{R}$، نقول أن f مستمرة على المجال I .

2.3 الاستمرار والمتتالية

ليكن c من $\mathbb{R}$، الدالة $f(x)$ مستمرة عند c إذا وإذا فقط من أجل كل متتالية $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من عناصر D_f متقاربة نحو c، تكون المتتالية $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة نحو $f(c)$.

3.3 التمديد بالاستمرار

إذا كانت الدالة f غير معرفة عند x_0 مع $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ ، فإنه يمكن تمديد f بالاستمرار كما يلي :

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & , \ x\neq x_0 \\ \lim\limits_{x\to x_0} f(x) & , \ x=x_0 \end{cases}$$

4.3 قضية

ليكن $0<k$، إذا حققت دالة f على مجال I من D_f : $\forall x,y\in I\ ,\ \ |f(x)-f(y)|\leq k|x-y|$ فإنها تكون مستمرة على I .

4. الاشتقاق

1.4 نظرية وتعريف

نفرض أن $f(x)$ مستمرة عند x_0. إذا افترضنا أن الدالة $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ غير المعرفة عند $x=x_0$ تقبل نهاية عندما يؤول x إلى x_0، نقول أن الدالة $f(x)$ تقبل الاشتقاق عند النقطة x_0.

تسمى هذه النهاية **العدد المشتق عند** x_0.

$$f \text{ تقبل الاشتقاق عن } x_0 \iff \text{ وجدت النهاية } \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

أي إذا وفقط إذا وجد العدد المشتق $f'(x_0)$.

الشرطان الآتيان متكافئين :

- الدالة f تقبل الاشتقاق عند a .
- بوجد $A\in\mathbb{R}$ وتوجد دالة ε معرفة على $I-\{a\}$ بحيث يكون من أجل كل $h\in\mathbb{R}$ يحقق :

$$\begin{cases} f(a+h)=f(a)+hA+h\,\varepsilon(h) \\ \lim\limits_{h\to 0}\varepsilon(h)=0 \end{cases}$$

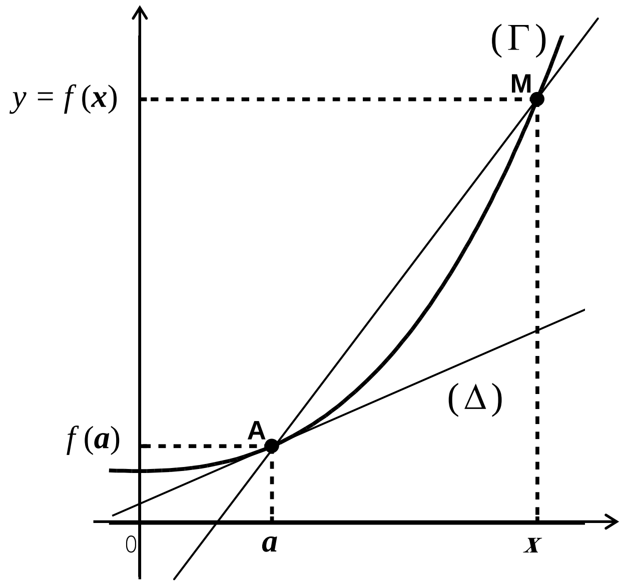
يكون لدينا إذن $\alpha=f'(a)$

2.4 التفسير الهندسي

ليكن (Γ) المنحنى الممثل للدالة $f(x)$ في معلم كيفي. $A\left(a;f(a)\right)$ و $M\left(x;f(x)\right)$ من (Γ).

إذا كان $x \neq a$ فإن $A \neq M$، ويكون معامل توجيه المستقيم AM هو $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

(الشكل **3.2**).



شكل 3.2

إذا كانت الدالة f تقبل للاشتقاق عند النقطة a فإن AM ينتهي إلى المماس (Δ) لـ(Γ) عند a الذي معادلته : $y-f(a)=(x-a)f'(a)$ وغير الموازي لمحور التراتيب (الشكل **3.2**).

3.4 الاشتقاق عن اليمين

f دالة معرفة على D. $x_0 \in D$.

f تقبل الاشتقاق عن يمين x_0 $\Leftrightarrow$ وجدت النهاية $\lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

أي إذا وجد **العدد المشتق عن اليمين** $f'\left(x_0^+\right)=f'\left(x_0+0\right)$

منحنى f يقبل نصف مماس غير عمودي عند $M\left(x_0, f(x_0)\right)$

في هذه الحالة، معادلة المماس عتد x_0 تُعطى بالعلاقة : $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$

نقول إن f تقبل للاشتقاق عن يمين x_0 إذا كانت النهاية الآتية موجودة (العدد المشتق عن يمين x_0):

$$f_d'(x_0)=\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

نقول إن f تقبل للاشتقاق عن يمين x_0 إذا كانت النهاية الآتية موجودة (العدد المشتق عن يسار x_0):

$$f'_g(x_0)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

4.4 استمرار دالة مشتقة

إذا كانت الدالة f تقبل للاشتقاق عند النقطة a، فإنها مستمرة عند a.

لدينا $$f(x)-f(a)=\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)\cdot(x-a)$$

بأخذ نهاية الطرفين عندما يؤول x إلى a :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}f(x)-f(a)&=\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)\cdot(x-a)\\&=\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)\cdot\lim_{x\to a}(x-a)=f'(a)\cdot 0=0\end{aligned}$$

وبالتالي $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$، مما يعني أن f مستمرة عند a.

ملاحظة عكس هذه النظرية غير صحيح.

5. الدوال القابلة للاشتقاق

إذا كانت دالة f قابلة للاشتقاق على مجال من الشكل $]a-\alpha\,;a+\alpha[$ فإن الشرطان الآتيان متكافئين :

- f تقبل الاشتقاق عند a .
- f تقبل الاشتقاق عن يمين النقطة a وعن يسار النقطة a و $f'(a)=f'_d(a)=f'_g(a)$

1.5 تعريف الدالة المشتقة

f دالة عددية لمتغير حقيقي x من $D\subset\mathbb{R}$.

f تقبل الاشتقاق على D $\Leftrightarrow$ f تقبل الاشتقاق عند أية قيمة x_0 من D

2.5 عمليات على الدوال القابلة للاشتقاق

إذا كانت f و g دالتين تقبلان الاشتقاق على مجال I، فإن

- $f+g$ تقبل الاشتقاق على مجال I، ولدينا : $\forall x\in I\quad (f+g)'(x)=f'(x)+g'(x)$
- $f\cdot g$ تقبل الاشتقاق على مجال I، ولدينا : $\forall x\in I\quad (f\cdot g)'(x)=f'(x)\cdot g(x)+f(x).g'(x)$
- من أجل كل λ من $\mathbb{R}$، λf تقبل الاشتقاق على مجال I، ولدينا : $\forall x\in I\quad (\lambda f)'(x)=\lambda f'(x)$

- إذا كان $g(x)$ لا ينعدم على I فإن $\frac{f}{g}$ تقبل الاشتقاق على مجال I، ولدينا :

$$\forall x \in I \quad \left(\frac{f}{g}\right)'(x)=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

مثلا الدالة $f(x)=\frac{\ln x}{1+x-\ln x}$ تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$: $f'(x)=\frac{-1-x+x\ln x}{x(1+x-\ln x)^2}$

3.5 الاشتقاق والرتابة

- f دالة تقبل الاشتقاق على المجال I.

إذا كان من أجل كل x من I $0\le f'(x)$، فإن f تكون متزايدة على I.

إذا كان من أجل كل x من I $0<f'(x)$، فإن f تكون متزايدة تماما على I.

إذا كان من أجل كل x من I $0=f'(x)$، فإن f تكون ثابتة على I.

- إذا كانت الدالة f تقبل الاشتقاق عند x_0، وتبلغ أحد حديها عند x_0 فإن $f'(x_0)=0$.

إذا افترضنا أن $f(x_0)=\inf\limits_{x\in I} f(x)$ فسيكون لدينا $\forall x\in I \quad f(x)-f(x_0)\ge 0$

وبما أن f تقبل الاشتقاق عند x_0، وبفرض $x-x_0<0$ فإن $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le 0$.

أما إذا كان $x-x_0>0$ فإن $f'(x_0)\ge 0$ وينتج في الأخير $f'(x_0)=0$.

- إذا كان $f'(x_0)=0$ و f' تغير إشارتها على جانبي x_0، فإن f تقبل قيمة حدية عند النقطة x_0.
- إذا كان $f''(x_0)=0$ و f'' تغير إشارتها على جانبي x_0، فإن f يقبل نقطة انعطاف عند النقطة x_0.

4.5 مشتق تركيب دالتين

إذا كانت f و g دالتين عدديتين معرفتين على المجالين المفتوحين I و J من $\mathbb{R}$: $f: I\to\mathbb{R}$

و $g: J\to\mathbb{R}$، بحيث:

$f(I)\subset J$

$a\in I$ و f تقبل الاشتقاق عند a .

g تقبل الاشتقاق عند $b=f(a)$.

فإن الدالة $g\circ f$ تقبل الاشتقاق عند a و $(g\circ f)'(a)=g'(f(a))\times f'(a)$

نتيجة

إذا كانت f تقبل الاشتقاق عند كل نقط المجال I و g تقبل الاشتقاق عند كل نقط المجال $f(I)$ فإن $g\circ f$ تقبل الاشتقاق عند كل نقط المجال I . ولدينا: $\forall x\in I \quad (g\circ f)'(x)=g'(f(x))\times f'(x)$

أمثلة

- **نحسب مشتق الدالة** $\sin x=\cos(x-\frac{\pi}{2})$. بوضع $g(x)=\cos x$ و $f(x)=x-\frac{\pi}{2}$

يكون لدينا : $(g\circ f)(x)=\cos(x-\frac{\pi}{2})=\sin x$

ومنه $(g\circ f)'(x)=g'(f(x))\cdot f'(x)=-\sin(x-\frac{\pi}{2})\times 1=-\sin(x-\frac{\pi}{2})=\cos x$

ومنه العلاقة $\forall x\in\mathbb{R}\quad (\sin x)'=\cos x$

- **مشتق دالة وحيد الحد** $f(x)=x^n$ هو $f'(x)=n\,x^{n-1}$ وهذا من أجل كل عدد صحيح n.

- **مشتق الدالة** $f(x)=|x|$ من أجل $x\neq 0$: $f'(x)=\begin{cases}1 & : x>0\\ -1 & : x<0\end{cases}$

عند النقطة $a=0$ الدالة لا تقبل الاشتقاق لأن $f'_d(0)\neq f'_g(0)$.

- **مشتق الدالة** $f(x)=\cos x$. لدينا :

$$\lim_{x\to a}\frac{\cos x-\cos a}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{-2\sin\left(\frac{x+a}{2}\right).\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}{x-a}$$

$$=-\lim_{x\to a}\sin\left(\frac{x+a}{2}\right)\lim_{x\to a}\frac{\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}{\frac{x-a}{2}}=-\sin a\times 1=-\sin a$$

ومنه العلاقة $\forall x\in\mathbb{R}\quad (\cos x)'=-\sin x$.

- **مشتق الدالة** $f(x)=e^x$. لدينا :

$$\lim_{x\to a}\frac{e^x-e^a}{x-a}=e^a\cdot\lim_{x\to a}\frac{e^{x-a}-1}{x-a}=e^a.\lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t}=e^a\cdot 1=e^a$$

. ومنه $\forall x\in\mathbb{R}\quad (e^x)'=e^x$

6. الدالة العكسية

1.6 شرط وجود الدالة العكسية

إذا كانت الدالة العددية f رتيبة تماما على المجال I ومستمرة على I فإن:

- $f(I)$ هو مجال.
- واقتصار f على I تقابل.

الدالة f، تقبل دالة عكسية f^{-1}، وهي أيضا رتيبة (بنفس تغير f على I) ، ومستمرة على I .

2.6 ملاحظة

- إذا أعطيت f بتمثيلها البياني في معلم متجانس، فإنه تمثيل f^{-1} (في نفس المعلم) يكون بالتناظر الذي محوره المستقيم $y=x$.
- وإذا قبلت f الاشتقاق على I ، وكانت هذه المشتقة غير معدومة، فإن f^{-1} تقبل أيضا الاشتقاق على $f(I)$، ولدينا:

$$\forall x \in I\ ,\quad f \circ f^{-1}(x)=x$$

$$\forall x \in I\ ,\quad f'\left(f^{-1}(x)\right)\cdot\left(f^{-1}\right)'(x)=1$$

ومنه
$$\left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}\qquad f'\neq 0$$

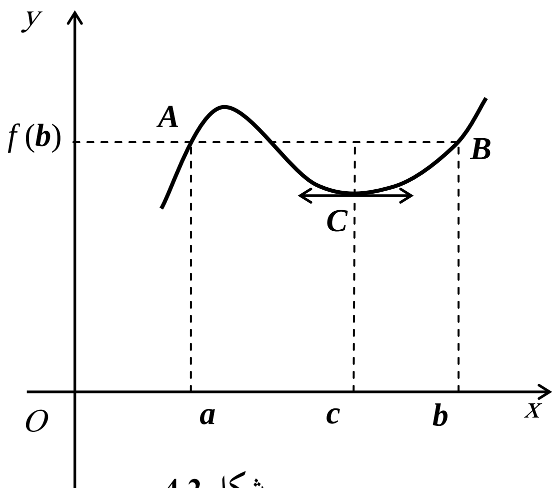
7. تطبيقات المشتقات

1.7 نظرية رول

إذا كانت الدالة f
$$\begin{cases} \text{مستمرة على } [a,b] \text{ ،} \\ \text{قابلة للاشتقاق على }]a,b[\text{ ،} \\ \text{بحيث } f(a)=f(b) \text{ .} \end{cases}$$

فإنه توجد على الأقل قيمة c من $]a,b[$ بحيث $f'(c)=0$

يدل التمثيل الهندسي على وجود نقطة واحدة c على الأقل من القوس AB (A تختلف عن B) بحيث يكون المماس عندها يوازي Ox، وقد لا تكون هذه النقطة وحيدة . (الشكل **4.2**).



شكل 4.2

مثال **شروط نظرية رول تتحقق على الدالة**

$$f(x)=x\cdot(x-2)\cdot(x+2)$$

$$f(-2)=f(0)=f(2)\ ,\quad f'(x)=3x^2-4$$

إذن $f'(x)$ سينعدم عند x_0 من $]-2,0[$ وينعدم أيضا عند x_1 من $]0,2[$ وهذا ما تحققه المعادلة

$f'(x)=3x^2-4$ على المجالين $]-2,0[$ و $]0,2[$، حيث نجد $x_0=-\frac{2}{\sqrt{3}}$ ، $x_1=\frac{2}{\sqrt{3}}$.

2.7 الحساب على المشتقات

قضية: لتكن f و g دالتين معرفتين ومستمرتين على $[a,b]$ وقابلتين للاشتقاق على $]a,b[$.
بفرض أن الدالة المشتقة g' لا تنعدم على $]a,b[$، عندئذ يوجد عدد α من المجال $]a,b[$ بحيث :

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)}$$

البرهان

على $[a,b]$ تعتبر الدالة h : $h(x)=f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g(x)$. h تحقق نظرية رول .

ومنه يوجد α من $]a,b[$ بحيث $h'(\alpha)=0$. ولدينا $h'(x)=f'(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(x)$

فإن $h'(\alpha)=f'(\alpha)-\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(\alpha)=0$ ، وبالتالي $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)}$

3.7 قاعدة L'Hôpital

لتكن $f:]a,b[\to\mathbb{R}$ و $g:]a,b[\to\mathbb{R}$ دالتين قابلتين للاشتقاق على مجال $]a,b[$، وليكن α من المجال $]a,b[$. إذا كانت النهاية $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ موجودة ، فإن النهاية $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{g(x)-g(\alpha)}$ موجودة، بحيث :

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{g(x)-g(\alpha)}=\lim_{x\to\alpha}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

ملاحظة عندما يكون $f(\alpha)=g(\alpha)=0$ ، فأن $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

4.7 صيغة التزايدات المنتهية

إ ذا كانت دالة f مستمرة على $[a,b]$ وتقبل الاشتقاق على $]a,b[$، فإنه توجد على الأقل قيمة c من $]a,b[$ بحيث $f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)$.

أي يوجد على الأقل θ من $]0;1[$، بحيث $f(b)-f(a)=(b-a)f'(a+\theta(b-a))$ (2)

وبوضع $b=a+h$ تأخذ العلاقة (2) الشكل: $f(a+h)-f(a)=hf'(a+\theta h)$

أمثلة

مثال1: الدالة $f(x)=\ln x$ تحقق شروط تطبيق نظرية التزايدات المنتهية على $[0;x]$ ، $0<x$ ومنه

$$\exists c\in]x;x+1[\quad \ln(x+1)-\ln(x)=\frac{1}{c}$$

أو $\exists \theta \in \left]0;1\right[\quad \ln(x+1)-\ln(x)=\dfrac{1}{x+\theta}$

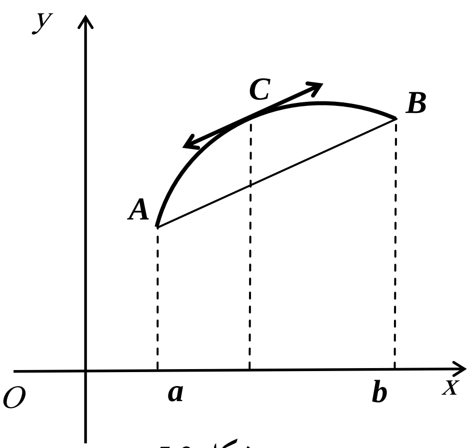
مثال2: الدالة $f(x)=e^{x}$، على $[0;x]$ ، $0<x$ ، تحقق شروط نظرية التزايدات المنتهية.

مجموعة التعريف f هي $D_f=[0;+\infty[$ ، و f تقبل الاشتقاق على $D=]0;+\infty[$ ،

(f لا تقبل الاشتقاق عند 0 لأن $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sqrt{x}}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{x}}\dfrac{e^{\sqrt{x}}-1}{\sqrt{x}}=+\infty$)

لدينا من أجل $0<x$ $f'(x)=\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$

التمثيل الهندسي : (الشكل **5.2**).



شكل 5.2

يدل التمثيل الهندسي على وجود نقطة أو أكثر من القوس AB بحيث يكون المماس للمنحنى يوازي الوتر AB.

(معامل توجيه المستقيم AB هو $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$)

مثال3: لنحقق نظرية التزايدات المنتهية على الدالة $f(x)=1-\ln(1+x)$ في المجال $[0;1]$

$f(x)$ مستمرة على المجال $[0;1]$ و $f(x)$ تقبل الاشتقاق على $]0;1[$. حسب نظرية التزايدات المنتهية، يوجد على الأقل α من $]0;1[$: $f'(\alpha)=\dfrac{f(1)-f(0)}{1-0}$. إذن نحل في $]0;1[$، المعادلة:

$f'(x)=\dfrac{(1-\ln 2)-1}{1-0}$ التي تكافئ $\dfrac{-1}{1+x}=-\ln 2$. ومنه الحل $\alpha=\dfrac{1}{\ln 2}-1\approx 0.44$

5.7 نتيجة

لتكن f دالة معرفة ومستمرة على المجال $[a,b]$ ، وقابلة للاشتقاق على المفتوح $]a,b[$. نفرض وجود ثابتين موجبين m و M بحيث يكون

$$\forall x\in \left]a,b\right[: \quad m\leq f'(x)\leq M .$$

عندئذ يكون :

$$m\leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\leq M .$$

8. الدوال اللوغاريتمية والأسية

1.8 الدوال اللوغاريتمية

نسمي الدالة اللوغاريتمية النيبيرية، الدالة الأصلية على المجال $]0,+\infty[$ للدالة $x \mapsto \frac{1}{x}$ والتي تنعدم من أجل القيمة 1 للمتغير x . ورمزها كما هو معلوم $\ln$ أو $\log$.

مجموعة تعريفها هي $\mathbb{R}_+^*$ ، ولدينا إذن بالتعريف: $\forall x>0,\quad \ln x=\int_1^x \frac{dt}{t}$

خواص

$$\ln(u\cdot v)=\ln u+\ln v$$

$$\ln\frac{u}{v}=\ln u-\ln v$$

$$x>0,\ n\in\mathbb{Q}\quad \ln x^n=n\ln x$$

النهايات

$$\lim_{x\to+\infty}(\ln x)=+\infty,\ \lim_{x\to0^+}(\ln x)=-\infty,\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0^+,\ \lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$$

خواص

- على المجال $]0,+\infty[$: $a\in\mathbb{R}^*$ حيث $f(x)=\ln|ax|\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x}$
- إذا كانت الدالة $u(x)$ تقبل الاشتقاق وتحافظ على إشارتها في مجال I، فإن الدالة $f:x\mapsto\ln|u(x)|$ تقبل الاشتقاق على I، ويكون : $f'(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}$
- إذا كانت الدالتان $u(x)$ و $v(x)$ تقبلان الاشتقاق ولا تنعدمان على المجال I فإن

$$\forall x\in I,\quad f(x)=u(x)\cdot v(x)\ \Rightarrow\ \frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{u'(x)}{u(x)}+\frac{v'(x)}{v(x)}$$

$$\forall x\in I,\quad f(x)=\frac{u(x)}{v(x)}\ \Rightarrow\ \frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{u'(x)}{u(x)}-\frac{v'(x)}{v(x)}$$

$$\forall x\in I,\quad f(x)=u^n(x)\ \Rightarrow\ \frac{f'(x)}{f(x)}=n\cdot\frac{u'(x)}{u(x)}\qquad (n\in\mathbb{Z})$$

العدد e

الدالة اللوغاريتمية النيبيرية، تنعدم من أجل $x=1$، وهي مستمرة ومتزايدة تماما على $\mathbb{R}_+^*$.

توجد قيمة لـ x: $\ln x=1$، وهي العدد e الذي نسميه **الأساس النيبيري**، يحقق هذه المعادلة ، ...2,718 قيمة تقريبية له .

ملاحظة الدالة اللوغاريتمية ذات الأساس a، هي الدالة $x\mapsto\log_a x=\frac{\ln x}{\ln a}$

(لها نفس تغيرات الدالة اللوغاريتمية النيبيرية). منحناهما مُوضح في (الشكل **6.2**).

جدول تغيرات $x \mapsto \ln x$

x	0		1		e		$+\infty$
$(\ln x)'$		$+$	0	$+$	0	$+$	
$\ln x$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

2.8 الدالة الأسية النيبيرية

الدالة الأسية ذات الأساس النيبيري e، التي نرمز لها بـ $x \mapsto e^x$، هي الدالة العكسية للدالة $\ln$، فهي مستمرة ومتزايدة تماما من $\mathbb{R}_+^*$ في $\mathbb{R}$. ولدينا : $\quad y = e^x \iff x = \ln x \,,\; x > 0$

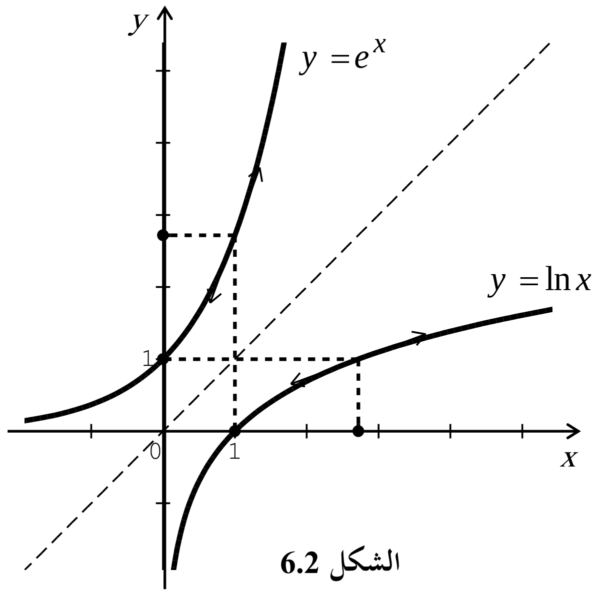
خواص

$$\frac{e^x}{e^y} = e^{x-y} \;,\; e^x \cdot e^y = e^{x+y} \;,\; \left(e^x\right)^y = e^{x \cdot y}$$

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty \,,\; \lim_{x \to 0} x \cdot e^x = 0 \,,\; \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \,,\; \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

- إذا كانت الدالة $u(x)$ تقبل على مجال I، فإن الدالة $x \mapsto e^{u(x)}$ تقبل الاشتقاق على I :

$$\left(e^{u(x)}\right)' = u'(x) \cdot e^{u(x)}$$



الشكل 6.2

تمارين محلولة

تمرين 2-1

أثبت من أجل كل x **و** y **من** $\mathbb{R}$: $\quad |\sin y - \sin x| \le |y - x|$

الحل

عندما يكون $x < y$ ، الدالة $\sin$ معرفة ومستمرة على المجال $[x, y]$ وتقبل الاشتقاق على $]x, y[$،
فحسب نظرية التزايدات المنتهية توجد على الأقل قيمة c من $]a,b[$ بحيث:

$$\sin y - \sin x = (y - x)\cos c$$

وبما أن $\forall t \in \mathbb{R} \quad |\cos t| \le 1$، نستنتج $|\sin y - \sin x| \le |y - x|$.

تمرين 2-2

أثبت من أجل كل $0 < x$: $\quad \frac{1}{x+1} \le \ln(x+1) - \ln(x) \le \frac{1}{x}$

الحل

نعتبر الدالة $f(x) = \ln(x)$ المعرفة على $\mathbb{R}_+^*$. لدينا $f'(x) = \frac{1}{x}$

حسب نظرية التزايدات المنتهية $\quad \exists c \in]x, x+1[,\ f(x+1) - f(x) = (x+1-x)f'(c) = \frac{1}{c}$

وبما أن $0 < x < c < x+1$ فإن $\frac{1}{x+1} < \frac{1}{c} < \frac{1}{x}$ أي $\frac{1}{x+1} \le \ln(x+1) - \ln(x) \le \frac{1}{x}$.

تمرين 2-3

نعتبر الدالة $f(x)$ **المعرفة والمستمرة على** $[0, 2]$.

بين بأنه يوجد α **من** $[0, 2]$: $\quad 7f(0) + 10f(2) = 23f(\alpha)$

الحل

بما أن $f(x)$ مستمرة على $[0, 5]$ فإنها تدرك حضيضها m وذروتها M ويكون لدينا :

$$f([0, 2]) = [m, M]$$

إذن

$$m \le \frac{7f(0) + 10f(2)}{23} \le M$$

ومنه يوجد α من $[0, 2]$:

$$f(\alpha) = \frac{7f(0) + 10f(2)}{23}$$

تمرين 2–4

f و g دالتان مستمرتان على $[a,b]$ وتقبلان الاشتقاق $]a,b[$

بفرض أن $f(a)\le g(a)$ ومن أجل كل x من $]a,b[$: $f'(x)\le g'(x)$

أثبت أن $\forall x\in]a,b[,\ \ f(x)\le g(x)$

الحل

لدينا

$$f(a)\le g(a)\ \Leftrightarrow\ f(a)-g(a)\le 0\ \Leftrightarrow\ (f-g)(a)\le 0$$

$$\forall x\in]a,b[,\ \ f'(x)\le g'(x)\ \Leftrightarrow\ f'(x)-g'(x)\le 0\ \Leftrightarrow\ (f'-g')(x)\le 0$$

أي أن الدالة $f-g$ على المجال $]a,b[$ متناقصة. ومنه

$$\forall x\in]a,b[,\ \ x>a\ \Rightarrow\ (f-g)(x)\le (f-g)(a)\le 0$$

تمرين 2–5

لتكن f دالة مستمرة على $[a,b]$ بحيث $a<f(a)$ و $f(b)<b$

بفرض أن $f(a)\le g(a)$ ومن أجل كل x من $]a,b[$: $f'(x)\le g'(x)$

أثبت بأنه يوجد c من $]a,b[$ بحيث $f(c)=c$

الحل

من أجل ذلك نعتبر الدالة $g(x)=f(x)-x$. g مستمرة على $[a,b]$، ولدينا :

$$a<f(a)\ \Leftrightarrow\ f(a)-a>0\ \Leftrightarrow\ g(a)>0$$
$$f(b)<b\ \Leftrightarrow\ f(b)-b<0\ \Leftrightarrow\ g(b)<0$$

ومنه يوجد c من $]a,b[$ بحيث $g(c)=0$ أي $f(c)=c$

تمرين 2–6

نعتبر الدالة $f(x)=1-e^{-x}$.

حقق نظرية التزايدات المنتهية على الدالة $f(x)=1-e^{-x}$ في المجال $[-1;+1]$

الحل

$f(x)=1-e^{-x}$ مستمرة على المجال $[-1;+1]$، و $f(x)$ تقبل الاشتقاق على $]-1;+1[$.

حسب نظرية التزايدات المنتهية، يوجد على الأقل α من $]-1;+1[$: $f'(\alpha)=\dfrac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}$

إذن نحل في $]-1;+1[$ ، المعادلة $f'(x)=\frac{(1-e^{-1})-(1-e)}{2}$ التي تكافئ $e^{-x}=\frac{e-e^{-1}}{2}$

ومنه الحل الوحيد $x=\alpha=\ln\frac{2}{e-e^{-1}}\approx -0.16$

تمرين 2–7

نعتبر الدالة g حيث: $g(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & , \quad x\neq 0 \\ 0 & , \quad x=0 \end{cases}$

عين مجموعة تعريف g ، وادرس استمرار وقابلية اشتقاقها عند $x_0=0$.

الحل

بالإمكان دراسة تغيرات الدالة الزوجية $g(x)$ على نصف المجال $[0,+\infty[$.

نلاحظ بأن $g(x)$ مستمرة عند الصفر لأن: $\lim\limits_{x\to 0^-} e^{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{x^2}}=0$

من المساواة: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x)-g(x)}{x-0}=0$ نستنتج أن $g(x)$ تقبل الاشتقاق عند الصفر.

ولدينا $g'(x)=\begin{cases} \frac{2e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3}, & x\neq 0 \\ 0 \quad , & x=0 \end{cases}$

والدالة g مستمرة ومشتقتها g' موجودة ولدينا $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{2e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{2e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3}=g'(0)=0$

ومنه $g'(x)$ مستمرة عند $x_0=0$.

تمرين 2–8

نعتبر الدالة $f(x)$ المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} \ , & x\neq 0 \\ 0 \ , & x=0 \end{cases}$

احسب $f'(0)$ ، وعين $f'(x)$ من أجل $x\neq 0$ ، وكذلك استمرارية $f'(x)$ عند $x_0=0$.

الحل

لدينا باستخدام التعريف : $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$

والدالة f تقبل الاشتقاق عند $x_0 = 0$.

ونلاحظ من أجل $x \neq 0$ ، الدالة $f(x)$ تقبل الاشتقاق ، حيث :

$$f'(x) = 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$$

وبما أن $\lim_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x}$ موجودة و $\lim_{x\to 0} \cos\frac{1}{x}$ غير موجودة فإن $\lim_{x\to 0} f'(x)$ غير موجودة .

والدالة f مستمرة ومشتقتها f' موجودة لكنها غير مستمرة عند $x_0 = 0$.

تمرين 2–9

نعتبر الدالة $f(x)$ المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin^2(\pi x)}{x-3}, & x \neq 3 \\ 0 \quad , & x = 3 \end{cases}$

ادرس قابلية اشتقاق الدالة f عند القيمة 3، ثم فسر النتيجة هندسيا .

الحل

نلاحظ بأن الدالة f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}-\{3\}$ (لكونها مركبة من دوال قابلة للاشتقاق) .

ندرس الاشتقاق عند $x_0 = 3$ ، يمكن ملاحظة أن الدالة f مستمرة عند $x_0 = 3$.

ندرس الاشتقاق عن يمين $x_0 = 3$: بوضع $x = 3+h$ حيث $0 < h$ ، يكون $h = x-3$ ، وبالتالي :

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin^2(\pi(3+h))}{h(h+3-3)} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin^2(\pi(3+h))}{h\cdot h} = \lim_{h\to 0}\left(\frac{\pi\sin(\pi h)}{\pi h}\right)^2 = \pi^2$$

وكذلك في الاشتقاق عن يسار $x_0 = 3$: نضع $x = 3-h$ حيث $0 < h$ ، فيكون $h = 3-x$ ونحصل على:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(3-h)-f(3)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin^2(\pi(3-h))}{h(3-h+3)} = \lim_{h\to 0}\frac{-\sin^2(\pi h)}{h(-h)} = \lim_{h\to 0}\left(\frac{\pi\sin(\pi h)}{\pi h}\right)^2 = \pi^2$$

منحنى f يقبل مماس عند $x_0 = 3$ معادلته $y = \pi^2(x-3)$ ، وهو متناظرا بالنسبة إلى $M(3,0)$.

تمرين 2–10

لتكن $g(x)$ دالة معرفة بالشكل: $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{e^x - 1}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

1. **بين أن $g(x)$ مستمرة وتقبل الاشتقاق عند $x_0 = 0$. أحسب $g'(0)$.**
2. **ادرس تغيرات $g(x)$ على مجموعة تعريفها، وأثبت أن منحناها (Γ) يقبل خطا مقاربا مائلا.**

3. **هات معادلة المماس للمنحنى البياني الممثل للدالة g عند النقطة التي فاصلتها $x_0 = 0$.**

الحل

1. دراسة الاستمرار والاشتقاق لـ $g(x)$ عند $x_0 = 0$.

- $g(x)$ مستمرة عند الصفر لأن: $g(0) = \lim\limits_{x \to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = +1$
- ومن العلاقة: $g'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\frac{x}{e^x - 1} - 1}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x - e^x + 1}{x(e^x - 1)} = -\frac{1}{2}$

ومنه $g(x)$ تقبل الاشتقاق عند الصفر.

$g(x)$ مستمرة وتقبل الاشتقاق على المجال $\mathbb{R}$: $g'(x) = \frac{-x e^x + e^x - 1}{(e^x - 1)^2} < 0$

لدينا : $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$ ، $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$ ، $\lim\limits_{x \to -\infty} (g(x) - x) = 0$ ، $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{g(x)}{x} = -1$

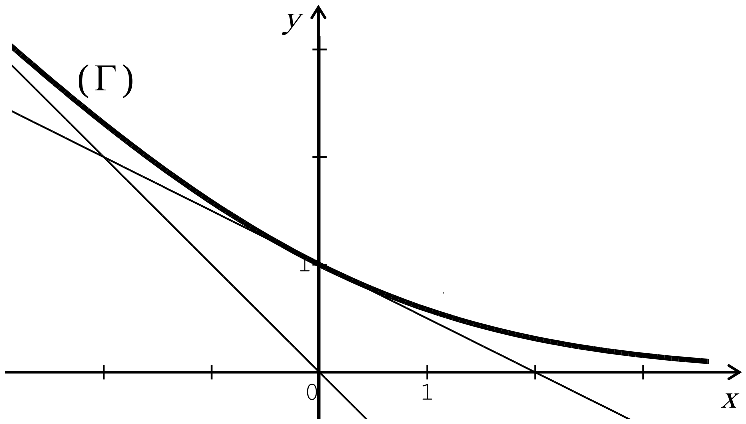
والمنحنى (Γ) (الشكل 7.2) يقبل خطا مقاربا مائلا معادلته : $y = -x$ (الشكل **7.2**).

2. معادلة المماس للمنحنى البياني الممثل للدالة g عند النقطة التي فاصلتها $x_0 = 0$.

من النشر المحدود من الرتبة الأولى بجوار الصفر للدالة $g(x)$:

$$g(x) = g(0) + g'(0) \cdot x + o(x) = 1 - \tfrac{1}{2} x + o(x)$$

تنتج معادلة المماس لمنحنى $y = g(x)$ عند نقطة المبدأ : $y = 1 - \frac{1}{2} x$.



شكل 7.2

تمرين 2–11

نعتبر الدالة العددية $f(x) = -(x^2 + x - 1)e^x$

1. **أدرس تغيرات** f **وفروعها اللانهائية ؟**
2. **بين أن** (Γ): **منحنى** f **يقبل نقطتي انعطاف، يطلب تعيين إحداثياتها.**
3. **ارسم المنحنى** (Γ) **والمستقيمين المماسين عند نقطتي الانعطاف في نفس المعلم.**
4. **أثبت أن** (Γ) **يقطع محور الفواصل في نقطة فاصلتها** x_0 **تحقق:** $0,62 > x_0 > 0,61$
5. **جد دالة أصلية للدالة** f **على** $\mathbb{R}$ **, ثم احسب المساحة** $\mathcal{S}$ **للحيز المحدد بالمنحنى** (Γ) **والمستقيمات** $y = 0$ **و** $x = -\frac{1}{2}$ **و** $x = 0$.

الحل

1. جدول تغيرات f

x	$-\infty$ -1 2 $+\infty$
$f'(x)$	$+$ 0 $-$ 0 $+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow e \searrow -0.68 \nearrow 0$

2. الدالة المشتقة الأولى: $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = (x^2 - x - 2)e^{-x}$

الفروع اللانهائية: في جوار $(-\infty)$ يوجد فرع لانهائي باتجاه المحور العمودي.

3. الدالة المشتقة الثانية ونقاط الانعطاف:

لدينا: $\forall x \in \mathbb{R} \quad f''(x) = (-x^2 + 3x + 1)e^{-x}$

المشتقة الثانية تنعدم عند كل من $x_1 = -\frac{3-\sqrt{13}}{2} \approx -0.303$ و $x_2 = \frac{3+\sqrt{13}}{2} \approx 3.303$،

وتغير إشارتها عندهما . إذن للمنحنى (Γ) نقطتي انعطاف فاصلتاهما x_1 و x_2: $f(x_1) \approx 1.888$

و $f(x_2) \approx -0.486$ (الشكل **8.2**).

الدالة الأصلية لـ f على $\mathbb{R}$:

$F(x) = \int f(x)\,dx = (x^2 + 3x + 2)e^x + c$ حيث c ثابت اختياري

وتكون المساحة بالوحدات المربعة : $\mathcal{S} = \left| \int_{-0.5}^{0} f(x)\, dx \right| = 0.763$

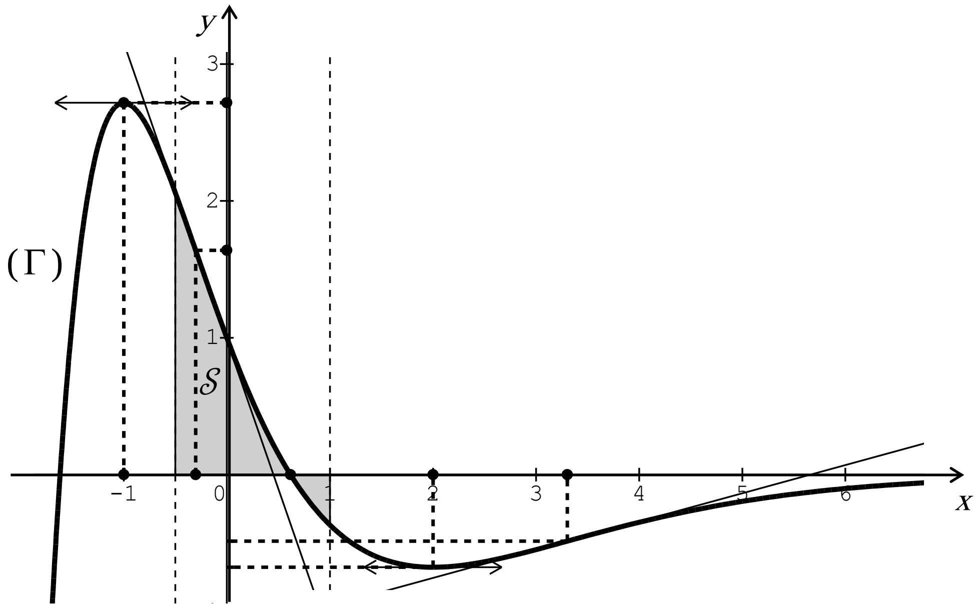
1) تقاطع (Γ) مع محور الفواصل :

لدينا: $f(0.61) \approx 0.0097$ و $f(0.62) \approx 0.0023$.

وبما أن الدالة $x \mapsto f(x)$ مستمرة ومتناقصة تماما على $[0.61, 0.62]$ حيث $f(0.61) \times f(0.62) < 0$

حسب نظرية القيم المتوسطة، فإنه يوجد عدد حقيقي وحيد x_0 من $]0.61, 0.62[$ بحيث $f(x_0) = 0$.

هندسيا: المنحنى (Γ) يقطع محور الفواصل في النقطة ذات الفاصلة $x_0 \approx 0.6180$.



شكل 8.2

تمرين 2–12

نعتبر الدالة f حيث:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \cdot \ln(x^2) , & x \neq 0 \\ 0 , & x = 0 \end{cases}$$

أ. عين D_f مجموعة تعريف f. ثم أدرس استمرار وقابلية اشتقاق f على D_f.

ب. ادرس تغيرات f، وأنشئ منحناها (Γ) في معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

حدد وضعية المماس عند النقطة O.

ج. بالاستعانة بالمنحنى (Γ)، أنشئ في نفس المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ منحنى الدالة g حيث:

$g : x \mapsto \left| f\left(|x|\right) \right|$

الحل

أ) مجموعة التعريف $D_f = \left]-\infty, +\infty\right[$

f مستمرة على $\mathbb{R}^*$، ومستمرة عند $x=0$ لأن $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = 0$

الدالة f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}^*$: $f'(x) = x^2\left(3\ln x^2 + 2\right)$، وكذلك تقبل الاشتقاق عند $x=0$ لأن

$$\lim_{x\to 0^{\pm}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^{\pm}} x^2 \ln x^2 = 0$$

ب) تغيرات f نلاحظ أن f فردية $f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$، والمنحنى (Γ) يكون متناظرا بالنسبة لنقطة المبدأ. ندرس f على $\left]0, +\infty\right[$:

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ و (Γ) يقبل فرعا لا نهائيا باتجاه محور التراتيب.

إشارة $f'(x)$: $f'(x)$ ينعدم من أجل $x=0$ و $x = \frac{1}{\sqrt[3]{e}} \approx 0,71$

ولدينا $f(0)=0$ ، $f\left(1/\sqrt[3]{e}\right) = -\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{e} \approx -0,25$ (الشكل **9.2**).

جدول تغيرات f

x	0		$1/\sqrt[3]{e}$		$+\infty$
$f'(x)$			0	$-\ +$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$f\left(1/\sqrt[3]{e}\right)$	$\nearrow$	0

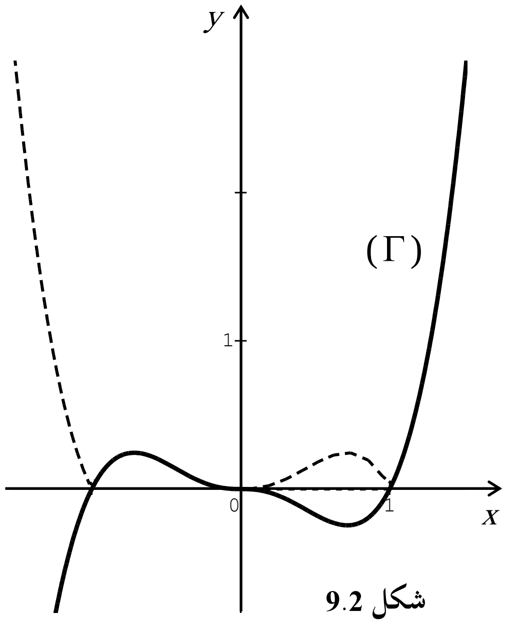
المنحنى (Γ) يقبل نقطة انعطاف عند نقطة المبدأ (الشكل 9.2)، وعندها يكون المماس محمولا على محور الفواصل.

ج) نلاحظ بأن:

$$f(|x|) = \begin{cases} f(x), & x \geq 0 \\ f(-x), & x < 0 \end{cases}$$

ومنحنى $f(|x|)$ على $\left]0, +\infty\right[$ ينطبق على (Γ)، وعلى $\left]-\infty, 0\right[$ يتناظر مع (Γ) بالنسبة لمحور التراتيب.

أما منحنى $\left|f(|x|)\right|$ فهو ينطبق على منحنى $f(|x|)$ في نصف المستوى العلوي، ويتناظر معه بالنسبة لمحور التراتيب بالنسبة لنصف المستوى السفلي.



شكل 9.2

تمرين 2–13

$f(x)$ **دالة مستمرة على** $\mathbb{R}_+^*$ **حيث :**

$$f(x)=\begin{cases}(\ln x)^2-\ln x & , \quad 1\geq x>0\\ (\ln x)^2 & , \quad x>1\end{cases}$$

1. **عين الصور** $f(\frac{1}{5})$ ، $f(\frac{1}{e})$ ، $f(\frac{1}{2})$ ، $f(1)$ ، $f(2)$ ، $f(e)$ ، $f(5)$.
2. **أدرس قابلية اشتقاق** f **عند** $x_0=1$.
3. **ادرس تغيرات** f **على** $\mathbb{R}_+^*$ **، واستنتج بأن اقتصار** f **على** $]1,+\infty[$ **هو تطبيق تقابلي. عين التطبيق العكسي** f^{-1}
4. **أنشئ منحنييْ الدالتين** f **و** f^{-1} **في معلم متعامد ومتجانس** $(O;\vec{i},\vec{j})$ **. (2 سم على المحورين).**

هل يمكن تطبيق نظرية التزايدات المنتهية على الدالة $f(x)$ **في المجال** $[0.5\,;\,2]$ **؟**

الحل

1. حساب الصور $f(\frac{1}{5})$ ، $f(\frac{1}{e})$ ، $f(\frac{1}{2})$ ، $f(1)$ ، $f(2)$ ، $f(e)$ ، $f(5)$.

