RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Djilali Bounaâma-Khemis Miliana
Faculté des Sciences & Technologie
Département de Mathématiques et Informatique

Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Option : Analyse Mathématique et Applications

Thème

Stabilité exponentielle de certains systèmes dynamiques avec retard

---

Présenté par :
Aggoun Besma

Membres du jury :

Mme L. Slimane	M.C.B	Université Djilali Bounaâma	**Présidente**.
M^r M. Houasni	M.C.B	Université Djilali Bounaâma	**Encadreur.**
M^r B. Sadaoui	M.C.A	Université Djilali Bounaâma	**Examinateur 1.**
M^r A. Kali	M.C.B	Université Djilali Bounaâma	**Examinateur 2.**

Année universitaire 2020/2021

Résumé

- Le but de ce mémoire est d’étudier la stabilité de certains problèmes dynamiques à retard. Il s’agit de système de structure flexible et de Porous-thermoélastique.
- Notre objectif principal est d’étudier l’existence et l’unicité de la solution, ainsi que sa stabilité en présence de terme de retard.
- Dans des conditions appropriées, nous établissons la bien posée des problèmes en utilisant la théorie des semi-groupes et leurs estimations de stabilité par la méthode de l’énergie basée à la technique du multiplicateur.
- **Mots clés:** Système Poreux, retard, stabilité exponentielle, théorème de Hille-Yosida, fonctionnelle de Lyapunov.

Abstract

- The aim of this memoir is to investigte the stability of certain delayed dynamic problems, such as : flexible structure system and thermoelastic Porous.
- Our main goal is to study the existence and the uniqueness of the solution as well its stability even the presence of time-delay.
- Under suitable conditions, we establish the well-posedness of the problems using semigroups theory, and their stability estimates by using the multiplier method.
- **Keywords:** Porous system, delay, exponential stability, Hille-Yosida theorem, Lyapunov functional.

Remerciements

Tout d'abord, je remercie Dieu qui m'a aidé à accomplir ce travail.

Toute ma gratitude à mon encadrant " Mr : ***M. HOUASNI*** *", qui à encadré mon travail, pour ses judicieux conseils, l'orientation permanente et la patience qu'il m'a sacré durant toute la période de travail.*

Je veux remercier également les membres du jury d'avoir accepter l'évaluation de mon travail.

J'adresse aussi mon remerciement à tous mes enseignants et les professeurs du département mathématique et informatique de l'université Djilali Bounaâma Khemis Miliana.

Je doit aussi remercier tous mes enseignants qui ont constitué un apport considérable pour que j'atteigne ce jour.

Enfin, je tiens également à remercier toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

MERCI

بسم الله الرحمن الرحيم

الى من بلغ الرسالة وأدى الأمانة الى نبي الرحمة ونور العالمين
سيدنا محمد صلى الله عليه وسلم

الى من حصد الأشواك على دربي الى من أحمل اسمه بكل فخر
الى أبي العزيز

الى نبع الحنان ومرسى الأمان الى صاحبة القلب ناصع البياض
الى أمي الحبيبة

الى سندي وملاذي بعد الوالدين والله الى اخوتي واخواتي
سارة، نسرين، فضيلة، شهرزاد
محمد ، حسين
الى أبناء أخواتي محمد أمين، بسمة أمل، عبد الرزاق

الى من جعلتهم الحياة اخوتي واخواتي الى كل من
وسعتهم ذاكرتي ولم تسعهم مذكرتي

الى من سأفتقدهم .... وأتمنى أن يفتقدوني
قسم التحليل الرياضي و التطبيقات أساتذة وطلابا

Table des matières

Notations

Ω	:= Un ouvert de $\mathbb{R}^n$.
$\mathbb{K}$	:= Le corps des nombres réels où complexes.
$\mathbb{R}$	:= L'ensemble des nombres réels.
$L^p(\Omega)$	:= L'espace de Lebesgue, $1 \leqslant p \leqslant \infty$.
$C^k(\Omega)$	:= L'espace des fonctions$k$ fois dérivable et la dérivé d'ordre k est continue.
$W^{m,p}(\Omega)$	:= L'espace de Sobolev, $1 \leqslant p \leqslant \infty$.
$W_0^{m,p}(\Omega)$	:= La fermeture de $C_c^\infty(\Omega)$ dans $W^{m,p}(\Omega)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$.
$\mathbb{H}^m(\Omega)$	:= $W^{m,2}(\Omega)$.
$D(\mathcal{A})$	:= Domaine de l'opérateur $\mathcal{A}$.
$\mathbb{H}$	:= L'espace de Hilbert.
$\langle .,. \rangle, (.,.)$	:= Le produit scalaire.
$\Vert . \Vert$	:= La norme .
$D^\alpha \varphi$	:= La dérivée partielle par rapport au multi-indice α.
u_t	:= $\frac{\partial u}{\partial t}$ La dérivée de u par rapport à t .
u_{tt}	:= $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ La dérivée d'ordre 2 de u par rapport à t.
u_x	:= $\frac{\partial u}{\partial x}$ La dérivée de u par rapport à x.
u_{xx}	:= $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ La dérivée d'ordre 2 de u par rapport à x.
u_{xt}	:= $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}$ La dérivée d'ordre 2 de u par rapport à x par rapport à t .

Introduction Générale et Présentation

L'analyse qualitative des systèmes dynamiques introduits par H. Poincaré à la fin du XIXe siècle a donné naissance au champ fructueux sur la théorie des systèmes dynamiques. Avant ça, les équations différentielles à résoudre de la même manière qu'à des équations algébriques. Poincaré avait l'idée brillante d'essayer d'étudier des équations différentielles de manière qualitative, ce qui signifie essentiellement que la recherche de solutions n'est plus l'objectif, mais nous concentrons à la mise en place de certaines propriétés des solutions.

Dans la même veine des idées de Poincaré, A.M. Lyapunov a développé la théorie de la stabilité des systèmes dynamiques lors de son doctorat. Une caractéristique fondamentale et attrayante des résultats de Lyapunov est que dans le même esprit que les idées de Poincaré, les propriétés des trajectoires dans un voisinage d'un point d'équilibre peuvent être évaluées sans même calculer les solutions du système dynamique. Cela peut être réellement effectué en utilisant des fonctions potentielles, maintenant appelé fonctions Lyapunov. La théorie de Lyapunov sera indiquée comme un outil adéquat pour traiter les équations différentielles à retard.

Les équations différentielles à retard sont des équations dans lesquelles un retard temporel apparaît dans les variables d'états. Les retards sont importants dans des problèmes où le comportement est affecté par la dépendance des variables d'états au temps passé. Ces équations sont également appelées : équations différentielles à argument retardé ou encore équations différentielles fonctionnelles. Plus précisément, une équation différentielle à retard s'exprime mathématiquement sous une forme générale, pour $t \geq 0$

$$x'(t) = f(t, x(t), x(t-\tau_1), \ldots, x(t-\tau_p)),$$

avec $\tau_i \in \mathbb{R}^+$, pour $i \in \{1, \ldots, p\}$, sont des constantes données. Le cas $\tau_i = 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$, correspond clairement à une équation différentielle ordinaire (EDO), pour $t \geq 0$

$$x'(t) = f(t, x(t)).$$

Cette classe d'équations différentielles à retard est utilisée dans plusieurs domaines de recherches. Par exemple, en automatique, en économie. La théorie de Lyapunov a été largement acceptée par les systèmes et contrôler les théoriciens comme point de départ fondamental pour traiter l'analyse et le contrôle des systèmes dynamiques.

Alors que la stabilité est l'une des propriétés les plus importantes qu'un système de contrôle devrait posséder. Il existe plusieurs degrés de stabilité que l'on peut étudier.

Le premier degré consiste à analyser simplement la décroissance de l'énergie $\mathcal{E}$ des solutions vers zéro, i.e.

$$\mathcal{E}(t) \to 0, \quad \text{lorsque} \quad t \to +\infty,$$

cette stabilisation est appelée stabilisation forte.

Pour le second degré, on s'intéresse à la décroissance de l'énergie la plus rapide, c'est-à-dire lorsque celle-ci tend vers 0 de manière exponentielle :

$$\mathcal{E}(t) \leq Ce^{-\delta t}, \quad \forall t > 0,$$

où C et δ sont des constantes positives avec C qui dépend des données initiales.

Le troisième degré concerne certaines situations intermédiaires dans lesquelles la décroissance des solutions est de type exponentiel, par exemple

$$\mathcal{E}(t) \leq \frac{C}{t^\alpha}, \quad \forall t > 0.$$

Dans ce travail, nous traitons la décroissance exponentielle.

La suite de ce mémoire est organisé de la manière suivante

Dans ce premier chapitre, on va donner des rappels et des préliminaires de base sur l'analyse fonctionnelle qui vont être utilisés dans les chapitres suivants de ce mémoire.

Dans le deuxième chapitre, nous avons considéré un problème thermo-élastique

$$\begin{cases} m(x)u_{tt} - (p(x)u_x + 2\delta(x)u_{xt})_x + dw_x + \eta\theta_x + \mu u_t(x, t-\tau_0) = 0, \quad x \in [0, L],\ t > 0, \\ c\theta_t - k\theta_{xx} + \eta u_{tx} + k_1 w_x = 0, \quad x \in [0, L],\ t > 0, \\ \tau w_t - k_3 w_{xx} + k_2 w + k_1\theta_x + du_{tx} = 0, \quad x \in [0, L],\ t > 0. \end{cases}$$

Avec les conditions initiales et limites suivantes

$$\begin{cases} u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad \theta(x,0) = \theta_0(x), \quad w(x,0) = w_0(x), \quad \forall x \in [0, L], \\ u(0,t) = u(L,t) = \theta(0,t) = \theta(L,t) = w_x(0,t) = w_x(L,t) = 0, \quad \forall t \geq 0. \end{cases}$$

Il est constitue de trois sections : position du problème, résultat d'existence et d'unicité et résultat de stabilité exponentielle.

Dans le troisième chapitre, nous étudions un problème poreux de thermo-élasticité suivant

$$\begin{cases} \rho u_{tt} = \mu u_{xx} + by_x - \gamma\theta_x + \beta u_{txx}, \quad x \in [0, 1],\ t > 0, \\ Jy_{tt} = \delta y_{xx} - bu_x - \xi y - d\varrho_x + m\theta - \eta_1 y_t - \eta_2 y_t(x, t-s), \quad x \in [0, 1],\ t > 0, \\ \kappa\theta_t = l\theta_{xx} - \gamma u_t - my_t - k_1\varrho_x, \quad x \in [0, 1],\ t > 0, \\ \alpha\varrho_t = -k_1\theta_x - dy_{tx}, \quad x \in [0, 1],\ t > 0. \end{cases}$$

Ce système est muni des conditions initiales comme suit

$$\begin{cases} u(x,0) = u_0(x)\ , u_t(x,0) = u_1(x)\ , y(x,0) = y_0(x), \\ y_t(x,0) = y_1(x)\ , \varrho(x,0) = \varrho_0(x)\ , \theta(x,0) = \theta_0(x), \end{cases} \qquad \forall x \in [0, 1],$$

et des conditions aux limites

$$\begin{cases} u(0,t) = u(1,t) = y_x(0,t) = y_x(1,t) = \theta_x(0,t) = \theta_x(1,t) = 0, \\ \varrho(0,t) = \varrho(1,t) = y(0,t) = y(1,t) = \theta(0,t) = \theta(1,t) = 0, \end{cases} \qquad \forall t \geq 0.$$

En utilisant la méthode des multiplicateurs nous démontrons la stabilité exponentielle de ce systéme.

Dans ce travail, pour assurer le bien posé des problèmes, nous utilisons la théorie des semi-groupes pour établir l'existence et l'unicité des solutions. Dans la théorie des semi-groupes, le théorème de Hille-yosida est un outil puissant et fondamental reliant les propriétés de dissipation énergétique d'un opérateur sans bornes $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ à l'existence, unicité et régularité des solutions d'une équation différentielle stationnaire (problème de Cauchy)

$$\begin{cases} \Phi'(t) = \mathcal{A}(t)\Phi(t), & t > 0 \\ \Phi(0) = \Phi_0. \end{cases}$$

Pour les résultats de la stabilité, nous utilisons la méthode multiplicateur basée sur la construction d'une fonction Lyapunov $\mathcal{L}$ équivalente à l'énergie $\mathcal{E}$ de la solution. Nous désignons par $\mathcal{L} \sim \mathcal{E}$ l'équivalence

$$c_1\mathcal{E}(t) \leq \mathcal{L} \leq c_2\mathcal{E}(t), \qquad \forall t \geq 0, \tag{0.1}$$

pour deux constantes positives c_1 et c_2. Par exemple, pour établir une stabilité exponentielle, il suffit de montrer que

$$\mathcal{L}'(t) \leq -c\mathcal{L}(t), \qquad \forall t > 0. \tag{0.2}$$

Pour certains $c > 0$, une intégration simple de (0.2) sur $(0, t)$ avec (0.1) conduit au résultat souhaité de la stabilité exponentielle. Cela ne vaut rien que les théorèmes Lyapunov ne sont que des conditions suffisantes pour la stabilité et la difficulté ici est de trouver la fonction adéquate Lyapunov.

CHAPITRE 1

PRÉLIMINAIRES D'ANALYSE FONCTIONNELLE

Sommaire

Dans ce chapitre, nous collectons plusieurs outils de base qui seront nécessaires tout au long de ce travail. Le lien commun entre tous les résultats de ce chapitre, c'est qu'ils sont préparatoires pour les principaux résultats, qui sont contenues dans les chapitres suivants.

1.1 Quelques espaces de bases

Dans cette section, on presente les espaces fondamentaux (Hilbert ①,Lebesgue ② *et* Sobolev ③)
Pour plus de détails sur les notions rappelées dans ce paragraphe voir H. Brezis et L.Sonrier [3, 9].

