

UNIVERSITÉ DE KHEMIS MILIANA
DÉPARTEMENT MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE



MÉMOIRE

Pour l'obtention du diplôme de

MASTER EN MATHÉMATIQUES

SPÉCIALITÉ : ANALYSE MATHÉMATIQUE ET APPLICATIONS

Présenté par

BOURCHI Soumia

**Étude de quelques espaces fonctionnels utilisés en traitement
d'images**

Soutenu publiquement le 14 septembre 2017 devant le jury composé de

Président du jury : Mr. BOUDERBALA Mihoub

Université Khemis Miliana.

Examineur : Mr. CHAOUCHI Belkacem.

Université Khemis Miliana.

Examineur : Mr. BENNICHE Omar

Université Khemis Miliana.

Encadrant : Mr. HACHAMA Mohamed

Université Khemis Miliana.

Remerciements

En premier lieu, je remercie " ALLAH " le tout puissant qui m'a donné la force, la volonté et le courage pour accomplir ce modeste travail.

Je remercie Mr **HACHAMA Mohamed**, docteur à l'université de Khemis Miliana qui a encadré mon travail. Il m'a guidée tout au long de la préparation de le mémoire et m'a proposé des sujets et des problèmes très intéressants.

Que Messieurs les membres de jury trouvent ici l'expression de ma profonde gratitude pour avoir accepté de juger mon travail.

Je remercie également ma famille pour les soutien, leurs en encouragements et je précise ma très chère mère.

Je tiens à remercier tous les enseignants de département Mathématique et Informatique.

Enfin, je remercie s'adressent à toutes les personnes qui m'ont apporté leur aide, leurs conseils et leurs soutien tout au long de ce travaille.

MERCI.

Mémoire de Master :Etude les quelques espaces fonctionnels utilisés en traitement d'image.

Résumé :

Ce mémoire est consacré à l'étude les quelques espaces fonctionnels utilisés en traitement d'image par des méthodes issues du calcul variationnel et des équations aux dérivées partielles. Au chapitre 1, après avoir présenté quelques questions essentielles que nous traiterons dans ce mémoire, nous rappelons les notions et les résultats de base sur l'analyse d'image. Au chapitre 2, nous présentons les espace Sobolev. Au chapitre 3, nous étudions les espace des fonctions à variation bornée BV .

Mots clés : Espaces de Sobolev, Espace des fonctions à variation bornée, Traitement d'images.

Master Thesis :Study of some functional spaces used in image processing.

Abstract :

This thesis is devoted to the study of some functional spaces used in image processing by the direct method in the Calculus of Variations and partial differential aquation. In chapter 1, after partial differential aquation the essential questions that we will treat in the thesis, we recall some notions and basic results on image analysis. In chapter 2, we present Sobolev spaces. In Chapter 3, we study the space Of the functions with bounded variation BV .

Keywords : Spaces of Sobolev, Spaces of bounded variation, Image processing

مذكرة ماستر : دراسة بعض المجالات وظيفية المستخدمة في معالجة الصور

ملخص : تتخصص هذه رسالة لدراسة بعض فضاءات التابعة المستخدمة في معالجة الصورة عن طريق اساليب مستمدة من حساب المتغيرات و المعادلات التفاضلية ذات المشتقات الجزئية. في الفصل 1، نعرض بعض القضايا الرئيسية التي سوف نناقش في هذه الرسالة، نذكر المفاهيم و النتائج الاساسية لمعالجة الصور. في الفصل 2، نقدم فضاءات سو بوليف. في الفصل 3، ندرس الفضاء .

الكلمات المفتاحية : فضاءات سو بوليف، الفضاء ، معالجة الصورة.

Table des matières

Table des figures

Introduction

Ce mémoire est un travail en mathématiques appliquées. Il aborde quelques problèmes en analyse d'images. Il comporte donc un mélange entre des parties mathématiques et des parties plus dédiées au domaine du traitement d'image. Il faut bien voir qu'il y a ici une relation étroite entre les deux domaines.

L'analyse fonctionnelle est la branche des mathématiques et plus particulièrement de l'analyse qui étudie les espaces de fonctions. Elle prend ses racines historiques dans l'étude des équations différentielles. Le terme fonctionnelle trouve son origine dans le cadre du calcul des variations, pour désigner des fonctions dont les arguments sont des fonctions. Son emploi a été généralisé à nouveaux domaines par de mathématiciens et physiciens.

De nombreuses applications sont basées sur des images et dépendent ensuite de leur qualité. Malheureusement, Ces images ne sont pas toujours de bonne qualité pour diverses raisons. De nombreux problèmes de vision par ordinateur peuvent être formulés comme des problèmes de minimisation. Parmi nos premières préoccupations, nous sommes intéressés par l'existence d'une solution. La présentation de la méthodologie pour prouver l'existence révèle deux grandes notions : la coercitive et la semi continuité inférieure.

Organisation du mémoire

Ce mémoire contient trois chapitre :

Chapitre 1 : (Problèmes et outils mathématiques). Dans ce chapitre, Nous présentons les problème et outils mathématiques intervenant dans le traitement d'image.

Chapitre 2 : (Espace de Sobolev). Dans ce chapitre, Nous étudions espaces Sobolev et quelque propriétés, nous avons la régularisation de Tokhonov.

Chapitre 3 : (Espace des fonctions à variation bornée). Ce chapitre, nous définissons espace des fonctions à variation bornée et quelque propriétés, nous présentons la restauration Rudin, Osher et Fatemi.

Notations

- $W^{m,p}(\Omega), \mathbb{H}^m(\Omega), \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ sont les espaces de Sobolev.
- $\mathcal{C}_c^1(\Omega)$ est l'espace des fonctions \mathcal{C}^1 à support compact.
- $\mathbb{L}^p(\Omega)$ est l'espace de Lebesgue.
- $W^{m,p}(\Omega)$ est l'espace des fonctions de $\mathbb{L}^p(\Omega)$ dont les dérivées jusqu'à l'ordre m sont dans $\mathbb{L}^p(\Omega)$.
- $BV(\Omega)$ est espace de variation bornée.
- $BV - w^*$ est topologie faible de $BV(\Omega)$.
- $\int_{\Omega} |Du|$ est variation total de u .
- TV est la variation totale.
- \mathcal{M} est l'espace de mesure de Radon.
- dx est une mesure de Lebesgue.
- $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ est un la *ime* dérivée partielle faible de u .
- $D_i u$ est la dérivée indéfiniment de u au sens des distributions.
- Du est la dérivée au sens des distributions.
- ∂^α est un la dérivée partielle à prendre au sens faible.
- $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est produit scalaire.
- $\| \cdot \|$ est une norme.
- α est un multi-indice.

- $u_n = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u_n$ est un valeur moyenne de u sur Ω .
- $div\varphi$ est un opérateurs de divergence de la fonction φ .
- ∇u est gradient de la fonction u .
- Δu est un opérateur laplacien de la fonction u .
- σ variance.

Chapitre 1

Problèmes et outils mathématiques

Sommaire

1	Restauration des images	11
2	Espaces adaptés à l'analyse d'image	13
3	Rappels mathématiques	15
4	Calcul variationnel	18
4.1	Semi continuité et convexité d'une fonctionnelle	18
4.2	Équation Euler Lagrange	19
4.3	Méthode directe du calcul des variations	19
4.4	Méthode de descente du gradient	20

Introduction

Dans ce chapitre, nous commençons par présenter les problèmes de restauration des images et donnée quelques techniques pour restauration d'image.

Espaces adaptés à traitement d'image, rappels mathématique et à la fin donnée le calcul variationnel.

1 Restauration des images

Soit $u : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une image originale, on suppose qu'elle a été dégradée par un bruit η tel que :

$$\eta = u_0 - Mu,$$

est un bruit à moyenne nulle et à variance σ^2 .

$$M : \mathbb{L}^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{L}^2(\Omega),$$

M est un opérateur linéaire continue. Lorsque qu'il s'agit du flou. De plus, il n'est pas nécessairement inversible (et même lorsqu'il est inversible, son inverse est souvent numériquement difficile à calculer). A partir de l'image observée

$$u_0 = \eta + Mu.$$

qui est donc une version dégradée de l'image originale u , on cherche à reconstruire u . On cherche u comme solution du problème :

$$\inf_{u \in \Omega} \underbrace{\|u_0 - Mu\|_2^2}_{\text{terme d'attache aux donnée}} \tag{1.1}$$

où $\|\cdot\|_2$ désigne la norme \mathbb{L}^2 . Il s'agit d'un problème inverse mal posé, voir [?]. Pour le résoudre numériquement, plus précisément, on ajoute un terme de régularisation, et on est amené à étudier le problème de minimisation :

$$\inf_u \underbrace{\|u_0 - Mu\|_2^2}_{\text{terme d'attache aux donnée}} + \underbrace{L(u)}_{\text{terme de régularisation}} .$$

La restauration d'image est une technique d'imagerie numérique qui permet, à l'aide d'un logiciel de retouche d'image, de rendre à une image numérisée l'apparence de son état d'origine, dans ce cas on a :

Débruitage

Une image contient toujours un bruit. Celui-ci peut être plus ou moins important. Dans certains cas, on peut vouloir l'enlever ou pour le moins. C'est une opération que l'on appelle débruitage.