$f(\frac{1}{5})\approx 4.20$ ، $f(\frac{1}{e})=2$ ، $f(\frac{1}{2})\approx 1.17$ ، $f(1)=0$ ،

$f(5)\approx 2.60$ ، $f(e)=1$ ، $f(2)\approx 0.48$

2. **دراسة اشتقاق الدالة f**

- نُلاحظ بأن الدالة f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}_+^* - \{1\}$: $f'(x)=\begin{cases} \dfrac{2\ln x-1}{x}, & 1>x>0 \\ \dfrac{2\ln x}{x}, & x>0 \end{cases}$

- دراسة الاشتقاق عند $x_0=1$ بحساب النهايتين:

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{(\ln x)^2-\ln x-1}{x-1}=-1$$
$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{(\ln x)^2-1}{x-1}=0$$

ينتج أن الدالة f لا تقبل الاشتقاق عند $x_0=1$. ومنحنى f يقبل نصفي مماسين عند $x_0=1$.

3. **تغيرات f على $\mathbb{R}_+^*$**

لدينا $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$ ومنه منحنى f يقبل فرعا لا نهائيا باتجاه محور الفواصل.

$\lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$. ومنه منحنى f يقبل محور التراتيب كخط مقارب. (الشكل **10.2**).

نلاحظ بأن منحنى f يقبل نقطة انعطاف عند النقطة التي فاصلتها $x_0=e$.

(لأن الدالة المشتقة الثانية f'' تنعدم عند $x_0=e$ وتغير إشارتها على جانبيها).

جدول تغيرات f

x	0		1		e		$+\infty$
$f'(x)$		-1 $-$	‖	0 $+$		$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	1	↗	$+\infty$

- **اقتصار f على $]1,+\infty[$ وتعيين $f^{-1}(x)$** :

الدالة $f(x)$ مستمرة ومتزايدة تماما على $]1,+\infty[$، وتأخذ قيمها في $]0,+\infty[$ فهي تقابل.

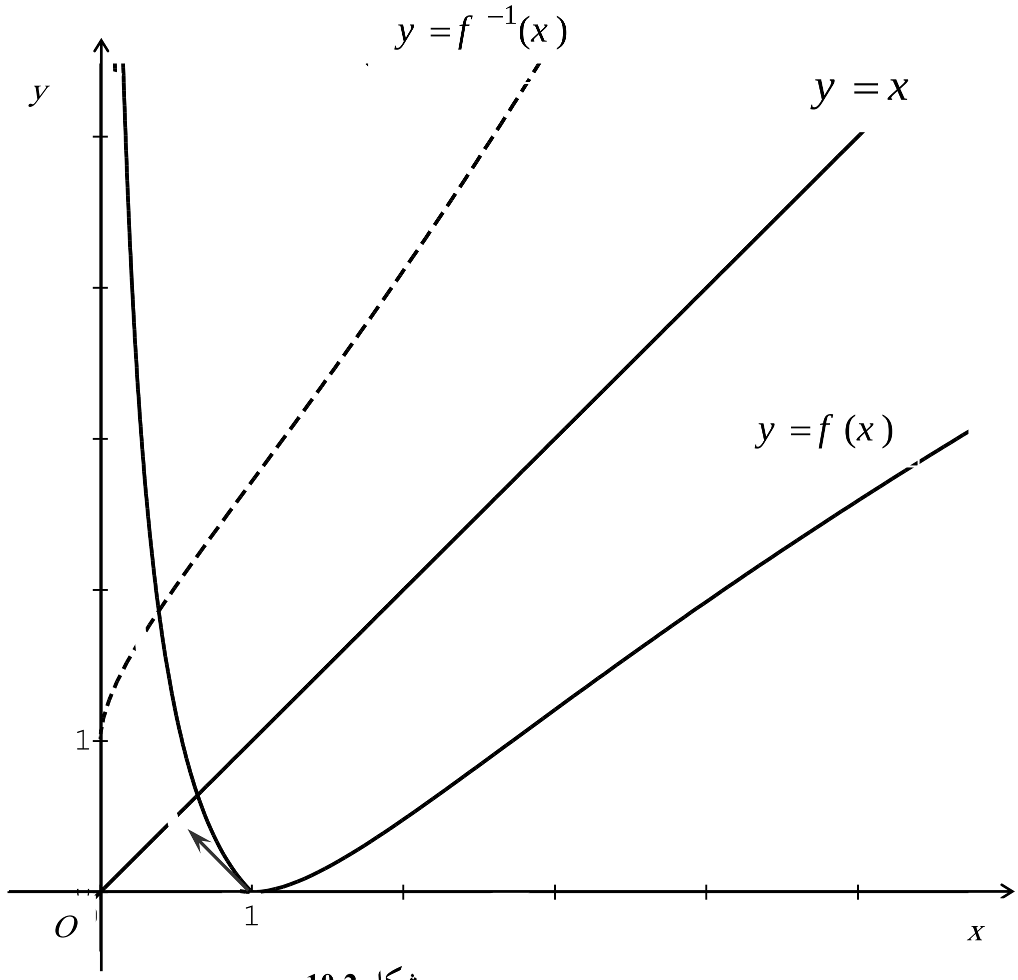
تكون أيضا الدالة العكسية $f^{-1}(x)$ مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]0,+\infty[$ في $]1,+\infty[$.

منحنيا f و f^{-1} يكونان في المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$ متناظرين بالنسبة للمستقيم $y=x$ (الشكل 10.2).

- بوضع : $y=f(x)=(\ln x)^2\ ,\ x\geq 1$ نحصل على $x=e^{\sqrt{y}}\ ,\ y\geq 0$

ومنه $f^{-1}(x)=e^{\sqrt{x}}\qquad (x\geq 0)$

4. **منحنيا الدالتين f و f^{-1} في المعلم المتعامد والمتجانس** $(O;\vec{i},\vec{j})$ يوضحه (الشكل 2).



شكل 10.2

5. **اختبار شروط نظرية التزايدات المنتهية على الدالة $f(x)$ في المجال $[0\ ,\ 2]$**

صحيح إن الدالة f مستمرة على $[0\ ,\ 2]$ ، لكنها لا تقبل الاشتقاق على $]0\ ,\ 2[$. لأنها لا تقبل الاشتقاق عند $x_0=1$ وبالتالي لا يمكن تطبيق نظرية التزايدات المنتهية في هذه الحالة.

تمرين 2-14

ليكن (Γ) **المنحنى البياني للدالة** $f(x)$ **حيث :** $f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x}}, & x<0 \\ 0, & x\geq 0 \end{cases}$

1. **عين** D_f **مجموعة تعريف** f **. وادرس استمرار الدالة** $f(x)$ **على** D_f .
2. **بين أن** $f(x)$ **تقبل الاشتقاق مرتين عند** $x_0=0$ **، عين الدالتين المشتقتين** $f'(x)$ **و** $f''(x)$.
3. **ادرس تغيرات** $f(x)$ **وأنشئ منحناها** (Γ) **في معلم متعامد ومتجانس** $(O,\vec{i},\vec{j})$ **(4 سم على المحورين)** .
4. **بين أن** $f(x)$ **هي تطبيق تقابلي من** $]-\infty,0[$ **في** $]0,+1[$.
عين دالتها العكسية f^{-1} **، ثم أنشئ منحناها** (Φ) **في نفس المعلم السابق .**
5. **عين معادلة المستقيم المماس** (Δ) **للمنحنى** (Γ) **عند** $x_0=-1$.

الحل

1. **مجموعة تعريف** f **، ودراسة الاستمرار :**

مجموعة تعريف $f(x)$ هي $D_f=]-\infty,+\infty[$. f مستمرة على $\mathbb{R}^*$ ، لأنها مركبة من دوال مستمرة، وهي أيضا مستمرة عند الصفر لأن $\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^-} f(x)=f(0)=0$. إذن الدالة $f(x)$ مستمرة على $D_f=\mathbb{R}$.

2. **دراسة الاشتقاق للدالة** $f(x)$:

- على $]0,+\infty[$ ، تكون الدالة $f(x)$ معدومة، ومنه: $\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ f'(x)=f''(x)=0$
- على $]-\infty,0[$ ، الدالة $f(x)$ تقبل الاشتقاق مرتين، حيث :

$$\forall x\in\mathbb{R}_-^*,\ f'(x)=\frac{-e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\ ;\quad f''(x)=\frac{(2x+1)\,e^{\frac{1}{x}}}{x^4}$$

- عند $x_0=0$ ، يكون لدينا $\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{\frac{1}{x}}-0}{x-0}==\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}=0$

ومنه $f(x)$ تقبل الاشتقاق عند الصفر لأن: $\lim_{x\to 0^-} f'(x)=\lim_{x\to 0^+} f'(x)=f'(0)=0$

ولدينا $f'(x)=\begin{cases} \frac{-e^{\frac{1}{x}}}{x^2}, & x<0 \\ 0, & x\geq 0 \end{cases}$

- وكذلك $f'(x)$ تقبل الاشتقاق عند الصفر، لأن : $f''(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=0$ ،

ومنه $f(x)$ تقبل الاشتقاق مرتين عند الصفر. ولدينا: $f''(x)=\begin{cases}\dfrac{(2x+1)e^{\frac{1}{x}}}{x^4}, & x<0\\ 0, & x\geq 0\end{cases}$

3. **دراسة تغيرات** $f(x)$ ، **وإنشاء المنحنى** (Γ) **في المعلم المتعامد والمتجانس** $(O,\vec{i},\vec{j})$.

على $]0\,,\,+\infty[$ ، الدالة $f(x)$ معدومة، ولدينا وعلى $]-\infty\,,\,0[$ ، يكون لدينا $f'(x)=\dfrac{-e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\leq 0$

ومنه $f(x)$ متناقصة على هذا المجال. ولدينا $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} e^{\frac{1}{x}}=1$

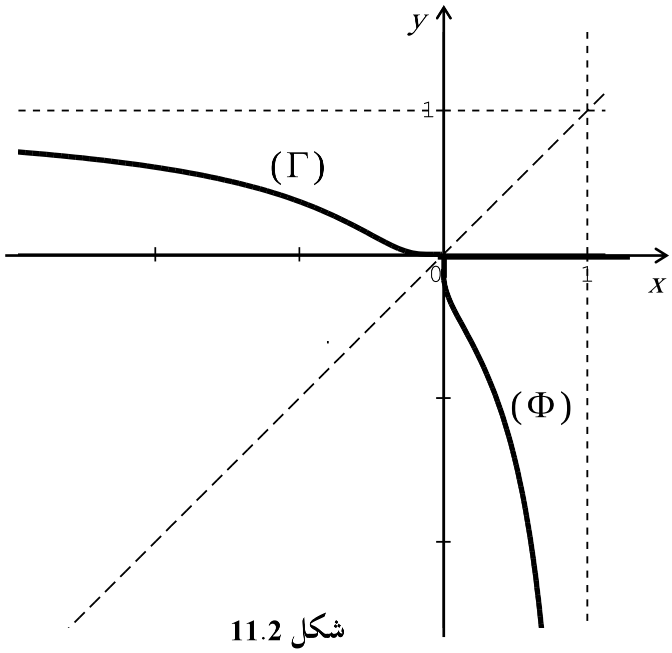
إذن $f(x)$ متناقصة من المجال $]-\infty\,,\,0[$ في $]0\,,\,1[$.

4. **نبين أن** $f(x)$ **هي تطبيق تقابلي من** $]-\infty, 0[$ **في** $]0, +1[$:

الدالة $f(x)$ مستمرة ومتناقصة تماما على $]-\infty, 0[$، وتأخذ قيمها في المجال $]0, +1[$، فهي تقابل.

الدالة العكسية $f^{-1}(x)$ تكون مستمرة ومتناقصة تمام على المجال $]0, +1[$ في $]-\infty, 0[$.

ويكون منحناها (Φ) مناظرا لـ (Γ) بالنسبة للمستقيم $y=x$ في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ (الشكل **11.2**).



شكل 11.2

❑ تعيين $f^{-1}(x)$: نضع $y=f(x)=e^{\frac{1}{x}},\ x<0$

لدينا $\ln y=\frac{1}{x}\ ,\ x<0 \quad\Leftrightarrow\quad y=\frac{1}{\ln x}\ ,\ 0<x<1$

ومنه
$$f^{-1}(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\ln x}, & 0<x<1\\ 0\,, & x=0\end{cases}$$

المماس عند نقطة المبدأ O للمنحنى (Φ) يوازي المحور العمودي.

5. **معادلة المماس (Δ) للمنحنى (Γ) عند النقطة ذات الفاصلة** $x_0=-1$:

لدينا
$$f(-1)=\frac{1}{e}\ ,\quad f'(-1)=-\frac{1}{e}\ ;\quad y-\frac{1}{e}=-\frac{1}{e}\left(x+1\right)$$

فتكون معادلة المماس لمنحنى $y=f(x)$ عند النقطة $A\left(-1\,,\,\frac{1}{e}\right)$ ، هي: $y=-\dfrac{1}{e}x$.

تمرين 2–15

نعتبر الدالة العددية $f(x)$ حيث :
$$f(x)=\frac{1}{3}e^{x^2}\left(1-e^{-\frac{3}{2}x^2}\right)$$

أدرس تغيرات $f(x)$ على مجموعة تعريفها، ثم أحسب $f(0{,}7)$ ، $f(1)$ ، $f(1{,}5)$ ، $f(1{,}7)$

ثم أنشئ المنحنى (Γ) الممثل للدالة $f(x)$ في معلم متعامد $(O,\vec{i},\vec{j})$.

الحل

$f(x)$ معرفة ومستمرة وتقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ، وهي زوجية. لدينا على $\left[0,+\infty\right[$:

$$f(0)=0\,,\ \lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty\,,\ \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty\,,\ f'(x)=\frac{1}{3}e^{x^2}\left(2+e^{-\frac{3}{2}x^2}\right)$$

والمنحنى (Γ) يقبل فرع لا نهائي باتجاه محور التراتيب .

$$f'(x)=\frac{1}{3}e^{x^2}\left(2+e^{-\frac{3}{2}x^2}\right)$$

جدول التغيرات $f(x)$ على $\left[0,+\infty\right[$:

x	0 $\quad\quad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	0 $\nearrow$ $+\infty$

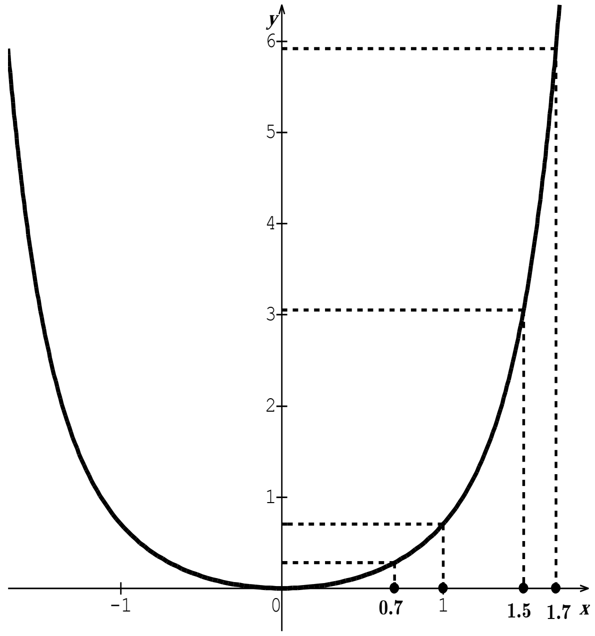
حساب الصور $f(x_i)$:

$f(0,7) \approx 0.28$ ، $f(1) \approx 0.70$ ،

$f(1,5) \approx 3.05$ ، $f(1,7) \approx 5.92$

المنحنى (Γ) الممثل للدالة $f(x)$،

يوضحه (الشكل **12.2**).



شكل 12.2

تمرين 2–16

$f(x)$ **دالة مستمرة على** $\mathbb{R}$ **حيث** : $f(x)=\begin{cases} e^{x-1}+1 & , \quad x \geq 1 \\ x e^{x-1}+1 & , \quad x<1 \end{cases}$

1. **عين الصور** $f(-2)$ ، $f(-1)$ ، $f(0)$ ، $f(1)$ ، $f(1.5)$ ، $f(2)$.
2. **أدرس قابلية اشتقاق** f **عند** $x_0 = 1$.
3. **ادرس تغيرات** f **على** $\mathbb{R}$، **واستنتج بأن اقتصار** f **على** $]1, +\infty[$ **هو تطبيق تقابلي. عين التطبيق العكسي** f^{-1}
4. **أنشئ منحنييْ الدالتين** f **و** f^{-1} **في معلم متعامد ومتجانس** $(O;\vec{i},\vec{j})$. (2 **سم على المحورين**).
5. **هل يمكن تطبيق نظرية التزايدات المنتهية على الدالة** $f(x)$ **في المجال** $[0 , 2]$ ؟
6. **استخدم التكامل بالتجزئة لحساب** $I=\int_0^2 f(x)\,dx$. **لوِّن بقلم الرصاص مساحة الحيز من المستوي التي تمثل قيمة هذا التكامل (المحدد بالمستقيمات:** $x=0$ و $y=0$ و $x=2$ **ومنحنى** $y=f(x)$).

الحل

1. **حساب الصور** $f(-2)$ ، $f(-1)$ ، $f(0)$ ، $f(1)$ ، $f(1.5)$ ، $f(2)$.

بالحساب المباشر: $f(-2)=-\frac{2}{e^3}+1\simeq 0.90$ ، $f(-1)=-\frac{1}{e^2}+1\simeq 0.86$ ، $f(0)=1$ ،
$f(1)=2$ ، $f(1.5)=\sqrt{e}+1\simeq 2.65$ ، $f(2)=e+1\simeq 3.72$

2. **دراسة اشتقاق الدالة** f

- الدالة f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}-\{1\}$:

$$f'(x)=\begin{cases} e^{x-1} & , \quad x>1 \\ (x+1)\,e^{x-1} & , \quad x<1 \end{cases}$$

- دراسة الاشتقاق عند $x_0=1$ بحساب النهايتين:

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x\,e^{x-1}+1-2}{x-1}=2$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{e^{x-1}+1-2}{x-1}=1$$

ينتج أن الدالة f لا تقبل الاشتقاق عند $x_0=1$. ومنحنى f يقبل نصفي مماسين عند $x_0=1$.

3. • **تغيرات** f **على** $\mathbb{R}$

لدينا $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$ ومنحنى f يقبل فرعا لا نهائيا باتجاه محور التراتيب.

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=1$. ومنحنى f يقبل خط مقارب معادلته $y=1$. (الشكل **13.2**).

جدول تغيرات f

x	$+\infty$		-1		$+1$		$+\infty$
$f'(x)$		$2+$	0	$-$	‖	1 $+$	
$f(x)$	1	↘	$1-e^{-3}$	↗	2	↗	$+\infty$

نلاحظ بأن منحنى f يقبل نقطة انعطاف عند النقطة التي فاصلتها $x=-2$.

(لأن الدالة المشتقة الثانية f'' تنعدم عند $x_0=1$ وتغير إشارتها على جانبيها).

• **اقتصار f على $]1,+\infty[$ وتعيين $f^{-1}(x)$** :

الدالة $f(x)$ مستمرة ومتزايدة تماما على $]1,+\infty[$، وتأخذ قيمها في $]1,+\infty[$ فهي تقابل. تكون أيضا الدالة العكسية $f^{-1}(x)$ مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]1,+\infty[$ في $]1,+\infty[$.

منحنيا f و f^{-1} يكونان في المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$ متناظرين بالنسبة للمستقيم $y=x$.

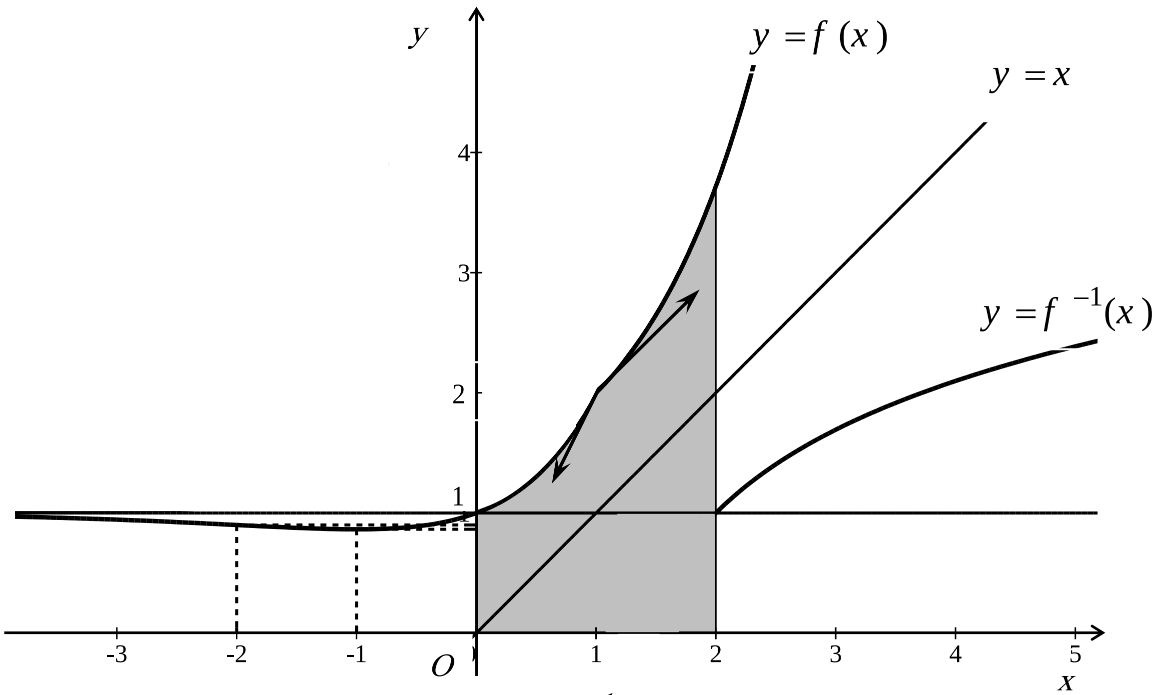
• بوضع : $y=f(x)=e^{x-1}+1,\ x\geq 1$ نحصل على

$$x=\ln(y-1)+1,\ y\geq 2$$

ومنه

$$f^{-1}(x)=\ln(x-1)+1 \qquad (x\geq 2)$$

4. **منحنيا الدالتين f و f^{-1} في المعلم المتعامد والمتجانس** $(O;\vec{i},\vec{j})$ يوضحه (الشكل **13.2**).



شكل 13.2

5. **اختبار شروط نظرية التزايدات المنتهية على الدالة $f(x)$ في المجال $[0,2]$**

صحيح إن الدالة f مستمرة على $[0,2]$ ، لكنها لا تقبل الاشتقاق على $]0,2[$. لأنها لا تقبل الاشتقاق عند $x_0=1$. وبالتالي لا يمكن تطبيق نظرية التزايدات المنتهية في هذه الحالة.

6. **استخدام التكامل بالتجزئة لحساب** $I=\int_0^2 f(x)\,dx$

لدينا $I=\int_0^2 f(x)\,dx=\int_0^1 (x\,e^{x-1}+1)\,dx+\int_1^2 e^{x-1}dx$

لنحسب (بالتجزئة) التكامل J : $J=\int x\,e^{x-1}dx$

نضع $u=x$ يكون $du=dx$ ، وبوضع $dv=e^{x-1}dx$ يكون $v=e^{x-1}$

ومنه $J=x\,e^{x-1}-\int e^{x-1}dx=x\,e^{x-1}-e^{x-1}$

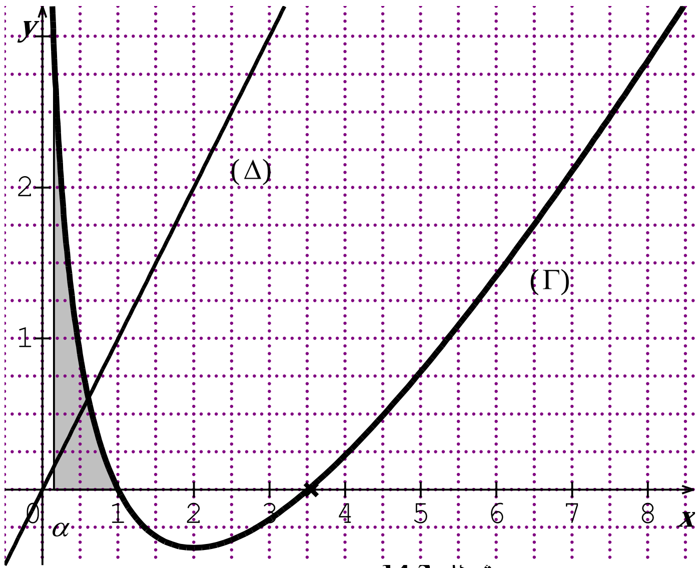
إذن $I=\int_0^2 f(x)\,dx=\Big[x\,e^{x-1}-e^{x-1}+x\Big]_0^1+\Big[e^{x-1}\Big]_1^2$

ومنه قيمة I بالوحدات المربعة : $I=(e^{-1}+1)+(e-1)=e+e^{-1}\approx 3.08$

تمرين 2–17

نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=x-1-2\ln x$

يرمز (Γ) لتمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$. كما هو مبين في (الشكل 14.2):



شكل 14.2

- **بين أن المنحنى (Γ) يقبل فرعا لانهائيا عند $+\infty$ باتجاه مستقيم يُطلب تعيين معادلته.**
- **أدرس استمرارية الدالة F عن يمين $x_0=0$. ثم أحسب $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{F(x)-F(0)}{x}$. ماذا تستنتج ؟**
- **ليكن α من المجال $]0;1[$. أحسب $F(\alpha)=\int_\alpha^1 f(x)\,dx$. ما هي النهاية $\lim\limits_{\alpha\to 0^+}F(\alpha)$ ؟**

الحل

- لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1-2\ln x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x\cdot(1-\frac{1}{x}-2\frac{\ln x}{x})=+\infty$

و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}(1-\frac{1}{x}-2\frac{\ln x}{x})=1$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(-1-2\ln x)=+\infty$

وبالتالي المنحنى (Γ) يقبل فرعا لانهائيا عند $+\infty$ باتجاه المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x$.

بوضع : $F(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x^2+x-2x\ln x\ ,\ x>0\\ 0\qquad ,\ x=0\end{cases}$

- الدالة F مستمرة عن يمين الصفر، لأن $F(0)=\lim\limits_{x\to0^+}F(x)=0$

ولدينا $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{F(x)-F(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{1}{2}x+1-2\ln x\right)=+\infty$.

- لدينا

$$S(\alpha)=\int_\alpha^1 f(x)\,dx=\left[F(x)\right]_\alpha^1=\left[\frac{1}{2}x^2+x-2x\ln x\right]_\alpha^1=\frac{3}{2}-\left(\frac{1}{2}\alpha^2+x-2\alpha\ln\alpha\right)$$

ولدينا كذلك $\lim\limits_{\alpha\to0^+}S(\alpha)=\lim\limits_{\alpha\to0^+}\left(\frac{3}{2}-\left(\frac{1}{2}\alpha^2+x-2\alpha\ln\alpha\right)\right)=\frac{3}{2}$

تمرين 2–18

لتكن f دالة معرفة كما يلي: $f(x)=\frac{x}{1+|x|}$

بين أن f هي تطبيق تقابلي من $\mathbb{R}$ في مجال يُطلب تحديده. عين التطبيق العكسي.

الحل

الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$، لأنها مركبة من دوال مستمرة.

نلاحظ بأن f فردية، فيكفي دراسة اتجاه تغيراتها على $\mathbb{R}_+$

ليكن (x_1,x_2) من $\mathbb{R}_+^2$، لدينا $f(x_1)-f(x_2)=\frac{x_1}{1+x_1}-\frac{x_2}{1+x_2}=\frac{x_1-x_2}{(1+x_1)(1+x_2)}$

إذن $x_1<x_2\ \Rightarrow\ f(x_1)<f(x_2)$

الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}_+$، وبما لأنها فردية، فهي تبقى متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

إذن f مستمرة متزايدة تماما على $\mathbb{R}$، فهي تقابل من $\mathbb{R}$ على المجال $\left]\lim_{n\to-\infty} f(x), \lim_{n\to+\infty} f(x)\right[$ أي على المجال $]-1,+1[$

ليكن y من المجال $]-1,+1[$، لنحل المعادلة $f(x)=y$ في $\mathbb{R}$.

العلاقة $\frac{x}{1+|x|}=y$ تستلزم بأن x و y لهما نفس الإشارة.

إذا كان $y \geq 0$ فإن $\quad \frac{x}{1+x}=y \quad \Leftrightarrow \quad x=\frac{y}{1-y}$

وإذا كان $y \leq 0$ فإن $\quad \frac{x}{1-x}=y \quad \Leftrightarrow \quad x=\frac{y}{1+y}$

ونستنتج $\quad \forall x \in]-1,+1[\quad f(x)=y \quad \Leftrightarrow \quad x=\frac{y}{1-|y|}$

ومنه التطبيق التقابلي: $f^{-1}(x)=\frac{x}{1-|x|}$ المعرف من $]-1,+1[$ في $\mathbb{R}$.

تمرين 2–19

لتكن f دالة متزايدة على المجال $[0,1]$ في المجال $[0,1]$. نعتبر المجموعة

$$E=\{x \in [0,1], f(x) \geq x\}$$

1) **بين أن المجموعة E تقبل حدا أعلى b.**

2) **بين أن $f(b)=b$.**

الحل

1) المجموعة E غير خالية $(0 \in E)$، ومحدودة بـ1، إذن فهي تقبل حدا أعلى b، الذي ينتمي إلى المجال $[0,1]$

2) البرهان بالخلف.

- فرض أن $f(b)<b$، وبما أن b هو أصغر الحواد من الاعلى لـ E، $f(b)$ ليس هو أصغر الحواد من الأعلى. إذن يوجد عنصرا c من E بحيث $f(b) \leq c \leq b$، وبما أن f متزايدة يكون $f(c) \leq f(b)$ وبالتالي $f(c) \leq c$ الذي يناقض انتماء c إلى E.
- نفرض أن $f(b)>b$، وبما أن f متزايدة يكون $f(f(b))>b$ وبالتالي $f(b) \in E$، وهذا مستحيل لأن $f(b)$ أكبر تماما من الحد الاعلى لـ E.

نتيجة : $f(b)=b$

تمرين 2–20

أثبت باستخدام التعريف أن الدالة $f(x)=\dfrac{3x-1}{x-5}$ **مستمرة عند كل نقطة من** $\mathbb{R}-\{5\}$.

الحل

ليكن x_0 من $\mathbb{R}-\{5\}$. من أجل $x\neq 0$ يكون لدينا:

$$|f(x)-f(x_0)|=\left|\frac{3x-1}{x-5}-\frac{3x_0-1}{x_0-5}\right|=\frac{14|x-x_0|}{|x-5|\cdot|x_0-5|}$$

من أجل x_0 من $\left]x_0-\frac{|x_0-5|}{2},x_0+\frac{|x_0-5|}{2}\right[$ يكون $0<\frac{|x_0-5|}{2}<|x-5|$. ومنه

$$\forall x\in\left]x_0-\frac{|x_0-5|}{2},x_0+\frac{|x_0-5|}{2}\right[,|f(x)-f(x_0)|=\frac{28}{(x_0-5)^2}|x-x_0|$$

ليكن $0<\varepsilon$. بجعل $\alpha=\min\left\{\frac{|x_0-5|}{2},\frac{(x_0-5)^2\varepsilon}{28}\right\}$ ، يكون

$$|x-x_0|<\alpha,\Rightarrow|f(x)-f(x_0)|\leq\frac{28}{(x_0-5)^2}\frac{(x_0-5)^2\varepsilon}{28}<\varepsilon$$.

وهذا يعني أن الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}-\{5\}$.

تمرين 2–21

ادرس استمرار واشتقاق الدالة f **على مجموعة تعريفها:**
$$f(x)=\begin{cases}2x+3 & \text{pour } x<-1\\ |x| & \text{pour } -1\leq x\leq 1\\ 2 & \text{pour } x>1\end{cases}$$

الحل

مجموعة التعريف: $D_f=\mathbb{R}$.

1. على $\mathbb{R}^*-\{-1,0,1\}$ ، تكون $f(x)$ مستمرة (لأنها مركبة من دوال مستمرة على اتحاد المجالات الآتية: $]-\infty,-1[\cup]-1,0[\cup]0,1[\cup]1,+\infty[$)
2. الاستمرار عند $x_0=-1$ و $x_0=0$ و $x_0=1$

- عند $x_0=-1$: نلاحظ بأن $\lim\limits_{x\to-1^-}(2x+3)=\lim\limits_{x\to-1^+}(-x)=f(-1)=1$ ومنه $f(x)$ مستمرة عند $x_0=-1$
- عند $x_0=0$: نلاحظ بأن $\lim\limits_{x\to0^-}(-x)=\lim\limits_{x\to0^+}(+x)=f(0)=0$ ومنه $f(x)$ مستمرة عند $x_0=0$

■ عند $x_0=1$: نلاحظ بأن $\lim_{x\to 1^-}(x)=f(1)=1$ لكن $\lim_{x\to 1^+}(2)=2$ ومنه $f(x)$ غير مستمرة عند $x_0=1$

وكذلك ندرس اشتقاق الدالة $f(x)$ على مرحلتين:

1. على $\mathbb{R}^*-\{-1,0,1\}$، تكون $f(x)$ للاشتقاق (لأنها مركبة من دوال تقبل الاشتقاق على اتحاد المجالات الآتية: $]-\infty,-1[\cup]-1,0[\cup]0,1[\cup]1,+\infty[$)

2. الاشتقاق عند $x_0=-1$ و $x_0=0$ و $x_0=1$

■ عند $x_0=-1$: نلاحظ بأن $\lim_{x\to -1^-}f'(x)=\lim_{x\to -1^-}(2)=2$ لكن

$$\lim_{x\to -1^+}f'(x)=\lim_{x\to -1^-}(-1)=-1$$

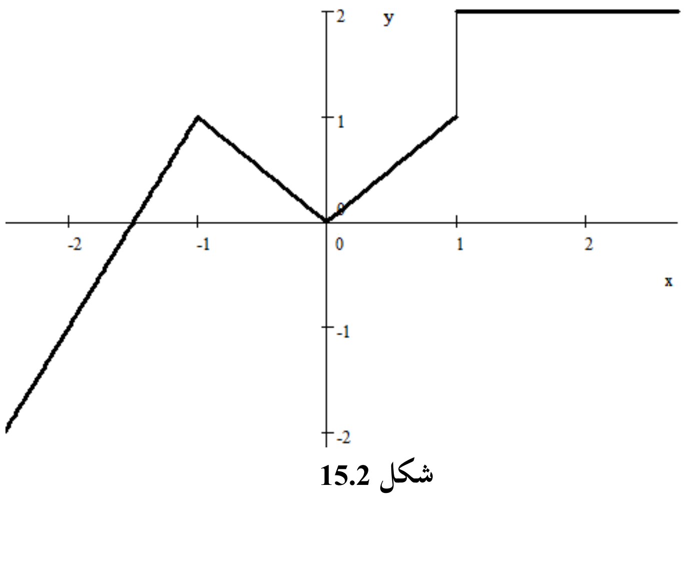
ومنه $f(x)$ غير قابلة للاشتقاق عند $x_0=-1$

■ عند $x_0=0$: نلاحظ بأن $\lim_{x\to 0^-}f'(x)=\lim_{x\to 0^-}(-1)=-1$ لكن $\lim_{x\to 0^+}f'(x)=\lim_{x\to 0^+}(1)=1$

ومنه $f(x)$ غير قابلة للاشتقاق عند $x_0=0$

■ عند $x_0=1$: نلاحظ بأن $\lim_{x\to 1^-}f'(x)=\lim_{x\to 1^-}(1)=1$ لكن $\lim_{x\to 1^+}f'(x)=\lim_{x\to 1^+}(0)=0$

ومنه $f(x)$ غير قابلة للاشتقاق عند $x_0=1$



شكل 15.2

تمرين 2–22

عين مجموعة التعريف الدالة f في كل حالة من الحالات:

$$a)\ f(x)=\frac{x+1}{x-\sqrt{x}},\quad b)\ f(x)=\frac{x\ln x+1}{\ln x-1},\quad c)\ f(x)=\frac{e^x+1}{e^x-2}$$

الحل

- بالنسبة للدالة $f(x)=\dfrac{x+1}{x-\sqrt{x}}$، هناك مشكلتين: وجود $\sqrt{x}$ والقسمة. إذن

$x\in D_f \iff x\geq 0 \wedge x-\sqrt{x}\neq 0$، ومنه إذا كان $0\leq x\ :\ x^2=x \iff x=\sqrt{x}$

وكذلك إذا كان $0\leq x\ :\ x(x-1)=0 \iff x=\sqrt{x}$ ومنه $D_f=]0,1[\cup]1,+\infty[$

- بالنسبة للدالة $f(x)=\dfrac{x\ln x+1}{\ln x-1}$، هناك مشكلتين: وجود $\ln x$ والقسمة. إذن

$x\in D_f \iff x>0 \wedge \ln x-x\neq 0$، ومنه إذا كان $0<x\ :\ \ln x\neq x \iff x\neq e$

ومنه $D_f=]0,e[\cup]e,+\infty[$

- بالنسبة للدالة $f(x)=\dfrac{e^x+1}{e^x-2}$، هناك مشكلة القسمة فقط لأن e^x معرفة على $\mathbb{R}$.

إذن $e^x-2\neq 0 \iff x\in D_f$ ومنه $D_f=\mathbb{R}-\{\ln 2\}$

تمرين 2–23

ادرس النهاية عند α للدلة f في كل حالة من الحالات الآتية:

$$a)\ f(x)=\frac{x-1}{x-\sqrt{x}},\quad \alpha=1 \qquad b)\ f(x)=\frac{\ln(1-3x)}{2x},\quad \alpha=0$$

$$c)\ f(x)=\frac{e^x-1}{\ln(x+1)},\quad \alpha=0 \qquad d)\ f(x)=\frac{x+1}{1-e^{-x}},\quad \alpha=0$$

الحل

- بالنسبة للحالة $\alpha = 1$ ، $f(x) = \dfrac{x-1}{x-\sqrt{x}}$، لدينا $\lim_{x\to 1}(x-1) = 0$ و $\lim_{x\to 1}(x-\sqrt{x}) = 0$، إذن توجد حالة عدم تعيين $\frac{0}{0}$. لنحول الكسر على $D_f =]0,1[\cup]1,+\infty[$:

$$f(x) = \frac{(\sqrt{x})^2-1}{(\sqrt{x})^2-\sqrt{x}} = \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x})(\sqrt{x}-x)} = \frac{(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x})}$$

ومنه $\lim_{x\to 1}\dfrac{(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x})} = 2$

- وبالنسبة للحالة $\alpha = 0$ ، $f(x) = \dfrac{\ln(1-3x)}{2x}$، هنا أيضا توجد حالة عدم تعيين عندما x يؤول إلى 0

نحاول إرجاع عبارة $f(x)$ إلى عبارة من الشكل $\dfrac{\ln(1+u)}{u}$. نضع $u=-3x$، التي تنتهي إلى 0 عندما يؤول x إلى 0. إذا كان $u=-3x$ فإن $x=-\dfrac{u}{3}$ و $f(x) = -\dfrac{3}{2}\dfrac{\ln(1+u)}{u}$.

ومنه $\lim_{x\to 0}(-3x) = 0$ و $\lim_{x\to 0} f(x) = \dfrac{-3}{2}$.

وبالنسبة للحالة $\alpha = 0$ ، $f(x) = \dfrac{e^x-1}{\ln(x+1)}$، لدينا $\lim_{x\to 0}(e^x-1) = 0$ و $\lim_{x\to 0}\ln(x+1) = 0$.

أي توجد حالة عدم تعيين عندما يؤول x إلى 0. لنحاول إرجاع عبارة $f(x)$ باستخدام عبارات الدوال المألوفة:

$$f(x) = \frac{e^x-1}{x}\cdot\frac{x}{\ln(x+1)} \quad \forall x \in]-1,0[\cup]0,+\infty[.$$

لدينا $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x} = 1$ و $\lim_{x\to 0}\dfrac{x}{\ln(x+1)} = 1$. ومنه $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$

- وبالنسبة للحالة $\alpha = 0$ ، $f(x) = \dfrac{x+1}{1-e^{-x}}$، لدينا $\lim_{x\to 0}(e^x-1) = 1$ و $\lim_{x\to 0}(1-e^{-x}) = 0$. ومنه $f(x)$ ينتهي إلى ما لانهاية.

تمرين 2-24

ادرس النهاية عند α للدلة f في كل حالة من الحالات الآتية: $\alpha = +\infty$, $a)\ f(x) = \dfrac{2\ln x - 1}{\ln x + 1}$

$$b)\ f(x) = \frac{e^x-1}{1+e^x},\quad \alpha = \mp\infty \quad ; \quad c)\ f(x) = \sqrt{x^2+x+1}-x \quad \alpha = +\infty$$

الحل

- بالنسبة للحالة $\alpha=+\infty$ ، $f(x)=\dfrac{2\ln x-1}{\ln x+1}$، لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ ، ولدينا حالة عدم التعيين $\dfrac{+\infty}{+\infty}$

نحلل كل من البسط والمقام على حد ينتهي بسرعة إلى الما لانهاية. هنا هذا الحد هو $\ln x$،

لتحلل $f(x)$ من أجل $x\neq 0$ يكون $f(x)=\dfrac{(\ln x)(2-1/\ln x)}{(\ln x)(1+1/\ln x)}=\dfrac{2-1/\ln x}{1+1/\ln x}$.

وبما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2$

- بالنسبة للحالة $\alpha=\mp\infty$ ، $f(x)=\dfrac{e^x-1}{1+e^x}$، لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$ ، ومنه $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$

وعند $+\infty$، يكون $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$ فيكون $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x(1+e^{-x})}=\dfrac{1}{1+e^{-x}}$

وبما أن $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}=0$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$

- بالنسبة للحالة $\alpha=+\infty$ $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}-x$، لدينا

$\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+x+1)=+\infty$ ، إذن $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x+1}=\lim\limits_{u\to+\infty}\sqrt{u}=+\infty$. نضرب ونقسم في مرافق عبارة $f(x)$ إذا كان $0<x$:

$$f(x)=\frac{(\sqrt{x^2+x+1}-x)(\sqrt{x^2+x+1}+x)}{\sqrt{x^2+x+1}+x}=\frac{x^2+x+1-x^2}{\sqrt{x^2+x+1}+x}=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x}$$

ومنه أيضا $f(x)=\dfrac{x(1+1/x)}{\sqrt{x^2(1+1/x+1/x^2)}+x}=\dfrac{x(1+1/x)}{|x|\sqrt{1+1/x+1/x^2}+x}=\dfrac{1+1/x}{\sqrt{1+1/x+1/x^2}+1}$

وبما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\dfrac{1}{2}$

تمرين 2-25

ادرس النهايات على أطراف مجموعة التعريف للدلة f في كل حالة من الحالات الآتية:

$$a)\ f(x)=\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right),\quad b)\ f(x)=\sqrt{1-\ln x}\ ,\quad c)\ f(x)=\ln\left(1-e^{-x}\right)$$

الحل

- من أجل $f(x)=\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$، لدينا $\dfrac{x+1}{x-1}>0\ \wedge\ x\neq 1 \iff x\in D_f$ ، ومنه

$$D_f=\left]-\infty,-1\right[\cup\left]1,+\infty\right[$$

لدينا $\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x}=1$ ومنه $\lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x}=1$ ومنه $\lim_{x\to-\infty}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=\lim_{u\to1}\ln u=0$ ، إذن $\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$

$\lim_{x\to(-1)^-}\frac{x+1}{x-1}=0$ إذن $\lim_{x\to(-1)^-}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=\lim_{u\to0}\ln u=-\infty$ ومنه $\lim_{x\to(-1)^-}f(x)=-\infty$

$\lim_{x\to1^+}x+1=2$ ، $\lim_{x\to1^+}x-1=0$ وإذا كان $1<x$ فإن $0<x-1$. إذن $\lim_{x\to1^+}\frac{x+1}{x-1}=+\infty$ ومنه

$\lim_{x\to+\infty}\ln u+\infty=\lim_{x\to1^+}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ أي $\lim_{x\to1^+}f(x)=+\infty$

وأخيرا، $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x}=1$ إذن $\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x}=1$ إذن $\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=\lim_{u\to1}\ln u=0$. إذن $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$

- من أجل $f(x)=\sqrt{1-\ln x}$، لدينا $x\in D_f \Leftrightarrow x>0\wedge 1-\ln x>0$، ومنه $D_f=]0,e]$

$\lim_{x\to0^+}\ln x=-\infty$ ومنه $\lim_{x\to0^+}(1-\ln x)=+\infty$ إذن $\lim_{x\to0^+}\sqrt{1-\ln x}=\lim_{u\to+\infty}\sqrt{u}=+\infty$

ومنه $\lim_{x\to0^+}f(x)=+\infty$

في e، الدالة $f(x)$ مستمرة. $\lim_{x\to e}f(x)=f(e)=0$

- من أجل $f(x)=\ln\left(1-e^{-x}\right)$، لدينا $x\in D_f \Leftrightarrow 1-e^{-x}>0$، والتي تكافئ $e^{-x}<1$ ثم

$-x<0$ أي $x>0$ ومنه $D_f=]0,+\infty[$

لدينا $\lim_{x\to0^+}(1-e^{-x})=0$ ومنه $\lim_{x\to0^+}(1-e^{-x})=0$

وبالتالي $\lim_{x\to0^+}\ln(1-e^{-x})=\lim_{u\to0}\ln u=-\infty$ ومنه $\lim_{x\to0^+}f(x)=-\infty$

$\lim_{x\to+\infty}e^{-x}=\lim_{u\to-\infty}e^{u}=0$ ، إذن $\lim_{x\to+\infty}\ln\left(1-e^{-x}\right)=\lim_{u\to1}u=0$. إذن $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$

تمرين 2-26

أدرس الاستمرارية عند α للدالة f في الحالتين:

$$1)\ f(x)=\begin{cases}x^2-x+3,\ x\le1\\ 2x^2+1,\ x>1\end{cases},\ \alpha=1\quad;\quad 2)\ f(x)=\begin{cases}1-x\,e^{-x}\ ,\ x\le0\\ x^2\ln x-x+1,\ x>0\end{cases},\ \alpha=0$$

الحل

- بالنسبة للدالة $f(x)=\begin{cases} x^2-x+3, & x\le 1 \\ 2x^2+1, & x>1 \end{cases}$ ،

لدينا $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(x^2-x+3)=f(1)$ و $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(2x^2+1)=f(1)$

ومنه f مستمرة عند 1.

