Université de Khemis Miliana - Djilali Bounaama
Faculté des Sciences et de la technologie
Département des Sciences de la matière

Cours et Exercices Résolus
Mathématiques 1
ST-SM

Par

Dr. AYADI Souad

Pour

Première année licence

Octobre 2020

Table des matières

Introduction

Ce cours polycopié correspond au programme de l'unité d'enseignement fondamental **UEF-1.1 "Mathématiques 1"**, du premier semestre, socle commun, du domaine sciences et technologies. Il permit d'acquérir le contenu de tout le premier semestre qui a pour but l' homogénésation du niveau des étudiants à l'entrée de l'université. Le manuscrit est destiné aux étudiants de la première année licence L.M.D sciences et techniques (ST) et sciences de la matière (SM), ainsi que toute autre personne ayant besoin d'outils de bases d'analyse et d'algèbre linéaire. Les notions abordées dans ce cours sont fondamentales et parmi les plus utilisées dans le domaine des sciences et technologie, elles constitues les notions de base qu'un étudiant de première année doit absolument connaître.

Le cours contient une partie algèbre et une partie analyse et scindé en six chapitre qui sont programmé au module math 1, en respectant le contenu et l'ordre des chapitres suivant le canevas donné par le ministère. Les chapitres trois, quatre et cinq traitent les notions d'analyse et ceux qui restent sont consacrés à l'algèbre.

Le cours débute par un chapitre qui esten quelque sorte les mathématiques générales ; il porte sur la logique, les modalités du raisonnement mathématique. Les notions de cette partie sont nouvelles pour l'étudiant c'est pourquoi nous les avons présentées d'une manière progressive.

Le deuxième chapitre, traite les ensembles et les relations (relations d'ordres, relations d'équivalence) ainsi que les applications (injectives, surjectives, bijectives, réciproques,. . .).

Le troisième chapitre est un complément des notions fondamentales sur les fonctions numériques d'une variable réelle vues au lycée et leurs applications à savoir, les notions de limite, continuité et dérivabilité.

Le chapitre quatre constitue une application aux fonctions élémentaires : les fonctions puissances, logarithmes, exponentielles, hyperboliques, trigonométriques et les fonctions inverses.

La formule de taylor, le développement limité et leurs applications sont présents dans le chapitre cinq.

On termine notre cours par des notions fondamentales de l'algèbre linéaire : les lois de compositions internes, les espaces vectoriels et les applications linéaires, ce dernier chapitre va préparer l'étudiant au cours de **"Mathématiques 2"**.

Dans chaque chapitre, le lecteur trouvera le cours qui a été enseigné et des exercices qui sont corrigés en détails à la fin.

Le manuscrit prend en considération le niveau de langue ; d'une certaine catégorie d'étudiants qui ne maîtrise pas bien le français ; c'est pourquoi il est écrit avec un français simple et facile à comprendre. Je souhaite que ce document servira bien les étudiants et répondera à leurs attentes et qu'il les aidera à maîtriser bien ce module.

Finalement, Je serais très reconnaissante à tous les lecteurs, étudiants et enseignants à me faire parvenir leurs remarques, commentaires et suggestions concernant le fond et la forme de ce manuscrit à mon adresse : souad.ayadi@univ-dbkm.dz

Chapitre 1

Méthodes de raisonnement mathématique

Calculer et démontrer sont les deux principales activités des mathématiques. Quand on s'intéresse à l'activité de démontrer, la logique explique comment un fait ou une affirmation peut découler d'autres fait déja admit. En mathématiques, la logique est la pratique de la rigueur et l'exactitude dans la pensée. De ce fait on ne peut jamais faire un raisonnement mathématique régoureu si on ne maitrise pas bien les notions fondamentales de la logique mathématique. Dans ce chapitre, on présente les éléments de logique indéspensable pour tout raisonnement mathématique par des méthodes directes ou indirectes.

1.1 Éléments de logique

La logique s'intéresse d'une part aux règles de construction des phrases mathématiques, d'autre part à leur vérité. Les propositions sont les atomes en logique.

1.1.1 Proposition

Definition 1.1 *Une proposition est un énoncé déclaratif dont on peut dire s'il est vrai ou faux.*

- *quand la proposition est vraie on lui affecte la valeur* 1
- *quand la proposition est fausse on lui affecte la valeur* 0

Ces valeurs sont dites les valeurs de vérités de la proposition. En génŕale, on met ces valeurs dans un tableau dit tableau de vérité. les propositions sont notées généralement par $P, q, \ldots$

P
1
0

Exemple 1.1 *On donne quelques exemples de propositions avec leurs valeurs de vérités.*

1. *Madame Ayadi est l'enseignante de mathématique de cette section :* (1)
2. *Deux droite parallèles ne se coupent jamais :* (1)
3. *Tous les nombres réels ont une racine carré :* (0)

1.1.2 Connecteurs logiques

À l'aide de deux (plusieurs) propositions on peut définir de nouvelles propositions en utilisant les connecteurs logiques. On donne les règles pour ces cinq connecteurs *'non,' ' et', 'ou', ' si ...alors', 'si et seulement si'.*

Definition 1.2 ***(Négation : 'Non')***
Soit P une proposition. La négation de P est la proposition notée $\overline{P}$ qui est vraie si P est fausse et vice-versa..

Exemple 1.2 *on donne un exemple très simple de la négation d'une proposition.*
(P) : *Les bacheliers série langue peuvent s'inscrire en ST.*
$(\overline{P})$: *les bacheliers série langue ne peuvent pas s'inscrire en ST.*

Definition 1.3 ***(Conjonction : 'et')***
Soient P et Q deux propositions. La conjonction de P et Q est la proposition $(P \wedge Q)$ qui ne peut être vraie que si P et Q sont vraies à la fois.

Definition 1.4 ***(Disjonction : 'ou')***
Soient P et Q deux propositions. La disjonction de P et Q est la proposition $(P \vee Q)$ qui ne peut être fausse que si P et Q sont fausses à la fois.

Definition 1.5 ***(Implication : 'Si ... alors')***
Soient P et Q deux propositions. On appelle implication notée $(P \Longrightarrow Q)$ la proposition qui est fausse quand P est vraie et Q est fausse.

Definition 1.6 ***(Équivalence : 'Si et seulement si')***
Soient P et Q deux propositions. On dit que P et Q sont équivalentes et on écrit $(P \Leftrightarrow Q)$ quand P et Q ont les mêmes valeurs de vérités.

Remarque 1.1 *En utilisant les tableaux de vérités, on peut montrer que :*
- $\overline{\overline{P}} \Leftrightarrow P$
- $(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow [(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)]$.
- $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{P} \vee Q)$
- $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$

1.1.3 Règles de Morgan

Proposition 1.1 ***(Règles de Morgan)***
Soient P et Q deux propositions logiques, alors :
1. $\left(\overline{P \wedge Q}\right) \Leftrightarrow \left(\overline{P} \vee \overline{Q}\right)$.
2. $\left(\overline{P \vee Q}\right) \Leftrightarrow \left(\overline{P} \wedge \overline{Q}\right)$.

Preuve. En utilisant les tableaux de vérités on a les résultats demandés.

P	Q	$\overline{P}$	$\overline{Q}$	$P \wedge Q$	$\overline{P} \vee \overline{Q}$	$\overline{P \wedge Q}$
1	1	0	0	1	0	0
0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1

■

Theoreme 1.1 *Soient P, Q, R trois propositions*

1. $(P \wedge Q) \Leftrightarrow (Q \wedge P)$ *et* $(P \vee Q) \Leftrightarrow (Q \vee P)$.
2. $[(P \wedge Q) \wedge R] \Leftrightarrow [P \wedge (Q \wedge R)]$ *et* $[(P \vee Q) \vee R] \Leftrightarrow [P \vee (Q \vee R)]$.
3. $[(P \wedge Q) \vee R] \Leftrightarrow [(P \vee R) \wedge (Q \vee R)]$ *et* $[(P \vee Q) \wedge R] \Leftrightarrow [(P \wedge R) \vee (Q \wedge R)]$.

On dit que le $\vee$ et le $\wedge$ sont commutatifs, associatifs et distributif l'un par rapport à l'autre.

Definition 1.7 *À partir de l'implication $(P \Rightarrow Q)$ on peut définir les propositions suivantes :*
- *La négation de l'implication $(P \Rightarrow Q)$ est $(P \wedge \overline{Q})$.*
- *La contraposé de l'implication $(P \Rightarrow Q)$ est $(\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$.*
- *La réciproque de l'implication $(P \Rightarrow Q)$ est $(Q \Rightarrow P)$.*

Exemple 1.3 *Soit $n \geq 2$, on considère l'implication (I)*

$$[(n \text{ premier et } n \neq 2) \Rightarrow (n \text{ est impair})].$$

La contraposé de la proposition (I) est

$$[(n \text{ est pair}) \Rightarrow (n = 2 \text{ ou } n \text{ n'est pas premier})].$$

La négation de (I) est

$$[(n \text{ premier et } n \neq 2) \text{ et } (n \text{ pair})].$$

La recéproque de (I) est

$$[(n \text{ est impair}) \Rightarrow (n \text{ premier et } n \neq 2)].$$

Exercise 1.1 *Soient P et Q deux propositions.*
Donner la négation des propositions suivantes : $(P \Rightarrow Q)$; $(Q \Rightarrow P)$.
En déduire la négation de $(P \Leftrightarrow Q)$

Solution 1.1 *En utilisant les règles de Morgan on a :*

$$\begin{aligned} \overline{(P \Rightarrow Q)} &\Leftrightarrow \overline{(\overline{P} \vee Q)} \\ &\Leftrightarrow (\overline{\overline{P}} \wedge \overline{Q}) \\ &\Leftrightarrow (P \wedge \overline{Q}) \end{aligned}$$

Donc, $\overline{(Q \Rightarrow P)} \Leftrightarrow (Q \wedge \overline{P})$
En en déduit que :

$$\begin{aligned} \overline{(P \Leftrightarrow Q)} &\Leftrightarrow \left[\overline{(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)}\right] \\ &\Leftrightarrow \left[(\overline{P \Rightarrow Q}) \vee (\overline{Q \Rightarrow P})\right] \\ &\Leftrightarrow \left[(P \wedge \overline{Q}) \vee (Q \wedge \overline{P})\right] \end{aligned}$$

Exercise 1.2 *1. Donner la table de vérité des deux propositions suivantes :* $(P \Leftrightarrow Q)$, $(\overline{P} \Leftrightarrow \overline{Q})$.

2. Que déduisez vous ? Donner un exemple

Solution 1.2 1) *Table de vérité (simple à faire).*
2) *On en déduit que* $(P \Leftrightarrow Q) \Longleftrightarrow (\overline{P} \Leftrightarrow \overline{Q})$.

On donne un exemple : soit $x \in \mathbb{R}$, *la proposition*

$\Big[(x^2 = 4) \Leftrightarrow [(x = 2) \vee (x = -2)]\Big]$ *est équivalente à la proposition*

$$\Big[(x^2 \neq 4) \Leftrightarrow [(x \neq 2) \wedge (x \neq -2)]\Big].$$

1.1.4 Quantificateurs

Prédicat

Soit E un ensemble (par exemple : $\mathbb{R}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}$) on appelle prédicat sur E tout énoncé qui contient une inconnue x (ou plusieurs) et si on remplace x par un élément fixe de E on obtient une proposition vraie ou fausse. On note un prédicat par $p(x), q(x), \ldots$

Exemple 1.4 *Voici deux exemples de prédicat*
$p(x) : x$ *est un multiple de* $7,\ x \in \mathbb{Z}$.
$q(x) : n$ *est un nombre premier*, $n \in \mathbb{N}$.

Quantificateur universel

Le quantificateur universel dont le symbole est $<< \forall >>$ signifie « Quel que soit», « pour tout », « pour n'importe quel ». Soit E un ensemble donné et $p(x)$ un prédicat sur E. Les trois énoncés suivants :
(a) quelque soit x dans E : $p(x)$,
(b) pour tout élément x dans E : $p(x)$,
(c) pour n'importe quel x dans E : $p(x)$,
peuvent être remplacés par $<< \forall x \in E : p(x) >>$.

Exemple 1.5 *La phrase "tout nombre réel est supérieur ou égal à* 5*" s'ecrit "*$\forall x \in \mathbb{R} : x \geq 5$*"*

Exemple 1.6 *la première proposition est vraie alors que la deuxième est fausse*
- $\forall x \in \mathbb{N} \quad x + 1 > 0$.
- $\forall x \in \mathbb{Z} \quad x^2 + 3x - 2 < 0$.

Quantificateur existentiel

Le symbole $<< \exists >>$ désigne le quantificateur existentiel qui signifie « Il existe au moins un » et se lit « il existe ».

Exemple 1.7 *La proposition suivante*
il existe au moins un nombre réel tel-que $x^2 - 5 > 0$, *s'écrit* $\exists x \in \mathbb{R}: \quad x^2 - 5 > 0.$

Il est claire qu'un quantificateur associé à un prédicat donne une proposition qui peut être vraie ou fausse.

Exercise 1.3 *Écrire les phrases suivantes en utilisant les quantificateurs.*

1. *Le carré de tout nombre réel est positif.*
2. *Pour tous les nombres réels le carré de la somme de deux nombres est égal à la somme de leurs carrés.*
3. *Tout nombre entier admet un opposé.*
4. *Il existe au moins un nombre entier qui est opposé à tous les nombres entiers.*

Solution 1.3 *On obtient les propositions suivantes :*

1. $\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 \geq 0.$ (V)
2. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} \quad (x+y)^2 = x^2 + y^2.$ (F)
3. $\forall x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{Z}, \quad x + y = 0.$ (V)
4. $\exists y \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{Z}, \quad x + y = 0.$ (F)

Négation d'un quantificateur

Soit E un ensemble et $p(x)$ un prédicat sur E.
la négation de $(\forall x \in E: \ p(x))$ est $\left(\exists x \in E: \ \overline{p(x)}\right)$.

Exemple 1.8 *La négation des deux propositions suivantes est donnée comme suit :*

- $\overline{\forall x \in \mathbb{R} \ x^2 \geq 0}$ *est* $\exists x \in \mathbb{R}, \ x^2 < 0.$
- $\overline{\forall x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{Z}, \quad x + y = 0}$ *est* $\exists x \in \mathbb{Z}, \forall y \in \mathbb{Z}, \quad x + y \neq 0.$

1.2 Méthodes de Raisonnement

1.2.1 Méthodes Directes

Soent P, Q deux propositions données.

- Pour montrer que l'implication $(p \Rightarrow Q)$ est vraie il suffit de supposer que P est vraie et démontrer que Q est vraie
- Pour montrer que l'équivalence $(p \Leftrightarrow Q)$ est vraie il suffit de montrer que les deux implications $(P \Rightarrow Q)$ et $(Q \Rightarrow P)$ sont vraies.

Exemple 1.9 *Démontrer que* $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad (x^2 = y^2) \Rightarrow (|x| = |y|)$.

Solution 1.4 *Soient* x, y *deux réels, on suppose que* $x^2 = y^2$ *et on montre que* $|x| = |y|$.
comme x^2, y^2 *sont deux nombres positifs donc on peut calculer leurs racines carrées et on a*

$$\begin{aligned} x^2 = y^2 \quad &\Rightarrow \quad \sqrt{x^2} = \sqrt{y^2} \\ &\Rightarrow \quad |x| = |y|. \end{aligned}$$

Lorsque le raisonnement directe ne marche pas on passe à d'autres types de raisonnement appelés méthodes indirectes.

1.2.2 Méthodes Indirectes

Raisonnement par l'absurde

Pour démontrer que P est vraie on suppose que $\overline{P}$ est vraie et on aboutit à une contradiction. On en déduit que pour montrer que l'implication $(P \Rightarrow Q)$ est vraie on suppose que P est vraie et Q est fausse et on aboutit à une contradiction. En faite, l'explication est très simple quand on applique le raisonnement par l'absurde pour une implication $(P \Rightarrow Q)$, on suppose que $(P \Rightarrow Q)$ est fausse ce qui revient à dire que $\overline{(P \Rightarrow Q)}$ est vraie. En d'autres termes $\left(P \wedge \overline{Q}\right)$ est vraie. D'après la table de vérité de la conjonction, si P est vraie alors $\overline{Q}$ est vraie donc Q est fausse.

Exemple 1.10 *En utilisant le raisonnement par l'absurde, montrer que pour tout entier naturel* n *on a :* $(n^2 \text{ pair } \Rightarrow n \text{ pair})$.

Solution 1.5 *On suppose que* n^2 *est pair et que* n *est impair.*
n *impair* $\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}, n = 2k+1,$ *par suite on a :*
$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2+2k)+1,$ *et comme* $(2k^2+2k)$ *est un entier naturel on peut poser* $k' = (2k^2+2k)$ *et on a alors* $n^2 = 2k'+1,$ *c'est une contradiction avec le fait que* n^2 *est pair.*

Raisonnement par contraposé

Etant donné que $\left[(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow \left(\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}\right)\right]$, *alors* pour montrer que l'implication $(P \Rightarrow Q)$ est vraie, il suffit de montrer que $\left(\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}\right)$ est vraie.

Exemple 1.11 *En utilisant le raisonnement par contraposé, montrer que*

$$[(x \neq 1 \quad et\, y \neq 1) \Rightarrow (xy - 2x - y + 2 \neq 0)\,,\ x, y \in \mathbb{R}]\,.$$

Solution 1.6 *On montre que* $[(xy - 2x - y + 2 = 0) \Rightarrow (x = 1 \quad ou\, y = 1)]$
On suppose que $(xy - 2x - y + 2 = 0)$ *on alors* $y(x-1) - 2(x-1) = 0$

$$\begin{aligned} y(x-1) - 2(x-1) = 0 &\Rightarrow (x-1)(y-2) = 0, \\ &\Rightarrow (x-1) = 0 \ ou \ (y-2) = 0, \\ &\Rightarrow x = 1 \ ou \ y = 2. \end{aligned}$$

Raisonnement par récurence

Soit $P(n)$ une propriété qui dépend de l'entier naturel n. Quand on veut montrer que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in E \subseteq \mathbb{N}$ on utilise un raisonnement par récurence. Ce raisonnement ce fait en trois étapes.

1. Étape 1 : Initialisation de la propriété
   On vérifie que $P(n_0)$ est vraie où n_0 est le premier élément dans E.
2. Étape 2 : Caractère héréditaire de la propriété
   Dans cette étape on suppose que la propriété $P(n)$ (hypothèse de récurence) est vraie pour un entier $n \geq n_0$ et on démontre que $P(n+1)$ est aussi vraie

3. Étape 3 : Conclusion
   En utilisant les étapes 1 et 2 on en déduit que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in E \subseteq \mathbb{N}$

Exemple 1.12 *Montrer par récurence que* $\forall n \in \mathbb{N},\ \ 7^n - 1$ *est devisible par* 6. *En d'autre termes on doit montrer que pour tout entier naturel* n *il existe un entier* k *tel-que* $7^n - 1 = 6k$.

Solution 1.7 *On suit les trois étapes du principe de raisonnement par récurence*

1. *Initialisation*
   Pour $n = 0$ *on a* $7^0 - 1 = 0 = 6 \times 0$ *dans ce cas* $k = 0$.
2. *Herédité*
   On suppose que $P(n)$ *est vraie pour un certain* $n \geq 0$ *et on démontre que* $P(n+1)$ *est vraie. Autrement dit on suppose que*
$$\exists k \in \mathbb{N},\ 7^n - 1 = 6k$$
   et on démontre que
$$\exists k' \in \mathbb{N},\ 7^{n+1} - 1 = 6k'.$$
   En effet,
$$\begin{array}{rcl} 7^{n+1} - 1 & = & 7^n \times 7 - 1, \\ & = & (6+1) \times 7^n - 1, \\ & = & 6 \times 7^n + (7^n - 1)\,, \\ & = & 6 \times 7^n + 6k, \\ & = & 6\,(7^n + k)\,, \\ & = & 6k',\ \ \text{où}\ \ k' = (7^n + k) \in \mathbb{N}. \end{array}$$
3. *Conclusion*
   d'après les étapes 1 *et* 2 *et par le principe de récurence on en déduit que* $P(n)$ *est vraie pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

Raisonnement par Contre Exemple

Ce type de raisonnement est utilisé pour démontrer qu'une proposition de la forme $\forall x \in E,\ P(x)$ est fausse. L'idée est de trouver au moins un $x_0 \in E$ pour lequel la proposition est fausse.

Exemple 1.13 *La proposition* $(\forall x \in \mathbb{R},\ x - 2 \leq 0)$ *est fausse car par exemple pour* $x = 5$ *on a* $5 - 2 = 3 > 0$.

Raisonnement cas par cas

Soit $P(x)$ une proprieté qui dépend d'un parametre $x \in E$. Quand on veut démontrer que $P(x)$ est vraie sur E mais la justification dépend des valeurs que prend x dans E, et que plusieurs cas apparaissent, alors on sépare tous les cas et on les étudies cas par cas.

Exemple 1.14 *Montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{n(n+1)}{2}$ *est un entier.*

Solution 1.8 *Comme* $n \in \mathbb{N}$, *on distingue deux cas : n pair et n impair.*

- *Si n est pair, alors* $\exists k \in \mathbb{N}$, *tel-que* $n = 2k$, *et dans ce cas on a :*
$$\frac{n(n+1)}{2} = \frac{2k(2k+1)}{2} = k(2k+1) \in \mathbb{N}.$$
- *Si n est impair* $\exists k \in \mathbb{N}$, *tel-que* $n = 2k+1$, *et dans ce cas on a :*
$$\frac{n(n+1)}{2} = \frac{2k+1(2k+2)}{2} = (k+1)(2k+1) \in \mathbb{N}.$$

1.3 Exercices Corrigés

Exercise 1.4 *Utiliser un raisonnement directe pour répondre aux questions suivantes :*
1) *Montrer que si* $x, y \in \mathbb{Q}$ *alors* $x + y \in \mathbb{Q}$.
2) *Soient* $x, y \geq 0$. *Montrer que si* $\dfrac{x}{y+1} = \dfrac{y}{x+1}$ *alors* $x = y$.
3) *Soit n un entier. Montrer que si* $9n + 5$ *est pair alors* $3n + 2$ *est impair.*

Solution : 1) Soient $x, y \in \mathbb{Q}$ alors $\exists a, a' \in \mathbb{Z}, b, b' \in \mathbb{Z}^*$, tels-que $x = \dfrac{a}{b}$ et $y = \dfrac{a'}{b'}$

$$\begin{aligned} x + y &= \frac{a}{b} + \frac{a'}{b'}, \\ &= \frac{ab' + ba'}{bb'}. \end{aligned}$$

Comme $b, b' \in \mathbb{Z}^*$ alors $bb' \in \mathbb{Z}^*$. De plus, $ab' + ba' \in \mathbb{Z}$. Ainsi, $x + y \in \mathbb{Q}$.

2) Soient $x, y \geq 0$ et $\dfrac{x}{y+1} = \dfrac{y}{x+1}$.

$$\begin{aligned} \frac{x}{y+1} = \frac{y}{x+1} &\Rightarrow x^2 + x = y^2 + y, \\ &\Rightarrow \left(x^2 - y^2\right) + (x - y) = 0, \\ &\Rightarrow (x - y)(x + y + 1) = 0, \\ &\Rightarrow (x - y) = 0 \text{ car } x + y + 1 > 0, \\ &\Rightarrow x = y. \end{aligned}$$

3) Soit $n \in \mathbb{Z}$. Comme $9n + 5$ est pair, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel-que, $9n + 5 = 2k$.

$$\begin{aligned} 9n + 5 = 2k &\Rightarrow 3n + 6n + 3 + 2 = 2k, \\ &\Rightarrow 3n + 2 = 2k - 6n - 3, \\ &\Rightarrow 3n + 2 = 2(k - 3n - 2) + 1, \\ &\Rightarrow 3n + 2 = 2k' + 1 \text{ avec } k' = k - 3n - 2 \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Exercise 1.5 *Le but de cet exercice est le raisonnement par L'absurde.*
1) *Montrer que* $\sqrt{2}$ *est nombre irrationnel.*
2) *Soit* $x, y \in \mathbb{Z}$, *démontrer que si* $x + \sqrt{2}y = 0$ *alors* $x = y = 0$.
3) *Soit* $n > 0$, *montrer que si* n *est le carré d'un entier alors* $2n$ *n'est pas le carré d'un entier.*

solution
1) On suppose que $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel, et on montre qu'avec cette supposition on aboutira à une contradiction.
Comme $\sqrt{2}$ est rationnel,

$$\exists x \in \mathbb{Z} \text{ et } y \in \mathbb{Z}^* \text{ tel-que } \sqrt{2} = \frac{x}{y} \text{ avec } x, y \text{ premiers entre eux.}$$

Par suite, on a $\dfrac{x^2}{y^2} = 2$. On en déduit que $x^2 = 2y^2$, ce qui signifie que x^2 est un nombre pair et d'après l'exemple 1.10, on a x qui est pair, c.d.a., un multiple de 2 donc $\exists \sigma \in \mathbb{N}$ tel-que $x = 2\sigma$. Par suite, $4\sigma^2 = 2y^2$, ce qui signifie que y^2 est pair puisque σ est entier, et de la même manière on en déduit que y est pair. Il en résulte que 2 divise x et divise y et c'est une contradiction avec le fait que x et y sont premier entre eux.

Dans tout ce qui suit on suppose que P est vraie et Q est fausse et on cherche à aboutir à une contradiction. C'est en fait le principe de raisonnement par l'absurde pour montrer que $(P \Rightarrow Q)$ est vraie.

2) On suppose que $x + \sqrt{2}y = 0$ et $(x \neq 0 \text{ ou } y \neq 0)$.
- Si $x + \sqrt{2}y = 0$ et $y \neq 0$, on a $\sqrt{2} = \dfrac{-x}{y}$, et ceci est une contradiction car x, y sont des entiers alors $\dfrac{-x}{y} \in \mathbb{Q}$, mais$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
- Maintenant, on suppose que $x + \sqrt{2}y = 0$ et $x \neq 0$, il vient que $\sqrt{2}x + 2y = 0$. On trouve que $\sqrt{2} = \dfrac{-2y}{x} \in \mathbb{Q}$, qui est une contradiction.

3) On suppose que n est le carré d'un entier et $2n$ est aussi le carré d'un entier.
Donc, il existe deux entiers non nuls x, y tels-que $n = x^2$, et $2n = y^2$. Il s'ensuit que $\dfrac{2n}{n} = 2 = \dfrac{y^2}{x^2} = \left(\dfrac{x}{y}\right)^2$. D'ou $\sqrt{2} = \dfrac{x}{y} \in \mathbb{Q}$. C'est une contradiction.

Exercise 1.6 *Le but de cet exercice est de faire un raisonnement par contraposé.*
1) *Soit* n *un entier positif. montrer que si* n^2 *est pair alors* n *est pair.*
2) *Si l'entier* $(n^2 - 1)$ *n'est pas divisible par* 8 *alors* n *est pair.*

solution
On va montrer que si n est impair alors n^2 est impair.
Si $n$est impair alors, $\exists k \in \mathbb{N},$ tel-que $n = 2k+1$. Il vient que n^2 est impair car

$$\begin{aligned} n^2 &= (2k+1)^2, \\ &= 4k^2+4k+1, \\ &= 2\left(2k^2+2k\right)+1, \\ &= 2k'+1, \text{ avec } k' = 2k^2+2k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

2) On montre que si n est impair alors (n^2-1) est divisible pr 8.

Comme n est impaire donc il existe $k \in \mathbb{N},$ tel-que $n = 2k+1$.

$$n^2-1 = (2k+1)^2 - 1 = 4k(k+1).$$

Or le produit de deux entier naturel consécutif est un multiple de 2, donc

$$\exists t \in \mathbb{N} \text{ tel-que } k(k+1) = 2t.$$

Par suite

$$n^2-1 = 8t, \quad t \in \mathbb{N}.$$

Exercise 1.7 *Démontrer les propriétés suivantes en utilisant le principe de raisonnement par récurrence.*
1) *Montrer que* $\forall n \in \mathbb{N},\ 2^n > n$.
2) *Soit* x *un réel positif. Montrer que pour tout entier naturel* $n \geq 1,\ (1+x)^n \geq 1+nx$.
3) *Montrer que* $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{i=1}^{n} i5^i = \dfrac{5+(4n-1)5^{n+1}}{16}$.
4) *Montrer que* $\forall n \in \mathbb{N},\ 2+2(-7)+2(-7)^2+\ldots 2(-7)^n = \dfrac{1-(-7)^{n+1}}{4}$.

solution
Soit $P(n)$ la propriété : $2^n > n,\ n \in \mathbb{N}$. On veut utiliser le raisonnement par récurrence pour démontrer que $P(n)$ est vraie pour tout n.
1) Pour $n = 0$ on a $2^0 = 1 > 0$. Donc $P(0)$ est vraie.
soit $n \geq 0$. On suppose que $P(n)$ est vraie et on démontre que $P(n+1)$ est vraie.
En d'autres termes, on suppose que $2^n > n$ et on démontre que $2^{n+1} > n+1$.

$$\begin{aligned} 2^{n+1} &= 2.2^n, \\ &= 2^n + 2^n, \\ &> n+1 \text{ puisque } 2^n > n \text{ et } 2^n \geq 1. \end{aligned}$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.
Conclusion : par le principe de récurrence $P(n)$ est vraie pour tout n.

2) pour $n \geq 1$, notons $P(n)$: $\quad (1+x)^n \geq 1+nx$.
Pour $n=1$ on a $(1+x)^1 = 1+x$, donc $P(1)$ est vérifié.
Fixons $n \geq 1$. Supposons que $(1+x)^n \geq 1+nx$. Nous allons montrer que $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)\,x$.

$$\begin{aligned}
(1+x)^{n+1} &= (1+x)\,(1+x)^n\,, \\
&\geq (1+nx)\,(1+x)\,, \\
&\geq 1+nx+x+nx^2, \\
&\geq 1+(n+1)\,x+nx^2, \\
&\geq 1+(n+1)\,x, \quad \text{car } nx^2 \geq 0.
\end{aligned}$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.
Conclusion : par le principe de récurrence $P(n)$ est vraie pour tout n.

3) Soit $P(n)$ la propriété : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i5^i = \frac{5+(4n-1)5^{n+1}}{16}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

On pose $I_1 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} i5^i$, et $I_2 = \dfrac{5+(4n-1)5^{n+1}}{16}$.
Pour $n=1$, on a

$$I_1 = \sum_{i=1}^{1} i5^i = 1 \times 5 = 5,$$

$$I_2 = \frac{5+(4-1).5^2}{16} = \frac{5+3\times 25}{16} = \frac{80}{16} = 5 = I_1.$$

Donc $P(1)$ est vérifié.
Fixons $n \geq 1$. Supposons que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i5^i = \frac{5+(4n-1)5^{n+1}}{16}$.
Nous allons montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} i5^i = \frac{5+(4n+3)5^{n+2}}{16}$.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} i5^i &= \sum_{i=1}^{n} i5^i + (n+1)\times 5^{n+1}, \\
&= \frac{5+(4n-1)5^{n+1}}{16} + (n+1)\times 5^{n+1}, \\
&= \frac{5+(4n-1)5^{n+1}+16(n+1)\times 5^{n+1}}{16}, \\
&= \frac{5+5^{n+1}(20n+15)}{16}, \\
&= \frac{5+5^{n+2}(4n+3)}{16}.
\end{aligned}$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.
Conclusion : par le principe de récurrence $P(n)$ est vraie pour tout n.

Remarque 1.2 *On utilise le symbole $\sum$ pour ecrire une somme.*

$$\sum_{i=1}^{n} f(i) = f(1) + f(2) + f(3) + \dots f(n).$$

Exemple

$\sum_{i=1}^{6} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36.$

$\sum_{i=1}^{6} i^2 = \sum_{i=1}^{5} i^2 + 6^2.$

Chapitre 2

Ensembles - Relations - Applications

2.1 Théorie des Ensembles

D'un point de vue mathématiques, un ensemble désigne une collection d'objets définis et distincts ces objets sont les éléments de l'ensemble. Souvent, un ensemble est noté par une lettre latine majuscule, et un élément par une lettres minuscule. Lorsque a est un élément de l'ensemble A, on dit que a appartient à A et on écrit $a \in A$. On cite Les ensembles souvent utilisés dans ce cours : $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexe, $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels, $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels, $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs et enfin l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels. On rappelle que tout nombre réel qui n'est pas rationnel est irrationnel. Tout nombre rationnel s'écrit sous la forme $\frac{a}{b}$, où $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}$. Le nombre d'éléments d'un ensemble fini E est noté $card(E)$. Si E contient n élément on dit que $card(E) = n$. Un ensemble qui ne contient aucun élément s'appelle ensemble vide et est noté $\emptyset$ et $card(\emptyset) = 0$.

2.1.1 Inclusion et Egalité

Definition 2.1 *Soient E, F deux ensembles.*

- *On dit que E est inclus dans F si tout élément x qui appartient à E appartient à F et on note $E \subset F$. On a l'équivalence suivante :*

$$(E \subset F) \Leftrightarrow (\forall x,\ x \in E \Rightarrow x \in F)\,.$$

- *Si $E \subset F$ on dit que E est un sous ensemble de F ou que E est une partie de F.*
- *On dit que $E = F$ si et seulement si $E \subset F$ et $F \subset E$.*

Exemple 2.1 $E = \left]1\ \frac{5}{2}\right]$, $F = [-5\ 3[\,.$

On a $E \subset F$. En effet,

$$\begin{aligned} x \in E \quad &\Rightarrow \quad 1 < x \leq \frac{5}{2}, \\ &\Rightarrow \quad -5 \leq 1 < x \leq \frac{5}{2} < 3 \\ &\Rightarrow \quad x \in F. \end{aligned}$$

Exemple 2.2 $A = \{n \in \mathbb{Z}, \exists k \in \mathbb{Z} : \ n = 5k + 2\}$, $\quad B = \{n \in \mathbb{Z}, \exists k \in \mathbb{Z} : \ n = 5k + 7\}$.
Montrer que $A = B$

$$\begin{aligned}
n \in A &\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \ n = n = 5k + 2, \\
&\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \ n = n = 5k + 2 + 5 - 5, \\
&\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \ n = 5(k-1) + 7, \\
&\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \ n = 5k' + 7 \text{ avec } k' = k - 1 \in \mathbb{Z}, \\
&\Rightarrow A \subset B.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
n \in B &\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \ n = n = 5k + 7, \\
&\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \ n = n = 5k + 7 + 2 - 2, \\
&\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \ n = 5(k+1) + 2, \\
&\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \ n = 5k' + 2 \text{ avec } k' = k + 1 \in \mathbb{Z}, \\
&\Rightarrow B \subset A.
\end{aligned}$$

$$A \subset B \text{ et } B \subset A \text{ donc } A = B.$$

2.1.2 Ensemble des parties

Soit A un ensemble. On désigne par $\mathcal{P}(A)$ l'ensemble de toutes les parties de A.