Dans débruitage, on a l'opérateur $M = \text{Identité}$.



FIGURE 1.1 – Débruitage d'image.

Déconvolution

La déconvolution est l'opération inverse de la convolution.

Dans la déconvolution, on a l'opérateur $M \neq 1$ et représente un opérateur de flou : dans ce cas image observée u_0 est floue (et plus ou moins bruitée), on cherche donc une image u , qui lorsqu'on la floute, Mu soit proche de u_0 .



FIGURE 1.2 – Déconvolution d'image.

Inpainting (ou peinture)

Dans inpainting, l'opérateur M représente un opérateur de masque qui supprime certaines parties de l'image.

Définition 1. Soit un sous-ensemble $D \subset \Omega$ est zone de restauration.

On définit un masque binaire par $M : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$ tel que

$$M(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x, y) \text{ dans } D, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$



FIGURE 1.3 – Inpainting d'image.

2 Espaces adaptés à l'analyse d'image

Espace de Sobolev

Dans cette espace, nous étudions la régularisation de Tikhonov, elle a été développée par Tikhonov et Arsenin en (1906 – 1993). Il s'intéresse au problème de minimisation suivant

$$\inf_{u \in H^1} \|u_0 - Mu\|_2^2 + \lambda \|\nabla u\|_2^2.$$

La norme \mathbb{L}^2 du gradient permet de supprimer le bruit mais pénalise trop les gradients sur les bords. Le paramètre λ sert à contrôler le processus de régularisation : Si λ est choisi trop petit, la reconstruction sera trop proche de celle obtenue dans l'équation (??) et ainsi dominée par des composantes à hautes fréquences. En revanche, si λ est choisi trop grand, le terme en λ dominera la solution et les informations importantes dans les données ne seront pas prises en compte.

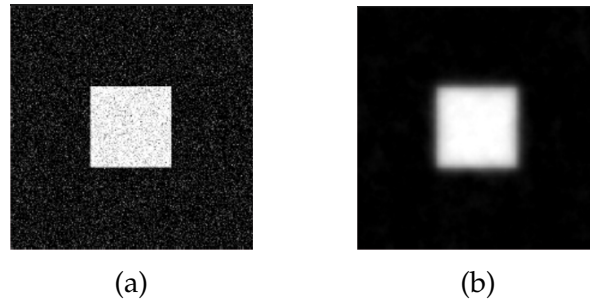


FIGURE 1.4 – Bord dans espace Sobolev.

Espace des fonctions à variation bornée

En 1992, Rudin, Osher et Fatemi ont proposé d'utiliser à la place de la norme du gradient dans $L^2(\Omega)$ la variation totale de l'image $\int_{\Omega} |Du| < \infty$: Ils proposent dans [?] de minimiser :

$$\int_{\Omega} |Du| \text{ sous les contraintes } \int_{\Omega} Mu = \int_{\Omega} u_0 \text{ et } \|u_0 - Mu\|_2^2 = \sigma. \quad (1.2)$$

L'intérêt d'un tel choix pour la fonction de régularisation provient du fait que la variation totale en dimension 2 autorise les discontinuités sur des courbes, et donc en particulier la présence des bords dans l'image restaurée. En introduisant un multiplicateur de Lagrange $\lambda > 0$, Chambolle et Lions ont démontré que le problème (??) est équivalent au problème suivant, voir [?] :

$$\inf_{u \in BV} \frac{\lambda}{2} \|u_0 - Mu\|_2^2 + \int_{\Omega} |Du|.$$

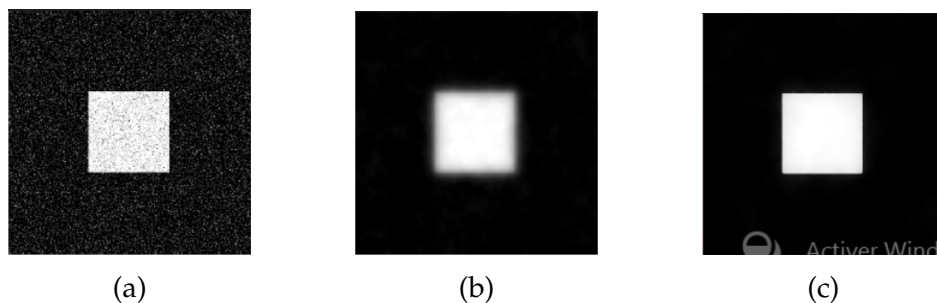


FIGURE 1.5 – Différence entre espace Sobolev et espace des fonctions à variation bornée.

3 Rappels mathématiques

Définition 2. $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ est dit ouvert si pour tout $x \in \Omega$, il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset \Omega$.

Définition 3. Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N . On dit que $\partial\Omega$ est Lipschitzienne s'il existe $L > 0$ (appelé constante de Lipschitz de $\partial\Omega$) telle que la condition suivante soit satisfaite : pour tout $x \in \partial\Omega$ il existe un voisinage V de x in \mathbb{R}^N et un système de coordonnées orthonormées noté (y_1, \dots, y_n) telles que :

1. V est un rectangle dans ce système de coordonnées, i.e.,

$$V = \{(y_1, \dots, y_n) \mid -a_i < y_j < a_j, 1 \leq j \leq n\},$$

2. Il existe une fonction Lipschitzienne φ de constante Lipschitz $\leq L$ définie sur

$$V' = \{(y_1, \dots, y_{n-1}) \mid -a_i < y_j < a_j, 1 \leq j \leq n-1\},$$

telle que $|\varphi(y')| \leq \frac{a_n}{2}$ pour tout $y' = (y_1, \dots, y_{n-1}) \in V'$,

$$\Omega \cap V = \{y = (y', y_n) \in V \mid y_n \in \varphi(y')\},$$

$$\partial\Omega \cap V = \{y = (y', y_n) \in V \mid y_n \in \varphi(y')\}$$

Définition 4. On dit qu'un espace topologique X est connexe s'il n'est pas réunion de deux ensembles ouverts non vides disjoints. Autrement dit si U et V sont deux ouverts de X tels que $X = U \cup V$ et $U \cap V = \emptyset$ alors $U = \emptyset$ ou $V = \emptyset$.

Définition 5. Soit $(X, \|\cdot\|_X)$ un espace de Banach. L'ensemble des formes linéaires continues sur X est appelé dual topologique de X , noté X' .

Définition 6. Soit $(X, \|\cdot\|_X)$ un espace de Banach. On dit que l'espace X est séparable s'il contient une partie dénombrable dense c'est à dire $A \subset X, \overline{A} = X$.

Définition 7. Soit X un ensemble. Un espace topologique X est dit compact s'il est séparé et si tout recouvrement ouvert de X admet un sous-recouvrement fini.

Définition 8. Soit $(X, \|\cdot\|_X)$ un espace de Banach. On appelle bidual de X le dual du dual de X , c'est à dire $(X')'$, noté X'' .

Définition 9. Soit $(X, \|\cdot\|_X)$ un espace de Banach. On dit que l'espace X est réflexif si

$$(X')' = X,$$

avec $(X')'$ est le bidual de X .

Définition 10. Soit $(X, \| \cdot \|_X)$ un espace de Banach. La topologie forte est une base les boules ouverts.

Définition 11. Soit $(X, \| \cdot \|_X)$ un espace de Banach. La topologie faible sur X est un topologie la moins fine telle que tout applications $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ avec $f \in X'$ soient continues.

Définition 12. La topologie faible* sur X' est la topologie la moins fine telle que toutes applications

$$\begin{aligned} Jx : X' &\rightarrow \mathbb{R} \\ f &\mapsto \langle f, x \rangle \end{aligned}$$

avec $x \in X$ soient continues.

Remarque 1. moins il y a d'ouverts, plus il y a des compacts. Il est beaucoup plus facile d'être compact pour la topologie faible que pour la topologie forte, car la topologie faible ayant moins d'ouverts et on verra qu'elle a plus des compacts que la topologie forte.