ولدينا $$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{(x^2-x+3)-3}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}x=1$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{(2x^2+1)-3}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{2(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}2(x+1)=4$$

الدالة f تقبل الاشتقاق عن يمين وعن يسار 1، لكنها غير قابلة للانشقاق عند 1 (لأن المشتقة عن اليمين لا تساوي المشتقة عن اليسار).

- بالنسبة للدالة $f(x)=\begin{cases} 1-xe^{-x}, & x\le 0 \\ x^2\ln x-x+1, & x>0 \end{cases}$ ،

لدينا $f(0)=1$ ، ومن أجل $x\le 0$ $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(1-xe^{-x})=1=f(0)$ لأن $\lim\limits_{x\to 0} e^{-x}=1$

ولدينا $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x^2\ln x-x+1)=1=f(0)$ لأن $\lim\limits_{x\to 0} x^2\ln x=0$

والدالة f تقبل الاشتقاق عند 0 (المشتقة عن اليمين تساوي المشتقة عن اليسار). ولدينا

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 1^-}\frac{(x^2\ln x-x+1)-1}{x}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x(x\ln x-1)}{x}=\lim_{x\to 1^-}(x\ln x-1)=-1$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{(1-xe^{-x})-1}{x}=\lim_{x\to 0^+}e^{-x}=-1$$

النهايتان متساويتين ومنه f تقبل الاشتقاق عند 0 و $f'(0)=-1$.

تمرين 2-27

لتكن f دالة مستمرة ودورية على $\mathbb{R}$ وتأخذ قيمها في $\mathbb{R}$، وتقبل نهاية حقيقية عندما ينتهي x إلى $+\infty$.

بين أن f دالة ثابتة.

الحل

ليكن T دور موجب تماما لـ f . نرمز بـ ℓ لنهاية f عند $+\infty$

ليكن x عدد حقيقي. لدينا $f(x)=f(x+nT)\quad \forall n\in\mathbb{N}$ وعندما ينتهي x إلى $+\infty$، نحصل على:
$\lim\limits_{n\to+\infty} f(x+nT)=\ell$. وأيضا $f(x)=\ell\quad \forall x\in\mathbb{R}$ والدالة f ثابتة.

تمرين 2–28

برهن من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x يكون، $(1+\frac{1}{x})^{x}<e<(1+\frac{1}{x})^{x+1}$

الحل

ليكن $0<x$. لدينا :

$$(1+\frac{1}{x})^{x}<e<(1+\frac{1}{x})^{x+1}\Leftrightarrow x\ln(1+\frac{1}{x})<1<(x+1)\ln(1+\frac{1}{x})$$

$$\Leftrightarrow x(\ln(x+1)-\ln x)<1<(x+1)(\ln(x+1)-\ln x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x+1}<\ln(x+1)-\ln x<\frac{1}{x}$$

تمرين 2–29

أثبت بأن المعادلة $e^{-x}=x$ تقبل حلا وحيدا x_0 من المجال $I=]0,1[$.

الحل

بوضع $f(x)=x-e^{-x}$، يكون لدينا: f مستمرة على I و $f(0)=-1<0$ و $f(1)=1-\frac{1}{e}>0$.
وحسب النتيجة السابقة، توجد قيمة x_0 من المجال المفتوح $]0,1[$ بحيث $f(x_0)=0$,
x_0 وحيد. لأنه لو كان معه x_1 من $]0,1[$ بحيث $f(x_1)=0$, لكان $f(x_0)=f(x_1)=0$ الأمر الذي يتطلب، حسب رول، وجود x_0' من $]x_0,x_1[$ بحيث $f'(x_0')=0$. وهذا محال لأن $f'(x_0')\neq 0$.

تمرين 2–30

أثبت بأن كثير الحدود $a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3\quad(0<a_3)$ ينعدم عند قيمة على الأقل من $\mathbb{R}$.

الحل

دالة كثير الحدود مستمرة على $\mathbb{R}$، فهي مستمرة على أي مجال $[a,b]$ من $\mathbb{R}$.
نبيين بأنه يوجد بالفعل عددين a و b من $\mathbb{R}$ بحيث تكون صورتيهما من إشارتين متعاكستين.
لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3)=+\infty$ الذي يعني بالتعريف

$$\forall\varepsilon\in\mathbb{R},\ \exists\eta\in\mathbb{R},\quad \forall x\in\mathbb{R}:\ x>\eta\Rightarrow f(x)>\varepsilon$$

ومنه نستنتج بأنه يوجد عدد حقيقي b بحيث $0 < f(b)$

وكذلك عندما $\lim\limits_{x\to-\infty}(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3)=-\infty$ الذي يعني :

$$\forall\varepsilon\in\mathbb{R},\ \exists\eta\in\mathbb{R},\quad \forall x\in\mathbb{R}:\ x<\eta\Rightarrow f(x)<\varepsilon$$

ومنه نستنتج بأنه يوجد عدد حقيقي a بحيث $0 > f(a)$

بتطبيق نظرية التزايدات المنتهية : $f(a)$ و $f(b)$ من إشارتين مختلفتين ، فالصفر يكون محصورا بينهما، وهو صورة لقيمة على الأقل محصورة ما بين a و b .

تمرين 2–31

لتكن $f(x)$ دالة معرفة ومستمرة على $[0,2]$ بحيث $f(0)=f(2)$

بين بأنه يوجد α من $]0,1[$: $f(\alpha)=f(\alpha+1)$.

الحل

نعرف الدالة $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ بحيث $g(x)=f(x+1)-f(x)$.

نلاحظ بأن $g(0)=f(1)-f(0)=-(f(2)-f(1))=-g(1)$

نظرية القيم المتوسطة تضمن وجود α من $]0,1[$، تحقق $g(\alpha)=0$ أو $f(\alpha)=f(\alpha+1)$

تمرين 2–32

برر قابلية الاشتقاق وأحسب المشتقة للدالة f في الحالات الآتية:

$$a)\ f(x)=x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}},\quad b)\ f(x)=\ln\left|\frac{x}{2-x}\right|,\quad c)\ f(x)=xe^{\frac{1}{x}},\quad d)\ f(x)=\frac{xe^{-x}}{e^{2x}-1}$$

الحل

- بالنسبة للدالة $f(x)=x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$، نلاحظ بأن الدالة الكسرية $x\mapsto\frac{x-1}{x+1}$ تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}-\{-1\}$

ومتزايدة تماما على $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$. إذن الدالة $x\mapsto\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ وجدائها بالدالة $x\mapsto x$ تكون قابلة للاشتقاق على $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$.

بوضع $u(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$ يكون $u'(x)=\dfrac{(x+1)-(x-1)}{(x+1)^2}=\dfrac{2}{(x+1)^2}$ و $(\sqrt{u})'=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

إذن إذا كان $v(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$ فإن $v'(x)=\dfrac{1}{(x+1)^2}\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$

و f هو الجداء $f'(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}+\dfrac{x}{(x+1)^2}\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}=\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}\left(1+\dfrac{x}{(x+1)^2}\cdot\dfrac{x+1}{x-1}\right)$

إذن $f'(x)=\dfrac{x^2-x-1}{x-1}\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$ $\quad \forall x\in\left]-\infty,-1\right[\cup\left]1,+\infty\right[$

- بالنسبة للدالة $f(x)=\ln\left|\dfrac{x}{2-x}\right|$، نلاحظ

$$\forall x\in\mathbb{R}-\{0,2\}\quad f(x)=\ln|x|-\ln|2-x|=\ln|x|-\ln|x-2|$$

الدالة $x\mapsto|x|$ تقبل الاشتقاق وموجبة تماما على $\mathbb{R}-\{0\}$، إذن التركيب $x\mapsto\ln|x|$ مع الدالة $\ln$ هي أيضا دالة تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}-\{0\}$. إذن الدالة $x\mapsto\ln|x-2|$ المركبة من $x\mapsto|x-2|$ و $\ln$ تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}-\{2\}$. واخيرا الدالة f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}-\{0,2\}$.

لدينا $(\ln|u|)'=\dfrac{u'}{u}$، ومنه $f'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x-2}$ وأخيرا $f'(x)=\dfrac{2}{x(2-x)}$ $\quad \forall\in\mathbb{R}-\{0,2\}$

بالنسبة للدالة $f(x)=x\,e^{\frac{1}{x}}$، نلاحظ بأن الدالة $x\mapsto\dfrac{1}{x}$ تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}^*$، وكذلك الدالة الأسية.

إذن التركيب $x\mapsto e^{\frac{1}{x}}$ وأيضا دالة الجداء $x\mapsto x\,e^{\frac{1}{x}}$ تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}^*$.

نعلم بأن $x\mapsto(e^u)'=u'e^u$ ومنه تكون مشتقة $x\mapsto e^{\frac{1}{x}}$ هي $x\mapsto-\dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$

إذن $f'(x)=e^{\frac{1}{x}}+x\left(-\dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\right)$ واخيرا $f'(x)=\dfrac{x-1}{x}e^{\frac{1}{x}}$. أي $f'(x)=\dfrac{x-1}{x}e^{\frac{1}{x}}$ $\quad \forall x\in\mathbb{R}^*$

- بالنسبة للدالة $f(x)=\dfrac{x\,e^{-x}}{e^{2x}-1}$، نلاحظ بأن الدالتين $x\mapsto e^{-x}$ و $x\mapsto e^{2x}$ تركيب دالة كثير الحدود مع الدالة الاسية، قابلتان للاشتقاق على $\mathbb{R}$. إذن f قابلة للاشتقاق على $D_f=\mathbb{R}^*$ كنسبة دالتين قابلتين للاشتقاق على $\mathbb{R}$. إذن $f'(x)=\dfrac{x(e^{-x}-x\,e^{-x})(e^{2x}-1)-(x\,e^{-x})(2e^{2x})}{(e^{2x}-1)^2}$.

ومنه $f'(x)=\dfrac{(1-3x)e^{x}+(x-1)e^{-x}}{(e^{2x}-1)^2}$ $\quad \forall x\in\mathbb{R}^*$

تمرين 2-33

أدرس قابلية الاشتقاق عند $x=0$ للدالة
$$f(x)=\begin{cases} x\cdot\sin\frac{1}{x} & ; \ x\neq 0 \\ 0 & ; \ x=0 \end{cases}$$

الحل

لدينا :
$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$$

إذا اخترنا $x=\frac{1}{n\pi}$ $\left(n\in\mathbb{N}^*\right)$ ، تكون النهاية: $\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}=\lim_{n\to+\infty}\sin n\pi=0$

أما إذا اخترنا $x=\frac{1}{(4n+1)\frac{\pi}{2}}$ $\left(n\in\mathbb{N}\right)$ ، فيكون $\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}=\lim_{n\to+\infty}\sin(4n+1)\frac{\pi}{2}=1$.

بما أن النهايتين مختلفتين، فإن f لا يقبل الاشتقاق عند 0 . وبالتالي f لا تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$.

تمرين 2-34

نعتبر الدالة
$$f(x)=\begin{cases} x^2.\sin\frac{1}{x} & : \ x\neq 0, \\ 0 & : x=0. \end{cases}$$

هل تقبل f الاشتقاق عند نقطة $x=0$ ؟

الحل

لدينا :
$$\lim_{n\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{n\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0=f'(0)$$
$$0\le\lim_{n\to 0}\left|x\sin\frac{1}{x}\right|\le\lim_{n\to 0}|x|=0 \ \Rightarrow\ \lim_{n\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0 .$$

ومنه $f(x)$ تقبل الاشتقاق عند $x=0$.

تمرين 2-35

لتكن f دالة عددية حيث :
$$f(x)=\begin{cases} \frac{\sqrt{-1+2x}-1}{x-1} & , \ x\neq 1 \\ +1 & , \ x=1 \end{cases}$$

1. **عين D_f مجموعة تعريف f . وادرس استمرار الدالة $f(x)$ على D_f .**
2. **ادرس قابلية اشتقاق f على D_f ، ثم عين $f'(x)$.**

3. **ادرس تغيرات f ، ثم بين أن f هي تطبيق تقابلي من D_f في مجموعة قيمها.**
4. **هل تقبل f^{-1} الاشتقاق عند $y_0 = f(1)$ ؟ في حالة نعم، أحسب** $\left(f^{-1}\right)'(f(1))$.

الحل

1. تعيين D_f واستمرارية $f(x)$.

مجموعة تعريف f : $D_f = \left[1/2, +\infty\right[$.

الدالة f مستمرة على $D_f = \left[1/2, 1\right[\cup \left]1, +\infty\right[$ وعند $x_0 = 1$، لدينا :

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{-1+2x}-1}{x-1} = f(1) = 1$$

ومنه f مستمرة على D_f .

2. قابلية اشتقاق f عند $x_0 = 1$,

الدالة f تقبل الاشتقاق على $\left]1, +\infty\right[\cup \left]1/2, 1\right[$ (مركبة من دوال قابلة لاشتقاق) :

$$f'(x) = \frac{\sqrt{2x-1}-x}{\sqrt{2x-1}(x-1)^2}$$

الاشتقاق عند $x_0 = 1$، لدينا :

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{\frac{\sqrt{-1+2x}-1}{x-1}-1}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{-1+2x}-x}{(x-1)^2} =$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{\left(\sqrt{-1+2x}-x\right)\left(\sqrt{-1+2x}+x\right)}{\left(\sqrt{-1+2x}+x\right)(x-1)^2} = \lim_{x \to 1} \frac{-\cancel{(x-1)^2}}{\left(\sqrt{-1+2x}+x\right)\cancel{(x-1)^2}} = -\frac{1}{2}$$

والدالة f تقبل الاشتقاق عند $x_0 = 1$:

$f'(1) = -\frac{1}{2}$: الاشتقاق عن يمين $x_0 = 1/2$، لدينا :

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}^+} \frac{f(x)-f(1/2)}{x-1/2} = \lim_{x \to \frac{1}{2}^+} \frac{\frac{\sqrt{-1+2x}-1}{x-1}-0}{x-\frac{1}{2}} = \lim_{x \to \frac{1}{2}^+} 2\frac{\sqrt{-1+2x}-1}{(x-1)(2x-1)} =$$

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}^+} \frac{\left(\sqrt{-1+2x}-1\right)\left(\sqrt{-1+2x}+1\right)}{(x-1)(2x-1)\left(\sqrt{-1+2x}+1\right)} = \lim_{x \to \frac{1}{2}^+} \frac{2\cancel{(2x-1)}}{\left(\sqrt{-1+2x}+1\right)(x-1)\cancel{(2x-1)}} = +\infty$$

والدالة f لا تقبل الاشتقاق عن يمين $x_0 = 1/2$.

خلاصة : الدالة f تقبل الاشتقاق على $\left]1/2, +\infty\right[$: ومشتقتها على هذا المجال هي:

$$f'(x)=\frac{\sqrt{2x-1}-x}{\sqrt{2x-1}(x-1)^2}$$

3. لدينا من أجل كل x من $]1/2,+\infty[$: $f'(x)=\frac{\sqrt{2x-1}-x}{\sqrt{2x-1}(x-1)^2}=\frac{-1}{\sqrt{2x-1}(\sqrt{2x-1}+x)}$

وكذلك لدينا $f(1/2)=2$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ ، ($y=0$ خط مقارب), والدالة f متناقصة على D_f .

- نلاحظ بأن الدالة f مستمرة ومتناقصة تماما على D_f .

إذن f تطبيق تقابلي من $D_f=[1/2,+\infty[$ في المجال $]0,2]$ ، والتطبيق العكسي f^{-1} موجود.

(كذلك f^{-1} مستمرة ومتناقصة تماما على $]0,2]$).

لدينا : $f^{-1}(f(1))=f^{-1}(1)=f(1)=1\ ,\ \ f'(1)=-\frac{1}{2}\ (\neq 0)$

f^{-1} تقبل الاشتقاق عند $y_0=f(1)$ ولدينا $(f^{-1})'(1)=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{-1/2}=-2$

تمرين 2–36

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ وتأخذ قيمها في $\mathbb{R}$ ، وتحقق $f(0)=f(a)=f'(0)=0$ من أجل عدد ثابت a غير معدوم.

أثبت أنه توجد نقطة تختلف عن O من المنحنى الممثل لـ f بحيث المماس عندها يمر بنقطة المبدأ.

الحل

ليكن x_0 عدد حقيقي غير معدوم. معادلة المماس (T_{x_0}) لمنحنى f عند النقطة ذات الفاصلة x_0 هي: $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$. (T_{x_0}) يمر بنقطة المبدأ إذا وفقط إذا $x_0f'(x_0)-f(x_0)=0$

من أجل x عدد حقيقي. نضع
$$g(x)=\begin{cases}\frac{f(x)}{x},\ x\neq 0\\ 0,\ x=0\end{cases}$$

بما أن f مستمرة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ، فإن g تكون مستمرة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$ ،

بما أن f تقبل الاشتقاق عند 0 بحيث $f(0)=f'(0)=0$ فإن g ستكون مستمرة عند 0 .

أخيرا g مستمرة على $[0,a]$ وتقبل الاشتقاق على: $]0,a[$ وتحقق $g(0)=g(a)$ $(=0)$.

وحسب نظرية رول، فإنه يوجد x_0 من $]0,a[$ بحيث $g'(x_0)=0$ ، وبما أن x_0 غير معدوم يكون $g'(x_0)=\frac{x_0f'(x_0)-f(x_0)}{x_0^2}$.

المساواة $g'(x_0)=0$ تُكتب بالشكل $x_0f'(x_0)-f(x_0)=0$ ، ومنه المماس لـ f عند النقطة ذات الفاصلة x_0 يمر بنقطة المبدأ.

تمرين 2–37

أدرس قابلة قابلية الاشتقاق عن يمين 0 **للدالة** $f(x)=\cos\sqrt{x}$

الحل

عندما ينتهي x إلى 0 بقيم أكبر، يكون: $\frac{\cos(\sqrt{x})-1}{x}=\frac{1}{2}\frac{\cos(\sqrt{x})-1}{(\sqrt{x})^2/2}\to -\frac{1}{2}$

ومنه f تقبل الاشتقاق عن يمين 0 و $f_d'(0)=-\frac{1}{2}$

تمرين 2–38

نعتبر الدالة f **المعرفة على** $]0,+\infty[$ **بالشكل:** $f(x)=\begin{cases}\frac{\ln(1+x)}{x} & , \quad x\neq 0\\ 0 & , \quad x=1\end{cases}$

1. **هل الدالة** f **مستمرة عند** 0 **؟**
2. **أثبت أن** $x-\frac{x^2}{2}\leq \ln(1+x)\leq x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3} \quad \forall x\in[0,+\infty[$
3. **استنتج دراسة اشتقاق الدالة** f **عند** 0
4. **بين أن الدالة** f **مستمرة وتقبل الاشتقاق على** $]0,+\infty[$**، أحسب مشتقتها.**
5. **لتكن** φ **الدالة المعرفة على** $]0,+\infty[$ **بالشكل:** $\varphi(x)=\frac{x}{1+x}+\ln(1+x)$

أدرس **تغيرات** φ **واستنتج إشارتها.**

6. **عين نهاية** f **عند** $+\infty$ **حدد وضعية الفرع اللانهائي.**

الحل

1. يعني نهاية شهيرة $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$ ، إذن $\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)$، ومنه f مستمرة عند 0.
2. لإثبات المتراجحتين، ندرس التغيرات، ثم إشارة الدالتين u و v المعرفتين كما يلي:

$$\forall x\in[0,+\infty[\quad u(x)=\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2},\ v(x)=\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}$$

لدينا $\forall x\in[0,+\infty[\quad u'(x)=\frac{1}{1+x}-1+x=\frac{x^2}{1+x},\ v'(x)=\frac{1}{1+x}-1+x-x^2=\frac{-x^3}{1+x}$

على $]0,+\infty[$ يكون $0<1+x$ و $0\leq x^2$ و $0\geq -x^3$. إذن $\forall x\in[0,+\infty[\quad u'(x)\geq 0,\ v'(x)\leq 0$

الدالة u متزايدة: $u(x)\ge u(0)$ $\forall x\in[0,+\infty[$ والدالة v متناقصة: $v(x)\le v(0)$ $\forall x\in[0,+\infty[$

إذن $\forall x\in[0,+\infty[\quad x-\frac{x^2}{2}\le \ln(1+x)\le x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$

3. لدينا $\forall x\in]0,+\infty[\quad \frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$

وحسب السؤال السابق (بطرح x والقسمة على x^2) نجد:

$$\forall x\in]0,+\infty[\quad -\frac{1}{2}\le\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=-\frac{1}{2}+\frac{x}{3}$$

وبما أن $\lim_{x\to0}\left(-\frac{1}{2}+\frac{x}{3}\right)=-\frac{1}{2}$. إذن f تقبل الاشتقاق عند 0: $f'(0)=-\frac{1}{2}$

4. الدالة $x\mapsto\ln(1+x)$ وكذلك الدالة $x\mapsto x$ مستمرتان وتقبلان الاشتقاق على $]0,+\infty[$، إذن التركيب f تقبلان الاشتقاق على $]0,+\infty[$.

$$\forall x\in]0,+\infty[\quad f'(x)=\frac{\frac{1}{1+x}x-\ln(1+x)}{x^2}=\frac{\varphi(x)}{x^2}$$

5. لدينا $\forall x\in[0,+\infty[\quad \varphi'(x)=\frac{(1+x)-x}{(1+x)^2}=\frac{-x}{(1+x)^2}$ ومنه $\forall x\in[0,+\infty[\quad \varphi'(x)\le 0$

والدالة φ متناقصة على $[0,+\infty[$. إذن $\forall x\in[0,+\infty[\quad \varphi(x)\le\varphi(0)$. وبما أن $\varphi(0)=0$

إذن $\forall x\in[0,+\infty[\quad \varphi(x)\le 0$

هي أيضا دالة تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}-\{0\}$. إذن الدالة $x\mapsto\ln|x-2|$ المركبة من $x\mapsto|x-2|$ و ln تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}-\{2\}$. واخيرا الدالة f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}-\{0,2\}$.

6. بما أن $x^2>0$ فإن إشارة $f'(x)$ من إشارة $\varphi(x)$. إذن الدالة f متناقصة على $]0,+\infty[$.

إذن $\forall x\in]0,+\infty[\quad f(x)=\frac{\ln(1+x)}{1+x}\cdot\frac{1+x}{x}$.

$\lim_{x\to+\infty}\frac{1+x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x}=1$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+x)}{1+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln t}{t}=0$ إذن . $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$ ومنه

ومنحنى f تقبل في $+\infty$ خطا مقاربا معادلته $y=0$

تمرين 2-39

f دالة معرفة بالشكل: $f(x)=\begin{cases}(x+1)e^{-\frac{1}{x}} & , \quad x\ne0\\ 0 & , \quad x=0\end{cases}$

1. **أدرس تغيرات f على** $]-\infty,0[$ **وعلى** $]0,+\infty[$.

2. **بين بأن الدالة f مستمرة عن يمين 0 .**
3. **عين** $\lim\limits_{u\to+\infty}(1+u)e^{-u}$ ، **واستنتج قابلية اشتقاق f عند 0 .**
4. **عين النهاية عن اليسار للدالة f عند 0 .**
5. **أحسب النهايات عند $+\infty$ و $-\infty$ للدالة $f(x)$ و $\frac{f(x)}{x}$.**
6. **نضع** $\varphi(u)=(1+u)e^{-u}$ **برهن باستخدام متراجحة التزايدات المنتهية بأنه**

إذا كان $0<x$ ، $\varphi(x)=-\frac{1}{x^2}\le\varphi(\frac{1}{x})-\varphi(0)\le 0$.

وإذا كان $0>x$ ، $\varphi(x)=-\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}\le\varphi(\frac{1}{x})-\varphi(0)\le 0$

7. **استنتج عند $+\infty$ و $-\infty$ بأن المنحنى الممثل لـ f يقبل خط مقاربا يُطلب تعيين معادلته.**

الحل

1. الدالتين $x\mapsto\frac{1}{x}$ و $x\mapsto e^x$ وكذلك دالة التركيب $x\mapsto e^{-\frac{1}{x}}$ ، قابلة للاشتقاق على مجموعة تعريفها.

إذن الجداء f لـ $x\mapsto e^{-\frac{1}{x}}$ و $x\mapsto x+1$ تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}^*$.

$$\forall x\in\mathbb{R}^*\quad f'(x)=e^{-\frac{1}{x}}+(x+1)\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}=\frac{x^2+x+1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$$

على $\mathbb{R}^*$ كل حدود $f'(x)$ موجبة. $\forall x\in\mathbb{R}^*\quad f'(x)>0$

ومنه f متزايدة على $]-\infty,0[$ وعلى $]0,+\infty[$.

2. بما أن $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{-1}{x}\right)=-\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to0^+}e^{-\frac{1}{x}}=\lim\limits_{u\to-\infty}e^u=0$ و $\lim\limits_{x\to0^+}(x+1)=1$

إذن $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=0=f(0)$ والدالة f مستمرة عن يمين 0 .

3. نضع $v=-u$ ، فيكون $\lim\limits_{u\to+\infty}(1+u)e^{u}=\lim\limits_{v\to-\infty}(e^v+v\,e^v)=0$

$$\forall x\in\mathbb{R}^*\quad\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{x+1}{x}e^{-\frac{1}{x}}=\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}}$$

وبما أن $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}\right)=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{u\to+\infty}(u+1)e^u=0$

والدالة f تقبل الاشتقاق عن يمين 0 و $f(0^+)=0$

4. لدينا $\lim\limits_{x\to0^-}\left(-\frac{1}{x}\right)=+\infty$ ، إذن $\lim\limits_{x\to0^-}e^{-\frac{1}{x}}=\lim\limits_{u\to+\infty}e^u=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to0^-}(1+x)=1$

ومنه $\lim_{x\to 0^-} f(x)=+\infty$. عند 0 عن اليسار، المنحنى يقبل خط مقارب عمودي.

5. لدينا $\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)=0$ ، إذن $\lim_{x\to-\infty} e^{-\frac{1}{x}}=\lim_{u\to 0} e^{u}=1$ و $\lim_{x\to-\infty}(1+x)=-\infty$

ومنه $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$. عند $+\infty$ البرهان مطابق $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

لدينا $\frac{f(x)}{x}=\frac{x+1}{x}e^{-\frac{1}{x}}$ ومنه $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x}=1$ $\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x}=$. إذن $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1$ $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=$

6. الدالة φ قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ ، $\forall u\in]0,+\infty[\quad \varphi'(u)=e^{-u}-(1+u)e^{-u}=-ue^{-u}$

- ليكن $x>0$ ، نستخدم متراجحات التزايدات المنتهية على المجال $\left[0,\frac{1}{x}\right]$. لدينا

$$-\frac{1}{x}\le -u\le 0\ ,\ 0\le u\le\frac{1}{x}\quad \forall u\in\left[0,\frac{1}{x}\right] \text{ إذن } 1\le e^{-u}\le e^{-\frac{1}{x}} \text{ ومنه } 0\le ue^{-u}\le\frac{1}{x}$$

$$\text{إذن } -\frac{1}{x}\le\varphi'(u)\le 0\quad \forall u\in\left[0,\frac{1}{x}\right] \text{ ومنه } -\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}-0\right)\le\varphi(\frac{1}{x})-\varphi(0)\le 0$$

أخيرا ، إذا كان $x>0$ ، فسيكون $\varphi(x)=-\frac{1}{x^2}\le\varphi(\frac{1}{x})-\varphi(0)\le 0$.

- ليكن $x<0$ ، نستخدم متراجحات التزايدات المنتهية على المجال $\left[\frac{1}{x},0\right]$. لدينا

$$0\le -u\le -\frac{1}{x}\ ,\ \frac{1}{x}\le u\le 0\quad \forall u\in\left[\frac{1}{x},0\right] \text{ إذن } 1\le e^{-u}\le e^{-\frac{1}{x}}$$

$$\text{إذن } 0\le\varphi'(u)\le-\frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}}\quad \forall u\in\left[\frac{1}{x},0\right] \text{ ومنه } 0\le\varphi(0)-\varphi(\frac{1}{x})-\le-\frac{1}{x}\left(0-\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}}$$

وأخيرا إذا كان $x<0$ ، $\varphi(x)=-\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}\le\varphi(\frac{1}{x})-\varphi(0)\le 0$

7. الدالة φ قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ ، $\forall u\in]0,+\infty[\quad \varphi'(u)=e^{-u}-(1+u)e^{-u}=-ue^{-u}$

- النهاية $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ ، نستخدم متراجحات التزايدات المنتهية على المجال $\left[0,\frac{1}{x}\right]$. لدينا

$$\forall x\in\mathbb{R}^*\quad f(x)-x=(x+1)e^{-\frac{1}{x}}-x=x\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}}-1\right]=x\left[\varphi(\frac{1}{x})-\varphi(0)\right]$$

إذن إذا كان $x>0$ ، $-\frac{1}{x}\le f(x)-x\le 0$. وبما أن $\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{x}=0$ ،

فإن $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)=0$ بقيم سالبة.

وإذا كان $0 > x$ ، $0 \le f(x)-x \le -\frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}}$. وبما أن $\lim_{x\to-\infty} -\frac{1}{x} = 0$ و $\lim_{x\to-\infty} e^{-\frac{1}{x}} = 1$ فإن

$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}} = 0$ وأخيرا $\lim_{x\to-\infty}(f(x)-x) = 0$ بقيم موجبة.

في $+\infty$ و $-\infty$ المنحنى يقبل خط مقارب مائل معادلته $y = x$ ، يكون من الأعلى عند $-\infty$ ،

ويكون من الأسفل عند $+\infty$.

تمارين إضافية

تمرين 1 أحسب إن أمكن:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1} \quad ، \quad \lim_{x\to\pm\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x) \quad ، \quad \lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{3x^2+x}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(x+\frac{\sqrt{x^3}}{x}\right) \quad ، \quad \lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}) \quad ، \quad \lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\sqrt{x^2-4}}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x^2-9}}{x-3} \quad ، \quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}\right) \quad ، \quad \lim_{x\to 1}\left(\frac{2}{1-x^2}-\frac{3}{1-x^3}\right)$$

تمرين 2 عين مجموعة تعريف f حيث: $f(x) = \sqrt{x+2\sqrt{x+1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$

ثم احسب $(f(x))^2$ واستنتج عبارة بسيطة لـ: $f(x)$.

احسب $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-2}{x-2}$ ، وأنشئ منحنى f .

تمرين 3 عين الخطوط المقاربة لمنحنى كل من الدوال الآتية:

$$f(x) = \frac{1}{(x-2)^2} \quad ، \quad g(x) = x+\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{x-1}} \quad ، \quad h(x) = x-2+\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} \ .$$

تمرين 4 نعتبر الدالة $f(x)$ المعرفة على $[0,2]$ حيث $f(x) = \begin{cases} x \ , & x \in [0,1] \\ 2-x \ , & x \in]1,2] \end{cases}$

برهن أن f مستمرة على المجال $[0,2]$

استخدام التعريف لحساب $f(x_0)$ عندما $x_0=1$.

تمرين 5 نعتبر الدالة العددية $f(x)=x^2+3|x-1|$

احسب مشتقة f عند $x_0=-2$ و $x_0=+2$.

هل تقبل f الاشتقاق عند $x_0=1$ ؟ في حالة العكس، هل تقبل f الاشتقاق عن يمين ويسار هذه القيمة ؟

تمرين 6 ادرس استمرار الدالتين الآتيتين على مجالي تعريفيهما:

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1+|x|} & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases} \quad ، \quad f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases} .$$

تمرين 7 نعتبر الدالة العددية ذات المتغير الحقيقي x المعرفة كما يلي: $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$

عين D_f مجموعة تعريف f.

برهن أن: $\forall x\in D_f\ ,\ f(x)=\dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}$

أدرس استمرارية f.

أحسب $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ ، ماذا تستنتج ؟

هل تقبل f الاشتقاق على D_f ؟ عين دالتها المشتقة f'.

تمرين 8 ادرس استمرار الدوال الآتية عند القيم الرفقة بها:

$$g(x)=\sqrt{1-x^2} \text{ en } x_0=1 \quad ، \quad f(x)=\sqrt{4-x} \text{ en } x_0=4 \ ،$$

$$h(x)=\begin{cases}e^{\frac{1}{x^2-1}} & \text{si } |x|<1\\ 0 & \text{si} |x|\geq 1\end{cases} \ , \quad \text{en } x_0=-1 \text{ et } x_0=1$$

تمرين 9 ادرس إمكانية تمديد الدوال $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$ المعرفة أدناه إلى الدوال $\overline{f}$ المعرفة والمستمرة على $\mathbb{R}$:

$$f(x)=x^2+\frac{|x|}{x} \quad ، \quad f(x)=\frac{x^2+|x|}{x^2-|x|} \quad ، \quad f(x)=x\sin\left(\frac{1}{2x}+\frac{1}{2|x|}\right) .$$

تمرين 10 احسب مشتقات الدوال الآتية:

$$x^3\sqrt{x}-x\sqrt[4]{x} \ ، \ x^3-2x^2-\log\left(x^2-x\right) \ ، \ e^{3x}-1 \ ، \ e^{\frac{1}{x}} \ ،$$

$\log\dfrac{x^3+1}{x}$ ، $e^{\frac{1}{x^2}}$ ، $e^{\sqrt{x}}$ ، e^{e^x} ، $\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\log(x-1)}$.

تمرين 11 نعتبر

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^2(x-1)^2}}{(x-1)(|x|+1)} & , x\in\mathbb{R}-\{1\}\\ -\dfrac{1}{2} & , x=1\end{cases}$$

ادرس استمرار واشتقاق $f(x)$ عند $x_0=0$ و $x_0=1$.

تمرين 12 نعتبر الدالة $F(x)=\int_2^x \dfrac{1}{t\ln t}\,dt$.

- بين أن الدالة $F(x)$ مستمرة وتقبل الاشتقاق على $]2;+\infty[$، عين مشتقتها $f(x)$.
- حقق نظرية التزايدات المنتهية على الدالة $f(x)=\dfrac{1}{x\ln x}$ في المجال $[2;4]$.
- عين القيمة المتوسطة c لـ $f(x)=\dfrac{1}{x\ln x}$ على $[2;4]$.

تمرين 13 احسب المشتقات الثانية للدوال:

$f(x)=x^3(x+1)^2$ ، $f(x)=\sqrt{x^2-4}$ ، $f(x)=(4x+1)^{3/2}$.

تمرين 14 طبق نظرية التزايدات المنتهية على الدالة $f(x)=e^x$، على $[0;x]$ ، $x>0$، بعد التحقق من شروطها

تمرين 15 هل يمكن تطبيق نظرية رول على الدالة $f(x)=\dfrac{x^2-4x}{x-2}$ في المجال $[0;2]$ ؟

تمرين 16 هل يمكن تطبيق نظرية رول على الدالة $f(x)=1-\sqrt[3]{(x-1)^2}$ في المجال $[0,2]$ ؟

نفس السؤال في المجال $[-1,+1]$ بالنسبة للدالتين : $\sqrt{|x|}$ و $\sqrt[3]{x}$ ؟

تمرين 17 أدرس وجود ووحدانية c حيث: $f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)$

في الحالات:

$f(x)=(x+2)(x-1)$ $\quad a=-2, b=1$

$f(x)=e^x$ $\quad a=0, b=e$

$f(x)=\sin x-2x$ $\quad a=0, b=2\pi$

$f(x)=\sqrt[3]{x}$ $\quad a=-1, b=1$

تمرين 18 ليكن التطبيق f المعرف كما يلي: $f(x)=\begin{cases} x^3\left(\frac{4}{3}-\ln(x^2)\right), & x\neq 0 \\ 0 \quad , & x=0\end{cases}$

اثبت أن f مستمر على $\mathbb{R}$. هل يقبل f الاشتقاق على $\mathbb{R}$؟

ادرس تغيرات الدالة f، وأنشئ منحناها (Γ) في معلم متعامد ومتجانس.

بين أن (Γ) يقبل نقطة انعطاف، يطلب تعيين إحداثييها.

تمرين 19 أدرس ومثّل بيانيا الدالة. $f(x)=\frac{1}{x+1}+\ln\frac{1}{x+1}$.

عين نقطة تقاطع المنحنى مع (Ox)، حدد وضعية المماس عندها.

أحسب $f''(x)$، أوجد x حيث $f''(x)=0$.

تمرين 20 أدرس تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$، حيث $f(x)=x^2(x-1)$.

باعتبار أن $x\mapsto\sqrt[3]{x}$ هي دالة عكسية للدالة $x\mapsto x^3$ على $\mathbb{R}$، استنتج من الدراسة السابقة تغيرات g على $\mathbb{R}$، حيث $g(x)=\sqrt[3]{x^2(x-1)}$.

تمرين 21 ليكن (Γ) المنحنى البياني للدالة f حيث:

$$f(x)=(1+x)e^{-x}$$

1. بين أن f تقبل الاشتقاق مرتين على $\mathbb{R}$، أحسب $f'(x)$ و $f''(x)$.
2. أدرس تغيرات $f(x)$ ، أحسب $f(1)$ ونهايتي f عند $+\infty$ وعند $-\infty$.
3. أنشئ المنحنى (Γ) في معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$. (وحدة القياس 1,5 سم)
4. برّر لماذا تقبل المعادلة $f(x)=-1$ حلا $x_0\in\mathbb{R}$. هل هذا الحل وحيد ؟
5. بين أن الدالة f هي تطبيق تقابلي من $\mathbb{R}_+$ على المجال $]0;1]$.ما هي مجموعة تعريف دالتها العكسية f^{-1} ؟ أنشئ المنحنى (Φ) الممثل للدالة f^{-1} في نفس المعلم السابق.
6. بين أن f^{-1} تقبل الاشتقاق عند $y=\frac{2}{e}$. أحسب $(f^{-1})'(\frac{2}{e})$.

أنشئ التمثيل البياني لتغيرات الدالة f في معلم متعامد ومتجانس.

تمرين 22 ادرس الدالة $f(x)$ وأنشئ تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس في كل حالة من الحالات :

$$f(x)=x+\sqrt{|x^2-2x|}\ ,\ f(x)=\sqrt{\frac{x+1}{x+1}}\ ,\ f(x)=\frac{2e^x-1}{e^x-1}$$

$$f(x)=\sqrt[3]{x^3-3x+2}\ ,\ f(x)=\frac{\ln x}{1+x-\ln x}\ ,\ f(x)=e^{\frac{1}{x}}\ ,\ f(x)=\frac{|x+1|}{x+2}$$

ملخص الدرس

الدوال الدائرية العكسية

1. الدالة arcsin

الدالة $\sin$ على المجال $\left[-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}\right]$ مستمرة ومتزايدة تماما، فهي تقابل.

نرمز لتطبيقها العكسي بـ arcsin .

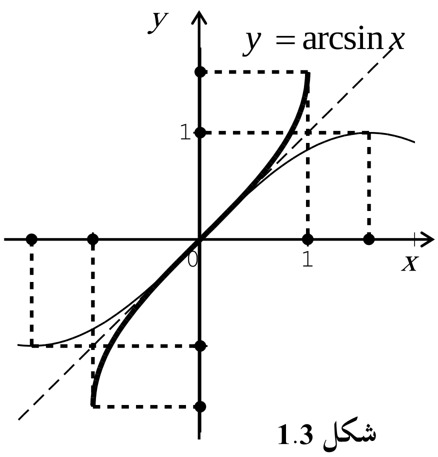
$$y=\arcsin x\ ,\ x\in\left[-1,+1\right] \Leftrightarrow x=\sin y\ ,\ y\in\left[-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}\right]$$

- الدالة arcsin فردية.
- لدالة arcsin مستمرة ومتزايدة تماما على $\left[-1,+1\right]$ وتأخذ قيمتها في $\left[-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}\right]$.
- الدالة arcsin تقبل الاشتقاق على $\left]-1,+1\right[$:

$$\left(\arcsin x\right)'=\frac{1}{\left(\sin y\right)'}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

جدول تغيرات arcsin

x	-1 $\qquad$ $+1$
$(\arcsin x)'$	$+$
$\arcsin x$	$-\frac{\pi}{2}$ $\nearrow$ $\frac{\pi}{2}$



شكل 3.1

مثال1 حساب $\arcsin\frac{1}{2}$:

من العلاقة $\arcsin\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin y=\frac{1}{2},\ \ y\in\left[-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}\right]$ ينتج $y=\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$

مثال2 تعيين مجموعة التعريف الدالة $f(x)=\arcsin\left(x^2-1\right)$

لدينا $x\in D_f \Leftrightarrow x^2-1\in[-1,+1] \Leftrightarrow x\in\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$

f تقبل الاشتقاق إذا كان $x^2-1\in\left]-1,+1\right[$ أي: $x\in\left]-\sqrt{2},\sqrt{2}\right[$

ولدينا عبارة المشتق (باستخدام علاقة مشتق تركيب الدالتين $x\mapsto x^2-1$ و $x\mapsto\arcsin x$) :

$$f'(x)=\frac{2x}{\sqrt{2x^2-x^4}}$$

2. الدالة arccos

الدالة العكسية لـ $\cos$ على المجال $[0,\pi]$ موجودة، وهي الدالة التي نرمز لها بـ arccos .

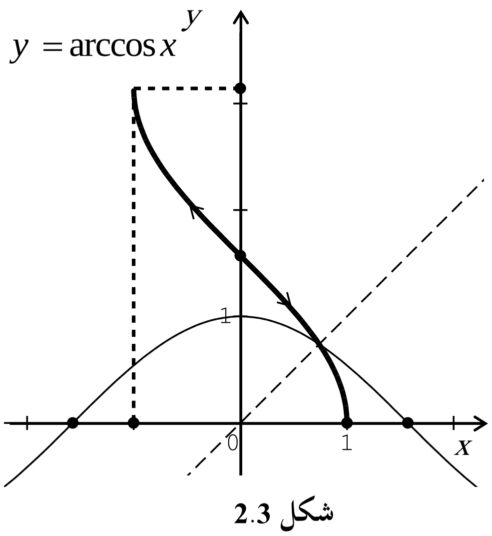
$$y=\arccos x\ ,x\in[-1,+1] \Leftrightarrow x=\cos y\ ,y\in[0,+\pi]$$

- الدالة arccos زوجية.
- الدالة arccos مستمرة ومتناقصة تماما على $[-1,+1]$ وتأخذ قيمتها في $[0,+\pi]$.
- الدالة arccos تقبل الاشتقاق على $]-1,+1[$:

$$(\arccos x)'=-\frac{1}{\cos y}=\frac{-1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

جدول التغيرات $\arccos x$:

x	-1 $\quad$ $+1$
$(\arccos x)'$	$-$
$\arccos x$	$\pi \searrow 0$



شكل 2.3

مثال1 حساب $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$

لدينا $y=\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos y=\frac{\sqrt{3}}{2} \wedge y\in[0,\pi] \Leftrightarrow y=\frac{\pi}{6}$

ومنه $y=\operatorname{a}\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{6}$

وبنفس الطريقة نجد : $\arccos\left(\cos\left(\frac{-\pi}{2}\right)\right)=\frac{\pi}{2}$

مثال2 إثبات العلاقة: $\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$

نعتبر الدالة $f(x)=\arcsin x+\arccos x$

مجموعة التعريف : $D_f=[-1,+1]$، ولدينا :

$$\forall x\in]-1,+1[\ ,\quad f'(x)=0$$
$$\forall x\in]-1,+1[\ ,\quad f(x)=c \quad (c\in\mathbb{R})$$
$$c=\arcsin 0+\arccos 0=\frac{\pi}{2}$$

نتحقق من $f(-1)=f(-1)=\frac{\pi}{2}$

ومنه $\forall x\in[-1,+1]\ ,\quad \arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$

مثال3 إثبات صحة المتطابقتين الآتيتين على $[-1;1]$

$\cos(\arccos x)=x \quad , \quad \sin(\arcsin x)=x$ ،

لدينا بالتعريف: $y=\arcsin x\ ,\ -1\le x\le 1 \Leftrightarrow x=\sin y\ ,\ -\frac{\pi}{2}\le y\le\frac{\pi}{2}$

ومنه $\forall x\in[-1,+1],\quad \sin(\arcsin x)=x$

وكذلك: $y=\arccos x\ ,\ -1\le x\le 1 \Leftrightarrow x=\cos y\ ,\ 0\le y\le\pi$

ومنه $\forall x\in[-1,+1],\quad \cos(\arccos x)=x$

3. الدالة arctan

الدالة الدورية tan مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $\left]-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}\right[$. نرمز لدالتها العكسية بـ arctan .