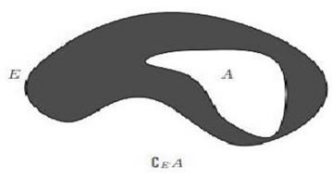
Exemple 2.3 $A = \Big\{a, b, c\Big\}$,
$\mathcal{P}(A) = \Big\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\Big\}$.

Remarque 2.1 $A \in \mathcal{P}(A)$.

2.1.3 Complémentaire

Definition 2.2 *Soit E un ensemble et $A \subset E$. On appelle complémentaire de A dans E qu'on note $\complement_E^A$ ou $\overline{A}$ ou A^c l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A. On écrit $A^c = \{x \in E \mid x \notin A\}$.*

Il est claire que $\overline{\overline{A}} = A$ et $\complement_E^E = \emptyset$.



Exemple 2.4 $E = \{-1, -5, -3, 0, 2, 7, 11\}$, $A = \{-1, 0, 7\}$,
$\complement_E^A = \{-5, -3, 2, 11\}$.

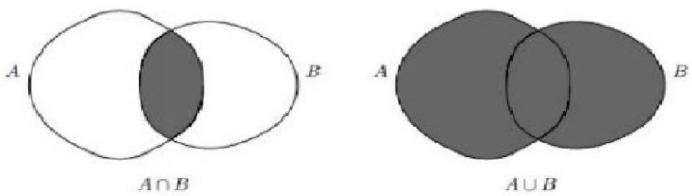
2.1.4 Intersection - Union

Soient A et B deux parties d'un ensemble E.

– On appelle intersection de A et B l'ensemble des éléments communs entre A et B, et on écrit
$$A \cap B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \in B\}.$$

– On appelle union de A et B l'ensemble des éléments de A ou B, et on écrit
$$A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

– Si $A \cap B \neq \emptyset$ alors A et B sont disjoints



Proposition 2.1 *Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E.*

1. $A \cap B = B \cap A$ *et* $A \cup B = B \cup A$.
2. *Si* $A \subset B$ *alors* $A \cap B = A$ *et* $A \cup B = B$.
3. *Si* $A \subset B$ *alors* $B^c \subset A^c$.
4. $A \cap A = A,\ A \cup A^c = E$ *et* $A \cap A^c = \emptyset$
5. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ *et* $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.
6. $C \cup (A \cap B) = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.
7. $C \cap (A \cup B) = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

Exemple 2.5 *On va vérifier quelques propriétes de la Proposition 2.1 à l'aide de l'exemple suivant*
$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 7\}$
$B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ multiple de } 3\}$
$C = \{x \in \mathbb{N} \mid x \geq 10\}$.

Solution 2.1 *On écrit les ensembles*
$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$,
$B = \{0, 3, 6, 9, 12, \dots\}$,
$C = \{10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, \dots\}$,

$A \cap B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$.
$A \cap B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 7 \text{ et } x \text{ multiple de } 3\}$.
$A \cap B = \{0, 3, 6\}$.

$A \cup B = \{x \in \mathbb{N} \,|\, x \in A \; ou \;\; x \in B\}\,,$
$A \cup B = \{x \in \mathbb{N} \,|\, x \leq 7 \; ou \, x \; multiple \;\; de \;\; 3\}\,,$
$A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 12, 15, 18, 21, \dots\}\,.$

$A^c = \{x \in \mathbb{N} \mid x \notin A\}\,,$
$A^c = \{x \in \mathbb{N} \mid x > 7\}\,,$
$A^c = \{8, 9, 10, 11, 12, 13, \dots\}\,,$

$B^c = \{x \in \mathbb{N} \mid x \notin B\}\,,$
$B^c = \{x \in \mathbb{N} \mid x \neq 3k, \;\; k \in \mathbb{N}\}\,,$
$B^c = \{x = 3k + 1 \;\, ou \, x = 3k + 2 \; k \in \mathbb{N}\}\,,$
$B^c = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, \dots\}\,,$

$A^c \cap B^c = \{x \in \mathbb{N} \mid x \in A^c \;\, et \, x \in B^c\}\,,$
$A^c \cap B^c = \{x \in \mathbb{N} \mid x \notin A \;\, et \, x \notin B\}\,,$
$A^c \cap B^c = \{x \in \mathbb{N} \mid x > 7 \;\, et \, x \neq 3k, \;\; k \in \mathbb{N}\}\,,$
$A^c \cap B^c = \{x \in \mathbb{N} \mid x > 7 \;\, et \, x \neq 3k, \;\; k \in \mathbb{N}\}\,,$
$A^c \cap B^c = \{8, 10, 11, 13, 14, 16, \dots\}\,,$

$(A \cup B)^c = \overline{\{x \in \mathbb{N} \,|\, x \leq 7 \; ou \, x \; multiple \;\; de \;\; 3\}},$
$(A \cup B)^c = \{x \notin (A \cup B)\}\,,$
$(A \cup B)^c = \{x \in \mathbb{N} \mid x \notin A \;\, et \, x \notin B\} = A^c \cap B^c,$

$A^c \cup B^c = \{x \in \mathbb{N} \mid x \in A^c \;\, ou \, x \in B^c\}\,,$
$A^c \cup B^c = \{x \in \mathbb{N} \mid x \notin A \;\, ou \, x \notin B\}\,,$
$A^c \cup B^c = \{x \in \mathbb{N} \mid x \notin (A \cap B)\}\,,$
$A^c \cup B^c = \overline{\{x \in \mathbb{N} \mid x \in (A \cap B)\}},$
$A^c \cup B^c = (A \cap B)^c\,.$

2.1.5 Différence de deux ensembles

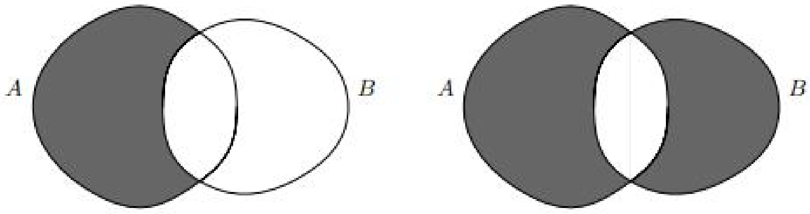
Definition 2.3 *Soient A et B deux ensembles.*

- *On appelle différence de A et B l'ensemble des éléments qui sont dans A et qui ne sont pas dans B, et on note $A - B$ ou $A \setminus B$, et on écrit*

$$A - B = \{x, \;\; x \in A \; et \, x \notin B\}\,.$$

- *La différence symétrique de A et B l'ensemble noté $A \Delta B$, définit par*

$$\begin{aligned} A \Delta B &= (A \cup B) - (A \cap B)\,, \\ &= (A - B) \cup (B - A)\,. \end{aligned}$$



$A \setminus B$ $\qquad\qquad$ $A\Delta B$

Exemple 2.6 *On considère les deux ensembles A et B,*
$A = \{0, 1, 3, 5, 8, 10, 17, 20\}$,
$B = \{2, 1, 4, 5, 8, 18, 17, 21\}$,
On a :
$A - B = \{0, 3, 10, 20\}$,
$B - A = \{2, 4, 18, 21\}$
$A \cup B = \{0, 1, 3, 5, 8, 10, 17, 20, 2, 4, 18, 21\}$,
$A \cap B = \{1, 5, 8, 17\}$,
$(A \cup B) - (A \cap B) = \{0, 3, 10, 20, 2, 4, 18, 21\}$,
$(A - B) \cup (B - A) = \{0, 3, 10, 20, 2, 4, 18, 21\}$,
$A\Delta B = \{0, 3, 10, 20, 2, 4, 18, 21\}$.

Exercise 2.1 *Soient A et B deux parties d'un ensemble E.*
Montrer que $A\Delta B = (A \cup B) \cap (A^c \cup B^c)$.

Solution 2.2

$$\begin{aligned}
x \in A\Delta B &\Leftrightarrow x \in (A \cup B) - (A \cap B)\,, \\
&\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \;\; et\, x \notin (A \cap B)\,, \\
&\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \;\; et\, x \in \overline{(A \cap B)}, \\
&\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \;\; et\, x \in (A \cap B)^c\,, \\
&\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \;\; et\, x \in (A^c \cup B^c)\,, \\
&\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A^c \cup B^c)\,,
\end{aligned}$$

Donc, $A\Delta B = (A \cup B) \cap (A^c \cup B^c)$,

Exercise 2.2 *Soient $E = \mathbb{C}$, $A = \{z \in E \mid |z| \leq 1\}$, $B = \{z \in E \mid Re(z) < 1\}$.*
Représenter $\complement_E^A, \complement_E^B, A \cup B, A \cap B, A \setminus B, B \setminus A, A\Delta B$.

2.1.6 Produit cartésien

Definition 2.4 *Soient A et B deux ensembles. Le produit cartésien de A et B qu'on note $A \times B$ est l'ensemble des couples (a, b) où $a \in A$ et $b \in B$, et on écrit*

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\} .$$

Remarque 2.2 *Si* $a \neq b$ *alors* $(a,b) \neq (b,a)$ *et donc* $A \times B \neq B \times A$.

Exemples 2.1 *On peut donner des exemples simples sur le produit cartésien.*

- $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x,y) \mid x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}\}$.

- $[0\ 1[\times \mathbb{R} = \{(x,y) \mid 0 \leq x < 1,\ y \in \mathbb{R}\}$.
- $\{0,1\} \times [1\ 2] = \{(0,y),(1,y),\ 1 \leq y \leq 2\}$.

- $\{3,5,8\} \times \{0,9\} = \Big\{ (3,9),(5,0)\,(3,0),(5,9),(8,0),(8,9) \Big\}$.

2.2 Relations binaires

Dans cette section on s'intéresse aux ; **relations** ; l'objet mathématique très important qui permit de mettre en liaison des éléments de deux ensembles ou d'un même ensemble.

Definition 2.5 *Soient* A *et* B *deux ensembles.*
- *Une relation entre* A *et* B *est une proposition* $\mathcal{R}(x,y)$ *tel-que* $x \in A$ *et* $y \in B$*. On dit que* x *est en relation avec* y *si et seulement si* $\mathcal{R}(x,y)$ *est vraie, et on écrit* $x\mathcal{R}y$*.*
- *L'ensemble des couples* $(x,y) \in A \times B$ *qui vérifient* $\mathcal{R}(x,y)$ *s'appelle* ***le graphe de la relation*** $\mathcal{R}$*, on le note par* $G_{\mathcal{R}}$*, et on écrit*

$$G_{\mathcal{R}} = \Big\{ (x,y) \in A \times B \mid x\mathcal{R}y \Big\}.$$

- *Si* $A = B$ *on dira que* $\mathcal{R}$ *est une relation* ***binaire*** *sur* A*.*

Exemple 2.7 *Soient* $A = \{0,1,3,5,8,10,16\}$, $B = \{4,16,20,23\}$.
Donner le graphe de la relation $\mathcal{R}$ *définie sur* $A \times B$ *par :*

$$\forall (x,y) \in A \times B,\ x\mathcal{R}y \Leftrightarrow y = 2x.$$

$$G_{\mathcal{R}} = \Big\{ (8,16),(10,20) \Big\}.$$

2.2.1 Relation d'équivalence - Relation d'ordre

Propriétés d'une relation binaire

Definition 2.6 *Soit* E *un ensemble et* $\mathcal{R}$ *une relation binaire sur* E*, on dit que :*

1. $\mathcal{R}$ *est* ***réflexive*** *si et seulement si* $\Big(\forall x \in E,\ (x\mathcal{R}x)\Big)$,

2. $\mathcal{R}$ *est* ***symétrique*** *si et seulement si* $\Big[\forall x,y \in E,\ \Big((x\mathcal{R}y) \Rightarrow (y\mathcal{R}x)\Big)\Big]$,

3. $\mathcal{R}$ est ***anti-symétrique*** *si et seulement si* $\left[\forall x, y \in E,\ \left(\Big[(x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}x)\Big] \Rightarrow (x = y)\right)\right]$,

4. $\mathcal{R}$ est ***transitive*** *si et seulement si* $\left[\forall x, y, z \in E,\ \left(\Big[(x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}x)\Big] \Rightarrow (x\mathcal{R}z)\right)\right]$.

Exemple 2.8 *Soit $\mathcal{R}$ une relation définie sur $\mathbb{Q}$ par : $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow xy \neq 0$.*
Dire si $\mathcal{R}$ est réflexive, symétrique, transitive.

1. *Si $\mathcal{R}$ est réflexive on a pour tout $x \in \mathbb{Q}$, $x\mathcal{R}x$ est vraie. Ce qui signifie que $x^2 \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{Q}$, mais ceci est faux car $0 \in \mathbb{Q}$, et $0^2 = 0$. Donc $\mathcal{R}$ n'est pas réflexive.*

2. *pour tout $x, y \in \mathbb{Q}$ tels-que $x\mathcal{R}y$ on a $xy \neq 0$ ce qui donne que $yx \neq 0$, ceci signifie que $y\mathcal{R}x$, donc $\mathcal{R}$ est symétrique.*

3. *soient $x, y, z \in \mathbb{Q}$ tels-que $xy \neq 0$ et $yz \neq 0$. On a alors $x \neq 0$ et $y \neq 0$ et $z \neq 0$ donc $xz \neq 0$, et ceci signifie que $\mathcal{R}$ est transitive.*

Definition 2.7 ***(Relation d'équivalence)***
Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur un ensemble E, on dit que $\mathcal{R}$ est une relation ***d'équivalence*** *sur E si et seulement si elle est à la fois* ***réflexive, symétrique et transitive****.*

Exemple 2.9 *On considȑe la relation $\mathcal{R}$ définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ x\mathcal{R}y \Leftrightarrow xe^y = ye^x.$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

Solution 2.3 *On montre que $\mathcal{R}$ vérifie les conditions d'une relation d'équivalence.*

1. *$\forall x \in \mathbb{R}$ on a $xe^x = xe^x$. En d'autres termes on a $x\mathcal{R}x$ et donc $\mathcal{R}$ est réflexive.*

2. *$\mathcal{R}$ est symétrique. En effet, soient $x, y \in \mathbb{R}$, tels-que $x\mathcal{R}x$, on a alors*

$$\begin{aligned} x\mathcal{R}y &\Rightarrow xe^y = ye^x, \\ &\Rightarrow ye^x = xe^y, \\ &\Rightarrow y\mathcal{R}x, \end{aligned}$$

3. *$\mathcal{R}$ est transitive car pour tout $x, y, z \in \mathbb{R}$, tels-que $\Big[(x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}z)\Big]$, on a*
$x\mathcal{R}y \Rightarrow xe^y = ye^x$..............(1)
$y\mathcal{R}z \Rightarrow ye^z = ze^y$................(2)
La relation (2) nous donne $y = \dfrac{ze^y}{e^z}$, en utilisant (1)et en remplaçant y par sa valeur on trouve $xe^y = \dfrac{ze^y}{e^z}e^x$ ce qui donne $xe^ye^z = ze^ye^x$. Comme $e^y \neq 0$ on a alors

$$xe^z = ze^x,$$

ce qui implique que $x\mathcal{R}z$.

4. $\mathcal{R}$ est réflexive, symétrique et transitive donc c'est une relation d'équivalence.

Definition 2.8 *Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur un ensemble E.*

1. *La classe d'équivalence d'un élément a dans E est l'ensemble de tous les éléments x dans E qui sont en relation avec a. On note cet ensemble par $\overline{a}$ ou $\dot{a}$, et on écrit*
$$\overline{a} = \dot{a} = \Big\{x \in E, \mid x\mathcal{R}a\Big\}$$
2. *a est un représentant de la clase d'équivalence $\dot{a}$.*
3. *L'ensemble des classes d'équivalences de tous les éléments de E s'appelle **ensemble quotient** de E par la relation d'équivalence $\mathcal{R}$, on le note $E_{/\mathcal{R}}$, et on écit*
$$E_{/\mathcal{R}} = \Big\{\dot{x},\ x \in E\Big\}$$

Definition 2.9 *(**Relation d'ordre**)*

1. *Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur un ensemble E. On dit que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre si et seulement si elle est réflexive, anti-symétrique et transitive.*
2. *Si $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre sur E, on dit que l'ordre est **total** ssi*
$$\forall x, y, \in E,\ \text{on a : } x\mathcal{R}y \text{ ou } y\mathcal{R}x$$
3. *Si l'ordre n'est pas total il est dit **partiel**.*
4. *Soit $\mathcal{R}$ une relation d'ordre sur E et soient $x, y \in E$. On dit que x et y sont comparables si et seulement si on a $\Big(x\mathcal{R}y \vee y\mathcal{R}x\Big)$.*

Exemple 2.10 *La relation $\mathcal{R}$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $(\forall x, y \in \mathbb{R},\ x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x \leq y)$, est une relation d'ordre total sur $\mathbb{R}$. On dit que tous les éléments de $\mathbb{R}$ sont comparables.*

Exemple 2.11 *Soit E un ensemble non vide et $\mathcal{R}$ une relation définie sur E par :*
$$\forall x, y \in E,\ x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x = y.$$
$\mathcal{R}$ est une relation d'ordre sur E.
Si E est un singleton l'ordre est total.
Si E n'est pas un singleton alors l'ordre est partiel.

2.3 Fonctions - Applications

Maintenant, on s'intéresse aux relations qui mettent en correspondance les éléments de deux ensembles : ensemble de départ et ensemble d'arrivé.

2.3.1 Géneralités

Definition 2.10 *On appelle fonction d'un ensemble E vers un ensemble F toute relation de E vers F qui associe à tout élément $x \in E$* ***au plus*** *un $y \in F$ tel-que $x\mathcal{R}y$. Généralement, les fonctions sont notées par $f, g, h, K, T, \ldots,$ et on écrit :*

$$f : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & y = f(x) \end{array} \right.$$

- *y est l'image de x par la fonction f,*
- *x est l'antécédent de y,*
- *E est l'ensemble de départ de f et F est l'ensemble d'arrivé.*

Definition 2.11 *Soit $f : E \longrightarrow F$. On appelle domaine de définition de f, l'ensemble des $x \in E$ tel-que $\exists\, y \in F$ qui verifie $y = f(x)$, cet ensemble est noté D_f et on écrit*

$$D_f = \Big\{ x \in E : \ \exists y \in F \mid y = f(x) \Big\}$$

Exemple 2.12 *Donner le domaine de définition de la fonction suivante :*

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \sqrt{x-1} \end{array} \right.$$

$D_f = \Big\{ x \in \mathbb{R}, \mid x - 1 \geq 0 \Big\}$

$D_f = \Big\{ x \in \mathbb{R}, \mid x \geq 1 \Big\}$

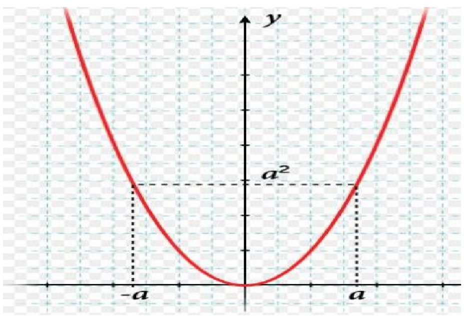
$D_f = \Big[1 \quad +\infty \Big[$

Definition 2.12
1. *Le graphe de la fonction $f : E \longrightarrow F$ est l'ensemble des couples $(x, y) \in E \times F$ où $y = f(x)$ et on écrit*

$$G_f = \Big\{ (x, y) \in E \times F \mid y = f(x) \Big\}$$

2. *La courbe représentative de la fonction f dans un repère $\left(o, \vec{i}, \vec{j}\right)$; et que l'on note généralement (C_f) ; est l'ensemble des points $M\,(x, y)$ où $(x, y) \in G_f$.*

Exemple 2.13 *La courbe de la fonction $x \longmapsto x^2$.*



Definition 2.13 *On appelle application d'un ensemble E dans un ensemble F, toute correspondance f entre les éléments de E et ceux de F qui à chaque $x \in E$ fait correspondre un* ***unique*** *élément $y \in F$ et qui satisfait la relation $y = f(x)$.*

Remarque 2.3 *Une application f definie de E dans F est une fonction dont $D_f = E$.*

Exemple 2.14 *La fonction*

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \dfrac{1}{x} \end{array} \right.$$

c'est une fonction car 0 n'a pas d'image par f, alors que

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \dfrac{1}{x} \end{array} \right.$$

c'est une application car $D_f = \mathbb{R}^*$ qui est l'ensemble de départ.

Definition 2.14 *Soit E un ensemble, l'application*

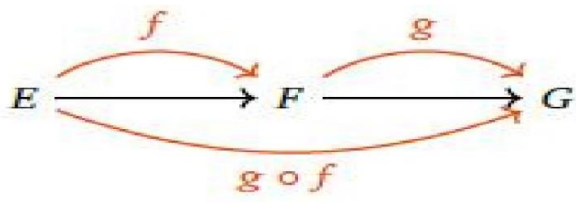
$$Id_E : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & Id_E(x) = x, \end{array} \right.$$

s'appelle application identité.

2.3.2 Composée de deux fonctions

Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications. On appelle la composée de f et g l'application notée gof et définie comme suit :

$$gof : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & (gof)(x) = g[f(x)] \end{array} \right.$$



Exemple 2.15 *Est ce que $(gof) = (fog)$?*
Dans le cas général la réponse est non. On donne l'exemple suivant :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = 5x - 1 \end{array} \right.$$

$$g : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & g(x) = x^2 \end{array} \right.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{rcl} (gof)(x) & = & g[f(x)] \\ & = & (f(x))^2 \\ & = & (5x-1)^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} (fog)(x) & = & f[g(x)] \\ & = & 5g(x)-1 \\ & = & 5x^2-1 \end{array}$$

$\forall x \in \mathbb{R},\ (gof)(x) \neq (fog)(x),$ donc $gof \neq fog.$

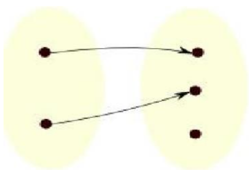
2.3.3 Injection - Surjection - Bijection

Soient E, F deux ensembles et f une application $f : E \to F.$

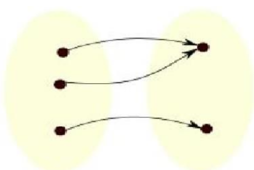
Definition 2.15 *On dit que f est* ***injective*** *ou une* ***une injection*** *si et seulement si pour tout $x, x' \in E$: si $f(x) = f(x')$ alors $x = x'$, et on écrit*

$$f \, injective \Leftrightarrow \left[\forall x, x' \in E : \Big((f(x) = f(x')) \Longrightarrow (x = x') \Big)\right]$$

Cette définition signifie que lorsque f est une application injective il est impossible de trouver deux antécédents distincts qui ont la même image. Autrement dit, pour tout $y \in F$, l'équation $y = f(x)$ admet au plus une solution $x \in E$.



Une application injective



Une application non injective

Exemple 2.16 *Il est très facile de voir que l'application*

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = x^2 \end{array} \right.$$

n'est pas injective. On peut prendre comme contre exemple $x = -1$ et $x' = 1$.
$f(-1) = 1 = f(1)$ alors que $1 \neq -1$.

Definition 2.16 *On dit que f est* ***surjective*** *ou une* ***surjection*** *si et seulement si pour tout $y \in F$, l'équation $y = f(x)$ admet au moins une solution $x \in E$, et on écrit*

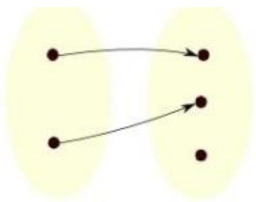
$$f \quad est \ surjective \Leftrightarrow \left[\forall y \in F, \exists\, x \in E \mid y = f(x)\right]$$

Cette définition montre que lorsque f est une application surjective on ne trouve jamais un élément de l'ensemble d'arrivé F qui n'a pas d'antécédent dans E.

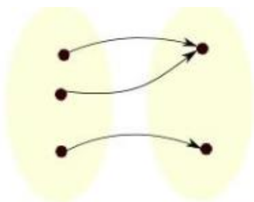
Exemple 2.17 *On peut immédiatement voir que*

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = x^2 \end{array} \right.$$

n'est pas surjective car l'équation $y = x^2$ n'a pas de solution quand $y < 0$. Autrement dit, si $y < 0$ alors y n'a pas d'antécédent x.



Une application non surjective



Une application surjective

Definition 2.17 *L'application f est dite* ***bijective*** *ou une* ***bijection*** *si est seulement si elle est à la fois injective et surjective. Autrement dit,*
f est bijective si est seulemnt si pour tout $y \in F$, l'équation $y = f(x)$ admet une solution unique $x \in E$, et on écrit

$$f \text{ bijective } \Leftrightarrow \Big[\forall y \in F, \exists!\, x \in E \mid y = f(x)\Big]$$

Proposition 2.2 *Soient E, F deux ensembles. Si l'application $f : E \to F$ est bijective alors f admet une application* ***réciproque*** *notée f^{-1} qui est aussi bijective et elle est définie par*

$$f^{-1} : \left| \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & E \\ y & \longmapsto & x = f^{-1}(y). \end{array} \right.$$

Exemple 2.18 *L'application f définie par*

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & f(x) = e^x. \end{array} \right.$$

est bijective, donc elle admet une fonction rérciproque f^{-1} qui est la suivante

$$f^{-1} : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & x = f^{-1}(y) = \ln(y), \end{array} \right.$$

et on écrit

$$f^{-1} : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f^{-1}(x) = \ln(x), \end{array} \right.$$

Remarque 2.4 *Si $f : E \to F$ est bijective alors $f o f^{-1} = I_F$ et $f^{-1} o f = I_E$.*

Exercise 2.3 *On considère la fonction f définie par*

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \Big[1 \ +\infty\Big[& \longrightarrow & \Big[0 \ +\infty\Big[\\ x & \longmapsto & f(x) = x^2 - 1, \end{array} \right.$$

f est elle bijective ? Si oui donner sa fonction réciproque f^{-1}.

Solution 2.4 *1. on vérifie si f est bijective ou non.*

(a) injectivité :
Soient $x, x' \in \Big[1 \ +\infty\Big[$ tels-que $f(x) = f(x')$ a-t-on $x = x'$?

$$\begin{aligned} f(x) = f(x') &\Rightarrow x^2 - 1 = x'^2 - 1, \\ &\Rightarrow x^2 - x'^2 = 0, \\ &\Rightarrow (x - x')(x + x') = 0, \\ &\Rightarrow (x - x') = 0 \ \textit{car}\, x + x' > 0, \\ &\Rightarrow x = x', \end{aligned}$$

donc f est injective.

(b) Surjectivité :
Soit $y \in \Big[0 \ +\infty\Big[$, existe-il $x \in \Big[1 \ +\infty\Big[$ tel-que $y = f(x)$?

$$\begin{aligned} y = f(x) &\Rightarrow y = x^2 - 1, \\ &\Rightarrow x^2 = y + 1, \ \textit{avec}\, y + 1 > 0 \\ &\Rightarrow |x| = \sqrt{y+1}, \ \Big(|x| = x \ \textit{car}\, x > 0\Big), \\ &\Rightarrow x = \sqrt{y+1} \in \Big[1 \ +\infty\Big[, \end{aligned}$$

donc f est surjective.

(c) f est injective et surjective donc elle est bijective.

2. Comme f est bijective donc elle admet une fonction réciproque f^{-1} définie par

$$f^{-1} : \left| \begin{array}{ccc} \Big[0 \ +\infty\Big[& \longrightarrow & \Big[1 \ +\infty\Big[\\ y & \longmapsto & f^{-1}(y) = x = \sqrt{y+1}, \end{array} \right.$$

et on ecrit :

$$f^{-1} : \left| \begin{array}{ccc} \Big[0 \ +\infty\Big[& \longrightarrow & \Big[1 \ +\infty\Big[\\ x & \longmapsto & f^{-1}(x) = \sqrt{x+1}, \end{array} \right.$$

2.3.4 Image directe - Image réciproque d'un ensemble

Definition 2.18 *Soient E, F, A, B des ensembles tels-que $A \subset E$ et $B \subset F$, et soit f une application de E dans F.*

- *On appelle image directe de A par f, l'ensemble noté $f(A)$ définie par* $f(A) = \Big\{f(x),\ x \in A\Big\}$ *ou bien* $f(A) = \Big\{y \in F \mid y = f(x) \wedge x \in A\Big\}$.
- *On appelle image réciproque de B, l'ensemble noté $f^{-1}(B)$ et qui est définie par* $f^{-1}(B) = \Big\{x \in E,\ f(x) \in B\Big\}$ *ou bien* $f^{-1}(B) = \Big\{x \in E \mid y = f(x) \wedge y \in B\Big\}$.

Remarque 2.5 *Il faut signaler ici que $f^{-1}(B)$ c'est juste une notation et f^{-1} ne désigne pas la fonction réciproque de f et on exige pas à f d'être bijective pour pouvoir déterminer $f^{-1}(B)$, on insiste sur le fait que f c'est juste une application.*

2.3.5 Propriétés

Soit $f:\ E\ \to\ F$.
Les propriétés suivantes sont très utiles en exercices surtout quand on cherche l'image directe ou réciproque d'un ensemble qui s'écrit comme intersections ou unions de deux ou plusieurs ensembles.
Soient $A, B \subset E$, et $A', B' \subset F$

- $f(A), f(B) \subset F$; $f^{-1}(A'), f^{-1}(B') \subset E$.
- $f(\emptyset) = \emptyset$; $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.
- Si $A \subset B$ alors $f(A) \subset f(B)$.
- Si $A' \subset B'$ alors $f^{-1}(A') \subset f^{-1}(B')$.
- $f\left(A \cup B\right) = f\left(A\right) \cup f\left(B\right)$; $f^{-1}\left(A' \cup B'\right) = f^{-1}\left(A'\right) \cup f^{-1}\left(B'\right)$.
- $f\left(A \cap B\right) \subset f\left(A\right) \cap f\left(B\right)$; $f^{-1}\left(A' \cap B'\right) = f^{-1}\left(A'\right) \cap f^{-1}\left(B'\right)$.

Exemple 2.19 *On considère la fonction*

$$f : \left| \begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = x^2 + 1, \end{array} \right.$$

$A = \Big\{0,\, 3,\, 6,\, 8\Big\}$, $B = \Big\{0\Big\}$.
$f(A) = \Big\{f(x),\ x \in A\Big\} = \Big\{f(0),\ f(3),\ f(6),\ f(8)\Big\} = \Big\{0,\ 10,\ 37,\ 65\Big\}$.
$f^{-1}(B) = \Big\{x \in \mathbb{R},\ \mid y = x^2 + 1 \ \ et\ \ y \in B\Big\}$.
On résout l'équation $y = x^2 + 1$ avec $y = 0$ puisque B ne contient qu'un seul élément qui est 0. *Mais, l'équation $x^2 + 1 = 0$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}$, donc $f^{-1}(B) = \emptyset$.*

2.3.6 Fonction caractéristique

Definition 2.19 *Soit E un ensemble et $A \subset E$, on définit la fonction* ***caractéristique*** *ou la fonction* ***indicatrice*** *de A par*

$$\chi_A : \left| \begin{array}{lcl} A & \longrightarrow & \{0,\, 1\} \\ x & \longmapsto & \chi_A(x) = \begin{cases} 1 \ si\ x \in A, \\ 0 \ si\ x \notin A. \end{cases} \end{array} \right.$$

2.4 Exercices Corrigés

Exercise 2.4 *On considère la relation $\mathcal{R}$ définie sur $\mathbb{R}$ par*

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \Big(x^2 - y^2 = x - y\Big)$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$.
Déterminer la classe d'équivalence d'un élément a de $\mathbb{R}$.

solution

1. $\mathcal{R}$ est réflexive car : $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 - x^2 = 0 = x - x$, ce qui signifie $x\mathcal{R}x$.

2. $\mathcal{R}$ est symétrique. En effet, soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels-que $x\mathcal{R}y$, il en résulte que

$$\begin{aligned} x\mathcal{R}y &\Rightarrow\ x^2 - y^2 = x - y, \\ &\Rightarrow\ y^2 - x^2 = y - x, \\ &\Rightarrow\ y\mathcal{R}x. \end{aligned}$$

3. $\mathcal{R}$ est transitive. En effet, soient $x, y, z, \in \mathbb{R},$ tels-que $\Bigg(\ (x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}z)\ \Bigg)$.
   $x\mathcal{R}y \Rightarrow x^2 - y^2 = x - y$.................(1)
   $y\mathcal{R}z \Rightarrow y^2 - z^2 = y - z$...............(2)
   La somme de (1) et (2) donne $x^2 - z^2 = x - z$, ce qui signifie $x\mathcal{R}z$.
4. $\mathcal{R}$ est une relation réflexive, symétrique et transitive donc c'est une relation d'équivalence.
5. Soit $a \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \Big\{x \in \mathbb{R},\ \mid x\mathcal{R}a\Big\}, \\ &= \Big\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - a^2 = x - a\Big\}, \\ &= \Big\{x \in \mathbb{R} \mid\ (x-a)(x+a) - (x-a) = 0\Big\}, \\ &= \Big\{x \in \mathbb{R} \mid\ (x-a)(x+a-1) = 0\Big\}, \\ &= \Big\{x \in \mathbb{R} \mid x = a \text{ ou } x = 1 - a\Big\}, \\ &= \Big\{a, 1-a\Big\}. \end{aligned}$$

Remarque 2.6 *On distingue deux cas*
Si $a = \dfrac{1}{2}$ *on a :* $\dot{a} = \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$,
Si $a \neq \dfrac{1}{2}$ *on a :* $\dot{a} = \Big\{a, 1-a\Big\}$.

Exercise 2.5 *On considère la relation $\mathcal{R}$ définie sur $\mathbb{R}$ par*

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \left(x^3 - y^3 = x - y\right)$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$.
Déterminer la classe d'équivalence d'un élément a de $\mathbb{R}$.

solution
(**Indications**) Suivre les même démarches de l'exercice 2.4 pour montrer qu' il s'agit d'une relation d'équivalence.
Pour la classe déquivalence d'un élément a, il faut utiliser la factorisation de $x^3 - a^3$.

Exercise 2.6 *Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire définie sur $\mathbb{Z}$ par*

$$\forall x, y \in \mathbb{Z},\ x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x - y \textit{ multiple de } 2.$$

1) *Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.*
2) *Déterminer* $\dot{0}, \dot{1}, \dot{2}, \dot{3}$.
3) *Déterminer* $\mathbb{Z}_{/\mathcal{R}}$.

solution
1) On montre qu'il s'agit bien d'une relation d'équivalence.