Espace de Hilbert

Définition 1. *[4] Un espace de Hilbert $\mathbb{H}$ est un espace vectoriel avec le produit scalaire $\langle u, v\rangle$ tel que $\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle}$ est la norme qui soit $\mathbb{H}$ complète.*

Espaces de Lebesgue

Définition 2. *[4] Soit Ω un domaine dans $\mathbb{R}^n$, nous définissons l'espace $L^p(\Omega)$ comme suivante*

- *pour $1 \leq p < \infty$, l'espace $L^p(\Omega)$ est l'espace des fonctions f réelles sur Ω telles que f est mesurable et*
$$\int_\Omega |f(x)|^p dx < \infty.$$
Si $f \in L^p(\Omega)$, on définie la norme
$$\boxed{\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}}$$
- *pour $p = \infty$, l'espace $L^\infty(\Omega)$ est l'espace des fonctions mesurables f qui sont essentiellement bornées sur Ω.*
Si $f \in L^\infty(\Omega)$, on a
$$\boxed{\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_\Omega |f(x)| = \inf\{A \geq 0 : \mu\{x \in \Omega : f(x) > A\} = 0\}}$$

①. David Hilbert né en 1862 à Königsbergh 1 et mort en 1943 à Göttingen, est un mathématicien allemand. Il est souvent considéré comme un des plus grands mathématiciens du XX^e siècle .
②. Henri-Léon Lebesgue (1875-1941) :est l'un des grands mathématiciens français. Il est reconnu pour sa théorie d'intégration .
③. Sergueï Lvovitch Sobolev (1908-1989) : est un mathématicien et physicien atomique russe de l'époque soviétique .

Espace de Sobolev dans $\mathbb{R}$ [4]

Les espaces de Sobolev jouent un rôle fondamental dans le calcul variationnel. Ils doivent leur nom au mathématicien russe Sergueï Lvovitch Sobolev (1908-1989).

Espace de Sobolev $W^{1,P}(\Omega)$

Définition 3. *Soient Ω un ouvert quelconque de $\mathbb{R}^n$ et $P \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq P \leq \infty$, l'espaces de Sobolev $W^{1,P}(\Omega)$ est défini par*

$$\boxed{W^{1,P}(\Omega) = \left\{u \in L^P(\Omega)\,, \exists g \in L^P(\Omega) \text{ tel que } \int_\Omega u(x)\varphi'(x)\mathrm{d}x = -\int_\Omega g(x)\varphi(x)\mathrm{d}x\right\}}$$

on pose

$$\mathbb{H}^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega).$$

Espace de Sobolev $W^{m,P}(\Omega)$

Définition 4. *Soient Ω un ouvert quelconque de $\mathbb{R}^n$, $m \geq 2$ et un réel p, $1 \leq p \leq \infty$, l'espaces de Sobolev $W^{m,P}(\Omega)$ est défini par*

$$\boxed{W^{m,p}(\Omega) = \left\{ \begin{array}{c} u \in L^p(\Omega) \quad \forall \alpha \text{ avec } \quad |\alpha| \leq m \quad \exists g_\alpha \in L^p(\Omega) \\ \text{tel que } \displaystyle\int_\Omega u D^\alpha \varphi \mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g_\alpha \varphi \mathrm{d}x, \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \end{array} \right\},}$$

où $\alpha \in N^n$, $|\alpha| = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \alpha_i$ et $D^\alpha \varphi = \dfrac{\partial^{|\alpha|}\varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} .. \partial x_N^{\alpha_N}}$.

On pose

$$\mathbb{H}^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega),$$

l'espace $W^{m,p}$ est muni de la norme

$$\boxed{\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{0<\alpha\leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}}$$

Et l'espace $\mathbb{H}^m$ est muni du produit scalaire

$$\boxed{(u,v)_{H^m(\Omega)} = (u,v)_{L^2(\Omega)} + \textstyle\sum_{\alpha=1}^{m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)}}$$

pour tout $u, v \in \mathbb{H}^m(\Omega)$.

Espace de Sobolev $W_0^{1,P}(\Omega)$

Définition 5. *Étant donné le réel p, $1 \leq p \leq \infty$ on appelle espace de Sobolev, et on note $W_0^{1,p}(\Omega)$, l'adhérence de $D(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$ (resp $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ si $p = 2$).*

1.2 Rappel de quelques inégalités

Dans cette section, nous allons donner une série d'inégalités essentiel qui seront d'une grande utilité dans la suite du mémoire.

Inégalité de Poincaré ④

Lemme 1.1. *[9] Supposons que I est un intervalle borné, alors il existe une constant C (dépendant de $|I| < \infty$) telle que*

$$\|u\|_{L^p(I)} \leq C\|u'\|_{L^p(I)} \quad u \in W_0^{1,p}(I).$$

Autrement dit, sur $W_0^{1,p}$ la quantité $\|u'\|_{L^p(I)}$ est une norme équivalente à la $W^{1,p}$ norme.

R L'inégalité de Poincaré (du nom du mathématicien français Henri Poincaré) est un résultat de la théorie des espaces de Sobolev. Cette inégalité permet de borner une fonction à partir d'une estimation sur ses dérivées et de la géométrie de son domaine de définition. Ces estimations sont d'une grande importance pour la méthode du calcul des variations.

④. Henri Poincaré est un mathématicien, physicien théoricien et philosophe des sciences français, né le 29 avril 1854 à Nancy et mort le 17 juillet 1912 à Paris.

Inégalité de Cauchy ⑤-Schwartz ⑥

Lemme 1.2. *[4] Soit $\mathbb{H}$ un espace de Hilbert muni d'un produit scalaire (.,.), alors*

$$|(u,v)| \leq (u,u)^{\frac{1}{2}}(v,v)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall u,v \in \mathbb{H}.$$

Inégalité de Young ⑦

Théorème 1.1. *[3] Soient $a,b \geq 0$ et p,q deux nombres réels conjuguéès dans $]1,\infty[$, $\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$, alors pour tout $\eta > 0$*

$$ab \leq \eta a^p + C_\eta b^q,$$

où $C_\eta = \dfrac{1}{q(\eta p)^{\frac{p}{q}}}$.

R pour $p = q = 2$, l'inégalité précédente s'écrit sous la forme

$$ab \leq \eta a^2 + \frac{b^2}{4\eta}.$$

1.3 Quelques notions sur les opérateurs

Définition 6. *[4] un opérateur linéaire sur un espace X est une application linéaire définie sur un sous espace vectoriel $D(A) \subset X$ a valeurs dans X, ($D(A)$ s'appelle le domaine de l'opérateur A).*

Définition 7. *[4] Soit $\mathbb{H}$ un espace de Hilbert et A un opérateur non borné sur $\mathbb{H}$ de domaine D(A).*

⑤. Augustin Louis, baron Cauchy, né à Paris le 21 août 1789 et mort à Sceaux le 23 mai 1857, est un mathématicien français, membre de l'Académie des sciences et professeur à l'École polytechnique.

⑥. Laurent Schwartz est un mathématicien français, né le 5 mars 1915 à Paris où il est mort le 4 juillet 2002. Il est le premier Français à obtenir la médaille de Fields, en 1950 pour ses travaux sur la théorie des distributions.

⑦. William Henry Young (Londres, 20 octobre 1863 - Lausanne, 7 juillet 1942) est un mathématicien anglais issu de l'université de Cambridge et ayant travaillé à l'université de Liverpool et à l'université de Lausanne.

*On dit que A est **monotone** (ou accrétif) si*

$$\langle Av, v\rangle \geq 0 \quad , \forall v \in D(A)$$

A est dissipatif si

$$\langle Au, u\rangle \leq 0 \quad , \forall u \in D(A)$$

*on dit que A est **maximal monotone** si de plus* $\mathrm{Im}(\mathrm{Id} + \mathrm{A}) = \mathrm{H}$, *i.e*

$$\forall f \in H, \exists u \in D(A) \text{ tel que } \quad u + Au = f.$$

Proposition 1.1. *[4] Soit A un opérateur monotone maximal, ensuite*

- *$D(A)$ est dense en $\mathbb{H}$,*
- *A est un opérateur fermé,*
- *Pour chaque $\lambda > 0$, $(I + \lambda A)$ est bijective de $D(A)$ sur $\mathbb{H}$, $(I + \lambda A)^{-1}$ est un opérateur borné, et $\|(I + \lambda A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} \leq 1$.*

1.4 Semi-groupe fortement continue d'opérateurs linéaires

Définition 8. *[15] Soit X un espace de banach, soit $\mathcal{L}(X)$ l'ensemble de tous les opérateurs linéaires bornés de X à X, une famille $\{S(t), t \geq 0\}$ dans $\mathcal{L}(X)$ est un semi-groupes d'opérateur linéaire borné sur X si*

1) *$S(0) = I$, (I est l'opérateur d'identité sur x).*
2) *$S(t_1 + t_2) = S(t_1)S(t_2) \qquad \forall t_1, t_2 \geq 0$ (la propriété semi-groupe).*
3) *pour chaque $x \in X$, $S(t)x$ est continue sur $[0, \infty)$.*

Définition 9. *[15] Le générateur infinitésimal, où générateur du semi-groupe d'opérateurs linéaires $\{S(t), t \geq 0\}$. L'opérateur $A : D(A) \subseteq X \to X$ défini par*

$$D(A) = \left\{ x \in X : \lim_{t \to 0} \frac{S(t)x - x}{t} \quad existe \right\},$$

et défini par

$$Ax = \lim_{t \to 0} \frac{S(t)x - x}{t} \qquad \text{pour } x \in D(A).$$

Dans le générateur infinitésimal du semi-groupe $S(t)$, $D(A)$ est le domaine d'un opérateur A.

1.5 Existence et unicité de la solution

Pour traiter l'existence et l'unicité de la solution on utilise le théorème de Lumer[8]-Phillips[9] où le théorème Hille[10]-Yosida[11]

Définition 10. *[10] Soit V un espace de Hilbert (réel) de produit scalaire noté $(.,.)v$ et de norme associée $\|.\|_V$, on se propose de résoudre le problème suivant*

trouver $u \in V$ tel que pour tout $v \in V$ on ait : $\quad A(u,v) = L(v),$

on impose les conditions suivantes

1) L est une application définie sur V, à valeurs dans $\mathbb{R}$ vérifiant de plus

1. *L est linéaire,*
2. *L est continue, i.e. il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\text{pour tout } v \in V,\ |L(v)| \leq C\|v\|_V,$$

2) A est une application définie sur $V \times V$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ vérifiant de plus

1. *A est bilinéaire,*
2. *A est continue, i.e. il existe une constante $M > 0$ telle que*

$$\text{pour tout } (u,v) \in V^2, |A(u,v)| \leq M\|u\|_V\|v\|_V,$$

3. *A est coercive, i.e. il existe une constante $\alpha > 0$ telle que*

$$\text{pour tout } v \in V, A(v,v) \geq \alpha\|v\|_V^2.$$

[8]. Günter Lumer (1929-2005) est un mathématicien connu pour ses travaux en analyse fonctionnelle. Né en Allemagne et élevé en France et en Uruguay.

[9]. Ralph Saul Phillips (23 juin 1913-23 novembre 1998) était un américain mathématicien et universitaire connu pour ses contributions à analyse fonctionnelle.

[10]. Carl Einar Hille, né le 28 juin 1894 et mort le 12 février 1980, était un professeur et chercheur en mathématiques américain. Il a signé ou co-signé douze ouvrages de mathématiques et plusieurs articles.

[11]. Kosaku Yosida Yoshida (1909-1990) est un mathématicien japonais, spécialiste de l'analyse fonctionnelle. Il est connu pour le théorème de Hille-Yosida relatif aux C_0semi-groupes.

Lemme 1.3. *[10](Lax* ❷ *- Milgram* ❸*) Soit V un espace de Hilbert réel, A une forme bilinéaire, continue et coercive sur V et L une forme linéaire continue sur F.*
Alors, il existe un unique élément u de V solution du problème variationnel. Si la forme bilinéaire est symétrique, (i.e. si $A(u,v) = A(v,u)$ pour tout u, v dans V), en posent

$$\textit{pour tout } v \in V, E(v) = \frac{1}{2}A(v,v) - L(v).$$

telle que est équivalent à un problème de minimisation pour la fonctionnelle quadratique E.

Théorème de Hille-Yosida

Etant donné, le problème d'évolution suivant

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + Au = 0 \quad \text{sur} \quad [0, +\infty[, \\ u(0) = u_0 \quad \text{(donnée initiale)} . \end{cases} \tag{1.1}$$

Théorème 1.2. *[3] Soit A un opérateur maximal monotone dans un espace de Hilbert H, alors pour tout $u_0 \in D(A)$ il existe une unique fonction*

$$u \in \mathbf{C}^1\left([0, +\infty[, H\right) \cap \mathbf{C}\left([0, +\infty[, D(A)\right) \ ,$$

solution du (1.1).
De plus on a

$$|u(t)| \leq |u_0| \quad \textit{et} \quad \left|\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t)\right| = |Au(t)| \leq |Au_0| \quad \forall t \geq 0.$$

❷. Peter Lax, né en 1926 à Budapest, est un mathématicien d'origine hongroise et de nationalité américaine. Le prix Abel lui est décerné 2005.

❸. Arthur Norton Milgram, né le 3 juin 1912 à Philadelphie et mort le 30 janvier 1961 (à 48 ans), est un mathématicien américain. Il a travaillé en analyse fonctionnelle

Théorème de Lumer-Phillips

Théorème 1.3. *[15] Soit $A : D(A) \subseteq X \to X$ un opérateur linéaire défini, et $D(A)$ domaine dense dans X, alors A génère un C_0semi-groupe de contractions sur X si et seulement si*

(i) A est dissipatif.

(ii) il existe $\lambda > 0$ tel que $\lambda I - A$ est surjectif.

1.6 Stabilité

Présentons d'abord les concepts de base de stabilité

Définition 11. *[14](système autonomes et non autonomes) Le système non linéaire*

$$x = f(x,t) \tag{1.2}$$

est dit autonome si f ne dépend pas explicitement du temps, c'est-à-dire si l'équation d'état du système peut s'écrire $x = f(x)$ sinon, le système est appelé non autonome.

Point équilibre[14]

Un état x^* est un état d'équilibre (ou point d'équilibre) du système si une fois que $x(t)$ est égal à x^*, il reste à x^* pour tout le temps future. Mathématiquement, cela signifie que le vecteur constant x^* satisfait $f(x^*) = 0$ les point d'équilibre peuvent être trouvés en résolvant les équations algébriques non linéaires.