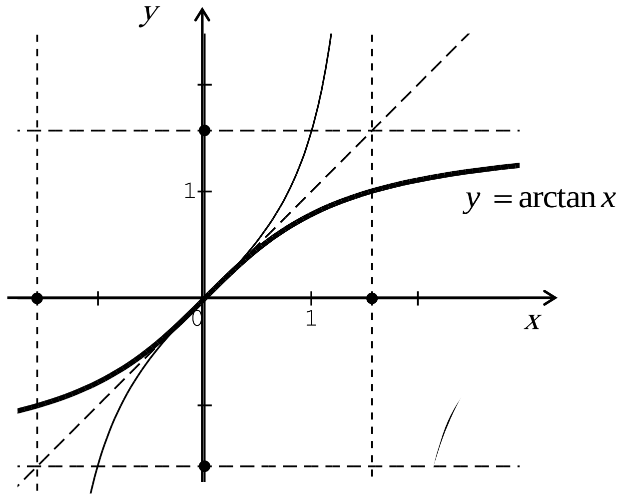
$$y=\arctan x\ ,\ x\in]-\infty,+\infty[\Leftrightarrow x=\tan y\ ,\ y\in\left]-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}\right[$$

– الدالة arctan فردية

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad (\arctan x)'=\frac{1}{(\tan y)'}=\frac{1}{1+\tan^2 y}=\frac{1}{1+x^2}$$

جدول التغيرات $\arctan x$

x	$-\infty \qquad\qquad\qquad +\infty$
$(\arctan x)'$	$+$
$\arctan x$	$-\frac{\pi}{2} \nearrow \frac{\pi}{2}$



شكل 3.3

مثال تعيين مشتقة الدالة $\arctan(\ln x)$

لدينا $$\frac{d}{dx}\arctan(\ln x)=\arctan'(\ln x)\cdot(\ln x)'=\frac{\frac{1}{x}}{1+\ln^2 x}=\frac{1}{x\,(1+\text{n}^2 x)}$$

الدوال القطعية الزائدية وعكسها

4. الدوال القطعية الزائدية

تسمى الدالة $x \mapsto \sinh x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ بدالة الجيب القطعي الزائدي، ونرمز لها بـ $\sinh$.

وتسمى الدالة $x \mapsto \cosh x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ بدالة جيب التمام القطعي الزائدي، ونرمز لها بـ $\cosh$.

كما تسمى الدالة $x \mapsto \tanh x=\dfrac{\sinh x}{\cosh x}$ بدالة الظل القطعي الزائدي، ونرمز لها بـ $\tanh$.

1.4 علاقات شهيرة

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \begin{array}{ll} e^{x} = \cosh x + \sinh x & (1) \\ e^{-x} = \cosh x - \sinh x & (2) \end{array}$$

بضرب (1) بـ (2) نجد: $e^{x-x} = \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

ونجمل فيما يلي أهم العلاقات الزائدية: $\cosh(x \pm y) = \cosh x \cdot \cosh y \pm \sinh x \cdot \sinh y$

$$\sinh(x \pm y) = \sinh x \cdot \cosh y \pm \sinh y \cdot \cosh x$$

$$\tanh(x \pm y) = \frac{\tanh x \pm \tanh y}{1 \pm \tanh x \cdot \tanh y}$$

2.4 دراسة تغيرات $\sinh x$ و $\cosh x$

الدالتان $\sinh$ و $\cosh$ مستمرتان وتقبلان الاشتقاق على مجموعة تعريفيهما $\mathbb{R}$.

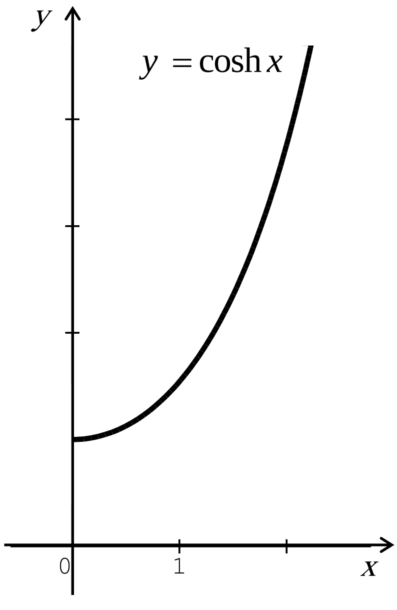
$$(\cosh x)' = \sinh x \;,\; (\sinh x)' = \cosh x$$

وبملاحظة $\forall x \in [0, +\infty[, \quad \cosh x > 0 \,,\; \sinh x \geq 0$

ونستنتج جدولي تغيرات $\sinh$ و $\cosh$ على المجال $[0, +\infty[$.

جدول تغيرات $x \mapsto \cosh x$

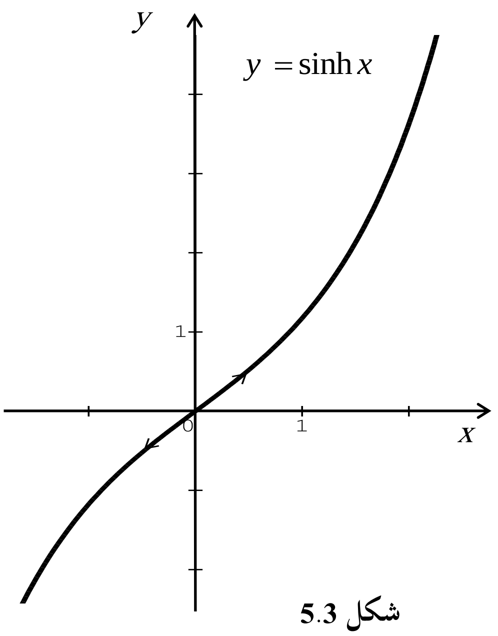
x	$0 \qquad\qquad +\infty$
$(\cosh x)'$	$+$
$\cosh x$	$1 \nearrow +\infty$



شكل 4.3

جدول تغيرات $x \mapsto \sinh x$

x	$0 \qquad\qquad +\infty$
$(\sinh x)'$	$+$
$\sinh x$	$0 \nearrow +\infty$



شكل 5.3

3.4 تغيرات tanh

الدالة tanh مستمرة وتقبل الاشتقاق على مجموعة تعريفهما.

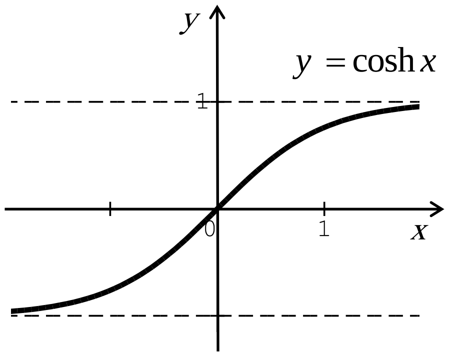
$$(\tanh x)' = \frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x$$

نلاحظ $\tanh 0 = 0$ و $\forall x \in [0, +\infty[,\ \tanh x \geq 0$

ومنه جدول تغيرات tanh على المجال $[0, +\infty[$.

جدول تغيرات $x \mapsto \tanh x$

x	$0 \qquad\qquad +\infty$
$(\tanh x)'$	$+$
$\tanh x$	$1 \nearrow +\infty$



شكل 6.3

5. الدوال القطعية الزائدية العكسية

1.5 الدالة $\arg\cosh$

الدالة $x \mapsto \cosh x$ مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]0,+\infty[$. فهي إذن، تقبل دالة عكسية. تسمى هذه الدالة العكسية بدالة قوس جيب تمام الزائدي، ونرمز لها بالرمز $\arg\cosh x$.

لدينا $$y = \arg\cosh x \quad \Leftrightarrow \quad x = \cosh y \ , \ y > 0$$

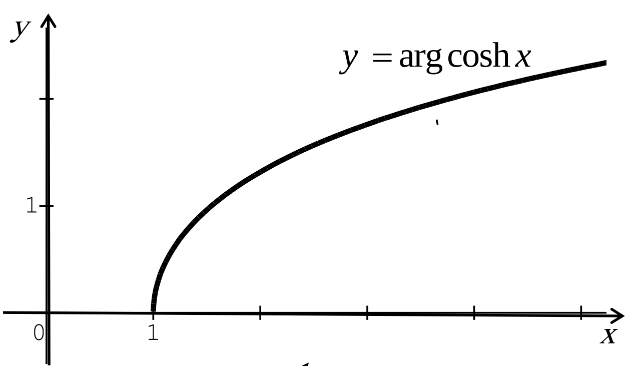
الاشتقاق : $$y'(x) = \frac{1}{x'(y)} = \frac{1}{\sinh y} = \frac{1}{\sqrt{\cosh^2 y - 1}}$$

ومنه $$(\arg\cosh x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

جدول تغيرات $x \mapsto \arg\cosh x$

x	0 $\qquad$ $+\infty$
$(\arg\cosh x)'$	$+$
$\arg\cosh x$	$1 \nearrow +\infty$

ومنحنى الدالة $\arg\cosh x$ يقبل خط مقارب يوازي محور الفواصل.



شكل 7.3

ملاحظة

من أجل $1 \leq x$، الدالة $x \mapsto \arg\cosh x$ تساوي الدالة $x \mapsto \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$.

2.5 الدالة $\arg\sinh$

نعلم الدالة $x \mapsto \arg\sinh x$ مستمرة ومتزايدة تماما على $]-\infty, +\infty[$ وتأخذ قيمتها في $]-\infty, +\infty[$.

تعريف

تسمى دالتها العكسية بدالة قوس الجيب الزائدي. ونرمز لها بـ $\arg\sinh x$. ولدينا

$$y = \arg\sinh x \quad \Leftrightarrow \quad x = \sinh y$$

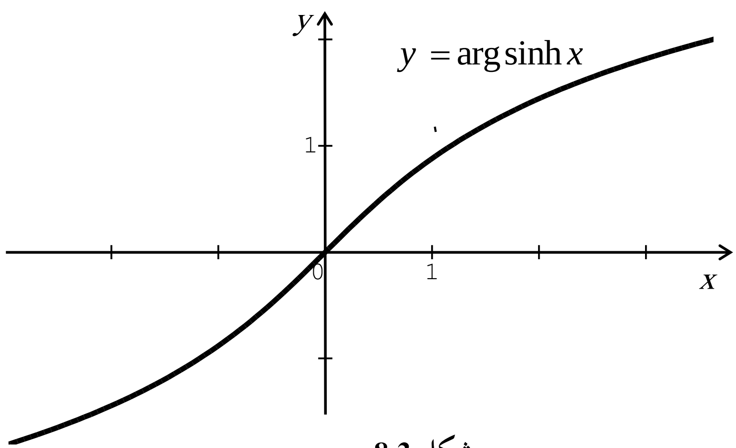
$\arg\sinh$ دالة فردية.

الاشتقاق :
$$y'(x) = \frac{1}{x'(y)} = \frac{1}{\cosh y} = \frac{1}{\sqrt{\sinh^2 y + 1}}$$

ومنه
$$(\arg\sinh x)' = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

جدول تغيرات $x \mapsto \arg\sinh x$

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$(\arg\sinh x)'$	$+$
$\arg\sinh x$	$-\infty \nearrow +\infty$



شكل 8.3

3.5 الدالة $\arg\tanh$

الدالة $x \mapsto \tanh x$ مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]-\infty, +\infty[$ وتأخذ قيامها في المجال $]-1, +1[$ فهي إذن، تقبل دالة عكسية. تسمى هذه الدالة العكسية بدالة قوس الظل الزائدي، ونرمز لها بـ $\arg\tanh x$.

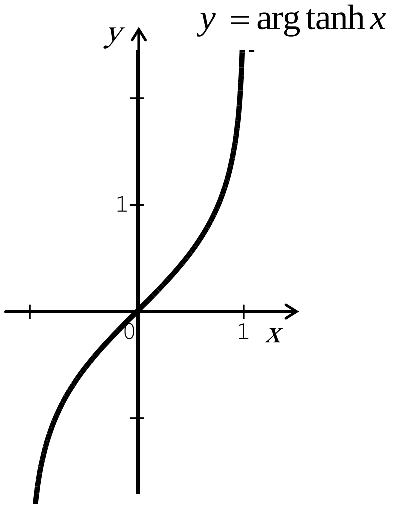
الدالة $\arg\tanh$ فردية.

الاشتقاق :
$$y'(x) = \frac{1}{x'(y)} = \cosh^2 x = \frac{1}{1-\tanh^2 x}$$

ومنه
$$(\arg\tanh x)' = \frac{1}{1-x^2}$$

جدول تغيرات

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$(\arg\tanh x)'$	$+$
$\arg\tanh x$	$-1 \nearrow +1$



شكل 9.3

ملاحظة

الدالة $x \mapsto \arg\tanh x$ المعرفة على $]-1, +1[$، تساوي الدالة $x \mapsto \frac{1}{2}\ln\frac{1-x}{1+x}$.

تمارين محلولة

تمرين 3-1

عبر عن العبارة $\tan(2\arcsin x)$ **بدلالة** x .

الحل

نلاحظ أن: $\tan(2\arcsin x)$ معرفة إذا $-\frac{\pi}{2} \le \arcsin x \le \frac{\pi}{2}$ إذا $-\frac{\sqrt{2}}{2} \le x \le \frac{\sqrt{2}}{2}$

لدينا
$$\tan(2\arcsin x) = \frac{\sin(2\arcsin x)}{\cos(2\arccos x)} = \frac{2\sin(\arcsin x)\cdot\cos(\arcsin x)}{1-2\sin^2(\arcsin x)}$$

وبما أن $\sin(\arcsin x) = x$ و $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$

فإن
$$\tan(2\arcsin x) = \frac{2x\sqrt{1-x^2}}{1-2x^2}$$

تمرين 3-2

أثبت صحة العلاقة $\forall x < 1, \quad \arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \arctan x = \frac{\pi}{4}$

الحل

نعتبر الدالة $f :]-\infty,1[\to \mathbb{R}$ المعرفة كما يلي: $f(x) = \arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \arctan x$

بما أن الدالتين $\arctan x$ و $x \mapsto \frac{1+x}{1-x}$ تقبلان الاشتقاق على $]-\infty,1[$. ولدينا :

$$f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2}\cdot\frac{2}{(1-x)^2} - \frac{1}{1+x^2}, \quad \forall x < 1$$
$$= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0, \quad \forall x < 1$$

وكنتيجة الدالة f ثابتة على $]-\infty,1[$، ولدينا بالخصوص $\forall x < 1 \quad f(x) = f(0)$

أي $f(x) = \arctan(1) - \arctan 0$ وأخيرا $\forall x < 1 \quad , \quad f(x) = \frac{\pi}{4}$

تمرين 3-3

عين مجموعة تعريف الدالة : $f(x) = \arccos(2x+5)$

الحل

$$x \in D_f \Leftrightarrow 2x+5 \in [-1,+1] \Leftrightarrow x \in [-3,-2]$$

f تقبل الاشتقاق إذا كان: $2x+5 \in]-1,+1[$ أي إذا كان $x \in]-3,-2[$

$$f'(x) = \frac{2}{\sqrt{1-(2x+5)^2}}$$

الحساب نبين أن $f(x)$ غير قابلة للاشتقاق عند (-3) و (-2).

تمرين 3–4

أثبت صحة المتراجحة $\forall x \in]-1,1[,\ \arccos x < \sqrt{1-x^2}$

الحل

نضع $g(x) = \arccos x - \sqrt{1-x^2}$ ، g تقبل الاشتقاق على $]-1,+1[$:

$$g'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{x-1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{x-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

وينتج أن g متناقصة تماما وتنعدم عند 1، ومنه $g(x) < 0$ ، $\forall x \in]-1,+1[$

تمرين 3–5

أثبت صحة المتطابقتين الآتيتين، $x \in [-1;1]$

$$\sin(Arc\cos x) = \sqrt{1-x^2} \text{ ، } \cos(Arc\sin x) = \sqrt{1-x^2}$$

الحل

- لدينا $y = Arc\sin x \Leftrightarrow \sin y = x ,\ -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$

ومنه $0 \le \cos y$ وأخيرا $\cos(Arc\sin x) = \sqrt{1-x^2}$ $x \in [-1;1]$

- لدينا $y = Arc\cos x \Leftrightarrow \cos y = x ,\ 0 \le x \le \pi$.

ومنه $0 \le \sin y$، ومنه أخيرا المتراجحة $\sin(Arc\cos x) = \sqrt{1-x^2}$ $x \in [-1;1]$

تمرين 3–6

أدرس اشتقاق الدالة $f(x) = \arctan \frac{1}{x-1}$

الحل

مجوعة تعريف f : $D_f =]-\infty,1[\cup]1,+\infty[$

f تقبل الاشتقاق على D_f ، ولدينا :

$$f'(x)=\frac{-\frac{1}{(1-x)^2}}{1+\left(\frac{1}{1-x}\right)^2}=-\frac{1}{(x-1)^2+1}$$

الاشتقاق عند $x=\pm 1$:

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x-1}=+\infty \;\Rightarrow\; \lim_{x\to+\infty}\arctan\frac{1}{x-1}=\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{x-1}=-\infty \;\Rightarrow\; \lim_{x\to-\infty}\arctan\frac{1}{x-1}=-\frac{\pi}{2}$$

تمرين 3–7

دراسة الاشتقاق للدالة f حيث :

$$f(x)=\begin{cases}\arctan x & , \quad |x|\le 1\\ \frac{\pi}{4}\frac{|x|}{x}-\frac{x-1}{2} & , \quad |x|>1\end{cases}$$

الحل

الدالة f تقبل الاشتقاق على $]-\infty,-1[\cup]1,1[\cup]1,+\infty[$:

$$f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{1+x^2} & , \quad |x|<1\\ \frac{1}{2} & , \quad |x|>1\end{cases}$$

الاشتقاق عند $x=1$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\arctan x-\frac{\pi}{2}}{x-1}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{1}{2}$$

الاشتقاق عند $x=-1$

$$\lim_{x\to -1^+}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{x\to -1^+}\frac{\arctan x+\frac{\pi}{2}}{x+1}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to -1^-}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=+\infty$$

ومنه الدالة f لا تقبل الاشتقاق عند $x=-1$، ولدينا :

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+x^2}\ , & -1<x\le 1\\ \dfrac{1}{2}\ , & |x|>1\end{cases}$$

تمرين 3–8

حل في $\mathbb{R}$ المعادلتين الآتيتين:

$$2Arc\tan\frac{1}{2}=Arc\tan x \quad ، \quad Arc\sin\frac{3}{5}+Arc\sin\frac{5}{13}=Arc\sin x$$

- لنحسب $A=\sin\left(Arc\sin\frac{3}{5}+Arc\sin\frac{5}{13}\right)$

$$A=\sin\left(Arc\sin\frac{3}{5}\right)\cos\left(Arc\sin\frac{5}{13}\right)+\cos\left(Arc\sin\frac{3}{5}\right)\sin\left(Arc\sin\frac{5}{13}\right)$$

$$A=\frac{3}{5}\sqrt{1-\frac{25}{169}}+\frac{5}{11}\sqrt{1-\frac{9}{25}}=\frac{3}{5}\cdot\frac{12}{13}+\frac{5}{13}\cdot\frac{4}{5}=\frac{56}{65}$$

ولدينا $0\le\frac{3}{5}\le\frac{\sqrt{2}}{2}$ ومنه $0\le Arc\sin\frac{3}{5}\le\frac{\pi}{4}$، وكذلك $0\le\frac{5}{13}\le\frac{\sqrt{2}}{2}$ ومنه $0\le Arc\sin\frac{5}{13}\le\frac{\pi}{4}$

إذن $0\le Arc\sin\frac{3}{5}+Arc\sin\frac{5}{13}\le\frac{\pi}{2}$

$Arc\sin\frac{3}{5}+Arc\sin\frac{5}{13}$ و $Arc\sin\frac{56}{65}$ لهما نفس sin ومحصورين ما بين 0 و $\frac{\pi}{2}$ فهما متساويين. لنعين x بحيث $Arc\sin\frac{56}{65}=Arc\sin x$. بما أن الدالة $Arc\sin$ هي تقابل لـ$[-1,1]$ على $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ فإنه يكون $x=\frac{56}{65}$ ومنه مجموعة الحلول المطلوبة هي $S=\left\{\frac{56}{65}\right\}$.

لدينا $\frac{4}{3}=\dfrac{2\tan\left(Arc\tan\frac{1}{2}\right)}{1-2\tan^2\left(Arc\tan\frac{1}{2}\right)}=\tan\left(2Arc\tan\frac{1}{2}\right)$ و $2Arc\tan\frac{1}{2}$ و $Arc\tan\frac{4}{3}$ لهما نفس tan.

ولدينا $0\le\frac{1}{2}<1$ ومنه $0\le Arc\tan\frac{1}{2}\le\frac{\pi}{4}$، وبما أن كلا $2Arc\tan\frac{1}{2}$ و $Arc\tan\frac{4}{3}$ محصورين ما بين 0 و $\frac{\pi}{2}$، فهما إذن متساويين. إذن

إذن $x=\frac{4}{3}$ ومنه مجموعة الحلول المطلوبة هي $S=\left\{\frac{4}{3}\right\}$.

تمرين 3–9

عين الدوال الأصلية لكل من الدوال الآتية:

$$\frac{x\,e^x}{(1+x)^2} \ ، \ \ln(1+x^2) \ ، \ \arg ch\,x \ ، \ \arg sh\,x \ ، \ \arctan x \ ، \ \arcsin x \ ، \ \frac{1}{x\ln x}$$

الحل

$$\int \frac{1}{x\ln x}dx = |\ln x| + c$$

$$\int \arcsin x\,dx = x\arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c$$

$$\int \arctan x\,dx = x\arctan x - \int \frac{x}{1+x^2}dx = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c$$

$$\int \arg sh\,x\,dx = x\arg sh\,x - \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx = x\arg sh\,x - \sqrt{1+x^2} + c$$

$$\int \arg ch\,x\,dx = x\arg ch\,x - \int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}dx = x\arg ch\,x - \sqrt{x^2-1} + c$$

$$\int \ln(1+x^2)\,dx = x(1+x^2) - 2\int \frac{1+x^2-1}{(1+x^2)}dx = x(1+x^2) - 2x + 2\arctan x + c$$

لدينا $\frac{x}{(1+x)^2}e^x = \frac{1}{1+x}e^x + \frac{x}{(1+x)^2}e^x = \left(\frac{1}{1+x}e^x\right)'$ ومنه $\int \frac{x}{(1+x)^2}e^x = \frac{e^x}{1+x} + c$

تمرين 3–10

أحسب التكاملين الآتيين: $I = \int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,dt$ و $J = \int_0^1 \frac{2e^x}{e^{2x}+1}dx$

الحل

- في التكامل I نلاحظ بأن مشتقة الدالة $x \mapsto \sin x$ هي دالة مستمرة على المجال $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

إذن بوضع $t = \sin x$ حيث x من المجال $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ يكون $dt = \cos x\,dx$

ومنه
$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2}\cos x\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2x}{2}dt = \frac{\pi}{4}$$

- في التكامل J نلاحظ بأن مشتقة الدالة $x \mapsto e^x$ هي دالة مستمرة على المجال $[0,1]$.

بوضع $t = e^x$ حيث x من المجال $[0,1]$ يكون $dt = e^x dx$

ومنه
$$J = \int_1^e \frac{2}{t^2+1}dt = [Arc\tan t]_1^e = Arc\tan e - \frac{\pi}{2}$$

تمرين 3–11

أحسب التكاملات الآتية:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx \ , \ \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{Arc\sin x}{\sqrt{1-x^2}} \ , \ \int_{-1}^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2}dx \ , \ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1-\cos^2 x}dx$$

الحل

- $$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx = \left[Arc\sin x\right]_0^{\frac{1}{2}} = Arc\sin x - Arc\sin x = \frac{\pi}{6}$$
- $\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{Arc\sin x}{\sqrt{1-x^2}}$ نلاحظ بان $\frac{Arc\sin x}{\sqrt{1-x^2}}$ من الشكل $u'u$ ومنه

$$\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{Arc\sin x}{\sqrt{1-x^2}} = \left[\frac{1}{2}(Arc\sin x)^2\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2}\left(Arc\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{\pi^2}{18}$$

- $$\int_{-1}^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2}dx = \left[Arc\tan x\right]_{-1}^{\sqrt{3}} = Arc\tan\sqrt{3} - Arc\tan(-1) = \frac{7\pi}{12}$$
- $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1-\cos^2 x}dx$. نلاحظ أن $\frac{\sin x}{1-\cos^2 x}$ من الشكل $\frac{u'}{1-u^2}$ ومنه

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1-\cos^2 x}dx = \left[-Arc\tan(\cos x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = Arc\tan 0 - Arc\tan 1 = \frac{\pi}{4}$$

تمرين 3–12

أحسب التكاملات الآتية:

$$\int_0^2 \frac{1}{t^2-2t+2}dt \ , \ \int_1^2 \frac{t}{(t+1)(t^2+4)}dt \ , \ \int_0^1 \frac{1}{2t^2+6t+5}dt$$

الحل

- في التكامل $\int_0^2 \frac{1}{t^2-2t+2}dt$ نلاحظ بأن $t^2-2t+2=(t-1)^2+1$. وبوضع $u=t-1$ الذي يتغير من -1 إلى 1 عندما يتغير t من 0 إلى 2 و $du=dt$.

إذن $$\int_0^2 \frac{1}{t^2-2t+2}dt = \int_{-1}^{1} \frac{1}{u^2+1}du = Arc\tan 1 - Arc\tan(-1) = \frac{\pi}{4} - (-\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{2}$$

• في التكامل $\int_1^2 \frac{t}{(t+1)(t^2+4)}dt$ نلاحظ بأن $\frac{t}{(t+1)(t^2+4)}=-\frac{1}{5}\frac{1}{t+1}+\frac{1}{5}\frac{t}{t^2+4}+\frac{4}{5}\frac{1}{t^2+4}$.

نضع $u=t-1$ الذي يتغير من -1 إلى 1 عندما يتغير t من 0 إلى 2 ويكون $du=dt$.

$$\int_1^2 \frac{t}{(t+1)(t^2+4)}dt=-\frac{1}{5}\int_1^2 \frac{1}{t+1}dt+\frac{1}{5}\int_1^2 \frac{t}{t^2+4}dt+\frac{4}{5}\int_1^2 \frac{1}{t^2+4}dt$$

في التكامل الأخير، نضع $u=\frac{1}{2}t$ ومنه $dt=2u'$ و u سيتغير من $\frac{1}{2}$ إلى 1. ويكون لدينا:

$$\int_1^2 \frac{t}{(t+1)(t^2+4)}dt=\frac{1}{5}\left[-\ln(t+1)\right]_0^2+\frac{1}{5}\left[\frac{1}{2}\ln(t^2+4)\right]_0^2+\frac{1}{5}\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{2}{u^2+1}du$$

$$\int_1^2 \frac{t}{(t+1)(t^2+4)}dt=-\frac{1}{5}\ln 3+\frac{1}{10}\ln 8-\frac{1}{5}\cdot 2\cdot\left[Arc\tan u\right]_{\frac{1}{2}}^1$$

$$\int_1^2 \frac{t}{(t+1)(t^2+4)}dt=-\frac{1}{5}\ln 3+\frac{1}{10}\ln 8-\frac{1}{5}\cdot 2\cdot\left(\frac{\pi}{4}-Arc\tan\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{10}\ln\frac{32}{45}+\frac{\pi}{10}-\frac{2}{5}Arc\tan\frac{1}{2}$$

• في التكامل $\int_0^1 \frac{1}{2t^2+6t+5}dt$، لدينا $2t^2+6t+5=\frac{1}{2}\left[(2t+3)^2+1\right]$

نضع $u=2t+3$ الذي يتغير من 3 إلى 5 عندما يتغير t من 0 إلى 1 ويكون $dt=\frac{1}{2}du$. ومنه

$$\int_0^1 \frac{1}{2t^2+6t+5}dt=\int_3^5 \frac{1}{1+u^2}du=Arc\tan 5-Arc\tan 3=Arc\tan\frac{1}{8}$$

تمرين 3–13

أحسب التكاملات غير المحددة الآتية: $\int\frac{x^2}{(1+x^3)^2}dx$ ، $\int\frac{Arc\tan x}{1+x^2}dx$ ، $\int\frac{x}{1+x^4}dx$

الحل

• في التكامل $\int\frac{x^2}{(1+x^3)^2}dx$ مشتقة الدالة $\frac{1}{1+x^3}$ ، $x\neq -1$ هي $-\frac{3x^2}{(1+x^3)^2}$

ومنه ينتج $\int\frac{x^2}{(1+x^3)^2}dx=-\frac{1}{3(1+x^3)}+c$

• في التكامل $\int\frac{Arc\tan x}{1+x^2}dx$ مشتقة الدالة $(Arc\tan x)^2$ ، هي $\frac{2Arc\tan x}{1+x^2}$

ومنه ينتج $\int\frac{Arc\tan x}{1+x^2}dx=\frac{1}{2}(Arc\tan x)^2+c$

• في التكامل $\int\frac{x}{1+x^4}dx$ مشتقة الدالة $Arc\tan x^2$ هي $\frac{2x}{1+x^4}$

ومنه ينتج $\int \frac{x}{1+x^4}dx = \frac{1}{2}Arc\tan x^2 + c$

تمرين 3–14

أحسب التكامل غير المحدد الآتي: $\int x^2 Arc\sin x \; dx$

الحل

نستخدم التجزئة:

$$\int x^2 Arc\sin x \; dx = \frac{x^3}{3}Arc\sin x - \frac{1}{3}\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

ثم نستخدم التكامل بالتجزئة من جديد لحساب التكامل:

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int x^2 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = -x^2\sqrt{1-x^2} + \int 2x\sqrt{1-x^2}\,dx$$

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int x^2 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = -x^2\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{3}x^2\sqrt{1-x^2} + C$$

تمرين 3–15

أدرس الدالة f المعرفة كما يلي: $f(x) = \frac{1+x^2}{x^3}(\arctan x - \frac{x}{1+x^2})$

الحل

نلاحظ بأن الدالة f من الصنف C^∞ على $\mathbb{R}^*$، و نلاحظ بأن f زوجية لندرسها على $]0,+\infty[$.

- لدينا النشر المحدود بجوار الصفر:

$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + o(x^5)$ و $x\frac{1}{1+x^2} = x(1-x^2+x^4+o(x^4)) = x - x^3 + x^5 + o(x^5)$

ومنه

$$f(x) = \frac{1+x^2}{x^3}(x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - x + x^3 - x^5 + o(x^5))$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{2}{15}x^2 - \frac{4}{5}x^4 + o(x^4) = \frac{2}{3} - \frac{2}{15}x^2 + o(x^2)$$

وبالتالي تُمدد الدالة f بالاستمرار عند 0 حيث $f(0) = \frac{2}{3}$. وبما f تقبل نشرا محدود عند 0 من الرتبة 1 ، فإن التمديد ونرمز له أيضا f يقبل الاشتقاق عند 0 و $f'(0) = 0$. والمنحنى C لـ f يقبل مماس موازي لمحور الفواصل معادلته $y = \frac{2}{3}$. وأخيرا بما أن $f(x) - \frac{2}{3}$ بجوار 0 من إشارة $-\frac{2}{15}x^2$ فإن المنحنى (C) يقع محليا تحت المماس.

- بجوار $+\infty$ يكون $f(x)\sim\frac{\pi}{2x}$ ومنه $\lim_{n\to+\infty} f(x)=0$.
- الاشتقاق والتغيرات

من أجل $0<x$: $f'(x)=\frac{3+x^2}{x^4}(\arctan x-\frac{x}{1+x^2})+\frac{1+x^2}{x^3}\cdot\frac{2x^2}{(1+x^2)^2}$

$$=\frac{3+x^2}{x^4}(-\arctan x+\frac{x}{1+x^2}+\frac{x^4}{3+x^2}\cdot\frac{2}{x(1+x^2)})$$

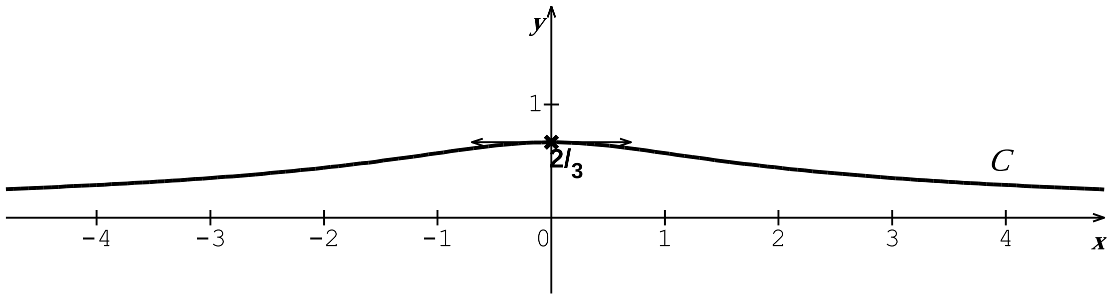
$$=\frac{3+x^2}{x^4}(-\arctan x+\frac{x(3+x^2)+2x^2}{(1+x^2)(3+x^2)})=\frac{3+x^2}{x^4}(-\arctan x+\frac{3x}{3+x^2})=\frac{3+x^2}{x^4}g(x)$$

حيث الدالة $g(x)=-\arctan x+\frac{3x}{3+x^2}$ تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$.

ومن أجل كل عدد حقيقي x : $g'(x)=\frac{3}{3+x^2}-\frac{1}{1+x^2}-6\frac{x^2}{x^4+6x^2+9}=-\frac{x^4}{(3+x^2)^2(1+x^2)}$

والدالة g متناقصة تماما على $\mathbb{R}_+$.

- التمثيل البياني (الشكل **10.3**)



شكل 10.3

تمرين 3–16

أدرس الدالة f المعرفة كما يلي: $f(x)=\arcsin\frac{2x}{1+x^2}$

الحل

لدينا :

$$1+x^2-2|x|\geq 0,\quad \forall x\in\mathbb{R}$$

$$\left|\frac{2x}{1+x^2}\right|\leq 1,\quad \forall x\in\mathbb{R}$$

من جهة أخرى الدالة arcsin معرفة على $[-1,+1]$، ومنه f معرفة على $\mathbb{R}$.

نعلم أن الدالة arcsin تقبل الاشتقاق على $]-1,+1[$، ومنه الدالة f تقبل الاشتقاق عند كل x :

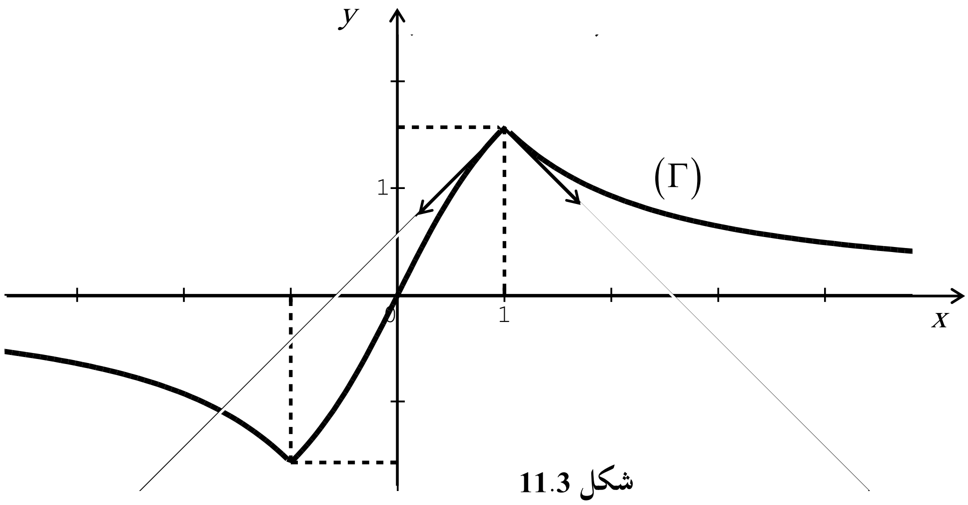
$\left|\frac{2x}{1+x^2}\right| \neq 1$ التي تكافئ $|x| \neq 1$

نستنتج أن f تقبل الاشتقاق على $D = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}} \cdot \left(\frac{2x}{1+x^2}\right)' , \quad \forall x \in D$$

$$= \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)\sqrt{(1-x^2)^2}} , \quad \forall x \in D$$

و f لا تقبل الاشتقاق عند $x_0 = \pm 1$ التمثيل البياني للدالة في (الشكل **11.3**) يوضح ذلك .



شكل 11.3

تمرين 3–17

أدرس الدالة $f(x) = \arctan\frac{2}{1+x}$

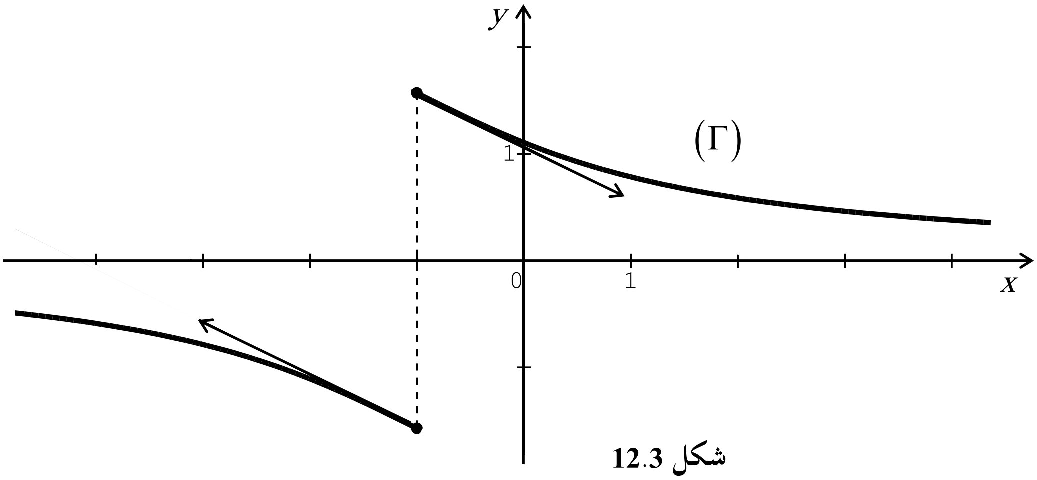
الحل

$D_f = \mathbb{R} - \{1\}$ ولدينا $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \frac{\pi}{2}$

$f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{2}{1-x}\right)^2} = \frac{2}{x^2-2x+5} > 0$ ويلخص الجدول الآتي جدول التغيرات f

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	‖	$-$
$f(x)$	$\frac{\pi}{2} \searrow 0$	‖	$0 \searrow -\frac{\pi}{2}$

تمثيل f، موضح في (الشكل **12.3**)



شكل 12.3

تمرين 3–18

أدرس الدالة $f(x)=\arcsin\dfrac{2\sqrt{x}}{1+x}$

الحل

مجموعة التعريف

لدينا $-1\le\dfrac{2\sqrt{x}}{x+1}\le 1 \;\Leftrightarrow\; 2\sqrt{x}\le 1+x \;\Leftrightarrow\; \left(\sqrt{x}-1\right)^2\ge 0$

ومنه $x\in D_f \;\Leftrightarrow\; x\ge 0 \;\wedge\; \dfrac{2\sqrt{x}}{1+x}\in[-1,+1] \;\Leftrightarrow\; x\in[0,+\infty[$

إذن $D_f=[0,+\infty[$

الدالة $f(x)$ تقبل الاشتقاق على مجال اشتقاق $\dfrac{2\sqrt{x}}{1+x}$ وهو $]0,+\infty[$ وعندما يكون $1>\dfrac{2\sqrt{x}}{1+x}$.

إذن f تقبل الاشتقاق على $D=]0,1[\cup]1,+\infty[$، ولدينا :

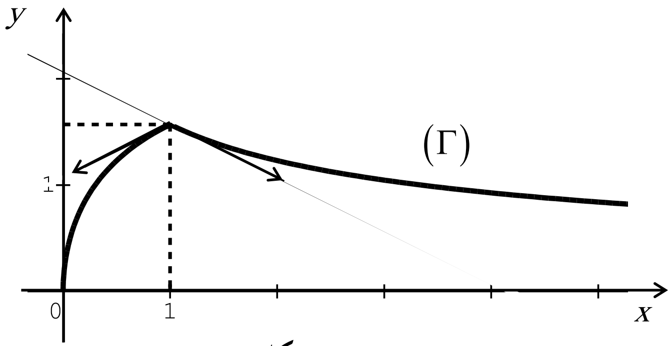
$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{x}\,(1+x)}, & 0<x<1\\[2ex] -\dfrac{1}{\sqrt{x}\,(1+x)}, & x>1\end{cases}$$

ولدينا أيضا : $f(0)=0,\quad f(1)=\dfrac{\pi}{2},\quad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

جدول تغيرات $f(x)$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\Vert$	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	0

تمثيل f، موضح في (الشكل **13.3**).



شكل 13.3

تمرين 3–19

أدرس الدالة f المعرفة كما يلي: $f(x)=\frac{1}{x}\ln(\frac{e^x-1}{x})$

الحل

إذا كان $x>0$ فإن $e^x-1>0$. إذن من أجل $x>0$، الدالة f معرفة على $\mathbb{R}^*$. ومن أجل $x\neq 0$، يكون:

$$f(-x)=-\frac{1}{x}\ln(\frac{e^{-x}-1}{-x})=-\frac{1}{x}\ln(e^{-x})-\frac{1}{x}\ln(\frac{e^{-x}-1}{-x})=1-f(x)$$

إذن من أجل كل $x\neq 0$، $f(x)+f(-x)=1$ والنقطة $A(0,\frac{1}{2})$ هي نقطة تناظر للمنحنى C.

- النشر المحدود بجوار الصفر:

$$f(x)=\frac{1}{x}\ln(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+o(x^2))=\frac{1}{x}(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6})-\frac{1}{2}(\frac{x}{2})^2+o(x^2)=\frac{1}{2}+\frac{x}{24}+o(x)$$

وبالتالي تُمدد الدالة f بالاستمرار عند 0 حيث $f(0)=\frac{1}{2}$. وبما f تقبل نشرا محدود عند 0 من الرتبة 1 ، فإن التمديد ونرمز له أيضا f يقبل الاشتقاق عند 0 و $f'(0)=\frac{1}{24}$. والمنحنى C لـ f يقبل مماس عند النقطة التي فاصلتها 0 معادلته $y=\frac{1}{24}x+\frac{1}{2}$. وأخيرا بالتناظر فأن هذه النقطة هي نقطة انعطاف.

- بجوار $+\infty$

$$f(x)=\frac{1}{x}(\ln(e^x)+\ln(1-e^{-x})-(\ln x)=1-\frac{\ln x}{x}+\frac{\ln(1-e^{-x})}{x}=1+o(1)$$

ومنه $\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$. وكذلك $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(1-f(-x))=1-1=0$

- الاشتقاق والتغيرات

الدالة f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}^*$، ونحصل بالاشتقاق من أجل كل عدد حقيقي x :

ومن أجل $0\neq x$:
$$f'(x)=-\frac{1}{x^2}\ln(\frac{e^x-1}{x})+-\frac{1}{x}(\frac{e^x}{e^x-1}-\frac{1}{x})=\frac{1}{x^2}(-\ln\frac{e^x-1}{x}+\frac{xe^x}{e^x-1}-1)$$

إشارة f' على $\mathbb{R}^*$ من إشارة $g(x)=-\ln\frac{e^x-1}{x}+\frac{xe^x}{e^x-1}-1$

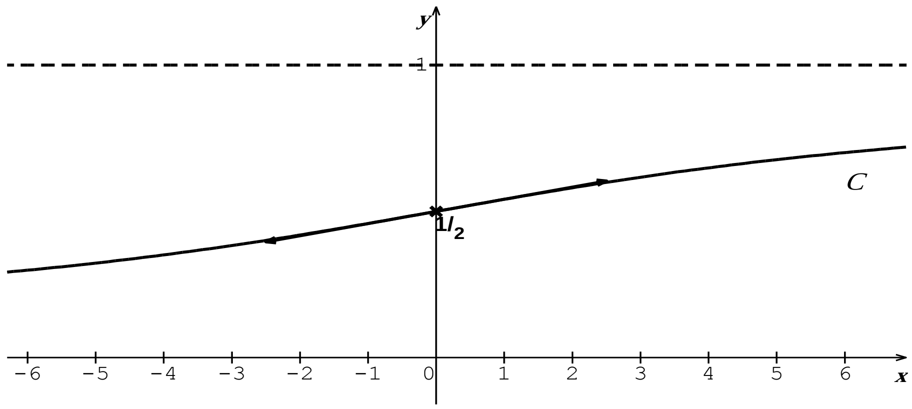
والدالة g تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}^*$، ونحصل بالاشتقاق من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم x :

$$g'(x)=-\frac{e^x}{e^x-1}+\frac{1}{x}+\frac{(e^x+xe^x)(e^x-1)-xe^x\cdot e^x}{(e^x-1)^2}=\frac{(e^x-1)^2-x^2e^x}{x(e^x-1)^2}$$

$$=((2\operatorname{sh}\frac{x}{2})^2-x^2)/x(2\operatorname{sh}\frac{x}{2})^2=(\operatorname{sh}^2\frac{x}{2}-(\frac{x}{2})^2)/x\operatorname{sh}^2\frac{x}{2})$$

نلاحظ بأن المتراجحة $0<\operatorname{sh}x$ تكون صحيحة من أجل $0<x$. ومنه g' موجبة تماما على $\mathbb{R}_+^*$. إذن الدالة g متزايدة تماما على $\mathbb{R}_+^*$. وعلى اعتبار $0=g'(0^+)$ تكون g متزايدة تماما على $\mathbb{R}_+$. ومنه تكون الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}_+$. وعلى اعتبار التناظر والاستمرار عند 0 تكون f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

- التمثيل البياني (الشكل **14.3**).