Ainsi, l'injection de X' dans $X - w^*$ est compacte, au sens suivant : les boules dans l'espace vectoriel normé X' sont compactes pour la topologie faible*.

Proposition 1. voir [?].

1. Si X est un espace de Banach réflexif. Alors pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bornée dans X , on peut extraire une sous suite convergente pour la topologie faible.

2. Si X est un espace de Banach séparable. Alors pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bornée dans X' , on peut extraire une sous suite convergente pour la topologie faible*.

Définition 13. Soit X un espace de Banach.

On dit qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge faiblement dans X si et seulement si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle v, u_n \rangle = \langle v, u \rangle; \forall v \in X',$$

et on écrit

$$u_n \rightharpoonup u \text{ dans } X.$$

On dit qu'une suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge faiblement* dans X' si et seulement si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle v_n, w \rangle = \langle v, w \rangle; \forall w \in X,$$

et on écrit

$$v_n \xrightarrow{*} v \text{ dans } X'.$$

On dit qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge fortement dans X si et seulement si

$$\forall u \in X, \|u_n - u\|_X \rightarrow 0 \text{ (} n \rightarrow +\infty \text{),}$$

et on écrire

$$u_n \rightarrow u \text{ dans } X.$$

Propriétés 1. La convergence forte entraîne la convergence faible, si $u_n \rightharpoonup u$ alors $\|u_n\|_{L^2}$ est bornée.

Démonstration. Voir [?]. □

Définition 14. Soit $1 \leq p < \infty$. On appelle espace de Lebesgue \mathbb{L}^p l'espace

$$\mathbb{L}^p(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ mesurable et } |f|^p \in \mathbb{L}^1(\Omega)\}.$$

Pour toute fonction $f \in \mathbb{L}^p(\Omega)$, on pose

$$\|f\|_{\mathbb{L}^p} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

Définition 15. L'espace de Lebesgue $\mathbb{L}^\infty(\Omega)$ est défini par

$$\mathbb{L}^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ mesurable et } \exists C \geq 0 \text{ tel que } |f(x)| \leq C, \text{ presque par tout sur } \Omega\}.$$

Pour toute fonction $f \in \mathbb{L}^\infty(\Omega)$, on pose

$$\|f\|_{\mathbb{L}^\infty} = \inf\{C \geq 0, |f(x)| \leq C, \text{ presque par tout sur } \Omega\}.$$

Définition 16. Soient μ et ν deux mesure sur (E, A) . On dit que :

1. ν est absolument continue par rapport à μ (notation $\nu \ll \mu$) si

$$\forall a \in A, \mu(a) = 0 \Rightarrow \nu(a) = 0.$$

2. ν est étrangère à μ (notation $\nu \perp \mu$) s'il existe $N \in A$ tel que $\mu(N) = 0$ et $\nu(N^c) = 0$.

Théorème 1. (Lebesgue-Radon-Nikodym). Soient μ et ν deux mesures σ -finie sur (E, A) . Il existe alors un unique couple (ν_a, ν_s) de mesures σ -finie sur (E, A) telles que

1. $\nu = \nu_a + \nu_s$.
2. $\nu_a \ll \mu$, $\nu_s \perp \mu$.

De plus, il existe une fonction mesurable $g : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ telle que

$$\forall a \in A, \nu_a(a) = \int_A g d\mu.$$

et la fonction g est unique à un ensemble de μ -mesure nulle près.

Démonstration. Voir [?]. □

Définition 17. (Inégalité de Cauchy Schwarz). Soit X un espace Hilbert,

$$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|; v, w \in X.$$

Définition 18. (Inégalité de Young). Soit X un espace Hilbert, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$uv \leq \frac{\varepsilon u^2}{2} + \frac{v^2}{2\varepsilon}, \quad u, v \in X.$$

Définition 19. Soient X et V sont des espaces des produits intérieurs à dimension finie, un opérateur $M \in \mathcal{L}(X, V)$. On appelle un opérateur adjoint $M^* \in \mathcal{L}(V, X)$ tel que

$$\langle Mx, v \rangle = \langle x, M^*v \rangle; \quad \forall x \in X, v \in V.$$

4 Calcul variationnel

Soit X un espace de Banach.

4.1 Semi continuité et convexité d'une fonctionnelle

Définition 20. Soit $C \subset X$. On dit que C convexe si

$$\forall u, v \in C \text{ et } \forall \lambda \in [0, 1] \text{ on a}$$

$$\lambda u + (1 - \lambda)v \in C.$$

Définition 21. Une fonction $E : X \rightarrow \mathbb{R}$ est dite convexe sur C si

$$\forall u, v \in C \text{ et } \forall \lambda \in [0, 1] \text{ on a}$$

$$E(\lambda u + (1 - \lambda)v) \leq \lambda E(u) + (1 - \lambda)E(v).$$

est dite strictement convexe sur C si

$$\forall u, v \in C \text{ et } \forall \lambda \in [0, 1] \text{ on a}$$

$$E(\lambda u + (1 - \lambda)v) < \lambda E(u) + (1 - \lambda)E(v); \quad u \neq v.$$

Définition 22. Une fonction $E : X \rightarrow \mathbb{R}$ est dite semi-continue inférieurement (abrégé sci) si pour toute suite $u_n \rightarrow u$ pour la topologie forte, on a

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} E(u_n) \geq E(u).$$

Si X est muni de sa topologie faible, alors E est faiblement semi-continue inférieurement si pour toute suite $u_n \rightharpoonup u$, on a

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} E(u_n) \geq E(u).$$

Proposition 2. Soit $E : X \rightarrow \mathbb{R}$ convexe et fortement semi-continue inférieurement. Alors E est faiblement semi-continue inférieurement, voir [?].

Définition 23. Une fonction $E : X \rightarrow \mathbb{R}$ est dite coercive si

$$\lim_{\|u\|_X \rightarrow +\infty} E(u) = +\infty.$$

4.2 Équation Euler Lagrange

Soient X et Y désignent des espaces vectoriels réels normés, E désigne une application d'un ouvert $\Omega \subset X$ à valeurs dans Y .

Définition 24. *Dérivée en un point suivant une direction.* Soient $u \in \Omega$, $v \in X$. La limite

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{E(u + \alpha v) - E(u)}{\alpha}$$

lorsqu'elle existe, est appelée dérivée de E au point u suivant la direction v . Elle est notée $E'(u; v)$.

Définition 25. *Dérivée de Gâteaux.* Soit $u \in \Omega$. Supposons que $E'(u; v)$ existe pour tout $v \in X$. S'il existe un opérateur linéaire et continu $L \in \mathcal{L}(X; Y)$ tel que $Lv = E'(u; v)$ pour tout $v \in X$, alors l'opérateur L est appelé Gâteaux-différentielle (ou G -différentielle) de E au point u . Il est souvent noté $E'(u)$, et E est dite Gâteaux-différentiable (ou différentiable au sens de Gâteaux) au point u .

Remarque

Équation d'Euler Lagrange est un moyen de résoudre le problème d'optimisation. Il n'est pas toujours facile d'obtenir celle-ci et solution de l'équation d'Euler n'est pas nécessairement extremum de la fonctionnelle E .

4.3 Méthode directe du calcul des variations

Définition 26. On définit une suite minimisante de E dans X , une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de X tel que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E(u_n) = \inf_{u \in X} E(u).$$

Définition 27. (Méthode directe du calcul des variations). Soit $E : X \rightarrow \mathbb{R}$, nous proposons de problème du minimisation suivant

$$\inf_{u \in X} E(u).$$

Pour prouver l'existence de problème précédent, nous réalisons les étapes suivantes :

- On construit une suite minimisante $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X$ c'est à dire

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E(u_n) = \inf_{u \in X} E(u).$$

Obtenir une sous-suite faiblement convergente.

- Si E est coercive c'est à dire

$$\lim_{\|u\|_X \rightarrow +\infty} E(u) = +\infty,$$

alors on peut obtenir une borne uniforme $\|u_n\|_X \leq K$.

- Si E est réflexif ($(X')' = X$), alors on déduit l'existence d'une sous suite $(u_{n_j})_{n \in \mathbb{N}}$ convergé faiblement vers u_0 , pour $u_0 \in X$.

- Si E est faiblement semi continue inférieure tel que pour tout suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ faiblement converge vers u on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \inf E(u_n) \geq E(u),$$

on déduit que

$$\inf_{u \in X} E(u) = \lim_{n \rightarrow +\infty} E(u_n) \geq E(u_0).$$

Par conséquent

$$E(u_0) = \min_{u \in X} E(u),$$

alors u_0 est un minimum de E , voir [?].