• $\mathcal{R}$ est réflexive. En effet, soit $x \in \mathbb{Z}$, on a $x - x = 0 = 2 \times 0 = 2k$, donc $x\mathcal{R}x$

• $\mathcal{R}$ est symétrique. Soient $x, y \in \mathbb{Z}$ tels-que $\exists k \in \mathbb{Z},$ et $x - y = 2k$.
Par suite, $y - x = -2k = 2k'$, avec $k' = -k \in \mathbb{Z}$. Donc $y\mathcal{R}x$.

• On peut facilement voir que cette relation est transitive.
En effet, soient $x, y, z \in \mathbb{R},$ tels-que $\Bigg((x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}z) \Bigg)$, on a alors
$x\mathcal{R}y \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \mid x - y = 2k$.........(1)
$y\mathcal{R}z \Rightarrow \exists k' \in \mathbb{Z} \mid y - z = 2k'$.........(2)
(1) + (2) nous donne $x - z = 2\,(k - k') = 2k''$ avec $k'' = k - k' \in \mathbb{Z}$,
Ce qui signifie que $x\mathcal{R}z$.
2) On donne les classes d'équivalences.

$$\begin{aligned}
\dot{0} &= \Big\{x \in \mathbb{Z},\ \mid x\mathcal{R}0\Big\}, \\
&= \Big\{x \in \mathbb{Z},\ \mid \exists k \in \mathbb{Z},\ \mid x - 0 = 2k\Big\}, \\
&= \Big\{2k,\ k \in \mathbb{Z}\Big\}, \\
&= \Big\{\dots, -8, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, \dots\Big\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{1} &= \Big\{x \in \mathbb{Z},\ \mid x\mathcal{R}1\Big\}, \\
&= \Big\{x \in \mathbb{Z},\ \mid \exists k \in \mathbb{Z},\ \mid x - 1 = 2k\Big\}, \\
&= \Big\{x \in \mathbb{Z},\ \mid \exists k \in \mathbb{Z},\ \mid x = 2k + 1\Big\}, \\
&= \Big\{2k + 1,\ k \in \mathbb{Z}\Big\}, \\
&= \Big\{\dots, -9, -7, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7, 9, \dots\Big\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{2} &= \Big\{x \in \mathbb{Z},\ \mid x\mathcal{R}2\Big\}, \\
&= \Big\{x \in \mathbb{Z},\ \mid \exists k \in \mathbb{Z},\ \mid x - 2 = 2k\Big\}, \\
&= \Big\{x \in \mathbb{Z},\ \mid \exists k \in \mathbb{Z},\ \mid x = 2k + 2\Big\}, \\
&= \Big\{2k + 2,\ k \in \mathbb{Z}\Big\}, \\
&= \Big\{2\left(k + 1\right),\ k \in \mathbb{Z}\Big\}, \\
&= \Big\{2k',\ k' \in \mathbb{Z}\Big\}, \\
&= \Big\{\dots, -8, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, \dots\Big\}, \\
&= \dot{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{3} &= \Big\{x \in \mathbb{Z},\ \mid x\mathcal{R}3\Big\},\\
&= \Big\{x \in \mathbb{Z},\ \mid \exists k \in \mathbb{Z},\ \mid x - 3 = 2k\Big\},\\
&= \Big\{x \in \mathbb{Z},\ \mid \exists k \in \mathbb{Z},\ \mid x = 2k + 3\Big\},\\
&= \Big\{2k + 3,\ k \in \mathbb{Z}\Big\},\\
&= \Big\{2\,(k + 1) + 1,\ k \in \mathbb{Z}\Big\},\\
&= \Big\{2k' + 1,\ k' \in \mathbb{Z}\Big\},\\
&= \Big\{\ \ldots, -9, -7, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7, 9, \ldots\ \Big\},\\
&= \dot{1}
\end{aligned}$$

3) D'après la question 2) l'ensemble quotient est

$$\mathbb{Z}_{/\mathcal{R}} = \Big\{\dot{0}, \dot{1}\Big\}.$$

Exercise 2.7 *Soit $\mathcal{R}$ la relation définie sur $\mathbb{R}$ par*

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

Exercise 2.8 *$\mathcal{R}$ est une relation définie sur $\mathbb{N}$ par :*

$$\forall x, y \in \mathbb{N},\ x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} \mid y = nx.$$

1. *Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre.*
2. *L'ordre est il total ?*

solution

- 1) On montre que $\mathcal{R}$ est réflexive, anti-symétrique et transitive.

- Il est clair que $\mathcal{R}$ est réflexive.
  En effet, pour tout $x \in \mathbb{N}$ on peut toujours écrire $x = 1.x$, donc $n = 1$.

- $\mathcal{R}$ est anti-symétrique car pour tout $x, y \in \mathbb{N}$, tels-que $\Big((x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}x)\Big), ona$

$$(x\mathcal{R}y) \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} \mid y = nx,$$

$$\wedge$$

$$(y\mathcal{R}x) \Rightarrow \exists n' \in \mathbb{N} \mid x = n'y,$$

donc $y = n.n'.y$, ceci implique que $n.n' = 1$, et comme n et n' sont des entiers positifs on a obligatoirement $n = n' = 1$, et par suite $x = y$.

– $\mathcal{R}$ est transitive. En effet, soient $x, y, z \in \mathbb{N},\ \mid \Big((x\mathcal{R}y) \wedge y\,(\mathcal{R}z) \Big)$, on a alors, $\exists n, \exists n' \in \mathbb{N} \mid x = ny \wedge y = n'z$. On obtient $x = nn'z = mz$ avec $m = nn' \in \mathbb{N}$. Il en résulte que $x\mathcal{R}z$.

– $\mathcal{R}$ est une relation réflexive, anti-symétrique et transitive, donc c'est une relation d'ordre.
– 2) L'ordre est partiel car $\exists x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N},\ \mid x \neq ny \wedge y \neq nx,\ n \in \mathbb{N}$.
On prend par exemple $x = 3, y = 7$, on ne peut pas trouver $n \in \mathbb{N}$ tels-que $3 = 7n$ ou $7 = 3n$.

Exercise 2.9 *Soient F un ensemble et $\mathcal{R}$ est une relation définie sur $E = \mathcal{P}(F)$ par :*

$$\forall A, B \in E,\ A\mathcal{R}B \Leftrightarrow A \subset B.$$

1) *Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre.*
2) *L'ordre est il total ?*

solution
1) On montre qu'il s'agit bien d'une relation d'ordre.
• $\mathcal{R}$ est réflexive car pour tout $A \in E$ on a $A = A$ et donc $A \subset A$.

• Soient $A, B \in E$ tels-que $A\mathcal{R}B$ et $B\mathcal{R}A$. On a alors $A \subset B$ et $B \subset A$. Donc $A = B$, et par suite $\mathcal{R}$ est anti-symétrique.

• Soient $A, B, C \in E$ tels-que $\Big(A\mathcal{R}B \wedge B\mathcal{R}C\Big)$. Donc on a $A \subset B$ et $B \subset C$, en d'autres termes $A \subset B \subset C$, donc $A \subset C$, ce qui signifie que la relation $\mathcal{R}$ est transitive.

• $\mathcal{R}$ est réflexive, anti-symétrique et transitive donc c'est une relation d'ordre.

2) On vérifie si l'ordre est total ou non.
• Si $F = \emptyset$ alors $E = \emptyset$ et on a $\forall A, B \in E,\ A = B = \emptyset$. Donc l'ordre est total.

• Si $F = \{a\}$ alors $E = \Big\{\emptyset, a\Big\}$.
Pour tout $A, B \in E$, on a $\Big((A = \{a\}) \vee (A = \emptyset) \Big) \wedge \Big((B = \{a\}) \vee (B = \emptyset) \Big)$.
Donc $\forall A, B \in E$ on a $\Big((A \subset B) \vee (B \subset A) \Big)$ et l'ordre est total.

• Si F contient au moins deux éléments distincts alors l'ordre est partiel.

Exercise 2.10 *$\mathcal{R}$ est une relation définie sur $E = \mathbb{R}^2$ par :*

$$\forall (x,y), (x',y') \in E,\ (x,y)\,\mathcal{R}\,(x',y') \Leftrightarrow \Big((x \leq x') \wedge (y \leq y') \Big).$$

1) *Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre.*
2) *L'ordre est il total ?*

solution
1) On a bien une relation d'ordre.
• Pour tout $(x,y) \in E$ on a $\Big((x \leq x) \wedge (y \leq y) \Big)$, donc $(x,y)\,\mathcal{R}\,(x,y)$. La relation est réflexive.

• Pour tout $(x,y), (x',y') \in E$ tels-que $\Big((x,y)\,\mathcal{R}\,(x',y') \bigwedge (x',y')\,\mathcal{R}\,(x,y) \Big)$ on a : $\bigg(\Big((x \leq x') \wedge (y \leq y') \Big) \bigwedge \Big((x' \leq x) \wedge (y' \leq y) \Big) \bigg)$, et il en résulte

$$\begin{cases} \Big((x \leq x') \wedge (x' \leq x) \Big) \Rightarrow x = x' \\ \Big((y \leq y') \wedge (y' \leq y) \Big) \Rightarrow y = y' \\ \Big((x = x') \wedge (y = y') \Big) \Rightarrow (x,y) = (x',y') \end{cases}$$

donc $\mathcal{R}$ est antisymétrique.

• On peut facilement voir que cette relation est transitive. En effet, soient $(x,y), (x',y'), (z,z') \in E$ tels-que $\Big((x,y)\,\mathcal{R}\,(x',y') \bigwedge (x',y')\,\mathcal{R}\,(z,z') \Big)$ on a alors $\bigg(\Big((x \leq x') \wedge (y \leq y') \Big) \bigwedge \Big((x' \leq z) \wedge (y' \leq z') \Big) \bigg)$ et il en résulte

$$\begin{cases} \Big((x \leq x') \wedge (x' \leq z) \Big) \Rightarrow x \leq x' \leq z \\ \Big((y \leq y') \wedge (y' \leq z') \Big) \Rightarrow y \leq y' \leq z' \end{cases}$$

donc $(x,y)\,\mathcal{R}\,(z,z')$.

2) L'ordre n'est pas total. Il suffit de prendre comme contre exemple deux éléments de $\mathbb{R}^2$ qui ne sont pas comparables, par exemple $(2,3), (0,2)$. La propositions suivante $\Big((2 \leq 0) \wedge (3 \leq 2) \Big)$ est fausse. Donc l'ordre est partiel.

Exercise 2.11 *$\mathcal{R}$ est une relation définie sur $\mathbb{N}$ par :*

$$\forall x, y \in \mathbb{N},\ x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \exists p, q \in \mathbb{N},\ p, q \geq 1 \mid y = px^q.$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre.

Exercise 2.12 *On considère la fonction*

$$f : \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{R}-\{2\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \dfrac{x+1}{x-2} \end{array} \right.$$

1) *f est elle injective ?*
2) *est elle surjective ?*
3) *f est elle bijective ? Si oui déterminer son application inverse f^{-1}.*
4) *Si f n'est pas bijective faites les modifications convenables sur les ensembles donnés pour qu'elle soit bijective et donner f^{-1}.*

solution

$$f : \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{R}-\{2\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \dfrac{x+1}{x-2} \end{array} \right.$$

1) Injectivité :
Soient $x, x' \in \mathbb{R}-\{2\} \mid f(x) = f(x')$,

$$\begin{aligned} f(x) = f(x') &\Rightarrow \frac{x+1}{x-2} = \frac{x'+1}{x'-2}, \\ &\Rightarrow (x+1)(x'-2) = (x'+1)(x-2), \\ &\Rightarrow xx' - 2x + x' - 2 = xx' - 2x' + x - 2, \\ &\Rightarrow -3(x-x') = 0, \\ &\Rightarrow (x-x') = 0, \\ &\Rightarrow x = x', \end{aligned}$$

donc f est injective.
2) Surjectivité :
Soit $y \in \mathbb{R}$. Notre but est de voir si on peut trouver $x \in \mathbb{R}-\{2\}$ qui vérifie $y = f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$.

$$\begin{aligned} y = \frac{x+1}{x-2} &\Rightarrow y(x-2) = (x+1), \\ &\Rightarrow yx - 2y = x + 1, \\ &\Rightarrow yx - x = 1 + 2y, \\ &\Rightarrow x(y-1) = 1 + 2y, \end{aligned}$$

on discute suivant les valeurs de y l'existence des solutions pour l'équation $x(y-1) = 1+2y$.
• Si $y = 1$ on a $x.0 = 1$, autrement dit : $y = 1$ n'a pas d'antécédent x.
Ce ci est suffisant pour dire que $f : \mathbb{R}-\{2\} \longrightarrow \mathbb{R}$ n'est pas surjective.

• Maintenant, Si $y \neq 1$, l'équation $x(y-1) = 1+2y$ admet une solution unique $x = \dfrac{2y+1}{y-1}$
et dans ce cas $f : \mathbb{R}-\{2\} \longrightarrow \mathbb{R}-\{1\}$ est surjective.

Il faut remarquer que dans ce cas $x \neq 2$, car si $x = 2$ on aura $2y + 1 = 2y - 2$ ce qui donne $1 = -2$.

3) $f : \mathbb{R} - \{2\} \longrightarrow \mathbb{R}$ n'est pas bijective car elle n'est pas surjective. Dans ce cas f n'admet pas de fonction réceproque.
Cependant, $f : \mathbb{R} - \{2\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{1\}$, est surjective et injective donc elle est bijective et par suite elle admet une fonction réceproque f^{-1}.
4)

$$f^{-1} : \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{R} - \{1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} - \{2\} \\ y & \longmapsto & f^{-1}(y) = \dfrac{2y+1}{y-1}, \end{array} \right.$$

et on écrit :

$$f^{-1} : \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{R} - \{1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} - \{2\} \\ x & \longmapsto & f^{-1}(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}. \end{array} \right.$$

Exercise 2.13 *Les mêmes questions précédentes pour la fonction*

$$f : \left| \begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \sqrt{e^x + 1} - 2, \end{array} \right.$$

solution

1) Il est claire que f est injective. En effet, soient $x, x' \in \mathbb{R} \mid f(x) = f(x')$, on a alors

$$\begin{aligned} f(x) = f(x') \ &\Rightarrow \ \sqrt{e^x + 1} - 2 = \sqrt{e^{x'} + 1} - 2, \\ &\Rightarrow \ \sqrt{e^x + 1} = \sqrt{e^{x'} + 1}, \\ &\Rightarrow \ e^x = e^{x'}, \\ &\Rightarrow \ x = x'. \end{aligned}$$

2) Soit $y \in \mathbb{R}$. On étudie l'existence des solutions de l'équation $y = f(x)$.

On a : $y = \sqrt{e^x + 1} - 2 \ \Rightarrow \ y + 2 = \sqrt{e^x + 1}$,

- Si $y + 2 \leq 0$, on a $\sqrt{e^x + 1} \leq 0$, ce qui est impossible et donc l'équation $y = f(x)$ n'admet pas de solution quand $y \in \left] -\infty \quad -2 \right]$. Autrement dit $y \in \left] -\infty \quad -2 \right]$ n'a pas d'antécédent x. On en déduit que f n'est pas surjective.
- Si $y + 2 > 0$, on a $(y + 2)^2 = e^x + 1$, et il en résulte que $(y + 2)^2 - 1 = e^x$, et là aussi on a deux cas à discuter :

  – quand $(y + 2)^2 - 1 \leq 0$ avec $y \in \left] -2 \quad +\infty \right[$, léquation $(y + 2)^2 - 1 = e^x$ n'a pas de solutions. La résolution de l'inéquation $(y + 2)^2 - 1 \leq 0$ donne $y \in [-3 \quad -1]$. Comme $y \in \left] -2 \quad +\infty \right[$, l'intersection des deux ensembles donne $y \in]-2 \quad -1]$. Il vient que pour $y \in]-2 \quad -1]$, l'équation $(y+2)^2 - 1 = e^x$, n'a pas de solution et donc f n'est pas surjective.

– Si $(y+2)^2 - 1 > 0$ avec $y \in \Big] -2 \quad +\infty\Big[$, c.a.d., $y \in \Big] -1 \quad +\infty\Big[$, dans ce cas l'équation $(y+2)^2 - 1 = e^x$ admet une solution $x = \ln\Big[(y+2)^2 - 1\Big]$ et on en déduit que f est surjective quand $y \in \Big] -1 \quad +\infty\Big[$.

3) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ n'est pas bijective car elle n'est pas surjective.

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \Big] -1 \quad +\infty\Big[$ est bijective car elle est surjective et injective

4) Quand f est bijective elle admet une fonction récéproque f^{-1} qui est définie comme suit,

$$f^{-1} : \left| \begin{array}{ccc} \Big] -1 \quad +\infty\Big[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & f^{-1}(y) = \ln\Big[(y+2)^2 - 1\Big], \end{array} \right.$$

et on écrit $f^{-1} : \left| \begin{array}{ccc} \Big] -1 \quad +\infty\Big[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f^{-1}(x) = \ln\Big[(x+2)^2 - 1\Big]. \end{array} \right.$

Exercise 2.14 *On considère la fonction*

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \sqrt{x^2+2}. \end{array} \right.$$

1) *Donner les images directes par f des ensembles $A_1 = \Big\{0,\ 2\Big\}$, $A_2 = [0\ 2]$, $A_3 = \Big[-1\ 1\Big]$.*

2) *Donner les images récéproques des ensembles $B_1 = \Big\{0,\ 2,\ \frac{1}{2},\ \sqrt{2}\Big\}$, $B_2 = \Big[1\ 3\Big]$, $B_3 = \Big\{-4\Big\}$.*

solution

- $f(A_1) = \Big\{f(x),\ x \in A_1\Big\} = \Big\{f(0),\ f(2)\Big\} = \Big\{\sqrt{2},\ \sqrt{6}\Big\}$
- $f(A_2) = \Big\{f(x),\ x \in A_2\Big\}$

On a f est continue et croissante sur $\mathbb{R}^+$, donc pour $x \in A_2$, c.a.d., $0 \le x \le 2$, on a $f(0) \le f(x) \le f(2)$. D'ou $f(A_2) = \Big[\sqrt{2}\ \sqrt{6}\Big]$.

- $f(A_3) = \Big\{f(x),\ x \in A_3\Big\} = \Big\{f(x),\ x \in [-1\ \ 1]\Big\}$.

On distingue deux cas $x \in [-1\ \ 0]$ et $x \in [0\ \ 1]$.
Comme f est continue et décroissante sur $\mathbb{R}^-$, pour $-1 \le x \le 0$, on a $f(0) \le f(x) \le f(-1)$, c.a.d., $f([-1\ \ 0]) = \Big[\sqrt{2}\ \ \sqrt{3}\Big]$.
f est est continue et croissante sur $\mathbb{R}^+$, donc pour $x \in [0\ \ 1]$, c.a.d., $0 \le x \le 1$, on a $f(0) \le f(x) \le f(1)$. D'ou $f([0\ 1]) = \Big[\sqrt{2}\ \ \sqrt{3}\Big]$. En conclusion $f(A_3) = \Big[\sqrt{2}\ \ \sqrt{3}\Big]$.

- $f^{-1}(B_1) = \Big\{x \in \mathbb{R},\ f(x) \in B_1\Big\} = \Big\{x \in \mathbb{R},\ f(x) \in \Big\{0,\ 2,\ \tfrac{1}{2},\ \sqrt{2}\Big\}\Big\}.$

$f(x) \in \Big\{0,\ 2,\ \tfrac{1}{2},\ \sqrt{2}\Big\} \Rightarrow \Big((f(x) = 0) \vee (f(x) = 2) \vee \Big(f(x) = \dfrac{1}{2}\Big) \vee \Big(f(x) = \sqrt{2}\Big) \Big).$

$$\begin{aligned} f(x) = 0 \ &\Rightarrow\ \sqrt{x^2+2} = 0,\\ &\Rightarrow\ x^2+2 = 0,\\ &\Rightarrow\ x^2 = -2, \end{aligned}$$

l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(x) = 0 \ &\Rightarrow\ \sqrt{x^2+2} = 2,\\ &\Rightarrow\ x^2+2 = 4,\\ &\Rightarrow\ x^2 = 2,\\ &\Rightarrow\ \Big(x = \sqrt{2}\Big) \vee \Big(x = -\sqrt{2}\Big). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) = 0 \ &\Rightarrow\ \sqrt{x^2+2} = \tfrac{1}{2},\\ &\Rightarrow\ x^2+2 = \tfrac{1}{4},\\ &\Rightarrow\ x^2 = -\tfrac{7}{4}, \end{aligned}$$

l'équation $f(x) = \dfrac{1}{2}$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(x) = 0 \ &\Rightarrow\ \sqrt{x^2+2} = \sqrt{2},\\ &\Rightarrow\ x^2+2 = 2,\\ &\Rightarrow\ x^2 = 0,\\ &\Rightarrow\ x = 0. \end{aligned}$$

En conclusion $f^{-1}(B_1) = \Big\{\sqrt{2},\ -\sqrt{2},\ 0\Big\}$

- $f^{-1}(B_2) = \Big\{x \in \mathbb{R},\ f(x) \in B_2\Big\} = \Big\{x \in \mathbb{R},\ f(x) \in \Big[1\ 3\Big]\Big\}.$

$$\begin{aligned} f(x) \in \Big[0\ 3\Big] \ &\Rightarrow\ \sqrt{x^2+2} \in \Big[1\ 3\Big],\\ &\Rightarrow\ 1 \leq \sqrt{x^2+2} \leq 3,\\ &\Rightarrow\ 1 \leq x^2+2 \leq 9,\\ &\Rightarrow\ -1 \leq x^2 \leq 7, \end{aligned}$$

On considère les deux cas $-1 \leq x^2 \leq 0$ et $0 \leq x^2 \leq 7$.

Dans le cas où $-1 \leq x^2 \leq 0$ on a pas de solutions.

Dans le cas où $0 \leq x^2 \leq 7$ on a

$$\begin{aligned} 0 \leq x^2 \leq 7 \ &\Rightarrow\ 0 \leq |x| \leq \sqrt{7},\\ &\Rightarrow\ \Big(0 \leq x \leq \sqrt{7}\Big) \vee \Big(0 \leq -x \leq \sqrt{7}\Big),\\ &\Rightarrow\ \Big(0 \leq x \leq \sqrt{7}\Big) \vee \Big(-\sqrt{7} \leq x \leq 0\Big),\\ &\Rightarrow\ \Big(x \in \Big[0\ \ \sqrt{7}\Big]\Big) \vee \Big(x \in \Big[-\sqrt{7}\ \ 0\Big]\Big),\\ &\Rightarrow\ x \in \Big[0\ \ \sqrt{7}\Big] \cup \Big[-\sqrt{7}\ \ 0\Big], \end{aligned}$$

$f^{-1}(B_2) = \Big[0 \;\; \sqrt{7}\Big] \cup \Big[-\sqrt{7} \;\; 0\Big].$

- $f^{-1}(B_3) = \Big\{x \in \mathbb{R},\ f(x) \in B_3\Big\} = \Big\{x \in \mathbb{R},\ f(x) \in \big\{-4\big\}\Big\}.$

$$\begin{aligned} f(x) \in \big\{-4\big\} \quad &\Rightarrow \quad f(x) = -4, \\ &\Rightarrow \quad \sqrt{x^2+2} = -4, \end{aligned}$$

l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}$, donc $f^{-1}(B_3) = \emptyset$.

Chapitre 3

Fonctions réelles à une variable réelle

Ce chapitre sert à renforcer les notions déjà acquis par l'étudiant dans son enseignement secondaire. On rappellera les notions connues pour rafraichir la mémoire de l'étudiant et on ajoutera les outils nécessaires qui vont lui permettre d'aborder les nouvelles notions dont il aura besoin en analyse dans son parcours universitaire. Dans le chapitre précédent, nous avons évoqué le sujet des fonctions et applications dans un contexte général ou f est une fonction d'un ensemble donné E vers autre ensemble F. Dans ce chapitre l'ensemble E sera $\mathbb{R}$ ou une partie de $\mathbb{R}$ d'ou le nom de fonctions à une variable réelle. L'ensemble F lui aussi sera $\mathbb{R}$ ou une partie de $\mathbb{R}$ ce qui explique la nomination de fonctions à valeurs réelles. Autrement dit, ce chapitre est consacré aux fonctions dont la variable est réelle et les valeurs de ces fonctions sont aussi réelles.

3.1 Généralités

Definition 3.1 *On appelle fonction réelle d'une variable réelle toute fonction*

$$f : \left| \begin{array}{rcl} \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \right.$$

Dans tout ce qui suit on considère la fonction f de la Définition 3.1

Definition 3.2 – *le domaine de définition de f est $D_f = \Big\{x \in \mathbb{R} \mid \exists y \in \mathbb{R},\ y = f(x)\Big\}$.*

– *Le graphe de f est une partie de $\mathbb{R}^2$ notée G_f et est définie par $G_f = \Big\{\,(x,y)\,,\ \mid x \in D_f \ \text{ et } \ (y = f(x))\,\Big\}$.*

– *La courbe représentative de f qu'on note souvent (C_f) ou (Γ) est l'ensemble des points $M\,(x,y)$ avec $(x,y) \in G_f$.*

Definition 3.3 – *On dit que f est paire si $\forall x \in \mathcal{D},\ (-x \in \mathcal{D}) \wedge (f(-x) = f(x))$.*

– *La courbe représentative d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.*

- *On dit que f est impaire si* $\forall x \in \mathcal{D},\ (-x \in \mathcal{D}) \wedge (f(-x) = -f(x))$.

- *Etudier la parité d'une fonction c'est voir si elle paire ou impaire ou ni l'une ni l'autre.*

- *La courbe représentative d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine du repère.*

- *On dit que f est périodique et que p est sa période si p est le plus petit réel positif qui vérifie* $\forall x \in \mathcal{D},\ \Big((x+p) \in \mathcal{D}\Big) \wedge \Big(f(x+p) = f(x)\Big)$.

Exemple 3.1 – *La fonction $x \longmapsto x^4$ est une fonction paire car*
$\forall x \in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R} \wedge f(-x) = (-x)^4 = f(x)$.

- *La fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est une fonction impaire car*
$\forall x \in \mathbb{R}^*, -x \in \mathbb{R}^* \wedge f(-x) = \dfrac{1}{-x} = -\dfrac{1}{x} = -f(x)$.

- *La fonction $x \longmapsto \cos(x)$ est périodique de période 2π car*
$\forall x \in \mathbb{R}, \Big((x+2\pi) \in \mathbb{R}\Big) \wedge f(x+2\pi) = \cos(x+2\pi) = \cos(x) = f(x)$.

Remarque 3.1 *Avant d'étudier la parité d'une fonction il faut toujours commencer par s'assurer que son domaine de définition est symétrique par rapport à* 0.

Exemple 3.2 *On considère la fonction*

$$f : \left| \begin{array}{lll} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{|x|} \end{array} \right.$$

$D_f =]-1\ \ 0[\cup]0\ \ +\infty[$

On ne peut pas discuter la parité de cette fonction car son domaine de définition n'est pas symétrique par rapport à zéro.

Definition 3.4 – *On dit que f est majorée sur $\mathcal{D}$ si et seulement si*

$$\exists\, M \in \mathbb{R} \text{ tel-que } \forall x \in \mathcal{D},\ \ f(x) \leq M$$

- *On dit que f est minorée sur $\mathcal{D}$ si et seulement si*

$$\exists\, m \in \mathbb{R} \text{ tel-que } \forall x \in \mathcal{D},\ \ f(x) \geq m$$

- *On dit que f est bornée sur $\mathcal{D}$ si et seulement si elle est à la fois majorée et minorée*

$$\exists\, M \in \mathbb{R},\ \exists\, m \in \mathbb{R} \text{ tels-que } \forall x \in \mathcal{D},\quad m \leq f(x) \leq M$$

ou

$$\exists M \in \mathbb{R}_+^* \text{ tel-que } \forall x \in \mathcal{D},\quad \Big|f(x)\Big| \leq M$$

- *On dit que* f *est croissante ou qu'elle préserve l'ordre sur* $\mathcal{D}$ *si et seulement si*

$$\forall x, x' \in \mathcal{D};\ \Big(x < x' \Longrightarrow f(x) \leq f(x')\Big)$$

- *On dit que* f *est décroissante ou qu'elle ne préserve pas l'ordre sur* $\mathcal{D}$ *si et seulement si*

$$\forall x, x' \in \mathcal{D};\ \Big(x < x' \Longrightarrow f(x) \geq f(x')\Big)$$

- *On dit que la fonction croissante préserve l'ordre et la fonction décroissante inverse l'ordre.*

3.2 Limites

Definition 3.5 *Soit* $x_0 \in \mathcal{D}$,

- *on dit que* $f(x)$ *tend vers* l *quand* x *tend vers* x_0 *et on écrit* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ *ssi* $\forall \varepsilon > 0, \exists\, \eta > 0;\ \forall x \in \mathcal{D}, \Bigg(|x - x_0| < \eta \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon\Bigg)$
- *on dit que* $f(x)$ *tend vers* l *quand* x *tend vers* x_0 *par valeurs supérieures ssi* $\forall \varepsilon > 0, \exists\, \eta > 0;\ \forall x \in \mathcal{D}, \Bigg(0 < x - x_0 < \eta \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon\Bigg)$ *et on écrit* $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = l$. *Cette limite s'appelle aussi une limite à droite de* x_0.
- *on dit que* $f(x)$ *tend vers* l *quand* x *tend vers* x_0 *par valeurs inférieures ssi* $\forall \varepsilon > 0, \exists\, \eta > 0;\ \forall x \in \mathcal{D}, \Bigg(-\eta < x - x_0 < 0 \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon\Bigg)$ *et on écrit* $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = l$. *Cette limite s'appelle aussi une limite à gauche de* x_0.
- *Notation : 'ssi' veut dire (si et seulement si).*

Proposition 3.1 $\Big(\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l\Big) \Longleftrightarrow \Bigg(\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ >}} f(x) = l\Bigg)$

Exemple 3.3 *Soit* $f(x) = \dfrac{x}{|x|} + 1$.
On ne peut pas calculer la limite de cette fonction en 0 *car elle n'est pas définie en* 0, *mais on peut calculer les limites à droite et à gauche de* 0.

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{x}{x} + 1 = 2$$

et

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{x}{-x} + 1 = 0$$

alors $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ *n'existe pas car* $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) \neq \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x)$

Proposition 3.2 *La limite en un point lorsqu'elle existe elle est unique.*

3.2.1 Propriétés élémentaires

Proposition 3.3 *Soit f et g deux fonctions définies au voisinage de x_0 telles-que*

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0, \\ et \\ \;g \;\; est\ bornée, \end{cases}$$

$$alors\ \lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = 0.$$

Exemple 3.4 *D'après la Proposition 3.3*

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ >}} \sqrt{x}\cos\frac{\pi}{x} = 0$$

car $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} \sqrt{x} = 0$ *et* $\forall x \in \mathbb{R}^* : \left|\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)\right| \leq 1$ *(bornitude).*

Proposition 3.4 *(Theorème des gendarmes)*
Soient f, g, h des fonctions définies au voisinage de x_0 telles-que

$$\begin{cases} g(x) \leq f(x) \leq h(x), \\ \;et \\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \lim\limits_{x\to x_0} h(x) = l, \end{cases}$$

$$alors\ \lim_{x\to x_0} f(x) = l.$$

Remarque 3.2 *le Theorème des gendarmes reste valable si x tend vers ∞.*

Exemple 3.5 *soit* $f(x) = \dfrac{1}{1+\cos(x)}$. *On a :* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{1+\cos(x)} = 0 \qquad (*).$
En effet,

$$\forall x \in D_f,\ -1 \leq \cos(x) \leq 1$$

et en ajoutant x à tous les membres de l'inégalité, on obtient

$$x - 1 \leq x + \cos(x) \leq x + 1,$$

quand on passe à l'inverse on trouve

$$\frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{x+\cos(x)} \leq \frac{1}{x-1}.$$

Il est facile de voir que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x-1} = 0.$$

Le résultat $(*)$ s'obtient directement par le Theorème des gendarmes.

3.2.2 Formes indéterminées

Quand les règles de calcul directe de limite ne fonctionne pas, on se retrouve avec des formes dites indéterminées. On peut citer $\infty - \infty, 0.\infty, \dfrac{\infty}{\infty}, \dfrac{0}{0}, 1^{\infty}, 0^0, \infty^0$. Pour élever l'indétermination on peut se référer à des méthodes classique vues au secondaire lorsqu'il s'agit des polynomes ou des fractions simples à manipuler. Dans beaucoup de cas on utilise une règle dite de l'Hopital pour élever les ndéterminations $\dfrac{\infty}{\infty}, \dfrac{0}{0}$. Par contre, pour les formes $1^{\infty}, 0^0, \infty^0$ on passe généralement par le logarithme pour se ramener à des formes simples.

Exemple 3.6 $\lim_{x\to 0} x^x = 0^0$ *FI*
Pour élever cette indétermination on utilise la technique suivante

$$\lim_{x\to 0} x^x = \lim_{x\to 0} e^{x\ln(x)} = e^o = 1.$$

On rappelle que

$$\lim_{x\to 0} x\ln(x) = 0, \quad a^x = e^{x\ln(a)}.$$

L'exemple suivant sert comme outil de base pour élever l'indétermination 1^{∞} où on se ramène souvent à l'une des écritures $(1+x)^{\frac{1}{x}}, (1-x)^{\frac{1}{x}}, \left(1+\frac{1}{x}\right)^x, \left(1-\frac{1}{x}\right)^x$.

Exemple 3.7 $\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$

Solution 3.1 $\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}$
on sait que : $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = 1 = \lim_{x\to 0} \dfrac{1}{x}\ln(x+1).$
Par suite : $\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)} = e^1 = e.$

Par un changement de variable simple on peut montrer que
$\lim_{x\to 0} (1-x)^{\frac{1}{x}} = e^{-1}$
$\lim_{x\to +\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$
$\lim_{x\to +\infty} \left(1-\frac{1}{x}\right)^x = e^{-1}$
En conclusion, $\lim_{A\to 0} (1+A)^{\frac{1}{A}} = e$, c'est ce résultat important qui généralement permit de calculer la limite dans le cas de la forme indéterminé 1^{∞}.

Exemple 3.8 *Calculer* $\lim_{x\to +\infty} \left(1+\dfrac{3}{x}\right)^x$

Solution 3.2 *On fait le changement de variable* $y = \dfrac{3}{x}$ *alors* $x = \dfrac{3}{y}$*, donc quand* $x \to +\infty$ *on a* $y \to 0$*, et il vient que*
$\lim_{x\to +\infty} \left(1+\dfrac{3}{x}\right)^x = \lim_{y\to 0} (1+y)^{\frac{3}{y}} = \lim_{y\to 0} \left[(1+y)^{\frac{1}{y}} \right]^3 = e^3.$

3.3 Continuité

Soit $x_0 \in \mathcal{D}$.