Définition 12. *[8](Stabilité au sens de Lyapunov) Le point d'équilibre $x = 0$ de (1.2) est*

- *Stable si, pour chaque $\epsilon > 0$, il ya $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tel que*

$$\|x(0)\| \leq \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \epsilon, \quad \forall t \geq 0.$$

- *instable s'il n'est pas stable.*
- *asymptotique stable s'il est stable et δ peut être choisi tel que.*

$$\|x(0)\| \leq \delta \Rightarrow \lim_{t\to\infty} \|x(t)\| = 0.$$

Définition 13. *[14] (stabilité exponentiel) Un point d'équilibre* 0 *est exponentiellement stable s'il existe deux nombres strictement positifs* α *et* λ *tel que*

$$\forall t > 0, \quad \|x(t)\| \leq \alpha \|x(0)\| \mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

Notez que la stabilité exponentielle implique une stabilité asymptotique. Mais la stabilité asymptotique ne garantit pas une stabilité exponentielle.

Définition 14. *[14] A une fonction continue scalaire* $v(x)$ *est dite localement définie positive si* $v(0) = 0$ *et dans une boule* B_{R_0}

$$x \neq 0 \Rightarrow v(x) > 0,$$

si $v(0) = 0$ *et que la propriété ci-dessus s'applique à tout l'espace d'état, alors* $v(x)$ *est dit globalement positif défini.*

Définition 15. *[8] Soit* $x = 0$ *un point d'équilibre pour (1.2) et* $D \subset \mathbb{R}^n$ *un domaine contenant* $x = 0$*. Soit* $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ *une fonction différentiable telle que*

$$V(0) = 0 \text{ et } V(x) > 0 \ \ dans \ \ D - \{0\}.$$

$$V(x) \leq 0 \ \ dans \ \ D.$$

Alors, $x = 0$ *est stable, de plus si*

$$V'(x) < 0 \, dans \, D - \{0\},$$

alors $x = 0$ *est asymptotique stable.*

CHAPITRE 2

SUR LA STABILITÉ EXPONENTIELLE D'UNE STRUCTURE FLEXIBLE AVEC UN RETARD CONSTANT

Sommaire

Dans ce chapitre nous considérons les vibrations d'un système de structure flexible inhomogène avec un retard interne constant .

Nous présentons dans ce que suite, une méthode habituelle pour traiter ce type de problème précisément, la théorie de semi-groupes et la méthode de l'énergie avec la fonctionnelle de Lyapunov.

2.1 Position du problème

Considérons le système suivant :

$$\begin{cases} m(x)u_{tt} - (p(x)u_x + 2\delta(x)u_{xt})_x + dw_x + \eta\theta_x + \mu u_t(x, t - \tau_0) = 0, \quad x \in [0, L],\ t > 0, \\ c\theta_t - k\theta_{xx} + \eta u_{tx} + k_1 w_x = 0, \quad x \in [0, L],\ t > 0, \\ \tau w_t - k_3 w_{xx} + k_2 w + k_1\theta_x + du_{tx} = 0, \quad x \in [0, L],\ t > 0. \end{cases} \tag{2.1}$$

Avec les conditions initiales et limites suivantes

$$\begin{cases} u(x,0)=u_0(x), \quad u_t(x,0)=u_1(x), \quad \theta(x,0)=\theta_0(x), \quad w(x,0)=w_0(x), \quad \forall x\in[0,L], \\ u(0,t)=u(L,t)=\theta(0,t)=\theta(L,t)=w_x(0,t)=w_x(L,t)=0, \quad \forall t\geq 0. \end{cases} \tag{2.2}$$

$u(x,t)$ est le déplacement d'une particule à la position $x\in[0,L]$, et au temps $t>0$, θ et w sont respectivement la températeure d'une corps et le vecteur de micro-températeure, η est le constant de couplage qui réprésente l'effet de chauffage.
$k_1,k_2,k_3,c,d,\tau>0$, $m(x),\delta(x),p(x)$ sont responsables de la structure non uniforme du corps et respectivement, dénote la masse par unité de longeur de la structure, le coefficient d'amortissement du matériau interne et une fonction positive liée à la contrainte agissante sur le corps à un point x. Le terme $\mu u_t(x,t-\tau_0)$ représente le retard constant.
Afin de pouvoir utiliser l'inégalité de Poincaré pour w, on déduit de la troisième équation du système (2.1) et les conditions aux limites

$$\frac{d}{dt}\int_0^L w(x,t)\mathrm{d}x+\frac{k_2}{\tau}\int_0^L w(x,t)\mathrm{d}x=0 \qquad ,\forall t\geq 0,$$

ainsi,

$$\int_0^L w(x,t)\mathrm{d}x=\left(\int_0^L w_0 dx\right)\exp\left(\frac{-t}{\tau}k_2\right) \qquad ,\forall t\geq 0,$$

donc si on pose

$$\tilde{w}(x,t)=w(x,t)-\frac{1}{L}\exp\left(\frac{-t}{\tau}k_2\right) \qquad ,\forall t\geq 0 \qquad ,x\in[0,L].$$

Alors , $(u,u_t,\theta,\tilde{w},z)$ satisfait l'equation (2.1) et

$$\int_0^L \tilde{w}(x,t)dx=0, \qquad \forall t\geq 0.$$

Maintenant nous travaillons avec $\tilde{w}$ mais écrivons w pour la simplicité.

2.2 Existence et unicité de la solution du problème posé

Dans cette section nous démontrons l'existence et l'unicite de la solution du système (2.1), en utilisant la théorie des semi-groupes. D'abord, introduisans la nouvelle variable suivant

$$z(x,\rho,t) = u_t(x, t-\rho\tau_0), \qquad x \in (0,L), \rho \in (0,1), t > 0. \tag{2.3}$$

On peut vérifier que z satisfait

$$\tau_0 z_t(x,\rho,t) + z_\rho(x,\rho,t) = 0, \qquad x \in (0,L), \rho \in (0,1), t > 0.$$

Par conséquent, le système (2.1) est équivant à

$$\begin{cases} m(x)u_{tt} - (p(x)u_x + 2\delta(x)u_{xt})_x + dw_x + \eta\theta_x + \mu z(x,1,t) = 0, \quad t > 0, \\ c\theta_t - k\theta_{xx} + \eta u_{tx} + k_1 w_x = 0, \quad t > 0, \\ \tau w_t - k_3 w_{xx} + k_2 w + k_1\theta_x + du_{tx} = 0, \quad t > 0, \\ \tau_0 z_t(x,\rho,t) + z_\rho(x,\rho,t) = 0, \qquad x \in (0,L), \rho \in (0,1), t > 0, \\ u(0,t) = u(L,t) = \theta(0,t) = \theta(L,t) = w_x(0,t) = w_x(L,t) = 0, \quad \forall t \geq 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad \theta(x,0) = \theta_0(x), \quad w(x,0) = w_0(x), \quad \forall x \in [0,L], \\ z(x,0,t) = u_t(x,t), \quad x \in [0,L], \quad t > 0. \end{cases} \tag{2.4}$$

Ensuite, on définie la fonction vectorielle $U = (u, v, \theta, w, z)^T$ et on pose $v = u_t$, donc le système (2.4) s'écrit sous la forme

$$\begin{cases} U'(t) + (\mathcal{A} + \mathcal{B})U(t) = 0 \qquad t > 0, \\ U(0) = U_0 = (u_0, u_1, \theta_0, w_0, z_0), \end{cases} \tag{2.5}$$

où l'opérateur $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \to \mathcal{H}$ est définie par

$$\mathcal{A}U = \begin{pmatrix} -v \\ -\dfrac{1}{m(x)}(p(x)u_x + 2\delta(x)v_x - \eta\theta - dw)_x + \dfrac{\mu}{m(x)}z(x,1,t) + \dfrac{|\mu|}{m(x)}v \\ \dfrac{1}{c}(-k\theta_{xx} + \eta u_{tx} + k_1 w_x) \\ \dfrac{1}{\tau}(-k_3 w_{xx} + k_2 w + k_1\theta_x + du_{tx}) \\ \dfrac{z_\rho}{\tau_0} \end{pmatrix},$$

et l'opérateur $\mathcal{B} : D(\mathcal{B}) \to \mathcal{H}$ est définie par

$$\mathcal{B}U = \frac{|\mu|}{m(x)} \begin{pmatrix} 0 \\ -v \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nous considérons les espaces suivantes

$$\mathcal{H} := H_0^1(0.L) \times [L^2(0.L)]^2 \times L_*^2(0.L) \times L^2((0.L) \times (0.1)),$$

avec

$$H_*^2(0.L) = \left\{ w \in H^2(0.L) \quad , w_x(L) = w_x(0) = 0 \right\},$$
$$L_*^2(0.L) = \left\{ w \in L^2(0.L) \quad , \int_0^L w(s)ds = 0 \right\}.$$

Et le domaine de $\mathcal{A}$ donné par

$$D(\mathcal{A}) = \left\{ \begin{array}{c} U \in \mathcal{H} \mid u \in H^2(0.L) \cap H_0^1(0.L),\ v \in H_0^1(0.L),\ \theta \in H^2(0.L), \\ w \in L_*^2(0.L) \cap H_*^2(0.L),\ z, z_\rho \in L^2((0.L) \times (0.1)), z(x,0) = u(x) \end{array} \right\},$$

et $D(\mathcal{A})$ est dense dans $\mathcal{H}$.
On muni l'espace $\mathcal{H}$ du produit scalaire , avec $U = (u, v, \theta, w, z)^T, \tilde{U} = (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{\theta}, \tilde{w}, \tilde{z})^T$

$$\langle U, \tilde{U} \rangle_{\mathcal{H}} = \int_0^L p(x) u_x \tilde{u}_x \mathrm{d}x + \int_0^L m(x) v \tilde{v} \mathrm{d}x + c \int_0^L \theta \tilde{\theta} \mathrm{d}x$$
$$+ \tau \int_0^L w \tilde{w} \mathrm{d}x + \tau_0 |\mu| \int_0^L \int_0^1 z \tilde{z} \mathrm{d}\rho \mathrm{d}x.$$

Théorème 2.1. *Soit $U_0 \in \mathcal{H}$, alors il existe une solution unique $U \in (\mathbb{R}^+, \mathcal{H})$ du problème (2.5). Si $U_0 \in D(\mathcal{A})$, alors $U \in C^1(\mathbb{R}^+, \mathcal{H}) \cap C(\mathbb{R}^+, D(\mathcal{A}))$.*

Démonstration. Nous prouvons que A est monotone, pour tout $U \in D(\mathcal{A})$ et en utilisant le produit scalaire

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{A}U, U\rangle_{\mathcal{H}} = &\int_0^L p(x)(-v)_x u_x \mathrm{d}x + \int_0^L m(x)\left[-\frac{1}{m(x)}((p(x)u_x + 2\delta(x)v_x - \eta\theta - dw)_x\right.\\
&\left.+\frac{\mu}{m(x)}z(x,1,t) + \frac{|\mu|}{m(x)}v)v\right]\mathrm{d}x + c\int_0^L \frac{1}{c}[-k\theta_{xx} + \eta u_{tx} + k_1 w_x]\theta \mathrm{d}x\\
&+\tau\int_0^L \frac{1}{\tau}(-k_3 w_{xx} + k_2 w + k_1\theta_x + du_{tx})w\mathrm{d}x + \tau_0|\mu|\int_0^L\int_0^1 \frac{1}{\tau_0} z_\rho z \mathrm{d}\rho\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Par l'integration par partie et les conditions limites

$$\begin{aligned}-\int_0^L p(x)v_x u_x \mathrm{d}x &= \int_0^L p(x)v u_{xx}\mathrm{d}x\\
-2\int_0^L \delta(x)v v_{xx}\mathrm{d}x &= 2\int_0^L \delta(x)v_x^2\mathrm{d}x\\
-\int_0^L \eta\theta_x v\mathrm{d}x &= \int_0^L \eta\theta u_{tx}\mathrm{d}x\\
-\int_0^L dw_x v\mathrm{d}x &= \int_0^L dw u_{tx}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$|\mu|\int_0^L\int_0^1 z_\rho z d\rho \mathrm{d}x = |\mu|\int_0^L \frac{1}{2}z^2(x,1,t)\mathrm{d}x - |\mu|\int_0^L \frac{1}{2}v^2(x,t)\mathrm{d}x$$

et on utilise l'inégalité de Young sur le quatrième terme

$$-\int_0^L \mu z(x,1,t)v\mathrm{d}x \leq \frac{|\mu|}{2}\int_0^L z^2(x,1,t)\mathrm{d}x + \frac{|\mu|}{2}\int_0^L v^2(x,t)\mathrm{d}x,$$

ce qui implique que

$$\int_0^L \mu z(x,1,t)v\mathrm{d}x \geq -\frac{|\mu|}{2}\int_0^L z^2(x,1,t)\mathrm{d}x - \frac{|\mu|}{2}\int_0^L v^2(x,t)\mathrm{d}x,$$

donc

$$\langle \mathcal{A}U, U\rangle_{\mathcal{H}} = 2\int_0^L \delta(x)v_x^2\mathrm{d}x + k\int_0^L \theta_x^2\mathrm{d}x + k_2\int_0^L w^2\mathrm{d}x + k_3\int_0^L w_x^2\mathrm{d}x \geq 0. \tag{2.6}$$

Alors $\mathcal{A}$ est monotone.

Ainsi, prouve que l'opérateur $\mathcal{A}$ est maximal, nous prouvons que $\mathcal{I} + \mathcal{A}$ est surjictif.