4.4 Méthode de descente du gradient

Méthode de descente du gradient s'applique lorsque l'on cherche le minimum d'une fonction dont on connaît l'expression analytique, qui est dérivable $E : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, mais dont le calcul direct du minimum est difficile. Elle consiste à construire une suite de valeurs u_n (on choisit u_0 arbitrairement) de manière itérative :

$$u_{n+1} = u_n - \eta E'(u_n);$$

avec

η : est le pas de discrétisation temporelle.

C'est un algorithme fondamental à connaître car utilisé partout sous des formes dérivées.

Exemple 1. Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable dont il faut trouver $x^* = \min g(x)$, le schéma suivant illustre la méthode de descente de gradient dans le cas où $g(x) = x^2$. On note x_n l'abscisse à l'itération n . On note $\frac{\partial g(x_n)}{\partial x}$ le gradient de $g(x) = x^2$. L'abscisse à l'itération

$$n + 1 \text{ sera } x_{n+1} = x_n - \varepsilon_n \left[\frac{\partial g(x_n)}{\partial x} \right].$$

ε_n est le pas de gradient à l'itération n .

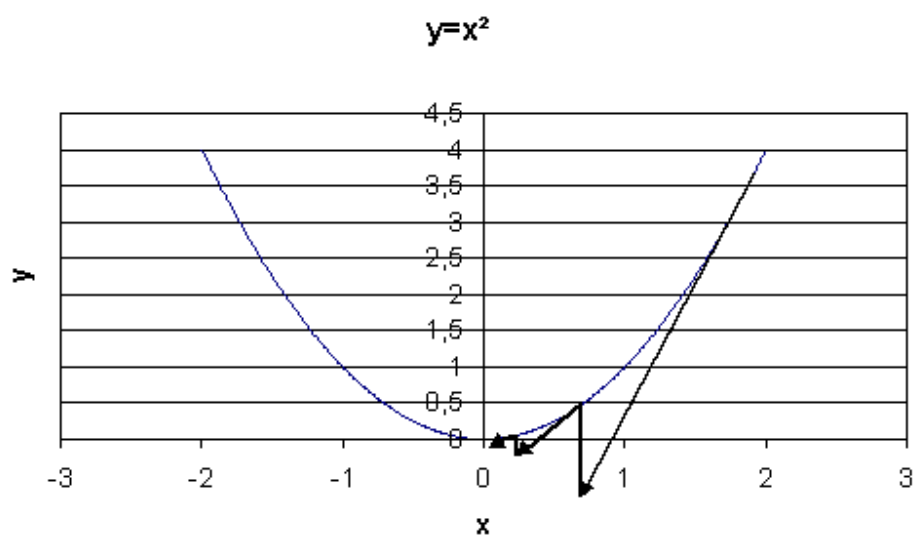


FIGURE 1.6 – La méthode de descente du gradient.

Chapitre 2

Espaces de Sobolev

Sommaire

1	Description mathématique	23
1.1	Dérivation faible	23
1.2	Espace $W^{m,p}$	23
1.3	Espace \mathbb{H}^m	23
1.4	Espace \mathbb{H}_0^1	24
2	Propriétés	24
2.1	Inégalité de Poincaré	24
2.2	Traces	25
2.3	Formule de Green	26
3	Problème de restauration d'image	26
3.1	Existence et unicité de la solution	27

Introduction

Les espaces de Sobolev jouent un rôle important en analyse fonctionnelle et la théorie d'équations aux dérivées partielles.

Dans ce chapitre, on va rappeler les définitions des espaces Sobolev ainsi que quelques propriétés fondamentales.

Une application de la résolution d'un problème de restauration d'image est donnée à la fin du chapitre.

1 Description mathématique

1.1 Dérivation faible

Définition 28. On dit que u est dérivable au sens faible dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$, $\exists v_i \in \mathbb{L}^2(\Omega)$, tel que $\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, on a :

$$\int_{\Omega} u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x) dx = - \int_{\Omega} v_i(x) \varphi(x) dx.$$

Chaque v_i est appelée la $i^{\text{ème}}$ dérivée partielle faible de u et notée désormais $\frac{\partial u}{\partial x}$.

1.2 Espace $W^{m,p}$

Définition 29. Soient $m \in \mathbb{N}$ et $1 \leq p < +\infty$, l'espace $W^{m,p}(\Omega)$ est défini par

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in \mathbb{L}^p(\Omega) \mid \forall \alpha, |\alpha| \leq m, \partial^\alpha u \in \mathbb{L}^p(\Omega)\},$$

où la dérivée partielle $\partial^\alpha u$ est à prendre au sens faible.

Muni de la norme

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha u\|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

1.3 Espace \mathbb{H}^m

Soient u une fonction qui sont $m \geq 0$ fois dérivables au sens faible et $\alpha \in \mathbb{N}^N$, $|\alpha| = \sum_{i=1}^N \alpha_i$, et pour une fonction u

$$\partial^\alpha u(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_N^{\alpha_N}}(x).$$

Définition 30. Soit $m \in \mathbb{N}$, l'espace $\mathbb{H}^m(\Omega)$ est défini par :

$$\mathbb{H}^m(\Omega) = \{u \in \mathbb{L}^2(\Omega) \mid \forall \alpha, |\alpha| \leq m, \partial^\alpha u \in \mathbb{L}^2(\Omega)\},$$

où la dérivée partielle $\partial^\alpha u$ est à prendre au sens faible.

Muni du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq m} \partial^\alpha u(x) \partial^\alpha v(x) dx.$$

Espace $\mathbb{H}^m(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

Remarque 2. Pour $p = 2$ on note $\mathbb{H}^m := W^{m,2}$.

Théorème 2. Espace $W^{m,p}$ est un espace de Banach pour $1 \leq p \leq \infty$, réflexif pour $1 < p < \infty$.

Démonstration. Voir [?]. □

1.4 Espace \mathbb{H}_0^1

Définition 31. L'espace $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ est défini comme l'adhérence de $C_c^\infty(\Omega)$ dans $\mathbb{H}^1(\Omega)$, muni du produit scalaire de $\mathbb{H}^1(\Omega)$, l'espace $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert, voir [?].

2 Propriétés

2.1 Inégalité de Poincaré

Théorème 3. Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^N bornée dans au moins une direction de l'espace. Il existe une constante $C > 0$ tel que, pour toute fonction $u \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$

$$\int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \leq C \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx.$$

Alors la norme

$$\|u\|_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

équivalente à la norme usuelle induite par celle de $\mathbb{H}^1(\Omega)$.

Démonstration. Soit $u \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$. La première inégalité

$$\|u\|_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)} \leq \|u\|_{\mathbb{H}^1(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u|^2 + |\nabla u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

D'autre part l'inégalité de Poincaré

$$\|u\|_{\mathbb{H}^1(\Omega)}^2 \leq (C+1) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx = (C+1) \|u\|_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)}^2,$$

ce qui prouve que $\|u\|_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)}$ est une norme équivalente à $\|u\|_{\mathbb{H}^1(\Omega)}$. □

Propriétés 2. (*Inégalité de Poincaré-Wirtinger*). Soit un ouvert connexe de classe \mathcal{C}^1 . Alors il existe une constante C telle que pour toute fonction $u \in \mathbb{H}^1(\Omega)$

$$\|u - u_{\Omega}\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}, \quad (2.1)$$

avec

$$u_{\Omega} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u dx.$$

2.2 Traces

Théorème 4. Soit Ω un ouvert borné régulier de classe \mathcal{C}^1 . On définit l'application trace γ_0

$$\mathbb{H}^1(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \rightarrow \mathbb{L}^2(\partial\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\partial\Omega})$$

$$v \mapsto \gamma_0(v) = v|_{\partial\Omega}.$$

Cette application γ_0 se prolonge par continuité en une application linéaire continue de $\mathbb{H}^1(\Omega)$ dans $\mathbb{L}^2(\partial\Omega)$.

En particulier, il existe une constante $C > 0$ telle que, pour toute fonction $u \in \mathbb{H}^1(\Omega)$, on a

$$\|u\|_{\mathbb{L}^2(\partial\Omega)} \leq C \|u\|_{\mathbb{H}^1(\Omega)}.$$

Démonstration. voir [?]. □

Théorème 5. Soit γ_0 l'application trace de $\mathbb{H}^1(\Omega)$ dans $\mathbb{L}^2(\partial\Omega)$. On a l'égalité

$$\mathbb{H}_0^1(\Omega) = \{u \in \mathbb{H}^1(\Omega) \mid \gamma_0(u) = 0\}.$$

Démonstration. Voir [?]. □

2.3 Formule de Green

Définition 32. Soit Ω un ouvert borné régulier de classe C^1 . Si v et u sont deux fonctions de $\mathbb{H}^1(\Omega)$, on a

$$\int_{\Omega} u(x) \frac{\partial v}{\partial x_i}(x) dx = - \int_{\Omega} v(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) dx + \int_{\partial\Omega} u(x') v(x') n_i(x') d\sigma, \quad (2.2)$$

où $n = (n_i)_{1 \leq i \leq N}$ est la normale unité extérieure à $\partial\Omega$ et $d\sigma$ est une l'intégrale de surface.