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & y = f(x) \end{array} \right.$$

Definition 3.6 *On dit que f est **continue** en x_0 si est seulement si*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Remarque 3.3 *On ne peut étudier la **continuité de** f **en** x_0 que si f est définie en ce point x_0, c.a.d., $f(x_0)$ existe.*

Definition 3.7

1. *On dit que f est **continue à droite du point** x_0 si et seulement si*

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ >}} f(x) = f(x_0)$$

2. *On dit que f est **continue à gauche du point** x_0 si et seulement si*

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ <}} f(x) = f(x_0)$$

3. $\Big(f$ *est* ***continue*** *en* $x_0\Big) \Longleftrightarrow \Big(\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ <}} f(x) = f(x_0)\Big)$

4. *Si f et g sont deux fonction continue en x_0 alors $f + g$ et $f.g$ sont continues en x_0, et si de plus $g(x_0) \neq 0$ alors $\dfrac{f}{g}$ est continue en x_0.*

5. *Si $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue en x_0 et si $g : f(\mathcal{D}) \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue en $f(x_0)$ alors (gof) est continue en x_0.*

Exemple 3.9 *On considère la fonction f definie sur $\mathbb{R}$ par*

$$f(x) = \begin{cases} 0 \quad si \quad x \leq 0, \\ x \quad si \quad 0 < x \leq 1, \\ -x^2 + 4x - 2 \quad si \quad 1 < x \leq 3, \\ 4 - x \quad si \quad x > 3 \end{cases}$$

Il est évident qu'on doit étudier la continuité de f aux points 0, 1 et 3.

- *On étudie la continuité de f au point 0*

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} x = 0 = \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = f(0).$$

- *On étudie la continuité de f au point 1*

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} -x^2 + 4x - 2 = 1 = \lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} x = f(1).$$

- *On étudie la continuité de f au point 3*

$$\lim_{\substack{x \to 3 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 3 \\ >}} 4 - x = 1 = \lim_{\substack{x \to 3 \\ <}} -x^2 + 4x - 2 = f(3).$$

Theoreme 3.1 *(Théorème des valeurs intermédiaires)*

- *Si f est continue sur $[a\,b]$ et si λ est un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$, c.a.d., $(f(a) \leq \lambda \leq f(b))$ ou $(f(b) \leq \lambda \leq f(a))$ alors il existe au moins un réel $c \in [a\,b]$ tel-que $f(c) = \lambda$.*
- *Si f est continue sur $[a\,b]$ et si $f(a).f(b) < 0$ alors il existe au moins $c \in [a\,b]$ tel-que $f(c) = 0$.*

Remarque 3.4 *Si f est une fonction définie d'un domaine I vers un domaine J, et si on veut prouver que $\forall y \in J,\ \exists x \in I,$ tel-que $y = f(x)$, on fait appelle au théorème des valeurs intermédiaires. On signale que ce thórème confirme l'existence de x seulement.*

Exemple 3.10 $f : \left| \begin{array}{lll} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = x^3 + x^2 - x - 2, \end{array} \right.$

On peut utiliser le théorème des valeurs intermédiaires pour montrer que f est surjective. En effet,
f est continue sur $\mathbb{R}$, de plus $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ alors d'aprè le théorème des valeurs intermédiaires, pour tout $y \in]-\infty\ +\infty[$, il existe au moins $x \in \mathbb{R}$ tel-que $y = f(x)$.

Theoreme 3.2 *(Théorème de bijection)*

- *Si f est continue et strictement monotone sur $[a\,b]$ alors f est une bijection de $[a\,b]$ vers $f([a\,b])$.*
- *f^{-1} est aussi une bijection de $f([a\,b])$ vers $[a\,b]$, et elle a le même sens de variation que f.*
- *Les deux courbes représentatives de f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.*

Exemple 3.11 $f : \left| \begin{array}{lll} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & f(x) = e^x \end{array} \right.$

f est continue sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^x > 0$, donc f est continue et strictement croissante alors elle admet une fonction réciproque

$f^{-1} : \left| \begin{array}{lll} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \ln(x) \end{array} \right.$

On a bien $x \to \ln(x)$ est continue est strictement croissant $(\forall x \in \mathbb{R}^+ f'(x) = \dfrac{1}{x} > 0)$, de plus $\ln(e^x) = x$, et $e^{\ln(x)} = x$.

3.3.1 Fonctions réciproques élémentaires

1. La fonction

   $f : \left| \begin{array}{lll} \left[-\frac{\pi}{2}\ \frac{\pi}{2}\right] & \longrightarrow & [-1\ 1] \\ x & \longmapsto & f(x) = \sin(x) \end{array} \right.$

   est continue et strictement croissante donc elle est bijective et par suite elle admet une fonction réciproque notée arcsin telle-que

   $f^{-1} : \left| \begin{array}{lll} [-1\ 1] & \longrightarrow & \left[-\frac{\pi}{2}\ \frac{\pi}{2}\right] \\ x & \longmapsto & f^{-1}(x) = \arcsin(x) \end{array} \right.$

et on a

$$y = \sin(x) \iff x = \arcsin(y)$$

$$\sin(\arcsin(x)) = x, \text{ et } \arcsin(\sin(x)) = x.$$

2. La fonction
$$f : \left| \begin{array}{rcl} [0\ \pi] & \longrightarrow & [-1\ 1] \\ x & \longmapsto & f(x) = \cos(x) \end{array} \right.$$
est continue et strictement décroissante donc elle est bijective et par suite elle admet une fonction réciproque notée arccos telle-que
$$f^{-1} : \left| \begin{array}{rcl} [-1\ 1] & \longrightarrow & [0\ \pi] \\ x & \longmapsto & f^{-1}(x) = \arccos(x) \end{array} \right.$$
et on a
$$y = \cos(x) \iff x = \arccos(y)$$
$$\cos(\arccos(x)) = x, \text{ et } \arccos(\cos(x)) = x.$$

3. La fonction
$$f : \left| \begin{array}{rcl} \left]-\frac{\pi}{2}\ \frac{\pi}{2}\right[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \tan(x) \end{array} \right.$$
est continue et strictement croissante donc elle est bijective et par suite elle admet une fonction réciproque notée arctan telle-que
$$f^{-1} : \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \left]-\frac{\pi}{2}\ \frac{\pi}{2}\right[\\ x & \longmapsto & f^{-1}(x) = \arctan(x) \end{array} \right.$$
et on a
$$y = \tan(x) \iff x = \arctan(y)$$
$$\tan(\arctan(x)) = x, \text{ et } \arctan(\tan(x)) = x.$$

4. La fonction
$$f : \left| \begin{array}{rcl}]0\ \pi[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \text{f(x) = cotan(x)} \end{array} \right.$$
est continue et strictement décroissante donc elle est bijective et par suite elle admet une fonction réciproque notée *arccotan* telle-que
$$f^{-1} : \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow &]0\ \pi[\\ x & \longmapsto & f^{-1}(x) = arcotan(x) \end{array} \right.$$
et on a
$$\text{y = cotan(x)} \iff \text{x = arccotan(y)}$$
$$\text{cotan(arccotan(x)) = x, et arccotan(cotan(x)) = x.}$$

3.3.2 Prolongement par continuité

Soit $f:\ \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ une fonction qui n'est pas définie en x_0, mais $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a \in \mathbb{R}$. Alors on peut définir une nouvelle fonction continue en x_0 notée $\widetilde{f}$ comme suit :

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } x \neq x_0, \\ a \text{ si } x = x_0, \end{cases}$$

$\widetilde{f}$ est dite le **prolongement par continuité** de f au point x_0.

Exemple 3.12 *La fonction $x \to f(x) = \dfrac{\ln(x+1)}{x}$ n'est pas définie en $x_0 = 0$, mais la limite de $f(x)$ quand $x \to 0$ existe et on a $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = 1$. Donc donc f admet un* ***prolongement par continuité*** *au point $x_0 = 0$*

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(x+1)}{x} & si\ \ x \neq 0, \\ 1 & si\ \ x = 0, \end{cases}$$

3.4 Dérivation

3.4.1 Définitions

Dans tout ce qui suit on considère une fonction $f:\ \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, et $x_0 \in \mathbb{R}$.

Definitions 3.1

1. *On dit que f est dérivable en $x_0 \in \mathcal{D}$ si et seulement si la limite suivante existe et elle est finie*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = a \in \mathbb{R} \tag{3.1}$$

2. *le nombre a lorsqu'il existe est appelé le nombre dérivé de f au point x_0 et on écrit $f'(x_0) = a$.*

3. *l'interprétation géométrique de a : il représente la pente de la tangente à la courbe (C_f) au point $A(x_0, f(x_0))$, de plus l'équation de cette tangente est*

$$(\triangle):\ y = a(x-x_0) + f(x_0)$$

4. *Si les dérivés à droite et à gauche de x_0 existent et elles sont égales alors f est dérivable en x_0 et inversement. Autrement dit*

$$\Big(f \ \ \textit{est dérivable en}\ \ x_0\Big) \Longleftrightarrow \left(\lim_{\substack{x\to x_0 \\ >}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{\substack{x\to x_0 \\ <}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)\right)$$

5. *Si $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ >}} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = a_1$, et $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ <}} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = a_2$, avec $a_1 \neq a_2$, alors f n'est pas dérivable en x_0*

6. *Si dans l'équation 3.1 on remplace $x - x_0$ par h on aura*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = a$$

7. *Si f est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0. Atention, la réciproque n'est pas vraie c'est a dire qu si f est continue en x_0 on ne peut rien dire sur la dérivabilité en x_0, il faut l'étudier. De plus si f n'est pas dérivable en x_0 on ne peut rien dire conçernant la continuité en x_0 il faut l'étudier aussi.*

Remarque 3.5 *Pour répondre à la question étudier la continuité et la dérivabilité de f, on peut suivre l'un des deux chemins suivants.*

1. *on commence par étudier la continuité et si f n'est pas continue en x_0 on s'arrêtte et on en déduit que f n'est pas dérivable x_0. Mais si f est continue en x_0, il faut aller étudier la dérivabilté en x_0*
2. *On commence par étudier la dérivabilité en x_0 et si f est dérivable en x_0 on en déduit directement que f est continue en x_0. Mais si f n'est pas dérivable en x_0 il faut aller étudier la continuité en x_0.*
3. *Une fonction f peut ne pas être dérivable en x_0 et non continue en x_0.*

Exemple 3.13 *On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x - 1|$*

Il est clair qu'on doit étudier la continuité et la dérivabilité en $x_0 = 1$. On choisit de commencer par l'étude de la dérivabilité.

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{(|x-1|) - 0}{x - 1} \\
&= \lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{x - 1}{x - 1} \\
&= 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{x \to x_0 \\ <}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{(|x-1|) - 0}{x - 1} \\
&= \lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{-(x - 1)}{x - 1} \\
&= -1
\end{aligned}$$

Comme $1 \neq -1$ alors f n'est pas dérivable en $x_0 = 1$ et dans ce cas on ne peut rien dire conçernant la continuité, il faut qu'on l'étudie. Pour cela on calcule les deux limites suivantes :

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} |x - 1| = \lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} -x + 1 = 0 = f(1)$$

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} |x - 1| = \lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} x - 1 = 0 = f(1)$$

donc f est continue en $x_0 = 1$ car $\lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} |x - 1| = \lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} |x - 1| = f(1)$.

3.4.2 règles de dérivation

On commence par rappeler les règles de dérivation des fonctions usuelles.

$f(x)$	a	x^n	$\frac{1}{x}$	$\sqrt{x}$	e^x	$\ln(x)$	$\cos(x)$	$\sin(x)$
$f'(x)$	0	nx^{n-1}	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	e^x	$\frac{1}{x}$	$-\sin(x)$	$\cos(x)$
D_f	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^*_+$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$

Soient f, g deux fonctions dérivables sur $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}$, alors les fonctions construites à partir de ces deux fonctions sont dérivables et on a

1. $(f+g)^{'} = f^{'} + g^{'}$

2. $(fg)^{'} = f^{'}g + g^{'}f$

3. Si $g \neq 0$ sur $\mathcal{D}$, $\left(\dfrac{f}{g}\right)^{'} = \dfrac{f^{'}g - g^{'}f}{g^2}$

4. $(f^n)^{'} = nf^{'}f^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$

5. On note $f = f^{(0)}, f' = f^{(1)}, f'' = f^{(2)}, \ldots, f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)^{'}$,
   $f^{(n)}$ s'appelle la dérivée $n^{\text{ième}}$ de f.

6. Si une fonction f est dérivable plusieurs fois sur $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$ on peut définir les ensembles suivants

   Definition 3.8 *Soit $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on dit que $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^n$ si elle n fois dérivable et si la dérivé $n^{\text{ième}}$ est continue. Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ elle est dite de classe $\mathcal{C}^\infty$ ou indéfiniment dérivable. f est dite de classe $\mathcal{C}^0$ si elle est continue sur $\mathcal{D}$.*

7. $(fg)^{(n)} = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{n\,!}{i\,!\,(n-i)\,!} f^{(i)}g^{(n-i)}$.

8. Maintenant, on suppose que f est dérivable sur $\mathcal{D}$ et g est dérivable sur $f(\mathcal{D})$ alors gof est dérivable sur $\mathcal{D}$ et on a

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad (gof)^{'}(x) = f^{'}(x).g'\left[f(x)\right].$$

9. Soit f une bijection de $\mathcal{D}$ dans $f(\mathcal{D})$ et soit f^{-1} sa fonction réciproque. Si f est dérivable sur $\mathcal{D}$ et si f' ne s'annule pas sur $\mathcal{D}$ alors f^{-1} est dérivable sur $f(\mathcal{D})$ et on a

$$\forall y_0 \in f(\mathcal{D}), \quad \left(f^{-1}\right)^{'}(y_0) = \frac{1}{f'\left[f^{-1}(y_0)\right]}$$

Remarque 3.6 *Pour calculer* $f^{-1}(y_0)$ *il faut chercher* $x_0 \in \mathcal{D}$ *solution de l'équation* $y_0 = f(x_0)$ *et on aura* $f^{-1}(y_0) = x_0$, *et par suite*

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Exemple 3.14 *Soit* $f : x \to f(x) = x + e^x$
Montrer que f *est bijective sur* $\mathbb{R}$
Calculer $(f^{-1})'(1)$.

Solution 3.3 f *est continue sur* $\mathbb{R}$, *et* $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 1 + e^x > 0$, *donc* f *est continue et strictement monotone et par suite* f^{-1} *existe. Pour calculer* $(f^{-1})'(1)$ *on résout d'abord l'équation* $f(x) = 1$. *La solution de cette équation est la suivante*

$$\begin{aligned} f(x) = 1 &\implies x + e^x = 1, \\ &\implies x = 0, \end{aligned}$$

Il vient que

$$f(0) = 1 \Longrightarrow f^{-1}(1) = 0$$

$$\begin{aligned} \left(f^{-1}\right)'(1) &= \frac{1}{f'\left[f^{-1}(1)\right]}, \\ &= \frac{1}{f'(0)}, \\ &= \frac{1}{1+e^0}, \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

3.4.3 Dérivées des fonctions circulaires réciproques

Proposition 3.5 *Les fonctions circulaires* arcsin, arccos, arctan, *arccotan sont dérivables sur leurs domaines de définitions.*

$$\forall x \in \left]-1 \;\; 1\right[, \;\; (\arcsin)'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\forall x \in \left]-1 \;\; 1\right[, \;\; (\arccos)'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \;\; (\arctan)'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \;\; (arccotan)'(x) = \frac{-1}{1+x^2}$$

Exemple 3.15 *Calculer la dérivée de la fonction définie par*

$$f(x) = \arctan(x^2 + 1)$$

On appilque la règle de dérivation d'une fonction composé et de arctan .
La technique est très simple, on suppose que

$$f(x) = \arcsin(g(x)) \textit{ avec } g(x) = 1 + x^2$$

donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = g'(x) \times (\arctan)'(g(x)),$$

$g'(x) = 2x$,
$(\arctan)'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$,
$(\arctan)'(g(x)) = \dfrac{1}{1+(g(x))^2}$,
ce qui donne

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{2x}{1+(1+x^2)^2}$$

3.4.4 Théorèmes importants

Theoreme 3.3 ***Théorème de Rolle***
Soit f une fonction continue sur $[a\ b]$, dérivable sur $]a\ b[$ et telle-que $f(a) = f(b)$ alors

$$\exists c \in \,]a\ b[\,, \ f'(c) = 0.$$

Theoreme 3.4 ***Théorème des accroissements finis***
Soit f une fonction continue sur $[a\ b]$ et dérivable sur $]a\ b[$ alors

$$\exists c \in \,]a\ b[\,, \ f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Theoreme 3.5 ***Règle de l'Hôpital***
Soient f, g deux fonctions continues sur un intervalle $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}$, sauf peut être en $x_0 \in \mathcal{D}$, si $f(x_0) = g(x_0) = 0$ et si g' ne s'annule pas sur $\mathcal{D} - \{x_0\}$, et si $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = a$ alors

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = a$$

Remarque 3.7
- *La règle de l'Hôpital est un outil très utilisé dans le calcul des limites pour élever l'indétermination $\dfrac{0}{0}$ ou $\dfrac{\infty}{\infty}$.*
- *On peut appliquer la règle de l'Hôpital autant de fois qu'on veut jusqu'à obtention de la limite cherchée.*

Exemple 3.16 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = \dfrac{0}{0}$, *on applique la règle de l'Hôpital*

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos(x)}{1} = \frac{1}{1} = 1.$$

Exemple 3.17 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x^2}=\dfrac{+\infty}{\infty}$, *on applique la règle de l'Hôpital deux fois*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x^2}=0.$$

3.5 Exercices Corrigés

Exercise 3.1 *étudier la parité des fonctions suivantes définies par*
$f(x)=\sqrt{1-x^4}$, $f(x)=\dfrac{\sin(x)}{x}$, $f(x)=\dfrac{\cos(x)}{x^2}$, $f(x)=x^{n+1}$

solution
1) $D_f=[-1\ 1]$ est symétrique par rapport à zéro et ,
$f(-x)=\sqrt{1-(-x)^4}=\sqrt{1-x^4}=f(x)$ donc f est paire.

2) $D_f=\mathbb{R}^*$ est symétrique par rapport à zéro et ,
$f(-x)=\dfrac{\sin(-x)}{-x}=\dfrac{-\sin(x)}{-x}=\dfrac{\sin(x)}{x}=f(x)$ donc f est paire.

3) $D_f=\mathbb{R}^*$ est symétrique par rapport à zéro et ,
$f(-x)=\dfrac{\cos(-x)}{(-x)^2}=\dfrac{\cos(x)}{x^2}=f(x)$ donc f est paire.

3) $D_f=\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à zéro et ,

$f(-x)=(-x)^{n+1}=(-1)^{n+1}x^{n+1}$

avec $(-1)^{n+1}=\begin{cases}-1 & \text{si } n \text{ est pair}\\ +1 & \text{si } n \text{ est impair}\end{cases}$

donc $f(-x)=\begin{cases}-f(x) & \text{si } n \text{ est pair}\\ +f(x) & \text{si } n \text{ est impair}\end{cases}$
par suite f est impaire si n est pair, et elle est paire si n est impair.

Exercise 3.2 *Calculer les limites suivantes*

1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos(ax)-\cos(bx)}{x^2}\qquad a,b\in\mathbb{R}$

2) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$

3) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{2x-1}$

4) $\lim_{x\to 0^+} x^{\sin(x)}$

solution

1) $\lim_{x\to 0}\frac{\cos(ax)-\cos(bx)}{x^2}=\frac{0}{0}$

Pour calculer cette limite on applique la règle de l'Hôpital plusieurs fois

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\cos(ax)-\cos(bx)}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{-a\sin(ax)+b\sin(bx)}{2x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{-a^2\cos(ax)+b^2\sin(bx)}{2}\\ &= \frac{b^2-a^2}{2}\end{aligned}$$

2) $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}=\frac{0}{0}$

Pour calculer cette limite on peut utiliser aussi la règle de l'Hôpital, mais pour mettre plusieurs méthodes entre vos mains on choisit la multiplication du numérateur et dénominateur par le conjugué du numérateur.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} &= \lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{x+3}-2\right)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{x+3-4}{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x+3}+2}\\ &= \frac{1}{4}\end{aligned}$$

3) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{2x-1}=1^{+\infty}$

Pour calculer cette limite on modifie notre fonction de sorte à avoir une limite de la forme

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

On a

$$\frac{x}{x+1}=\frac{x+1-1}{x-1}=\frac{x-1}{x-1}+\frac{1}{x-1}=1+\frac{1}{x-1}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{2x-1}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x-1}\right)^{2x-1}$$

on pose $y=\frac{1}{x}$ alors $x=\frac{1}{y}$ quand $x\to+\infty$ alors $y\to 0$, et on a

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{2x-1} &= \lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{2}{y}-1}\\ &= \lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{2}{y}}(1+y)^{-1}\\ &= \lim_{y\to 0}\left[(1+y)^{\frac{1}{y}}\right]^{2}(1+y)^{-1}\\ &= e^{2}\end{aligned}$$

4) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\sin(x)} = 0^0$

Pour calculer cette limite on utilise une technique qui fait intervenir le logarithme népérien On pose $y = x^{\sin(x)}$, on a $\ln(y) = \sin(x)\ln(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln(y) = \lim\limits_{x\to 0^+}\sin(x)\ln(x) = 0.\infty$ donc on cherche à écrire $\sin(x)\ln(x)$ comme une fraction
$\lim\limits_{x\to 0^+}\ln(y) = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(x)}{\frac{1}{\sin(x)}} = \dfrac{\infty}{\infty}$
On applique la règle de l'Hôpital

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+}\ln(y) &= \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(x)}{\frac{1}{\sin(x)}}\\ &= \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-\cos(x)}{\sin^2(x)}}\\ &= \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\left(\frac{-\sin^2(x)}{\cos(x)}\right)\\ &= \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)\left(\frac{-\sin(x)}{\cos(x)}\right)\\ &= 1\times 0 \ \text{ car } \lim_{x\to 0^+}\frac{\sin(x)}{x} = 1\end{aligned}$$

comme $\ln(y)\to 0$ alors $y\to e^0 = 1$, en d'autre termes

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\sin(x)} = 1.$$

Exercise 3.3 *Trouver la valeur de a pour que la fonction soit continue sur* $\mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & si \quad x \le 2 \\ 1-ax & si \ \ x > 2 \end{cases}$$

solution
Pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$ il suffit qu'elle soit continue en $x_0 = 2$.

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} x^2 = 4 = f(2),$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-}(1-ax) = 1-2a,$$

f continue en $x_0 = 2 \Longleftrightarrow 1 - 2a = 4 = f(2)$, donc $a = -\dfrac{3}{2}$.

Exercise 3.4 *La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}\ln\left(\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}\right)$ admet-elle un prolongement par continuité ?*

solution

Comme f n'est pas définie en $x_0 = 0$, alors on calcul la limite en ce point pour voir si la fonction admet un prolongement par continuité ou non.

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\ln\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) = \infty \times 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}\right)}{x} = \frac{0}{0}$$

On applique la règle de l'Hôpital

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}\right)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(e^x + e^{-x}\right) - \ln(2)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}}{1} = \frac{0}{2} = 0$$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ existe donc f admet un prolongement par continuité en $x_0 = 0$. Autrement il existe une fonction $\widetilde{f}$ définie par

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}\ln\left(\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Exercise 3.5 *Calculer $f'(x)$ dans chaqu'un des cas suivants*

$f(x) = x^x,\ f(x) = \ln(|\sin(x)|),\ f(x) = \arctan(e^x),\ f(x) = \ln(\sqrt{\cos^2(x) + 1})$.

solution

1) $f(x) = x^x = e^{x\ln(x)}$

$\forall x > 0,\ f'(x) = (x\ln(x))'\, e^{x\ln(x)} = \left(\ln(x) + x \times \dfrac{1}{x}\right) x^x = (\ln(x) + 1)\, x^x$

2) $f(x) = \ln(|\sin(x)|)$

$\forall x \in \mathbb{R} - \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\},\ f'(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$

3) $f(x) = \arctan(e^x)$

$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = (e^x)'\, \dfrac{1}{1 + (e^x)^2} = \dfrac{e^x}{1 + e^{2x}}$

4) $f(x) = \ln\left(\sqrt{\cos^2(x)+2}\right)$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \frac{\left(\sqrt{\cos^2(x)+2}\right)'}{\sqrt{\cos^2(x)+2}} = \frac{\frac{(\cos^2(x)+2)'}{2\sqrt{\cos^2(x)+2}}}{\sqrt{\cos^2(x)+2}} = \frac{-2\sin(x)\cos(x)}{2\left(\cos^2(x)+2\right)} = -\frac{\sin(x)\cos(x)}{\cos^2(x)+2}.$$

Exercise 3.6 *Montrer que*

$$\forall x \in \forall x \in [-1\ \ 1]\,,\ \ \arcsin(x) + \arccos(s) = \frac{\pi}{2}$$

solution

On sait que

$$\forall x \in \left]-1\ \ 1\right[\,,\ \ (\arcsin)'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\forall x \in \left]-1\ \ 1\right[\,,\ \ (\arccos)'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Il en résulte que

$$\forall x \in \left]-1\ \ 1\right[\,,\ (\arcsin + \arccos)' = (\arcsin)'(x) + (\arccos)'(x) = 0$$

Comme la dérivé est nulle donc la fonction $x \longmapsto (\arcsin + \arccos)(x)$ est constante. donc

$$\exists a \in \mathbb{R}, \forall x \in \left]-1\ \ 1\right[\,,\quad (\arcsin(x) + \arccos(x))(x) = a \tag{3.2}$$

Comme l'égalité (3.2) est vraie pour tout $x \in \left]-1\ \ 1\right[$ donc elle est vraie pour $x = 0$. Autrement dit

$$\arcsin(0) + \arccos(0) = a = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

car on a

$$\sin(0) = 0 \text{ donc } \arcsin(0) = 0, \text{ et } \cos(\frac{\pi}{2}) = 0 \text{ donc } \arccos(0) = \frac{\pi}{2}.$$

On vérifie que l'égalité (3.2) est aussi vraie aux bornes de l'intervalle $[-1\ 1]$, c.a.d., pour $x = -1$ et $x = 1$.

$$\sin(\frac{-\pi}{2}) = -1 \text{ donc } \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}, \text{ et } \cos(\pi) = -1 \text{ donc } \arccos(-1) = 0$$

$$\text{on a alors } \arcsin(-1) + \arccos(-1) = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$\sin(\frac{\pi}{2}) = +1 \text{ donc } \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}, \text{ et } \cos(0) = 1 \text{ donc } \arccos(1) = 0$$

$$\text{on a alors } \arcsin(1) + \arccos(1) = \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2}$$

Chapitre 4

Application aux fonctions élémentaires

Dans ce chapitre on va présenter les fonctions usuelles les plus connues ainsi que les fonctions qui sont très utilisées en pratique et qui sont nouvelles pour l'étudiant.

4.1 Les fonctions élémentaires

4.1.1 Fonction constante

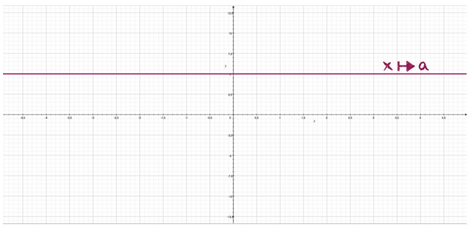
Soit a un nombre réel donné. La fonction constante est la fonction definie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = a.$$

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = a \end{array} \right.$$

Il est clair que $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 0.$

Étant donné que tous les l'antécédents ont la même image par f la courbe représentative de f est une droite parallèle à l'axe des abscisses dont l'équation est de la forme $y = a$



Fonction constante

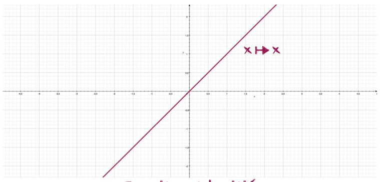
4.1.2 Fonction identité

C'est la fonction notée généralement I ou Id qui est définie sur $\mathbb{R}$ et qui à chaque x elle fait corresponde x lui même.

$$I : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & I(x) = x \end{array} \right.$$

$\forall x \in \mathbb{R},\ I'(x) = 1$

La courbe représentative de I est une droite d'équation $y = x$



Fonction identité

4.1.3 Fonction valeur absolue

La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

s'appelle fonction valeur absolue. On note que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ -1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Il est important de remarquer que

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad f'(x) = |x|' = \left(\sqrt{x^2}\right)' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2}} = \frac{x}{|x|} = sign(x) \times 1$$

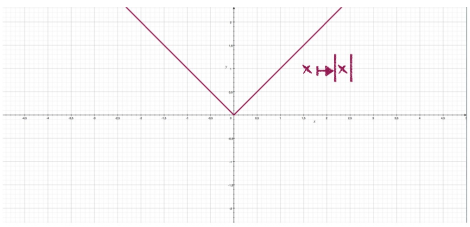
On utilise cette technique pour calculer $|g|'$ où g est une fonction donnée.

$$|g|' = \left(\sqrt{g^2}\right)' = \frac{2g'.g}{2\sqrt{g^2}} = \frac{g'.g}{|g|} = g'.sign(g)$$

On a le résultat plus général suivant

$$(|g|^n)' = n.|g|'.|g|^{n-1} = n.\frac{g'g}{|g|}|g|^{n-1} = ng'g|g|^{n-2}$$

La fonction valeur absolue $x \longmapsto |x|$ est continue en zéro mais elle n'est pas dérivable en ce point. Le point $(0,0)$ est un point anguleux pour sa courbe représentative.



Fonction valeur absolue

4.1.4 Fonction partie entière

Definition 4.1 *Soit b un nombre réel. La partie entière de b est le plus grand entier inférieur ou égal à b. On la note par $E(b)$ ou $[b]$.*

Exemple 4.1 *Cet exemple montre la différence entre le calcul de la partie entière d'un nombre positif et un nombre négatif*

- $E(\pi) = 3$
- $E(-\pi) = -4$

On cite la propriété très importante suivante : pour tout réel x on a

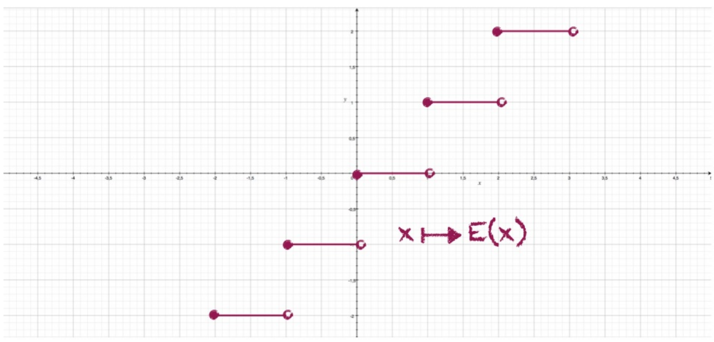
$$E(x) \leq x < E(x) + 1$$

Definition 4.2 *La fonction partie entière est la fonction notée E et définie sur $\mathbb{R}$ par*

$$E : \left| \begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & E(x) \end{array} \right. \quad \text{où } E(x) \text{ est le plus grand entier inférieur ou égal à } x.$$

– La fonction E est croissante sur $\mathbb{R}$ et elle est constante sur tous les intervalles de la forme $[n\ n+1[$ où $n \in \mathbb{Z}$.

– Le graphe de E n'est pas une courbe continue, on le dessine par morceaux.



Fonction partie entière

4.1.5 Fonctions puissances

Definition 4.3 *On donne les définitions des différents types de fonctions puissances qu'on peut rencontrer.*

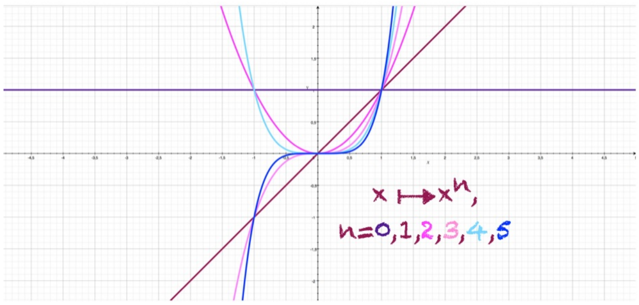
1. *soit $n \in \mathbb{Z}$. La fonction* ***puissance entière*** *est la fonction définie comme suit*

$$f : \left| \begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = x^n, \quad n \in \mathbb{Z}^+ \end{array} \right. \qquad f : \left| \begin{array}{lcl} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = x^n, \quad n \in \mathbb{Z}^- \end{array} \right.$$

2. *La fonction* ***polynôme*** *est une fonction de la forme*

$$f : \left| \begin{array}{lll} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 + a_0, \quad n \in \mathbb{N} \end{array} \right.$$

n c'est le degré du polynôme et $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1, a_0$ les coefficients du polynôme.
$f(x) = x^4 - 2x^3 + \dfrac{1}{3}$: c'est un polynôme de degré 4 et $1, -2, 0, 0, \dfrac{1}{3}$ sont ses coefficients.



Fonction puissance entière

3. *Soit a un réel stictement positif. Dans le cas où la puissance n'est pas entière, on définie la puissance rationnelle de a par*

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}.$$

4. *La fonction* ***racine n-ième*** *est définie de la manière suivante*

$$f : \left| \begin{array}{lll} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \sqrt[n]{x}, \ \textit{si} \quad n \textit{ est pair} \end{array} \right.$$

$$f : \left| \begin{array}{lll} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \sqrt[n]{x}, \quad \textit{si} \quad n \textit{ est impair} \end{array} \right.$$

5. *Dans le cas général la fonction* ***puissance rationnelle*** *est définie comme suit*

$$f : \left| \begin{array}{lll} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = x^{\frac{m}{n}}, \quad m \in \mathbb{Z}, \ n \in \mathbb{N}^*. \end{array} \right.$$

6. *On peut aussi définir la fonction* ***puissance quelconque***

$$f : \left| \begin{array}{lll} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = x^{\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \end{array} \right.$$

Remarque 4.1 – *La condition $a > 0$ c'est un cas général. On peut trouver des cas particulier ou la puissance rationnelle pour $(a = 0)$ ou $(a < 0)$ existe. Par exemple $\sqrt[2]{0} = 0$, on a aussi $a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$ qui est définie pour tout $a \in \mathbb{R}$*

– *Dans le calcul de* $a^{\frac{m}{n}}$ *il faut toujours que* $\frac{m}{n}$ *soit irréductible et seulement dans le cas où* n *est impair on peut prendre* a *dans* $\mathbb{R}$.