Étant donné $G = (g_1, g_2, g_3, g_4, g_5)^T \in \mathcal{H}$, il montre que il existe $U \in D(\mathcal{A})$, tel que

$$(\mathcal{I} + \mathcal{A})U = G. \tag{2.7}$$

L'équation (2.7) est équivalente à

$$\begin{cases} -v + u = g_1 \in H_0^1(0,L), \\ -(p(x)u_x + 2\delta(x)v_x - \eta\theta - dw)_x + \mu z(x,1,t) + (|\mu| + m(x))v = m(x)g_2 \in L^2(0,L), \\ -k\theta_{xx} + \eta v_x + k_1 w_x + c\theta = cg_3 \in L^2(0,L), \\ -k_3 w_{xx} + k_2 w + k_1\theta_x + du_{tx} + \tau w = \tau g_4 \in L_*^2(0,L), \\ \quad z_\rho + \tau_0 z = \tau_0 g_5 \in L^2((0,L)\times(0,1)). \end{cases} \tag{2.8}$$

D'apres l'équation $(2.8)_1$ on obtient

$$u = v + g_1, \tag{2.9}$$

et on a

$$z(x,0,t) = u_t(x,t),$$

à partir de $(2.8)_5$ nous avons

$$z_\rho(x,\rho,t) = -\tau_0 z(x,\rho,t) + \tau_0 g_5,$$

on obtient

$$z(x,\rho,t) = u(x)e^{-\tau_0\rho} - e^{-\tau_0\rho}g_1 + \tau_0 e^{-\tau_0\rho}\int_0^\rho e^{-\tau_0 s}g_5(x,s)\mathrm{d}s, \tag{2.10}$$

et on remplace (2.9) et (2.10) dans $(2.8)_2$, $(2.8)_3$, $(2.8)_4$

$$\begin{cases} -(p(x)u_x + 2\delta(x)u_x - \eta\theta - dw)_x + \tilde{\mu}u = h_1 \in L^2(0,L), \\ -k\theta_{xx} + \eta u_x + k_1 w_x + c\theta = h_2 \in L^2(0,L), \\ -k_3 w_{xx} + k_2 w + k_1\theta_x + du_x + \tau w = h_3 \in L_*^2(0,L). \end{cases} \tag{2.11}$$

Avec

$$\tilde{\mu} = |\mu| + m(x) + \mu e^{-\tau_0},$$

$$h_1 = (\tilde{\mu} - 2\delta(x))g_1 + m(x)g_2 - |\mu|\tau_0 e^{-\tau_0}\int_0^1 e^{\tau_0 s}g_5(x,s)\mathrm{d}s,$$

$$h_2 = cg_3 + \eta g_{1x},$$

$$h_3 = \tau g_4 + dg_{1x}.$$

La formule variationnelle correspondante à (2.11) est donnée par

$$B((u,\theta,w),(\tilde{u},\tilde{\theta},\tilde{w})) = F(\tilde{u},\tilde{\theta},\tilde{w}), \tag{2.12}$$

où $B : [H_0^1(0.L) \times L^2(0.L) \times L_*^2(0.L)]^2 \to \mathbb{R}$ est la forme bilinéaire définie par

$$\begin{aligned} B((u,\theta,w),(\tilde{u},\tilde{\theta},\tilde{w})) = &\int_0^L [(p(x)+2\delta(x))u_x - \eta\theta - dw]\tilde{u}_x \mathrm{d}x + \int_0^L \tilde{\mu} u\tilde{u}\mathrm{d}x \\ &+ k\int_0^L \theta_x\tilde{\theta}_x \mathrm{d}x - \eta\int_0^L u\tilde{\theta}_x\mathrm{d}x - k_1\int_0^L w\tilde{\theta}_x\mathrm{d}x \\ &+ k_3\int_0^L w_x\tilde{w}_x\mathrm{d}x + (k_2+\tau)\int_0^L w\tilde{w}\mathrm{d}x \\ &+ k_1\int_0^L \theta_x\tilde{w}\mathrm{d}x - d\int_0^L u\tilde{w}_x\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

et $F : H_0^1(0.L) \times L^2(0.L) \times L_*^2(0.L) \to \mathbb{R}$ est la forme linéaire définie par

$$F(\tilde{u},\tilde{\theta},\tilde{w}) = \int_0^L h_1\tilde{u}\mathrm{d}x + \int_0^L h_2\tilde{\theta}\mathrm{d}x + \int_0^L h_3\tilde{w}\mathrm{d}x.$$

Maintenant, pour $V = H_0^1(0.L) \times L^2(0.L) \times L_*^2(0.L)$ équipé de la norme

$$\|(u,\theta,w)\|_V^2 = \|u\|_2^2 + \|u_x\|_2^2 + \|w\|_2^2 + \|\theta_x\|_2^2.$$

On peut appliquer le théorème de Lax-Milgram, sur l'espace V pour la forme bilinéaire $B((u,\theta,w),(\tilde{u},\tilde{\theta},\tilde{w}))$ et la forme linéaire $F(\tilde{u},\tilde{\theta},\tilde{w})$.

1. B continue :

$$\begin{aligned} \left|B((u,\theta,w),(\tilde{u},\tilde{\theta},\tilde{w}))\right| = &\Big|\int_0^L [(p(x)+2\delta(x))u_x - \eta\theta - dw]\tilde{u}_x \mathrm{d}x + \tilde{\mu}\int_0^L u\tilde{u}\mathrm{d}x \\ &+ k\int_0^L \theta_x\tilde{\theta}_x \mathrm{d}x - \eta\int_0^L u\tilde{\theta}_x\mathrm{d}x - k_1\int_0^L w\tilde{\theta}_x\mathrm{d}x \\ &+ k_3\int_0^L w_x\tilde{w}_x\mathrm{d}x + (k_2+\tau)\int_0^L w\tilde{w}\mathrm{d}x \\ &+ k_1\int_0^L \theta_x\tilde{w}\mathrm{d}x - d\int_0^L u\tilde{w}_x\mathrm{d}x\Big|, \end{aligned}$$

on utilise l'intégalité de Cauchy-Shwartz, on obtient

$$
\begin{aligned}
\left|B((u,\theta,w),(\tilde{u},\tilde{\theta},\tilde{w}))\right| =& (p(x)+2\delta(x))\|u_x\|_2\|\tilde{u}_x\|_2 - \eta\|\theta\|_2\|\tilde{u}_x\|_2 - d\|w\|_2\|\tilde{u}_x\|_2 \\
&+ \tilde{\mu}\|u\|_2\|\tilde{u}\|_2 + k\|\theta_x\|_2\|\tilde{\theta}_x\|_2 - \eta\|u\|_2\|\tilde{\theta}_x\|_2 - k_1\|w\|_2\|\tilde{\theta}_x\|_2 \\
&+ k_3\|w_x\|_2\|\tilde{w}_x\|_2 + (k_2+\tau)\|w\|_2\|\tilde{w}\|_2 + k_1\|\theta_x\|_2\|\tilde{w}\|_2 \\
&- d\|u\|_2\|\tilde{w}_x\|_2 \\
\leq& \max\{(p(x)+2\delta(x)),\eta,d,\tilde{\mu},k,k_1,k_3,(k_2+\tau)\} \\
&(\|u\|_2+\|u_x\|_2+\|w\|_2+\|\theta_x\|_2) \\
&(\|\tilde{u}\|_2+\|\tilde{u}_x\|_2+\|\tilde{w}\|_2+\|\tilde{\theta}_x\|_2) \\
\leq& C\|(u,\theta,w)\|_V\|(\tilde{u},\tilde{\theta},\tilde{w})\|_V.
\end{aligned}
$$

2. B est coercive :

$$
\begin{aligned}
\left|B((u,\theta,w),(v,\theta,w))\right| =& \int_0^L (p(x)+2\delta(x))\|u_x\|^2\mathrm{d}x + \int_0^L \tilde{\mu}\|u\|^2\mathrm{d}x + k\int_0^L \|\theta_x\|^2\mathrm{d}x \\
&+ k_3\int_0^L \|w_x\|^2\mathrm{d}x + (k_2+\tau)\int_0^L \|w\|^2\mathrm{d}x \\
\geq& C\|(u,\theta,w)\|_V^2.
\end{aligned}
$$

3. F est continue :

$$
\begin{aligned}
\left|F(\tilde{u},\tilde{\theta},\tilde{w})\right| =& \left|\int_0^L h_1\tilde{u}\mathrm{d}x + \int_0^L h_2\tilde{\theta}\mathrm{d}x + \int_0^L h_3\tilde{w}\mathrm{d}x\right| \\
=& \Big|((\tilde{\mu}-2\delta(x))g_1 + m(x)g_2 - |\mu|\tau_0 e^{-\tau_0}\int_0^1 e^{\tau_0 s}g_5(x,s)\mathrm{d}s)\tilde{u} \\
&+ (cg_3+\eta g_{1x})\tilde{\theta} + (\tau g_4 + dg_{1x})\tilde{w}\Big| \\
\leq& (\tilde{\mu}-2\delta(x))\|g_1\|_2\|\tilde{u}\|_2 + m(x)\|g_2\|_2\|\tilde{u}\|_2 - |\mu|\tau_0 e^{-\tau_0}\int_0^1 e^{\tau_0 s}g_5(x,s)\mathrm{d}s\|\tilde{u}\|_2 \\
&+ c\|g_3\|_2\|\tilde{\theta}\|_2 + \eta\|g_{1x}\|_2\|\tilde{\theta}\|_2 + \tau\|g_4\|_2\|\tilde{w}\|_2 + d\|g_{1x}\|_2\|\tilde{w}\|_2 \\
\leq& \max\left\{m(x)\|g_2\|_2, (\tilde{\mu}-2\delta(x))\|g_1\|_2, -|\mu|\tau_0 e^{-\tau_0}\int_0^1 e^{\tau_0 s}g_5(x,s)\mathrm{d}s, c,\eta,\tau,d\right\} \\
&(\|\tilde{u}\|_2+\|\tilde{u}_x\|_2+\|\tilde{\theta}_x\|_2+\|\tilde{w}\|_2) \\
\leq& C(\|\tilde{u}\|_2+\|\tilde{u}_x\|_2+\|\tilde{\theta}_x\|_2+\|\tilde{w}\|_2) \\
\leq& C\|(\tilde{u},\tilde{\theta},\tilde{w})\|_V.
\end{aligned}
$$

Par conséquence, B est bilinéaire continue et coercive sur V et F linéaire continue sur V. D'après le théorème de Lax-Miligram on conclue que le système (2.11) a une solution unique $(u, v, \theta, w, z)^T \in V$ tel que

$$u \in H_0^1(0, L), \quad \theta \in L^2(0, L), \quad w \in L_*^2(0, L).$$

$\square$

De (2.9), on déduit

$$v \in H_0^1(0, L).$$

Maintenant, si $(\tilde{\theta}, \tilde{w}) \equiv (0, 0) \in L^2(0, L) \times L_*^2(0, L)$ alors l'équation (2.5) se réduit à

$$\begin{aligned} &- \int_0^L \left[(p(x) + 2\delta(x))u_x - \eta\theta - dw\right]_x \tilde{u}\mathrm{d}x + \int_0^L \tilde{\mu}u\tilde{u}\mathrm{d}x \\ &= \int_0^L h_1\tilde{u}\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

c'est

$$\left[(p(x) + 2\delta(x))u_x\right]_x = \eta\theta_x + dw_x + \tilde{\mu}u - h_1 \in L^2(0, L).$$

Par conséquente, par la théorie de régularité pour l'équation elliptique linéaire, il s'ensuite que

$$u \in H_0^1(0, L) \cap H^2(0, L).$$

De même manière, si $(\tilde{u}, \tilde{\theta}) \equiv (0, 0) \in H_0^1(0, L) \times L^2(0, L)$, alors l'équation (2.11) se réduit à

$$\begin{aligned} &k_3 \int_0^L w_x\tilde{w}_x\mathrm{d}x + (k_2 + \tau) \int_0^L w\tilde{w}\mathrm{d}x + k_1 \int_0^L \theta_x\tilde{w}\mathrm{d}x - d \int_0^L u\tilde{w}_x\mathrm{d}x \\ &= \int_0^L h_3\tilde{w}\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

c'est

$$k_3 w_{xx} = (k_2 + \tau)w + k_1\theta_x + du_x - h_3 \in L^2(0, L),$$

alors, il suive que $\int_0^L w\mathrm{d}x = 0$, et on obtient

$$w \in L_*^2(0, L) \cap H^2(0, L).$$

De plus, est également vrai pour tout $\phi \in C^1([0, L]) \subset L_*^2(0, L)$, par conséquent on a

$$\begin{aligned} &k_3 \int_0^L w_x\phi_x\mathrm{d}x + (k_2 + \tau) \int_0^L w\phi\mathrm{d}x + k_1 \int_0^L \theta_x\phi\mathrm{d}x - d \int_0^L u\phi_x\mathrm{d}x \\ &= \int_0^L h_3\phi\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

l'intégration par partie donne

$$w_x(L)\phi(L) - w_x(0)\phi(0) = 0, \qquad \forall \phi \in C^1([0, L]),$$

par conséquent

$$w_x(L) = w_x(0) = 0,$$

donc

$$w \in L^2_*(0, L) \cap H^2_*(0, L).$$

Maintenant, si $(\tilde{u}, \tilde{w}) \equiv 0 \in H^1_0(0, L) \times L^2_*(0, L)$, alors l'équation (2.11) se réduit à

$$k \int_0^L \theta_x \tilde{\theta}_x \mathrm{d}x - \eta \int_0^L u \tilde{\theta}_x \mathrm{d}x - k_1 \int_0^L w \tilde{\theta}_x \mathrm{d}x = \int_0^L h_2 \tilde{\theta} dx,$$

c'est

$$-k\theta_{xx} = h_2 - \eta u_x - k_1 w_x \in L^2(0, L).$$

Ensuite, nous obtenons

$$\theta \in H^2(0, L).$$

Par conséquent, il existe une unique solution $U \in D(\mathcal{A})$ tel que l'équation (2.7) satisfaite.

Par conséquent, $\mathcal{A}$ un opérateur maximale monotone. Alors $D(\mathcal{A})$ est dense dans $\mathcal{H}$.

D'autre part, l'opérateur $\mathcal{B}$ est lipschitzien continu, par conséquent $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ est un générateur infinitésimal de contraction linéaire C_0 semi-groupe sur $\mathcal{H}$.

Par le théorème de Lumer-Philips le problème (2.4) à une solution unique .

2.3 Stabilité exponentielle

Dans cette section, nous allons utiliser la méthode des multiplicateurs pour démontrer la stabilité exponentielle du système (2.4), le principe de cette méthode est de construire une nouvelle fonctionnelle, dite fonctionnelle de Lyapunov, équivalente à l'énergie classique. Nous commençons d'abord, par la construction de quelques lemmes utiles pour la suite de ce chapitre.