Théorème 6. Soit Ω un ouvert bornée régulier de classe C^2 . Si $u \in \mathbb{H}^2(\Omega)$ et $v \in \mathbb{H}^1(\Omega)$, on a

$$\int_{\Omega} \Delta u(x) \cdot v(x) dx = - \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}(x') v(x') d\sigma,$$

où $\nabla u = (\frac{\partial u}{\partial x_i})_{1 \leq i \leq N}$ est le vecteur gradient de u , $\frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u \cdot n$ et $d\sigma$ est une l'intégrale de surface.

Démonstration. voir [?]. □

Théorème 7. (Rellich). Si Ω est un ouvert bornée régulier de classe C^1 , alors de toute suite bornée de $\mathbb{H}^1(\Omega)$ on peut extraire une sous suite convergente dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$, on dit que l'injection canonique de $\mathbb{H}^1(\Omega)$ dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$ est compacte.

Exemple 2. Soit $\Omega =]-1, 1[$, la fonction

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(|x| + x) & \text{si } x \in]-1, 1[, \\ x & \text{si } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{si } -1 < x < 0. \end{cases}$$

appartient à $W^{1,p}(\Omega)$ pour tout $1 \leq p \leq \infty$, car

$f \in \mathbb{L}^p(\Omega)$, f est mesurable et $f' \in \mathbb{L}^p(\Omega)$, donc $f \in W^{1,p}(\Omega)$.

Par contre

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{si } -1 < x < 0. \end{cases}$$

Pour tout $1 \leq p \leq \infty$, $H \notin W^{1,p}(\Omega)$, car f' est mesurable, $f' \in \mathbb{L}^p(\Omega)$, mais $f'' \notin \mathbb{L}^p(\Omega)$, alors $f' \notin W^{1,p}(\Omega)$.

3 Problème de restauration d'image

On suppose que le problème de minimisation suivant :

$$\inf_{u \in \mathbb{H}^1} E(u), \quad (2.3)$$

avec

$$E(u) = \|u_0 - Mu\|_{\mathbb{L}^2}^2 + \lambda \|\nabla u\|_{\mathbb{L}^2}^2.$$

Nous supposons que

1. λ sert à contrôler le processus de régularisation.
2. $M : \mathbb{L}^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{L}^2(\Omega)$ est un opérateur continu linéaire.
3. $M.1 \neq 0$.

La deuxième hypothèse signifie que M n'annule pas les constantes.

On s'oppose naturellement pour résoudre ce problème est l'espace $\mathbb{H}^1(\Omega)$.

Sur cet espace, la topologie forte n'a pas de bonnes propriétés de compacité. Donc ce cas on utilise la topologie faible.

3.1 Existence et unicité de la solution

Pour montre existence et unicité de la solution du problème (??) doit vérifiée [?]

3.1.1 Coercivité

Nous posons M^* un adjoint de M tel que

$$\|Mu\|_{\mathbb{L}^2}^2 = \langle Mu, Mu \rangle = M^2 \langle u, u \rangle = M^2 \|u\|_{\mathbb{L}^2}^2$$

et on a $\|u\|_{\mathbb{L}^2} \leq \|u\|_{\mathbb{H}^1}$.

$$\begin{aligned} E(u) &= \|u_0 - Mu\|_{\mathbb{L}^2}^2 + \lambda \|\nabla u\|_{\mathbb{L}^2}^2 \\ &= \|u_0\|_{\mathbb{L}^2}^2 - 2\langle u_0, Mu \rangle + \|Mu\|_{\mathbb{L}^2}^2 + \lambda \|\nabla u\|_{\mathbb{L}^2}^2 \\ &= \|u_0\|_{\mathbb{L}^2}^2 - 2\langle u_0, Mu \rangle + M^2 \|u\|_{\mathbb{L}^2}^2 + \lambda \|\nabla u\|_{\mathbb{L}^2}^2 \\ &= \|u_0\|_{\mathbb{L}^2}^2 - 2\langle M^* u_0, u \rangle + M^2 \|u\|_{\mathbb{L}^2}^2 + \lambda \|\nabla u\|_{\mathbb{L}^2}^2 \\ &\geq \min(M^2, \lambda) (\|u\|_{\mathbb{L}^2}^2 + \|\nabla u\|_{\mathbb{L}^2}^2) - 2\langle M^* u_0, u \rangle + \|u_0\|_{\mathbb{L}^2}^2 \\ &\geq \min(M^2, \lambda) (\|u\|_{\mathbb{L}^2}^2 + \|\nabla u\|_{\mathbb{L}^2}^2) - 2 \|M^* u_0\|_{\mathbb{L}^2} \cdot \|u\|_{\mathbb{L}^2} + \|u_0\|_{\mathbb{L}^2}^2 \\ &\geq \min(M^2, \lambda) (\|u\|_{\mathbb{L}^2}^2 + \|\nabla u\|_{\mathbb{L}^2}^2) - 2 \|M^* u_0\|_{\mathbb{L}^2} \cdot \|u\|_{\mathbb{H}^1} + \|u_0\|_{\mathbb{L}^2}^2 \\ &\geq \min(M^2, \lambda) \|u\|_{\mathbb{H}^1}^2 - 2 \|M^* u_0\|_{\mathbb{L}^2} \cdot \|u\|_{\mathbb{H}^1} + \|u_0\|_{\mathbb{L}^2}^2 \\ &\geq \min(M^2, \lambda) \|u\|_{\mathbb{H}^1}^2 - 2 \left(\frac{\varepsilon}{2} \|u\|_{\mathbb{H}^1}^2 + \frac{1}{2\varepsilon} \|M^* u_0\|_{\mathbb{L}^2}^2 \right) + \|u_0\|_{\mathbb{L}^2}^2 \text{ d'après inégalité de Young,} \end{aligned}$$

donc quand $\|u\|_{\mathbb{H}^1}^2 \rightarrow \infty$, on a $E(u) \rightarrow \infty$.

D'où E est coercivité.

3.1.2 Semi continuité inférieure

Soit une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ faiblement converge vers u , tel que

$$\begin{aligned} E(u_n) &= \|u_0 - Mu_n\|_{\mathbb{L}^2}^2 + \lambda \|\nabla u_n\|_{\mathbb{L}^2}^2 \\ &= \|u_0\|_{\mathbb{L}^2}^2 + \|Mu_n\|_{\mathbb{L}^2}^2 - 2\langle u_0, Mu_n \rangle + \lambda \|\nabla u_n\|_{\mathbb{L}^2}^2 \\ &= \|u_0\|_{\mathbb{L}^2}^2 + \langle Mu_n, Mu_n \rangle - 2\langle u_0, Mu_n \rangle + \lambda \langle \nabla u_n, \nabla u_n \rangle \\ &= \|u_0\|_{\mathbb{L}^2}^2 + \langle Mu_n - 2u_0, Mu_n \rangle + \lambda \langle \nabla u_n, \nabla u_n \rangle. \end{aligned}$$

Et comme $\langle Mu_n - 2u_0, Mu_n \rangle + \lambda \langle \nabla u_n, \nabla u_n \rangle$ tend vers $\langle Mu - 2u_0, Mu \rangle + \lambda \langle \nabla u, \nabla u \rangle$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Donc

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} E(u_n) \geq E(u).$$

D'où E est semi continuité inférieure.

3.1.3 Strictement convexité

Montrons d'abord que $\|u_0 - Mu\|_{\mathbb{L}^2}^2$ est strictement convexe. En effet pour tout $u, v \in \mathbb{H}^1$, $u \neq v$ et $\lambda \in [0, 1]$, on a :

$$\|\lambda(u_0 - Mu) + (1 - \lambda)(u_0 - Mv)\|_{\mathbb{L}^2}^2 < (\lambda \|u_0 - Mu\|_{\mathbb{L}^2} + (1 - \lambda) \|u_0 - Mv\|_{\mathbb{L}^2})^2$$

et par stricte convexité de la fonction $x \mapsto x^2$ on obtient, pour tout $\lambda \in]0, 1[$:

$$(\lambda \|u_0 - Mu\|_{\mathbb{L}^2} + (1 - \lambda) \|u_0 - Mv\|_{\mathbb{L}^2})^2 < \lambda \|u_0 - Mu\|_{\mathbb{L}^2}^2 + (1 - \lambda) \|u_0 - Mv\|_{\mathbb{L}^2}^2$$

En raisonnant de même avec $\|\nabla u\|_{\mathbb{L}^2}^2$, et puisque la somme d'une fonction strictement convexe avec une fonction convexe est strictement convexe, E est strictement convexe.