شكل 14.3

تمارين إضافية

تمرين 1 أثبت صحة العلاقتين الآتيتين :

$$\operatorname{argch}(x)=\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|,\quad \forall x\geq 1$$

$$\operatorname{argsh}(x)=\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|,\quad \forall x\in\mathbb{R}$$

تمرين 2 أثبت أن: $\forall x\in\mathbb{R}\ ,\quad 2|x|\leq 1+x^2$

واستنتج مجموعة تعريف الدالة: $f(x)=\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$، ثم ادرس تغيراتها.

تمرين 3 • عين D_f مجموعة تعريف الدالة: $f(x)=\arctan\dfrac{2}{1-x}$

• هل f مستمرة على D_f؟ ادرس تغيرات f، وأنشئ منحناها.

تمرين 4 نعتبر الدالة f حيث: $f(x)=\arcsin\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)$

• عين D_f مجموعة تعريف f.

• من أجل أي القيم للمتغير x، تكون هذه الدالة قابلة للاشتقاق ؟ أحسب $f'(x)$.

تمرين 5 اثبت صحة العلاقتين الآتيتين: $\forall x\in\left]-1,+1\right[\ ,\quad \arcsin(x)=\arctan\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\forall x\in\left]-1,+1\right[\ ,\quad \arctan(x)=\arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

تمرين 6 نعتبر الدالة f ذات المتغير الحقيقي x المعرفة كما يلي: $f(x)=\begin{cases}\arctan x & ,\ |x|\leq 1\\ \dfrac{|x|}{x}+\dfrac{x-1}{2} & ,\ |x|>1\end{cases}$

• عين D_f مجموعة تعريف f.

• احسب $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$، ماذا تستنتج؟

• هل تقبل f الاشتقاق على D_f ؟ عين دالتها المشتقة f'.

تمرين 7 عين الخطوط المقاربة للمنحنيات المحددة بالدالتين:

$$f(x)=\sqrt{x^2-1}-\arcsin\tfrac{1}{x}\ ,\quad g(x)=\left(2x+3+\tfrac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}$$

تمرين 8 ادرس تغيرات الدالة f ذات المتغير الحقيقي x المعرفة كما يلي: $f(x)=\arcsin\left(\dfrac{2e^x-3}{e^x-1}\right)$

الفصل الرابع

التكامل وطرق حسابه

- مفاهيم عامة حول التكامل
- بعض طرق حساب التكامل
- توسيع مفهوم التكامل
- تمارين محلولة

ملخص الدرس

1. مفاهيم عامة حول التكامل

1.1 مفهوم التكامل

نسمى **التكامل** من a إلى b للدالة f ، الحيز الجبري للسطح المحدد بالمنحى الممثل لـ f ومحور الفواصل والمستقيمين : $x=a$ و $x=b$. نرمز له بالرمز $\int_a^b f(x)\,dx$

2.1 تكامل دالة مستمرة

f دالة مستمرة على مجال I من $\mathbb{R}$، و F دالة أصلية لـ f على I . a و b من I .

التكامل من a إلى b للدالة f، هو العدد: $\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b)-F(a)$

الدوال المستمرة على مجال من الشكل $[a,b]$ تقبل المكاملة.

نتيجة

إذا كانت f مستمرة على I ، فإن f تقبل دالة أصلية على I.

إذا أخذت دالة أصلية لـ f القيمة y_0 من أجل القيمة x_0 للمتغير من I ، فإن هذه الدالة الأصلية تكون وحيدة.

3.1 الإيحاء الهندسي للتكامل المحدود

المستوي مُرود بمعلم . نسمي $\mathcal{A}$ المساحة المحددة بمنحنى المعادلة $y=f(x)$

ومحور الفواصل والمستقيمين $x=a$ و $x=b$. ونميز حالين :

عندما تكون $f(x)$ موجبة على $[a,b]$، يكون $\int_a^b f(x)\,dx = \mathcal{A}$

وعندما تكون $f(x)$ سالبة على $[a,b]$، يكون $\int_a^b f(x)\,dx = -\mathcal{A}$

المساحة المحددة بمنحنى $y=f(x)$ ومحور الفواصل والمستقيمين $x=a$ و $x=b$

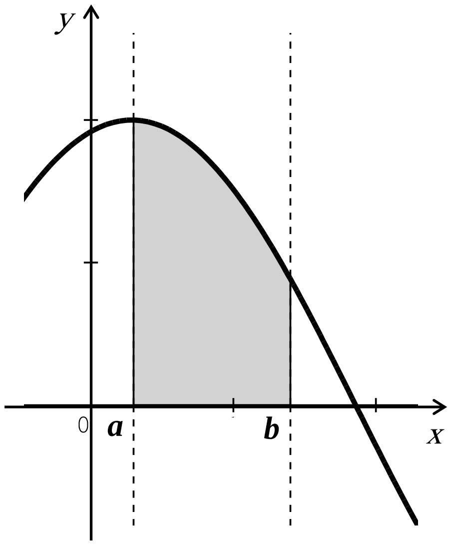
تُعطى بالعلاقة $\mathcal{S} = \left|\int_a^b f(x)\,dx\right|$ (الشكل **1.4**).

المساحة

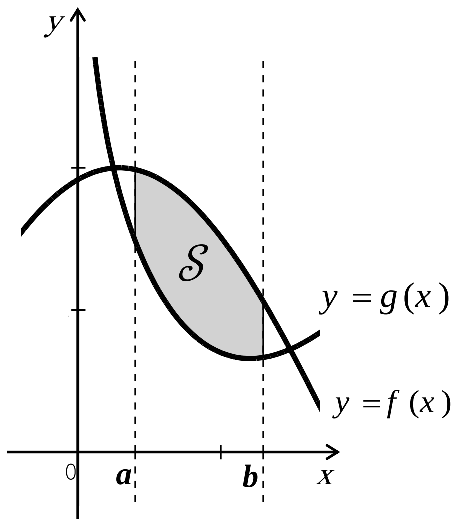
نعتبر الحيز من المستوي المحدد بالمستقيمين $x=a$ و $x=b$ ومنحنيي المعادلتين $y=f(x)$ و $y=g(x)$

إذا كان من أجل كل x من $[a,b]$: $g(x)\le f(x)$ ومساحة هذا المجال تُعطى بالعلاقة

$$\mathcal{S} = \int_a^b \left(f(x)-g(x)\right)dx$$ (الشكل **2.4**)



شكل 1.4



شكل 2.4

4.1 نظرية المتوسط

f دالة مستمرة على المجال $[a,b]$ فهي تبلغ حضيضها وذروتها على هذا المجال : m و M .

فيكون : $m \leq f(x) \leq M$ ، ومنه $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$.

وبالتالي :
$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq M$$

وحسب نظرية القيم المتوسطة، فإنه توجد نقطة c من المجال $[a,b]$ بحيث:

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt$$

تسمى c **بالقيمة المتوسطة** لـ f على $[a,b]$.

5.1 مشتق تكامل

إذا كانت f دالة مستمرة و $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ ، فإنه يكون لدينا

$$\frac{F(x)-F(x')}{x-x'}=\frac{1}{x-x'}\int_x^{x'} f(t)\,dt$$

حسب نظرية المتوسط، فأنه يوجد c يكون محصورا بين x و x':

$$f(c)=\frac{F(x)-F(x')}{x-x'}$$

وبالمرور على النهاية عندما $x\to x'$ ينتج: $\left(\int_{x'}^{x} f(t)\,dt\right)'=f(x')$

نتيجة $\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)'=f(x)$

أمثلة $\left(\int_0^x (t^2-1)\,dt\right)'=x^2-1$ ، $\left(\int_1^x \ln t\,dt\right)'=\ln x$ ، $\left(\int_0^x e^{2t}\,dt\right)'=e^{2x}$

6.1 خواص الدوال القابلة للمكاملة

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx=\int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b g(x)\,dx$$

$$\int_a^b \lambda f(x)\,dx=\lambda\int_a^b f(x)\,dx$$

$m\le f(x)\le M$ على $[a,b]$ $\Leftarrow$ $m(b-a)\le\int_a^b f(x)\,dx\le M(b-a)$

$$f\le g\ \Rightarrow\ \int_a^b f(x)\,dx\le\int_a^b g(x)\,dx$$

$$a<b\qquad \int_a^b |f(x)|\,dx\le\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|$$

$$\left(\int_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx\right)^2\le\left(\int_a^b f(x)\,dx\right)\cdot\left(\int_a^b g(x)\,dx\right)$$

2. بعض طرق حساب التكامل

1.2 الدالة الأصلية، (إذا عُلمت)

نسمي دالة أصلية للدالة f المعرفة على المجال I من $\mathbb{R}$. كل دالة F تقبل الاشتقاق على I بحيث :

$$\forall x\in I\quad F'(x)=f(x)$$

إذا كانت F أصلية لـ f ، فإن كل الدوال من الشكل $F+\lambda$ هي أيضا دوال أصلية لـ f : λ ثابت حقيقي.

ولدينا $\frac{dF}{dx}=f(x)\ \Leftrightarrow\ dF=f(x)\,dx\ \Leftrightarrow\ \int f(x)\,dx=F(x)+\lambda$

- ليكن c عدد كيفي من المجال $[a,b]$. نعتبر الدالة $F(x)=\int_c^x f(t)\,dt$

F تقبل الاشتقاق على المجال $[a,b]$، فهي إذن الدالة الأصلية لـ f التي تنعدم من أجل $x=c$.

نرمز لـ $F(x)=\int f(x)\,dx$ لإحدى دوال f الأصلية ونسميه **بالتكامل غير المحدود**.

2.2 بتبديل المتغير

بتبديل المتغير في حساب التكامل $\int_a^b (x)\,dx$، إذا كانت g رتيبة وتقبل للاشتقاق، واعتبرنا التحويل:

$x=g(t)$، فسيكون $\alpha=g(\alpha)$, $b=g(\beta)$ ومنه $\int_a^b (t)\,dt=\int_\alpha^\beta f\,(g(t)).g'(t)\,dt$

مثال1 في حساب التكامل $\int \frac{2x}{(1-x^2)^2}dx$. لدينا:

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad u(x)=(1-x^2)\ \Rightarrow\ u'(x)=2x$$

ومنه يكون $\int \frac{2x}{(1-x^2)^2}dx=\int \frac{u'(x)}{u^2(x)}dx$

نعلم بأن $\frac{u'}{u^2}$ هي الدالة الأصلية للدالة $-\frac{1}{u}$.

وأخيرا $\int \frac{2x}{(1+x^2)^2}dx=-\frac{1}{1+x^2}+c$

مثال2 وفي التكامل $\int_{-1}^0 x\sqrt{1-x}\,dx$. نستخدم التحويل $u=1-x$ ، فيكون $du=-\,dx$

من أجل $x=-1$ نجد $u=2$. و من أجل $x=0$ يكون $u=1$

$$\int_{-1}^0 x\sqrt{1-x}\,dx=\int_2^1(1-u)\sqrt{u}\,(-du)=\int_1^2(\sqrt{u}-u\sqrt{u})\,du$$
$$=\frac{-4(\sqrt{2}+1)}{15}$$

3.2 التكامل بالتجزئة

F و G أصليتان لـ f و g : $f(x)$

$$\int F(x)\cdot g(x)\,dx=F(x)\cdot G(x)-\int f(x)\cdot G(x)\,dx$$

أمثلة

- $\int x\,e^x dx=xe^x-\int e^x dx=x\,e^x-e^x+c$
- $\int \ln(x-1)\,dx=x\ln(x-1)-\int\frac{x}{x-1}dx=x\ln(x-1)-\ln(x-1)-x+c$

- $\int x^2 \ln x \, dx = \frac{1}{3}x^3 \ln x - \int \frac{1}{3}x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{9}x^3 + c$

4.2 تكاملات بعض الدوال المألوفة:

لتكن $F(x)$ دالة أصلية لـ $f(x)$.

$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$
$x^n \ (n \neq 1)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$	e^x	$\frac{1}{a}e^{ax}$
$\sin ax$	$-\frac{1}{a}\cos ax$	$\cos ax$	$\frac{1}{a}\sin ax$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$

3. توسيع مفهوم التكامل

f و g دالة معرفتان على $[a, +\infty[$ حيث: $g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$

نضع $\lim_{x \to +\infty} g(x) = \int_a^{+\infty} f(t)\,dt$

إذا قبلت الدالة g نهاية حقيقية I، نقول أن التكامل $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ بأنه متقارب. ويكون متباعدا في حالة العكس.

إذا كان التكامل $\int_a^{+\infty} \lvert f(t)\rvert\,dt$ متقاربا، فإن $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ يكون أيضا متقاربا.

1.3 نتائج

- إذا كان f موجب فإن : $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ متقارب $\Leftrightarrow$ $g(x) = \int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ محدودة.

وإذا كانت u و v مستمرتين على $[a, +\infty[$ بحيث $v(t) \geq u(t) \geq 0 \quad \forall t \geq a$ ، يكون لدينا:

- $\int_a^{+\infty} v(t)\,dt$ متقارب $\Leftarrow$ $\int_a^{+\infty} u(t)\,dt$ متقارب.
- $\int_a^{+\infty} u(t)\,dt$ متباعد $\Leftarrow$ $\int_a^{+\infty} v(t)\,dt$ متباعد
- f دالة مستمرة على $\mathbb{R}$: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{a} f(t)\,dt + \int_a^{+\infty} f(t)\,dt$

تمارين محلولة

تمرين 4–1

أحسب التكاملات الآتية:

$$\int \frac{x}{2x-3}dx\ ,\quad \int \frac{x+2}{x+1}dx\ ,\quad \int 3x\sqrt{1-2x^2}dx\ ,\quad \int \frac{1}{9-x^2}dx$$

الحل

- $\int \frac{x}{2x-3}dx = \frac{1}{2}\int \frac{x-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}}{x-\frac{3}{2}}dx = \frac{1}{2}\int (1+\frac{3}{2}\frac{1}{x-\frac{3}{2}})dx = \frac{1}{2}x+\frac{3}{4}\ln(x-\frac{3}{2})+c$
- $\int \frac{x+2}{x+1}dx = \int \frac{x+1+1}{x+1}dx = \int (1+\frac{1}{x+1})dx = x+\ln(x+1)+c$
- $\int 3x\sqrt{1-2x^2}dx = -\frac{3}{4}\int \left(1-2x^2\right)^{1/2}(-4x)dx = -\frac{1}{2}\left(1-2x^2\right)^{3/2}+c$
- $\int \frac{1}{9-x^2}dx = \int \frac{1}{(3-x)(3+x)}dx = \frac{1}{6}\int (\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x-3})dx = \frac{1}{6}\left(\ln(x+3)-\ln(x-3)\right)+c$

تمرين 4–2

أحسب المشتقة الثانية للدالة $F(x)=\int_\alpha^x \frac{dt}{1+t^2}$.

الحل

نلاحظ أن الدالة $F(x)$ معرفة تماما لأن الدالة $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ معرفة ومستمرة على $\mathbb{R}$ ،

من جهة أخرى $F'(x)=f(x)$ مهما كان x من $\mathbb{R}$ ،

وبالتالي الدالة $F(x)$ تكون متزايدة تماما على $\mathbb{R}$. ولدينا

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad F'(x)=f(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

والمشتقة الثانية لـ F :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad F''(x)=f'(x)=\frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

تمرين 4–3

أحسب التكامل $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x+3}}$.

الحل

نستخدم التحويل :

$$t=\sqrt{x+3} \Leftrightarrow t^2=x+3 \Leftrightarrow x=t^2-3,\quad (t\geq 0)$$

$$x=t^2-3 \Rightarrow dx=2t\,dt$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x+3}}dx=\int \frac{(t^2-3)}{3}2t\,dt=2\int (t^2-3)\,t\,dt=2\,(\frac{t^2}{3}-3t)+c$$

نعبر عن النتيجة بدلالة x :

$$\int \frac{x}{\sqrt{x+3}}dx=2(\frac{t^3}{3}-3t)+k=2(\frac{(\sqrt{x+3})^3}{3}-\sqrt{x+3})+c$$

في العبارة $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$، نضع $t=e^x$ فيكون $x=\ln t$ ومنه $x=\ln t \Rightarrow dx=\frac{1}{t}dt$

فنحصل على $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}=\int \frac{1}{t+t^{-1}}\frac{dt}{t}=\int \frac{dt}{t^2+1}=\arctan t+c=\arctan e^x+c$

تمرين 4-4

أدرس تقارب التكاملين الآتيين :

$$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^3+4}dx \quad و \quad \int_0^{+\infty}\frac{1}{x+4}dx$$

الحل

لدينا $\forall x\in[4,+\infty[$ $\frac{1}{x+4}>\frac{1}{2x}$ ومنه التكامل $\int_4^{+\infty}\frac{1}{2x}dx$ متباعد.

إذن $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x+4}dx$ متباعد

ولدينا $\forall x\in[1,+\infty[$ $\left|\frac{\sin x}{x^3+4}\right|<\frac{1}{x^3+4}<\frac{1}{x^3}$ وبما أن التكامل $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^3}dx$ متقارب.

فإن $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^3+4}dx$ يكون أيضا متقاربا مطلقا، وبالتالي فهو متقارب.

تمرين 4-5

عين القيمة المتوسطة β للدالة $f(x)=1-\ln(1+x)$ على $[0\,;1]$

الحل

الدالة $f(x)=1-\ln(1+x)$ مستمرة على المجال $[0\,;1]$، فهي تقبل المكاملة على $[0\,;1]$.

حسب نظرية المتوسط، فإنه توجد نقطة β من المجال $]0\,;1[$ بحيث: $f(\beta)=\frac{1}{1-0}\int_0^1 f(t)\,dt$.

$$f(\beta)=\int_0^1 \left(1-\ln(1+t)\right)dt=\left[2x-(1+x)\ln(1+x)\right]_0^1=2-2\ln 2$$

بحل المعادلة $f(x)=2-2\ln 2$ في المجال $]0;1[$ ، أي بحل المعادلة : $1-\ln(1+x)=2-2\ln 2$،

نجد القيمة المتوسطة β لـ$f(x)$ على المجال $[0;1]$ حيث : $\beta=e^{2\ln 2-1}-1=\frac{4}{e}-1\simeq 0.471$

تمرين 4–6

أدرس الدالة $F(x)=\int_0^x e^{-t^2}dt$.

الحل

نلاحظ أن الدالة $F(x)$ معرفة تماما لأن الدالة $f(x)=e^{-t^2}$ معرفة ومستمرة على $\mathbb{R}$،

من جهة أخرى $F'(x)=f(x)$ مهما كان x من $\mathbb{R}$،

وبالتالي الدالة $F(x)$ تكون متزايدة تماما على $\mathbb{R}$. ولدينا

$$\forall x\geq 1,\quad F(x)=F(1)+\int_1^x e^{-t^2}dt$$

وبما أن $e^{-t^2}\leq e^{-t}$ مهما كان $1\leq t$. فإن

$$\forall x\geq 1,\quad F(x)\leq F(1)+\int_1^x e^{-t}dt$$
$$\leq F(1)+\frac{1}{e}$$

إذن الدالة F متزايدة ومحدودة من الأعلى، فهي تقبل نهاية (منتهية) عند$(+\infty)$

تمرين 4–7

أحسب التكامل الآتي $\int \frac{\tan x}{1+\cos x}dx$

الحل

لدينا $\tan x=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1-\tan^2\frac{x}{2}}\quad,\quad \cos x=\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$

ومنه

$$\int \frac{\tan x}{1+\cos x}dx = \int \frac{\dfrac{2\tan\frac{x}{2}}{1-\tan^2\frac{x}{2}}}{1+\dfrac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}}dx = \int \frac{\dfrac{2\tan\frac{x}{2}}{1-\tan^2\frac{x}{2}}}{\dfrac{2}{1+\tan^2\frac{x}{2}}}dx$$

$$= \int \frac{\tan\frac{x}{2}}{1-\tan^2\frac{x}{2}}\cdot(1+\tan^2\frac{x}{2})dx$$

نجري التحويل $t=\tan\dfrac{x}{2}$ الذي يكافئ $x=2\arctan t$ وبالتالي $dx=\dfrac{2}{1+t^2}dt$

فنحصل على المطلوب

$$\int \frac{\tan x}{1+\cos x}dx = \int \frac{\tan\frac{x}{2}}{1-\tan^2\frac{x}{2}}\cdot(1+\tan^2\frac{x}{2})dx = \int \frac{t}{1-t^2}(1+t^2)\frac{2}{1+t^2}dt$$

$$= \int \frac{2t}{1-t^2}dt = -\int \frac{-2t}{1-t^2}dt = -\ln\left|1-t^2\right|+c$$

$$= -\ln\left|1-\tan^2\frac{x}{2}\right|+c$$

تمرين 4-8

عين مجموعة تعريف الدالة: $F(x)=\displaystyle\int \frac{dx}{e^x-1}$ ، **ثم احسب** $F(x)$ **واستنتج** $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{e^x-1}$.

الحل

مجموعة تعريف $F(x)$ هي $\mathbb{R}^*$

بوضع $t=e^x-1$ يكون $x=\ln(t+1)$، ومنه $dx=\dfrac{dt}{t+1}$

إذن $\displaystyle\int \frac{dx}{e^x-1} = \int \frac{dt}{t(t+1)}$

نكتب العبارة $\dfrac{1}{t(t+1)}$ بالشكل $\dfrac{a}{t}+\dfrac{b}{t+1}$

لدينا $\dfrac{1}{t(t+1)} = \dfrac{a}{t}+\dfrac{b}{t+1} = \dfrac{a(t+1)+dt}{t(t+1)} = \dfrac{(a+b)t+a}{t(t+1)}$

وبمطابقة معاملات الحدود نجد :

$$\begin{cases} a+b=0 \\ a=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-1 \\ a=1 \end{cases}$$

ومنه $\displaystyle\int \frac{dt}{t(t+1)} = \int (\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1})\,dt = \ln|t|-\ln|t+1|+c = \ln\left|\frac{t}{t+1}\right|+c$

وبتعويض بقيمتها نجد : $F(x)=\ln\left|\dfrac{e^x-1}{e^x}\right|+c$

ولدينا بالتعريف $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{e^x-1}=\lim_{t\to+\infty}\int_1^t\frac{dx}{e^x-1}$

لنحسب التكامل المحدود $\displaystyle\int_1^t\frac{dx}{e^x-1}=\left[\ln\frac{e^x-1}{e^x}\right]_1^t=\ln\frac{e^t-1}{e^t}-\ln\frac{e-1}{e}$

ومنه $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{e^x-1}=\lim_{t\to+\infty}\int_1^t\frac{dx}{e^x-1}=\lim_{t\to+\infty}\left(\ln\frac{e^t-1}{e^t}-\ln\frac{e-1}{e}\right)$

وأخيرا $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{e^x-1}=\lim_{t\to+\infty}\left(\ln(1-\frac{1}{e^t})\right)-\ln\frac{e-1}{e}=1-\ln(e-1)$

تمرين 4-9

كامل بطريقتين مختلفتين ما يلي: $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$.

الحل

- بطريقة التجزئة. لدينا :

$$f'(x)=\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\ \Rightarrow\ f(x)=\int\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx=-\arctan(\cos x)$$

$$g(x)=x\ \Rightarrow\ g'(x)=1$$

بتطبيق صيغة التكامل بالتجزئة :

$$\int_0^{\pi}\frac{x\sin s}{1+\cos^2 x}dx=\left[-x\arctan(\cos x)\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}-\arctan(\cos x)\,dx$$

$$=-\pi\arctan(\cos\pi)+0.\arctan(\cos 0)+\int_0^{\pi}\arctan(\cos x)\,dx$$

$$=-\pi\arctan(-1)+\int_0^{\pi}\arctan(\cos x)dx=-\pi-\frac{\pi}{4}+\int_0^{\pi}\arctan(\cos x)dx$$

$$=\frac{\pi^2}{4}+\int_0^{\pi}\arctan(\cos x)dx$$

- بطريقة تبديل المتغير. نضع $t=\cos x$ ، فيكون :

$$t=\cos x\Leftrightarrow x=\arccos t$$

$$\Rightarrow dx=(\arccos t)'dt=\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$$

ونحسب الحدين الجديدين : $x=0\ ,\ t=\cos 0=1\quad;\quad x=\pi\ ,\quad t=\cos\pi=-1$

فيأخذ التكامل $\frac{\pi^2}{4}+\int_1^{-1}\arctan t\cdot\frac{-1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt=\frac{\pi^2}{4}+\int_{-1}^{1}\cdot\frac{\arctan t}{\sqrt{1-t^2}}\,dt=\frac{\pi^2}{4}$

تمرين 4–10

f دالة معرفة على $]-2,+\infty[$. بالشكل: $f(x)=\frac{3x+4}{x+2}$

بين بأنه يوجد عددين حقيقيين a و b بحيث يكون $\forall x\in]-2,+\infty[\quad F(x)=a+\frac{b}{x+2}$

واستنتج الدالة الأصلية لـ f عند 1.

الحل

ليكن a و b عددين حقيقيين. $\forall x\in]-2,+\infty[\quad a+\frac{b}{x+2}=\frac{ax+(2a+b)}{x+2}$

لنبحث عند العددين الحقيقين a و b بحيث يكون $\forall x\in]-2,+\infty[\quad 3x+4=ax+(2a+b)$

بالمطابقة نجد $a=3$ و $b=-2$.

إذن $\forall x\in]-2,+\infty[\quad f(x)=3-\frac{2}{x+2}$ ، الدالة f مستمرة على $]-2,+\infty[$.

نعلم بأنه توجد دالة أصلية وحيدة تنعدم عند 1، ولتكن هذه الدالة الأصلية هي $F(x)$ ،

إذن يوجد عدد حقيقي k بحيث: $\forall x\in]-2,+\infty[\quad F(x)=3x-2\ln(x+2)+k$

بالفعل $\forall x\in]-2,+\infty[\quad x+2>0$. إذن $F(1)=3x-2\ln 3+k$ و $F(1)=0$ ، ومنه $k=2\ln 3-3$

وأخيرا $\forall x\in]-2,+\infty[\quad F(x)=3(x-1)-2\ln(x+2)-\ln 3$.

تمرين 4–11

1. **بين من أجل كل t ينتمي** $[0,1]$: $1\le e^t\le 3$
2. **استنتج** $\forall x\in[0,1]\quad 1+x\le e^x\le 1+3x$.
3. **واستنتج** $\forall x\in[0,1]\quad 1+x+\frac{1}{2}x^2\le e^x\le 1+x+\frac{3}{2}x^2$.
4. **واستنتج** $\forall x\in[0,1]\quad 1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3\le e^x\le 1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x^3$.
5. **واستنتج الاستمرارية والقابلية للاشتقاق عند 0 للدالة المعرفة بالشكل:**

$f(x)=\frac{e^x-1}{x}$ **إذا كان** $x\in]0,1[$ و $f(0)=1$.

الحل

1. الدالة الأسية متزايدة على $\mathbb{R}$، حسب 1) $e^0 \le e^x \le e^1 \quad \forall x \in [0,1]$ ومنه $1 \le e^x \le 3 \quad \forall x \in [0,1]$.

2. ليكن x من $[0,1]$، لدينا $e^0 \le e^x \le e^1 \quad \forall x \in [0,1]$ وبما أن $0 \le x$ نستخدم متراجحة المتوسط على $[0,x]$: $x \le \int_0^x e^t\,dt \le 3x$، وبما أن $\int_0^x e^t\,dt = e^x - 1$

إذن $\forall x \in [0,1] \quad 1+x \le e^x \le 1+3x$

3. ليكن x من $[0,1]$، حسب 2) $\int_0^x (1+t)\,dt \le \int_0^x e^t\,dt \le \int_0^x (1+3t)\,dt$.

إذن $\left[t+\frac{1}{2}t^2\right]_0^x \le e^x - 1 \le \int_0^x \left[t+\frac{3}{2}t^2\right]_0^x$، $1+x+\frac{1}{2}x^2 \le e^x \le 1+x+\frac{3}{2}x^2 \quad \forall x \in [0,1]$.

4. إذا كان x من $[0,1]$، $1+t+\frac{1}{2}t^2 \le e^t \le 1+t+\frac{3}{2}t^2 \quad \forall t \in [0,x]$.

إذن $\int_0^x \left(1+t+\frac{1}{2}t^2\right)dt \le \int_0^x e^t\,dt \le \int_0^x \left(1+t+\frac{3}{2}t^2\right)dt$

ومنه $\left[t+\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{6}t^3\right]_0^x \le e^x - 1 \le \left[t+\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}t^3\right]_0^x$

وأخيرا $1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3 \le e^x \le 1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x^3 \quad \forall x \in [0,1]$

5. $1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3 \le e^x \le 1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x^3 \quad \forall x \in [0,1]$،

إذن $1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3 \le f(x) \le 1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x^3 \quad \forall x \in [0,1]$.

عندما ينتهي x إلى 0 $(x>0)$، ينتهي الطرفان نحو 1. ومنه $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1 = f(0)$

ومنه f مستمرة عن يمين 0.

من أجل كل x من $[0,1]$: $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{f(x)-1}{x}$ و $\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3 \le f(x)-1 \le \frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x^3$

إذن $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}x \le \frac{f(x)-f(0)}{x} \le \frac{1}{2}+\frac{1}{2}x \quad \forall x \in [0,1]$، وعندما ينتهي x إلى 0 $(x>0)$،

ينتهي الطرفان نحو $\frac{1}{2}$. ومنه $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{1}{2}$ ومنه f تقبل الاشتقاق عن يمين 0 و $f'(0) = \frac{1}{2}$.

تمرين 4-12

لتكن التكاملات $I_0=\int_0^1 \sqrt{1-x}\,dx$ **ومن أجل كل** n **من** $\mathbb{N}^*$: $I_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x}\,dx$

1. **أحسب** I_0.
2. **كامل بالتجزئة، عبر من أجل** $x>0$ **عن** I_n بدلالة I_{n-1}.
3. **استنتج عبارة عن** I_n **بدلالة** n.
4. **أدرس اتجاه تغيرات المتتالية** (I_n)
5. **برهن من أجل كل عدد طبيعي** n : $0\le I_n\le\frac{1}{n+1}$. **واستنتج تقارب المتتالية** (I_n).

الحل

1. الدالة المكاملة من الشكل $-u'\sqrt{u}$ مع $u(u)=1-x$

إذن $I_0=\left[\frac{2}{3}\cdot\sqrt{(1-x)^3}\right]_0^1=\left[\frac{2}{3}\cdot(1-x)\sqrt{(1-x)}\right]_0^1=\frac{2}{3}$

2. التعبير عن I_n بدلالة I_{n-1}. بوضع $u'(x)=\sqrt{(1-x)}$ ، يكون $u(x)=\frac{2}{3}\cdot(1-x)\sqrt{(1-x)}$

وبوضع $v(x)=x^n$ ، يكون $v'(x)=nx^{n-1}$

إذن $$I_n=\left[-\frac{2}{3}\cdot x^n(1-x)\sqrt{(1-x)}\right]_0^1+\frac{2n}{3}\int_0^1 x^{n-1}(1-x)\sqrt{(1-x)}\,dx$$

$$I_n=\frac{2n}{3}\left[\int_0^1 x^{n-1}\sqrt{(1-x)}\,dx-\int_0^1 x^n\sqrt{(1-x)}\right]_0^1=\frac{2n}{3}(I_{n-1}-I_n)$$ ومنه $$I_n=\frac{2n}{2n+3}I_{n-1}$$

لدينا $I_0=\frac{2}{3}$ ، $I_1=\frac{2}{5}I_0=\frac{2}{5}\frac{2}{3}$ ، $I_2=\frac{4}{7}I_1=\frac{4}{7}\frac{2}{5}\frac{2}{3}$ ، $I_3=\frac{6}{9}I_2=\frac{6}{9}\frac{4}{7}\frac{2}{5}\frac{2}{3}$

نلاحظ بأن المقام مؤلف من جداء الأعداد الفردية من 3 إلى $2n+3$ ، والبسط مؤلف من جداء 2 في جداء الاعداد الزوجية من 2 إلى $2n$.

إذن لدينا $$2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot2n=(2\cdot1)\cdot(2\cdot2)\cdot(3\cdot2)\cdot\cdots\cdot(2\cdot n)=2^n\cdot n!$$

$$3\cdot5\cdot7\cdot\cdots\cdot(2n+3)=\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot\cdots\cdot(2n+2)(2n+3)}{2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot(2n+2)}=\frac{(2n+3)!}{2^{n+1}(n+1)!}$$

ومنه $$I_n=\frac{2\cdot2^n\,n!\,2^{n+1}(n+1)!}{(2n+3)!}=\frac{2^{2n+2}n!(n+1)!}{(2n+3)!}$$

نبرهن العلاقة بالتراجع. من أجل $n=0$ يكون $I_0=\frac{2}{3}=\frac{2^2}{3!}=\frac{2\cdot2^0\,n!\,2^{0+1}(0+1)!}{(2\cdot0+3)!}$ محققة.

ليكن العدد الطبيعي n بحيث $I_n = \frac{2^{2n+2} n!(n+1)!}{(2n+3)!}$ ، وقد رأينا بأن $I_{n+1} = \frac{2(n+1)}{(2n+1)+3} I_n$

إذن $I_{n+1} = \frac{2(n+1)2^{2n+2} n!(n+1)!}{(2n+5)(2n+3)!} = \frac{(2n+4)2^{2n+3}(n+1)!\,(n+1)!}{(2n+5)!} = \frac{2^{2n+4}(n+1)!\,(n+2)!}{(2n+5)!}$

ومنه $I_{n+1} = \frac{2^{2(n+1)+2}(n+1)!\,[(n+1)+1]!}{[2(n+1)+3]!}$ والخاصية صحيحة.

وأخيرا $\forall n \in \mathbb{N} \quad I_n = \frac{2^{2n+2} n!(n+1)!}{(2n+3)!}$

من أجل كل عدد طبيعي n : $2n \le 2n+3$ ومنه $\frac{2n}{2n+3} < 1$.

من جهة أخرى $0 \le I_{n-1}$ من أجل عدد $1 \le n$

إذن $I_n \le I_{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$ والمتتالية (I_n) متناقصة.

إذن المتتالية متناقصة ومحدود من الأسفل بـ 0 فهي متقاربة. لنبحث عن نهايتها.

من أجل كل x من $[0,1]$: $0 \le x \le 1$ ، ومنه $-1 \le -x \le 0$ وأيضا $0 \le 1-x \le 1$ و $0 \le \sqrt{1-x} \le 1$.

إذن $\forall x \in [0,1] \quad 0 \le x^n \sqrt{1-x} \le x^n$

وبما أن $0 < 1$ يكون $0 \le I_n \le \int_0^1 x^n\,dx$. وبما أن $\int_0^1 x^n\,dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$

ومنه $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \le I_n \le \frac{1}{n+1}$. وبالمرور على النهاية نجد $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

تمرين 4-13

عين كل الدوال الاصلية للدوال الآتية على مجموعات تعريفها

$f(x) = (2x-3)(x^2-3x+4)^2$, $f(x) = \frac{2x-1}{(x^2-x+1)^2}$, $f(x) = \sqrt{4x-3}$, $f(x) = e^{3x-2}$

الحل

- في $f(x) = (2x-3)(x^2-3x+4)^2$ المعرفة على $\mathbb{R}$ إذا وضعنا $u(x) = x^2-3x+4$ ، سيكون $u'(x) = 2x-3$ ، إذن $f = u'u^2$ ومنه الدالة الأصلية $\forall x \in \mathbb{R} \quad F(x) = \frac{1}{3}(x^2-3x+4)^3 + k$
- في $f(x) = \frac{2x-1}{(x^2-x+1)^2}$ ، كثير الحدود x^2-x+1 ليس له جذور لأن محدده أقل من الصفر، ومنه $D_f = \mathbb{R}$. إذن على $\mathbb{R}$ يكون $f = u'u^{-1}$ حيث $u(x) = x^2-x+1$ ومنه الدالة الأصلية

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad F(x) = \frac{1}{2(x^2-x+1)^3} + k$$

- تكون الدالة $f(x)=\sqrt{4x-3}$ معرفة على $D_f=\left[\frac{3}{4},+\infty\right[$ و $f=\frac{1}{4}u'\sqrt{u}$ حيث $u(x)=4x-3$
  ومنه الدالة الأصلية $F(x)=\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}(4x-3)\sqrt{4x-3}+k$ $\forall x\in\left[\frac{3}{4},+\infty\right[$
- مجموعة تعريف الدالة $f(x)=e^{3x-2}$ هي $\mathbb{R}$ و $f=\frac{1}{3}u'e^{u}$ حيث $u(x)=3x-2$
  ومنه الدالة الأصلية $F(x)=\frac{1}{3}e^{3x-2}+k$ $\forall x\in\infty$.

تمرين 4–14

أحسب التكاملات الآتية:

$$\int_{-1}^{1}(t^2+t+1)dt\ ,\ \int_{0}^{1}(4t+2)(t^2+t-2)dt\ ,\ \int_{-2}^{3}\sqrt{3t+7}\,dt$$

الحل

- في التكامل $\int_{-1}^{1}(t^2+t+1)dt$ ، دالة أصلية للدالة $t\mapsto t^2+t+1$ هي الدالة $t\mapsto\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}t+t$

ومنه $\int_{-1}^{1}(t^2+t+1)dt=\left[\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}t+t\right]_{-1}^{1}=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+1\right)-\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-1\right)=\frac{8}{3}$

- في التكامل $\int_{0}^{1}(4t+2)(t^2+t-2)dt$ ، نلاحظ بأن الدالة المكاملة من الشكل $2u'u$

مع $u(t)=t^2+t-2$ ومنه الدالة

$$\int_{-1}^{1}(4t+2)(t^2+t-2)dt=\left[(t^2+t-2)^2\right]_0^1=0^2-(-2)^2=-4$$

- في التكامل $\int_{-2}^{3}\sqrt{3t+7}\,dt$ ، الدالة المكاملة من الشكل $\frac{1}{3}u'\sqrt{u}$ مع $u(t)=3t+7$

إذن $\int_{-2}^{3}\sqrt{3t+7}\,dt=\left[\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{(3t+7)^3}\right]_{-2}^{3}=\left[\frac{2}{9}(3t+7)\sqrt{(3t+7)}\right]_{-2}^{3}=\frac{2}{9}(64-1)=14$.

تمرين 4–15

أحسب التكاملات الآتية:

$$\int_{0}^{1}e^{3u}du\ ,\ \int_{0}^{1}u\,e^{-u^2}du\ ,\ \int_{1}^{e}\frac{\ln u}{u}du\ ,\ \int_{0}^{1}\frac{1}{1+e^{-u}}du$$

الحل

- في التكامل $\int_0^1 e^{3u}\,du$ ، الدالة المكاملة من الشكل $\frac{1}{3}v'e^v$ مع $v(u)=3u$

إذن $\int_0^1 e^{3u}\,du=\left[\frac{1}{3}e^{3u}\right]_0^1=\frac{1}{3}(e^3-1)$

- في التكامل $\int_0^1 u\,e^{-u^2}\,du$ ، الدالة المكاملة من الشكل $-\frac{1}{3}v'e^v$ مع $v(u)=-u^2$

إذن $\int_0^1 u\,e^{-u^2}\,du=\left[-\frac{1}{2}e^{-u^2}\right]_0^1=-\frac{1}{2}e^{-1}-\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{e-1}{2e}$

- في التكامل $\int_1^e \frac{\ln u}{u}\,du$ ، الدالة المكاملة من الشكل $\frac{1}{2}v'v$ مع $v(u)=\ln u$

إذن $\int_1^e \frac{\ln u}{u}\,du=\left[\frac{1}{2}(\ln u)^2\right]_1^e=\frac{1}{2}$

- في التكامل $\int_0^1 \frac{1}{1+e^{-u}}\,du$ ، لدينا $e^{-u}=\frac{1}{e^u}$ ومنه $\frac{1}{1+e^{-u}}=\frac{e^u}{1+e^u}$

ذن $\int_0^1 u\,e^{-u^2}\,du=\left[\ln(e^u+1)\right]_0^1=\ln(e+1)-\ln 2$.

تمرين 4–16

1. **أكتب** $\ln 2$ **على شكل تكامل.**
2. **بين أن المتتالية ذات الحد** $u_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n+k}$ **تتقارب نحو قيمة متوسطة لدالة. أحسب نهايتها.**
3. **نفس السؤال السابق من أجل المتتالية ذات الحد العام** $v_n=\frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=0}^{n}\sqrt{k}$.

الحل

1. تتعرف الدالة اللوغاريتمية النيبيرية $x\mapsto \ln x$ على $]1,+\infty[$ بالشكل $\ln x=\int_1^x \frac{dt}{t}$ ، ومنه $\ln 2=\int_1^2\frac{dt}{t}$
2. لدينا $u_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n+k}=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$ حيث تتعرف الدالة f بالشكل $f(x)=\frac{1}{1+x}$

إذن $\lim_{x\to+\infty}u_n=\int_0^1 f(x)\,dx=\left[\ln(1+x)\right]_0^1$ ومنه $\lim_{x\to+\infty}u_n=\ln 2$.

3. لدينا $v_n=\frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=0}^{n}\sqrt{k}=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$ حيث تتعرف الدالة f بالشكل $f(x)=\sqrt{x}$

إذن $\lim_{x\to+\infty} v_n = \int_0^1 f(x)\,dx = \left[\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\right]_0^1 = \left[\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right]_0^1$ ومنه $\lim_{x\to+\infty} v_n = \frac{2}{3}$.

تمرين 4–17

أحسب بالمطابقة التكامل غير المحدد الآتي: $\int e^x (x^2+1)\,dx$

الحل

نبحث عن دالة أصلية من الشكل $e^x(ax^2+bx+c)$، حيث تتحدد المعاملات a و b و c

بالمطابقة $\int e^x (x^2+1)\,dx = e^x(ax^2+bx+c)+C$

باشتقاق طرفي هذه العلاقة نجد $e^x(x^2+1) = e^x(ax^2+bx+c)+e^x(2ax+b)$

ونجد أيضا $ax^2+(2a+b)x+(b+c) = x^2+1$

من تساوي كثيري الحدود ينتج $a=1$ و $b=-2$ و $c=3$. ومنه

$$\int e^x (x^2+1)\,dx = e^x(x^2-2x+3)+C$$

تمرين 4–18

لتكن f الدالة المعرفة على $]1,+\infty[$ بالشكل: $f(x)=\int_1^x \frac{\ln(1+t)}{t}dt$

1. **برر وجود التكامل ثم ادرس تغيرات** f.
2. **بملاحظة** $t \le 1+t \le 2t$ $\forall t \in]0,+\infty[$. **عين حصرا لـ** $f(x)$ **على** $]1,+\infty[$**، واستنتج نهايتي** $f(x)$ **و** $\frac{f(x)}{x}$ **عند** $+\infty$.
3. **واستنتج وضعية منحنى الدالة f بالنسبة للمماس عند النقطة التي فاصلتها 1 وطبيعة الفرع اللانهائي.**

الحل

1. الدالة $x\mapsto \ln(1+x)$ مستمرة على $]1,+\infty[$ (تركيب دالتين مستمرتين) ، ومنه الدالة $\varphi: x\mapsto \frac{\ln(1+t)}{t}$ مستمرة على $]1,+\infty[$. ومنه التكامل يكون معرفا من أجل كل x من $]1,+\infty[$.
والدالة f هي عبارة التكامل الوحيد لـ φ التي تنعدم عند 1. ومنه f تقبل الاشتقاق :

$$\forall x \in [1,+\infty[\quad f'(x)=\varphi(x)=\frac{\ln(1+t)}{t}$$

على $]1,+\infty[$، $0<x$ ومنه $1<x+1$. و $0<\ln(1+t)$

والدالة f تقبل الاشتقاق على $]1,+\infty[$ وبما أن $0<f'(x)$ فإن f متزايدة على $]1,+\infty[$.

2. من أجل كل t من $]1,+\infty[$، لدينا $t\leq 1+t\leq 2t$ إذن $\frac{\ln t}{t}\leq\frac{\ln(1+t)}{t}\leq\frac{\ln(2t)}{t}$

إذا كان $x\geq 0$، يكون ومن كل t من $]1,x[$ يكون $\int_1^x \frac{\ln t}{t}dx \leq \int_1^x \frac{\ln(1+t)}{t}dx \leq \int_1^x \frac{\ln 2+\ln t}{t}dx$

إذن إذا كان $x\geq 0$، $\left[\frac{1}{2}(\ln t)^2\right]_1^x \leq f(x)\leq \left[(\ln 2)(\ln t)+\frac{1}{2}(\ln t)^2\right]_1^x$

ومنه $\forall x \in [1,+\infty[\quad \frac{1}{2}(\ln x)^2 \leq f(x)\leq (\ln 2)(\ln x)+\frac{1}{2}(\ln x)^2$

وبما أن $\lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ يكون $\lim_{x\to+\infty}(\ln x)^2=+\infty$ ومنه $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

ولدينا $\forall x \in [1,+\infty[\quad \frac{1}{2}\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)^2 \leq \frac{f(x)}{x}\leq (\ln 2)\left(\frac{\ln x}{x}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)^2$

وبما أن $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}=0$ فإن $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$،

ومنه منحنى الدالة f يقبل في $+\infty$ فرعا لانهائيا باتجاه المحور الأفقي.

3. ومعادلة المماس للمنحنى عند 1 تُعطى بالعلاقة $y=(x-1)(\ln 2)$.

ولدراسة وضعية المنحنى بالنسبة للمماس ندرس إشارة المقدار $f(x)-(x-1)(\ln 2)$:

$$\forall x \in [1,+\infty[\quad f(x)-(x-1)(\ln 2)=\int_1^x\left[\frac{\ln(1+t)}{t}-\ln 2\right]dt=\int_1^x[\varphi(t)-\varphi(1)]dt$$

وبما أن $\forall t \in [1,+\infty[\quad \varphi'(x)=\frac{1}{t^2}\left[\frac{t}{1+t}-\ln(1+t)\right]$

فإن $\varphi'(x)\leq 0 \quad \forall t\in[1,+\infty[$ وبالتالي φ متناقصة.