Lemme 2.1. *[12] Soit $h \in H_0^1(0,L)$ alors*

$$\int_0^L |h|^2 \mathrm{d}x \leq \ell \int_0^L |h_x|^2 \mathrm{d}x, \quad \ell = \frac{L^2}{\pi^2}. \tag{2.13}$$

Lemme 2.2. *[1, 11] Soit (u, u_t, θ, w, z) la solution du système $(2.1) - (2.2)$ avec une donnée initiale en $D(\mathcal{A})$, alors pour tout $t > 0$ il existe une suite de nombres reéls, notée par $\xi_i \in [0,L], i \in \{1,\dots,6\}$ telle que*

$$\begin{aligned}
&\int_0^L p(x)u_x^2 \mathrm{d}x = p(\xi_1)\int_0^L u_x^2 \mathrm{d}x, && \int_0^L m(x)u_t^2 \mathrm{d}x = m(\xi_2)\int_0^L u_t^2 \mathrm{d}x.\\
&\int_0^L m(x)u^2 \mathrm{d}x = m(\xi_3)\int_0^L u^2 \mathrm{d}x, && \int_0^L \delta(x)u^2 \mathrm{d}x = \delta(\xi_4)\int_0^L u^2 \mathrm{d}x.\\
&\int_0^L \delta(x)u_x^2 \mathrm{d}x = \delta(\xi_5)\int_0^L u_x^2 \mathrm{d}x, && \int_0^L \delta(x)u_{xt}^2 \mathrm{d}x = \delta(\xi_6)\int_0^L u_{xt}^2 \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Lemme 2.3. *Soit (u, u_t, θ, w, z) la solution du systeme $(2.1) - (2.2)$, alors l'énergie fonctionnelle définie par*

$$\begin{aligned}
E(t) =& \frac{1}{2}\left[\int_0^L p(x)u_x^2 \mathrm{d}x + \int_0^L m(x)u_t^2 \mathrm{d}x + \int_0^L c\theta^2 \mathrm{d}x + \int_0^L \tau w^2 \mathrm{d}x\right.\\
&\left. + |\mu| \int_0^L \int_0^1 z^2(x,\rho,t) \mathrm{d}\rho \mathrm{d}x\right],
\end{aligned} \tag{2.14}$$

satisfait

$$\begin{aligned}
E'(t) &\leq -c' \int_0^L u_t^2 \mathrm{d}x - k_2 \int_0^L w^2 \mathrm{d}x - k_3 \int_0^L w_x^2 \mathrm{d}x - k \int_0^L \theta_x^2 \mathrm{d}x\\
&\leq 0,
\end{aligned} \tag{2.15}$$

où $c' = 2\dfrac{\delta(\xi_6)}{\ell} - |\mu|$.

Démonstration. En multipliant $(2.4)_1, (2.4)_2, (2.4)_3$ par u_t, θ, w respectivement et integer sur $(0,L)$ par l'integrations par parties et les conditions limites, on obtient

$$\int_0^L m(x)u_{tt}u_t\mathrm{d}x - \int_0^L (p(x)u_x + 2\delta(x)u_{xt})_x u_t\mathrm{d}x + \int_0^L dw_x u_t\mathrm{d}x + \int_0^L \eta\theta_x u_t\mathrm{d}x$$
$$+ \int_0^L \mu u_t z(x,1,t)\mathrm{d}x = 0,$$
$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L m(x)u_t^2\mathrm{d}x - \int_0^L p(x)u_{xx}u_t\mathrm{d}x - 2\int_0^L \delta(x)v_{xx}u_t\mathrm{d}x + \int_0^L dw_x u_t\mathrm{d}x + \int_0^L \eta\theta_x u_t\mathrm{d}x$$
$$+ \int_0^L \mu u_t z(x,1,t)\mathrm{d}x = 0,$$
$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\int_0^L m(x)u_t^2\mathrm{d}x + \int_0^L p(x)u_x^2\mathrm{d}x\right] + 2\int_0^L \delta(x)u_{xt}^2\mathrm{d}x - d\int_0^L wu_{xt}\mathrm{d}x - \eta\int_0^L \theta u_{xt}\mathrm{d}x$$
$$+ \int_0^L \mu u_t z(x,1,t)\mathrm{d}x = 0,$$

l'équation (2.4)$_2$ est donne

$$\int_0^L c\theta_t\theta\mathrm{d}x - \int_0^L k\theta_{xx}\theta\mathrm{d}x + \int_0^L \eta u_{tx}\theta\mathrm{d}x + \int_0^L k_1 w_x\theta\mathrm{d}x = 0$$
$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}c\int_0^L \theta^2\mathrm{d}x - k\int_0^L \theta_x^2\mathrm{d}x + \eta\int_0^L u_{xt}\theta\mathrm{d}x - k_1\int_0^L w_x\theta\mathrm{d}x = 0$$

de même pour l'équation (2.4)$_3$ donne

$$\int_0^L \tau w_t w\mathrm{d}x - \int_0^L k_3 w_{xx}w\mathrm{d}x + \int_0^L k_2 ww\mathrm{d}x + \int_0^L k_1\theta_x w\mathrm{d}x + \int_0^L du_{xt}w\mathrm{d}x = 0$$
$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\tau\int_0^L w^2\mathrm{d}x - k_3\int_0^L w_x^2\mathrm{d}x + k_2\int_0^L w^2\mathrm{d}x + k_1\int_0^L \theta w_x\mathrm{d}x + d\int_0^L u_{xt}w\mathrm{d}x = 0$$

par l'addition

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\int_0^L p(x)u_x^2\mathrm{d}x + \int_0^L m(x)u_t^2\mathrm{d}x + \int_0^L c\theta^2\mathrm{d}x + \int_0^L \tau w^2\mathrm{d}x\right)$$
$$= -2\int_0^L \delta(x)u_{xt}^2\mathrm{d}x - k_2\int_0^L w^2\mathrm{d}x - k_3\int_0^L w_x^2\mathrm{d}x - k\int_0^L \theta_x^2\mathrm{d}x - \mu\int_0^L u_t z(x,1,t)\mathrm{d}x \tag{2.16}$$

Maintenant, en (2.4)$_4$ multipliant par $|\mu|z$, en intégrant le produit sur $(0,L)\times(0,1)$ et en rappelant que $z(x,0,t) = u_t(x,t)$, donne

$$\tau_0 z_t(x,0,t) + z_\rho(x,\rho,t) = 0$$
$$\int_0^L\int_0^1 |\mu|\tau_0 z z_t(x,\rho,t)\mathrm{d}\rho\mathrm{d}x + \int_0^L\int_0^1 |\mu|\tau_0 z z_\rho(x,\rho,t)\mathrm{d}\rho\mathrm{d}x = 0$$

on a

$$\frac{|\mu|}{2}\tau_0\frac{d}{dt}\int_0^L\int_0^1 z^2(x,\rho,t)\mathrm{d}\rho\mathrm{d}x = -\frac{|\mu|}{2}\int_0^L z^2(x,1,t)\mathrm{d}x + \frac{|\mu|}{2}\int_0^L u_t^2\mathrm{d}x. \tag{2.17}$$

Maintenant, une combinaison de (2.16) et (2.17) donne

$$E'(t) = -2\int_0^L \delta(x)u_{xt}^2 \mathrm{d}x - k_2\int_0^L w^2 \mathrm{d}x - k_3\int_0^L w_x^2 \mathrm{d}x - k\int_0^L \theta_x^2 \mathrm{d}x - \int_0^L \mu u_t z(x,1,t)\mathrm{d}x \\ - \frac{|\mu|}{2}\int_0^L z^2(x,1,t)\mathrm{d}x + \frac{|\mu|}{2}\int_0^L u_t^2 \mathrm{d}x. \tag{2.18}$$

En utilisant l'inégalité de Young et de Cauchy-Schwartz, nous avons

$$-\int_0^L \mu u_t z(x,1,t)\mathrm{d}x \leq \frac{\mu}{2}\int_0^L z^2(x,1,t)\mathrm{d}x + \frac{\mu}{2}\int_0^L u_t^2 \mathrm{d}x. \tag{2.19}$$

Substitution de (2.19), et en utilisant (2.1) et (2.2) donne

$$\begin{aligned}
E'(t) &\leq -2\int_0^L \delta(x)u_{xt}^2 \mathrm{d}x - k_2\int_0^L w^2 \mathrm{d}x - k_3\int_0^L w_x^2 \mathrm{d}x - k\int_0^L \theta_x^2 \mathrm{d}x + \frac{\mu}{2}\int_0^L z^2(x,1,t)\mathrm{d}x \\
&+ \frac{\mu}{2}\int_0^L u_t^2 \mathrm{d}x - \frac{|\mu|}{2}\int_0^L z^2(x,1,t)\mathrm{d}x + \frac{|\mu|}{2}\int_0^L u_t^2 \mathrm{d}x \\
&\leq -2\int_0^L \delta(x)u_{xt}^2 \mathrm{d}x - k_2\int_0^L w^2 dx - k_3\int_0^L w_x^2 \mathrm{d}x - k\int_0^L \theta_x^2 \mathrm{d}x + |\mu|\int_0^L u_t^2 \mathrm{d}x \\
&\leq -2\int_0^L \frac{\delta(x)}{\ell}u_t^2 \mathrm{d}x - k_2\int_0^L w^2 \mathrm{d}x - k_3\int_0^L w_x^2 \mathrm{d}x - k\int_0^L \theta_x^2 \mathrm{d}x + |\mu|\int_0^L u_t^2 \mathrm{d}x \\
&\leq -k_2\int_0^L w^2 \mathrm{d}x - k_3\int_0^L w_x^2 \mathrm{d}x - k\int_0^L \theta_x^2 \mathrm{d}x - (\frac{2\delta(\xi_6)}{\ell} + |\mu|)\int_0^L u_t^2 \mathrm{d}x \\
&\leq -k_2\int_0^L w^2 \mathrm{d}x - k_3\int_0^L w_x^2 \mathrm{d}x - k\int_0^L \theta_x^2 \mathrm{d}x - c'\int_0^L u_t^2 \mathrm{d}x \leq 0.
\end{aligned}$$

□

Lemme 2.4. *Soit* (u, u_t, θ, w, z) *la solution du système* (2.4), *donc la fonctionnelle*

$$I_1(t) := \int_0^L (\delta(x)u_x^2 + m(x)u_t u)\mathrm{d}x, \tag{2.20}$$

satisfait, pour tout $\varepsilon_1 > 0$

$$I_1'(t) \leq -(p(\xi_1) - (\eta + d)\varepsilon_1 - \frac{L^2}{\pi^2}\frac{\mu^2}{\varepsilon_2})\int_0^L u_x^2 dx + m(\xi_2)\int_0^L u_t^2 \mathrm{d}x + \frac{\eta}{4\varepsilon_1}\int_0^L \theta^2 \mathrm{d}x \\ + \frac{d}{4\varepsilon_1}\int_0^L w^2 \mathrm{d}x + \varepsilon_2\int_0^L z^2(x,1,t)\mathrm{d}x. \tag{2.21}$$

Démonstration. Différencier I_1 par rapport a t, et en utilisant l'équation $(2.4)_1$ et les conditions initiales, on a

$$I_1'(t) = -\int_0^L p(x)u_x^2 \mathrm{d}x + \int_0^L m(x)u_t^2 \mathrm{d}x - \eta\int_0^L \theta_x u \mathrm{d}x - d\int_0^L u w_x \mathrm{d}x - \mu\int_0^L u z(x,1,t)\mathrm{d}x.$$

Par l'inégalité de Young et l'integration par partie et les conditions limites

$$\begin{aligned}
-\eta\int_0^L \theta_x u\mathrm{d}x = \eta\int_0^L \theta u_x\mathrm{d}x \leq \eta\varepsilon_1\int_0^L u_x^2\mathrm{d}x + \frac{\eta}{4\varepsilon_1}\int_0^L \theta^2\mathrm{d}x,\\
-d\int_0^L u w_x\mathrm{d}x = d\int_0^L u_x w\mathrm{d}x \leq d\varepsilon_1\int_0^L u_x^2\mathrm{d}x + \frac{d}{4\varepsilon_1}\int_0^L w^2\mathrm{d}x,\\
-\int_0^L \mu u z(x,1,t)\mathrm{d}x \leq \mu\varepsilon_2\int_0^L z^2(x,1,t)\mathrm{d}x + \frac{\mu}{4\varepsilon_2}\int_0^L u^2\mathrm{d}x,
\end{aligned} \tag{2.22}$$

on conclure (2.21). □

Lemme 2.5. *Soit* (u, u_t, θ, w, z) *la solution du système* (2.4), *donc la fonctionnelle*

$$I_2 := \tau c\int_0^L \theta\left(\int_0^x w(y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x, \tag{2.23}$$

satisfait, pour tout $\varepsilon_2 > 0$

$$\begin{aligned}
I_2'(t) \leq (-k_1 c + 3\varepsilon_2)\int_0^L \theta^2\mathrm{d}x + \frac{1}{2\varepsilon_2}\int_0^L u_t^2\mathrm{d}x + \frac{1}{4\varepsilon_2}\int_0^L \theta_x^2\mathrm{d}x + \frac{1}{4\varepsilon_2}\int_0^L w_x^2\mathrm{d}x\\
+(k_1\tau + 2\varepsilon_2 c' + c')\int_0^L w^2\mathrm{d}x.
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Démonstration. Prenant la dérivée de (2.23) par rapport a t, et en utilisant $(2.4)_2$ et $(2.4)_3$, nous trouvons

$$\begin{aligned}
I_2'(t) =& \tau\left[k\int_0^L \theta_{xx}\left(\int_0^x w(y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x - \eta\int_0^L u_{tx}\left(\int_0^x w(y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\right.\\
&\left.-k_1\int_0^L w_x\left(\int_0^x w(y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\right] + c\left[k_3\int_0^L \theta\left(\int_0^x w_{yy}(y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\right.\\
&- k_2\int_0^L \theta\left(\int_0^x w(y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x - k_1\int_0^L \theta\left(\int_0^x \theta_y(y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\\
&\left.-d\int_0^L \theta\left(\int_0^x u_{ty}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\right],
\end{aligned}$$

pour l'integration par partie et le fait que $\int_0^L w(x)\mathrm{d}x = 0$ donner

$$\begin{aligned}
I_2'(t) =& \tau\left(-k\int_0^L \theta_x w\mathrm{d}x + \eta\int_0^L u_t w\mathrm{d}x + k_1\int_0^L w^2\mathrm{d}x\right)\\
&+ c\left(k_3\int_0^L \theta w_x\mathrm{d}x - k_2\int_0^L \theta\left(\int_0^x w(y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\right.\\
&\left.-k_1\int_0^L \theta^2 dx - d\int_0^L \theta u_t\mathrm{d}x\right),
\end{aligned} \tag{2.25}$$

d'après l'inégalité de Young

$$\begin{aligned}
-k\int_0^L \theta_x w \mathrm{d}x &\leq \frac{1}{4\xi_2}\int_0^L \theta_x^2 \mathrm{d}x + c'\xi_2\int_0^L w^2 \mathrm{d}x,\\
\eta\int_0^L u_t w \mathrm{d}x &\leq \frac{1}{4\xi_2}\int_0^L u_t^2 \mathrm{d}x + c'\xi_2\int_0^L w^2 \mathrm{d}x,\\
k_3\int_0^L \theta w_x \mathrm{d}x &\leq \frac{1}{4\xi_2}\int_0^L w_x^2 \mathrm{d}x + \xi_2\int_0^L \theta^2 \mathrm{d}x,\\
-d\int_0^L \theta u_t \mathrm{d}x &\leq \frac{1}{4\xi_2}\int_0^L u_t^2 \mathrm{d}x + \xi_2\int_0^L \theta^2 \mathrm{d}x,\\
-k_2\int_0^L \theta\left(\int_0^x w(y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x &\leq \xi_2\int_0^L \theta^2 \mathrm{d}x + c'\int_0^L w^2 \mathrm{d}x.
\end{aligned} \tag{2.26}$$

À partir de (2.25) et (2.26), nous allons (2.24).