3.1.4 Équation d'Euler Lagrange

Soient $u, v \in \mathbb{H}^1$.

$$\begin{aligned}
E'(u, v) &= \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{E(u + \alpha v) - E(u)}{\alpha} \\
&= \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{1}{\alpha} (\|u_0 - M(u + \alpha v)\|_{\mathbb{L}^2}^2 + \lambda \|\nabla(u + \alpha v)\|_{\mathbb{L}^2}^2 - \|u_0 - Mu\|_{\mathbb{L}^2}^2 - \lambda \|\nabla u\|_{\mathbb{L}^2}^2) \\
&= \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{1}{\alpha} (\|u_0 - M(u + \alpha v)\|_{\mathbb{L}^2}^2 + \lambda \|\nabla u + \alpha \nabla v\|_{\mathbb{L}^2}^2 - \|u_0 - Mu\|_{\mathbb{L}^2}^2 - \lambda \|\nabla u\|_{\mathbb{L}^2}^2) \\
&= \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{1}{\alpha} (\|u_0 - Mu\|_{\mathbb{L}^2}^2 - 2\langle u_0 - Mu, \alpha Mv \rangle + \alpha^2 \|Mv\|_{\mathbb{L}^2}^2 + \lambda \|\nabla u\|_{\mathbb{L}^2}^2 + \lambda \alpha^2 \|\nabla v\|_{\mathbb{L}^2}^2 \\
&\quad + 2\lambda \langle \nabla u, \alpha \nabla v \rangle - \|u_0 - Mu\|_{\mathbb{L}^2}^2 - \lambda \|\nabla u\|_{\mathbb{L}^2}^2) \\
&= \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{1}{\alpha} (\langle \alpha Mv - 2u_0 + 2Mu, \alpha Mv \rangle + \lambda^2 \langle \alpha \nabla v + 2 \nabla u, \alpha \nabla v \rangle) \\
&= \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \langle \alpha Mv - 2u_0 + 2Mu, Mv \rangle + \lambda^2 \langle \alpha \nabla v + 2 \nabla u, \nabla v \rangle \\
&= \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \langle \alpha Mv, Mv \rangle + \langle 2(Mu - u_0), Mv \rangle + 2\lambda \langle \nabla u, \nabla v \rangle + \lambda \langle \alpha \nabla v, \nabla v \rangle \\
&= \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \langle \alpha M^* Mv, v \rangle + \langle 2M^*(Mu - u_0), v \rangle + 2\lambda \langle \nabla u, \nabla v \rangle + \lambda \langle \alpha \nabla v, \nabla v \rangle \\
&= \langle 2M^*(Mu - u_0), v \rangle + 2\lambda \langle \nabla u, \nabla v \rangle.
\end{aligned}$$

Si u est le minimum de E alors,

$$\forall v \in \mathbb{H}^1(\Omega), \langle 2M^*(Mu - u_0), v \rangle + 2\lambda \langle \nabla u, \nabla v \rangle = 0,$$

donc on a :

$$\forall v \in \mathbb{H}^1(\Omega), 2\langle M^*(Mu - u_0), v \rangle - 2\lambda \langle \Delta u, v \rangle = 0. \quad (2.4)$$

Nous concluons que l'équation d'Euler de Lagrange est équivalence à

$$M^*(Mu - u_0) - \lambda \Delta u = 0.$$

D'après équation (??) de formule de Green, on remplace $u(x)$ par $\Delta u(x)$ et $\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)$ par $v(x)$, cela nous donne :

$$\int_{\Omega} \Delta u(x) \cdot v(x) dx = - \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx + \int_{\partial\Omega} v(x') \nabla u(x') \cdot n(x') d\sigma.$$

D'après (??), on obtient

$$\int_{\partial\Omega} v(x') \nabla u(x') \cdot n(x') d\sigma = 0.$$

Donc $\nabla u(x') \cdot n(x') = 0$ sur $\partial\Omega$, qui est la condition de Neumann. On note cela $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ sur $\partial\Omega$ voir [?].

Théorème 8. *Le problème*

$$\inf_{u \in \mathbb{H}^1} \|u_0 - Mu\|_{\mathbb{L}^2}^2 + \lambda \|\nabla u\|_{\mathbb{L}^2}^2,$$

admet une unique solution u dans $\mathbb{H}^1(\Omega)$.

Démonstration. Nous utilisons une méthode directe du calcul des variations.

La constante C peut varier d'une ligne à l'autre, soit une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de minimisante de $\mathbb{H}^1(\Omega)$, c'est à dire $u_n \rightarrow u_\infty$ quand $n \rightarrow +\infty$, tel que

$$E(u_\infty) = \inf_{u \in \mathbb{H}^1(\Omega)} E(u),$$

il existe une constante C , tel que

$$\|u_0 - Mu_n\|_{\mathbb{L}^2}^2 \leq C \text{ et } \|\nabla u_n\|_{\mathbb{L}^2}^2 \leq C,$$

posons alors $v_n = u_n - w_n$, telle que

$$w_n := \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u_n dx.$$

Puisque w_n est constante (par rapport à variable spatiale $x \in \Omega$) on obtient

$$\int_{\Omega} u_n = \int_{\Omega} v_n.$$

D'après (??) on a

$$\|v_n\|_{\mathbb{L}^2} \leq C \|\nabla v_n\|_{\mathbb{L}^2} \leq C_1 \forall n,$$

et

$$\|u_0 - M(v_n + w_n)\|_{\mathbb{L}^2} \leq C.$$

Puis on écrit $Mw_n = -(u_0 - M(v_n + w_n) + Mv_n - u_0)$.

$$\begin{aligned} \|Mw_n\|_{\mathbb{L}^2} &= \|u_0 - M(v_n + w_n) + Mv_n - u_0\|_{\mathbb{L}^2} \\ &\leq \|u_0 - M(v_n + w_n)\|_{\mathbb{L}^2} + \|Mv_n\|_{\mathbb{L}^2} + \|u_0\|_{\mathbb{L}^2} \\ &\leq \|u_0 - M(v_n + w_n)\|_{2\mathbb{L}} + M^2 \|v_n\|_{\mathbb{L}^2} + \|u_0\|_{\mathbb{L}^2} \\ &\leq C. \end{aligned}$$

Puisque w_n est une fonction constante alors on peut l'écrire sous la forme $w_n = w_n(x_0; y_0)M.1$ où 1 est la fonction constante égale à 1 sur Ω et $w_n(x_0; y_0)$ est la valeur

que w_n prend en n'importe quel point de Ω . L'inégalité $\|Mw_n\|_{\mathbb{L}^2} \leq C$ devient donc $|w_n| \leq \frac{C}{M.1}$. Ce qui donne

$$\|w_n\|_{\mathbb{L}^2} \leq |\Omega| \frac{C^2}{M.1} \leq C_2,$$

donc on a

$$\|u_n\|_{\mathbb{L}^2} \leq \|v_n\|_{\mathbb{L}^2} + \|w_n\|_{\mathbb{L}^2} \leq C_1 + C_2 = C.$$

Donc u_n est bornée.

On peut donc utiliser la compacité, il existe une sous-suite $u_n \rightharpoonup u_\infty$.

On a E est semi continue pour la topologie faible, donc

$$E(u_\infty) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} E(u_n),$$

c'est à dire u_∞ est un minimum de E .

Nous supposons deux solutions u_1 et u_2 , elles vérifient toutes les deux l'équation d'Euler Lagrange.

$$M^*M(u_1 - u_2) = \lambda(\Delta u_1 - \Delta u_2).$$

En multipliant les deux membres par $(u_1 - u_2)$ on a

$$M^*M(u_1 - u_2)^2 = \lambda(\Delta u_1 - \Delta u_2)(u_1 - u_2),$$

et on a

$$\|M(u_1 - u_2)\|^2 = \|\lambda(\Delta u_1 - \Delta u_2)(u_1 - u_2)\|,$$

par formule de Green :

$$\begin{aligned} \lambda \int_{\Omega} (\Delta u_1 - \Delta u_2)(u_1 - u_2) dx &= \lambda \int_{\partial\Omega} (\nabla u_1 - \nabla u_2)(u_1 - u_2) dx - \lambda \int_{\Omega} (\nabla u_1 - \nabla u_2) \nabla (u_1 - u_2) dx \\ &= -\lambda \int_{\Omega} \nabla (u_1 - u_2)^2 dx, \end{aligned}$$

donc

$$\int_{\Omega} \|M(u_1 - u_2)\|^2 = -\lambda \int_{\Omega} \|\nabla (u_1 - u_2)\|^2.$$

$$\implies M(u_1 - u_2) = 0, \nabla(u_1 - u_2) = 0.$$

Donc $u_1 = u_2 + C$ et d'après les hypothèse (1) et (2) en déduire que $u_1 = u_2$.