إذن إذا كان $x\geq 0$، $\varphi(t)\leq\varphi(1) \quad \forall t\in[1,x]$ ومنه التكامل $\int_1^x[\varphi(t)\leq\varphi(1)]dt$ سالبا.

على $]1,+\infty[$ يكون $0\geq f(x)-(x-1)(\ln 2)$. ومنه المنحنى الممثل لـ f يكون تحت المماس عند 1.

تمرين 4-19

نعتبر الدالة $F(x)=\int_0^x(1-e^{-t})\,dt$.

- **بين أن الدالة** $F(x)$ **مستمرة وتقبل الاشتقاق على** $\mathbb{R}$، **عين مشتقتها** $f(x)$.
- **عين القيمة المتوسطة** c **لـ** $f(x)=1-e^{-x}$ **على** $[-1;+1]$.

الحل

- $F(x)$ معرفة تماما، لأن $f(x)=1-e^{-x}$ معرفة ومستمرة على $\mathbb{R}$، و $F(x)$ تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$:

$$F'(x)=\left(\int_0^x (1-e^{-t})\,dt\right)'=1-e^{-x}=f(x)$$

- الدالة $f(x)=1-e^{-x}$ مستمرة على المجال $]-1;+1[$، فهي تقبل المكاملة على $[-1;+1]$.

حسب نظرية القيم المتوسطة، فإنه توجد نقطة c من المجال $]-1,+1[$ بحيث:

$$f(c)=\frac{1}{1-(-1)}\int_{-1}^{+1} f(t)\,dt$$

$$f(c)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}(1-e^{-x})\,dt=\frac{1}{2}\Big[1-e^{-x}\Big]_{-1}^{+1}=2-e+e^{-1}\approx -0.3504$$

بحل المعادلة $f(x)=2-e+e^{-1}$ في المجال $]-1,+1[$ ، أي بحل المعادلة : $1-e^{-x}=2-e+e^{-1}$،

نجد القيمة المتوسطة c لـ $f(x)$ على $[-1;+1]$ حيث $c=-\ln(e-e^{-1}-1)\simeq -0.3004$

تمرين 4-20

أدرس تقارب التكاملات الأتية واحسبها إذا كانت متقاربة.

$$\int_{-\infty}^{1}\frac{t\,dt}{1+t^2}dt\ ,\quad \int_{1}^{+\infty}\frac{dt}{t(1+t^2)}\ ,\quad \int_{1}^{+\infty}\frac{2t\ln t}{(1+t^2)^2}dt\ ,\quad \int_{1}^{+\infty}\frac{\ln t}{t^2}dt$$

الحل

- في التكامل $\int_{-\infty}^{1}\frac{t\,dt}{1+t^2}dt$ ، من أجل كل $x\leq 1$:

$$\int_{x}^{1}\frac{t\,dt}{1+t^2}dt=\left[\frac{1}{2}\ln(1+t^2)\right]_x^1=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$$

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+x^2)=+\infty$ ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+x^2)=+\infty$

وأخيرا التكامل $\int_{-\infty}^{1}\frac{t\,dt}{1+t^2}dt$ متباعد.

- في التكامل $\int_{1}^{+\infty}\frac{dt}{t(1+t^2)}$ ، من أجل كل $1\leq x$:

$$\int_1^x\frac{dt}{t(1+t^2)}=\int_1^x\frac{(1+t^2-t^2)dt}{t(1+t^2)}==\int_1^x\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{1+t^2}\right)dt$$

$$\int_1^x\frac{dt}{t(1+t^2)}=\left[\ln t-\frac{1}{2}\ln(1+t^2)\right]_1^x=\frac{1}{2}\ln 2+\ln x-\frac{1}{2}\ln(1+t^2)=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{2}\ln(1+\frac{1}{x^2})$$

وبما أن $\lim_{x\to+\infty}\ln(1+\frac{1}{x^2})=0$ فإن $\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t(1+t^2)}=\frac{1}{2}\ln 2$.

- في التكامل $\int_1^{+\infty}\frac{2t\ln t}{(1+t^2)^2}dt$ ، ليكن $1\le x$ نكامل بالتجزئة $\int_1^{x}\frac{2t\ln t}{(1+t^2)^2}dt$

بمكاملة $u'(t)=\frac{2t}{(1+t^2)^2}$ نحصل على $u(t)=\frac{1}{1+t^2}$. وباشتقاق $v(t)=\ln t$ نحصل على

$v'(t)=\frac{1}{t}$. إذن $\int_1^{x}\frac{2t\ln t}{(1+t^2)^2}dt=\left[-\frac{\ln t}{1+t^2}\right]_1^x+\int_1^x\frac{dt}{t(1+t^2)}=-\frac{\ln x}{1+x^2}+\int_1^x\frac{dt}{t(1+t^2)}$

وبما أن $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}=0$. إذن $\int_1^{+\infty}\frac{2t\ln t}{(1+t^2)^2}dt=\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t(1+t^2)}$ ومنه التكامل متقارب.

إذن $\int_1^{+\infty}\frac{2t\ln t}{(1+t^2)^2}dt=\frac{1}{2}\ln 2$.

- في التكامل $\int_1^{+\infty}\frac{\ln t}{t^2}dt$ ، ليكن $1\le x$ و $f(x)=\int_1^x\frac{\ln t}{t^2}dt$. نستخدم التجزئة للتكامل.

بمكاملة $u'(t)=\frac{1}{t^2}$ نحصل على $u(t)=-\frac{1}{t}$. وباشتقاق $v(t)=\ln t$ نحصل على $v'(t)=\frac{1}{t}$

إذن $f(x)=\left[-\frac{\ln t}{t}\right]_1^x+\int_1^x\frac{dt}{t^2}=-\frac{\ln x}{x}+\left[-\frac{1}{t}\right]_1^x=1-\frac{1}{x}-\frac{\ln x}{x}$

وبما أن $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$. إذن $\int_1^{+\infty}\frac{\ln t}{t^2}dt=\int_1^{+\infty}\frac{\ln t}{t^2}dt=1$ ومنه التكامل متقارب.

تمرين 4–21

بين أن التكاملات الآتية متقاربة وكل منها معدوما:

$$I_1=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x^2+1}dx \quad \text{و} \quad I_2=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\ln(1+x^2)}{x^4+1}dx \quad \text{و} \quad I_3=\int_0^{+\infty}\frac{x\ln x}{1+x^2}dx$$

الحل

- في التكامل I_1، لدينا $\left|\frac{\sin x}{x^2+1}\right|\le\frac{1}{x^2+1}$، وبمقارنته مع التكامل المتقارب $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^2+1}dx$ ، نحصل على تقارب I_1

إذن يمكن كتابة $I_1=\int_{-\infty}^{0}\frac{\sin x}{x^2+1}dx+\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x^2+1}dx$

نلاحظ بأن الدالة $x\mapsto\frac{\sin x}{x^2+1}$ هي دالة فردية ومنه $I_1=0$

- في التكامل I_2، نلاحظ بأن الدالة $x\mapsto\frac{x\ln(1+x^2)}{x^4+1}$ هي دالة فردية. ولدينا $\lim_{x\to+\infty}\frac{x\ln(1+x^2)}{x^4+1}=0$

ومنه $\frac{x\ln(1+x^2)}{x^4+1}<\frac{1}{x^2}$ إذا كان $|x|>A$.

وبمقارنته مع التكامل $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$ ، نحصل على تقارب I_2. ومنه $I_2=0$

- في التكامل I_3، في حالة $x\to 0^+$ يكون لدينا التكافؤ $\frac{\ln x}{1+x^2}\sim\ln x$ هي دالة قابلة للمكاملة بجوار الصفر.

(يمكن حساب دالة اصلية لـ $\ln x$ بملاحظة $\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}\ln x\neq 0$ ومنه $|\ln x|<\frac{1}{\sqrt{x}}$ $0<x<x_0$)

وفي حالة $x\to+\infty$ لدينا $\lim_{x\to+\infty}x^{3/2}\frac{\ln x}{1+x^2}=0$ وأخيرا $\left|\frac{\ln x}{1+x^2}\right|<\frac{1}{x^{3/2}}$، ومنه I_3 متقارب.

يمكن كتابة $I_3=\int_0^1\frac{\ln x}{x^2+1}dx+\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2+1}dx$ وإذا وضعنا في التكامل $x=\frac{1}{t}$ يكون لدينا:

$\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2+1}dx=\int_1^0-\frac{\ln x}{1+1/t^2}(-\frac{1}{t^2})dt=-\int_0^1-\frac{\ln x}{t^2+1}dt$ ومنه $I_3=0$.

تمارين إضافية

تمرين 1 عين الثوابت A ، B ، C بحيث تكون $\frac{x^3+1}{x^2(x-1)}=1+\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-1}$

واستنتج $\int\frac{x^3-1}{x^2(x-1)}dx$

تمرين 2 عين الأعداد الحقيقية A ، B ، C بحيث تكون من أجل كل x من $\mathbb{R}_+^*$:

$$f(x)=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}=\frac{x-1}{x(x^2+1)}$$

عين دالة أصلية لـ$f(x)$، والتي تنعدم من أجل $x=1$.

تمرين 3 احسب التكاملات الآتية:

$\int\frac{x}{\sin x}dx$ ، $\int x^2\cdot e^{3x}dx$ ، $\int\frac{dx}{x\ln x^2}$ ، $\int\frac{x^2dx}{(1+x^3)^3}$ ، $\int\frac{dx}{(2x-1)\cdot\sqrt{2x-1}}$ ،

$\int_0^1 x\cdot\sin x\,dx$ ، $\int\frac{dx}{e^x+e^{-x}}$ ، $\int e^{2x}\sin x\,dx$ ، $\int\frac{e^x dx}{e^x+1}$ ، $\int x\cdot\ln^2 x\,dx$ ،

تمرين 4 f دالة مستمرة على $\mathbb{R}$: $\forall x\in\mathbb{R},\ \int_0^x f(t)\,dt=2\left(f(x)-f(0)\right)$

بين أن f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$.

تمرين 5 أثبت تقارب التكامل $I = \int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} dt$ ($t = e^x$ $0 < t < 1$)

- أثبت $\int_0^x \frac{t}{\ln t} dt = \int_0^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt$ $\forall t \in]0,1[$

وبوضع $F(x) = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin x) dx$ استنتج $F(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$

- أثبت تقارب كل من $I_1 = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin x) dx$ و $I_2 = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos x) dx$
- جد علاقة بين I_1 و I_2 واستنتج قيمة التكامل $I_3 = \int_0^{\pi/2} \ln(\tan x) dx$، ثم قيمتي I_1 و I_2 ؟

تمرين 6 نعتبر $f : x \mapsto \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$ المعرفة على $\mathbb{R}$. بين أن f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$، ثم أحسب $f'(x)$.

تمرين 7 نعتبر الدالة $F(x) = \int_2^x \frac{1}{t \ln t} dt$

- بين أن الدالة $F(x)$ مستمرة وتقبل الاشتقاق على $]2; +\infty[$، عين مشتقتها $f(x)$.
- حقق نظرية التزايدات المنتهية على الدالة $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$ في المجال $[2;4]$.
- عين القيمة المتوسطة c لـ $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$ على $[2;4]$.

تمرين 8 بتبديل المتغير: $u = \sqrt{1+t}$، أحسب $\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$. $(0 < x)$

تمرين 9 بتبديل المتغير: $u = \sqrt{\cos t}$، أحسب $\int_0^x \frac{\sin^3 t}{\sqrt{\cos t}} dt$ $(0 < x < \pi/2)$

واستنتج قيمتي التكاملين: $I = \int_0^\pi \frac{x \sin x}{1+\sin^2 x} dx$ و $j = \int_0^\pi \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} dx$.

تمرين 10 f دالة مستمرة على المجال $[0, 2\pi]$ في $\mathbb{R}$.

برهن، بوضع $t = \pi - x$، أن $\int_0^\pi x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin x) dx$

تمرين 11 باستعمال التكامل بالتجزئة، أحسب، من أجل كل x و m موجبين تماما: $G(x) = \int_m^x t^3 \ln t \; dt$

احسب $\lim_{m \to 0} G(x)$ ، واستنتج دالة أصلية لـ f على $]0, +\infty[$.

تمرين 12 أدرس تغيرات الدالة $f(x) = \frac{1+\ln x}{x}$، ثم أحسب $\int_{1/e}^x f(t) dt$ ومثّله.

تمرين 13 بين أن $\int_x^1 \frac{dt}{1+t^2} = \int_1^{1/x} \frac{dt}{1+t^2}$ حيث $0 < x$.

الفصل الخامس

المشتقات المتتالية والنشر المحدود

- المشتقات المتتالية و تعميم نظرية التزايدات المنتهية
- بعض صيغ نشر الدوال
- النشر المحدود بجوار الصفر
- بعض تطبيقات النشر المحدود
- تمارين محلولة

ملخص الدرس

المشتقات المتتالية

1. المشتقات المتتالية وتعميم نظرية التزايدات المنتهية

1.1 المشتقات المتتالية:

تعريف: ليكن I مجال و $f : I \to \mathbb{R}$.

المشتقة من الرتبة n للدالة f الذي نرمز له بالرمز $f^{(n)}$ معرفة بالتراجع :

من أجل $n = 0$ $\quad f^{(0)} = f$ و $\left(f^{(n)}\right)' = f^{(n+1)}$

نقول أن الدالة f تقبل الاشتقاق حتى الرتبة n عند $a \in I$ إذا كانت $f^{(n-1)}$ قابلة الاشتقاق عند a . ونكتب:

$$\left(f^{(n-1)}\right)'(a) = f^{(n)}(a)$$

نقول أن الدالة f تقبل مشتقة من الرتبة n على I إذا قبلت f الاشتقاق n مرة على I . أي إذا كانت $f^{(n)}(x)$ معرفة عند كل $x \in I$.

2.1 مشتقات من الرتب العليا

لتكن $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ دالة قابلة للاشتقاق على المفتوح $]a,b[$.

نقول عن f إنها تقبل الاشتقاق مرتين عند نقطة $x_0 \in]a,b[$ إذا قبلت الدالة المشتقة f' الاشتقاق عند النقطة $x_0 \in]a,b[$، أي إذا كانت النهاية التالية موجودة :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} .$$

تسمى هذه النهاية عند وجودها المشتق الثاني لـ f عند $x_0 \in]a,b[$، ونرمز له بـ $f''(x_0)$. إذا كانت $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ تقبل الاشتقاق مرتين عند كل نقطة من $]a,b[$ أصبحت الدالة $f'' :]a,b[\to \mathbb{R}$ معرفة، وهو ما يمكّننا من تعريف المشتق الثالث عند $x_0 \in]a,b[$ بأنه يساوي النهاية التالية (إن وجدت) :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f''(x) - f''(x_0)}{x - x_0} .$$

نعرف المشتق من الرتبة $n \in \mathbb{N}^*$ بالتراجع بوضع

$$f^{(n+1)}(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(x_0)}{x - x_0}$$

حيث يرمز $f^{(n)}(x)$ لمشتق f من الرتبة n عند النقطة $x \in]a,b[$.

مثلا بالحساب المباشر نجد $\left(\frac{1}{x-1}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^{n+1}n!}{(x-1)^{n+1}}$

3.1 نظرية Leibniz

إذا كانت f و g دالتين عدديتين معرفتين على المجال I من $\mathbb{R}$ وتقبلان الاشتقاق n مرة على I ، فإن الدالة $f\cdot g$ تقبل الاشتقاق n مرة على I ولدينا :

$$\forall x\in I,\quad (f\,g)^{(n)}(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}f^{(k)}(x)\,g^{(n-k)}(x)$$

أمثلة:

$$(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right),\quad (\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right),\quad (\log x)^{(n)}=\frac{(-1)^{n+1}}{x^{n}}(n-1)!$$

2. مفهوم الصنف

ليكن n من $\mathbb{N}^*$. نقول عن f أنها من الصنف $\mathcal{C}^n$ على I ($f\in\mathcal{C}^n(I)$)، إذا كانت f تقبل الاشتقاق n مرة على I وكانت $f^{(n)}$ مستمرة على I .

ملاحظة

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad \left(k\le n\ \Rightarrow\ \mathcal{C}^n(I)\subset\mathcal{C}^k(I)\right)$$

$\mathcal{C}^0(I)$: مجموعة الدوال المستمرة على I .

إذا رمزنا بـ $\mathcal{D}(I)$ لمجموعة الدوال القابلة للاشتقاق على I ، يكون : $\mathcal{C}^1(I)\subset\mathcal{D}(I)\subset\mathcal{C}^0(I)$

إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n، $f\in\mathcal{C}^n(I)$ نقول أن f من **الصنف ما لا نهاية**.

وتكتب $f\in\mathcal{C}^\infty(I)$.

ولدينا $\forall n\in\mathbb{N}\quad \mathcal{C}^\infty(I)\subset\mathcal{C}^n(I)$

مثلا: • الدالة الأسية، وكذلك دوال كثيرات الحدود من الصنف $\mathcal{C}^\infty$ على $\mathbb{R}$.

• **الدالة** $f(x)=x|x|$ من الصنف $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$، ودالتها المشتقة : $f'(x)=\begin{cases}2x\ ; & x\ge 0\\ -2x\ ; & x<0\end{cases}$

• **مجال الاشتقاق $\mathcal{D}$ والعدد المشتق عند كل نقطة x من $\mathcal{D}$ للدالة** $f(x)=\ln|\ln x|$

مجموعة تعريف f : $D_f=]0;1[\cup]1;+\infty[$ ، و f تقبل الاشتقاق على $D_f=\mathcal{D}$: $f'(x)=\dfrac{1}{x\ln x}$

3. نظرية تايلور

f دالة تحقق الشروط التالية:

إذا حققت الدالة الشروط :
f تقبل الاشتقاق n مرة على $[a,b]$،
$f^{(n)}$ مستمرة على $[a,b]$،
$f^{(n)}$ تقبل الاشتقاق $n+1$ مرة على $]a,b[$.

فإنه يوجد c من $]a,b[$:

$$f(b)=f(a)+(b-a)f'(a)+\frac{(b-a)^2}{2!}f''(a)+...+\frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$$

تُسمى هذه العلاقة **بدستور تايلور** في المجال $[a,b]$.

1.3 صيغة Mac–Laurain

حالات خاصة في علاقة تايلور على المجال $[a,b]$:

من أجل $n=0$: $f(b)=f(a)+(b-a)f'(c)$

من أجل $n=1$: $f(b)=f(a)+(b-a)f'(a)+\frac{(b-a)^2}{2!}f''(c)$

إذا طبقنا دستور تايلور في المجال $[0,x]$ نجد:

$$\boxed{f(x)=f(0)+xf'(a)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+...+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)}$$

التي يمكن كتابتها بالشكل:

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+...+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x) \quad \text{حيث} \quad \theta\in]0,1[$$

تسمى هذه الأخيرة بنشر **ماك لوران Mac–Laurain**

يعطى دستور ماك لوران من الرتبة الأولى، كما يلي:

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(\theta x) \quad 0<\theta<1$$

مثال1 بتطبيق دستور ماك لوران على الدالة $f(x)=e^x$، نجد :

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^c \quad \text{حيث } c \text{ من } \mathbb{R}$$

مثال2 الدالة $g(x)=\frac{1}{1-x}$ تعطي في المجال $]-1,1[$ علاقة ماك لوران بالشكل:

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+...+x^n+R_n(x)$$

ملاحظة تتيح شروط النظرية كتابة f بالشكل : $f(x)=p_n(x)+R_n(x)$

حيث p_n كثير حدود درجته n و $R_n(x)$ ما هو إلا $\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}$ في نشر ماك لوران .

النشر المحدود بجوار الصفر

4. دوال متكافئة بجوار قيمة

1.4 اللامتناهي في الصغر

ϕ دالة معرفة على مجال مفتوح I يشمل x_0، وإذا كانت f أيضا دالة معرفة على مجال مفتوح I يشمل x_0،
تكون f لا متناهية في الصغر (أو مهملة) بالنسبة لـ ϕ بجوار x_0 ، ونكتب $f=o(\phi)$ بجوار x_0، إذا وإذا فقط
من أجل كل $\varepsilon>0$، يوجد $\eta>0$ يكون : $|f(x)|<\varepsilon|\phi(x)|\;,\;\forall x\in\left]x_0-\eta,x_0+\eta\right[$
إذا كانت ϕ لا تنعدم يمكن تبديل العبارة $|f(x)|<\varepsilon|\phi(x)|$ بـ $\left|\frac{f(x)}{\phi(x)}\right|<\varepsilon$.
ونقول إن f مهملة أمام ϕ بجوار x_0
إذا كانت $\phi=1$، أي إذا كان $\lim_{x\to x_0}f(x)=0$ ، نقول إن f لا متناهي في الصغر عندما يؤول x إلى x_0.

أمثلة

$f(x)=x^3$: $f=o(x)$ بجوار 0. وكذلك f لا متناهية في الكبر بجوار $(+\infty)$.

$g(x)=\frac{1}{x^2+1}$: g لا متناهي الصغر بجوار اللانهاية ($+\infty$ أو $-\infty$).

$g(x)=\ln(x+1)$: g لا متناهي الكبر بجوار $+\infty$، وهو لا متناهي الصغر عندما يؤول x إلى 0 .

2.4 تكافؤ دالتين

لتكن f و g دالتين معرفتين على مجال مفتوح يشمل x_0.
نقول عن f أنها تكافئ g بجوار x_0 إذا تحقق $f-g=o(x)$ بجوار x_0 . ونكتب $f\sim_{x_o}g$
مثال $\sin x\sim_0 x$

إذا كانت $f_1\sim_{x_o}g_1$ و $f_2\sim_{x_o}g_2$ فإن $f_1\cdot f_2\sim_{x_o}g_1\cdot g_2$

إذا كانت $f\sim_{x_o}g$ و $\frac{1}{f}$، $\frac{1}{g}$ معرفتان بجوار x_0 فإن $\frac{1}{f}\sim_{x_o}\frac{1}{g}$

إذا كانت h مستمرة بجوار u_0 يحقق $h(u_0)=x_0$ وإذا كان $f\circ g$ و $g\circ f$ معرفتان بجوار x_0 فإن
$f\sim_{x_o}g$ تستلزم $g\circ f\sim_{u_o}f\circ g$

ملاحظة: بصورة عامة لا يمكن جمع المتكافئات

مثلا باستخدام النشر عند الصفر للدالة $\sin x - x\cos x$

$$\left(x-\frac{1}{6}x^3+x^4p_1(x)\right)-\left(x-\frac{1}{2}x^3+x^3p_2(x)\right)$$
$$=\frac{1}{3}x^3+x^4p(x)$$

ومنه لدينا التكافؤ : $(\sin x - x\cos x)\sim_0 \frac{1}{3}x^3$

ونستنتج $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - x\cos x}{x^3}=\dfrac{1}{3}$

3.4 تكافؤ بعض الدوال بجوار الصفر

$$(1+x)^n \sim_0 1+nx \quad ، \quad \ln(x+1)\sim_0 x \quad ، \quad (e^x-1)\sim_0 x \quad ، \quad \sin x \sim_0 x$$

$$\text{sh}x \sim_0 x \quad ، \quad \arcsin x \sim_0 x \quad ، \quad (1-\cos^2 x)\sim_0 \frac{x^2}{2} \quad ، \quad \tan x \sim_0 x$$

4.4 دوال متكافئة بجوار ∞

لتكن f و g دالتين معرفتين على مجموعة A

نقول عن f أنها تكافئ g بجوار $+\infty$ إذا تحقق $f-g=o(x)$ بجوار $+\infty$. ونكتب $f\sim_{+\infty} g$

5. تعريف النشر المحدود

f دالة معرفة في جوار $x=0$

نقول أن f تقبل نشرا محدودا من الرتبة n بجوار 0، إذاا وجد كثير حدود من درجة n:

$$f(x)=p(x)+x^n\varepsilon(x)=a_0+a_0x+a_1x^2+...+a_n+x^n+\ x^n\varepsilon(x)$$

مع $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$

أي إذا وُجد كثير حدود $p(x)$ بمعاملات حقيقية بحيث :

$$f(x)=p(x)+o\left(x^n\right) \text{ و } \deg p(x)\le n$$

ملاحظة : كثير الحدود في نشر $f(x)$ وحيد .

1.5 النشر المحدود في جوار $x=a$

إذا قبلت دالة f نشرا محدودا من الرتبة n بجوار a ، نكتب $f(x)=p_n(x)+o(x-a)^n$

$p_n(x)$ هو النشر المحدود من الرتبة n بجوار a .

يساعدنا هذا النشر في تعيين معادلة المماس عند النقطة المبدأ، ووضعيته بالنسبة لمنحنى f، وكذلك في حساب بعض النهايات لتحديد طبيعة الفروع اللانهائية. (خطوط مقاربة أو فروع لا نهائية).

النشر المحدود من الرتبة n في جوار الصفر.

إن النشر المحدود من الرتبة n لدالة f تقبل مشتقات مستمرة حتى المرتبة $n+1$، في جوار 0، هو:

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+...+\frac{x^n}{n!}f^n(0)+x^n\varepsilon(x)$$

مع $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$

$y=f(0)+x.f'(0)$: هو نشر محدود من الرتبة الأولى لـ f عند 0.

وهو أيضا معادلة المماس عند الصفر (في حالة $0\in D_f$)

عمليا نحسب المشتقات المتوالية $f^{(i)}(x_0)$ عند النقطة x_0 حتى الرتبة المطلوبة n، ثم نعوض عبارتها في العلاقة

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+...+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\circ(x-x_0)^n.$$

2.5 ملاحظة

يمكن أن تقبل دالة نشرا محدودا حتى الرتبة n دون أن تكون قابلة للاشتقاق حتى الرتبة n.

مثلا : في الدالة الآتية :

$$f(x)=\begin{cases} x^3\sin\frac{1}{x^2}, & x\neq 0\\ 0\ , & x=0\end{cases}$$

التي لا تقبل مشتقا ثانيا عند الصفر، ورغم ذلك فهي تكتب بالشكل $f(x)=0+o(x^2)$

الذي يمثل نشر الدالة المعطاة من الرتبة الثانية بجوار الصفر.

بتطبيق نظرية تايلور تقدم طريقة الحصول على نشر محدود من الرتبة n لكل دالة $f:]a,b[\to\mathbb{R}$

من الصنف $\mathcal{C}^n$ على $]a,b[$ إذا ما قبلت $f^{(n)}$ الاشتقاق عند كل x_0 من $]a,b[$.

3.5 النشر المحدود من الرتبة n بجوار الصفر لبعض الدوال المألوفة

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!}+x^n\varepsilon(x)$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n!}+x^n\varepsilon(x)$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+...+(-1)^P\frac{x^{2p}}{(2p)!}+x^p\varepsilon x$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^P \frac{x^{2P+1}}{(2P+1)!} + x^{2P+1}\varepsilon(x)$$

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2P+1}}{(2n+1)!} + x^{2P+1}\varepsilon(x)$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2P}}{(2n)!} + x^{2P}\varepsilon(x)$$

$$\frac{1}{x+1} = 1 - x + x^2 + \ldots + (-1)^n n^n + x^n \varepsilon(x)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + x^n\varepsilon(x)$$

مثال النشر المحدود بجوار الصفر من الرتبة **3** للدوال الآتية: $\ln(1+x)$, $\frac{1}{1-x}$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$

ويكون النشر المحدود بجوار الصفر من الرتبة 2 للدوال: $\ln(1 - x\ln(1+x))$, $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2x + o(x^2)$$

$$\ln(1 - x\ln(1+x)) = -x^2 + o(x^2)$$

4.5 نتائج وطرق حسابية

- نقول أن f يقبل نشرا من الرتبة n بجوار 0 : $f(x) = p(x) + o(x^n)$، فإنه من أجل كل k من $\{1, 2, \cdots, n\}$، f يقبل نشرا محدودا من الرتبة k بجوار 0، هذا النشر هو كثير الحدود الذي لا يشمل إلا وحيدات الحد من درجة أقل من أو تساوي k في كثير الحدود $p(x)$.

- **عمليات** :

إذا كان : $f(x) = P(x) + x^n\varepsilon(x)$ و $g(x) = Q(x) + x^n\varepsilon(x)$:

فإنه يكون : $f(x) \pm g(x) = P(x) \pm Q(x) + x^n\varepsilon(x)$

$f(x) \times g(x) = P(x) \times Q(x) + x^n\varepsilon(x)$ مع حذف الحدود ذات الدرجة الأكبر من n في الجداء $P(x) \times Q(x)$.

$f(\lambda x^P) = P(\lambda x^P) + x^n\varepsilon(x)$ (بحذف المحدود ذات الدرجة الأكبر من n).

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{P(x)}{Q(x)}+x^{n}\varepsilon(x)$$
$$f'(x)=P'(x)+x^{n-1}\varepsilon(x)$$
$$\int f(x).dx=\int P(x).dx+x^{n+1}\varepsilon(x)$$

مثلا

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^{2}+...+x^{n}+o(x^{n})$$
$$\left(\frac{1}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^{2}}=1+2x+3x^{2}+...+nx^{n-1}+o(x^{n-1})$$

- إذا كان $n \in \mathbb{N}$ ، و f دالة تقبل نشرا محدودا من الرتبة n بجوار 0 : $f(x)=p(x)+o(x^{n})$ و g دالة قبل نشرا محدودا من الرتبة n بجوار 0 : $g(x)=q(x)+o(x^{n})$ ، وإذا كان $f(0)=0$

فإن الدالة $g\circ f$ تقبل نشرا محدودا درجته n مأخوذا من كثير الحدود $p(q(x))$ والذي لا يشمل إلا وحيدات الحد ذات الدرجة الأقل من n أو تساويها .

6. وضعية منحنى دالة بالنسبة لخطوط

1.6 الوضعية بالنسبة للمماس عند نقطة x_0

نعلم بأن معادلة المماس عند x_0 تكتب بالشكل $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$

لنفرض أن لدينا النشر

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^{n}+o(x-x_0)^{n}.$$

نميز حالتين: n زوجي :

- إذا كان $f^{(n)}(x_0)>0$ ، فإن المنحنى سيقع فوق المماس.
- إذا كان $f^{(n)}(x_0)<0$ ، فإن المنحنى سيقع تحت المماس.

n فردي : عندئذ يقطع المماس المنحنى وتكون وضعيته على النحو الآتي :

الحالة	$x>x_0$	$x<x_0$
$f^{(n)}(x_0)>0$	المنحنى فوق المماس	المنحنى تحت المماس
$f^{(n)}(x_0)<0$	المنحنى تحت المماس	المنحنى فوق المماس

2.6 وضعية المنحنى بالنسبة لخط مقارب أفقي

بفرض أن $f(x)$ يقبل النشر : $f(x)=a+\frac{a_n}{x_n}+o\left(\frac{1}{x^{n}}\right)$ (a و a_n معاملان) :

نميز حالتين: n زوجي :

– إذا كان $a_n > 0$، فإن المنحنى سيقع فوق خط المقارب $y = a$.

– إذا كان $a_n < 0$، فإن المنحنى سيقع تحت خط المقارب $y = a$.

n فردي : عندئذ تكون الوضعية كالتالي :

الحالة	$x \to +\infty$	$x \to -\infty$
$a_n > 0$	المنحنى فوق الخط المقارب $y = a$	المنحنى تحت الخط المقارب $y = a$
$a_n < 0$	المنحنى تحت الخط المقارب $y = a$	المنحنى فوق الخط المقارب $y = a$

3.6 وضعية المنحنى بالنسبة لخط مقارب مائل

نفرض أن لدينا النشر التالي $f(x) = ax + b + \frac{a_n}{x_n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right)$ (a و a_n معاملان) :

هناك حالتان : n زوجي :

– إذا كان $a_n > 0$، فإن المنحنى سيقع فوق خط المقارب $y = ax + b$.

– إذا كان $a_n < 0$، فإن المنحنى سيقع تحت خط المقارب $y = ax + b$.

n فردي : الوضعية تكون كالآتي :

الحالة	$x \to +\infty$	$x \to -\infty$
$a_n > 0$	المنحنى فوق الخط المقارب $y = ax + b$	المنحنى تحت الخط المقارب $y = ax + b$
$a_n < 0$	المنحنى تحت الخط المقارب $y = ax + b$	المنحنى فوق الخط المقارب $y = ax + b$

7. النشر المحدود بجوار المالانهاية

نعتبر الدالة $f(x)$. بحساب النشر المحدود للدالة $g(u)$ بجوار $u = 0$، حيث $g(u) = f(1/x)$ نحصل أيضا على النشر المحدود للدالة $f(x)$ بجوار المالانهاية. (بتبديل المتغير $x = \frac{1}{u}$).

تمارين محلولة

تمرين 5–1

أثبت أن $\forall x>0 \quad \dfrac{1}{x+1}<\log(x+1)-\log x<\dfrac{1}{x}$

الحل

نعم أن الدالة $\log$ من الصنف $\mathcal{C}^{\infty}$ على $]0,+\infty[$، وشرط نظرية التزايدات المنتهية على المجال $[x\,,x+1]$ متحققة، إذن يوجد c من $]x\,,x+1[$ بحيث يكون:

$$\log(x+1)-\log x=(x+1-x).\frac{1}{c}=\frac{1}{c}$$

لكن c من $]x\,,x+1[$، وبالتالي $\dfrac{1}{x+1}<\dfrac{1}{c}<\dfrac{1}{x}$.

تمرين 5–2

أثبت أن $\forall x\in\,]0,1[\quad \arcsin x<\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

الحل

نعلم أن الدالة $\arcsin$ تقبل الاشتقاق على المجال المفتوح $]-1,+1[$، وشروط نظرية التزايدات المنتهية متحققة على المجال $[0,x]$، إذن يوجد c من $]0,x[$:

$$\arcsin x-\arcsin 0=(x-0)\frac{1}{\sqrt{1-c^2}}=\frac{x}{\sqrt{1-c^2}}$$

وبما أن c أقل من x، فإنه يكون $\dfrac{1}{\sqrt{1-c^2}}<\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. ومنه المطلوب .

تمرين 5–3

عين مجال الاشتقاق $\mathcal{D}$ وأحسب العدد المشتق عند كل نقطة x و $\mathcal{D}$ للدالة $f(x)=e^{\sqrt{x}}$

الحل

مجموعة التعريف f هي $D_f=[0\,;+\infty[$، و f تقبل الاشتقاق على $\mathcal{D}=]0\,;+\infty[$،

(f لا تقبل الاشتقاق عند 0 لأن $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sqrt{x}}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x}}\frac{e^{\sqrt{x}}-1}{\sqrt{x}}=+\infty$)

ولدينا من أجل $0<x$ $\qquad f'(x)=\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$

تمرين 5–4

أحسب المشتقة $f^{(n)}(x)$ ، **حيث** $f(x)=\dfrac{x}{(1+x)^2}$

الحل

لدينا $f(x)=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{(1+x)^2}$ ومنه $f'(x)=-\dfrac{1}{(x+1)^2}-\dfrac{2}{(x+1)^3}$ ،

وكذلك $f''(x)=-\dfrac{2}{(x+1)^3}+\dfrac{2\times 3}{(x+1)^4}$ ، ويكون $f''(x)=-\dfrac{3!}{(x+1)^4}-\dfrac{4!}{(x+1)^5}$ ، . .

فيكون $f^{(n)}(x)=-\dfrac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}-\dfrac{(-1)^n(n+1)!}{(x+1)^{n+2}}$ ، أي $f^{(n)}(x)=\dfrac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}(x-n)$

تمرين 5–5

هات نشر ماك لوران من الرتبة الأولى للدالة $f(x)=\sqrt{1+x}$ **على المجال** $]-1,+\infty[$.

الحل

بما أن f تقبل الاشتقاق بالاستمرار ما لا نهاية من المرات على $]-1,+\infty[$.

فإنه يمكن كتابة نشر ماك لوران من الرتبة الأولى للدالة f على مثل المجال $[0,x]$.

لدينا $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}$ ، $f''(x)=-\dfrac{1}{4\sqrt{(1+x)^3}}$

ومنه $\theta \in]0,1[$ $\qquad f(x)=1+\dfrac{1}{2}x-\dfrac{x^2}{8\sqrt{(1+\theta x)^3}}$

تمرين 5–6

نعتبر الدالة العددية: $\qquad f(x)=e^{-\frac{1}{2}x}+\dfrac{1}{3}xe^{x}-\dfrac{2}{9}e^{x}$

1. **أحسب الدالة المشتقة** $f'(x)$ ، **ثم جد النشر المحدود لها من الرتبة الأولى بجوار الصفر، واستنتج النشر المحدود للدالة** $f(x)$ **من الرتبة الثانية بجوار الصفر.**

2. **بين أن** $f(x)$ **مستمرة وتقبل الاشتقاق عند** $x_0=0$.

3. استنتج معادلة المماس للمنحنى الممثل للمعادلة $y = f(x)$ المار من نقطة المبدأ في معلم كيفي.

الحل

1. الدالة $f(x) = e^{-\frac{1}{2}x} + \frac{1}{3}x.e^{x} - \frac{2}{9}e^{x}$ مستمرة وتقبل الاشتقاق بجوار الصفر. ولدينا:

$$f'(x) = \frac{1}{9}e^{x} + \frac{1}{3}x.e^{x} - \frac{1}{2}e^{x}.e^{-\frac{3}{2}x}$$

2. النشر المحدود من الرتبة الثانية بجوار الصفر للدالة $f'(x)$:

$$f'(x) = f'(0) + f''(0)\cdot x + o(x)$$

$$f'(x) = -\frac{7}{18} + \frac{25}{36}\cdot x + o(x)\ .$$

والنشر المحدود من الرتبة الثانية بجوار الصفر للدالة $f(x)$:

$$f(x) = \frac{7}{9} - \frac{7}{18}\cdot x + \frac{25}{72}\cdot x^2 + o(x^2)$$

3. تكون معادلة المماس المطلوبة، هي: $y = \frac{7}{9}(1 - \frac{1}{2}\cdot x)$.

لدينا n زوجي و $f''(0) > 0$ ، وبالتالي منحنى الدالة f سيقع فوق هذا المماس.

تمرين 5-7

عين النشر الدالة $f(x) = \sqrt{4-x}$ حتى الرتبة الثانية بجوار الصفر.

الحل

عبارة هذا النشر $f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + o(x^2)$

لدينا $f(0) = 2$ ، $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{4-x}}$ ومنه $f'(0) = \frac{1}{4}$ ، وكذلك $f''(x) = -\frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{4-x} + x\sqrt{4-x}}$

ومنه $f''(0) = -\frac{1}{32}$,

وأخيرا يكون $f(x) = 2 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{64}x^2 + o(x^2)$

تمرين 5–8

انشر الدالة $f(x)=\ln(1+\sin x)$ حتى الرتبة الرابعة بجوار الصفر.

الحل

نحسب مشتقات الدالة f حتى الرتبة الرابعة عند الصفر، ونعوض قيمها في النشر الآتي:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^2++\frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^2+o(x^4)$$

لدينا :

$$f'(x)=\frac{\cos x}{1+\sin x}$$

$$f''(x)=-\frac{1}{1+\sin x}$$

$$f'''(x)=\frac{\cos x}{(1+\sin x)^2}$$

$$f^{(4)}(x)=2\frac{2-\sin x}{\cos^2 x-4\sin x-\sin^2 x-3}$$

ومنه $f(0)=0\ ,\ f'(0)=1,\ f''(0)=-1,\ \ f'''(0)=1,\ \ f^{(4)}(0)=-2$

والنشر المطلوب هو :

$$f(x)=0+1\cdot x-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}\cdot x^3-\frac{1}{12}x^4+o(x^4)$$

$$=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}\cdot x^3-\frac{1}{12}x^4+o(x^4)$$

نستطيع كتابة النشر بجوار x_0 بالشكل

$$f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+....+a_n(x-x_0)^n+o\left((x-x_0)^n\right).$$

أما بجوار لانهاية فالنشر يكتب :

$$f(x)=a_0+a_1\frac{1}{x}+a_2\frac{1}{x^2}+....+a_n\frac{1}{x^n}+\circ\left(\frac{1}{x^n}\right).$$

تمرين 5–9

أنشر الدالة $f(x)=x\,e^{\frac{1}{x}}$

الحل

بوضع $x=\frac{1}{u}$، نحصل على $g(u)=\frac{1}{u}e^u$:

النشر المحدود من المرتبة 2 بجوار الصفر للدالة e^u: $\quad e^u = 1+u+\frac{u^2}{2}+u^2\varepsilon(u)$

ومنه $\quad \frac{e^u}{u} = \frac{1}{u}+1+\frac{u}{2}+u\varepsilon(u)$

وأخيرا $\quad f(x) = x+1+\frac{1}{2x}+\frac{1}{x}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)$

$f(x) = x+1+\varphi(x)$ مع $\varphi(x) = \frac{1}{2x}+\frac{1}{x}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)$

$y = x+1$: نشر محدود من الرتبة الأولى لـ $f(x)$، وهو أيضا معادلة الخط المقارب لمنحنى f.

تمرين 5–10

لتكن الدالة $f(x) = -\sqrt{x^2+1}-x$ المعرفة على $]-\infty, 0]$.

أدرس الفروع اللانهائية.

الحل

لدينا $\quad \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{x}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right) = -\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)$

باستخدام التحويل $x \mapsto \frac{1}{x}$، يكون النشر المحدود لـ $\frac{f(x)}{x}$ من الرتبة 2 هو $-\left(1+\frac{1}{2}.\frac{1}{x^2}+1\right)$

ومنه $\quad \frac{f(x)}{x} = -2-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^2}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)$ مع $\lim\limits_{x\to-\infty}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right) = \varepsilon(0) = 0$

وبالتالي لدينا $f(x) = -2x-\frac{1}{2x}+\frac{1}{x}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)$، ومعادلة الخط المقارب هي : $y = 2x$.

وبما أن $-\frac{1}{2x} > 0$ فإن منحنى f يكون فوق هذا الخط .

تمرين 5–11

نعتبر $\quad f(x) = (x+1)e^{\frac{1}{x}}$

باستخدام النشر المحدود من الرتبة الأولى للدالة الأسية، عين معادلة الخط المقارب المائل لمنحنى f.

الحل

نعلم بأن $e^u = 1+u+u.\varepsilon(u)$ مع $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(u) = 0$

وبالتالي $e^{\frac{1}{x}}=1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\cdot\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)$ مع $\lim\limits_{x\to+\infty}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)=0$

إذن $f(x)=(x+1)\cdot e^{\frac{1}{x}}=(x+1).\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}.\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)\right)=x+2+\varphi(x)$ مع $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=0$

ومنحنى f يقبل خطا مقاربا مائلا معادلته $y=x+2$.

تمرين 5–12

نضع من أجل كل عدد صحيح $0<n$ $u_n=n^2\left(\arctan\frac{1}{n}-\frac{1}{n}\right)$

جد نهاية u_n **عندما يؤول** n **إلى** $+\infty$.

الحل

النشر المحدود من الرتبة 2 عند الصفر للدالة $\arctan x$ هو x.

وبالتالي من أجل كل x من $\mathbb{R}$ $\arctan x=x+x^2\varepsilon(x)$ مع $\lim\limits_{x\to0}\varepsilon(x)=\varepsilon(0)=0$

بإعطاء x القيمة $\frac{1}{n}$، يكون: $\arctan\frac{1}{n}=\frac{1}{n^2}\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)$

ومنه $n^2\left(\arctan\frac{1}{n}-\frac{1}{n}\right)=n^2\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n}\right)=\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)$

عندما يؤول n إلى $+\infty$ فإن $\frac{1}{n}$ تنتهي إلى الصفر. وبما أن ε مستمرة عند الصفر يكون لدينا:

$\lim\limits_{x\to+\infty}\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)=0$. أي $\lim\limits_{x\to+\infty}n^2\left(\arctan\frac{1}{n}-\frac{1}{n}\right)=0$

2. النشر المحدود من الرتبة الثانية بجوار الصفر للدالة $g(x)$:

$$g(x)=g(0)+g'(0)\cdot x+\frac{1}{2!}g''(0)\cdot x+o\left(x^2\right)$$

$$g(x)=1-\frac{1}{2}\cdot x+\frac{1}{3}\cdot x^2+o\left(x^2\right).$$

ومنه تكون معادلة المماس لمنحنى $y=g(x)$ عند نقطة المبدأ، هي: $y=1-\frac{1}{2}\cdot x$.

تمرين 5–13

لتكن f **دالة من الصنف** C^1 **على** $\mathbb{R}_+^*$ **بحث:** $\lim\limits_{x\to+\infty}x\,f'(x)=1$. **بين أن** $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

الحل

بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty} x f'(x)=1$ ، فإنه يوجد $0<A$ بحيث: $\forall x>0,\ (x\geq A \Rightarrow x f'(x)\geq\frac{1}{2})$

ليكن x عدد حقيقي مثبت أكبر من أو يساوي A، لدينا $\forall t\in[A\,,x\,],\ f'(x)\geq\frac{1}{2x}$

ومن تزايد التكامل $\int\limits_A^x \frac{1}{2t}dt \leq \int\limits_A^x f'(t)dt$ نحصل على:

$$\forall x\geq A,\ f(x)\geq f(A)+\frac{1}{2}(\ln x-\ln A)$$

الذي يبين $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

تمرين 5–14

لتكن f دالة من الصنف C^1 على $\mathbb{R}$ وتحقق من أجل كل عدد حقيقي x : $f\circ f(x)=\frac{x}{2}+3$.

بملاحظة $f(\frac{x}{2}+3)=\frac{f(x)}{2}+3$ ، بين أن الدالة f' ثابتة ثم عين f .