□

Lemme 2.6. *Soit* (u, u_t, θ, w, z) *la solution du système* (2.4), *donc la fonctionnelle*

$$I_3(t) := \tau_0\int_0^L\int_0^1 e^{-\tau_0\rho}z^2(x,\rho,t)\mathrm{d}\rho\mathrm{d}x, \tag{2.27}$$

satisfaite, pour une constante positive m_0,

$$I_3'(t) \leq -m_0\Big(\int_0^L z^2(x,1,t)\mathrm{d}x + \tau_0\int_0^L\int_0^1 z^2(x,\rho,t)\mathrm{d}\rho\mathrm{d}x\Big) + \int_0^L u_t^2\mathrm{d}x. \tag{2.28}$$

Démonstration. En différenciant I_3 par rapport a t, nous obtenons

$$I_3'(t) = 2\int_0^L\int_0^1 \tau_0 e^{-\tau_0\rho}zz_t(x,\rho,t)\mathrm{d}\rho\mathrm{d}x$$

en utilisant la dernière équation de (2.4), on obtient

$$\begin{aligned}
I_3'(t) &= -2\int_0^L\int_0^1 e^{-\tau_0\rho}zz_\rho(x,\rho,t)\mathrm{d}\rho\mathrm{d}x\\
&= -\int_0^L [\mathrm{e}^{-\tau_0}z^2(x,1,t) - z^2(x,0,t)]\mathrm{d}x\\
&\quad -\int_0^L\int_0^1 \tau_0\mathrm{e}^{-\tau_0\rho}z^2(x,\rho,t)\mathrm{d}\rho\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

En utilisant le fait que $z(x,0,t) = u_t(x,t)$ et $\mathrm{e}^{-\tau_0} \leq \mathrm{e}^{-\tau_0\rho} \leq 1$, nous obtenons (2.28). □

Ensuite, nous définissons la fonctionnelle de Lyapunov [1] $\mathcal{L}$ et montrons qu'il équivaut à l'énergie fonctionnelle

[1]. Aleksandr Mikhaïlovitch Lyapunov (1857-1918) est un mathématicien russe. Il a apporté une grande contribution à l'analyse de la stabilité des systèmes dynamiques (linéaires ou non).

Lemme 2.7. *Pour N suffisamment grand, la fonction définie par*

$$\mathcal{L}(t) := NE(t) + I_1(t) + N_1 I_2(t) + N_2 I_3(t), \tag{2.29}$$

avec N, N_1, N_2 sont des nombres réels positives à choisir de manière appropriée ultérieuremet, satisfait

$$c_1' E(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq c_2' E(t), \quad \forall t \geq 0, \tag{2.30}$$

où c_1' et c_2' sont des constantes positives.

Démonstration. Nous démontrons que la fonctionnelle de Lyapunov est équivalent à la fonction d'énergie, on a

$$\mathfrak{L}(t) := I_1(t) + N_1 I_2(t) + N_2 I_3(t),$$

ensuite

$$\begin{aligned}
|\mathfrak{L}(t)| \leq & N_1 c\tau \int_0^L \left| \theta(t,x) \left(\int_0^x w(t,y) dy \right) \right| \mathrm{d}x + \int_0^L (\delta(x) u_x^2 dx + m(x)|u_t u|) \mathrm{d}x \\
& + N_2 \tau_0 \int_0^L \int_0^1 e^{-\tau_0 \rho} z^2(x,\rho,t) \mathrm{d}\rho \mathrm{d}x \\
\leq & \int_0^L \delta(x) u_x^2 + \frac{1}{2} \int_0^L m(x) u^2 \mathrm{d}x + N_1 \tau c l \int_0^L |\theta(t,x) w(t,y)| \mathrm{d}x + \frac{1}{2} \int_0^L m(x) u_t^2 \mathrm{d}x \\
& + N_2 \tau_0 \int_0^L \int_0^1 z^2(x,\rho,t) \mathrm{d}\rho \mathrm{d}x \\
\leq & \frac{1}{2} \int_0^L m(x) u_t^2 \mathrm{d}x + \frac{\|\delta(x)\|_\infty}{\lambda} \int_0^L p(x) u_x^2 \mathrm{d}x + \frac{\ell \|m(x)\|_\infty}{2\lambda} \int_0^L p(x) u_x^2 \mathrm{d}x \\
& + \frac{N_1 \tau c l}{2} \int_0^L \theta^2 \mathrm{d}x + \frac{N_1 \tau c l}{2} \int_0^L w^2(t,y) \mathrm{d}x + N_2 \tau_0 \int_0^L \int_0^1 z^2(x,\rho,t) \mathrm{d}\rho \mathrm{d}x. \\
\leq & c' E(t).
\end{aligned}$$

tels que $\lambda = \inf\limits_{x \in [0,L]} \{p(x)\}$, et $c' > 0$.

Conséquence,

$$|\mathcal{L}(t) - NE(t)| \leq c' E(t),$$

qui rendements

$$(N - c')E(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq (N + c')E(t).$$

Choisir N assez large, nous obtenons une estimation (2.30). □

Théorème 2.2. *Soit* (u, u_t, θ, w, z) *la solution du systeme* (2.1) − (2.2), *alors l'énergie* E *satisfait pour tout* $t > 0$

$$E(t) \leq c_1 e^{-c_2 t},$$

où c_1 *et* c_2 *sont des constantes positives.*

Démonstration. En prenant en compte (2.15), (2.21), (2.24), (2.28), nous obtenons

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}'(t) \leq & N\left(-c'\int_0^L |u_t^2|\mathrm{d}x - k_2\int_0^L |w^2|\mathrm{d}x - k_3\int_0^L |w_x^2|\mathrm{d}x - k\int_0^L |\theta_x^2|\mathrm{d}x\right) \\
& -(p(\xi_1) - (\eta+d)\varepsilon_1 - \frac{\mu^2\ell}{\varepsilon_2})\int_0^L |u_x^2|\mathrm{d}x + m(\xi_2)\int_0^L |u_t^2|\mathrm{d}x \\
& + \frac{\eta}{4\varepsilon_1}\int_0^L \theta^2\mathrm{d}x + \frac{d}{4\varepsilon_1}\int_0^L w^2\mathrm{d}x + \varepsilon_2\int_0^L z^2(x,1,t)\mathrm{d}x \\
& + N_1\left((-k_1 c + 3\varepsilon_2)\int_0^L \theta^2\mathrm{d}x + \frac{1}{2\varepsilon_1}\int_0^L |u_t^2|\mathrm{d}x + \frac{1}{4\varepsilon_1}\int_0^L \theta_x^2\mathrm{d}x\right. \\
& \left. +(k_1\tau + 2\varepsilon_2 c' + c')\int_0^L w^2\mathrm{d}x + \frac{1}{4\varepsilon_1}\int_0^L w_x^2\mathrm{d}x\right) \\
& + N_2\left(-m_0(\int_0^L z^2(x,1,t)\mathrm{d}x + \tau_0\int_0^L\int_0^1 z^2(x,\rho,t)\mathrm{d}\rho\mathrm{d}x) + \int_0^L u_t^2\mathrm{d}x\right) \\
\leq & \left\{-Nc' + \frac{N_1}{2\varepsilon_2} + m(\xi_2) + N_2\right\}\int_0^L |u_t^2|\mathrm{d}x \\
& + \left\{-p(\xi_1) + (\eta+d)\varepsilon_1 - \frac{\mu^2\ell}{\varepsilon_2}\right\}\int_0^L |u_x^2|\mathrm{d}x \\
& + \left\{-Nk_2 + N_1(k_1\tau + 2\varepsilon_2 c' + c') + \frac{d}{4\varepsilon_1}\right\}\int_0^L w^2\mathrm{d}x \\
& + \left\{N_1(-k_1 c + 3\varepsilon_2) + \frac{\eta}{4\varepsilon_1}\right\}\int_0^L \theta^2\mathrm{d}x + \left\{-Nk + \frac{N_1}{4\varepsilon_2}\right\}\int_0^L \theta_x^2\mathrm{d}x \\
& + \{\varepsilon_2 - m_0 N_2\}\int_0^L z^2(x,1,t)\mathrm{d}x + \left\{-Nk_3 + \frac{N_1}{4\varepsilon_2}\right\}\int_0^L w_x^2\mathrm{d}x \\
& + N_2 m_0 \tau_0\int_0^L\int_0^1 z^2(x,\rho,t)\mathrm{d}\rho\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Dans cette point, on choisit ε_1 et ε_2 et μ plus petits tels que

$$-p(\xi_1) + (\eta+d)\varepsilon_1 - \frac{\ell\mu^2}{\varepsilon_2} < 0, \quad -k_1 c + 3\varepsilon_2 < 0, \quad c' = 2\frac{\delta(\xi_6)}{\ell} - |\mu| > 0,$$

alors, on choisit N_1 et N_2 assez grand tels que

$$N_1(-k_1 c + 3\varepsilon_2) + \frac{\eta}{4\varepsilon_1} < 0,$$

et

$$\varepsilon_2 - m_0 N_2 < 0.$$

Pour N_1 et N_2 fixes, ensuite on choisir N assez grands pour que

$$-Nc' + \frac{N_1}{2\varepsilon_2} + m(\xi_2) + N_2 < 0,$$

$$-Nk_2 + N_1(k_1\tau + 2\varepsilon_2 c' + c') + \frac{d}{4\varepsilon_1} < 0,$$

$$-Nk + \frac{N_1}{4\varepsilon_2} < 0,$$

$$-Nk_3 + \frac{N_1}{4\varepsilon_2} < 0.$$

Finalement, on a

$$\mathcal{L}'(t) \leq -cE(t), \quad \forall t > 0. \tag{2.31}$$

Une combinaison de (2.30) et (2.31) donne

$$\mathcal{L}'(t) \leq -c_2\mathcal{L}(t), \quad \forall t > 0, \tag{2.32}$$

où $c_2 = c/c_2'$, une simple intégration de (2.32) sur $[0, t]$ donne

$$c_1' E(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq \mathcal{L}'(0)e^{-c_2 t}, \quad \forall t > 0.$$

Ainsi, $c_1 = \mathcal{L}(0)/c_1'$ que termine la preuve. $\square$

CHAPITRE 3

SUR LA STABILITÉ EXPONENTIELLE D'UN SYSTÈME POROUS-THERMOÉLASTIQUE AVEC UN RETARD CONSTANT

Sommaire

Le but de ce chapitre, est d'étudier l'existence, l'unicité et la stabilité exponentielle de la solution d'un système thermo-élastique avec un retard constant.

3.1 Présentation du problème

on considéré le système

$$\begin{cases} \rho u_{tt} = \mu u_{xx} + b y_x - \gamma\theta_x + \beta u_{txx}, \quad x \in [0,1],\ t > 0, \\ J y_{tt} = \delta y_{xx} - b u_x - \xi y - d\varrho_x + m\theta - \eta_1 y_t - \eta_2 y_t(x, t-s), \quad x \in [0,1],\ t > 0, \\ \kappa\theta_t = l\theta_{xx} - \gamma u_t - m y_t - k_1\varrho_x, \quad x \in [0,1],\ t > 0, \\ \alpha\varrho_t = -k_1\theta_x - d y_{tx}, \quad x \in [0,1],\ t > 0. \end{cases} \tag{3.1}$$

Ce système est muni des conditions initiales comme suit

$$\begin{cases} u(x,0)=u_0(x)\ ,u_t(x,0)=u_1(x)\ ,y(x,0)=y_0(x), \\ y_t(x,0)=y_1(x)\ ,\varrho(x,0)=\varrho_0(x)\ ,\theta(x,0)=\theta_0(x), \end{cases} \qquad \forall x\in[0,1], \tag{3.2}$$

et des conditions aux limites

$$\begin{cases} u(0,t)=u(1,t)=y_x(0,t)=y_x(1,t)=\theta_x(0,t)=\theta_x(1,t)=0, \\ \varrho(0,t)=\varrho(1,t)=y(0,t)=y(1,t)=\theta(0,t)=\theta(1,t)=0, \end{cases} \qquad \forall t\geq 0. \tag{3.3}$$

où $u_0, u_1, y_0, y_1, \theta_0, \varrho_0$, sont des fonctions donnés .
u est le déplacement transversal de la poutre , y est l'angle de rotation , la fonction θ est la différence de temperature , $\varrho=\varrho(x,t)$ est le flux de la chaleur ,
et $\rho, \mu, b, J, \delta, \xi, \gamma, \beta, d, \kappa, k_1, \alpha, m, l>0$, le terme $\eta_2 y_t(x,t-s)$ représente le retard constant.