Exemple 4.2 *soient* f, g *deux fonctions telles-que*

$f(x) = \sqrt[2]{x^2 - 1}, \quad g(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1}.$
$D_f =]-\infty \ -1[\bigcup]1 \ +\infty[$

$D_g = \mathbb{R}.$

4.1.6 Fonction logarithme- Fonction exponentielle

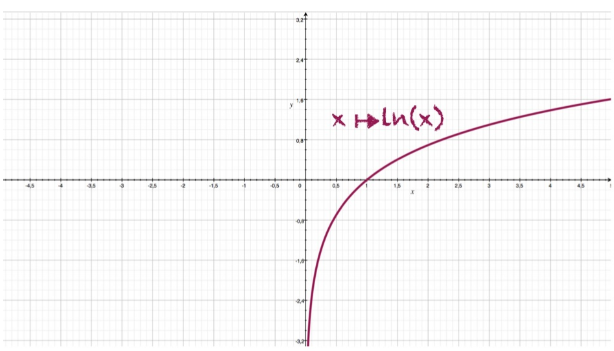
Fonction logarithme

Proposition 4.1 *La fonction unique notée* ln *et qui est définie par*

$$\ln : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \ln(x) \end{array} \right.$$

s'appelle la fonction ***logarithme népérien*** *et elle est caractérisée par* $\ln(e) = 1$ *et* $\ln(1) = 0$. *Cette fonction vérifie les propriétés suivantes :*

- $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ \ln'(x) = \dfrac{1}{x}$,
- ln *est une fonction continue et strictement croissante sur* $\mathbb{R}_+^*$,
- ln *est bijective et admet une fonction réciproque définie de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}_+^*$,
- $\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*, \ \ln(x \times y) = \ln(x) + \ln(x)$,
- $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ \ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\ln(x)$,
- $\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*, \ \ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$,
- $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ \ln(x^n) = n\ln(x), \ n \in \mathbb{N}$,
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1, \ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0, \ \lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) = -\infty$,
- $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ \ln(x) \leq x - 1.$



Fonction logarithme népérien

- On définie le **logarithme à base** a par $\log_a(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(a)}$, $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$, et $\log_a(a) = 1$.
- Pour $a = 10$ on a le **logarithme décimal** qui est définie par $\log_{10}(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(10)}$
  - $\log_{10}(10) = 1$,
  - $y = \log_{10}(x) \Longleftrightarrow x = 10^y$,
  - $\log_{10}(10^n) = n$,

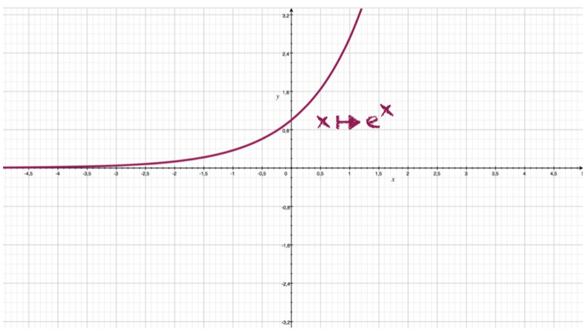
  En informatique intervient souvent **logarithme à base** 2 qui vérifie $\log_2(2^n) = n$.

Fonction exponentielle

Definition 4.4 ***La fonction exponentielle*** *notée* exp *est la fonction réciproque de la fonction* ln *et elle est définie par*

$$\exp : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ x & \longmapsto & \exp(x) = e^x \end{array} \right.$$

où e *est le nombre réel qui satisfait* $\ln(e) = 1$ *et* $\exp(1) = e$ *avec* $e = 2,718\ldots$



Fonction exponentielle

Proposition 4.2 *La fonction exponentielle vérifie les propriétés suivantes :*

- $\forall x \in \mathbb{R}, \exp'(x) = \exp(x)$,
- $\forall x, y \in \mathbb{R}, e^{x+y} = e^x \times e^y$,
- $\forall x, \in \mathbb{R}, e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$,
- $\forall x, y \in \mathbb{R}, e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$,
- $\forall x, \in \mathbb{R}, (e^x)^n = e^{nx}, \quad n \in \mathbb{N}$,
- $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0, \ \lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty, \ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty, \ \lim\limits_{x \to -\infty} x e^x = 0, \ \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1.$
- *Soit* a *un réel strictement positif. la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $x \longmapsto a^x = e^{x \ln(a)}$ *est aussi une fonction exponentielle et elle vérifie les propriétés suivantes :*

  $\forall a, b \in \mathbb{R}_+^*, \ \forall x, y \in \mathbb{R}$,
  - $a^{x+y} = a^x \times x^y$,
  - $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$,
  - $(ab)^x = a^x \times b^x$,

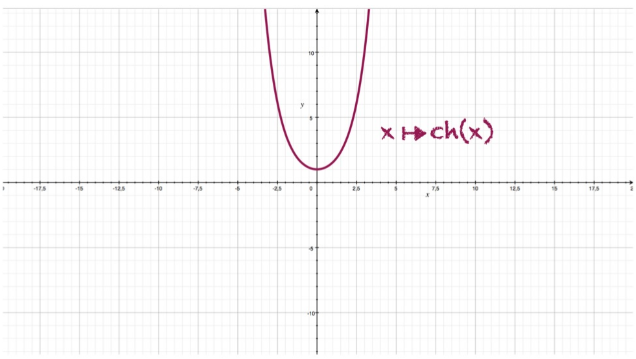
– $(a^x)^y = a^{xy}$,
– $\ln(a^x) = x\ln(a)$.

4.1.7 Fonctions circulaires hyperboliques

La notion de fonctions hyperboliques est une nouvelle notion pour les étudiants, c'est une combinaison entre les fonctions circulaires trigonométriques et les fonctions exponentielles.

Definition 4.5 *La fonction **cosinus hyperbolique** que l'on note **ch** est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par*

$$ch : \left| \begin{array}{lll} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & ch(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \end{array} \right.$$



Fonction cosinus hyperbolique

1. La restriction de la fonction $ch_| : \mathbb{R}_+ \longrightarrow [1 \;\; +\infty[$ est continue est strictement croissante, donc elle admet une fonction réciproque notée **argch** et qui est définie comme suit

$$\arg ch : \left| \begin{array}{lll} [1 \;\; +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & \arg ch(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) \end{array} \right.$$

2. $\forall x \in \,]1 \;\; +\infty[\,, \quad (\arg ch)'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

Exemple 4.3 $ch(0) = \dfrac{e^0 + e^0}{2} = 1,$ *alors* $ch^{-1}(1) = \arg ch(1) = 0.$

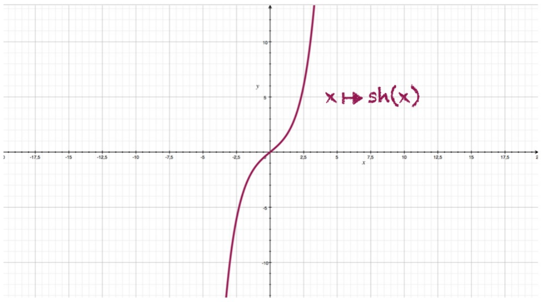
Definition 4.6 *La fonction **sinus hyperbolique** notée **sh** est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par*

$$sh : \left| \begin{array}{lll} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & sh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \end{array} \right.$$

1. La fonction sh est continue, strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc c'est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ alors elle admet une fonction réciproque notée **argsh** et définie comme suit

$$\arg sh \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \arg sh(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \end{array} \right.$$

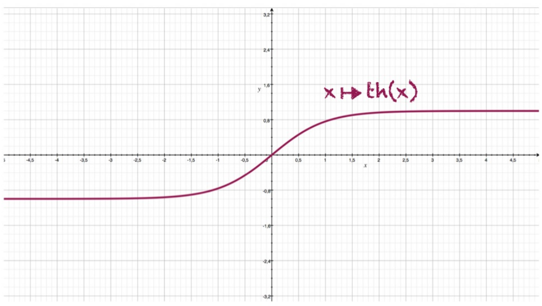
2. $\forall x \in \mathbb{R},\ (\arg sh)'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$,
3. $\forall x \in \mathbb{R},\ ch^2(x) - sh^2(x) = 1$,
4. $\forall x \in \mathbb{R},\ ch'(x) = sh(x),\ sh'(x) = ch(x)$.



Fonction sinus hyperbolique

Definition 4.7 *On appelle fonction* ***tangente hyperbolique*** *et on la note* ***th*** *la fonction*

$$th \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & th(x) = \dfrac{sh(x)}{ch(x)} \end{array} \right.$$



Fonction tangente hyperbolique

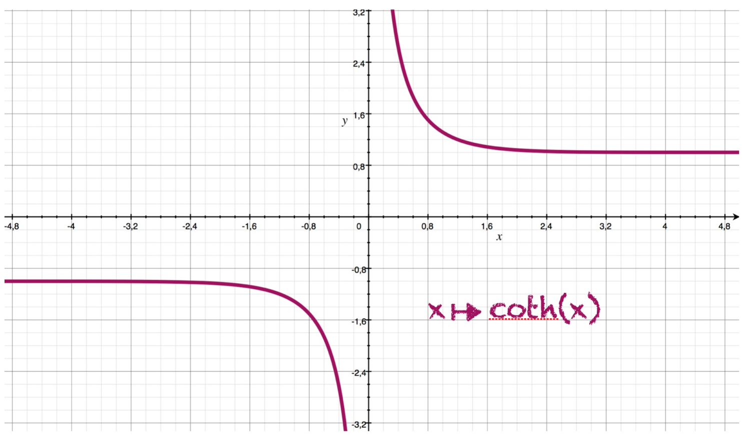
1. La fonction th est continue, strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc c'est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]-1\ 1[$
2. **argth** est la fonction réciproque de **th** et qui est définie par

$$\arg th \left| \begin{array}{ccc}]-1\ 1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \arg th(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{x+1}{1-x}\right) \end{array} \right.$$

3. $\forall x \in]-1\ 1[,\quad (\arg th)'(x) = \dfrac{1}{1-x^2},$

Definition 4.8 *On definit la fonction* ***cotangente hyperbolique*** *noté* ***coth*** *par*

$$coth \left| \begin{array}{ccl} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & coth(x) = \dfrac{ch(x)}{sh(x)} = \dfrac{1}{th(x)} \end{array} \right.$$



Fonction cotangente hyperbolique

4.2 Exercices Corrigés

Exercise 4.1 1) $\quad f(x) = \dfrac{2ch^2(x) - sh(2x)}{x - \ln(ch(x)) - \ln(2)}$
érire $f(x)$ sous la forme la plus simple.
2) $\quad$ *calculer* $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$.

solution
On utilise les définitions et propriétés des fonction sh, ch et $\ln$

$$\begin{aligned} 2ch^2(x) - sh(2x) &= 2\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2}, \\ &= 2\frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2}, \\ &= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + e^{-2x}}{2}, \\ &= \frac{2e^{-2x} + 2}{2}, \\ &= e^{-2x} + 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x - \ln(ch(x)) - \ln(2) &= x - \ln\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) - \ln(2), \\
&= x - \ln\left(e^x + e^{-x}\right) + \ln(2) - \ln(2), \\
&= x - \ln\left(e^x(1 + e^{-2x})\right), \\
&= x - \ln\left(e^{-2x} + 1\right) - \ln(e^x), \\
&= x - \ln\left(e^x + 1\right) - x, \\
&= -\ln(e^{-2x} + 1),
\end{aligned}$$

et on peux écrire $\quad f(x) = -\dfrac{e^{-2x} + 1}{\ln(e^{-2x} + 1)}$
pour calculer la limite on fait un changement de variable
on pose $y = e^{-2x} + 1$ alors $x = \ln(y + 1)$

quand $x \to +\infty$ alors $y \to 1^+$ de plus $\lim\limits_{y \to 1^+} \ln(y) = 0^+$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{y \to 1^+} -\frac{y}{\ln(y)} = -\infty$$

quand $x \to -\infty$ alors $y \to +\infty$ de plus $\lim\limits_{y \to +\infty} \dfrac{\ln(y)}{y} = 0^+$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{y \to 1^+} -\frac{y}{\ln(y)} = -\infty$$

Exercise 4.2 *Soient x, y deux réels tels-que* $x = \ln\left(\tan\left(\dfrac{y}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right)$
Calculer $ch(x), sh(x), th(x)$ en fonction de y.

solution
En utilisant $y = e^x \Longleftrightarrow x = \ln(y)$ on a
$x = \ln\left(\tan\left(\dfrac{y}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right) \Longleftrightarrow e^x = \tan\left(\dfrac{y}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right),$
d'autre part on va utiliser $\cos(2x), \sin(2x)$. On a

$$\begin{aligned}
ch(x) &= \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \\
&= \frac{1}{2}\left(\tan\left(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{\tan\left(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
ch(x) &= \frac{1}{2}\left(\frac{\tan^2\left(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+1}{\tan\left(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\cos^2\left(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\tan\left(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\right) \\
&= \frac{1}{2\cos\left(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} \\
&= \frac{1}{\sin\left(2\left(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right)} \\
&= \frac{1}{\sin\left(y+\frac{\pi}{2}\right)} \\
&= \frac{1}{\cos(y)}.
\end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}
sh(x) &= \frac{e^x-e^{-x}}{2}, \\
&= \frac{1}{2}\left(\tan\left(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{\tan\left(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
ch(x) &= \frac{1}{2}\left(\frac{\tan^2\left(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{4}\right)-1}{\tan\left(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin^2\left(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{4}\right)-\cos^2\left(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos^2\left(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\tan\left(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\right) \\
&= \frac{\sin^2\left(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{4}\right)-\cos^2\left(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}{2\cos\left(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} \\
&= \frac{-\cos\left(2\left(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right)}{\sin\left(2\left(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right)} \\
&= \frac{-\cos\left(y+\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(y+\frac{\pi}{2}\right)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} sh(x) &= \frac{\sin(y)}{\cos(y)}, \\ &= \tan(y). \end{aligned}$$

Il vient que

$$th(y) = \frac{sh(y)}{ch(y)} = \frac{\tan(y)}{\dfrac{1}{\cos(y)}} = \frac{\sin(y)}{\cos(y)} \times \frac{\cos(y)}{1} = \sin(y).$$

Exercise 4.3 1) *Etudier la fonction* $f : x \longmapsto f(x) = \ln(ch(x)) - x$
2) *Tracer la courbe représentative de* f.

solution
$\forall x \in \mathbb{R},\ ch(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} > 0,$ donc $D_f = \mathbb{R}$.

f est continue, dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \frac{ch'(x)}{ch(x)} - 1 = \frac{sh(x)}{ch(x)} - 1 = th(x) - 1 < 0,$$

et par suite f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

En effet,

$$\begin{aligned} th(x) - 1 &= \frac{\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}}{\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}} - 1, \\ &= \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} - 1, \\ &= \frac{e^x - e^{-x} - e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \\ &= \frac{-2e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \\ &< 0. \end{aligned}$$

Pour les limites quand $x \to -\infty$, un calcul simple donne
$\lim\limits_{x \to -\infty} ch(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = +\infty$

de plus $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty,\quad \lim\limits_{x \to -\infty} (-x) = +\infty,$

donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

Quand $x \to +\infty$ on a

$$\lim_{x\to+\infty} ch(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{2} = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} (-x) = -\infty,$$

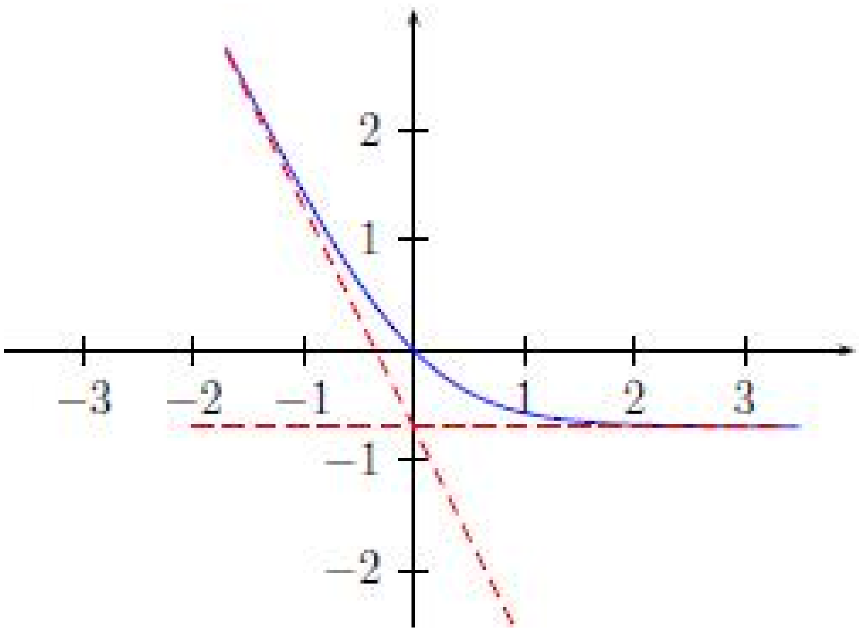
et par suite $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty - \infty(FI)$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} \ln\left(e^x + e^{-x}\right) - \ln(2) - x, \\
&= \lim_{x\to+\infty} \ln e^x \left(1 + e^{-2x}\right) - \ln(2) - x, \\
&= \lim_{x\to+\infty} \ln e^x + \ln\left(1 + e^{-2x}\right) - \ln(2) - x, \\
&= \lim_{x\to+\infty} x + \ln\left(1 + e^{-2x}\right) - \ln(2) - x, \\
&= \lim_{x\to+\infty} \ln\left(1 + e^{-2x}\right) - \ln(2), \\
&= -\ln(2), \quad \text{car} \lim_{x\to-\infty} (e^x) = 0.
\end{aligned}$$

Donc la courbe représentative de f admet au voisinage de $+\infty$ une asymptote horizontal d'équation $y = -\ln(2)$
D'autre part, on peut écrire $f(x)$ sous une autre forme et en déduire que C_f admet une asymptote oblique en $-\infty$,
$f(x) = \ln e^{-x}\left(e^{2x} + 1\right) - \ln(2) - x = \ln(e^{2x} + 1) - 2x - \ln(2)$,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) - (-2x - \ln(2)) = \lim_{x\to-\infty} \ln(e^{2x} + 1) = 0,$$

Donc la droite d'équation $y = -2x - \ln(2)$ est une asymptote oblique à C_f en $-\infty$.



Exercise 4.4 *Donner le domaine de définition de la fonction définie par*

$$f(x) = \arg ch\left[\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)\right],$$

et simplifier son expréssion.

solution
On sait que la fonction $x \longmapsto \arg ch(x)$ est définie sur $[1 \quad +\infty[$.
Donc pour que f soit définie il faut que $\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) \geq 1$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) \geq 1 \quad &\Longrightarrow \quad \frac{x^2+1}{x} - 2 \geq 0 \text{ et } x \neq 0, \\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{x^2+1-2x}{x} \geq 0 \text{ et } x \neq 0, \\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{(x-1)^2}{x} \geq 0 \text{ et } x \neq 0, \\
&\Longleftrightarrow \quad x > 0.
\end{aligned}$$

$D_f =]0 \quad \infty[$.
Pour simplifier $f(x)$ on utilise la définition de la fonction $\arg ch$

$$\arg ch(z) = \ln\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right) \quad \text{où} \quad z \in [1 \quad +\infty[$$

On a $f(x) = \arg ch\left[\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)\right]$ avec $x > 0$, si on pose $z = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)$, on a

$$\begin{aligned}
f(x) &= \arg ch(z) \\
&= \ln\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right), \\
&= \ln\left(\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) + \sqrt{\left[\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)\right]^2 - 1}\right), \\
&= \ln\left[\frac{x^2+1}{2x} + \sqrt{\frac{\left(x^2-1\right)^2}{4x^2}}\right], \\
&= \ln\left[\frac{x^2+1}{2x} + \left|\frac{x^2-1}{2x}\right|\right],
\end{aligned}$$

donc selon le signe de $\left|\frac{x^2-1}{2x}\right|$ avec $x > 0$, on distingue deux cas possible

$$f(x) = \begin{cases} \ln\left(\dfrac{x^2+1}{2x} + \dfrac{x^2-1}{2x}\right) & \text{si } x \geq 1 \\ \ln\left(\dfrac{x^2+1}{2x} - \dfrac{x^2-1}{2x}\right) & \text{si } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \ln(x) & \text{si } x \geq 1 \\ \ln(\frac{1}{x}) & \text{si } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \ln(x) & \text{si } x \geq 1 \\ -\ln(x) & \text{si } 0 < x \leq 1 \end{cases} \tag{4.1}$$

On sait que

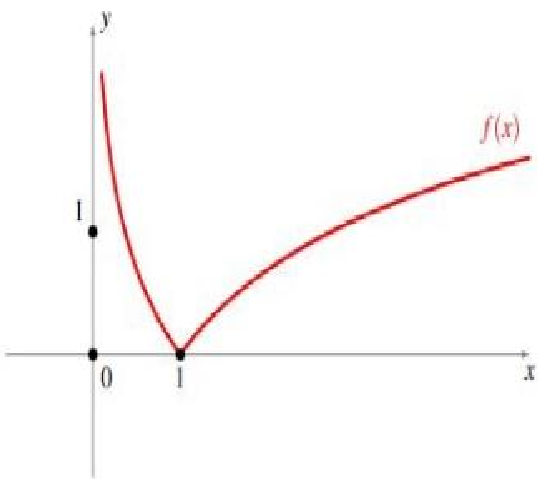
$$\begin{cases} \ln(x) \geq 0 & \text{si } x \geq 1 \\ \ln(x) \leq 0 & \text{si } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

donc

$$|\ln(x)| = \begin{cases} \ln(x) & \text{si } x \geq 1 \\ -\ln(x) & \text{si } 0 < x \leq 1 \end{cases} \tag{4.2}$$

de (4.1) et (4.2), et si on appelle C la courbe de la fonction de la fonction $x \longmapsto \ln(x)$, en endéduit que

$$\begin{cases} (C_f) \equiv (C) & \text{si } x \geq 1 \\ (C_f) \text{ est symétrique à } (C) \text{ par rapport à l'axe des abscisses} & \text{si } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$



Chapitre 5

Développement limité

5.1 Formules de Taylors

Soit f une fonction plusieurs fois dérivable au voisinage d'un point x_0. Dans certaines situations il est important de savoir si on peut approximer $f(x)$ au voisinage de x_0 par un polynôme dont les coefficients dépendent uniquement des dérivées de la fonction f en ce point. Le mathématicien **Brook Taylor** a établi en 1715 une formule qui prend son nom **Formule de Taylor,** et qui permet cette approximation. Dans une première étape la formule confirme que si f est dérivable en x_0, alors elle peut être approchée au voisinage de x_0 par un polynome de premier degré à l'aide de la formule suivante

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0)\, f'(x_0) + (x - x_0)\, \xi(x).$$

Le polynôme d'approximation est

$$p(x) = (x - x_0)\, f'(x_0) + f(x_0)$$

La quantité $(x - x_0)\, \xi(x)$ notée $R_1(x)$ représente l'erreur commise par l'approximation et elle satisfait $\lim\limits_{x\to x_0} R_1(x) = 0$. Maintenant, on souhaite savoir si l'approximation par des polynômes de degré supérieur à 1 est possible.
La formule de **Taylor-Young** représente une généralisation de la formule de taylor et permet d'approcher $f(x)$ au voisinage de x_0 par un polynome de degré $n > 1$.
L'application du théorème de Rolle successivement plusieurs fois permet de trouver une approximation de $f(x)$ au voisinage de x_0 par un polynôme d'ordre supérieur à 1 c'est la formule de **Taylor - Lagrange**. Dans le cas particulier où $x_0 = 0$, la formule **de Taylor - Lagrange** prend le nom de **Maclaurin-Lagrange**.

Dans tout ce qui vient $\mathcal{D}$ est un intervalle de $\mathbb{R}, x_0$ un point intérieur de $\mathcal{D}$, $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, et n un entier fixé dans $\mathbb{N}$. On rappelle que

$n\,! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times n$,
$(n+1)\,! = (n+1)\, n\,!$,
$0\,! = 1$.

5.1.1 Les trois formules de Taylors

Formule de Taylor-Young

Theoreme 5.1 *Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathcal{D}$. Alors pour tout $h \in \mathbb{R}$ tel-que $x_0 + h \in \mathcal{D}$, on a*

$$\begin{aligned} f(x_0+h) &= f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!}f''(x_0) + \frac{h^3}{3!}f^{(3)}(x_0) + \frac{h^4}{4!}f^{(4)}(x_0) + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + h^n\zeta(h), \\ &= \sum_{i=0}^{n}\frac{h^i}{i!}f^{(i)}(x_0) + h^n\zeta(h) \ \ \textit{avec} \ \lim_{h\to 0}\zeta(h) = 0. \end{aligned}$$

Remarque 5.1 *Si on pose $x_0 + h = x$ on a $h = x - x_0$, et la formule de **Taylor-Young** s'écrit*

$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0)\, f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0) + \frac{(x-x_0)^3}{3!}f^{(3)}(x_0) + \frac{(x-x_0)^4}{4!}f^{(4)}(x_0) + \cdots + \frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + (x-x_0)^n\,\zeta(x-x_0),$$

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n}\frac{(x-x_0)^i}{i!}f^{(i)}(x_0) + (x-x_0)^n\,\zeta\,(x-x_0) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to x_0}\zeta\,(x-x_0) = 0.$$

1. Le polynôme $P(x) = \sum_{i=0}^{n}\frac{h^i}{i!}f^{(i)}(x_0)$ ou encore

$$P(x) = f(x_0) + (x-x_0)\, f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0) + \frac{(x-x_0)^3}{3!}f^{(3)}(x_0) + \frac{(x-x_0)^4}{4!}f^{(4)}(x_0) + \cdots + \frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0)$$

   s'appelle le polynôme de **Taylor** à l'ordre n au voisinage de x_0.

2. Le terme $(x-x_0)^n\,\zeta\,(x-x_0)$ s'appelle le reste de **Young** d'ordre n.

Exemple 5.1 *Donner la formule de Taylor-Young à l'ordre n au voisinage de* 0 *de la fonction $x \longmapsto e^x$.*

Solution 5.1 *Sachons que* exp *est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et que* $\exp'(x) = e^x$, *on a alors*

$$e^x = e^0 + (x-0)e^0 + \frac{(x-0)^2e^0}{2!} + \frac{(x-0)^3e^0}{3!} + \cdots + \frac{(x-0)^ne^0}{n!} + (x-0)^n\,\zeta\,(x-0)\,,$$

ce qui donne

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + x^n\zeta(x).$$

Formule de Taylor-Lagrange

Theoreme 5.2 *Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $\mathcal{D}$. Alors pour tout $h \in \mathbb{R}$ tel-que $x_0 + h \in \mathcal{D}$, il existe $\theta \in]0 \;\; 1[$ tel-que*

$$\begin{aligned} f(x_0+h) &= f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!}f''(x_0) + \frac{h^3}{3!}f^{(3)}(x_0) + \frac{h^4}{4!}f^{(4)}(x_0) + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)\,!}f^{(n+1)}(x_0+\theta h)\,, \\ &= \sum_{i=0}^{n} \frac{h^i}{i!}f^{(i)}(x_0) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)\,!}f^{(n+1)}(x_0+\theta h)\,. \end{aligned}$$

Cette formule peut s'écrire

$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0)\,f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0) + \frac{(x-x_0)^3}{3!}f^{(3)}(x_0) + \\ \frac{(x-x_0)^4}{4!}f^{(4)}(x_0) + \cdots + \frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)\,!}f^{(n+1)}\left(x_0+\theta\,(x-x_0)\right),$$

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(x-x_0)^i}{i!}f^{(i)}(x_0) + \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)\,!}f^{(n+1)}\left(x_0+\theta\,(x-x_0)\right).$$

– Le terme $R_n(x_0,x) = \dfrac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)\,!}f^{(n+1)}\left(x_0+\theta\,(x-x_0)\right)$ avec $0 < \theta < 1$, s'appelle le reste de Lagrange d'ordre $n+1$.

Exemple 5.2 *Écrire la formule de Taylor- Lagrange d'ordre 3 entre x et 1 de la fonction $f:\; x \longmapsto f(x) = \ln(x+2)$.*

Solution 5.2 *La fonction f est indéfiniment dérivable sur $]-2 \;\; +\infty[$ et on a*

$$f'(x) = \frac{1}{x+2} \Longrightarrow f'(1) = \frac{1}{3}$$

$$f^{(2)}(x) = f''(x) = \frac{-1}{(x+2)^2} \Longrightarrow f''(1) = \frac{-1}{9}$$

$$f^{(3)}(x) = f'''(x) = \frac{2}{(x+2)^3} \Longrightarrow f'''(1) = \frac{2}{27}$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{-6}{(x+2)^4}$$

$$f(x) = f(1) + (x-1)\,f'(1) + \frac{(x-1)^2}{2!}f''(1) + \frac{(x-1)^3}{3!}f^{(3)}(1) + \frac{(x-1)^4}{(4)\,!}f^{(4)}\left(1+\theta\,(x-1)\right),$$

$$\ln(x+2) = \ln(3) + \frac{1}{3}(x-1) + \frac{1}{18}(x-1)^2 + \frac{1}{81}(x-1)^3 - \frac{(x-1)^4}{4\left[\theta\,(x-1)+3\right]^4}$$

Remarque 5.2 *Il faut remarquer que dans la formule de Taylor- Lagrange d'ordre n entre x et x_0, le polynôme de Taylor est d'ordre n et le reste de Lagrange est d'ordre $n+1$.*

Formule de Maclaurin-Lagrange

Definition 5.1 *La formule de Taylor- Lagrange avec $x_0 = 0$, s'appelle formule de* ***Taylor- Maclaurin.***

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2\,!}f''(0) + \frac{x^3}{3\,!}f^{(3)}(0) + \frac{x^4}{4\,!}f^{(4)}(0) + \cdots + \frac{x^n}{n\,!}f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)\,!}f^{(n+1)}(\theta x) \quad \textit{avec} \;\; 0 < \theta < 1.$$

$$\begin{aligned} f(x) &= P_n(x) + R_n(x), \\ P_n(x) &= f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2\,!}f''(0) + \frac{x^3}{3\,!}f^{(3)}(0) + \frac{x^4}{4\,!}f^{(4)}(0) + \cdots + \frac{x^n}{n\,!}f^{(n)}(0), \\ R_n(x) &= \frac{x^{n+1}}{(n+1)\,!}f^{(n+1)}(\theta x) \quad \text{avec} \;\; 0 < \theta < 1. \end{aligned}$$

Exemple 5.3 *La formule de Maclaurin - Lagrange à l'ordre 4 de la fonction $x \longmapsto e^x$ s'écrit*

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2\,!} + \frac{x^3}{3\,!} + \frac{x^4}{4\,!} + \frac{x^5}{5\,!}e^{\theta x} \;\; \textit{avec} \;\; 0 < \theta < 1.$$

Il existe d'autres variantes de la formule de Taylor à condition que f vérifie les conditions cités dans les théorèmes précédents. Nous avons le théorème suivant

Theoreme 5.3 *Soit f une fonction continûment dérivable sur $[a \;\; b]$ et admet une dérivée d'ordre $(n+1)$ sur $]a \;\; b[$, alors il existe $\eta \in\,]a \;\; b[$ tel-que*

$$\begin{aligned} f(b) = f(a) + (b-a)\,f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2\,!}f''(a) + \frac{(b-a)^3}{3\,!}f^{(3)}(a) + \\ \frac{(b-a)^4}{4\,!}f^{(4)}(a) + \cdots + \frac{(b-a)^n}{n\,!}f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)\,!}f^{(n+1)}(\eta), \end{aligned}$$

Theoreme 5.4 *Si f est $(n+1)$ fois dérivable sur $\mathcal{D}$, alors pour tout $x \in \mathcal{D}$, $x \neq x_0$ il existe un réel η strictement compris entre x et x_0 tel-que*

$$\begin{aligned} f(x) = f(x_0) + (x-x_0)\,f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2\,!}f''(x_0) + \frac{(x-x_0)^3}{3\,!}f^{(3)}(x_0) + \\ \frac{(x-x_0)^4}{4\,!}f^{(4)}(x_0) + \cdots + \frac{(x-x_0)^n}{n\,!}f^{(n)}(x_0) + \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)\,!}f^{(n+1)}(\eta), \end{aligned}$$

Remarque 5.3 *Il est important de remarquer que la formule de Taylor-Lagrange est applicable sur un intervalle alors que la formule de Taylor- Young est applicable au voisinage d'un point.*

Remarque 5.4 *On remarque que dans toutes les formules précédentes $f(x) = P_n(x)+R_n(x)$ où le polynôme de Taylor $P_n(x)$ reste inchangé et le reste $R_n(x)$ change suivant la formule.*

5.1.2 Application de la formule de Taylor au calcul des limites de fonctions

Nous avons vu dans un paragraphe précédent de nouvelles méthodes pour calculer les limites dans certain cas où les limites sont sous des formes indéterminées. La formule de Taylor peut aussi être un outil très important pour le calcul des limites. Avant de passer au calcul des limites en utilisant la formule de Taylor nous avons besoin de certains théorèmes.

Theoreme 5.5 *Soit* $f(x) = P_n(x) + x^n\zeta(x)$ *avec* $\lim_{x\to 0}\zeta(x) = 0$ *le développement de Taylor-Young de* f *au voisinage du point* 0. *Alors*

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{P_n(x)} = 1 \text{ et on écrit } f(x) \sim P_n(x), \quad (x \to x_0)\,.$$

Remarque 5.5 *Le Théorème 5.5 reste vrais si on considère la formule de Taylor-Young au voisinage d'un point quelconque* x_0.

Theoreme 5.6 *Soient* f, g *deux fonctions définies au voisinage d'un point* x_0 *telles-que* $f \sim g \quad (x \to x_0)$.