الحل

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f(\frac{x}{2}+3)=f(f\circ f(x))=f\circ f(f(x))=\frac{f(x)}{2}+3$$

بما أن الدالة f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$، نحصل بالاشتقاق من أجل كل عدد حقيقي x :

$\forall x\in\mathbb{R},\quad \frac{1}{2}f'(\frac{x}{2}+3)=\frac{1}{2}f'(x)$ ومنه. $\forall x\in\mathbb{R},\quad f'(\frac{x}{2}+3)=f'(x)$

يكن x عدد حقيقي مُعطى و u المتتالية المعرفة بـ $u_0=x$. ومن أجل كل عدد طبيعي n،

$$u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n+3 .$$

مما سبق يكون لدينا $\forall n\in\mathbb{N},\quad f'(x)=f'(u_n)$

المتتالية u متقاربة نحو $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=6$. والمتتالية $\left(f'(u_n)\right)_{n\geq 0}$ ثابتة، ومساوية لـ $f'(x)$.

الدالة f' مستمرة على $\mathbb{R}$، ونستنتج: $\forall x\in\mathbb{R},\quad \lim\limits_{n\to+\infty}f'(u_n)=f'(\lim\limits_{n\to+\infty}u_n)=f'(6)$

مما يدل على أن الدالة f' ثابتة على $\mathbb{R}$. ومنه f تآلفية.

وبالعكس من أجل عدد حقيقي x نضع $f(x)=ax+b$

تكون f حل إذا وفقط إذا كان من أجل كل حقيقي x ، $a(ax+b)+b=\frac{x}{2}+3$ التي تكافئ

$\forall x\in\mathbb{R},\quad (a^2-\frac{1}{2})x+ab+b-3=0$ وأيضا تكافئ: $a^2=\frac{1}{2}$ و $(a+1)b=3$

ومنه ($a=\frac{1}{\sqrt{2}}$ و $b=3(2-\sqrt{2})$) أو ($a=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ و $b=3(2+\sqrt{2})$)

أي وجدنا حلين هما الدالتين f_1 و f_2 حيث:

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad f_1(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}x+3(2-\sqrt{2})\ \&\ f_2(x)=-\frac{1}{\sqrt{2}}x+3(2+\sqrt{2})$$

تمرين 5–15

عين في كل حالة من الحالات الآتية المشتقة من الرتبة n للدالة f :

$$1)\ f(x)=x^{n-1}\ln(1+x),\quad 2)\ f(x)=\frac{x^2+1}{(x-1)^3},\quad 3)\ f(x)=(x^3+2x-7)e^x$$

الحل

1) من أجل $1\le n$ ، لدينا حسب صيغة LEIBNIZ:

$$(x^{n-1}\ln(1+x))^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(x^{n-1})^{(k)}(\ln(1+x))^{(n-k)}$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}(x^{n-1})^{(k)}(\ln(1+x))^{(n-k)}\qquad ((x^{n-1})^{(n)}=0)$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}\frac{(n-1)!}{(n-1-k)!}(x^{n-1-k})^{(k)}(-1)^{n-1-k}\frac{(n-1-k)!}{(x+1)^{n-1-k}}$$

لأن $\ln(1+x))^{(n-k)}=(\frac{1}{1+x})^{n-1-k}$

من أجل $x=0$ ، لدينا: $(x^{n-1}\ln(1+x))^{(n)}(0)=n\cdot(n-1)!=n!$ ، ومن أجل $x\neq 0$ لدينا:

$$(x^{n-1}\ln(1+x))^{(n)}(x)=\frac{(n-1)!}{x}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}(-\frac{x}{(x+1)})^{(n-k)}$$

$$=-\frac{(n-1)!}{x}((1-\frac{x}{(x+1)})^{n}-1)\quad =-\frac{(n-1)!}{x}\frac{(x+1)^n-1}{(x+1)^n}$$

2) لدينا $\displaystyle \frac{x^2+1}{(x-1)^3}=\frac{x^2-2x+1+2x-2+2}{(x-1)^3}=\frac{1}{x-1}+\frac{2}{(x-1)^2}+\frac{2}{(x-1)^3}$

$$\left(\frac{x^2+1}{(x-1)^3}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}}+2\frac{(-1)^n(n+1)!}{(x-1)^{n+2}}+\frac{(-1)^n(n+2)!}{(x-1)^{n+2}}$$

$$=\frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+3}}((x-1)^2+2(n+1)(x-1)+(n+2)(n+1))$$

$$=\frac{(-1)^n n!(x^2+2nx+n^2+n+1)}{(x-1)^{n+3}}$$

من أجل $3\le n$ ، لدينا حسب صيغة LEIBNIZ:

$$((x^3+2x-7)e^x)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(x^3+2x-7)^{(k)}(e^x)^{(n-k)}=\sum_{k=0}^{3}\binom{n}{k}(x^3+2x-7)^{(k)}(e^x)^{(n-k)}$$

$$=((x^3+2x-7)+n(3x^2+2)+\frac{n(n-1)}{2}(6x)+\frac{n(n-1)(n-2)}{6}\cdot 6)e^x$$

$$=(x^3+3nx^2+(3n^2-3n+2)x+n^3-3n^2+4n-7)e^x$$

تمرين 5–16

أحسب نهاية المتتالية $x_n=n\ln\sqrt{\frac{n+1}{n-1}}$

الحل

$$\forall n>1 \qquad x_n=\frac{n}{2}\ln\frac{n+1}{n-1}=\frac{n}{2}\ln\left(1+\frac{2}{n-1}\right)$$

وبما أن $\frac{2}{n-1}$ تنتهي إلى 0، فإن $\ln\left(1+\frac{2}{n-1}\right)\sim\frac{2}{n-1}$

ونستنتج $x_n\sim\frac{2}{n-1}\sim 1$ ومنه $\lim x_n=1$

تمرين 5–17

عين النشر المحدود للدالة $f(x)=\sqrt{1+x}-\cos^2 x$ **حتى الرتبة الرابعة بجوار الصفر.**

الحل

لدينا النشور من الرتبة الرابعة: $\cos^2 x=\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)\right)^2=1-x^2+\frac{x^4}{3}+o(x^4)$

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+o\left(x^4\right)$$

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}-\frac{5x^4}{128}+o\left(x^4\right)$$

ومنه

$$e^x\sqrt{1+x}=\left[1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+o\left(x^4\right)\right]\left[1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}-\frac{5x^4}{128}+o\left(x^4\right)\right]$$

$$=1+\frac{3x}{2}+\frac{7x^2}{2}+\frac{17x^3}{48}+\frac{11x^4}{128}+o\left(x^4\right)$$

وأخيرا يكون: $e^x\sqrt{1+x}-\cos^2 x=\frac{3x}{2}+\frac{15x^2}{8}+\frac{17x^3}{48}-\frac{95x^4}{384}+o\left(x^4\right)$

تمرين 5–18

تمرين 1 بفرض أن f و g تقبلان النشرين المحدودين من الرتبة 4، عند الصفر، هما كثري الحدود:

$$f : x-\frac{x^3}{3} \quad g : \frac{1}{2}\pi - x - \frac{x^3}{6}$$

عين النشر المحدود من الرتبة الرابعة لـ $g\circ f$. واستنتج النهاية، عندما يؤول n إلى 0 للعبارة:

$$\frac{g\circ f(x)-\frac{1}{2}\pi + x - \frac{x^3}{6}}{x^4}$$

عين النشر المحدود من الرتبة الرابعة في جوار الصفر للدوال الآتية:

$$g(x)\cdot f(x)\ ,\ 2x\cdot g(x)-f^2(x)\ ,\ f^2(x)\ ,\ f(x^2)$$

الحل

نشر $g\circ f$ من الرتبة الرابعة عند الصفر:

نلاحظ بأن $f(0)=0$ و f مستمرة عند 0. ولدينا:

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g\left(x-x^3/3\right)=\frac{1}{2}\pi-\left(x-x^3/3\right)-\frac{\left(x-x^3/3\right)^3}{6}$$

$$=\frac{1}{2}\pi - x+\frac{1}{6}x^3+x^4\varepsilon(x)$$

مع $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x)=\varepsilon(0)=0$. والنشر المطلوب: $\frac{1}{2}\pi - x+\frac{1}{6}x^3$

- **حساب النهاية:**

$$\lim_{x\to 0}\frac{(g\circ f)(x)-\left(\frac{1}{2}\pi - x+\frac{1}{6}x^3\right)}{x^4}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{1}{2}\pi - x+\frac{1}{6}x^3+x^4\varepsilon(x)\right)-\left(\frac{1}{2}\pi - x+\frac{1}{6}x^3\right)}{x^4}=\lim_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$$

- **حساب النشور:**

$$f(x^2)=x^2-\frac{1}{6}(x^2)^3=x^2+o\left(x^4\right)$$

$$f^2(x)=\left(x-\frac{1}{6}x^3\right)-\frac{1}{3}\left(x-\frac{1}{6}x^3\right)^3=x-\frac{2}{3}x^3+o\left(x^4\right)$$

$$2x\,g\,(x)=2x\left(\frac{1}{2}\pi-x-\frac{1}{6}x^{3}\right)=\pi x-2x^{2}+o\left(x^{4}\right)$$

$$2x\,g\,(x)-f^{\,2}(x)=(\pi-1)x-2\,x^{2}-\frac{2}{3}x^{3}+o\left(x^{4}\right)$$

$$f\,(x).g\,(x)=\left(x-\frac{1}{3}x^{3}\right).\left(\frac{1}{2}\pi-x-\frac{1}{6}x^{2}\right)=-\frac{1}{2}\pi x-x^{2}+\frac{1}{6}\pi x^{3}+o\left(x^{4}\right)$$

تمرين 5–19

عين النشر المحدود بجوار الصفر من الرتبة 3 للدوال التالية:

$$\cos(x+\sin x)\quad،\quad\sqrt{1+\sin x}$$

الحل

$$\sqrt{1+\sin x}\sim\sqrt{1+\left(x-\frac{1}{6}x^{3}\right)}\sim1+\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{6}x^{3}\right)-\frac{1}{8}\left(x-\frac{1}{6}x^{3}\right)^{2}+\frac{1}{16}\left(x-\frac{1}{6}x^{3}\right)^{3}$$

$$\left(x-\frac{1}{6}x^{3}\right)^{2}\rightarrow x^{2}\ ,\quad\left(x-\frac{1}{6}x^{3}\right)^{3}\rightarrow x^{3}$$

ومنه

$$\sqrt{1+\sin x}\ \sim_{0}\ 1+\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{6}x^{3}\right)-\frac{1}{8}x^{2}+\frac{1}{16}x^{3}$$

$$\sqrt{1+\sin x}:\ 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^{2}-\frac{1}{48}x^{3}$$

$$\cos(x+\sin x)\ \sim_{0}\ \cos\left(2x-\frac{1}{6}x^{3}\right)\ \sim_{0}\ 1-\frac{1}{2}\left(2x-\frac{1}{6}x^{3}\right)$$

$$\left(2x-\frac{1}{6}x^{3}\right)\rightarrow4x^{2}$$

$$\cos(x+\sin x)\ \sim_{0}\ 1-\frac{1}{2}\left(4x^{2}\right)$$

$$\therefore\cos(x+\sin x):\ 1-\frac{1}{2}x^{2}$$

تمرين 5–20

انشر حتى الرتبة 6 الدالة $f\,(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^{2}}}$ **بجوار الصفر.**

الحل

يمكن استخدام العلاقة التالية مباشرة باعتبار $n=6$ و $\alpha=-\frac{1}{2}$ واستبدال x بـ x^2 :

$$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\circ(x^n).$$

أو حساب مشتقات f عند 0 حتى الرتبة 6 والتعويض في عبارة النشر فنحصل في كلتي الحالتين على:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=1-\frac{x^2}{2}+\frac{3x^4}{8}-\frac{5x^6}{16}+o(x^6)$$

ملاحظة

يمكن في النشر السابق تعويض $o(x^6)$ بـ $o(x^7)$ لأن الدالة زوجية ولذا فالحد الموالي -لو واصلنا النشر- سيكون أس المتغير فيه 8 .

تمرين 5-21

النشر المحدود بجوار الصفر من الرتبة 3 للدوال التالية :

$$\frac{\ln(1-x)}{1-x} \quad \frac{\ln(1-x)}{1-x} \quad ، \quad e^x\cdot\ln(1-x) \quad ، \quad \frac{1}{1+e^x}$$

الحل

- $$\begin{array}{r|l} -x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3 & 1-x \\ \cline{2-2} \underline{\pm x \mp x^2} & -x-\frac{3}{2}x^2-\frac{11}{6} \\ -\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3 & \\ \underline{\pm\frac{3}{2}x^2\mp\frac{3}{2}x^3} & \\ -\frac{11}{6}x^3 & \end{array}$$

$$\frac{\ln(1-x)}{1-x}=-x-\frac{3}{2}x^2-\frac{11}{6}x^3+o(x^3)$$

- $e^x\cdot\ln(1-x) : \left(1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3\right)\left(-x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right) : -x-\frac{3}{2}x^2-\frac{4}{3}x^3+o(x^3)$

$\frac{1}{1+e^x}$

$$1+e^x : 2\left(1+\underbrace{\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{12}x^3}_{X}\right)$$

$$\frac{1}{1+e^x} : \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{12}x^3\right)}$$

$$\left(\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{4}x^{2}+\tfrac{1}{12}x^{3}\right)^{2} \to \tfrac{1}{4}x^{2}+\tfrac{1}{4}x^{3}$$
$$\left(\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{4}x^{2}+\tfrac{1}{12}x^{3}\right)^{3} \to \tfrac{1}{8}x^{3}$$
$$\frac{1}{1+e^{x}} : \tfrac{1}{2}\left[1-\left(\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{4}x^{2}+\tfrac{1}{12}x^{3}\right)+\left(\tfrac{1}{4}x^{2}+\tfrac{1}{4}x^{3}-\tfrac{1}{8}x^{3}\right)\right]$$
$$\frac{1}{1+e^{x}}=\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{4}x+\tfrac{1}{48}x^{3}+o(x^{3})$$

تمرين 5–22

عين النشر المحدود من الرتبة الخامسة عند الصفر للدالة $\tan x$

الحل

النشران المحدودان من الرتبة الخامسة عند الصفر لـ sin و cos هما على الترتيب :

$x-\frac{x^{3}}{6}+\frac{x^{5}}{120}$ و $1-\frac{x^{2}}{2}+\frac{x^{4}}{24}$.

نجري القسمة (وفق القوى المتزايدة لـ x) لنشر sin على نشر cos حتى الرتبة 5 :

$$\begin{array}{l|l}
x-\frac{x^{3}}{6}+\frac{x^{5}}{120} & 1-\frac{x^{2}}{2}+\frac{x^{4}}{24} \\ \cline{2-2}
\underline{x-\frac{x^{3}}{2}+\frac{x^{5}}{24}} & x+\frac{x^{3}}{3}+\frac{2}{15}x^{5} \\
\quad \frac{x^{3}}{3}-\frac{x^{5}}{30}+\dots & \\
\quad \underline{\frac{x^{3}}{3}-\frac{x^{5}}{6}+\dots} & \\
\qquad \frac{2}{15}x^{5}+\dots &
\end{array}$$

والنشر المطلوب هو $\tan x : x+\frac{x^{3}}{3}+\frac{2}{15}x^{5}$

تمرين 5–23

عين النشر المحدود بجوار الصفر من الرتبة 3 للدوال التالية :

$\ln(1+x)$ ، $\sqrt{1+x}$ ، e^{x}

واستنتج النشر المحدود بجوار الصفر من الرتبة 3 للدوال التالية:

$e^{\sqrt{1+\ln(1+x)}}$ ، $\sqrt{1+\ln(1+x)}$ ، $\ln\left(1+\sqrt{1+x}\right)$

الحل

اعتمادا على النشر المحدود بجوار الصفر من الرتبة 3:

يمكن استخدام العلاقة التالية حيث $n=3$ و $\alpha=\frac{1}{2}$:

$$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^{2}+...+\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^{n}+o(x^{n}).$$

أو حساب مشتقات f عند 0 حتى الرتبة 3 والتعويض في عبارة النشر فنحصل على:

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{x}{2}-\frac{x^{2}}{8}+\frac{x^{3}}{16}+o(x^{3}).$$

$$e^{x}\ :\ 1+x+\tfrac{1}{2}x^{2}+\tfrac{1}{6}x^{3}$$

$$\ln(1+x)\ :\ x-\tfrac{1}{2}x^{2}+\tfrac{1}{3}x^{3}$$

نقوم بنشر $\ln\left(1+\sqrt{1+x}\right)$ بجوار الصفر من الرتبة 3:

$$1+\sqrt{1+x}\ :\ 2\left(1+\tfrac{1}{4}x-\tfrac{1}{16}x^{2}+\tfrac{1}{32}x^{3}\right)$$

$$\left(\tfrac{1}{4}x-\tfrac{1}{16}x^{2}+\tfrac{1}{32}x^{3}\right)^{2}\ \to\ \tfrac{1}{16}x^{2}-\tfrac{1}{32}x^{3}$$

$$\left(\tfrac{1}{4}x-\tfrac{1}{16}x^{2}+\tfrac{1}{32}x^{3}\right)^{3}\ \to \tfrac{1}{64}x^{3}$$

$$\ln\left(1+\sqrt{1+x}\right):\ \ \ln 2+\left(\tfrac{1}{4}x-\tfrac{1}{16}x^{2}+\tfrac{1}{32}x^{3}\right)-\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{16}x^{2}-\tfrac{1}{32}x^{3}\right)+\tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{64}x^{3}\right)$$

$$:\ \ \ln 2+\tfrac{1}{4}x-\tfrac{3}{32}x^{2}+\tfrac{5}{96}x^{3}$$

وكذلك في نشر $\sqrt{1+\ln(1+x)}$

$$1+\ln(1+x)\ :\ \ 1+x-\tfrac{1}{2}x^{2}+\tfrac{1}{3}x^{3}$$

$$\left(x-\tfrac{1}{2}x^{2}+\tfrac{1}{3}x^{3}\right)^{2}\to x^{2}-x^{3}$$

$$\left(x-\tfrac{1}{2}x^{2}+\tfrac{1}{3}x^{3}\right)^{3}\to x^{3}$$

$$\sqrt{1+\ln(1+x)}\ :\ \ 1+\tfrac{1}{2}\left(x-\tfrac{1}{2}x^{2}+\tfrac{1}{3}x^{3}\right)-\tfrac{1}{8}\left(x^{2}-x^{3}\right)+\tfrac{1}{16}x^{3}$$

$$:\ 1+\tfrac{1}{2}x-\tfrac{3}{8}x^{2}+\tfrac{17}{48}x^{3}$$

نشر $e^{\sqrt{1+\ln(1+x)}}$

$$e^{\sqrt{1+\ln(1+x)}}:\ \ e^{1+\frac{1}{2}x-\frac{3}{8}x^{2}+\frac{17}{48}x^{3}}$$

$$e^{\sqrt{1+\ln(1+x)}}:\quad e^{1+\frac{1}{2}x-\frac{3}{8}x^2+\frac{17}{48}x^3}\ :$$

$$e\left(1+\tfrac{1}{2}x-\tfrac{3}{8}\left(\tfrac{1}{2}x\right)^2+\tfrac{1}{6}\left(\tfrac{1}{2}x\right)^3\right)\cdot\left(1+\tfrac{1}{2}\left(-\tfrac{3}{8}x^2\right)\right)\cdot\left(1+\tfrac{1}{6}\left(\tfrac{17}{48}x^3\right)\right):$$

$$e\left(1+\tfrac{1}{2}x-\tfrac{1}{4}x^2+\tfrac{3}{16}x^3\right)$$

تمرين 5–24

عين المشتقة $f'(x)$ للدالة $f(x)=\ln(1+x+x^2)$ ثم شكل النشر المحدود بجوار الصفر من الرتبة الثالثة للمشتقة $f'(x)$.

واستنتج النشر المحدود للدالة $f(x)$ حتى الرتبة الرابعة بجوار الصفر

الحل

لدينا $f(x)=\ln(1+x+x^2)$ معرفة وتقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$، إذن $f'(x)=\dfrac{1+2x}{1+x+x^2}$

نجري القسمة وفق قوى المتزايدة، حتى المرتبة 3، لـ $1+2x$ على $1+x+x^2$، فنحصل على:

$$f'(x)=1+x-2x^2+x^3+o(x^3)$$

ونحصل على النشر المحدود من الرتبة الرابعة بجوار الصفر للدالة $f(x)$ بمكاملة نشر $f'(x)$ (لأن $f(0)=0$)

فيكون النشر من الرتبة الرابعة: $f(x)=\ln(1+x+x^2)=x+\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{2x^3}{3}+\dfrac{x^4}{4}o(x^4)$

تمرين 5–25

أحسب النهايات الآتية: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}$ ، $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2 x-x^2\cos x}{x^2(1-\cos x)}$ ، $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^3}$

الحل

- في حساب النهاية $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}$

يكفي أن نكتب حسب نشر الدالة الجيبية

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x+o(x)}{x}=1+\lim_{x\to0}\frac{o(x)}{x}=1$$

- في النهاية $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2 x-x^2\cos x}{x^2(1-\cos x)}$.

نكتب (باستخدام النشر) :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x - x^2\cos x}{x^2(1-\cos x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(x-\frac{x^3}{3!}\right)^2 - x^2(1-\frac{1}{2}x^2)}{x^2(\frac{1}{2}x^2)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^4}{6}}{x^2(\frac{1}{2}x^2)} = \frac{1}{3}$$

- في حساب النهاية $\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x - \sin x}{x^3}$

لدينا $\cos x = 1-\frac{x^2}{2}+x^2\varepsilon_1\left(x^2\right)$ مع $\lim_{x\to 0}\varepsilon_1(x)=\varepsilon(0)=0$

$\sin x = x-\frac{x^3}{6}+x^3\varepsilon_2\left(x^3\right)$ مع $\lim_{x\to 0}\varepsilon_2(x)=\varepsilon(0)=0$

ومنه

$$\frac{x\cos x - \sin x}{x^3} = \frac{x\left(1-\frac{x^2}{2}+x^2\varepsilon_1\left(x^2\right)\right)-\left(x-\frac{x^3}{6}+x^3\varepsilon_2\left(x^3\right)\right)}{x^3}$$

$$= \frac{-\frac{x^3}{3}+x^3\left(\varepsilon_1\left(x^2\right)-\varepsilon_2\left(x^3\right)\right)}{x^3} = -\frac{1}{3}+\varepsilon(x)$$

وبالمرور على النهاية نجد المطلوب.

تمرين 5–26

أحسب النهايتين الآتيتين: $\lim_{\substack{x\to+\infty\\ x\neq 0}}\frac{2\sqrt[3]{1+x}-\sqrt{4+x}}{\sqrt{9+x}-3}$ ، $\lim_{\substack{x\to+\infty\\ x\neq 1}}\frac{x(x-1)}{x-1+\ln x}$

الحل

- نضع $f(x)=\frac{2\sqrt[3]{1-x}-\sqrt{4+x}}{\sqrt{9+x}-3}$، عندما ينتهي x إلى الصفر الدالة تصبح تمثل حالة عدم تعيين $\frac{0}{0}$.

لدينا $\sqrt[3]{1+x} = 1+\frac{x}{3}+o(x)$

$$\sqrt{4+x} = 2\sqrt{1+\frac{x}{2}} = 2\left(1+\frac{x}{4}+o(x)\right) = 2+\frac{x}{2}+o(x)$$

$$\sqrt{9+x}=3\sqrt{1+\frac{x}{3}}=3\left(1+\frac{x}{18}+o(x)\right)=3+\frac{x}{6}+o(x)$$

ومنه
$$\frac{2\sqrt[3]{1+x}-\sqrt{4+x}}{\sqrt{9+x}-3}=\frac{\frac{x}{6}+o(x)}{\frac{x}{6}+o(x)}$$

وأخيرا
$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\ x\neq 0}}\frac{2\sqrt[3]{1+x}-\sqrt{4+x}}{\sqrt{9+x}-3}=1$$

- نضع $g(x)=\dfrac{x(x-1)}{x-1+\ln x}$ ، $x\neq 1$عندما ينتهي x إلى $+1$ الدالة تمثل حالة عدم تعيين $\frac{0}{0}$.

باستخدام التحويل $x=1-u$ ، يكون $g(x)=\dfrac{x(x-1)}{x-1+\ln x}=\dfrac{(1-u)u}{u+\ln(1-u)}$

وعندما ينتهي u إلى 0 ، يكون النشر المحدود من الرتبة 2 بجوار الصفر لعبارة المقام:

$$u+\ln(1-u)=u-u-\frac{u^2}{2}+o(u^2)=\frac{u^2}{2}+o(u^2)$$

$$g(x)=\frac{-u+u^2}{-\frac{u^2}{2}+o(u^2)}=\frac{-1+u}{-\frac{u}{2}+o(u^2)}\sim\frac{2}{u}$$

ومنه
$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\ x\neq 1}}\frac{x(x-1)}{x-1+\ln x}=+\infty$$

تمارين إضافية

تمرين 1 أحسب المشتقة من الرتبة n لكل من الدالتين: $\dfrac{2x}{1-x^2}$ و e^x .

أحسب المشتقة من الرتبة p للدالة $f(x)=x^n$ من أجل $n\in\mathbb{N}$

تمرين 2 عين النشر المحدود بجوار الصفر من الرتبة **3** للدوال التالية:

$$e^x \text{ ، } \cos x \text{ ، } \sin x \text{ ، } \ln(1+x) \text{ ، } \sqrt{1-x}$$

واستنتج النشر المحدود بجوار الصفر من الرتبة **3** للدوال التالية:

$$\frac{e^x-1}{(1+x)^2-1} \text{ ، } e^{\sqrt{1-x}} \text{ ، } \ln(2\cos x+\sin x) \text{ ، } \sqrt{1-x}\cdot\ln(1-3x)$$

تمرين 3 عين النشر المحدود بجوار الصفر من الرتبة 4 للدالتين: $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ و $g(x)=\log\dfrac{1+x}{1-x}$

واستنتج النشر المحدود بجوار الصفر من الرتبة 2 للدالتين:

$2f(x)-3g(x)+(f\circ g)(x)$ و $f(x)\times g(x)$.

تمرين 4 عين النشر المحدود بجوار الصفر من الرتبة **4** للدوال الآتية:

$$f(x)=\frac{1}{x-1}\ ،\ g(x)=\frac{1+x}{x-1}\ ،\ h(x)=\frac{\cos x}{1-x^2}\ ،\ k(x)=e^{\cos x-1}$$

واستنتج النشر المحدود بجوار الصفر من الرتبة 2 للدوال التالية:

$$\frac{h(x)}{k(x)}\ ،\ f(x)\times g(x)\ ،\ 2f(x)-3g(x)+(f\circ g)(x)$$

تمرين 5 • أكتب النشر المحدود للدالتين f و g من الرتبة الرابعة بجوار الصفر حيث:

$$g(x)=\frac{x}{1-x}\ ،\ f(x)=\sin x$$

• ثم استنتج النشر المحدود من الرتبة الرابعة بجوار الصفر للدالة :

$$h(x)=f(g(x))-g(f(x))$$

تمرين 6 باستعمال النشر المنته من الرتبة n عند الصفر للدالة $\dfrac{1}{1-x}$، استنتج النشر المحدود من الرتبة $(n-1)$ بجوار الصفر للدالة $\dfrac{1}{(1-x)^2}$، ثم استنتج النشر المحدود من الرتبة $(n-2)$ بجوار الصفر للدالة $\dfrac{1}{(1-x)^3}$.

تمرين 7 أكتب النشر المحدود بجوار الصفر للمرتبة 5 للدالتين: $\dfrac{1}{1-x}$ و $\dfrac{1}{1+x}$.

ثم استنتج النشر المحدود من الرتبة 5 للدالة: $\dfrac{1}{1+x^2}$.

تمرين 8 عين النشر المحدود من الرتبة السابعة للدوال الآتية :

$$\frac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}\ ,\ \sqrt{1+e^x}\ ,\ \frac{1}{1-\frac{x^2}{6}}\ ,\ (1+x)^x\ ,\ (1+x)^{\frac{1}{x}}$$

$$e^x\ln(1+x)\ ,\ \frac{e^x-1}{(1+x)^2-1}\ ,\ \sqrt{\frac{\ln(1+x)}{x}}\ ,\ \frac{\ln(1+x)}{x}$$

تمرين 9 الدالة العددية $h(x)$ حيث: $h(x)=2\sqrt{1+x}-x-2$

- أدرس تغيرات $h(x)$ على مجموعة تعريفها D_h، واستنتج بأن: $\forall x \in D_h : h(x) \le 0$
- جد النشر المحدود من الرتبة الثانية بجوار الصفر للدالة $h(x)$.

تمرين 10 عين النشر المحدود من الرتبة الخامسة لـ sin عند $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$.

بوضع $f(x) = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$، أنشر f عند الصفر.

تمرين 11 عين النشر المحدود من الرتبة الرابعة عند الصفر للدالة $\cos(\sin x)$. واستنتج حساب

$$\lim_{x \to 0} \frac{2\cos(\sin x) - 2 + x^2}{x^4}$$

تمرين 12 أحسب $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x \cdot \sin x}$, $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{e^x - 1 - \sin x}$, $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\arcsin x - x}{x^3}$

تمرين 13 باستخدام النشر بجوار $+\infty$، عين الخط المقارب المائل لمنحنى $f(x) = e^{1/x}\sqrt{x(x+2)}$

تمرين 14 نعتبر الدالة $f(x) = \arctan(\sin x)$.

أكتب النشر المحدود لـ f من الرتبة الرابعة في جوار الصفر.

عين معادلة المماس عند $x_0 = 0$، وحدد وضعيته بالنسبة لمنحنى f.

تمرين 15 احسب $f^{(n)}(x)$ للدالة f في الحالتين الآتيين:

$$x \mapsto f(x) = \frac{2x}{1-x^2} \quad , \quad x \mapsto f(x) = \frac{x}{(x+1)^2}$$

تمرين 16 جد النشر المحدود بجوار الصفر من الرتبة **3** للدالة

$$g(x) = \frac{4}{3}\sqrt{1+x} - \frac{1}{2}x^2 - 2x - \frac{4}{3}x\sqrt{1+x}$$

واستنتج الحل النشر المحدود بجوار الصفر من الرتبة **2** للدالة المشتقة $g'(x)$

تمرين 17 عين النشر المحدود بجوار الصفر من الرتبة 3 للدالة: $f(x) = \sqrt{1 + \ln(1+x)}$.

واستنتج النهاية $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{1}{\sin^3 x}\left[f(x) - e^{\frac{x}{2}} + 1 - \cos x\right]$.

الفصل السادس

المعادلات التفاضلية

- معادلات تفاضلية من الرتب الأولى والثانية
- دراسة المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى والثانية
- حل بعض المعادلات التفاضلية
- معادلات تفاضلية خطية من الرتبة الأولى
- معادلات تفاضلية خطية من الرتبة الثانية
- تمارين محلولة

ملخص الدرس

1. معادلات من الرتب الأولى والثانية

1.1 مفهوم المعادلة التفاضلية

مثال تمهيدي

الدالة $f_0 : x \mapsto e^{\alpha x}$؛ $\left(\alpha \in \mathbb{R}^*\right)$ المعرفة على $\mathbb{R}$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

ولدينا $f_0'(x) = \alpha \cdot e^{\alpha x} = \alpha \cdot f_0(x)$. أي الدالة f_0 تحقق المساواة $f_0' - \alpha \cdot f_0 = 0$

تسمى المعادلة $f' - \alpha f = 0 \quad (1)$

حيث المجهول f دالة قابلة للاشتقاق على R : **معادلة تفاضلية**، ويسمى f_0 **حل** لهذه المعادلة.

- تكتب المعادلة (1) بالشكل: $y' - \alpha y = 0 \quad (2)$

حيث المجهول y، دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

وبالعكس، يمكن طرح مسألة تعيين كل الدوال y للمتغير x والقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$، والتي تحقق المعادلة (2).

2.1 تعاريف:

- تسمى المعادلة **معادلة تفاضلية** من الرتبة الأولى، كل معادلة من الشكل: $f' - \alpha f = 0 \quad (E)$

تكتب المعادلة (1) بالشكل: $y' - \alpha y = 0 \quad (2)$

- تسمى معادلة تفاضلية من الرتبة n كل معادلة من الشكل: $g\left(x, y, y', ..., y^{(n)}\right) = 0 \quad (E)$

حيث g دالة للمتغيرات $x, y, y', ..., y^{(n)}$ والمجهول y : دالة للمتغير x قابلة للاشتقاق n مرة على الأقل على مجال I.

تُنسب المعادلة التفاضلية (E) إلى المشتق الأعلى مرتبة الذي تحويه.

أمثلة

$y' + 3y - 5x = 0$: معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى،

$y'' = \sin(3x - 1)$: معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية.

- يسمى حل للمعادلة التفاضلية (E) كل دالة عددية y (للمتغير x) تقبل الاشتقاق n مرة على مجال I من $\mathbb{R}$، وتحقق (E).

مثلا: المعادلة التفاضلية $y' - 2y'' = x^2 - 3x + 2$ ، $D = \mathbb{R}$

تقبل الدالة y المعرفة على $\mathbb{R}$ كحل لها، حيث: $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - 7$.

2. دراسة المعادلات التفاضلية من الرتب الأولى والثانية

نعتبر المعادلة التفاضلية $g(x, y, y')=0$ أو $g(x, y, y', y'')=0$ $(*)$

- نعني بحل المعادلة التفاضلية $(*)$ تعيين كل الدوال y حيث:
  - الدالة y معرفة على D من $\mathbb{R}$، وتأخذ قيمتها في $\mathbb{R}$.
  - الدالة y تقبل الاشتقاق مرة أو مرتين D (حسب رتبة $(*)$).
  - الدالة y تحقق المعادلة $(*)$.
- إذا بدلنا y, y', y'' في $(*)$ بعباراتهم بالنسبة إلى x، فإن الدالة y ذات المتغير x تصبح مساوية للصفر على مجال D من $\mathbb{R}$ تكون فيه y ومشتقتيها y, y' معرفتان.

مثال1 في المعادلة $y'=3$ ، $D=\mathbb{R}$ ، تكون مجموعة حلولها y، هي الدوال الأصلية للدالة الثابتة على $\mathbb{R}$: $x \mapsto 3$ **أي** $y=3x+c$ حيث c **من** $\mathbb{R}$.

قيمة خاصة للثابت الاختياري c :

- من أجل $c=1$، $y=3x+1$: هي معادلة (منحنى) مستقيم.

$y=3x+c$: معادلة كل المنحنيات البيانية الممثلة للدالة y. ($x \in \mathbb{R}$)

إذا اشتمل أحد هذه المنحنيات على النقطة $M_0(x_0, y_0)$، فإن . $y_0=3x_0+c$ ومنه $c=y_0-3x_0$

والمعادلة المرفقة هي: $y=3x+(y_0-3x_0)$

مثال2 في المعادلة $y''=\dfrac{1}{x^2}$ ، $D=\mathbb{R}_+^*$

الحلول y، هي الدوال الأصلية للدالة $x \mapsto -\dfrac{1}{x}+c$.

أي $y=-\ln x+c\cdot x+d$ ، حيث c و d ثابتين من $\mathbb{R}$.

1.2 الحل الخاص والحل العام.

نقبل أن حل المعادلة التفاضلية $(*)$ يحتوي ثابتا أو ثابتين حقيقيين (مستقلين) حسب مرتبة المعادلة.

يسمى مثل هذا الحل: **الحل العام**، كما يسمى كل حل ينتج من الحل العام بإعطاء قيم لهذين الثابتين **بالحل الخاص**. إن عدد الحلول الخاصة غير متناه.

2.2 تعين ثابت التكامل

إن ثابت التكامل c يكون ثابتا عندما يُطلب الحل من أجل $x=x_0$ معطى. يكون هذا الحل هو

$$y(x)=y(x_0)=y_0$$

نصل إلى نفس النتائج باستخدام نتائج التكاملات المحدودة

$$f(y)\cdot y'=g(x)\ \wedge\ y(x_0)=y_0 \quad\Leftrightarrow\quad \int_{y_0}^{y} f(\eta)d\eta=\int_{x_0}^{x} g(\xi)d\xi$$

ونحصل مباشرة على الدالة y بحيث $y(x_0)=y_0$ دون المرور على تحديد ثابت التكامل.

3. حل بعض المعادلات التفاضلية

1.3 المعادلات من الشكل: $y'=f(x)\quad(1)$

حيث f دالة مستمرة على مجال I من $\mathbb{R}$.

إذا كانت h دالة أصلية لـ f على I، فإن الحل العام للمعادلة (1) في المجال I فإن الحل العام للمعادلة (1) في المجال I، هي الدوال y، حيث:

$$(\mathbb{R}\ni c)\quad y=\int f(x)\,dx=h(x)+c$$

2.3 المعادلات من الشكل: $y''=f(x)\quad(2)$

حيث f دالة مستمرة على مجال I من $\mathbb{R}$.

إذا كانت h دالة أصلية لـ f على I، وكانت h هي الأخرى مستمرة على I وتقبل k كدالة أصلية لها على I فإن:

$$(\mathbb{R}\ni c)\,y'=h(x)+c \qquad \Leftrightarrow y''=f(x)$$
$$(c,d\in\mathbb{R})\,y'=k(x)+cx+d \Leftrightarrow$$

إذن الحل العام للمعادلة (2) في المجال I، هي الدوال y؛

حيث: $$(c,d\in\mathbb{R})\quad y=\int\big(h(x)+c\big)\,dx=k(x)+c\,x+d$$

3.3 معادلات من الشكل $y'=\alpha y\quad(3)$ حيث α من $\mathbb{R}^*$.

نعين الدوال y القابلة للاشتقاق على $D\subset\mathbb{R}$ التي تحقق(3). نلاحظ بأن $y=0$ حل ظاهري لـ(3)

– نبحث عن الحلول التي لا تنعدم على D: ليكن y حل للمعادلة (3)، بحيث y لا ينعدم على D.

لدينا $(3)\ \Leftrightarrow\ \alpha=\dfrac{y'}{y}\quad(3')$

بمكاملة طرفي $(3')$ نجد: $\ln|y|=c\,x+d$، $(c,d)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$

ومنه: $|y|=e^{c\,x+d}=e^{d}\cdot e^{c\,x}$، $(c,d)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$

وبما أن y مستمرة على D ولا تنعدم (على D) فإن إشارتها تبقى ثابتة على هذا المجال.

ومنه: إما $y=e^{d}\cdot e^{c\,x}$، وإما $y=-e^{d}\cdot e^{c\,x}$.

في كلتا الحالتين، نكتب $y=\lambda\cdot e^{c\,x}$، $(\lambda\in\mathbb{R}^*)$

وبالتالي تكون حلول للمعادلة (3)، هي الدوال $x\mapsto\lambda\cdot e^{c\,x}$ المعرفة على $\mathbb{R}$ حيث $\lambda\in\mathbb{R}^*$.

أ) تعيين الحل العام.

ليكن y حل كيفي للمعادلة (3).

نعلم بان الدالة $x \mapsto e^{cx}$ المعرفة على D، هي حل للمعادلة (3).

بوضع $z = \frac{y}{e^{cx}}$ $\left(e^{cx} \neq 0\right)$ يكون لدينا $y = z \cdot e^{cx}$.

y تقبل الاشتقاق على D: $y' = z'e^{cx} + c\,x\,e^{cx}$

ومنه $y' - c\,y = z' \cdot e^{cx} + c\,x \cdot e^{cx} - c\,x \cdot e^{cx} = z' \cdot e^{cx}$

بما أن y هي حل للمعادلة (3) فإن $z' = 0$، أي أن z هي الدالة الثابتة على D.

إذن الدوال $y = \lambda \cdot e^{cx}$، $\left(\lambda \in \mathbb{R}^*\right)$ المعرفة في $\mathbb{R}$، وكذلك، من أجل $\lambda = 0$ (الحل الخاص: $y = 0$) هي حلول للمعادلة التفاضلية (3).

ملاحظة

إذا كان $\left(x_0, y_0\right)$ من $\left(D, \mathbb{R}\right)$، يكون $y_0 = \lambda \cdot e^{c x_0}$، ومنه $\lambda = y_0 \cdot e^{-c x_0}$ والحل الخاص الوحيد $y = y_0 \cdot e^{c\left(x - x_0\right)}$.

مثلا: المعادلة التفاضلية $y' - 3y = 0$ من الشكل: $y' = y$، وحلها العام هو $y = \lambda \cdot e^{x}$ $\left(\lambda \in \mathbb{R}\right)$

الحل الخاص الذي يحقق $y\left(-1\right) = 1$، هو $y_0 = \lambda \cdot e^{c x_0}$.

4.3 معادلات تفاضلية من الرتبة الأولى من الشكل $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$ *

هذه المعادلة تُحل باستخدام التحويل $z = \frac{y}{x}$ ومنه $y = x \cdot z$ ويكون $\frac{dy}{dx} = z + x\,z'$

والمعادلة * تأخذ الشكل $x\,\frac{dz}{dx} = -z + f\left(z\right)$ أو $\frac{dx}{x} = \frac{dz}{f\left(z\right) - z}$

5.3 معادلات تفاضلية من الرتبة الأولى ذات متغيرات منفصلة

نقول عن معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى أنها بمتغيرات منفصلة إذا أمكن كتابتها بأحد الشكلين :

$$g(x)dy = h(y)dx \quad \text{أو} \quad g(x)dx = h(y)dy$$

في الشكل الأول إذا كانت $G(x)$ و $H(x)$ دالتان أصليتان لـ $g(x)$ و $h(x)$ يكون لدينا

$$G(x) = H(x) + c$$

4. معادلات تفاضلية خطية من الرتبة الأولى

ليكن a و b ثابتين حقيقيين مع $a \neq 0$.، ولتكن g دالة عددية معرفة ومستمرة على مجال مفتوح I من $\mathbb{R}$.

- لنعتبر المعادلة التفاضلية $(1) \quad af' + bf = g$

نكتب (1) بالشكل $af'(x) + bf(x) = g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

عندما g هي الدالة المعدومة، هذه المعادلة تأخذ الشكل $af' + bf = 0$، وتسمى معادلة متجانسة أو معادلة بدون طرف ثاني.

المعادلة المتجانسة تكافئ المعادلة $\frac{f'}{f} = -\frac{b}{a}$ التي حلها هو : $f(x) = c \cdot e^{-\frac{b}{a}x}$ حيث c من $\mathbb{R}$.

تكون مجموعة حلول المعادلة (1)، هي مجموعة الدوال التي هي على شكل مجموع لحل خاص للمعادلة (1) وحل عام للمعادلة المتجانسة المرفقة.

- إذا كانت $g(x)$ مستمرة على مجال I من $\mathbb{R}$، وكان المعاملان a و b دالتين لـ x مستمرتين على I بحيث $0 \neq a(x)$.

$$(1) \quad a(x)y'(x) + b(x)y(x) = g(x)$$

فإن المعادلة المتجانسة: $(2) \quad a(x)y'(x) + b(x)y(x) = 0$

ستأخذ الشكل $\frac{y'}{y} = -\frac{b(x)}{a(x)}$ وهي تكافئ عندما تكون $H(x)$ دالة أصلية للطرف الأيمن، المعادلة

$$\ln y(x) = H(x)$$

ومنه $y(x) = y_1(x) = c \cdot e^{H(x)}$ حيث c من $\mathbb{R}$.

إن مجموعة حلول المعادلة المتجانسة هو فضاء جزئي من $C^1(I)$. نحصل على مجموعة حلول المعادلة (1)، بإضافة حل خاص للمعادلة (1) إلى كل حلول المعادلة المتجانسة المرفقة.

1.4 البحث عن حل خاص للمعادلة (1) بطريقة تغيير الثابت

هذا الحل الخاص يوضع بالشكل $y(x) = c(x) \cdot e^{H(x)}$ حيث تتحدد الدالة $c(x)$ "بتغيير الثابت".

بالاشتقاق $y'(x) = c'(x) \cdot e^{H(x)} + H'(x) \cdot c(x) \cdot e^{H(x)}$

وبالتعويض في (1) نجد

$$a(x)\left(c'(x) \cdot e^{H(x)} + H'(x) \cdot c(x) \cdot e^{H(x)}\right) + b(x)c(x) \cdot e^{H(x)} = g(x)$$

$$a(x)c'(x) \cdot e^{H(x)} + \cancel{a(x)H'(x) \cdot c(x) \cdot e^{H(x)}} + \cancel{b(x)c(x) \cdot e^{H(x)}} = g(x)$$

$$a(x)c'(x) \cdot e^{H(x)} = g(x)$$

$$c'(x) = \frac{g(x)}{a(x)} e^{-H(x)}$$

بمكاملة هذه الأخيرة (مركبة من دوال مستمرة على I) والتعويض في عبارة هذا الحل الخاص ، نجد :

$$\boxed{y(x)=y_0(x)=e^{H(x)}\int\frac{g(x)}{a(x)}\,e^{-H(x)}dx}$$

فيكون $y(x)$ الحل العام للمعادلة (1) مؤلفا من مجموع الحلين : $y_1(x)$ حل عام للمعادلة المتجانسة و $y_0(x)$ حل خاص للمعادلة (1). أي $y(x)=y_0(x)+y_1(x)$

$$\boxed{y(x)=e^{H(x)}\int\frac{g(x)}{a(x)}\,e^{-H(x)}dx+c\cdot e^{H(x)}}$$

حيث $H(x)=\int-\frac{b(x)}{a(x)}dx$ و حيث c ثابت اختياري من $\mathbb{R}$.