En déduire la unicité de minimum. □

Conclusion Le problème $(P_1) : \inf\{E(u), u \in \mathbb{H}^1\}$ admet une unique solution caractérisée par l'équation d'Euler Lagrange avec condition de Neumann au bord :

$$\begin{cases} M^*Mu - M^*u_0 - \lambda \Delta u = 0 & \text{sur } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.5)$$

D'après (??) on a

$$M^*Mu - M^*u_0 - \lambda \Delta u = 0, \quad \forall u \in \mathbb{H}_0^1. \quad (2.6)$$

Discrétisation

On résout l'équation (??) numériquement par la méthode de descente de gradient. Cette dernière donne, Voir [?] :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = M^*Mu - M^*u_0 - \lambda \Delta u. \quad (2.7)$$

Le résultat de équation (??) montrent dans le figure suivante qui représentent la restauration d'image.



Image originale

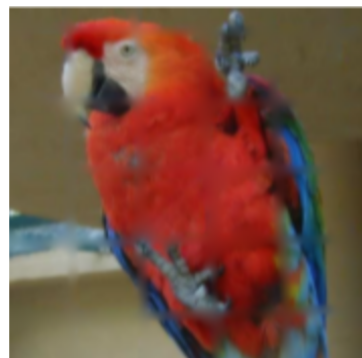


Image observe

FIGURE 2.1 – Image dans espace Sobolev.

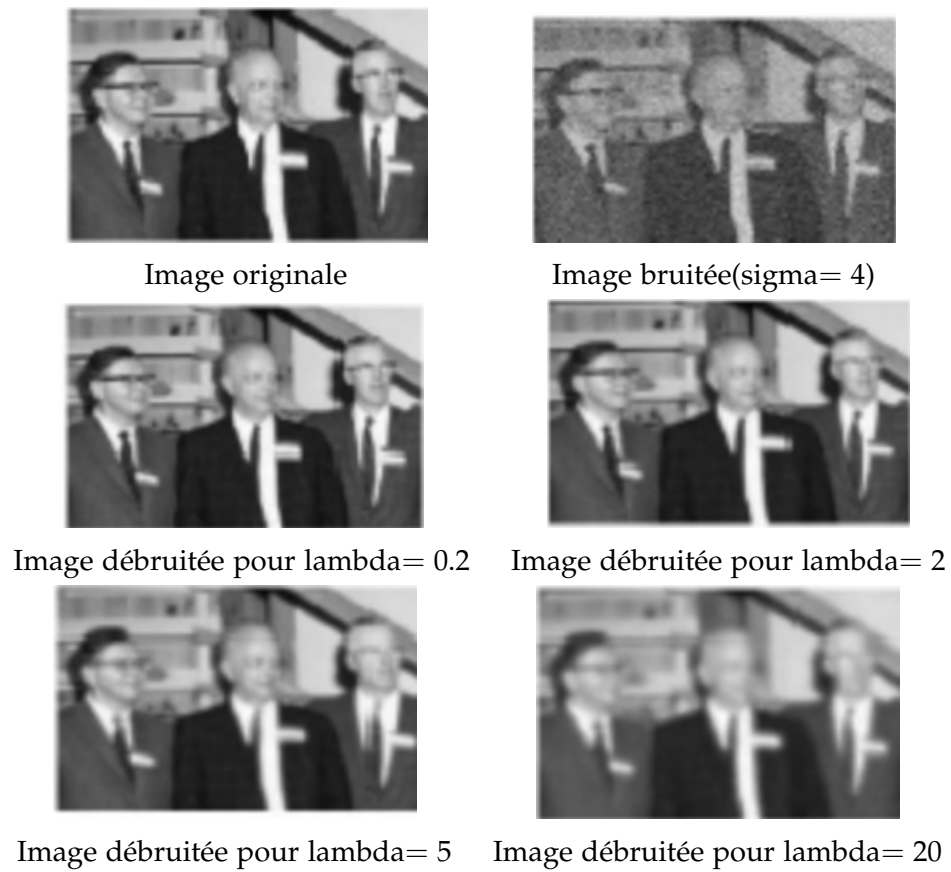


FIGURE 2.2 – Restauration d'image par le modèle de Tikhonov pour différentes valeurs de λ , voir [?].

Chapitre 3

Espace des fonctions à variation bornée

Sommaire

1	Description mathématique	35
2	Propriétés	37
2.1	Semi continuité inférieure	37
2.2	Trace	37
2.3	Topologie faible *	38
2.4	Compacité	38
2.5	Inégalité de Poincaré	38
3	Problème de restauration d'image	39
3.1	Existence et unicité de la solution	39

Introduction

Dans ce chapitre, on va donner nombreux résultats sur l'espace des fonctions à variations bornées désigné BV .

Une application de la résolution d'un problème de restauration d'image est donnée à la fin du chapitre.

1 Description mathématique

On suppose que Ω un ouvert borné de frontière Lipschitzienne de \mathbb{R}^2 .

Définition 33. Soit $u \in \mathbb{L}^1(\Omega)$. On dit que u est une fonction à variation bornée dans Ω si la dérivée au sens des faibles de u est représentée par une mesure de Radon finie $Du = (D_1u, D_2u)$ dans Ω , c'est à dire si

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} \varphi d(D_i u), \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^1(\Omega), \quad i = 1, 2.$$

Voir [?]

L'espace de toutes les fonctions à variation bornée dans Ω est noté par $BV(\Omega)$, et la variation totale de la mesure Du est notée par $|Du|(\Omega)$.

Une définition équivalente de l'espace $BV(\Omega)$ est donnée par :

Définition 34. Soit $u \in \mathbb{L}^1(\Omega)$. On définit la variation totale de la fonction u sur Ω par :

$$TV(u) := \sup \left\{ \int_{\Omega} u \operatorname{div} \varphi dx; \varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in \mathcal{C}_c^1(\Omega), \|\varphi_i\|_{\mathbb{L}^\infty(\Omega)} \leq 1, i = 1, 2 \right\},$$

où

$$\operatorname{div} \varphi = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2}.$$

Proposition 3. Soit $u \in \mathbb{L}^1(\Omega)$. Alors on a l'équivalence suivante $u \in BV(\Omega) \Leftrightarrow TV(u) < \infty$. De plus, $TV(u) = |Du|(\Omega)$ pour tout $u \in BV(\Omega)$.

Remarque

Pour tous $u, v \in BV(\Omega)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, on a clairement

1. $|D(u + v)|(\Omega) \leq |Du|(\Omega) + |Dv|(\Omega)$, et
2. $|D(\alpha u)|(\Omega) = |\alpha| |Du|(\Omega)$.

Donc, la variation totale $|Du|(\Omega)$ est une semi-norme de $BV(\Omega)$. Pour la semi-norme, nous servirons aussi de la notation

$$|u|_{BV(\Omega)} = \int_{\Omega} |Du|(\Omega).$$

Espace $BV(\Omega)$ est un espace de Banach muni de la norme

$$\|u\|_{BV} = \|u\|_{L^1} + |u|_{BV(\Omega)}, \quad u \in BV(\Omega).$$

Exemple 3. Soit u une fonction définie dans $[-1, 1]$ par

$$u(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } -1 \leq x < 0, \\ 1 & \text{si } 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

Alors si $\varphi \in C_c^1(\Omega)$ on a

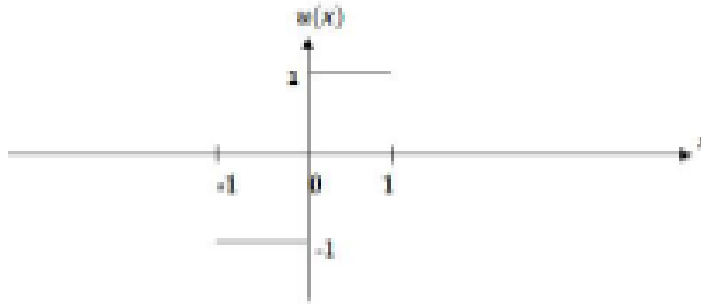


FIGURE 3.1 – La fonction $u(x)$.

$$\int_{-1}^1 u\varphi' = -2\varphi(0).$$

Et donc

$$\int_{-1}^1 |Du| = 2 \text{ car } \|\varphi\|_{\infty} = 1.$$

Donc $u \in BV(\Omega)$.