Afin de pouvoir utiliser l'inégalité de Poincaré pour ϱ, d'après $(3.1)_4$ et les conditions aux limites on a

$$\frac{d}{dt}\int_0^1 \varrho(x,t)\mathrm{d}x=0, \tag{3.4}$$

donc, en résolvant (3.4) et en utilisant les données initiales de ϱ, nous obtenons

$$\int_0^1 \varrho(x,t)\mathrm{d}x=\int_0^1 \varrho_0(x)\mathrm{d}x,$$

par conséquent, si nous mettons

$$\overline{\varrho}(x,t)=\varrho(x,t)-\int_0^1 \varrho_0(x)\mathrm{d}x, \tag{3.5}$$

on a

$$\int_0^1 \overline{\varrho}(x,t)\mathrm{d}x=0, \quad \forall t>0. \tag{3.6}$$

Substituer pour obtenir que $(u,y,\theta,\tilde{\varrho},\chi)^T$ satisfait (3.1) pardonné comme

$$\overline{\varrho}_0=\varrho_0-\int_0^1 \varrho_0(x)\mathrm{d}x,$$

pour tous $t\geq 0$.
Maintenant nous travaillons avec $\tilde{\varrho}$ mais écrivons ϱ pour la simplicité.

3.2 Existence et d'unicité de la solution

Dans cette section, en utilisant le théorème de Hille-Yosida, nous démontrons l'existence et l'unicite de la solution du système (3.1).
Tout d'abord, on utilise le changement de variable suivant

$$\chi(x, \varpi, t) = y_t(x, t - s\varpi), \tag{3.7}$$

alors nous obtenons

$$\begin{cases} s\chi_t(x, \varpi, t) = -\chi_\varpi(x, \varpi, t), \\ \chi(x, 0, t) = y_t(x, t). \end{cases} \tag{3.8}$$

Par conséquent, le problème est écrite comme suit

$$\begin{cases} \rho u_{tt} = \mu u_{xx} + b y_x - \gamma\theta_x + \beta u_{txx}, \\ J y_{tt} = \delta y_{xx} - b u_x - \xi y - d\varrho_x + m\theta - \eta_1 y_t - \eta_2 \chi(x, 1, t), \\ \kappa\theta_t = l\theta_{xx} - \gamma u_{tx} - m y_t - k_1 \varrho_x, \\ \alpha\varrho_t = -k_1\theta_x - d y_{tx}, \\ s\chi_t(x, \varpi, s, t) = -\chi_\varpi(x, \varpi, s, t), \end{cases} \tag{3.9}$$

où $(x, t) \in (0, 1) \times (0, \infty)$.
Avec les conditions initiales et les conditions aux limites

$$\begin{cases} u(x, 0) = u_0(x)\ , u_t(x, 0) = u_1(x)\ , y(x, 0) = y_0(x), \\ \varrho(x, 0) = \varrho_0(x)\ , \theta(x, 0) = \theta_0(x)\ , y_t(x, 0) = y_1(x), \\ u(0, t) = u(1, t) = y_x(0, t) = y_x(1, t)\ \theta_x(0, t) = \theta_x(1, t) = 0, \\ y(0, t) = y(1, t) = \theta(0, t) = \theta(1, t) = \varrho(0, t) = \varrho(1, t) = 0, \\ \chi(x, 0, t) = y_t(x, t), \qquad x \in (0, 1),\ t > 0. \end{cases} \tag{3.10}$$

Soit l'espaces de Hilbert suivant

$$\mathcal{H} := H_0^1(0.L) \times L^2(0.L) \times H_0^1(0.L) \times L^2(0.L) \times L^2((0, 1) \times (0, 1)),$$

tels que $U = (u, y, \theta, \varrho, \chi)^T$.
Ensuite, le résultat de l'unicité est donné par la proposition suivante

Proposition 3.1. *[6] Soit $U_0 \in \mathcal{H}$, alors il existe une solution unique $U \in (\mathbb{R}^+, \mathcal{H})$ du problème (3.9). De plus, si $U_0 \in D(\mathcal{A})$, alors $U = (u, y, \theta, \varrho, \chi)^T \in C^1(\mathbb{R}^+, \mathcal{H}) \cap C(\mathbb{R}^+, D(\mathcal{A}))$.*

3.3 Stabilité exponentielle

Dans cette section, nous prouvons le résultat de la stabilité exponentielle de la solution de système (3.1)-(3.3). En utilisant la technique de multiplicateur

Lemme 3.1. *Soit $(u, y, \theta, \varrho, \chi)$ la solution du système (3.9), alors l'énergie fonctionnelle défnie par*

$$\begin{aligned} E(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 [\rho u_t^2 + \mu u_x^2 + J y_t^2 + \delta y_x^2 + \xi y^2 + \kappa\theta^2 + \alpha\varrho^2 + 2bu_x y]\mathrm{d}x \\ + \frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1 s|\eta_2|\chi^2(x, \varpi, t)\mathrm{d}\varpi\, \mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Satisfaite

$$\begin{aligned} E'(t) =& -l\int_0^1 \theta_x^2 \mathrm{d}x - \beta\int_0^1 u_{tx}^2 \mathrm{d}x - (\eta_1 - |\eta_2|)\int_0^1 y_t^2 \mathrm{d}x \\ &\leq -l\int_0^1 \theta_x^2 dx - \beta\int_0^1 u_{tx}^2 dx - \eta_0\int_0^1 y_t^2 \mathrm{d}x \leq 0, \end{aligned} \tag{3.12}$$

où $\eta_0 = \eta_1 - |\eta_2| \geq 0$.

Démonstration. En multipliant les équations $(3.9)_1$, $(3.9)_2$, $(3.9)_3$, $(3.9)_4$ par $u_t, y_t, \theta, \varrho$ respectivement et en intégrant sur $(0, 1)$ en utilisant l'intégration par partie et grâce aux conditions aux limites, on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^1 \rho u_t u_{tt} \mathrm{d}x &= \int_0^1 u_t[\mu u_{xx} + b y_x - \gamma\theta_x + \beta u_{txx}]\mathrm{d}x, \\ \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 \rho u_t^2 \mathrm{d}x &= -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 \mu u_x^2 \mathrm{d}x - \int_0^1 b y u_{tx} \mathrm{d}x - \gamma\int_0^1 \theta_x u_t \mathrm{d}x - \int_0^1 \beta u_{tx}^2 \mathrm{d}x, \end{aligned} \tag{3.13}$$

équation $(3.9)_2$ donne

$$\int_0^1 J y_t y_{tt}\, \mathrm{d}x = \int_0^1 y_t\left[\delta y_{xx} - b u_x - \xi y - d\varrho_x + m\theta - \eta_1 y_t - \eta_2 y_t \chi(x, 1, t)\right]\mathrm{d}x,$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 Jy_t^2\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 \delta y_x^2\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 \xi y^2\mathrm{d}x - b\int_0^1 y_t u_x\mathrm{d}x + m\int_0^1 \theta y_t\mathrm{d}x \\ - d\int_0^1 \varrho_x y_t\mathrm{d}x - \eta_1\int_0^1 y_t^2\mathrm{d}x - \eta_2\int_0^1 y_t\chi(x,1,t)\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{3.14}$$

De même façon l'équation $(3.9)_3$ donne

$$\begin{aligned}\int_0^1 \kappa\theta\theta_t\mathrm{d}x &= \int_0^1 \theta\left[l\theta_{xx} - \gamma u_{tx} - my_t - k_1\varrho_x\right]\mathrm{d}x, \\ \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 \kappa\theta^2\mathrm{d}x &= -l\int_0^1 \theta_x^2\mathrm{d}x + \gamma\int_0^1 \theta_x u_t\mathrm{d}x - m\int_0^1 \theta y_t\mathrm{d}x - k_1\int_0^1 \theta\varrho_x\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{3.15}$$

Le même manière pour l'équation $(3.9)_4$

$$\begin{aligned}\int_0^1 \alpha\varrho\varrho_t\mathrm{d}x &= \int_0^1 \varrho\left[-k_1\theta_x - dy_{tx}\right]\mathrm{d}x, \\ \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 \alpha\varrho^2\mathrm{d}x &= k_1\int_0^1 \theta\varrho_x\mathrm{d}x + d\int_0^1 y_t\varrho_x\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{3.16}$$

Par l'addition

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 [\rho u_t^2 + \mu u_x^2 + Jy_t^2 + \delta y_x^2 + \xi y^2 + \kappa\theta^2 + \alpha\varrho^2 + 2bu_x y]\mathrm{d}x \\ +\beta\int_0^1 u_{tx}^2\mathrm{d}x + l\int_0^1 \theta_x^2\mathrm{d}x + \eta_1\int_0^1 y_t^2\mathrm{d}x \\ + \eta_2\int_0^1 y_t\chi(x,1,t)\mathrm{d}x = 0.\end{aligned} \tag{3.17}$$

Maintenant, en multipliant $(3.9)_5$ par $|\eta_2|\chi$, et en intégrant le produit sur $(0,1)\times(0,1)$ et en rappelant que $z(x,0,t) = y_t(x,t)$, donne

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_0^1 s|\eta_2|\chi\chi_t(x,\varpi,t)\,\mathrm{d}\varpi\,\mathrm{d}x + \int_0^1\int_0^1 |\eta_2|\chi\chi_\varpi(x,\varpi,t)\,\mathrm{d}\varpi\,\mathrm{d}x = 0, \\ \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1\int_0^1 s|\eta_2|\chi^2(x,\varpi,t)\,\mathrm{d}\varpi\,\mathrm{d}x \\ = -\int_0^1\int_0^1 |\eta_2|\chi\chi_\varpi(x,\varpi,t),\mathrm{d}\varpi\,\mathrm{d}x \\ = -\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1 |\eta_2|\frac{d}{d\varpi}\chi^2(x,\varpi,t)\,\mathrm{d}\varpi\,\mathrm{d}x \\ = \frac{1}{2}\int_0^1 |\eta_2|(\chi^2(x,0,t) - \chi^2(x,1,t))\,\mathrm{d}x \\ = \frac{1}{2}\int_0^1 |\eta_2|y_t^2\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_0^1 |\eta_2|\chi^2(x,1,t)\,\mathrm{d}x,\end{aligned} \tag{3.18}$$

en utilisant l'inégalité de Young et de Cauchy-Schwartz, nous avons

$$\eta_2 \int_0^1 y_t \chi(x,1,t)\mathrm{d}x \leq \frac{\eta_2}{2}\int_0^1 \chi^2(x,1,t)\mathrm{d}x + \frac{\eta_2}{2}\int_0^1 y_t^2 \mathrm{d}x.$$

De (3.11), (3.17) et (3.18), nous obtenons

$$\frac{d}{dt}E(t) \leq -l\int_0^1 \theta_x^2 \mathrm{d}x - \beta\int_0^1 u_{tx}^2\mathrm{d}x - (\eta_1 - |\eta_2|)\int_0^1 y_t^2\mathrm{d}x, \tag{3.19}$$

puis, supposons que $\eta_1 \geq |\eta_2|$, $\exists \eta_0 > 0$ de sorte que

$$\frac{d}{dt}E(t) \leq -l\int_0^1 \theta_x^2 \mathrm{d}x - \beta\int_0^1 u_{tx}^2\mathrm{d}x - \eta_0\int_0^1 y_t^2\mathrm{d}x. \tag{3.20}$$

□

Lemme 3.2. *Soit $(u, y, \theta, \varrho, \chi)$ la solution du système (3.9), donc la fonctionnelle*

$$F_1(t) := \int_0^1 (\rho u u_t + J y y_t)\mathrm{d}x + \frac{\eta_1}{2}\int_0^1 y^2\mathrm{d}x - \frac{d\kappa}{k_1}\int_0^1 y\theta \mathrm{d}x,$$

satisfaite

$$\begin{aligned} F_1'(t) \leq -\frac{\mu}{2}\int_0^1 u_x^2\mathrm{d}x - \frac{\delta}{2}\int_0^1 y_x^2\mathrm{d}x - \frac{\xi}{2}\int_0^1 y^2\mathrm{d}x - 2b\int_0^1 u_x y\mathrm{d}x \\ +c\int_0^1 \theta_x^2\mathrm{d}x + c\int_0^1 u_{tx}^2\mathrm{d}x + c\int_0^1 y_t^2\mathrm{d}x \\ + c\int_0^1 \eta_2\chi^2(x,1,t)\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Démonstration. Différencier F_1 par rapport a t, ensuite calcul direct à l'aide de l'intégration par partie, nous obtenons

$$\begin{aligned} F_1'(t) =&\rho\int_0^1 u_t^2\mathrm{d}x - \mu\int_0^1 u_x^2 dx - b\int_0^1 u_x y\mathrm{d}x - \gamma\int_0^1 u\theta_x\mathrm{d}x \\ &- \beta\int_0^1 u_x u_{tx}\mathrm{d}x + J\int_0^1 y_t^2\mathrm{d}x - \delta\int_0^1 y_x^2\mathrm{d}x - b\int_0^1 u_x y\mathrm{d}x \\ &- \xi\int_0^1 y^2\mathrm{d}x + m\int_0^1 y\theta\mathrm{d}x - \int_0^1 \eta_2 y\chi(x,1,t)\mathrm{d}x \\ &+ \frac{dl}{k_1}\int_0^1 y_x\theta_x\mathrm{d}x + \frac{d\gamma}{k_1}\int_0^1 y u_{tx}\mathrm{d}x + \frac{dm}{k_1}\int_0^1 y y_t\mathrm{d}x - \frac{d\kappa}{k_1}\int_0^1 \theta y_t\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{3.22}$$