- *Si* $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$ *alors* $\lim_{x\to x_0} g(x) = a$.
- *De plus si* T, J *sont deux fonctions telles-que* $T \sim J \quad (x \to x_0)$ *alors*

$$fT \sim gJ \quad \text{et} \quad \frac{f}{T} \sim \frac{g}{J}.$$

D'après les Théorèmes 5.5 et 5.6 on en déduit que si

$$f \sim g \text{ et } \quad T \sim J \quad (x \to x_0) \text{ alors } \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{T(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{g(x)}{J(x)}$$

Exemple 5.4 *Calculer* $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4-x}-2}{\sin(x)}$

Solution 5.3 *On pose* $f(x) = \sqrt{4-x} - 2, \quad T(x) = \sin(x)$. *Le développement de Taylor-Young pour* $f(x), \quad g(x)$ *à l'order* 1 *au voisnage de* 0 *donne*

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + x^2\zeta(x) \text{ avec } \lim_{x\to 0}\zeta(x) = 0,$$

$$g(x) = g(0) + xg'(0) + x^2\zeta(x) \text{ avec } \lim_{x\to 0}\zeta(x) = 0,$$

On a
$f(0) = 0,\ T(0) = 0,$
$f'(x) = \dfrac{-1}{2\sqrt{4-x}} \Longrightarrow f'(0) = -\dfrac{1}{4},$
$T'(x) = \cos(x) \Longrightarrow T'(0) = 1,$
par suite

$$f(x) = -\frac{1}{4}x + x^2\zeta(x) \text{ avec } \lim_{x\to 0}\zeta(x) = 0,$$

$$T(x) = x + x^2\zeta(x) \ \ avec \ \ \lim_{x\to 0}\zeta(x) = 0,$$

$$f(x) \sim -\frac{1}{4}x \quad (x \to 0)$$

$$T(x) \sim x \quad (x \to 0)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4-x}-2}{\sin(x)} = \lim_{x\to 0} -\frac{\frac{1}{4}x}{x} = -\frac{1}{4}.$$

La notation petit o

Definition 5.2 *Soient $x_0 \in \mathbb{R}$, V un voisinage de x_0 et f, g deux fonctions définies au voisinage de x_0 sauf peut être en x_0. On suppose que $g(x) \neq 0$ sur $V - \{x_0\}$.*
Si $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$, on dit que f est négligable devant g au voisinage de x_0 et on écrit $f = o(g)$ quand $x \to x_0$ ou $f(x) = o(g(x))$ quand $x \to x_0$, et on lit cette notation f est un petit oh de g quand $x \to x_0$.

Exemple 5.5 *Voici quelques exemples au voisinage de* 0

1. $f(x) = o(1)$ *signifie* $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$,
2. $f(x) = o(x)$ *signifie* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x} = 0$,
3. $f(x) = o((x-x_0)^n)$ *signifie* $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{(x-x_0)^n} = 0$,
4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} x = 0$ *donc* $x^3 = o(x^2)$,
5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}(\sin(x))\dfrac{\sin(x)}{x} = 0$ *donc* $\sin^2(x) = o(x)$,
6. $\lim\limits_{x\to 0} x\cos\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$ *donc* $x\cos\left(\dfrac{1}{x}\right) = o(1)$,
   pour le calcul de la limite de $x\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ *quand* $x \to 0$, *il suffit de voir que pour tout* $x \neq 0$, $-x \leq x\cos\left(\dfrac{1}{x}\right) \leq x$, *et* $0 \leq \lim\limits_{x\to 0} x\cos\left(\dfrac{1}{x}\right) \leq 0$.

5.2 Développements limités

Nous avons vu que la formule de Taylor permet d'approcher une fonction $f(x)$ au voisinage d'un point x_0 par un polynôme $P_n(x)$ de degré inférieur ou égale à n dès que $f^{(n)}(x_0)$ existe. Ce polynôme satisfait

$$f(x) = P_n(x) + (x-x_0)^n\zeta(x-x_0) = P_n(x) + o((x-x_0)^n) \ \ \text{avec} \ \ \lim_{x\to 0}\zeta(x-x_0) = 0. \quad (5.1)$$

Cependant, ce polynôme peut exister sans que $f^{(n)}(x_0)$ existe et même sans que f soit continue en x_0 comme on peut le voir dans l'exemple suivant où on considère une fonction f définie sur $\left[-\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\right]$ par

$$f(x) = \begin{cases} -2 + x - 2x^2 + x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases} \tag{5.2}$$

En utilisant le théorème des gendarmes on peut montrer que $\lim\limits_{x\to 0} x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$, par suite $\lim\limits_{x\to 0} -2 + x - 2x^2 + x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = -2 \neq f(0) = 0$ donc f n'est pas continue en 0.

De plus, on voit bien qu'au voisinage de 0 on a $x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = o\left(x^2\right)$ car $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2} = 0$, donc

$$f(x) = -2 + x - 2x^2 + o\left(x^2\right).$$

Alors pour tout $x \neq 0$ et $x \in \left[-\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\right]$ on a

$$f(x) = P_n(x) + o\left(x^2\right) \quad \text{avec} \quad n = 2,\ P_2(x) = -2 + x - 2x^2,$$

donc (5.1) est satisfaite sans que f soit continue en 0, c'est ce qui conduit à une nouvelle notion dite développement limité.

Développement limité d'ordre n au voisinage de 0

Definition 5.3 *Soit f une fonction définie au voisinage de 0, sauf peut etre en 0. On dit que f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 s'il existe un intervalle ouvert $\mathcal{D}$ centré en 0 et des constantes a_i, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ telles-que pour tout $x \neq 0$ et $x \in \mathcal{D}$*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots a_n x^n + x^n \zeta(x)$$

$$\textit{où } \zeta : \mathcal{D} \to \mathbb{R} \quad \textit{et vérifie } \lim_{x\to 0} \zeta(x) = 0.$$

On peut aussi écrire

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots a_n x^n + o\left(x^n\right),$$

$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots a_n x^n$ s'appelle la partie régulière du développement,

$x^n \zeta(x) = o\left(x^n\right)$ c'est le reste ou terme complémentaire.

$DL_n(0)$ signifie le développement limité à l'ordre n au voisinage de 0.

Exemple 5.6 *Donner le développement limité de la fonction* $x \longmapsto \dfrac{1}{1-x}$

On considère la somme de la suite géomťrique de raison x

$$1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots+x^n,$$

on a

$$1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots+x^n=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}=\frac{1}{1-x}-\frac{x^{n+1}}{1-x},$$

on en déduit que

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots+x^n+\frac{x^{n+1}}{1-x}, \tag{5.3}$$

l'équation (5.3) s'ecrit aussi

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots+x^n+x^n\frac{x}{1-x},$$

$$\text{où} \quad \lim_{x\to 0}\frac{x}{1-x}=0.$$

D'ou, le développement limité à l'ordre n au voisinage de 0 de la fonction $x\longmapsto \dfrac{1}{1-x}$ est

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots+x^n+x^n\zeta(x)=1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots+x^n+o\left(x^n\right),$$

$$\text{avec} \quad \zeta(x)=\frac{x}{1-x} \quad \text{et} \quad x\neq 1,$$

En particulier

$$DL_0(0) \quad \text{de la fonction de la fonction} \quad x\longmapsto\frac{1}{1-x} \quad \text{est} \quad 1+o(1)$$

$$DL_1(0) \quad \text{de la fonction de la fonction} \quad x\longmapsto\frac{1}{1-x} \quad \text{est} \quad =1+x+o(x)$$

$$DL_2(0) \quad \text{de la fonction} \quad x\longmapsto\frac{1}{1-x} \quad \text{est} \quad 1+x+x^2+o(x^2)$$

Remarques 5.1 *1. Si f admet un $DL_n(0)$ alors $\lim_{x\to 0} f(x)=a_0$ donc on en conclue que*

$$\left(\lim_{x\to 0} f(x) \text{ n'existe pas}\right) \Longrightarrow \left(f \text{ n' admet pas un } \quad DL_n(0)\right),$$

2. l'existence de la limite de $f(x)$ en 0 est une condition nécessaire pour que le $DL_n(0)$ existe.

3. Il est facile d'établir que si f est continue en 0 et admet un $DL_1(0)$ alors f est dérivable en 0

Proposition 5.1 *Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ au voisinage de 0 alors elle admet un développement limité au point 0 d'ordre n donné par la formule de Taylor-Young au voisinage de 0*

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f^{(2)}(0)}{2\,!}x^2+\frac{f^{(3)}(0)}{3\,!}x^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n\,!}x^n+x^n\zeta\left(x\right) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to 0}\zeta(x)=0.$$

Theoreme 5.7 *Si f admet un $DL_n(0)$, ce développement est unique.*

Corollaire 5.1 *Si f est paire (resp. impaire) alors la partie polynomiale de son DL en 0 ne contient que des monômes de degrés pairs (resp. impairs)*

5.2.1 Développement limité des fonctions usuelles en 0

En utilisant la formule de Taylor-Young on donne les $DL_n(0)$ suivants

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2\,!} + \frac{x^3}{3\,!} + \cdots + \frac{x^n}{n\,!} + x^n\zeta\,(x)\,.$$

$$ch(x) = 1 + \frac{x^2}{2\,!} + \frac{x^4}{4\,!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)\,!} + x^{2n+1}\zeta\,(x)\,.$$

$$sh(x) = \frac{x}{1\,!} + \frac{x^3}{3\,!} + \frac{x^5}{5\,!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n+1)\,!} + x^{2n+2}\zeta\,(x)\,.$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2\,!} + \frac{x^4}{4\,!} - \cdots + (-1)^n\,\frac{x^{2n}}{(2n)\,!} + x^{2n+1}\zeta\,(x)\,.$$

$$\sin(x) = \frac{x}{1\,!} - \frac{x^3}{3\,!} + \frac{x^5}{5\,!} - \cdots + (-1)^n\,\frac{x^{2n}}{(2n+1)\,!} + x^{2n+2}\zeta\,(x)\,.$$

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\,\frac{x^n}{n} + x^n\zeta\,(x)\,.$$

$$(1+x)^p = 1 + px + \frac{p(p-1)}{2\,!}x^2 + \cdots + \frac{p(p-1)\ldots(p-n+1)}{n\,!}x^n + x^n\zeta\,(x)\,. \tag{5.4}$$

Remarque 5.6 *Pour obtenir les $DL_n(0)$ des fonctions $x \longmapsto \sqrt{1+x}$, $\quad x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$, $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x}$, il suffit d'appliquer la formule (5.4) respectivement pour $p = \dfrac{1}{2}$, $p = -\dfrac{1}{2}$, $p = -1$. À partir des résultats obtenus on peut déduire les $DL_n(0)$ des fonctions $x \longmapsto \sqrt{1-x}$, $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$, $\quad x \longmapsto \dfrac{1}{1-x}$, en faisant le changement de variable $x \longmapsto -x$.*

Remarque 5.7 *Souvent, Pour obtenir le DL d'une fonction en un point quelconque x_0, on ramène le problème en 0 en faisant le changement de variable $h = x - x_0$*

Exemple 5.7 *Donner le $DL_n(2)$ de la fonction $x \longmapsto e^x$.*

Solution 5.4 *On pose $h = x - 2$ quand x est au voisinage de 2 le h est au voisinage de 0*

$$e^x = e^{h+2} = e^2 e^h,$$

donc on écrit le $DL_n(0)$ de la fonction $h \longmapsto e^h$, après on remplace h par sa valeur.

$$e^h = 1 + h + \frac{h^2}{2\,!} + \frac{h^3}{3\,!} + \cdots + \frac{h^n}{n\,!} + h^n \zeta\left(h\right).$$

$$e^x = e^2 \left[1 + (x-2) + \frac{(x-2)^2}{2\,!} + \frac{(x-2)^3}{3\,!} + \cdots + \frac{(x-2)^n}{n\,!} + (x-2)^n \zeta\left(x-2\right) \right],$$

$$\text{avec } \lim_{x \to 2} \zeta\left(x-2\right) = 0.$$

5.2.2 Opérations sur les développements limités

Soient f, g deux fonction admettant des $DL_n(0)$ telles-que

$$f(x) = P_n(x) + x^n \zeta_1(x), \quad \lim_{x \to 0} \zeta_1\left(x\right) = 0$$

$$g(x) = Q_n(x) + x^n \zeta_2(x), \quad \lim_{x \to 0} \zeta_2\left(x\right) = 0$$

Proposition 5.2 *les fonctions suivante admettent des $DL_n(0)$.*

– *La fonction $f + g$ admet un $DL_n(0)$ telle-que*

$$\left(f+g\right)(x) = P_n(x) + Q_n(x) + x^n \zeta(x) \;\; \text{avec } \lim_{x \to 0} \zeta\left(x\right).$$

– *La fonction fg admet un $DL_n(0)$ telle-que*

$$fg(x) = H_n(x) + + x^n \zeta(x) \;\; \text{avec } \lim_{x \to 0} \zeta\left(x\right),$$

où $H_n(x)$ est le polynôme $P_n(x) \times Q_n(x)$ tronqué à l'ordre n.
On rappelle que ***tronquer un polynôme*** *à l'ordre n signifie que l'on garde uniquement les monômes de degré inférieur ou égal à n.*

– *Pour déterminer le $DL_n(0)$ de la fonction $\frac{1}{g}$, on ecrit $g(x) = Q_n(x) + x^n \zeta_2(x)$ sous la forme $g(x) = 1 + u$ ou $g(x) = 1 - u$ et on utlise le $DL_n(0)$ de $\dfrac{1}{1+u}$ ou $\dfrac{1}{1-u}$.*

– *Pour avoir le $DL_n(0)$ de $\frac{f}{g}$, il suffit d'écrire $\frac{f}{g}(x)$ sous la forme $\frac{f}{g}(x) = f(x) \times \dfrac{1}{g(x)}$, et utiliser la technique de calcul d'un $DL_n(0)$ du produit de deux fonctions.*

Exemple 5.8 *Soient f, g deux fonctions définies au voisinage de 0 et admettant des $DL_2(0)$ telles-que*

$$f(x) = 3x - x^2 + x^2 \zeta_1(x), \quad \lim_{x \to 0} \zeta_1\left(x\right) = 0$$

$$g(x) = 2 + x + x^2 \zeta_2(x), \quad \lim_{x \to 0} \zeta_2\left(x\right) = 0$$

Donner le développement d'ordre 2 au voisinage de 0 de la fonction $x \longmapsto \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Solution 5.5 *On sait que le $DL_2(0)$ de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x}$ est*

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + x^2\zeta(x),$$

d'autre part

$$g(x) = 2\left(1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2\zeta_2(x)\right) = 2\,(1+u) \quad avec \;\; u = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2\zeta_2(x).$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{g(x)} &= \frac{1}{2}\frac{1}{1+u}, \\
&= \frac{1}{2}\Big(1 - u + u^2 + u^2\zeta(u)\Big), \\
&= \frac{1}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2\zeta_2(x)\right) + \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2\zeta_2(x)\right)^2 + \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2\zeta_2(x)\right)^2 \zeta\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2\zeta_2(x)\right)\right), \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}x^2 + x^2\theta(x) \;\; avec \;\; \lim_{x\to 0}\theta(x) = 0.
\end{aligned}$$

Le $DL_2(0)$ de la fonction $x \longmapsto \dfrac{f(x)}{g(x)}$ est donné par

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)}{g(x)} &= f(x)\frac{1}{g(x)}, \\
&= \Big(3x - x^2 + x^2\zeta_1(x)\Big)\Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}x^2 + x^2\theta(x)\Big), \\
&= \frac{3}{2}x - \frac{5}{4}x^2 + x^2\theta_1(x) \;\; avec \;\; \lim_{x\to 0}\theta_1(x) = 0.
\end{aligned}$$

Proposition 5.3 *Soient f, g deux fonctions admettant des $DL_n(0)$, telles-que*

$$f(x) = P_n(x) + x^n\zeta_1(x), \;\; \lim_{x\to 0}\zeta_1(x) = 0$$

$$g(x) = Q_n(x) + x^n\zeta_2(x), \;\; \lim_{x\to 0}\zeta_2(x) = 0$$

Si $g(0) = 0$ alors la fonction fog admet un $DL_n(0)$ dont la partie polynomiale est le polynôme tronqué à l'ordre n de la composition $P_n(Q_n(x))$.

Exemple 5.9 *Donner $DL_3(0)$ de la fonction $x \longmapsto \sin(\ln(1+x))$*

Solution 5.6 *On considère les deux fonctions f, g définies par*

$$f : \; x \longmapsto f(x) = \sin(x)$$

$$g:\ x \longmapsto g(x) = \ln(1+x)$$

elles sont définies au voisinage de 0 *et admettent un* $DL_3(0)$ *telles-que*

$$f(x) = x - \frac{x^3}{3\,!} + x^3\zeta_1(x) \ \ \textit{avec} \quad \lim_{x\to 0}\zeta_1(x) = 0$$

$$g(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\zeta_2(x) \ \ \textit{avec} \quad \lim_{x\to 0}\zeta_2(x) = 0$$

$g(0) = \ln(1) = 0$ *donc la fonction* $fog : x \longmapsto (fog)(x) = f(g(x)) = \sin\Big(\ln(1+x)\Big)$ *admet un* $DL_3(0)$ *tel-que*

$$\begin{aligned}\sin(\ln(1+x)) &= \Big(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\Big) - \frac{\Big(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\Big)^3}{3\,!} + o(x^3)\\ &= \Big(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\Big) - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3),\\ &= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3).\end{aligned}$$

5.3 Applications des développements limités

5.3.1 Calcul des limites

Exemple 5.10 *Calculer* $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x) - \tan(x) + \frac{1}{2}\sin^2(x)}{3x^2\sin^2(x)}$

Solution 5.7 *Comme le dénominateur contient un monôme de degré* 2 *qui est multiplier par un* $\sin^2(x)$ *donc le numérateur doit etre développé à l'ordre* 4 *au voisinage de* 0.

$$\ln(1+x) - \tan(x) + \frac{1}{2}\sin^2(x) = \Big(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)\Big) - \Big(x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)\Big) + \frac{1}{2}\Big(x + o(x^2)\Big)^2 = \frac{5}{12}x^4 + o(x^4).$$

$$3x^2\sin^2(x) = 3x^2\left(x + o(x^2)\right)^2 = 3x^4 + o(x^4)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x) - \tan(x) + \frac{1}{2}\sin^2(x)}{3x^2\sin^2(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{5}{12}x^4 + o(x^4)}{3x^4 + o(x^4)} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{5}{12} + o(1)}{3 + o(1)} = \frac{5}{36} \ \ \textit{car} \ \lim_{x\to 0} o(1) = 0$$

5.3.2 Position d'une courbe par rapport à sa tangente

Proposition 5.4 *Soit* $f:\ \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction admettant un développement limité en* x_0 *telle-que*

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_k(x - x_0)^k + (x - x_0)^k\zeta(x),$$

où k *est le plus petit entier supérieur ou égal à* 2 *pour lequel* a_k *est non nul. Alors l'équation de la tangente à la courbe de* f *en* x_0 *est* $y = a_0 + a_1(x - x_0)$. *La position de la courbe par rapport à sa tangente en* x_0 *est donnée par le signe de* $f(x) - y$, *c'est a dire le signe de* $a_k(x - x_0)^k$.

On distingue trois cas possibles.

1. Si $f(x) - y \geq 0$ la courbe est au dessus de sa tangente.
2. Si $f(x) - y \leq 0$ la courbe est en dessous de sa tangente.
3. Si le signe de $f(x) - y$ change lorsqu'on passe de $x < x_0$ à $x > x_0$ alors la courbe traverse sa tangente au point $(x_0, f(x_0))$ qui est dit point d'inflexion.

Remarque 5.8 *Si $f''(x_0)$ existe alors la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 au voisinage de x_0 donne*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + (x - x_0)^2 \zeta(x).$$

l'équation de la tangente à la courbe de f en x_0 est $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, de plus si $f''(x_0) \neq 0$ alors $f(x) - y$ garde un signe constant autour de x_0. En conséquence si x_0 est un point d'inflexion alors $f''(0) = 0$ (la réciproque est fausse)

Exercise 5.1 *Soit $f : x \longmapsto f(x) = x^4 - 2x^3 + 1$.*

- *Donner l'équation de la tangente en $\frac{1}{2}$ à la courbe de f*
- *Préciser la position de la courbe par rapport à sa tangente en $\frac{1}{2}$*
- *Donner les points d'inflexion s'ils existent.*

Solution 5.8 $f'(x) = 4x^3 - 6x^2$, $f''(x) = 12x^2 - 12x$, $f''(\frac{1}{2}) = -3 \neq 0$, *donc* $k = 2$. *Le* $DL_2(\frac{1}{2})$ *de* f *est*

$$f(x) = f(\frac{1}{2}) + f'(\frac{1}{2})\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{f''(\frac{1}{2})}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \zeta(x).$$

L'équation de la tangente en $x_0 = \frac{1}{2}$ *est* $y = f(\frac{1}{2}) + f'(\frac{1}{2})\left(x - \frac{1}{2}\right)$ *c'est à dire* $y = -x + \frac{21}{16}$.

$$f(x) - y = -\frac{3}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \zeta(x) \leq 0,$$

la courbe est en dessous de la tangente.
Les points d'inflexion s'ils existent ils vérifient $f''(x) = 0$. *Autrement dit, les points d'inflexion sont choisis parmi les solutions de l'équation* $f''(x) = 0$, *c'est a dire parmi* $x = 0$ *et* $x = 1$. *Pour cette raison on cherche le développement limité de* f *aux points* 0 *et* 1.
on a $f^{(3)}(x) = 24x - 12$, $f^{(4)}(x) = 24$.
On a $f^{(3)}(0) = -12 \neq 0$, *le* $DL_3(0)$ *est donné par*

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{6}x^3 + o(x^3)$$

l'équation de la tangente en $x_0 = 0$ *est* $y = 1$ *de plus* $\frac{f^{(3)}(0)}{6}x^3$ *change de signe en* 0 *c'est à dire* $f(x) - 1$ *change de signe et par suite* 0 *est un point d'inflexion.*
$f^{(3)}(1) = 12 \neq 0$ *donc le* $DL_3(1)$ *est donné par*

$$f(x) = f(1) + f'(1)(x - 1) + \frac{f^{(3)}(1)}{6}(x - 1)^3 + o\left((x - 1)^3\right)$$

$f(1) = 0$ et $f'(1) = -2$ donc l'équation de la tangente en $x_1 = 1$ est $y = -2(x-1)$ de plus $\dfrac{f^{(3)}(1)}{6}(x-1)^3$ change de signe en 1 c'est à dire $f(x) + 2(x-1)$ change de signe et par suite 1 est un point d'inflexion.

5.3.3 développement limité en $+\infty$

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]t_0 \; +\infty[$. On dit que f admet un développement limité en $+\infty$ à l'ordre n s'ils existent des constantes $a_0, a_1, \ldots, a_n$ telles-que

$$f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \frac{a_3}{x^3} + \cdots + \frac{a_n}{x^n} + \frac{1}{x^n}\zeta(\frac{1}{x}) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to+\infty} \zeta(\frac{1}{x}) = 0.$$

Exemple 5.11 *Donner le développement limité en $+\infty$ s'il existe de la fonction $x \longmapsto \ln\left(2 + \frac{1}{x}\right)$.*

Solution 5.9

$$D_f =]0 \; +\infty[$$

$$\ln\left(2 + \frac{1}{x}\right) = \ln\left[2\left(1 + \frac{1}{2x}\right)\right] = \ln(2) + \ln\left(1 + \frac{1}{2x}\right)$$

On pose $y = \dfrac{1}{2x}$ il est bien clair que $y \to 0$ quand $x \to +\infty$, on connait le $DL_n(0)$ de la fonction $y \longmapsto \ln(1+y)$

$$\ln(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{y^n}{n} + y^n\zeta(y) \quad avec \quad \lim_{y\to 0}\zeta(y) = 0$$

on en déduit que

$$\ln\left(2 + \frac{1}{x}\right) = \ln(2) + \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^2} + \frac{1}{24x^3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n2^n x^n} + \frac{1}{x^n}\zeta(\frac{1}{x}) \quad avec \quad \lim_{x\to+\infty}\zeta(\frac{1}{x}) = 0$$

Remarque 5.9 *Ce développment limité nous permet de voir le comportement de f en $+\infty$ (resp.$-\infty$).*
Comme on peut le voir $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ln(2)$ de plus $f(x) - \ln(2) \geq 0$ donc $f(x)$ tend vers $\ln(2)$ tout en restant au dessus de la droite d'équation $y = \ln(2)$.

Remarque 5.10 *On peut définir le développement limité en $-\infty$ à l'ordre n de la même manière.*
Le développement limité en $+\infty$ (resp. $-\infty$) s'appelle aussi le développement assymptotique.
La fonction f admet un développement limité en $+\infty$ (resp. $-\infty$) à l'ordre n veut dire que la fonction qui $x \longmapsto f(\frac{1}{x})$ admet un développement en 0^+ à l'ordre n.

Proposition 5.5 *On suppose que la fonction* $x \longmapsto \dfrac{f(x)}{x}$ *admet un DL en* $+\infty$ *(* $-\infty$ *)*

$$\frac{f(x)}{x} = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_k}{x^k} + \frac{1}{x^k}\zeta(\frac{1}{x})$$

où k *est le plus petit entier* ≥ 2 *tel-que* a_k *soit non nul. Alors* $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) - (a_0x + a_1) = 0$ *et la droite d'équation* $y = a_0x + a_1$ *est dite asymptote à la courbe en* $+\infty$ *(resp.*$-\infty$*). La position de la courbe par rapport à cette asymptote est donnée par le signe de* $\dfrac{a_k}{x^{k-1}}$.

Exemple 5.12 *Trouver l'assymptote en* $+\infty$ *de la fonction* $x \longmapsto e^{\frac{1}{x}}\sqrt{x^2-1}$

Solution 5.10

$$\frac{f(x)}{x} = e^{\frac{1}{x}}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = e^{\frac{1}{x}}\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}$$

En utilisant le développement limité des fonctions $x \longmapsto e^x$ *et* $x \longmapsto \sqrt{1-x}$ *on trouve :*

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{x} &= \Big(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{6x^3} + \frac{1}{x^3}\zeta(\frac{1}{x})\Big)\Big(1 - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x^3}\zeta(\frac{1}{x})\Big), && (5.5)\\ &= 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{x^3}\zeta(\frac{1}{x}), && (5.6) \end{aligned}$$

donc l'asymptote en $+\infty$ est la droite d'équation $y = x + 1$ et comme $-\dfrac{1}{3x^2}$ est négatif alors la courbe reste en dessous de cette asymptote

---

5.4 Exercices Corrigés

Exercise 5.2 *Etablir pour chacune des fonctions* f *proposées ci-dessous un déveleoppement limité en* 0 *à l'ordre* n

1. $f(x) = e^x \quad n = 5,$
2. $f(x) = \ln(1+x^2) \quad n = 6,$
3. $f(x) = \sin(2x) + \cos(x^2) \quad n = 7,$
4. $f(x) = e^{3x}\sin(2x) \quad n = 4,$
5. $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{(1+x)^2} \quad n = 3,$
6. $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}} \quad n = 3.$

solution

1) Le $DL_5(0)$ de la fonction $x \longmapsto e^x$ est donné par la formule de Taylor-Young au voisinage de 0 à l'ordre 5 et on a

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3\,!} + \frac{x^4}{4\,!} + \frac{x^5}{5\,!} + o(x^5).$$

2) On sait que $DL_6(0)$ de la fonction $x \longmapsto \ln(1+x)$ est donné par la formule

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + x^6\zeta(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to 0}\zeta(x) = 0. \tag{5.7}$$

Maintenant, on utilise la formule (5.7) pour déduire le $DL_6(0)$ de la fonction $x \longmapsto \ln\left(1+x^2\right)$. Il suffit de faire un changement de variable $y = x^2$, et y est au voisinage de 0 puisque x l'est. On a alors

$$\begin{aligned}
\ln\left(1+x^2\right) = \ln(1+y) &= y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \frac{y^5}{5} - \frac{y^6}{6} + y^6\zeta(y) \quad \text{avec} \quad \lim_{y\to 0}\zeta(y) = 0 \\
&= x^2 - \frac{\left(x^2\right)^2}{2} + \frac{\left(x^2\right)^3}{3} - \frac{\left(x^2\right)^4}{4} + \frac{\left(x^2\right)^5}{5} - \frac{\left(x^2\right)^6}{6} + \left(x^2\right)^6\zeta(\left(x^2\right)) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to 0}\zeta(x^2) = 0 \\
&= x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} + x^6\theta(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to 0}\theta(x) = 0.
\end{aligned}$$

3) On suit la même technique que dans la question 2 pour donner les $DL_7(0)$ des fonctions $x \longmapsto \sin(2x)$ et $x \longmapsto \cos(x^2)$.
On considère les $DL_7(0)$ suivants

$$\sin(y) = y - \frac{y^3}{3\,!} + \frac{y^5}{5\,!} - \frac{y^7}{7\,!} + y^8\zeta_1(y) \quad \text{avec} \quad \lim_{y\to 0}\zeta_1(y) = 0$$

$$\sin(y) = y - \frac{y^3}{3\,!} + \frac{y^5}{5\,!} - \frac{y^7}{7\,!} + y^7\zeta_2(y) \quad \text{avec} \quad \lim_{y\to 0}\zeta_2(y) = 0$$

En remplaçant y par $2x$ on trouve

$$\sin(2x) = 2x - \frac{(2x)^3}{3\,!} + \frac{(2x)^5}{5\,!} - \frac{(2x)^7}{7\,!} + x^7\zeta_3(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to 0}\zeta_3(x) = 0$$

ce qui donne

$$\sin(2x) = 2x - \frac{4}{3}x^3 + \frac{4}{15}x^5 - \frac{8}{315}x^7 + x^7\zeta_3(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to 0}\zeta_3(x) = 0 \tag{5.8}$$

De la même manière on a :

$$\cos(y) = 1 - \frac{y^2}{2\,!} + \frac{y^4}{4\,!} - \frac{y^6}{6\,!} + y^7\xi_1(y) \quad \text{avec} \quad \lim_{y\to 0}\xi_1(y) = 0$$

$$\cos(x^2) = 1 - \frac{(x^2)^2}{2\,!} + \frac{(x^2)^4}{4\,!} - \frac{(x^2)^6}{6\,!} + (x^2)^7\xi_1((x^2)) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to 0}\xi_1(x^2) = 0$$

$$\cos(x^2) = 1 - \frac{x^4}{2\,!} + x^7\xi_2(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to 0}\xi_2(x)) = 0 \tag{5.9}$$

La somme de (5.8) et (5.9) donne le $DL_7(0)$ de f et on a

$$f(x) = \sin(2x) + \cos(x^2) = 1 + 2x - \frac{4}{3}x^3 - \frac{x^4}{2\,!} + \frac{4}{15}x^5 - \frac{8}{315}x^7 + x^7\theta(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to 0}\theta(x) = 0$$

4) D'abord on cherche le $DL_4(0)$ des fonctions $x \longmapsto e^{3x}$ et $x \longmapsto \sin(2x)$
D'aprés ce qui précde on a

$$e^{3x} = 1 + 3x + \frac{(3x)^2}{2} + \frac{(3x)^3}{3\,!} + \frac{(3x)^4}{4\,!} + (3x)^4\zeta(3x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to 0} \zeta(3x) = 0.$$

$$e^{3x} = 1 + 3x + \frac{9}{2}x^2 + \frac{9}{2}x^3 + \frac{27}{8}x^4 + x^4\zeta_1(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to 0} \zeta_1(x) = 0.$$

$$\sin(2x) = 2x - \frac{4}{3}x^3 + x^4\xi(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to 0} \xi(x) = 0$$

D'après les règles de calcul le $DL_4(0)$ de f est donné par

$$f(x) = \left(1 + 3x + \frac{9}{2}x^2 + \frac{9}{2}x^3 + \frac{27}{8}x^4 + x^4\zeta_1(x)\right)\left(2x - \frac{4}{3}x^3 + x^4\xi(x)\right)$$

$$f(x) = 2x + 6x^2 + \frac{23}{3}x^3 + 5x^4 + x^4\theta(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to 0} \theta(x) = 0$$

5) Il suffit d'écrire $f(x)$ sous la forme suivante :

$$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{(1+x)^2} = \ln(1+x)\,(1+x)^{-2}$$

On connait le développement limité des fonctions $x \longmapsto \ln(1+x)$ et
$x \longmapsto (1+x)^p$ avec $p = -2$. on trouve

$$f(x) = x - \frac{5}{2}x^2 + \frac{13}{3}x^3 + o(x^3).$$

6) $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ $\quad n = 3$, dans ce cas on ne peut pas utiliser le développement limité de $x \longmapsto (1+x)^p$ avec $p = \dfrac{1}{x}$, car on exige que p soit une constante. On utilise la technique suivante :

$$f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)} = e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}.$$

D'abord, on donne le $DL_4(0)$ de la fonction $x \longmapsto \ln(1+x)$ et quand on multiplie par $\dfrac{1}{x}$ on aboutit à un $DL_3(0)$ et on calcul l'exponentiel du développement limité trouvé.
En d'autre termes :

$$\frac{1}{x}\ln(1+x) = \frac{1}{x}\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)\right) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + o(x^3)$$

par suite on trouve

$$f(x) = e^{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + o(x^3)} = e^{1+h} = e^1 e^h.$$

Quand x est au voisinage de 0, h est au voisinage de 0, donc on écrit le développement limité de la fonction $h \longmapsto e^h$ au voisinage de 0 et à l'ordre 3.
un calcul simple donne

$$\begin{aligned} f(x) &= e\Big(1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{6} + o(h^3)\Big) \\ &= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right) + \frac{1}{6}\left(\frac{-1}{8}x^3\right) + o(x^3) \\ &= e - \frac{e}{2}x + \frac{11e}{24}x^2 - \frac{7e}{16}x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

$$\text{où} \quad h = -\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + o(x^3)$$

Exercise 5.3 *Le but de cet exercice est de déterminer le développement limité de la fonction f au voisinage de 0 par deux méthodes où $f :\ x \longmapsto f(x) = \tan(x)$.*
1) *Appliquer la formule de Taylor-Young pour trouver le $DL_3(0)$ de f.*
2) *Rappeler le $DL_5(0)$ des fonctions $x \longmapsto \sin(x)$, $x \longmapsto \cos(x)$, $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x}$.*
3) *Déterminer le $DL_5(0)$ de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{\cos(x)}$ sachant que cette fonction est la composée des deux fonctions $x \longmapsto \cos(x) - 1$ et $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x}$.*
4) *En déduire le $DL_5(0)$ de la fonction f.*

solution

1) La formule de Taylor-Young à l'ordre 3 au voisinage de 0 s'écrit :

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1\,!}x + \frac{f''(0)}{2\,!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3\,!}x^3 + o(x^3).$$

On a

$$f(x) = \tan(x) \Longrightarrow f(0) = 0,$$

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} \Longrightarrow f'(0) = 1,$$

$$f''(x) = \frac{2\sin(x)}{\cos^3(x)} \Longrightarrow f''(0) = 0,$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{2 + 4\sin^2(x)}{\cos^4(x)} \Longrightarrow f^{(3)}(0) = 2,$$

on a alors :

$$f(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$

2) D'après le cours on a les $DL_5(0)$ suivants

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x}{120}x^5 + o(x^5)$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + o(x^5)$$

3) On pose $g(x) = \cos(x) - 1 = -\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + o(x^5)$, $T(x) = \dfrac{1}{1+x}$ on a :

$$T\left(g(x)\right) = \frac{1}{1+g(x)} = \frac{1}{\cos(x)}$$

de plus, $g(0) = 0$. En appliquant les règles de calcules du développement limité pour les fonctions composées on trouve

$$\frac{1}{\cos(x)} = 1 - \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) + \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)^2 - \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)^3 + \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)^4 - \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)^5 + o(x^5),$$

on développe et on ne garde que les monômes de degré inférieur ou égal à 5, on trouve

$$\frac{1}{\cos(x)} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + o(x^5).$$

4)

$$f(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \sin(x)\frac{1}{\cos(x)},$$

$$\begin{aligned} \tan(x) &= \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x}{120}x^5\right)\left(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4\right) + o(x^5), \\ &= x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5). \end{aligned}$$

Exercise 5.4 *Calculer* $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan(2x) - 2\tan(x) - 2\tan^3(x)}{x^5}$.

solution

Comme le dénominateur est de degré 5 donc on va ecrire le développement du numérateur à l'ordre 5 au voisinage de 0. D'après l'exercice precédent on a

$$\tan(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5),$$

il en résulte que

$$\tan(2x) = 2x + \frac{8}{3}x^3 + \frac{64}{15}x^5 + o(x^5),$$

$$\tan^3(x) = \left(x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5\right)^3 + o(x^5),$$

$$\text{donc} \quad \tan^3(x) = x^3 + x^5 + o(x^5),$$

l'addition de ces développements donne

$$\tan(2x) - 2\tan(x) - 2\tan^3(x) = 2x^5 + o(x^5),$$

$$\tan(2x) - 2\tan(x) - 2\tan^3(x) = 2x^5 + x^5\zeta(x), \text{ avec } \lim_{x\to 0}\zeta(x) = 0$$

on a alors

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(2x) - 2\tan(x) - 2\tan^3(x)}{x^5} = \lim_{x\to 0}\frac{2x^5 + x^5\zeta(x)}{x^5} = 2 + \lim_{x\to 0}\zeta(x) = 2.$$

Exercise 5.5 *1. Donner le développement à l'ordre* 4*, au voisinage de* 0 *de*

$$f(x) = e^x \ln(1+x).$$

2. *En déduire les valeurs de* $f''(0)$ *et* $f^{(4)}(0)$*.*
3. *Donner l'équation de la tangente en* $x = 0$ *et priser sa position par rapport à la courbe au point* 0*.*
4. *Utiliser le développement limité pour calculer la limite suivante*

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}\ln^2(1+x) - x^2 - x^3}{x^4}.$$

solution
1)

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4),$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4),$$

$$f(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}\right)\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right) + o(x^4),$$

en développant et en gardant les termes nécessaires seulement on trouve

$$f(x) = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^4).$$

2) Le développement de Taylor-Young à l'ordre 4 au voisinage de 0, donne

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + o(x^4),$$

par identification on a

$$\frac{f''(0)}{2!} = \frac{1}{2} \Longrightarrow f''(0) = 1$$

$$\frac{f^{(4)}(0)}{4!} = 0 \Longrightarrow f''(0) = 0.$$

3) Le développement limité de f donne l'équation de la tangente en 0 qui est $y = x$. et on a

$$f(x) - x = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^4)$$

Comme $\frac{1}{2}x^2$ est toujours positif, donc la courbe est située au dessus de sa tangente au voisinage de 0.