ملاحظة

إذا كان y_1 و y_2 هما حلين خاصين للمعادلة (1)، فإن y_2-y_1 سيكون حلا للمعادلة المتجانسة المرفقة، والحل العام للمعادلة (1) هو $y(x)$ حيث $y=y_1+c(y_2-y_1)$ حيث c اختياري من $\mathbb{R}$.

5. معادلات تفاضلية خطية من الرتبة الثانية

1.5 معادلة تفاضلية من الشكل: $a\,y''+b\,y'+c\,y=g(x)\quad(1)$

حيث a و b و c ثوابت حقيقية مع $a\neq 0$. و $g(x)$ دالة مستمرة على مجال مفتوح I من $\mathbb{R}$.

معادلة المتجانسة المرفقة بـ(1): $a\,y''+b\,y'+c\,y=0\quad(2)$

حسب النتائج العامة نحصل على مجموعة حلول المعادلة (1)، بإضافة حل خاص للمعادلة (1) إلى كل حلول المعادلة المتجانسة المرفقة.

- من أجل $x_0\in I$ و α و β، من $\mathbb{R}$، المعادلة (1) تقبل حلا وحيدا y يحقق $y(x_0)=\alpha,\ y'(x_0)=\beta$
- إن مجموعة حلول المعادلة المتجانسة على I لها بنية فضاء شعاعي على $\mathbb{R}$، بعده 2، وبالتالي إذا كان y_1 و y_2 حلين مستقلين للمعادلة المتجانسة، فإنهما يشكلان أساسا لهذا الفضاء.
- حتى يكون y_1 و y_2 حلين مستقلين للمعادلة المتجانسة يجب يكون المحدد المجموعة : $\{(y_1(x),y_1'(x)),(y_2(x),y_2'(x))\}$ غير معدوم.

ولدينا

$$w(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x)\\ y_1'(x) & y_2'(x)\end{vmatrix}=y_1(x)\cdot y_2'(x)-y_1'(x)\cdot y_2(x)$$

إذا كان $w(x_0)\neq 0$ من أجل $x_0\in I$، فإن $w(x)\neq 0$ من أجل كل $x\in I$

2.5 حل المعادلة المتجانسة المرفقة

نبحث عن الحلول من الشكل $y = e^{rx}$ حيث r من $\mathbb{R}$. لدينا $y' = ry$ و $y'' = r^2 y$، والمعادلة (1) تأخذ الشكل $y\left(ar^2 + br + c\right) = 0$

تسمى المعادلة $ar^2 + br + c = 0$ (3) بالمعادلة المميزة للمعادلة (1).

ووفق إشارة مميز المعادلة المميزة $\Delta = b^2 - 4ac$ يكون لدينا :

- إذا كان $\Delta > 0$ فإن المعادلة المميزة تقبل جذرين مختلفين $r_1 \neq r_2$، ويكون حل المعادلة المتجانسة هو : $y = ce^{r_1 x} + de^{r_2 x}$ حيث c و d من $\mathbb{R}$.
- إذا كان $\Delta = 0$ فإن المعادلة المميزة تقبل جذرا مضاعفا $r \in \mathbb{R}$، ويكون حل المعادلة المتجانسة هو : $y = ce^{rx} + dxe^{rx}$ حيث c و d من $\mathbb{R}$.
- إذا كان $\Delta < 0$ فإن المعادلة المميزة تقبل جذرين مركبين (مترافقين): $r_1 = \alpha + i\beta$ و $r_2 = \alpha - i\beta$ (α و $\beta \in \mathbb{R}$ مع $\beta \neq 0$) ويكون حل المعادلة المتجانسة هو : $y = ce^{\alpha x}\cos\beta x + dxe^{\alpha x}\sin\beta x$ حيث c و d من $\mathbb{R}$.

3.5 حل خاص للمعادلة (1)

نميز أيضا حالتين وطريقة عامة :

$g(x) = e^{\alpha x}P(x)$ حيث α من $\mathbb{C}$ و $P(x)$ من $\mathbb{C}[x]$ كثير حدود

نبحث عن الحلول من الشكل $y(x) = e^{\alpha x}Q(x)$ حيث $Q(x)$ كثير حدود، يمكن تحديد درجته:

- إذا لم يكن α جذرا للمعادلة المميزة، فإن $\deg Q = \deg P$
- إذا كان α أحد الجذرين للمعادلة المميزة، فإن $\deg Q = \deg P + 1$
- إذا كان α جذرا مضاعفا للمعادلة المميزة، فإن $\deg Q = \deg P + 2$

4.5 ملاحظة

هذه الطريقة تُطبق أيضا عندما يكون $\alpha = 0$ أي في الحالة $g(x) = P(x)$

يمكن أيضا البحث عن حل من الشكل $y(x) = z(x)e^{\alpha x}$ حيث z دالة معلومة.

وبالتعويض في المعادلة (1)، فنحصل على معادلة تفاضلية من أجل z.

إذا كان $g(x) = A\cos\mu x + B\sin\mu x$ حيث A و B و μ من $\mathbb{R}$. نميز حالتين:

- إذا لم يكن α جذرا للمعادلة المميزة، في هذه الحالة الدالتان $\cos(\mu x)$ و $\sin(\mu x)$ ليستا حل للمعادلة المتجانسة ، حل خاص للمعادلة (1)، يأخذ الشكل

$y = c\cos\mu x + d\sin\mu x$ حيث c و d من $\mathbb{R}$ (يتحددان بالمطابقة).

- إذا كان α جذرا للمعادلة المميزة، في هذه الحالة الدالتان $\cos(\mu x)$ و $\sin(\mu x)$ هما حلين للمعادلة المتجانسة ، حل خاص للمعادلة (1)، سيأخذ الشكل

$y = x\left(c\cos\mu x + d\sin\mu x\right)$ حيث c و d من $\mathbb{R}$ (يتحددان بالمطابقة).

ملاحظة هامة

إذا كان $g(x)$ بالشكل $g(x) = g_1(x) + g_2(x)$ فإن أي حل خاص مُعطى بالشكل $y = y_1 + y_2$ حيث y_j هو حل للمعادلة $a y_j'' + b y_j' + c y_j = g_j(x)$ $(j = 1,2)$

مثال حل المعادلة $y'' + y = x + e^x$ على $\mathbb{R} = I$

- المعادلة المتجانسة : المعادلة المميزة هي $r^2 + r = 0$ والحل هو : $y = c\cos x + d\sin x$
- حل خاص لـ $y'' + y = x$: $y = x$
- حل خاص لـ $y'' + y = e^x$ ، نجده $y = \frac{1}{2}e^x$

خلاصة: الحل العام هو : $y = x + \frac{1}{2}e^x + c\cos x + d\sin x$

5.5 طريقة تغير الثابتين

ليكن y_1 و y_2 حلين مستقلين للمعادلة المتجانسة. نبحث عن حل خاص لـ(1) بالشكل $y = c\,y_1 + d\,y_2$ حيث c و d دالتان تحققان: $c'y_1 + d'y_2 = 0$. وكذلك $y' = c\,y_1' + d\,y_2'$، فتصبح المعادلة (1) كما يلي $a\left(c'y_1' + d'y_2'\right) = g(x)$.

(لأن $a y_j'' + b y_j' + c y_j = 0$ من أجل $j = 1,2$)

إذن c' و d' هما حلين للجملة الآتية :

$$\begin{cases} c'y_1 + d'y_2 = 0 \\ c'y_1' + d'y_2' = \frac{1}{a}g(x) \end{cases}$$

- تحل هذه الجملة بالتجريب لتُعطي c' و d' ثم بالمكاملة للحصول على c و d.

تمارين محلولة

تمرين 6–1

حل المعادلة التفاضلية $y'=e^{x+y}$

الحل

لدينا $\frac{dy}{dx}=e^{x}\cdot e^{y} \Leftrightarrow e^{-y}dy=e^{x}dx$

وبالمكاملة $e^{-y}+c=e^{x}$ أي $c=e^{x}-e^{-y}$ حيث c من $\mathbb{R}$

تمرين 6–2

حل المعادلة التفاضلية $x\cos\left(\frac{y}{x}\right)\frac{dy}{dx}=y\cos\left(\frac{y}{x}\right)-x$

الحل

نضع $z=\frac{y}{x}$ ومنه $y=x\cdot z$ ويكون $\frac{dy}{dx}=z+xz'$،

فتأخذ المعادلة الشكل $x\cos z\cdot(z+xz')=xz\cos z-x$ أو

$$\cos z\cdot(z+xz')=z\cos z-1$$

$$xz'\cos z=-1 \Leftrightarrow x\frac{dz}{dx}\cos z=-1 \Leftrightarrow \cos z\,dz=-\frac{dx}{x}$$

بالمكاملة $\int\cos z\,dz=-\int\frac{dx}{x}$ نجد : $\sin z=-\ln x+\ln c$ حيث c من $\mathbb{R}$

وأخيرا $\sin z=-\ln x+\ln c=\ln\frac{c}{x}$ وأخيرا $e^{\sin(y/x)}=\frac{c}{x}$

تمرين 6–3

عين الحل العام للمعادلة التفاضلية $y'=\frac{1}{x^{2}}e^{\frac{1}{x}}$ $\quad D=\left]0,+\infty\right[$

واستنتج حل خاص الذي يحقق $y(1)=e$.

الحل

الدالة $f\mapsto\frac{1}{x^{2}}e^{\frac{1}{x}}$ مستمرة على D، ومنه الحل العام هو الدوال y :

$y=\int -\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\,dx=e^{\frac{1}{x}}+c$ حيث c من $\mathbb{R}$

الحل الخاص : $y(1)=e$: لدينا $c=e \Leftrightarrow e^1+c=e \Leftrightarrow y(1)=e$

ومنه الحل الخاص على $]0,+\infty[$ هو $y_0=e^{\frac{1}{x}}$.

تمرين 6-4

عين الحل العام للمعادلة التفاضلية $y''=\frac{1}{x}$ $D=\mathbb{R}^*$

واستنتج حل خاص الذي يحقق $y(1)=0$ و $y(-1)=1$.

الحل

الدالة $f \mapsto \frac{1}{x}$ مستمرة $\mathbb{R}^*$، بالمكاملة نحصل على الدالة المشتقة الأولى كالآتي :

$y'=\int \frac{1}{x}\,dx=\ln|x|+c$ حيث c من $\mathbb{R}$

وبمكاملة ثانية نجد الحل العام : $y=\int(\ln|x|+c)\,dx=x\ln|x|-(1-c)x+d$ $(c,d\in\mathbb{R})$

الحل الخاص : $y(1)=0$ و $y(-1)=1$

لدينا $\begin{cases} y(1)=0 \\ y(-1)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1+c+d=0 \\ -1-c+d=1 \end{cases} \Leftrightarrow c=d=\frac{1}{2}$

ومنه الحل الخاص على $D=\mathbb{R}^*$ هو $y_0=x\ln|x|-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

تمرين 6-5

أ) **لتكن** f **دالة عددية معرفة كما يلي:** $f(x)=-\frac{3}{2}+\lambda\cdot e^{2x}$، λ **عدد حقيقي معطى**

- **بين أن** f **تطبيق من** $\mathbb{R}$ **في** $\mathbb{R}$.
- **بين أن** f **يقبل الاشتقاق على** $\mathbb{R}$.
- **تأكد من أن** f **تحقق المعادلة:** $f'(x)-2f(x)=3$ **ماذا تستنتج ؟**

ب) **نعتبر المعادلة التفاضلية:** $y'-2y=3$ (1)

- **تحقق من أن المعادلة** (1) **تقبل الدالة** $y=-\frac{3}{2}$ **كحل لها على** $\mathbb{R}$.
- **لتكن** y **إحدى حلول المعادلة** (1)**، برهن أن الدالة** $y+\frac{3}{2}$ **تحقق معادلة من الشكل:**

$z'-2z=0$ (2)

- **حل المعادلة** (2)**، واستنتج حلول المعادلة** (1).

– عين من بين حلول المعادلة (1) الدالة y التي تحقق: $y(0)=0$.

الحل

أ) – لدالة f معرفة على $\mathbb{R}$. فهي تطبيق من $\mathbb{R}$ في $\mathbb{R}$.

– f مجموع دالتين قابلتين للاشتقاق على $\mathbb{R}$. ولدينا $f'(x)=0+2\lambda\cdot e^{2x}$ ، $\lambda\in\mathbb{R}$

– f تحقق المعادلة المعطاة: $f'(x)-2f(x)=2\lambda e^{2x}-2\left(-\frac{3}{2}+\lambda e^{2x}\right)=3$ أي

$$f'(x)-2f(x)=3$$

والدالة f هي حل للمعادلة التفاضلية ذات الرتبة الأولى $y'-2y=3$ **.**

ب) – لدينا $y=-\dfrac{3}{2}$ حل خاص للمعادلة (1)، لأن $y'=0$ و $y'-2y=0-2\left(-\dfrac{3}{2}\right)=3$

– نضع $z=y+\dfrac{3}{2}$ حيث y حل لـ (1)، وبالتعويض عن y و y' بدلالة المجهول z في (1):

$z'-2\left(z-\dfrac{3}{2}\right)=3$ أي $z'-2z=0$ وبالتالي $y+\dfrac{3}{2}$ تحقق المعادلة (2).

– معادلة التفاضلية (2) من الشكل: $z'=2z$ ، فحلها العام هو كل الدوال $z=\lambda e^{2x}$ ، $\lambda\in\mathbb{R}$ ، المعرفة على D من $\mathbb{R}$.

ينتج عن كل حل لـ (1) حلا للمعادلة (2) من الشكل: $z=y+\dfrac{3}{2}$

ومنه $y=z-\dfrac{3}{2}$ وبالتالي $y=-\dfrac{3}{2}+\lambda e^{2x}$ ، $\lambda\in\mathbb{R}$ ، المعرفة على D من $\mathbb{R}$ **.**

– حل الخاص الذي يحقق $y(0)=0$ ، يحقق $0=-\dfrac{3}{2}+\lambda e^{3\times 0}$ وذلك من أجل $\lambda=-\dfrac{3}{2}$

والحل الخاص المطلوب هو $y_0=-\dfrac{3}{2}\left(1-e^{2x}\right)$.

تمرين 6-6

• **حل المعادلة التفاضلية:** $y'(x)+y(x)=x\cdot e^{-x}$ …….. $(\mathbf{1})$

واستنتج الحل الخاص لها الذي يحقق الشرط الابتدائي: $y_0(0)=1$

• **أحسب التكامل** $z(x)=\int\frac{1}{2}(x^2+1)\cdot e^{-x}dx$. **ثم شكل المعادلة التفاضلية التي تقبل الدالة** $z(x)=-\frac{1}{2}\left(2x+x^2-2c\right)\cdot e^{-x}$ **حلا لها.** (c **ثابت اختياري حقيقي**)

الحل

– حل المعادلة التفاضلية: $y'(x)+y(x)=x\cdot e^{-x}$ ….. (1)

❑ نوجد أولا الحل العام y_1 للمعادلة التفاضلية المتجانسة: $y'(x)+y(x)=0$ بالشكل: $y_1=c\cdot e^{-x}$

- ثم نوجد حلا خاصا y_0 للمعادلة التفاضلية (1) يكون بالشكل: $y_0 = c(x)\cdot e^{-x}$.

باشتقاق العلاقة الأخيرة نجد: $y_0' = c'(x)\cdot e^{-x} - c(x)\cdot e^{-x}$ أي: $y_0' = c'(x)\cdot e^{-x} - y_0$ ، وبالتعويض في المعادلة (1) نحصل على: $c'(x)\cdot e^{-x} - y_0 + y_0 = x\cdot e^{-x}$

التي تكافئ: $$c'(x) = x \iff \frac{dc}{dx} = x \iff dc = x\cdot dx$$

وبالمكاملة، نحصل على إحدى الدوال الأصلية بالشكل: $c(x) = \int dc = \int x\cdot dx = \frac{1}{2}x^2$

فيأخذ الحل الخاص للمعادلة المتجانسة الشكل: $y_0 = c(x)\cdot e^{-x} = \frac{1}{2}x^2\cdot e^{-x}$

- الحل العام y للمعادلة (1) : $y = y_1 + y_0$ أي : $y = c\cdot e^{-x} + \frac{1}{2}x^2\cdot e^{-x}$

والحل الخاص y_0 للمعادلة (1) الذي يحقق لشرط الابتدائي: $y_0(0)=1$ أي : $c\cdot e^{-0} + \frac{1}{2}0^2\cdot e^{-0} = c = 1$

هو : $y(0) = f(x) = \frac{1}{2}(x^2+1)\cdot e^{-x}$

– إحدى الدوال الأصلية للدالة: $f(x)$ نجدها بالمكاملة بالتجزئة كالآتي:

$$z(x) = \int \frac{1}{2}(x^2+1)\cdot e^{-x}\,dx = -\frac{1}{2}\left(x^2+2x+3\right)\cdot e^{-x}$$

- باشتقاق الدالة: $z(x) = -\frac{1}{2}\left(x^2+2x-2c\right)\cdot e^{-x}$ نجد : $z'(x) = \frac{1}{2}\left(x^2+2c-2\right)\cdot e^{-x}$

وبحذف الثابت الاختياري c نجد المعادلة التفاضلية المطلوبة بالشكل: $z + z' = -(x+1)\cdot e^{-x}$

تمرين 6-7

- **حل المعادلة التفاضلية:** $(1)\ \ldots\ y'(x) - 2\cdot y(x) = 2x$

واستنتج الحل الخاص y_2 الذي يحقق الشرط الابتدائي: $y(0) = \frac{1}{2}$.

- **أحسب التكامل** $z(x) = \int (2\cdot c\cdot e^{2x} - 1)\,dx$. **ثم شكل المعادلة التفاضلية التي تقبل الدالة** $z(x) = c\cdot e^{2x} - x - \frac{1}{2}$ **حلا لها.** **(c ثابت اختياري حقيقي)**

الحل

- • نوجد أولا الحل العام y_1 للمعادلة التفاضلية المتجانسة: $y'(x) + 2y(x) = 0$ ، والذي هو:

$y_1(x) = c\cdot e^{2x}$

• ثم نوجد حلا خاصا y_0 للمعادلة (1) يكون من الشكل: $y_0 = c(x)\cdot e^{2x}$. باشتقاق العلاقة الأخيرة نجد:

$y_0' = c'(x)\cdot e^{2x} + 2.y_0$ ، وبالتعويض في (1) نحصل على: $c'(x)\cdot e^{2x} + 2.y_0 - 2.y_0 = 2.x$

الذي يكافئ: $$c'(x) = 2.x.e^{-2x} \iff \frac{dc}{dx} = 2.x.e^{-2x} \iff dc = 2.x.e^{-2x}dx$$

ومنه تكون إحدى الدوال الأصلية لـ $c(x)$ بالشكل: $c(x)=\int 2\cdot x\, e^{-2x}dx=\left(-x-\frac{1}{2}\right)\cdot e^{-2x}$

فيكون الحل الخاص للمعادلة المتجانسة: $y_0(x)=c(x)\cdot e^{2x}=\left(-x-\frac{1}{2}\right)e^{-2x}\times e^{2x}=-x-\frac{1}{2}$

الحل العام y للمعادلة (1) : $y=y_1+y_0$ وهو : $y(x)=c\cdot e^{2x}-x-\frac{1}{2}$

الحل الخاص y_2 للمعادلة (1) الذي يحقق لشرط الابتدائي: $y(0)=\frac{1}{2}$ ، أي: $c\cdot e^{0}-0-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\Leftarrow c=1$ هو:

$$y_2(x)=f(x)=e^{2x}-x-\frac{1}{2}$$

- إحدى الدوال الأصلية للدالة: $f(x)=2\,c\cdot e^{2x}-1$ نجدها بالمكاملة كالآتي: $z(x)=c.e^{2x}-x-\frac{1}{2}$

وباشتقاق الدالة: $z(x)=c.e^{2x}-x-\frac{1}{2}$ نجد : $z'(x)=2\,c\cdot e^{2x}-1$ وبحذف الثابت الاختياري c نجد المعادلة التفاضلية المطلوبة بالشكل: $z'(x)+2\,z(x)=2\,x$.

تمرين 6-8

- **حل المعادلة التفاضلية:** $x\;y'(x)+y(x)=\frac{1}{x}\ln x$ .... (1)

واستنتج الحل الخاص لها الذي يحقق الشرط الابتدائي: $y_0(1)=1$

- **أحسب التكامل** $z(x)=-\frac{1}{2}\int\frac{2-2\ln x+\ln^2 x}{x^2}dx$. **ثم شكل المعادلة التفاضلية التي تقبل الدالة** $z(x)=\frac{c}{x}+\frac{1}{2x}\ln^2 x$ **حلا لها** ، (c **ثابت اختياري حقيقي**)

الحل

- حل المعادلة التفاضلية (1):

حل المعادلة المتجانسة: $x\,y'(x)+y(x)=0$ هو $y_1=\frac{c}{x}$ حيث c من $\mathbb{R}$

نوجد حل خاص y_2 لـ(1) من الشكل: $y_2=\frac{c(x)}{x}$

فنجد: $c(x)=\frac{1}{2}\ln^2 x$ ومنه $y_2=\frac{1}{2x}\ln^2 x$

إذن الحل العام $y=y_1+y_2=\frac{c}{x}+\frac{1}{2x}\ln^2 x$ حيث c من $\mathbb{R}$

الحل الخاص لـ(1) الذي يحقق: $y_0(1)=1$ يعطى $c=1$

ومنه $y_0(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{2x}\ln^2 x$

- باستخدام التكامل بالتجزئة

$$z(x)=-\frac{1}{2}\int\frac{2-2\ln x+\ln^2 x}{x^2}\,dx=\frac{1}{x}+\frac{1}{2x}\ln^2 x$$

$z(x)=\frac{c}{x}+\frac{1}{2x}\ln^2 x$ هي حل للمعادلة التفاضلية $x\,z'(x)+z(x)=\frac{1}{x}\ln x$

تمرين 6-9

حل المعادلة التفاضلية: $e^x\cdot y'(x)-y(x)=1$ ...... (1)

واستنتج الحل الخاص لها الذي يحقق الشرط الابتدائي: $y(0)=0$.

الحل

حل المعادلة التفاضلية: $e^x\cdot y'(x)-y(x)=1$ ... (1)

- نوجد الحل العام y_1 للمعادلة التفاضلية المتجانسة: $e^x\cdot y'(x)-y(x)=0$ ... (2)، الذي هو:

$$e^x\cdot y'(x)-y(x)=0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{y'}{y}=e^{-x}$$

$$\Leftrightarrow\quad \ln|y|=c_1-e^{-x} \quad\Leftrightarrow\quad y=\pm c_1\cdot e^{-e^{-x}}$$

ومنه الحل العام لـ (2) : $y_1(x)=c\cdot e^{-e^{-x}}$ حيث $c\in\mathbb{R}$

- ثم نوجد حلا خاصا y_0 للمعادلة (1) يكون من الشكل: $y_0=c(x)\cdot e^{-e^{-x}}$.

باشتقاق العلاقة الأخيرة نجد: $y_0'(x)=c'(x)\cdot e^{-e^{-x}}+c(x)\cdot e^{-x}e^{-e^{-x}}$

وبالتعويض في (1) نحصل على:

$$\begin{aligned}e^x y_0'-y_0&=\\&=e^x c'(x)\cdot e^{-e^{-x}}+\cancel{e^x c(x)\cdot e^{-x}e^{-e^{-x}}}-\cancel{e^x c(x)\cdot e^{-x}e^{-e^{-x}}}\\&=e^x c'(x)\cdot e^{-e^{-x}}=1\end{aligned}$$

أي $c'(x)=e^{-x}\cdot e^{-e^{-x}}$

وبالمكاملة، نحصل على إحدى الدوال الأصلية لـ $c(x)$ بالشكل: $c(x)=\int e^{-x}\cdot e^{-e^{-x}}dx=-e^{-e^{-x}}$

فيكون الحل الخاص للمعادلة (1) : $y_0(x)=-e^{-e^{-x}}\cdot e^{-e^{-x}}=-1$

- الحل العام y للمعادلة (1) : $y = y_1 + y_0$ هو : $y(x) = c \cdot e^{-e^{-x}} - 1$ حيث $c \in \mathbb{R}$

الحل الخاص y_2 للمعادلة (1) الذي يحقق لشرط الابتدائي: $y(0) = 0$:

$$c \cdot e^{-1} = 1 \iff c \cdot e^{-e^{-0}} - 1 = 0$$

ومنه : $c = \frac{1}{e}$ ويكون الحل الخاص المطلوب هو : $y_2(x) = \frac{1}{e} \cdot e^{-e^{-x}} - 1$

تمرين 6-10

لتكن f الدالة المعرفة بالشكل $f(x) = e^{3x}$

حل المعادلة التفاضلية $y'' - y' - 6y = f$ (1) . يمكن البحث عن حل خاص للمعادلة المعطاة بالشكل $y_0(x) = \alpha e^{3x}$. ثم عين حل المعادلة التفاضلية الذي يحقق $y(0) = 1$ و $y'(0) = 0$.

الحل

المعادلة المتجانسة المرفقة بـ(1): $z'' - z' - 6z = 0$ والمعادلة المميزة هي $r^2 - r - 6 = 0$ و $\Delta > 0$ وحلول المعادلة المميزة هما 3 و -2. تكون الدالة z حلا للمعادلة المتجانسة إذا وفقط إذا وُجد (a,b) من $\mathbb{R}^2$ بحيث من أجل كل عدد حقيقي x يكون لدينا $z(x) = ae^{3x} + be^{-2x}$

نبحث عن y_0 حل خاص للمعادلة (1) بالشكل $y_0(x) = \alpha x e^{3x}$. لدينا $y_0'(x) = (3\alpha x + \alpha)e^{3x}$ و $y_0''(x) = (9\alpha x + 6\alpha)e^{3x}$. ومنه الدالة y_0 تكون حلا للمعادلة (1) إذا وفقط إذا $9\alpha x + 6\alpha - 3\alpha x - \alpha - 3\alpha x = 1$ $\forall x \in \mathbb{R}$ ومنه $\alpha = \frac{1}{5}$ وأخيرا $y_0(x) = \frac{1}{5} x e^{3x}$.

وتكون الدالة y حلا للمعادلة (1) إذا وفقط إذا وُجد (a,b) من $\mathbb{R}^2$ بحيث من أجل كل عدد حقيقي x يكون لدينا $y(x) = \left(\frac{1}{5}x + a\right)e^{3x} + be^{-2x}$. مع $y(0) = 1$ تعطي $a + b = 1$. ومنه $y'(x) = \left(\frac{3}{5}x + 3a + \frac{1}{5}\right)e^{3x} - 2be^{-2x}$ و $y'(0) = 0$ تعطي $3a + \frac{1}{5} - 2b = 0$. ومنه

وبحل الجملة المشكلة من المعادلتين نجد $a = \frac{9}{25}$ و $a = \frac{16}{25}$

والحل المطلوب يتعرف بالعلاقة: $y(x) = \left(\frac{1}{5}x + \frac{9}{25}\right)e^{3x} + \frac{16}{25}e^{-2x}$.

تمرين 6-11

أحسب التكامل $z(x) = \int \frac{1}{2}(x^2 + 1) \cdot e^{-x} dx$. ثم نشكل المعادلة التفاضلية التي تقبل الدالة $z(x) = -\frac{1}{2}\left(2x + x^2 - 2c\right) \cdot e^{-x}$ حلا لها. (c ثابت اختياري حقيقي).

الحل

- باشتقاق الدالة: $z(x)=-\frac{1}{2}\left(x^2+2x-2c\right)\cdot e^{-x}$ نجد :

$$z'(x)=\frac{1}{2}\left(x^2+2c-2\right)\cdot e^{-x}$$

وبحذف الثابت الاختياري c نجد المعادلة التفاضلية المطلوبة بالشكل: $z+z'=-(x+1)\cdot e^{-x}$

- الدوال: $y=\lambda\cdot e^x$ (λ عدد حقيقي).

هي حل عام للمعادلة التفاضلية $y'-y=0$.

بالفعل، الدالة y معرفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث $y'=\lambda\cdot e^x$.

بوضع $\lambda=\frac{y'}{e^x}$ $(e^x\neq 0)$، وتبديله بقيمته في عبارة y ، نجد المعادلة التفاضلية المطلوبة.

- الدوال: $y=\alpha\cos 2x+\beta\sin 2x$ ، (α و β عددين حقيقيين)

هي حل عام للمعادلة التفاضلية $y''+4y=0$.

لحذف الثابتين α و β اللذين تحويلهما الدالة y ، تحتاج بالإضافة إلى الدالة y نفسها، إلى دالتين نحصل عليهما باشتقاقين متتاليين للدالة y ، نجدهما :

$$y'=-2\alpha\cos 2x+2\beta\sin 2x$$
$$y''=-4\alpha\cos 2x-4\beta\sin 2x=-4\left(\alpha\cos 2x+\beta\sin 2x\right)$$

ونجد العلاقة بين y'' و y المستقلة عن هذين الثابتين: $y''+4y=0$ ، وهي المعادلة التفاضلية المطلوبة.

تمرين 6–12

حل المعادلة $y''+y=e^x$ $(*)$

الحل

المعادلة المتجانسة : المعادلة المميزة هي $r^2+r=0$ والحل هو : $y_h=c\cos x-d\sin x$

حيث c و d من $\mathbb{R}$

الحلان $y_1=\sin x$ و $y_2=\cos x$ مستقلين.

نبحث عن حل من الشكل $y=c\cos x-d\sin x$ مع $c'y_1-d'y_2=0$,

c' و d' هما حلين للجملة :

$$\begin{cases} c'\sin x+d'\cos x=0 \\ c'\cos x+d'\sin x=e^x \end{cases}$$

إذن $c'=\frac{1}{w(x)}\begin{vmatrix} 0 & \cos x \\ e^x & -\sin x \end{vmatrix}=e^x\cos x$ و $d'=\frac{1}{w(x)}\begin{vmatrix} \sin x & 0 \\ \cos x & e^x \end{vmatrix}=-e^x\sin x$

وبالمكاملة نحصل على مع الدالتين : $c=\frac{1}{2}(\sin x+\cos x)e^{x}$ ، $d=\frac{1}{2}(\cos x-\sin x)e^{x}$

ومنه الحل الخاص $y_P=\frac{1}{2}(\sin x+\cos x)e^{x}+\frac{1}{2}(\cos x-\sin x)e^{x}=\frac{1}{2}e^{x}$

والحل العام لـ(*) يأخذ الشكل $y=y_P+y_h=y_P=\frac{1}{2}e^{x}+c\cos x-d\sin x$.

تمرين 6–13

لتكن f الدالة المعرفة بالشكل $f(x)=e^{x}$. حل المعادلة التفاضلية $4y''-16y'+17y=f$ (1) .

يمكن البحث عن حل خاص للمعادلة المعطاة بالشكل $y_0(x)=\alpha e^{x}$.

عين حل المعادلة التفاضلية بحيث $y(0)=2$ و $y'(0)=-2$.

الحل

المعادلة المتجانسة المرفقة بـ(1): $4y''-16y'+17y=0$ والمعادلة المميزة هي $4r^2-16r+17=0$ و $\Delta<0$

وحلوا المعادلة المميزة هما $2+\frac{1}{2}i$ و $2-\frac{1}{2}i$. تكون الدالة z حلا للمعادلة المتجانسة إذا وفقط إذا وُجد (a,b) من $\mathbb{R}^2$ بحيث من أجل كل عدد حقيقي x يكون لدينا $z(x)=e^{2x}\left[a\cos\left(\frac{x}{2}\right)+b\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right]$

نبحث عن y_0 حل خاص للمعادلة (1) بالشكل $y_0(x)=\alpha e^{x}$. ومنه يكون $y_0'(x)=\alpha e^{x}$ و $y_0''(x)=\alpha e^{x}$. ومنه الدالة y_0 تكون حلا للمعادلة (1) إذا وفقط إذا

$$y_0(x)=\frac{1}{5}e^{x} \quad \forall x\in\mathbb{R}$$

وتكون الدالة y حلا للمعادلة (1) إذا وفقط إذا وُجد (a,b) من $\mathbb{R}^2$ بحيث من أجل كل عدد حقيقي x يكون لدينا $y(x)=\frac{1}{5}e^{x}+e^{2x}\left[a\cos\left(\frac{x}{2}\right)+b\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right]$. و $y(0)=2$ تعطي $\frac{1}{5}+a=2$. ومنه $a=\frac{9}{5}$

و $y'(0)=-2$ تعطي $\frac{1}{5}+2a+\frac{1}{2}b=-2$. ومنه $b=-\frac{58}{5}$

والحل المطلوب يتعرف بالعلاقة: $y(x)=\frac{1}{5}e^{x}+e^{2x}\left[\frac{9}{5}\cos\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{58}{5}\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right]$.

تمرين 6–14

بين أن المعادلة التفاضلية $y-xy'=\frac{y^3}{4}$ ذات متغيرات منفصلة

عين تكامل هذه المعادلة التفاضلية وعين المنحنى التكاملي الذي يمر بالنقطة $x_0=5$ ، $y_0=\frac{5}{2}$

الحل

نستخدم الترميز التفاضلي $y - x\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^3}{4}$

فيكون $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{dy}{y\,(1-\frac{y^2}{4})} = \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{4}\dfrac{1}{1-\frac{y}{2}} - \dfrac{1}{4}\dfrac{1}{1+\frac{y}{2}}$

نكامل ونكتب الثابت بشكل لوغاريتم، فيكون

$$\ln(|x/k|) = \ln(|y|) - \frac{1}{2}\ln(|1-y^2/2|)$$

ومنه $x = \dfrac{A\,y}{\sqrt{|1-y^2/4|}}$ حيث A ثابت اختياري

وتنتج العلاقة التي تعرف منحنيات التكامل: $y^2 = \dfrac{4x^2}{x^2+C}$ حيث C ثابت اختياري

لمعرفة المنحنى التكاملي المار بالنقطة $x_0 = 5$ ، $y_0 = \dfrac{5}{2}$، يكفي التعويض عن قيمتي x، y في العلاقة السابقة

فنجد $C = -9$

ومنه معادلة المنحنى التكاملي $y^2 = \dfrac{4x^2}{x^2-9}$ التي تفترض أن يكون $x \notin [-3;3]$

تمرين 6–15

لتكن المعادلة التفاضلية $x^2 y'' - 2x\,y' + 2y = 0$

بين أن هذه المعادلة التفاضلية تقبل حلولا هي كثيرات حدود. استنتج التكامل العام للمعادلة التفاضلية.

الحل

ليكن P كثير الحدود من الدرجة n حل للمعادلة التفاضلية (نفرض أن كثير الحدود نظامي لأن المعادلة التفاضلية متجانسة)

نعوض عن y، y'، y'' بـ P، P'، P'' على الترتيب. في كثير الحدود من الدرجة ذي الدرجة n معامل x^n:

$$n(n-1) - 2n + 2 = (n-1)(n-2)$$

ومنه القيم التي تأخذها الدرجة هي $n=1$، $n=2$.

ومنه كثيرا الحدود يكونان بالشكل $P_1(x) = x + a$ و $P_2(x) = x^2 + b\,x + c$

وبحملهما في المعادلة التفاضلية : $x^2 P_1'' - 2x\,P_1' + 2P_1 = -2x + 2x + 2a = 0$

ومنه كثير الحدود $P_1(x) = x$. وهو حل تافه.

وكذلك $x^2 P_2'' - 2x\,P_2' + 2P_2 = 2x^2 - 2x\,(2x+b) + 2(x^2 + b\,x + c) = 2c = 0$

ومنه كثير الحدود هو $P_2(x)=x^2+bx$ حيث b ثابت اختياري ونتحقق من ان كثير الحدود يحقق المعادلة التفاضلية، فنأخذ $b=0$. إذن التكامل العام للمعادلة التفاضلية هو $y=C_1x+C_2x^2$

تمرين 6-16

بين أن المعادلة التفاضلية $x^2y''+3xy'+y=0$ **تقبل حلا بالشكل** x^r (r أس ثابت).

استنتج التكامل العام للمعادلة التفاضلية.

الحل

نبحث عن حل للمعادلة التفاضلية من الشكل $y=x^r$ لدينا $y'=rx^{r-1}$ ، $y''=r(r-1)x^{r-2}$

$$x^2y''+3xy'+y=(r+1)^2x^r$$

ينعدم الطرف الأول من المطابقة إذا كان $(r+1)^2=0$ ، $r=-1$

نتحقق أيضا بأن $y=\frac{1}{x}$ هو حل خاص.

ولإيجاد التكامل العام للمعادلة التفاضلية، نستخدم التحويل $y=\frac{1}{x}z$ ، فنحصل على $xz''+z'=0$

ومنه $z=C_1+C_2\ln(|x|)$ ، والحل للمعادلة التفاضلية $z=\frac{1}{x}\left(C_1+C_2\ln(|x|)\right)$

تمرين 6-17

كامل المعادلة التفاضلية $(2x+1)y''+(4x-2)y'-8y=0$

علما بأن هذه المعادلة تقبل حلا خاصا من الشكل $e^{\alpha x}$ (α ثابت).

الحل

نبحث بحساب α حيث $y_1=e^{\alpha x}$ هو حل للمعادلة التفاضلية

لدينا $y_1=e^{\alpha x}$ ، $y_1'=\alpha e^{\alpha x}$ ، $y_1''=\alpha^2e^{\alpha x}$

و $$(2x+1)y_1''+(4x-2)y_1'-8y_1=e^{\alpha x}\left(2x\,\alpha(\alpha+2)+\alpha^2-2\alpha-8\right)=0$$

ينعدم الطرف الأول إذا تحقق $\alpha(\alpha+2)=0$ و $\alpha^2-2\alpha-8=0$ ، $\alpha=-2$

لإيجاد التكامل العام للمعادلة التفاضلية، نستخدم التحويل $y=y_1z$ ، حيث z دالة جديدة مجهولة. فنحصل على

$$(2x+1)y_1z''+\left[2(2x+1)y_1'+(4x-2)y_1\right]z'+\left[(2x+1)y_1''+(4x-2)y_1'-8y_1\right]z=0$$

الكمية الموجودة ما بين المعقوفين الأخيرين تكون معدومة لأن y_1 هو حل للمعادلة التفاضلية. فنحصل على معادلة تفاضلية بالسبة لـ z ، كالآتي:

$$(2x+1)y_1z''+\left[2(2x+1)y_1'+(4x-2)y_1\right]z'=0$$ ،

وبتضمين الحل $y_1 = e^{\alpha x}$ ينتج $(2x+1)z'' + [-4(2x+1)+4x-2]z' = 0$

$$(2x+1)z'' + (-4x-6)z' = 0$$

بوضع $z' = u$، تصبح المعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى: $(2x+1)u' - 2(2x+3)u = 0$

ليكن $\dfrac{du}{u} = \dfrac{2(2x+3)}{2x+1}dx = 2\left[1 + \dfrac{2}{2x+1}\right]dx$

ومنه $z' = u = K e^{2x}(2x+1)^2$

$z = K\int e^{2x}(2x+1)^2\, dx$ (K ثابت اختياري).

نعلم بأنه توجد دالة أصلية من نفس النمط $e^{2x}(2x+1)^2$، ومنه يمكن كتابة

$$\int e^{2x}(2x+1)^2\, dx = e^{2x}(Ax^2 + Bx + C)$$

بالاشتقاق نجد $4x^2 + 4x + 1 = 2Ax^2 + 2(A+B)x + B + 2C$ ومنه $A = 2$ ،$B = 2$ ،$C = \dfrac{1}{2}$.

ومنه $z = C_1 + K e^{2x}(2x^2 + \dfrac{1}{2}) = C_1 + \dfrac{K}{2}e^{2x}(4x^2 + 1)$

والحل العام للمعادلة التفاضلية: $y = C_1 e^{-2x} + C_2(4x^2+1)$ $\left(C_2 = \dfrac{K}{2}\right)$ (C_1 و C_1 ثابتين اختياريين)

تمارين إضافية

تمرين 1 شكل المعادلات التفاضلية تقبل الدالة y المعرفة على $]-1,+1[$ حلا لها. حيث

$$y = -\tfrac{1}{2}\ln(x^2 - 1) + 3$$

تمرين 2 شكل المعادلات التفاضلية المرافقة بالدوال الآتية:

$$y = Ae^{2x} + Be^{x} + C \quad , \quad y = Ax^2 + Bx + C$$

$$y = e^{x+A} \quad , \quad \ln y = Ax^2 + B$$

تمرين 3 حل المعادلات التفاضلية الآتية:

$$(x^2 - yx^2)y' + y^2 + xy^2 = 0 \quad , \quad (y^3 + y - 2)dx + xy\,dy - 5y\,dy$$

$$xe^{x+2y} = 0 \quad , \quad xe^{x+2y} + y' = 0 \quad , \quad y\,dx - x\,dy = xy\,dx$$

تمرين 4 حل المعادل, التفاضلية الآتية: $y' = x + \tan x$ ، $D = \left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[$

نفس السؤال من أجل $y' = x\sqrt{x} + 1$ $D = \mathbb{R}^*$

تمرين 5 جد الحل العام للمعادلات التفاضلية الآتية:

$$\left(y-y'x\right)^2=1+\left(y'\right)^2 \qquad y=3y'x+6y^2\left(y'\right)^2$$

تمرين 6 كامل المعادلة: $xy'+2y=\dfrac{x}{1+x^2} \qquad (E)$

أثبت أن (E) تقبل حلا f يكون معرفا على $\mathbb{R}$. ثم أحسب $I=\int_0^x f(t)dt$.

تمرين 7 جد الحل العام للمعادلات التفاضلية، بالاستعانة بالتحويلات:

$$\left(y-4x\right)^2dx=dy \qquad tg^2\left(x+y\right)dx-dy=0$$

$$\frac{1}{x}dy+\frac{y}{x^2}dx-2xdx=0 \quad , \quad \left(6x-2y-3\right)dx-\left(2x+2y-1\right)$$

تمرين 8 حل المعادلات التفاضلية الآتية:

$$y'+\frac{y}{x}=-x\,y^2 \;,\; xy'-y=y^2\ln x \;,\; y'-(x+y)^2=0 \;,\; y'-2x+5y-1=0$$

$$y'-2y\,e^x-4e^x=0 \;,\; y'-e^{-x}-y=0 \;,\; y'-\frac{2y}{x+1}-(x+1)^2=0$$

تمرين 9 حل المعادلات التفاضلية الآتية :

$$y''+y'+y=(-x+1)e^{-x} \;،\; y''-4y'=6\sin 2x \;،\; y''+2y'-3y=x^2+3$$

$$y''-y'+y=x\,e^x \;،\; y''-2y'=3\cos x \;،\; y''-2y'-3y=x^3-x^2-x+1$$

تمرين 10 جد الحلول الخاصة من الشكل $\dfrac{\lambda}{x}$ للمعادلات التفاضلية: $y'+y^2=\dfrac{2}{x^2} \qquad (E)$

بوضع $y=\dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{x}$، برهن أن (E) تتحول إلى $t'+\dfrac{2}{x}t=1 \quad (E')$

جد العام لـ (E')، واستنتج الحل العام لـ (E). واستنتج أيضا الحل الخاص لـ (E): $y(1)=2$.

تمرين 11 لتكن المعادلة التفاضلية: $y'+y^2-\dfrac{y}{x}+\dfrac{1}{x}=0 \qquad (E)$

بإجراء التحويل $y=t+\dfrac{1}{x}$، ثم إجراء التحويل $t=\dfrac{1}{s}$ في المعادلة التفاضلية (E) استنتج حلول (E)

تمرين 12 • حل المعادلة التفاضلية : $\dfrac{1}{x}\,y'(x)+y(x)=x^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$

واستنتج الحل الخاص لها الذي يحقق الشرط الابتدائي: $y_0(0)=-1$

• أحسب التكامل $\int x^3\cdot e^{\frac{1}{2}x^2}dx$. ثم شكل المعادلة التفاضلية التي تقبل الدالة :

$z(x)=x^2+c\cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}-2$ حلا لها ، (c ثابت اختياري حقيقي)

تمرين 13 • حل المعادلة التفاضلية : $y''-y=0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$

واستنتج الحل الخاص لها الذي يحقق الشرط الابتدائي: $y_0(0)=0 \wedge y_0'(0)=1$

• نفس السؤال من أجل المعادلة التفاضلية : $y''-2y'+y=x \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$

والشرط الابتدائي: $y_0'(0)=0 \wedge y_0''(0)=0$

المراجع

- K. Abdelkarim, *Exercices résolus d'analyse* (*avec rappel de cours*), Alger, OPU, 1993.
- K. Allab, *Eléments d'analyse*, Alger, OPU, 2002.
- E. Azoulay, *Mathématiques*: *cours et exercices*, tome 1, Paris, Mc Graw-Hill, 1983.
- S. Benachour, *Exercices d'analyse avec solutions*, tome 1, Alger, Khawarysm, 1991.
- C. Boschat & C. Laidebeure, *Exercices de mathématiques En Prépa,* Filière économique et commerciale, ellises, Paris, 1998.
- J.-J. Colin, *Fonctions usuelles*: *exercices corrigés avec rappels de cours*, Paris, Cépaduès, 2007.
- G. Lefort, *Mathématiques pour les sciences biologiques et agronomiques*, Paris, Armand Colin, 1967.
- G. Patrik, *Mathématiques pour l'économie*: *méthodes et exercices corrigés,* Belgique : de boeck, 2005.
- J. Vauthier et all., Exercices de Mathématiques, L1 et L2, 1^{re} et 2^{e} année d'Université, Algèbre, Analyse, Géométrie. Edition ESKA, Paris, 2006
- B. Verlant & G. Saint-Pierre, *Analyse et Algèbre*, SIGMA, BTS informatique de gestion, FOUCHER, vanves 2007.

http://exo7.emath.fr