En utilisant l'inégalité de Young et de Poincaré, nous avons

$$\begin{aligned}
-\beta \int_0^1 u_x u_{tx} \mathrm{d}x &\leq \frac{\mu}{2} \int_0^1 u_x^2 \mathrm{d}x + \frac{c'}{2\mu} \int_0^1 u_{tx}^2 \mathrm{d}x, \\
\frac{dl}{k_1} \int_0^1 y_x \theta_x \mathrm{d}x &\leq \frac{\delta}{2} \int_0^1 y_x^2 \mathrm{d}x + \frac{c'}{2\delta} \int_0^1 \theta_x^2 \mathrm{d}x, \\
m \int_0^1 y\theta \mathrm{d}x &\leq \frac{\xi}{8} \int_0^1 y^2 \mathrm{d}x + \frac{2c'}{\xi} \int_0^1 \theta_x^2 \mathrm{d}x, \\
\frac{d\gamma}{k_1} \int_0^1 y u_{tx} \mathrm{d}x &\leq \frac{\xi}{8} \int_0^1 y^2 \mathrm{d}x + \frac{2c'}{\xi} \int_0^1 u_{tx}^2 \mathrm{d}x, \\
\frac{dm}{k_1} \int_0^1 y y_t \mathrm{d}x &\leq \frac{\xi}{8} \int_0^1 y^2 \mathrm{d}x + \frac{2c'}{\xi} \int_0^1 y_t^2 \mathrm{d}x, \\
-\int_0^1 |\eta_2| y \chi^2(x,1,s,t) \mathrm{d}x &\leq \frac{\xi}{8} \int_0^1 y^2 \mathrm{d}x + \frac{2c'}{\xi} \int_0^1 |\eta_2| \chi^2(x,1,s,t) \mathrm{d}x, \\
-\frac{d\kappa}{k_1} \int_0^1 \theta y_t \mathrm{d}x &\leq \frac{\ell}{2} \int_0^1 \theta_x^2 \mathrm{d}x + \frac{c'}{2} \int_0^1 y_t^2 \mathrm{d}x.
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Par conséquent, nous obtenons (3.21) . □

Lemme 3.3. *Soit* $(u, y, \theta, \varrho, \chi)$ *la solution du système (3.9), donc la fonctionnelle*

$$F_2(t) := -\alpha\kappa \int_0^1 \theta \int_0^x \varrho(y) \mathrm{d}y \mathrm{d}x,$$

satisfaite

$$F_2'(t) \leq -\frac{k_1\alpha}{2} \int_0^1 \varrho^2 \mathrm{d}x + c \int_0^1 y_t^2 \mathrm{d}x + c \int_0^1 \theta_x^2 \mathrm{d}x + c \int_0^1 u_{tx}^2 \mathrm{d}x. \tag{3.24}$$

Démonstration. Différenciation de F_2 par rapport a t, et d'utilisant l'intégration par partie et (3.10), nous obtenons

$$\begin{aligned}
F_2'(t) = -k_1\alpha \int_0^1 \varrho^2 \mathrm{d}x + l\alpha \int_0^1 \theta_x \varrho \mathrm{d}x - \gamma\alpha \int_0^1 u_t \varrho \mathrm{d}x \\
+ m\alpha \int_0^1 y_t \int_0^x \varrho(y) \mathrm{d}y \mathrm{d}x + k_1\kappa \int_0^1 \theta^2 \mathrm{d}x \\
+ d\kappa \int_0^1 \theta y_t \mathrm{d}x.
\end{aligned} \tag{3.25}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy -Schwartz, Young et Poincaré

$$
\begin{aligned}
\alpha l \int_0^1 \theta_x \varrho \mathrm{d}x &\leq \frac{k_1\alpha}{6} \int_0^1 \varrho^2 \mathrm{d}x + \frac{3c'}{2\kappa_1\alpha} \int_0^1 \theta_x^2 \mathrm{d}x, \\
-\alpha\gamma \int_0^1 u_t \varrho \mathrm{d}x &\leq \frac{k_1\alpha}{6} \int_0^1 \varrho^2 \mathrm{d}x + \frac{3c'}{2\kappa_1\alpha} \int_0^1 u_{tx}^2 \mathrm{d}x, \\
m\alpha \int_0^1 y_t \int_0^x \varrho(y) \mathrm{d}y \mathrm{d}x &\leq \frac{k_1\alpha}{6} \int_0^1 \varrho^2 \mathrm{d}x + \frac{3c'}{2\kappa_1\alpha} \int_0^1 y_t^2 \mathrm{d}x, \\
d\kappa \int_0^1 \theta y_t \mathrm{d}x &\leq \frac{\ell}{2} \int_0^1 \theta_x^2 \mathrm{d}x + \frac{c'}{2} \int_0^1 y_t^2 \mathrm{d}x.
\end{aligned}
\tag{3.26}
$$

Ainsi, nous obtenons (3.24). □

Lemme 3.4. *Soit $(u, y, \theta, \varrho, \chi)$ la solution du système (3.9), donc la fonctionnelle*

$$
F_3(t) := s \int_0^1 \int_0^1 e^{-s\varpi} \chi^2(x, \varpi, t) \, \mathrm{d}\varpi \, \mathrm{d}x,
$$

satisfait

$$
\begin{aligned}
F_3'(t) \leq -\eta_3 \int_0^1 \int_0^1 s\chi^2(x, \varpi, t) \mathrm{d}\varpi \mathrm{d}x + \int_0^1 y_t^2 \mathrm{d}x \\
- \eta_3 \int_0^1 \chi^2(x, 1, t) \, \mathrm{d}x,
\end{aligned}
\tag{3.27}
$$

où $\eta_3 > 0$.

Démonstration. Différenciation de F_3 par rapport a t, et d'utilisation $(3.9)_5$ pour obtenir

$$
\begin{aligned}
F_3'(t) =& 2 \int_0^1 \int_0^1 s e^{-s\varpi} \chi \chi_t(x, \varpi, t) \mathrm{d}\varpi \mathrm{d}x \\
=& -2 \int_0^1 \int_0^1 e^{-s\varpi} \chi \chi_\varpi(x, \varpi, t) \mathrm{d}\varpi \mathrm{d}x \\
=& - \int_0^1 \int_0^1 s e^{-s\varpi} \chi^2(x, \varpi, t) \mathrm{d}\varpi \mathrm{d}x \\
& - \int_0^1 \left[e^{-s} \chi^2(x, 1, t) - \chi^2(x, 0, t) \right] \mathrm{d}x.
\end{aligned}
\tag{3.28}
$$

En utilisant $\chi(x, 0, t) = y_t(x, t)$ et par le fait que $e^{-s} \leq e^{-s\varpi} \leq 1$, pour tout $0 < \varpi < 1$, on a

$$
\begin{aligned}
F_3'(t) =& - \int_0^1 \int_0^1 s e^{-s\varpi} \chi^2(x, \varpi, t) \mathrm{d}\varpi \mathrm{d}x \\
& - \int_0^1 e^{-s} \chi^2(x, 1, t) \mathrm{d}x + \int_0^1 y_t^2 \mathrm{d}x,
\end{aligned}
\tag{3.29}
$$

on conclure (3.27). □

Théorème 3.1. *Soit* $(u, y, \theta, \varrho, \chi)$ *la solution du système (3.1)-(3.2) et (3.10). Supposons que* $\eta_1 > |\eta_2|$*, alors l'énergie* E *satisfait*

$$E(t) \leq \lambda_2 e^{-\lambda_1 t}, \quad \forall t \geq 0, \tag{3.30}$$

telle que λ_1 *et* λ_2 *deux constats positifs.*

Démonstration. Nous définissons une fonctionnelle de Lyapunov $\mathcal{L}$ et montrons qui'elle est équivalent à l'énergie E.

Lemme 3.5. *Pour N suffisamment grand, la fonctionnelle de Lyapunov définie par*

$$\mathcal{L}(t) := NE(t) + F_1(t) + F_2(t) + N_1 F_3(t). \tag{3.31}$$

avec N, N_1 *sont des nombres réels positives à choisir de manière appropriée ultérieuremet, satisfait*

$$c_1 E(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq c_2 E(t), \quad \forall t \geq 0, \tag{3.32}$$

où c_1 *et* c_2 *sont des constantes positives .*

On a

$$\mathcal{K}(t) = F_1(t) + F_2(t) + N_1 F_3(t),$$

puis

$$\begin{aligned}|\mathcal{K}(t)| \leq &\rho \int_0^1 |uu_t|\mathrm{d}x + J\int_0^1 |yy_t|\mathrm{d}x + \frac{\eta_1}{2}\int_0^1 y^2\mathrm{d}x \\ &+ \frac{d\kappa}{k_1}\int_0^1 |y\theta|\mathrm{d}x + \alpha\kappa\int_0^1 |\theta\int_0^x \varrho(y)\mathrm{d}y|\mathrm{d}x \\ &+ N_1\int_0^1\int_0^1 se^{-s\varpi}\chi^2(x,\varpi,t)\,\mathrm{d}\varpi\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

En utilisant les inégalités de Cauchy-Schwartz, Young et Poincaré, nous obtenons

$$\begin{aligned}|\mathcal{K}(t)| \leq &c\int_0^1 (u_t^2 + y_t^2 + y_x^2 + u_x^2 + y^2 + \varrho^2 + \theta^2)\mathrm{d}x \\ &+ c\int_0^1\int_0^1 s|\eta_2|\chi^2(x,\varpi,t)\mathrm{d}\varpi\,\mathrm{d}x \\ &\leq cE(t).\end{aligned}$$

Par conséquent

$$|\mathcal{K}(t)| = |\mathcal{L}(t) - NE(t)| \leq cE(t),$$

qui rendement

$$(N-c)E(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq (N+c)E(t). \tag{3.33}$$

Choisir N assez grand, nous obtenons une estimation(3.32).

D'autre part, en différenciant (3.31) et utilisant (3.12) et (3.21), (3.24), (3.27), nous avons

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}'(t) \leq & -[N\beta - c]\int_0^1 u_{tx}^2 dx - \left[\frac{\delta}{2}\right]\int_0^1 y_x^2 \mathrm{d}x \\
& - \left[\frac{\xi}{2}\right]\int_0^1 y^2 \mathrm{d}x - \left[\frac{\mu}{2}\right]\int_0^1 u_x^2 \mathrm{d}x - \left[\frac{\alpha k_1}{2}\right]\int_0^1 \varrho^2 \mathrm{d}x \\
& - [Nl - c]\int_0^1 \theta_x^2 \mathrm{d}x - \int_0^1 2bu_x y \mathrm{d}x \\
& - [N_1\eta_3]\int_0^1\int_0^1 s\chi^2(x,\varpi,t)\,\mathrm{d}\varpi\,\mathrm{d}x \\
& - [N_1\eta_3 - c]\int_0^1 \chi^2(x,1,t)\,\mathrm{d}x \\
& - [N\eta_0 - N_1 - c]\int_0^1 y_t^2 \mathrm{d}x.
\end{aligned} \tag{3.34}$$

Nous choisissons maintenant $\eta_3 > 0$ et N_1 assez grand tels que

$$\alpha_1 = N_1\eta_3 - c > 0,$$

où

$$\alpha_2 = -N_1\eta_3.$$

Choisir N assez grand tels que

$$Nl - c > 0, \quad N\frac{\beta}{2} - c > 0, \quad N\eta_0 - c > 0, \quad N - c > 0,$$

et utilisé (3.11), estimations (3.33) et (3.34) respectivement et l'inégalité de Poincaré, nous obtenons

$$\mathcal{L}'(t) \leq -h_1 E(t), \quad \forall t \geq 0, \tag{3.35}$$

pour certains $h_1, c_1, c_2 > 0$.

Une combinaison (3.32) avec (3.35) donne

$$\mathcal{L}'(t) \leq -\lambda_1 \mathcal{L}(t), \quad \forall t \geq 0, \tag{3.36}$$

où $\lambda_1 = h_1/c_2$. Intégration (3.36) nous obtenons (3.30).

Ce qui conduit au résultat du théorème (3.1). □

Bibliographie

[1] M. S. Alves, P. Gamboa , G.C. Gorain, and al. Asymptotic behavior of a flexible structure with Cattaneo type of thermaleffect.*Indag Math.*, 27(3), 821–834, (2016).

[2] T. A. Apalara, Uniform decay in weakly dissipative Timoshenko system with internal distributed delay feedbacks.Acta Mathematica Scientia, 36(3), 815–830, (2016).

[3] H. Brezis, Analyse fonctionnelle Théorie et Application,*Dunod*, Paris 1999.

[4] H. Brezis, Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations. *Springer Science + Business Media,*LLC 2011.

[5] C. Briat, Linear Parameter-Varying and Time-Delay Systems. *Springer Science + Business Media*,2015.

[6] M. Chen, W. Liu, W. Zhou, Existence and general stabilization of the Timoshenko system of thermoviscoelasticity of type III with frictional damping and delay terms, Advances in Nonlinear Analysis, 7(4), 547-570, (2016).

[7] A. Djebabla, A. Choucha, DJ. Ouchenane, KH. Zennir, Explicit Stability for a Porous Thermoelastic System with Second Sound and Distributed Delay Term.*Int. J. Appl. Comput. Math* ,30 March 2021.

[8] H. K. Khalil, Nonlinear Systems.Macmillan,*New York, 3e edition*, 2002.

[9] M-Th.Lacroix-Sonrier, Distribution-Espaces de Sobolev-Applications, *Ellipses,Paris*, 1998.delay, *Applicable Analysis*98(16), 2903-2915, (2019).

[10] B. Lucquin, Équatios aux dérivées partielles et leurs approximations, *Ellipses*, (2004).

[11] S. Misra, M.S. Alves, G. Gorain, O. Vera, Stability of the vibrations of an inhomogeneous flexible structure with thermal effect, *Int. J. Dyn. Control*, 3(4), 354-362, (2015).

[12] D. S. Mitrinovic, J. E. Pecaric, A. M. Fink, Inequalities involving functions and their integrals and derivatives. *Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, Springer-Science + Business Media*, 53, (1991).

[13] S. Nicaise, C. Pignotti, Stabilization of the wave equation with boundary or internal distributed delay, Diff. Int. Equs., 21 (9–10), 935–958, (2008).

[14] J. J. E. Slotine, W. Li, Applied Nonlinear Control, *Massachusetts Institue of Technology,Prentice Hall*, 1991.

[15] L. l. Vrabie, C_0–semigroups and applications, *Elsevier Science* B. V. 2003.