4) Il suffit de remarquer que

$$e^{2x}\ln^2(1+x) = (f(x))^2 = \left(x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3\right)^2 + o(x^4) = x^2+x^3+\frac{11}{12}x^4+o(x^4)$$

par suite on a

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}\ln^2(1+x)-x^2-x^3}{x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{11}{12}x^4+o(x^4)}{x^4} = \frac{11}{12}+\lim_{x\to 0}\frac{o(x^4)}{x^4} = \frac{11}{12}.$$

Exercise 5.6 *1. Donner le développement assymptotique à l'ordre* 2 *en* $+\infty$ *et* $-\infty$ *de la fonction*

$$x \longmapsto f(x) = e^{\frac{1}{x}}\sqrt{x(x-3)} - \frac{x}{2}.$$

2. En déduire les assymptotes obliques et leurs positions par rapport à la courbe de f.

solution

En $+\infty$, $\sqrt{x^2} = x$

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)}{x} &= e^{\frac{1}{x}}\frac{\sqrt{x(x-3)}}{x} - \frac{1}{2},\\
&= e^{\frac{1}{x}}\sqrt{1-\frac{3}{x}} - \frac{1}{2},\\
&= \left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{6x^3}+\frac{1}{x^3}\zeta\left(\frac{1}{x}\right)\right)\left(1+\frac{3}{2x}+\frac{9}{8x^2}+\frac{27}{16x^3}+\frac{1}{x^3}\zeta\left(\frac{1}{x}\right)\right) - \frac{1}{2},\\
&= \frac{1}{2}-\frac{1}{2x}-\frac{17}{8x^2}-\frac{163}{48x^3}+\frac{1}{x^3}\zeta\left(\frac{1}{x}\right),
\end{aligned}$$

$$f(x) = \frac{x}{2}-\frac{1}{2}-\frac{17}{8x}-\frac{163}{48x^2}+\frac{1}{x^2}\zeta\left(\frac{1}{x}\right)$$

L'équation de l'asymptote oblique en $+\infty$ est $y = \frac{x}{2}-\frac{1}{2}$ et comme le terme $-\frac{17}{8x}$ est négatif au voisinage de $+\infty$ alors la courbe se trouve en dessous de l'asymptote.

En $-\infty$, $\sqrt{x^2} = -x$

$$\frac{f(x)}{x} = -e^{\frac{1}{x}}\frac{\sqrt{x(x-3)}}{-x} - \frac{1}{2},$$

on suit la même technique précédente. On trouve

$$f(x) = -\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}+\frac{17}{8x}+\frac{163}{48x^2}+\frac{1}{x^2}\zeta\left(\frac{1}{x}\right)$$

L'équation de l'asymptote oblique en $-\infty$ est $y = -\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}$ et comme le terme $+\frac{17}{8x}$ est négatif au voisinage de $-\infty$ alors la courbe se trouve en dessous de l'asymptote.

Chapitre 6

Algèbre linéaire

6.1 Structures algébriques

6.1.1 Lois de composition internes

Definition 6.1 *Soit E un ensemble. L'application*

$$T: \ E \times E \longrightarrow E$$

$$(x, y) \longmapsto T(x, y)$$

S'appelle une loi de composition interne sur E (l.c.i).

Remarque 6.1 *1. Il existe d'autres notations pour les lois de composition internes*

$$\star, \perp, \triangle, +, \times, \ldots$$

2. *Une loi de composition interne s'appelle aussi opération.*
3. *Pour montrer qu'une opération $\star$ est interne dans E on montre qu'à chaque fois qu'on prend deux éléments quelconques x, y de E la composition $x \star y$ reste dans E.*

Exemple 6.1 *Sur $E = \mathbb{Z}$*
L'addition

$$+: \ \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$$

$$(x, y) \longmapsto x + y$$

La multiplication

$$\times: \ \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$$

$$(x, y) \longmapsto x \times y$$

sont deux lois de composition internes sur $\mathbb{Z}$.
La division n'est pas une loi de composition interne sur $\mathbb{Z}$, il suffit de voir par exemple que pour $(x, y) = (3, 2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ on a $3 \div 2 = \dfrac{3}{2} \notin \mathbb{Z}$.

Exemple 6.2 *On définit dans* $\mathbb{Z}^*$ *la loi* $\star$ *par*

$$\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*, \ x \star y = \frac{x + y}{2}$$

Calculer $1 \star 1, \ 2 \star 3, (-5) \star 5.$
La loi $\star$ *est elle interne dans* $\mathbb{Z}^*$.

Solution 6.1 *On a* $\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*, \ x \star y = \dfrac{x + y}{2}$ *et par suite*
1) $1 \star 1 = \dfrac{1+1}{2} = 1$
2) $(-5) \star 5 = \dfrac{-5+5}{2} = 0$
3) $2 \star 3 = \dfrac{3+2}{2} = \dfrac{5}{2} \notin \mathbb{Z}^*$
De 3) *on en déduit que la loi* $\star$ *n'est pas interne.*

6.1.2 Propriétés des lois de compositions internes

Dans tout ce qui vient on suppose que E est un ensemble muni d'une loi de composition interne notée $\star$.

Commutativité

On dit que $\star$ est commutative si et seulement si

$$\forall x, y \in E \qquad x \star y = y \star x.$$

Exemple 6.3 *Soit* $\star$ *une loi de composition interne définie sur* $\mathbb{Z}$ *par*

$$x \star y = x + y + 1$$

$\star$ *est elle commutative ?*

Solution 6.2 *Soent* $x, y \in \mathbb{Z}$
$x \star y = x + y + 1 = y + x + 1 = y \star x$
donc $\star$ *est une loi de composition interne commutative.*

Remarque 6.2 $+, \ \times$ *sont deux lois de composition internes commutatives sur* $\mathbb{R}$.

Associativité

On dit que $\star$ est associative si et seulement si

$$\forall x, y, z \in E \qquad (x \star y) \star z = x \star (y \star z).$$

Exemple 6.4 *On définit sur* $E = [0 \ 1]$ *la loi de composition interne* $\star$ *par*

$$\forall x, y \in E \qquad x \star y = x + y - xy$$

$\star$ *est elle associative ?*

Solution 6.3 *Soient* $x, y, z \in E$

$$\begin{aligned}(x \star y) \star z &= (x+y-xy) \star z \\ &= (x+y-xy)+z-(x+y-xy)\,z \\ &= x+y-xy+z-xz-yz+xyz. \\ &= x+y+z-xy-xz-yz+xyz \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x \star (y+z) &= x \star (y+z-yz) \\ &= x+(y+z-yz)-x\,(y+z-yz) \\ &= x+y+z-yz-xy-xz+xyz \\ &= x+y+z-xy-yz-xz+xyz \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)\end{aligned}$$

de (1) *et* (2) *on en déduit que* $(x \star y) \star z = x \star (y+z)$ *et donc* $\star$ *est une loi associative.*

Exemple 6.5 $E = \mathbb{Z}\ \forall x, y \in E \qquad x \star y = 2x+y+5$

Solution 6.4 *Soient* $x, y, z \in E$

$$\begin{aligned}(x \star y) \star z &= (2x+y+5) \star z \\ &= 2\,(2x+y+5)+z+5 \\ &= 4x+2y+10+z+5. \\ &= 4x+2y+z+15 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1) \\ x \star (y+z) &= x \star (2y+z+5) \\ &= 2x+(2y+z+5)+5 \\ &= 2x+2y+z+5+5 \\ &= 2x+2y+10 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)\end{aligned}$$

de (1) et (2) on en déduit que $(x \star y) \star z \neq x \star (y+z)$ et donc $\star$ n'est pas associative.

Élément neutre

Soit $e \in E$, on dit que e est un élément neutre dans E pour la loi $\star$ si et seulement si

$$\forall x \in E \qquad x \star e = e \star x = x.$$

Exemple 6.6 0 *est l'élément neutre pour l'addition dans* $\mathbb{R}$
1 *est l'élément neutre pour la multiplication dans* $\mathbb{R}$

Exemple 6.7 *On définit sur* $E =]-1\ 1[$ *l'operation* $\top$ *par*

$$\forall x, y \in E \qquad x \top y = \frac{x+y}{1+xy}$$

Trouver l'élément neutre dans E *pour la loi* $\top$.

Solution 6.5 *Soit* $e \in E$ *tel-que* $\quad \forall x \in E \ \ x \top e = e \top = x$

$$\begin{aligned} x \top e = x &\iff \frac{x+e}{1+xe} = x \\ &\iff x + e = x(1+xe) \\ &\iff x + e = x + x^2 e \\ &\iff e - x^2 e = 0 \\ &\iff e\left(1 - x^2\right) = 0 \\ &\implies e = 0 \ \text{car} \ \left(1 - x^2\right) \neq 0 \ \text{ pour } \ x \in]-1\ 1[\end{aligned}$$

de la même manière pour $e \top x = x$ *on trouve* $e = 0$
Donc 0 *est l'élément neutre dans* $]-1\ 1[$ *pour la loi* $\top$.

Remarque 6.3 *l'élément neutre s'il existe est unique.*

Élément inversible

On suppose que de la loi $\star$ admet un élément neutre dans E noté e.
Soit $x \in E$, on dit que l'élément $x' \in E$ est le symétrique ou inverse de x dans E par rapport à la loi $\star$ si et seulement si

$$x \star x' = x' \star x = e.$$

Si x est inversible alors sont inverse est noté x^{-1}.

Exemple 6.8 $-x$ *est le symétrique de* x *par rapport à l'addition dans* $\mathbb{R}$.
Soit $x \neq 0$, *le symétrique de* x *par rapport à la multiplication dans* $\mathbb{R}$ *est* $\dfrac{1}{x}$.

Exemple 6.9 *Soit* $\triangle$ *une loi de composition interne définie sur* $\mathbb{Z}$ *par*

$$\forall x, y \in \mathbb{Z} \quad x \triangle y = 2x - y + 1$$

Trouver le symétrique s'il existe d'un élément x *dans* $\mathbb{Z}$.

Solution 6.6 *Soit* $x \in \mathbb{Z}$, *avant de chercher le symétrique de* x *dans* $\mathbb{Z}$ *on doit voir si l'élément neutre pour la loi* $\triangle$ *existe dans* $\mathbb{Z}$.
Soit $e \in \mathbb{Z}$, *pour que* e *soit un élément neutre il faut et il suffit qu'il satisfait :*

$$x \triangle e = e \triangle x = x \quad \text{où } x \in \mathbb{Z}.$$

$(x \triangle e = x) \implies (e = x + 1)$, *donc il est claire que* e *n'existe pas puisque d'après ce résultat*

pour chaque valeur de x on a une valeur de e, alors que l'élément neutre s'il existe est unique.
Puisque l'élément neutre pour la loi $\triangle$ n'existe pas alors les éléments de $\mathbb{Z}$ ne sont pas inversibles pour la loi $\triangle$.

Exemple 6.10 *Soit $\triangle$ une loi de composition interne définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^* \quad x \triangle y = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Trouver le symétrique s'il existe d'un élément x dans $\mathbb{R}_+^*$.

Solution 6.7 *Il est claire que 0 est l'élément pour cette loi. En effet,*

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad x \triangle 0 = \sqrt{x^2 + 0^2} = |x| = x = 0 \triangle x.$$

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ on dit que $x' \in \mathbb{R}_+^*$ est le symétrique de x pour la loi triangle ssi

$$x \triangle x' = 0 = x' \triangle x.$$

$x \triangle x' = 0 \Longrightarrow \sqrt{x^2 + x'^2} = 0$ *et* $x' \triangle x = 0 \Longrightarrow \sqrt{x'^2 + x^2} = 0$.
Il vient que $x^2 + x'^2 = 0$ ce qu' est impossible puisque x, x' sont deux éléments strictement positifs. Donc aucun élément de $\mathbb{R}_+^*$ n'a de symétrique pour $\triangle$.

Remarque 6.4
- *Si e est l'élément neutre dans E pour la loi $\star$ alors e est inversible et $e^{-1} = e$.*
- *Si x, y sont inversible pour la loi $\star$ alors $x \star y$ est inversible et on a $(x \star y)^{-1} = y^{-1} \star x^{-1}$.*
- *Si a est inversible pour la loi $\star$ alors l'équation $a \star x = b$ admet une solution $x = a^{-1} \star b$. Il est facile de voir*

$$\begin{aligned} a \star x = b &\iff a^{-1} \star a \star x = a^{-1} \star b \\ &\iff e \star x = a^{-1} \star b \\ &\iff x = a^{-1} \star b \end{aligned}$$

Distributivité

On suppose maintenant que E est muni de deux lois de composition internes $\star$ et $\top$.
On dit que $\star$ est distributive par rapport à $\top$ si et seulement si

$$\forall x, y, z \in E \quad x \star (y \top z) = (x \star y) \top (x \star z).$$

Exemple 6.11 *On définit sur $\mathbb{Z}$ deux lois de composition internes $\star$ et $\top$ par*

$$\forall x, y \in \mathbb{Z} \quad x \star y = x + y + 3$$

et

$$\forall x, y \in \mathbb{Z} \quad x \top y = xy$$

$\star$ est elle distributive par rapport à $\top$?
$\top$ est elle distributive par rapport à $\star$?

Solution 6.8 *soient* $x, y, z \in \mathbb{Z}$

$$x \star (y \top z) = x + (y \top z) + 3 = x + yz + 3 \quad ....(1)$$

$$\begin{aligned}(x \star y) \top (x \star z) &= (x \star y) \times (x \star z) \\ &= (x + y + 3)(x + z + 3) \quad ....(2)\end{aligned}$$

comme $(1) \neq (2)$ *alors* $\star$ *n'est pas distributive par rapport à* $\top$.

Maintenant, on change la position des deux lois et on obtient

$$x \top (y \star z) = x \times (y \star z) = x \times (y + z + 3) = xy + xz + 3x \quad ....(1)$$

$$(x \top y) \star (x \top z) = (x \top y) + (x \top z) + 3 = xy + xz + 3 \quad ....(2)$$

comme $(1) = (2)$ *donc* $\top$ *est distributive par rapport à* $\star$.

6.1.3 Structure de groupe

On dit que $(E, \star)$ est groupe si et seulement si

1. $\star$ est associative
2. $\star$ admet un élément neutre
3. chaque élément de E admet un élément symétrique dans E.

Si de plus $\star$ est commutative, alors $(E, \star)$ est un groupe **commutatif** ou **Abélien**

Exemple 6.12 *1.* $(\mathbb{Z}, +)$ *est un groupe commutatif.*

2. $(\mathbb{R}, \times)$ *n'est pas un groupe car* 0 *n'admet pas d'élément symétrique.*

3. $\left(\mathbb{R}_{+}^{*}, \times\right)$ *est un groupe commutatif*

Sous groupe

Soient $(E, \star)$ un groupe et $F \subset E$. On dit que F st un sous groupe de $(E, \star)$ si et seulement si

1. F est stable pour la loi $\star$, c.a.d., $\forall x, y \in F \quad x \star y \in F$
2. $(F, \star)$ est lui même un groupe.

Exemple 6.13 $(\mathbb{R}, \times)$ *est un groupe et* $\left(\mathbb{R}_{+}^{*}, \times\right)$ *est un sous groupe de ce groupe.*

Carractérisation d'un sous groupe

Soient $(E,\star)$ un groupe et $F\subset E$, on a l'équivalence suivante

$$F \text{ est un sous groupe de } \quad (E,\star) \Longleftrightarrow \begin{cases} F\neq\emptyset \\ \forall x\in F \;\; x^{-1}\in F \\ \forall x,y\in F \;\; x\star y\in F \end{cases}$$

Preuve. On montre les deux implications suivantes

$\Longrightarrow$) Si F est un sous groupe alors il est lui même un groupe alors on en déduit que F est non vide car il contient l'elément neutre de plus l'inverse de chaque élément de F appartient à F. D'autre part la stabilité de la loi nous donne que $\forall x,y\in F$ on a $x\star y\in F$

$\Longleftarrow$) On suppose qu'on a

$$\begin{cases} (1) \quad F\neq\emptyset \\ (2) \quad \forall x\in F \;\; x^{-1}\in F \\ (3) \quad \forall x,y\in F \;\; x\star y\in F \end{cases}$$

1) F est stable pour la loi $\star$ d'après l'hypothèse (3).

2) $(F,\star)$ est lui même un groupe car :

- $\forall x\in F,\ x^{-1}\in F$ et $x\star x^{-1}\in F$ donc $e\in F$
- $\star$ est associative dans E donc elle est associative dans F $(F\subset E)$

de 1) et 2) on en déduit que F est un sous groupe de $(E,\star)$. ■

Exemple 6.14 *Soit $(E,\star)$ un groupe non commutatif et F une partie de E telle-que*

$$F=\left\{\, a\in E: \quad a\star x=x\star a \quad \forall x\in E \,\right\}$$

Montrer que F est un sous groupe de $(E,\star)$.

Solution 6.9 1) $F\neq\emptyset$

En effet, soit e l'élément neutre dans le groupe $(E,\star)$, on a

$$\forall x,y\in E \;\; x\star e=e\star x$$

$$\textit{donc} \quad e\in F$$

2) *F est stable pour la loi $\star$*

En effet, soient $a,b\in F$ on a alors

$$x\star a=a\star x \quad \textit{et} \quad x\star b=b\star x, \;\; \forall x\in E$$

on doit montrer que $a\star b\in F$, c.a.d., $x\star(a\star b)=(a\star b)\star x \;\; \forall x\in E$.

Comme $a,b\in F\subset E$ et comme $\star$ est associative dans E, on a pour tout $x\in E$

$$\begin{aligned} x\star(a\star b) &= (x\star a)\star b && \textit{par associativité} \\ &= (a\star x)\star b && \textit{car } a\in F \\ &= a\star(x\star b) && \textit{par associativité} \\ &= a\star(b\star x) && \textit{car } b\in F \\ &= (a\star b)\star x && \textit{par associativité} \end{aligned}$$

donc $(a \star b) \in F$.
3) *Soit* $a \in F$ *on a*

$$x \star a = a \star x \quad \forall x \in E$$

On veut montrer que $a^{-1} \in F$, *c.a.d.,*

$$x \star a^{-1} = a^{-1} \star x \quad \forall x \in E.$$

Soit e *l'élément neutre dans* E, *comme* $F \subset E$ *il vient que* $a \in E$ *et donc l'inverse de* a *existe dans* E *et vérifie*

$$a \star a^{-1} = a^{-1} \star a = e$$

Soit $x \in E$, *on sait que* $\star$ *est une loi de composition interne dans* E *donc* $x \star a^{-1} \in E$, *de plus on a*

$$\left(x \star a^{-1}\right) \star e = e \star \left(x \star a^{-1}\right) = \left(x \star a^{-1}\right),$$

par suite on a :

$$\begin{aligned}
x \star a^{-1} &= e \star \left(x \star a^{-1}\right) \\
&= \left(a^{-1} \star a\right) \star \left(x \star a^{-1}\right) \\
&= a^{-1} \star a \star x \star a^{-1} \\
&= a^{-1} \star (a \star x) \star a^{-1} \qquad \textit{par associativité} \\
&= a^{-1} \star (x \star a) \star a^{-1} \qquad \textit{car } a \in F \\
&= \left(a^{-1} \star x\right) \star \left(a \star a^{-1}\right) \qquad \textit{par associativité} \\
&= a^{-1} \star x
\end{aligned}$$

donc $a^{-1} \in F$.
Conclusion : d'après 1), 2), 3), *on en déduit que* F *est un sous groupe de* $(E, \star)$.

Morphisme de groupe

Soient $(E, \star)$ et $(H, \top)$ deux groupes et $f: \; E \longrightarrow H$ une application.

- On dit que f est un morphisme de groupes si et seulement si

$$\forall x, y \in E \quad f(x \star y) = f(x) \top f(y).$$

- Si de plus f est bijective on parle d'isomorphisme de groupes.
- Si $E = H$ et $\star = \top$ on dit que f est un endomorphisme de groupes.
- Si f est un endomorphisme bijective, on parle d'automorphisme.

Exemple 6.15 *On considère l'application*

$$f: \; \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^*$$

$$x \longmapsto f(x) = e^x$$

Montrer que f *est un morphisme de groupes de* $(\mathbb{R}, +)$ *vers* $(\mathbb{R}^*, \times)$

Solution 6.10 *Soient* $x, y \in \mathbb{R}$

$$f\,(x+y) = e^{x+y} = e^x e^y = f(x) \times f(y) \quad c.q.f.d.$$

Exemple 6.16 *On considère l'application*

$$f: \ \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}^*$$

$$x \longmapsto f(x) = x^n \quad n \in \mathbb{N}$$

f est elle un endomorphisme de $(\mathbb{R}^*, \cdot)$?

Solution 6.11 *Soient* $x, y \in \mathbb{R}^*$

$$f\,(x.y) = (x.y)^n = x^n.y^n = f(x).f(y) \quad c.q.f.d.$$

6.1.4 Structure d'anneau

Soit E un ensemble muni de deux lois de composition internes $\star$ et $\top$.
On dit que $(E, \star, \top)$ est un anneau si et seulement si

1. $(E, \star)$ est un groupe Abélien,
2. la loi $\top$ est associative,
3. la loi $\top$ est distributive par rapport à $\star$ à gauche et à droite, c.a.d.,

$$\forall x, y, z \in E \quad x\top(y \star z) = (x\top y) \star (x\top z) \ \text{ et } \ (x \star y)\top z = (x\top z) \star (y\top z)\,.$$

Si de plus la loi $\top$ est commutative alors l'anneau $(E, \star, \top)$ est commutatif.
Si l'élément neutre par rapport à la loi $\top$ existe dans E alors l'anneau $(E, \star, \top)$ est dit unitaire.

Exemple 6.17 $(\mathbb{Z}, +, \times)$ *est un anneau commutatif.*
$(\mathbb{Z}, \times, +)$ *n'est pas un anneau.*

6.1.5 Structure de corps

Soit E un ensemble muni de deux lois de composition internes $\star$ et $\top$.
On dit que $(E, \star, \top)$ est un corps si et seulement si

1. $(E, \star, \top)$ est un anneau unitaire,
2. tout élément de $E - \{e\}$ est inversible où e est l'élément neutre par rapport à la loi $\star$.

Si de plus la loi $\top$ est commutative alors le corps $(E, \star, \top)$ est commutatif.

Exemple 6.18 $(\mathbb{R}, +, \times)$ *est un corps commutatif.*

6.2 Espaces Vectoriels- Sous Espaces Vectoriels

6.2.1 Espace vectoriel

Soient $\mathbb{K}$ un corps commutatif (généralement $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et E un ensemble muni d'une opération interne notée $(+)$ et une opération externe notée $(.)$ telles-que

$$(+): \quad E \times E \longrightarrow E$$

$$(x, y) \longmapsto x + y$$

$$(.): \quad \mathbb{K} \times E \longrightarrow E$$

$$(\lambda, x) \longmapsto \lambda.x$$

Definition 6.2 $(E, +, .)$ *est un espace vectoriel sur* $\mathbb{K}$ *ou un* $\mathbb{K}-$*espace vectoriel si les propriétés suivantes sont vérifiées :*

1. $(E, +)$ *est un groupe Abélien,*
2. $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x, y \in E \quad \lambda.(x + y) = \lambda.x + \lambda.y,$
3. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall x \in E \quad (\lambda + \mu).x = \lambda.x + \mu.x,$
4. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall x \in E \quad \lambda.(\mu.x)(\lambda\mu).x = (\lambda.x).\mu,$
5. $\forall x \in E \quad 1_{\mathbb{K}}.x = x$

Si E est un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel alors les éléments de E sont appelés des vecteurs et ceux de $\mathbb{K}$ des scalaires.

Remarque 6.5 *Pour simplifier les écritures on écrit* λx *au lieu de* $\lambda.x$

Propriétés

Soit E un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel, on a les propriétés suivantes

1. $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E \quad \Big[\lambda x = 0_E \Longleftrightarrow (\lambda = 0_{\mathbb{K}} \vee x = 0_E)\Big],$
2. $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E \quad \lambda(-x) = -\lambda x,$
3. $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x, y \in E \quad \lambda(x - y) = \lambda x - \lambda y,$
4. $\forall x \in E, \quad 0_{\mathbb{K}}.x = 0_E,$
5. $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \lambda.0_E = 0_E$

6.2.2 Sous espaces vectoriels

Soient $(E, +, .)$ un espace vectoriel et $F \subset E$. On dit que F est un sous espace vectoriel (s.e.v) de E, si l'une des propriétés équivalentes suivantes est vérifiée :

1. $(F, +, .)$ est un espace vectoriel.
2. $\begin{cases} F \neq \emptyset, \\ \forall x, y \in F, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} \quad (\lambda x + \mu y) \in F. \end{cases}$

3. $\begin{cases} F \neq \emptyset \\ \forall x, y \in F \quad x + y \in F \\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in F \quad \lambda x \in F. \end{cases}$

Remarque 6.6 *Cette remarque est très utile en pratique.*

- *Pour montrer que $F \neq \emptyset$, il suffit de montrer que $0_E \in F$.*
- *Si $0_E \notin F$ alors F ne peut pas être un sous espace vectoriel.*

Exemple 6.19 *On prend $E = \mathbb{R}^2$ et $F = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ \mid \ y = 2x \right\}$*
Montrer que F est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

Solution 6.12 *On montre que F vérifie* $\begin{cases} F \neq \emptyset \\ \forall x, y \in F \quad x + y \in F \\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in F \quad \lambda x \in F. \end{cases}$

1. *$(0,0) \in F$ car on a $\quad 0 = 2 \times 0,$*
$$\text{donc } F \neq \emptyset.$$
2. *soit $X = (x_1, y_1)$ et $Y = (x_2, y_2)$ deux éléments de F, c.a.d.,*
$$y_1 = 2x_1 \ \text{ et } \ y_2 = 2x_2.$$
On a
$$X + Y = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \ \text{ et } \ y_1 + y_2 = 2x_1 + 2x_2 = 2\,(x_1 + x_2)\,,$$
$$\text{donc } X + Y \in F.$$
3. *soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $X = (x_1, y_1) \in F$.*
$$(x_1, y_1) \in F \Longleftrightarrow y_1 = 2x_1.$$
On a
$$\lambda X = (\lambda x_1, \lambda y_1) \ \text{ avec } \ \lambda y_1 = \lambda\,(2x_1) = 2\,(\lambda x_1)\,,$$
$$\text{donc } \lambda X \in F.$$

Conclusion : F est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

Proposition 6.1 *Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel. Si F_1 et F_2 sont deux sous espaces vectoriels de E alors $F_1 \cap F_2$ est un sous espace vectoriel de E.*

Preuve. Soient F_1, F_2 deux sous espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel E.

1. $0_E \in F_1$ et $0_E \in F_2$ donc $0_E \in F_1 \cap F_2$ et par suite
$$F_1 \cap F_2 \neq \emptyset.$$

2. Soient $x, y \in F_1 \cap F_2$ donc $x, y \in F_1$ et $x, y \in F_2$. Comme F_1 et F_2 sont des s.e.v de E alors $x + y \in F_1$ et $x + y \in F_1 \cap F_2$ par suite
$$x + y \in F_1 \cap F_2$$
3. Soit $x \in F_1 \cap F_2$ donc $x \in F_1$ et $x \in F_2$. Comme F_1 et F_2 sont des s.e.v de E alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $\lambda x \in F_1$ et $\lambda x \in F_2$ donc
$$\lambda x \in F_1 \cap F_2.$$
En conclusion : $F_1 \cap F_2$ est un s.e.v de E.

■

Remarque 6.7 *La réunion de deux espaces vectoriel de E; généralement; n'est pas un sous espace vectoriel de E.*

Exemple 6.20 *On considère les deux sous espaces vectoriels suivants :*
$F_1 = \Big\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ \mid \ x = 0 \Big\}, \quad F_2 = \Big\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ \mid \ y = 0 \Big\}$
$F_1 \cup F_2$ *est il un s.e.v de* $\mathbb{R}^2$?

Solution 6.13 *Si $X = (x_1, y_1) \in F_1 \cup F_2$ alors $X \in F_1$ ou $X \in F_2$. Si on considère les deux éléments $(0, 2), (-3, 0)$ qui sont dans $F_1 \cup F_2$, on a*
$(0, 2) + (-3, 0) = (-3, 2) \notin F_1 \cup F_2$ car $(-3, 2) \notin F_1$ et $(-3, 2) \notin F_2$, c.a.d., nous avons trouvé deux éléments qui appartiennent à $F_1 \cup F_2$ mais leur somme n'est pas dans $F_1 \cup F_2$. Donc $F_1 \cup F_2$ n'est pas un s.e.v de $\mathbb{R}^2$.

6.2.3 Somme et somme directe

Definition 6.3 *Soit E un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel et F_1, F_2 deux s.e.v de E. La somme de F_1 et F_2 est le sous ensemble de E noté $F_1 + F_2$ et qui est défini par :*
$$F_1 + F_2 = \Big\{ \eta \in E \mid \eta = x + y \ \text{ où } \ x \in F_1 \ \text{ et } \ y \in F_2 \Big\}$$

Proposition 6.2 *$F_1 + F_2$ est sous espace vectoriel de E.*

Definition 6.4 *Soit E un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel et F_1, F_2 deux s.e.v de E. On dit que F_1 et F_2 sont supémentaires ou que E est la somme directe de F_1 et F_2 si et seulement si*
$$E = F_1 + F_2 \ \text{ et } \ F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$$
et on écrit
$$E = F_1 \oplus F_2$$

Proposition 6.3 $\Big($*F_1 et F_2 sont supémentaires l'un à l'autre dans E*$\Big) \iff \Big($*$\forall \eta \in E$ il existe un unique $x \in F_1$ et il existe un unique $y \in F_2$ tels-que $\eta = x + y$*$\Big)$

Exemple 6.21 $E = \mathbb{R}^2$, $F_1 = \Big\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ \mid \ x = 0 \Big\}, \quad F_2 = \Big\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ \mid \ y = 0 \Big\}$
$$E = F_1 \oplus F_2$$

6.3 Base et dimension

Soit $(E,+,.)$ un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel.

Definition 6.5 *(Combinaison linéaire)*
Soient $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, n vecteurs de E et $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$, n scalaires dans $\mathbb{K}$.
On appelle combinaison linéaires des n vecteurs de E la somme suivante

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + \cdots + \lambda_n x_n.$$

Definition 6.6 *(Famille génératrice)*
Les n vecteurs $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ de E engendre E, ou que $\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$ est une famille génératrice de E si et seulement si

$$\forall X \in E, \exists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K} \ \text{ tels-que } \ X = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + \cdots + \lambda_n x_n,$$

et on écrit $E = \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$ *ou* $E = Vect\,(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$.

Exemple 6.22 *Montrer que les vecteurs $X = (1,1)\,, Y = (1,0)$ engendre $\mathbb{R}^2$*

Solution 6.14 *Soit $Z = (z_1, z_2)$ on montre qu'il existe $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels-que*

$$Z = \lambda_1 X + \lambda_2 Y$$

$$\begin{aligned}
Z = \lambda_1 X + \lambda_2 Y &\iff (z_1, z_2) = \lambda_1 (1,1) + \lambda_2 (1,0) \\
&\iff (z_1, z_2) = (\lambda_1, \lambda_1) + (\lambda_2, 0) \\
&\iff (z_1, z_2) = \Big(\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1\Big) \\
&\Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = z_1 \\ \lambda_1 = z_2 \end{cases} \\
&\Longrightarrow \begin{cases} \lambda_2 = z_1 - z_2 \\ \lambda_1 = z_2 \end{cases}
\end{aligned}$$

Comme z_1, z_2 sont des réels alors λ_1, λ_2 existent.

Exemple 6.23 $E = \Big\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0 \Big\}$
Trouver une famille génératrice de E.

Solution 6.15 *Soit $X \in E$, alors $X = (x,y,z)$ avec $x + y = 0$. On a $x = -y$, et par suite* $X = (-y,y,z) = (-y,y,0) + (0,0,z) = y\,(-1,1,0) + z\,(0,0,1) = yx_1 + zx_2$
avec $x_1 = (-1,1,0)$ *et* $x_2 = (0,0,1)$. *On écrit*

$$E = \langle (-1,1,0)\,, (0,0,1) \rangle \quad \text{ou} \ \ E = Vect\Big((-1,1,0)\,, (0,0,1) \Big)$$

Definition 6.7 *(Vecteurs linéairement indépendants)*
On dit que les n vecteurs $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ *de* E *sont linéairement indépendants ou que la famille* $\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$ *est libre si est seulement si* $\forall\ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$,

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + \cdots + \lambda_n x_n = 0_E \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \cdots = \lambda_n = 0_{\mathbb{K}}$$

Si les vecteurs $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ *ne sont pas linéairement indépendants alors ils sont dit linéairement dépendants ou que la famille* $\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$ *est liée.*

Exemple 6.24 *Montrer que les vecteurs* $e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)$ *sont linéairement indépendants.*

Solution 6.16 *Soient* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ *tels-que* $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$

$$\begin{aligned}
\lambda_1 (1, 0, 0) + \lambda_2 (0, 1, 0) + \lambda_3 (0, 0, 1) = (0, 0, 0) &\Longleftrightarrow (\lambda_1, 0, 0) + (0, \lambda_2, 0) + (0, 0, \lambda_3) = (0, 0, 0) \\
&\Longleftrightarrow (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0, 0, 0) \\
&\Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.\ \ c.q.f.d
\end{aligned}$$

Definition 6.8 *(Base d'un espace vectoriel)*
Les n vecteurs $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ *de* E *forment une base de* E *si et seulement si la famille* $\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$ *est libre et génératrice de* E.

Definition 6.9 *(Base canonique)*
Soient $e_1 = (1, 0, 0, 0, \ldots, 0), e_2 = (0, 1, 0, 0, \ldots, 0), e_3 = (0, 0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots,$
$e_n = (0, 0, 0, 0, \ldots, 1)$, n *vecteurs de* $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$. *Les vecteurs* $e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n$ *forment une base de* $\mathbb{R}^n$ *qui s'appelle base canonique de* $\mathbb{R}^n$

Exemple 6.25
1. $\{e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)\}$ *est une base de* $\mathbb{R}^2$.
2. $\{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$ *est une base de* $\mathbb{R}^3$.

Definition 6.10 *(Dimension d'un espace vectoriel)*
La dimension d'un espace vectoriel notée $dimE$ *est égal au cardinal de sa base.*

On rappelle que le cardinal d'un ensemble est le nombre des éléments de cet ensemble.

Exemple 6.26 $\dim \mathbb{R}^2 = 2,\ dim\mathbb{R}^n = n$.

Remarque 6.8 *Par convention on pose* $dim\,\{0_E\} = 0$.

Remarque 6.9 *Chercher une base pour un espace vectoriel* E *c'est trouver une famille de vecteurs de* E *de sorte que cette famille soit à la fois libre et génératrice de* E. *le nombre d'éléments de cette base c'est la dimension de l'espace* E.

Theoreme 6.1 *Dans un espace vectoriel de dimension* n, *une base de* E *est une famille*

1. *Libre*
2. *Génératrice*
3. *Contenant* n *vecteurs*

et toute famille vérifiant deux des trois proprieétés précédentes est une base de E

Exemple 6.27 *Soit* $\beta = \{(1,1,1), (-1,1,1), (0,1,-1)\}$. *Les éléments de* β *sont des vecteurs de* $\mathbb{R}^3$ *et* β *contient trois vecteurs. D'après le Théorème 6.1, pour montrer que* β *est une base de* $\mathbb{R}^3$, *il suffit de montrer qu'elle est libre ou génératrice puisque* $card(\beta) = dim\mathbb{R}^3$.

Theoreme 6.2 *Soit* E *un* $\mathbb{K}-$ *espace vectoriel de dimension* n. *Si* F *est un sous espace vectoriel de* E *alors* $dimF \leq n$, *et si de plus* $dimF = n$ *alors* $E = F$.

Theoreme 6.3 *Soit* E *un* $\mathbb{K}-$ *espace vectoriel de dimension* n, *et* F_1, F_2 *deux s.ev de* E, *alors*

$$dim\,(F_1 + F_2) = dimF_1 + dimF_2 - dim\,(F_1 \cap F_2)$$

et

$$dim\,(F_1 \oplus F_2) = dimF_1 + dimF_2$$

6.4 Applications linéaires

6.4.1 Définitions et propriétés

Definition 6.11 *Soient* E, G *deux* $\mathbb{K}-$*espaces vectoriels et* f *une application de* E *dans* G. *On dit que* f *est une application linéaire si et seulement si l'une des deux propriétés est satisfaite*

1. $\forall x, y \in E, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} \quad f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$.
2. $\begin{cases} \forall x, y \in E, & f(x+y) = f(x) + f(y) \\ \forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, & f(\lambda x) = \lambda f(x). \end{cases}$

Exemple 6.28

$$\begin{aligned} f:\ \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x,y) &\longmapsto f(x,y) = (x+y, x-y, 2x) \end{aligned}$$

Montrer que f *est linéaire*

Solution 6.17 *On montre que*

$$\begin{cases} \forall x, y \in E, & f(x+y) = f(x) + f(y) \\ \forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R} & f(\lambda x) = \lambda f(x). \end{cases}$$

Soient $(x,y), (x',y') \in \mathbb{R}^2$, *on a* $(x,y) + (x',y') = (x+x', y+y')$

$$\begin{aligned} f(x+x', y+y') &= \Big(x+x'+y+y', x+x'-y-y', 2(x+x')\Big) \\ &= \Big(x+y, x-y, 2x\Big) + \Big(x'+y', x'-y', 2x'\Big) \\ &= f(x,y) + f(x',y') \end{aligned}$$

Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, *et* $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f\Big(\lambda(x,y)\Big) &= f(\lambda x, \lambda y) \\ &= \Big(\lambda x + \lambda y, \lambda x - \lambda y, 2\lambda x\Big) \\ &= \Big(\lambda(x+y), \lambda(x-y), \lambda(2x)\Big) \\ &= \lambda\Big(x+y, x-y, 2x\Big) \\ &= \lambda f(x,y). \end{aligned}$$

Donc f *est bien une application linéaire.*

Proposition 6.4 *Soit* $f : E \longrightarrow G$ *une application linéaire.*

1. $f(0_E) = 0_G$.
2. $\forall x \in E, \quad f(-x) = -f(x)$.

Preuve. 1)Comme $0_E = 0_E + 0_E$

$$\begin{aligned} f(0_E) &= f(0_E + 0_E) \\ &= f(0_E) + f(0_E) \\ &= 2f(0_E) \end{aligned}$$

$$\text{donc} \quad f(0_E) = 0_G$$

2) Soit $x \in E$, on a

$$f(x - x) = f(0_E) = 0_G \quad ....(1)$$

et comme f est linéare on obtient

$$f(x - x) = f(x + (-x)) = f(x) + f(-x) \quad ....(2)$$

de (1) et (2) on obtient :

$$f(x) + f(-x) = 0_G$$

et par suite

$$f(-x) = -f(x).$$

■

L'espace des applications linéaires

On note par $\mathcal{L}(E, G)$ l'ensemble de toutes les applications linéaires de E dans G. Cet ensemble est muni d'une loi de composition internes notée (+) et une loi externe (.) définies comme suit
Soient $f, g \in \mathcal{L}(E, G)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

$$\forall x \in E, \quad (f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{et} \quad (\lambda.f)(x) = \lambda.f(x)$$

Proposition 6.5 $(\mathcal{L}(E, G), +, .)$ *est un* $\mathbb{K}-$ *espace vectoriel.*

6.4.2 Noyau et image

Soit $f: \ E \longrightarrow G$ une application linéaire.

Definition 6.12 *(Noyau et image d'une application linéaire)*

– *Le noyau de f est l'ensemble noté $ker\, f$ et qui est défini par*

$$ker\, f = \Big\{ x \in E \mid f(x) = 0_G \Big\}$$

On note aussi $kerf$ par $\quad ker\, f = f^{-1}(0_G)$

– *L'image de f est l'ensemble noté $im\, f$ et qui est défini par*

$$im\, f = \Big\{ y \in G \mid y = f(x) \quad où\, x \in E \Big\} = f\,(E)\,.$$

– *Le rang de f est la dimension de $im\, f$ et on écrit $rg(f) = dim(im\, f)$.*

Exemple 6.29

$$\begin{aligned} f:\ \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto x + 2y \end{aligned}$$

Montrer que f es linéaire et donner son noyau et son image.

Solution 6.18

$$\begin{aligned} kerf &= \Big\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x) = 0_G \Big\} \\ &= \Big\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 2y = 0_G \Big\} \\ &= \Big\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = -2y \Big\} \end{aligned}$$

par suite

$$\begin{aligned} kerf &= \Big\{ (-2y, y) \ \mid y \in \mathbb{R} \Big\} \\ &= \Big\{ y\,(-2, 1) \ \mid y \in \mathbb{R} \Big\}. \end{aligned}$$

On peut écrire $\quad kerf = \langle (-2, 1) \rangle$

$$im\, f = \Big\{ u \in \mathbb{R} \mid u = f\,(x, y) \quad où\ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \Big\}$$

$$im\, f = \Big\{ u \in \mathbb{R} \mid u = x + 2y \quad où\ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \Big\}$$

propriétés

Soient E, G deux $\mathbb{K}-$ espaces vectoriels et $f:\ E \longrightarrow G$ une application linéaire, on a

1. $\ker f$ esun sous espace vectoriel de E.
2. $im\, f$ est un sous espace vectoriel de G.

Preuve. 1)
• Comme f est une application linéaire on a $f(0_E) = 0_G$, donc $0_E \in kerf$ et par suite $kerf \neq \emptyset$.
• Soient $x_1, x_2 \in kerf$ on a alors $f(x_1) = 0$ et $f(x_2) = 0$. Comme f est linéaire, on a

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) = 0 + 0 = 0.$$

$$\text{Donc } x_1 + x_2 \in kerf$$

• Soient $x \in kerf, \lambda \in \mathbb{K}$, $f(\lambda x) = \lambda f(x) = \lambda \times 0 = 0$.

$$\text{Donc } \lambda x \in kerf.$$

$$kerf \text{ est un sous espace vectoriel de } E.$$

2)
• $0_G \in imf$ donc $imf \neq \emptyset$.
• Soient $y_1, y_2 \in imf$ donc il existe x_1, x_2 dans E tels-que $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$.
$y_1 + y_2 = f(x_1) + f(x_2) = f(x_1 + x_2)$ et comme $x_1 + x_2 \in E$, on en déduit que $y_1 + y_2 \in imf$.
• Soient $y \in imf, \lambda \in \mathbb{K}$, on a $\lambda y = \lambda f(x) = f(\lambda x) \in imf$ car $\lambda x \in E$.

$$imf \text{ est un sous espace vectoriel de } G.$$

■

Theoreme 6.4 *(Injection- surjection)*

$$f \text{ est injective } \Longleftrightarrow ker\ f = \{0_E\}$$

Si dim $G = p$ (finie), alors

$$f \text{ est surjective } \Longleftrightarrow dim\ im\ f = dim\ G = p.$$

Autrement dit,

$$f \text{ est surjective } \Longleftrightarrow im\ f = G.$$

Theoreme 6.5 *(Théorème fondamental)*
Soit $f : E \longrightarrow G$ une application linéaire telle-que $\dim E = n$(finie), alors

$$\dim E = \dim imf + \dim kerf$$

Exemple 6.30 *On considère l'application*

$$\begin{aligned} f :\ & \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ & (x, y, z) \longrightarrow f(x, y, z) = (x + 2y, 2x + 3z) \end{aligned}$$

Déterminer $kerf, imf$ et donner $\dim kerf$ et $rg(f)$.

Solution 6.19

$$\begin{aligned}
ker f &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z) = 0_{\mathbb{R}^2} \right\} \\
&= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \ (x+2y, 2x+3z) = (0,0) \right\} \\
&= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+2y = 0 \quad et \ \ 2x+3z = 0 \right\} \\
&= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = -\frac{1}{2}x \quad et \ \ z = -\frac{2}{3}x \right\} \\
&= \left\{ \left(x, -\frac{1}{2}x, -\frac{2}{3}x \right) \ \mid \ x \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ x \left(1, -\frac{1}{2}, -\frac{2}{3} \right) \ \mid \ x \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\langle \left(1, -\frac{1}{2}, -\frac{2}{3} \right) \right\rangle .
\end{aligned}$$

$im f = \left\{ f(x,y,z) \ \mid \ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \right\}$

$$\begin{aligned}
f(x,y,z) &= (x+2y, 2x+3z) \ \mid \ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \\
&= (x, 2x) + (2y, 0) + (0, 3z) \\
&= x(1,2) + y(2,0) + z(0,3) \\
&= \langle (1,2), (2,0), (0,3) \rangle
\end{aligned}$$

On a

$$dim\, \mathbb{R}^3 = dim\, im f + dim\, ker f$$

$dim\, \mathbb{R}^3 = 3$ *et* $dim\, ker f = 1$ *donc* $rg(f) = dim\, im f = 2$.

6.5 Exercices Corrigés

Exercise 6.1 1. *Vérifier que* $\{(1,1), (2,3)\}$ *est une famille génératrice de* $\mathbb{R}^2$

2. *Les vecteurs* $(1,2,3), (0,1,-1), (2,0,1)$ *sont -ils linéairement indépendants ?*

3. *Conclure*

solution

1) On pose $v_1 = (1,1), v_2 = (2,3)$. Pour que le famille $\{v_1, v_2\}$ soit génératrice de $\mathbb{R}^2$ il faut que v_1, v_2 engendrent $\mathbb{R}^2$, autrement dit il faut que chaque élément u de $\mathbb{R}^2$ s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs v_1, v_2.

Soient $u=(x,y)\in\mathbb{R}^2, \lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$ tels-que $u=\lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2$

$$\begin{aligned}
u &= \lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2\\
(x,y) &= \lambda_1(1,1)+\lambda_2(2,3)\\
&= (\lambda_1,\lambda_1)+(2\lambda_2,3\lambda_2)\\
&= (\lambda_1+2\lambda_2,\lambda_1+3\lambda_2)\\
&\Longrightarrow \begin{cases} x=\lambda_1+2\lambda_2\\ y=\lambda_1+3\lambda_2\end{cases}
\end{aligned}$$

La résolution de ce système donne

$$\lambda_2=y-x$$

et

$$\lambda_1=x-2\lambda_2=x-2(y-x)=x-2y+2x=3x-2y.$$

Il est clair que λ_1,λ_2 existent pour tout $x,y\in\mathbb{R}$, donc v_1,v_2 engendrent $\mathbb{R}^2$.

2) Pour que $(1,2,3),(0,1,-1),(2,0,1)$ soient linéairement indépendants il faut qu'on ait

$$\Big(\lambda_1(1,2,3)+\lambda_2(0,1,-1)+\lambda_3(2,0,1)=0_{\mathbb{R}^3}\Big)\Longrightarrow\Big(\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0\Big)\ \text{ où }\ \lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in\mathbb{R}$$

$$\begin{aligned}
\Big(\lambda_1(1,2,3)+\lambda_2(0,1,-1)+\lambda_3(2,0,1)=0_{\mathbb{R}^3}\Big) &\Longleftrightarrow \Big((\lambda_1,2\lambda_1,3\lambda_1)+(0,\lambda_2,-\lambda_2)+(2\lambda_3,0,\lambda_3)=(0,0,0)\Big)\\
&\Longleftrightarrow \Big(\lambda_1+0+2\lambda_3,2\lambda_1+\lambda_2+0,3\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3\Big)=\Big(0,0,0\Big)\\
&\Longleftrightarrow \begin{cases}\lambda_1+0+2\lambda_3=0\\ 2\lambda_1+\lambda_2+0=0\\ 3\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3=0\end{cases}\\
&\Longrightarrow \begin{cases}\lambda_1=-2\lambda_3\\ +\lambda_2=-2\lambda_1=4\lambda_3\\ 3(-2\lambda_3)-(4\lambda_3)+\lambda_3=0\end{cases}\\
&\Longrightarrow \begin{cases}\lambda_1=-2\lambda_3\\ +\lambda_2=-2\lambda_1=4\lambda_3\\ -9\lambda_3=0\end{cases}\\
&\Longrightarrow \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0.
\end{aligned}$$

Donc les vecteurs $(1,2,3),(0,1,-1),(2,0,1)$ sont linéairement indépendants. On dit aussi que la famille $\{(1,2,3),(0,1,-1),(2,0,1)\}$ est libre.
3) $dim\,\mathbb{R}^3=3$ et comme la famille $\{(1,2,3),(0,1,-1),(2,0,1)\}$ contient 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$ linéairement indépendants, on en déduit que $\{(1,2,3),(0,1,-1),(2,0,1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercise 6.2

$$A=\Big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 2x+y-z=0\Big\}$$

1. *Montrer que A est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$*
2. *Donner une base de A, quelle est sa dimension ?*

3. Est ce que $A = \mathbb{R}^3$

solution
1) Pour que A soit un s.e.v de $\mathbb{R}^3$ il faut que les conditions vues en cours soient vérifiées
$a)$ $A \neq \emptyset$ car $2 \times 0 + 0 - 0 = 0$, c.a.d., $(0,0,0) \in A$.

$b)$ Soient $v_1 = (x,y,z)\,, v_1 = (x',y',z') \in A$, c.a.d., $2x+y-z=0$ et $2x'+y'-z'=0$

$$\begin{aligned} f(v_1+v_2) &= f(x+x',y+y',z+z') \\ &= 2(x+x')+(y+y')-(z+z') \\ &= \Big(2x+y-z\Big)+\Big(2x'+y'-z'\Big) \\ &= 0+0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$c)$ Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $v_1 = (x,y,z) \in A$, c.a.d., $2x+y-z=0$.

$$\begin{aligned} f(\lambda v_1) &= f(\lambda(x,y,z)) \\ &= f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) \\ &= 2(\lambda x)+(\lambda y)-(\lambda z) \\ &= \lambda(2x+y-z) \\ &= \lambda f(x,y,z) \\ &= \lambda f(v_1)\,. \end{aligned}$$

de $a), b), c)$ on en déduit que A est un s.e.v de $\mathbb{R}^3$.

2) On détermine une base de A Soit $u \in A$ alors il existe $x,y,z \in \mathbb{R}$ tel-que $u = (x,y,z)$ avec $2x+y-z=0$

$$2x+y-z=0 \Longrightarrow z = 2x+y$$

$$\begin{aligned} u &= (x,y,2x+y) \\ &= (x,0,2x)+(0,y,y) \\ &= x(1,0,2)+y(0,1,1) \end{aligned}$$

donc $A = \langle (1,0,2)\,,(0,1,1)\rangle$.
On pose $v_1 = (1,0,2)\,, v_2 = (0,1,1)$
v_1, v_2 sont linàirement indépendants car leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles
v_1, v_2 engendrent A et sont linéairement indépendants donc ils forment une base de A. $dim A = 2$ (nombre de vecteurs de la base de A)
3) $A \neq \mathbb{R}^3$ car $dim A = 2 \neq 3 = dim \mathbb{R}^3$.

Exercise 6.3 *Soient F_1, F_2 deux ensembles tels-que*

$$F_1 = \Big\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0 \Big\}$$

$$F_2 = \Big\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = x + z = 0 \Big\}$$

1. *Montrer que F_1, F_2 sont deux sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.*
2. *Donner une base de F_1, F_2 et en déduire $dimF_1, dimF_2$.*
3. *Montrer que $\mathbb{R}^3 = F_1 \oplus F_2$.*

solution
1)
$a)$ Pour montrer que F_1 est un s.e.v de $\mathbb{R}^3$ on suit la même méthode que dans l'exercice précédent.
$b)$ F_2 est un s.e.v de $\mathbb{R}^3$. En effet :
• $0 - 0 = 0 + 0$, c.a.d., $(0, 0, 0) \in F_2$ et donc

$$F_2 \neq \emptyset.$$

• Soient $v_1 = (x, y, z), v_2 == (x', y', z') \in F_2$. On alors x - y = x + z = 0 $etx' - y' = x' + z' = 0$.
$v_1 + v_2 = (x + x', y + y', z + z')$ et on a :

$$(x + x') - (y + y') = (x - y) + (x' - y') = 0 + 0 = 0$$

$$(x + x') + (z + z') = (x + z) + (x' + z') = 0 + 0 = 0$$

donc $(x + x') - (y + y') = (x + x') + (z + z') = 0$, c.a.d,

$$v_1 + v_2 \in F_2$$

• Soient $v_1 = (x, y, z) \in F_2, \lambda \in \mathbb{R}$. on a $x - y = x + z = 0$ et $\lambda v_1 = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$

$$\lambda x - \lambda y = \lambda (x - y) = 0$$
$$\lambda x + \lambda z = \lambda (x + z) = 0$$

donc

$$\lambda x - \lambda y = \lambda x + \lambda z = 0$$

d'où

$$\lambda v_1 \in F_2.$$

Remarque 6.10 *On peut écrire F_2 comme intersection de deux ensembles E_1, E_2 et montrer que E_1, E_2 sont des s.e.v de $\mathbb{R}^3$. Autrement dit, on pose $F_2 = E_1 \cap E_2$ avec $E_1 = \Big\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = 0 \Big\}$ et $E_2 = \Big\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + z = 0 \Big\}$.*

2) On cherche une base de F_2.
Soit $v = (x, y, z) \in F_2$ avec $x - y = x + z = 0$.
Il vient que $x = y$ et $z = -x$ par suite v s'écrit :
$v = (x, x, -x) = x\,(1, 1, -1)$, donc $F_2 = \langle (1, 1, -1) \rangle$. On en déduit que $dimF_2 = 1$.
En suivant la même méthode que l'exercice précédent on trouve que $dimF_1 = 2$.

3) Nous avons besoin de savoir la dimension de $F_1 \cap F_2$.
Soit $v = (x, y, z) \in F_1 \cap F_2$, on a alors $x + y + z = 0$ et $x - y = x + z = 0$, ce qui donne $x = y = -z$ et $x + x - x = 0$ et on a alors $x = y = z = 0$
d'où $F_1 \cap F_2 = \{(0, 0, 0)\}$. Par suite $dimF_1 \cap F_2 = 0$.
On a $dim\ \mathbb{R}^3 = 3$, d'autre part $dim\,(F_1 \oplus F_2) = dimF_1 + dimF_2 - dimF_1 \cap F_2 = 2 + 1 - 0 = 3$.
De plus, on a par définition que $F_1 \oplus F_2 \subset \mathbb{R}^3$.
Finalement, nous avons :

$$\begin{cases} dim\mathbb{R}^3 = dim\,(F_1 \oplus F_2) = 3 \\ (F_1 \oplus F_2) \subset \mathbb{R}^3 \end{cases} \Longrightarrow \mathbb{R}^3 = F_1 \oplus F_2.$$

Exercise 6.4 *On considère l'application f*

$$\begin{aligned} f :\ & \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ & (x, y) \longrightarrow f\,(x, y) = (x + y, x - y) \end{aligned}$$

1. *Montrer que f est linéaire.*
2. *Déterminer l'image, le noyau de f et donner leurs dimensions.*
3. *f est elle injective ? surjective ? bijective ?*
4. *Déterminer fof.*

solution

1) Pour que f soit une application lnéaire il suffit qu'elle vérifie les conditions suivantes :
$a)$ Soient $v_1 = (x, y)\,, v_2 = (x', y') \in \mathbb{R}^2$ on a :

$$\begin{aligned} f\,(v_1 + v_2) &= f\,(x + x', y + y')\,, \\ &= \Big((x + x') + (y + y')\,, (x + x') - (y + y') \Big), \\ &= \Big((x + y) + (x' + y')\,, (x - y) + (x' - y') \Big), \\ &= \Big(x + y, x - y \Big) + \Big(x' + y', x' - y' \Big), \\ &= f\,(x, y) + f\,(x', y')\,, \\ &= f(v_1) + f(v_2). \end{aligned}$$

b) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} f(\lambda v) &= f(\lambda x, \lambda y), \\ &= \Big(\lambda x + \lambda y, \lambda x - \lambda y\Big), \\ &= \Big(\lambda(x+y), \lambda(x-y)\Big), \\ &= \lambda\Big(x+y, x-y\Big), \\ &= \lambda f(x, y), \\ &= \lambda f(v). \end{aligned}$$

de *a*) et *b*) on a f est linéaire.
2)

- Pour le noyau

$$\begin{aligned} ker f &= \Big\{v = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(v) = 0_{\mathbb{R}^2}\Big\} \\ &= \Big\{v(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x+y, x-y) = (0, 0)\Big\} \\ &= \Big\{v(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y = 0 \quad \text{et} \quad x - y = 0\Big\} \\ &= \Big\{v(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = -y \quad \text{et} \quad x = y\Big\} \\ &= \Big\{v(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y = 0\Big\} \\ &= \Big\{v(0, 0)\Big\} \end{aligned}$$

$$dim\, ker f = 0$$

- Pour l'image

$$\begin{aligned} im f &= \Big\{f(v) \mid v = (x, y) \in \mathbb{R}^2\Big\} \\ &= \Big\{(x+y, x-y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\Big\} \\ &= \Big\{(x, x) + (y, -y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\Big\} \\ &= \Big\{x(1, 1) + y(1, -1) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\Big\} \\ &= \langle (1, 1), (1, -1) \rangle. \end{aligned}$$

Les vecteurs $(1, 1), (1, -1)$ sont linéairement indépendants, donc $im f$ est engendré par deux vecteurs qui sont libres, $dimim f = 2$.

$$\begin{cases} dim\, im f = dim\, \mathbb{R}^2 = 2 \\ im f \subset \mathbb{R}^2 \end{cases} \Longrightarrow im f = \mathbb{R}^2.$$

$im f = \mathbb{R}^2$ (ensemble d'arrivé), donc f est surjective.
f étant injective et surjective donc f est bijective.

Remarque 6.11 *On pouvait déduire la dimension de* $im f$ *en utilisant le théorème fondamental des dimensions. L'ensemble de départ est* $E = \mathbb{R}^2$*, l'ensemble d'arrivé est* $G = \mathbb{R}^2$*,* $dim E = dim\, im f + dim\, ker f$ *comme* $dim\, ker f = 0$*, on trouve* $dim\, im f = dim\, \mathbb{R}^2 = 2$.

3) On détermine fof

$$fof: \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \longrightarrow (fof)(x,y) \end{array}$$

où

$$\begin{array}{rcl} (fof)(x,y) & = & f\Big(f(x,y)\Big) \\ & = & f\Big(x+y, x-y\Big) \\ & = & \Big((x+y)+(x-y), (x+y)-(x-y)\Big) \\ & = & \Big(x+y+x-y, x+y-x+y\Big) \\ & = & \Big(2x, 2y\Big) \\ & = & 2(2x,2y) \\ & = & 2Id_{\mathbb{R}^2}. \end{array}$$

Exercise 6.5 *On considère l'application*

$$f: \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \longrightarrow f(x,y) = (2x-4y, x-2y) \end{array}$$

1. *Montrer que f est linéaire.*
2. *Déterminer $kerf, imf$ et donner leurs dimensions.*
3. *f est elle bijective ?*

solution

1) On utilise l'autre définition pour montrer que f est linéaire.
Soient $u = (x,y), v = (x', y') \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda, \mu, \in \mathbb{R}$, on montre que $f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v)$.

$$\begin{array}{rcl} f(\lambda u + \mu v) & = & f\Big((\lambda x, \lambda y) + (\mu x', \mu y')\Big) \\ & = & f\Big(\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y'\Big) \\ & = & \Big(2(\lambda x + \mu x') - 4(\lambda y + \mu y'), (\lambda x + \mu x') - 2(\lambda y + \mu y')\Big) \\ & = & \Big(\lambda(2x-4y) + \mu(2x'-4y'), \lambda(x-2y) + \mu(x'-2y')\Big) \\ & = & \Big(\lambda(2x-4y), \lambda(x-2y)\Big) + \Big(\mu(2x'-4y'), \mu(x'-2y')\Big) \\ & = & \lambda\Big(2x-4y, x-2y\Big) + \mu\Big(2x'-4y', x'-2y'\Big) \\ & = & \lambda f(x,y) + \mu f(x',y') \\ & = & \lambda f(u) + \mu f(v). \end{array}$$

Donc f est linéaire.

2)

• On détermine le noyau de f

$$\begin{aligned}
ker f &= \left\{v = (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(v) = 0_{\mathbb{R}^2}\right\} \\
&= \left\{v = (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \ (2x-4y, x-2y) = (0,0)\ \right\} \\
&= \left\{v = (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x-4y = 0 \quad \text{et} \quad x-2y = 0\right\} \\
&= \left\{v = (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 2y\right\} \\
&= \left\{v = (2y,y) \ \mid y \in \mathbb{R}\right\} \\
&= \left\{v = y\,(2,1) \ \mid y \in \mathbb{R}\right\} \\
&= \langle(2,1)\rangle
\end{aligned}$$

$ker f$ est engendré par le vecteur non nul $(2,1)$ donc $dim\, ker f = 1$

• Pour l'image

$$\begin{aligned}
im f &= \left\{f(v) \mid v = (x,y) \in \mathbb{R}^2\right\} \\
&= \left\{\ (2x-4y, x-2y) \ \mid \ (x,y) \in \mathbb{R}^2\right\} \\
&= \left\{\ (2x,x) + (-4y,-2y) \ \mid \ (x,y) \in \mathbb{R}^2\right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
im f &= \left\{x\,(2,1) + y\,(-4,-2) \ \mid \ (x,y) \in \mathbb{R}^2\right\} \\
&= \left\{x\,(2,1) - 2y\,(2,1) \ \mid \ (x,y) \in \mathbb{R}^2\right\} \\
&= \left\{\ (x-2y)\,(2,1) \ \mid \ (x,y) \in \mathbb{R}^2\right\} \\
&= \langle(2,1)\rangle
\end{aligned}$$

$im f$ est engendré par le vecteur non nul $(2,1)$ donc $dim\, im f = 1$

3) f n'est pas bijective car elle n'est ni injective, ni surjective. En effet :

• Comme $ker f \neq 0_{\mathbb{R}^2}$, donc f n'est pas injective.

• L'ensemble d'arrivé est $\mathbb{R}^2$ et $dim\, \mathbb{R}^2 = 2 \neq dim\, im f = 1$, donc f n'est pas surjective.

Exercise 6.6 *On considère l'application linéaire*

$$\begin{aligned}
f:\ & \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\
& (x,y,z,t) \longrightarrow f\,(x,y,z,t) = (x-y+z, 2x+2y+6z+4t, -x-2z-t)
\end{aligned}$$

1. *Donner la dimension de noyau de f.*
2. *Calculer le rang de f.*

solution

1) Soit $v=(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$,

$$\begin{aligned}
v=(x,y,z,t)\in ker f &\iff f(v)=0_{\mathbb{R}^3}\\
&\iff \Big(x-y+z, 2x+2y+6z+4t, -x-2z-t\Big)=(0,0,0)\\
&\iff \begin{cases} x-y+z=0\\ 2x+2y+6z+4t=0\\ -x-2z-t=0\end{cases}\\
&\iff \begin{cases} x=-2z-t\\ y=-z-t\end{cases}\\
ker f &= \Big\{v=(-2z-t,-z-t,z,t)\ \Big|\ z,t\in\mathbb{R}\Big\}\\
&= \Big\{v=(-2z,-z,z,0)+(-t,-t,0,t)\ \Big|\ z,t\in\mathbb{R}\Big\}\\
&= \Big\{v=z\,(-2,-1,1,0)+t\,(-1,-1,0,1)\ \Big|\ z,t\in\mathbb{R}\Big\}\\
&= \langle(-2,-1,1,0)\,,(-1,-1,0,1)\rangle
\end{aligned}$$

On peut facilement vérifier que la famille $\{(-2,-1,1,0)\,,(-1,-1,0,1)\}$ est libre.
$ker f$ est engendré par deux vecteurs non nuls linéairement indépendants donc $dim\, ker f=2$.
2) On sait que $rg(f)=dim\, im f$. On a $dim\,\mathbb{R}^4=dim\, ker f+dim\, im f$, c.a.d.,
$4=2+dim\, im f$, ce qui donne $dim\, im f=2$, et donc $rg(f)=2$.

Bibliographie

[1] **A. Boukerboub** : *An*alyse I, 1^{re} année d' Université, Cours et exercices corrigés. 2008.

[2] **C. Baba-Hamed et K. Benhabib :** *Algèbre I, Rappel de cours et exercices avec solutions.* O.P.U.(1985).

[3] **C. Baba-Hamed et K. Benhabib :** *An*alyse I, Rappel de cours et exercices avec solutions. O.P.U.(1999).

[4] **E. Azouly, J. Avignant, G. Auliac** : *Pr*oblèmes Corrigés de Mathématiques, DEUG MIAS/SM, Ediscience (Dunod pour la nouvelle édition). Paris (2002).

[5] **K. Allab :** *Él*éments d'analyse, Fonction d'une variable reélle 1^{re} et 2^{e} année d' université, Ecoles scientifiques. O.P.U.(1993).

[6] **M. Mehbali** : *Ma*thématiques, 1^{re} année université. Fonction d'une variable reélle, R*ésumés de cours-exercices corrigés*. O.P.U.(2003).

[7] **M. H. Mortad** : *Ex*ercices Corrigés d'Algèbre, Première Année L.M.D., Édition " Dar el Bassair "(Algie-Algerie). (2012).

[8] **M. Queysanne** : *Al*gèbre, Collection U, Armand Colin. (1971).

[9] **R. Benzine** : *An*alyse Réelle Cours et Exercices Corrigés, Préparation aux Grandes Écoles, Première Année Maths et Informatique. (2016).

[10] **S. Gourari** : *Al*gèbre-linéaire, *Cours et exercices résoulus.* O.P.U.(1987).

[11] **S. H. Miri** : *Al*gèbre et *An*alyse, Faculté de Technologie, Université de Tlemcen. (2013).