Exemple 4. Soit g une fonction définie dans $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ par

$$g(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in D, \\ 1 & \text{si } x \in \Omega - D. \end{cases}$$

Telle que

$$D = \{(x, y) \in \Omega \mid \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{2}{3}; \frac{1}{2} \leq y \leq \frac{2}{3}\}.$$

On a $g \in \mathbb{L}^2(\Omega)$, et $g' \notin \mathbb{L}^2(\Omega)$ car n'est pas dérivée au sens faible.

Donc $g \notin \mathbb{H}^1(\Omega)$.

On a $g \in BV(\Omega)$ car

$\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in \mathcal{C}_c^1(\Omega)$, $\|\varphi\|_{\mathbb{L}^\infty(\Omega)} \leq 1$ et $X = (x, y)$.

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} g(X) \operatorname{div} \varphi \, dX \right| &= \left| \int_{\Omega} g(X) \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right) dX \right| \\ &< \infty. \end{aligned}$$

On a $TV(f) < \infty$, donc $f \in BV(\Omega)$.

2 Propriétés

Nous supposons que le bord de Ω est régulier. L'espace de mesure de Radon sur Ω sera noté $\mathcal{M}(\Omega)$. De plus, on dit qu'une suite de mesures $(\mu_n)_n \subset \mathcal{M}(\Omega)$ converge faiblement vers $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$, et on note $\mu_n \rightharpoonup \mu$, si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \varphi d\mu_n = \int_{\Omega} \varphi d\mu, \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^1(\Omega).$$

Alors l'espace BV vérifie [?] :

2.1 Semi continuité inférieure

Soient $u_n \in BV(\Omega)$ et $u_n \xrightarrow{\mathbb{L}^1(\Omega)} u$ alors :

$$|Du|(\Omega) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} |Du_n|(\Omega).$$

2.2 Trace

$$\operatorname{Tr} : BV(\Omega) \rightarrow \mathbb{L}^1(\partial\Omega, \mathbb{H}^{N-1})$$

$$u \mapsto u|_{\partial\Omega},$$

est linéaire continue pour la topologie forte de $BV(\Omega)$.

2.3 Topologie faible *

La topologie fort de $BV(\Omega)$ ne possèdent pas de bonnes propriétés de compacité. On lui préfère une topologie affaiblie notée : $BV - w^*$ et définie par

$$u_n \xrightarrow{BV-w^*} u \iff \begin{cases} u_n \xrightarrow{\mathbb{L}^1} u \\ Du_n \xrightarrow{\mathcal{M}} Du \end{cases}$$

2.4 Compacité

Si $(u_n)_n$ est une suite bornée dans $BV(\Omega)$ alors elle est relativement compact dans $\mathbb{L}^p(\Omega)$ pour $1 \leq p < \frac{N}{N-1}$, $N \geq 2$. Donc, il existe $u \in \mathbb{L}^p(\Omega)$ et une suite extraite $(u_{\varphi(n)})$ telle que $u_{\varphi(n)} \rightarrow u$ dans $\mathbb{L}^p(\Omega)$ pour $1 \leq p < \frac{N}{N-1}$, $N \geq 2$.

De plus, il existe une suite extraite $u_{\psi(n)}$ telle que $u_{\psi(n)} \rightharpoonup u$ dans $BV - w^*$.

L'espace $BV(\Omega)$ s'injecte continument dans $\mathbb{L}^\infty(\Omega)$ si $N = 1$ et dans $L^{\frac{N}{N-1}}(\Omega)$ si $N \geq 2$.

2.5 Inégalité de Poincaré

Théorème 9. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}$ bornée à frontière lipschitzienne. Alors, il existe une constante C_Ω tel que

$$\int_\Omega |u - u_\Omega| dx \leq C_\Omega |Du|(\Omega), \quad \forall u \in BV(\Omega),$$

où u_Ω est une suite des moyennes qui est définie pour un Ω borné de \mathbb{R} , par :

$$u_\Omega = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega u dx, \quad u \in \mathbb{L}^1(\Omega)$$

Théorème 10. (Inégalité de Poincaré-Wirtinger). Le théorème précédente implique

$$\|u - u_\Omega\|_{\mathbb{L}^p(\Omega)} \leq C_\Omega |Du|(\Omega), \quad \forall u \in BV(\Omega), \quad 1 \leq p \leq \frac{N}{N-1}, \quad (3.1)$$

la constante $C_\Omega > 0$ qui dépend seulement de Ω , voir [?].

3 Problème de restauration d'image

On suppose que le problème de minimisation suivant :

$$\inf_{u \in BV} E(u) \quad (3.2)$$

avec

$$E(u) = \frac{\lambda}{2} \|u_0 - Mu\|_{\mathbb{L}^2}^2 + \int_{\Omega} |Du|.$$

sous les hypothèses suivantes :

1. λ sert à contrôler le processus de régularisation.
2. $M : \mathbb{L}^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{L}^2(\Omega)$ est linéaire continue, et $M.1 \neq 0$,
3. η un bruit; $\int_{\Omega} \eta = 0$ et $\sigma^2 = \int_{\Omega} |\eta|^2$ connu,
3. $\|u_0 - \int_{\Omega} u_0\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \geq \sigma$.

Remarque Voir [?], on a $u_0 = \eta + Mu$.

$$\int_{\Omega} |u_0|^2 = \int_{\Omega} |\eta + Mu|^2 = \int_{\Omega} |\eta|^2 + \int_{\Omega} |Mu|^2 + 2 \int_{\Omega} Mu\eta,$$

et puisque le bruit η et Mu sont indépendants, c'est à dire $\int_{\Omega} Mu\eta = 0$, d'où

$$\int_{\Omega} |u_0|^2 = \int_{\Omega} |Mu|^2 + \sigma^2,$$

et

$$\|u_0\|_{\mathbb{L}^2}^2 = \int_{\Omega} |u_0|^2 \geq \sigma^2.$$

De plus, η doit être orthogonale aux fonctions constantes ($\int_{\Omega} \eta = 0$), et aussi pour tout $c \in \mathbb{R}$,

$$\|u_0 - c\|_{\mathbb{L}^2}^2 = \int_{\Omega} |u_0|^2 \geq \sigma^2.$$

Par conséquent,

$$\|u_0 - \int_{\Omega} u_0\|_{\mathbb{L}^2} = \int_{\Omega} |u_0|^2 \geq \sigma.$$

3.1 Existence et unicité de la solution

La constante C peut varier d'une ligne à l'autre. On note par

$$E_0(u) = \int_{\Omega} |Du|,$$

donc

$$E(u) = \frac{\lambda}{2} \|u_0 - Mu\|_{\mathbb{L}^2}^2 + E_0(u).$$

Pour montrer l'existence et l'unicité de la solution du problème (??) doit être vérifiée

3.1.1 Coercivité

Soit $u \in BV(\Omega)$. On décompose u sous la forme $u = v + w$ où

$$w = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u.$$

D'après (??) on a

$$\|v\|_{\mathbb{L}^p(\Omega)} \leq C_1 E_0(v),$$

où $C_1 > 0$, $1 \leq p \leq 2$.

on a

$$\|u\|_{BV} = \|v + w\|_{\mathbb{L}^1} + E_0(v + w) \leq \|w\|_{\mathbb{L}^1} + (C_1 + 1)E_0(v),$$

et on a ·

$$\begin{aligned} \|u_0 - Mv\|_{\mathbb{L}^2} &\leq \|u_0\|_{\mathbb{L}^2} + \|M\| \cdot \|v\|_{\mathbb{L}^2} \\ &\leq \|u_0\|_{\mathbb{L}^2} + \|M\| \cdot C_1 E_0(v). \end{aligned}$$

Il existe $C_2 > 0$ telle que $\|Mw\|_{\mathbb{L}^2} = C_2 \|w\|_{\mathbb{L}^1}$.

$$\begin{aligned} E(u) &= \frac{\lambda}{2} \|u_0 - Mu\|_{\mathbb{L}^2}^2 + E_0(u) \\ &= \frac{\lambda}{2} \|(u_0 - Mv) - Mw\|_{\mathbb{L}^2}^2 + E_0(u) \\ &\geq \frac{\lambda}{2} (\|u_0 - Mv\|_{\mathbb{L}^2} - \|Mw\|_{\mathbb{L}^2})^2 + E_0(u) \\ &\geq \frac{\lambda}{2} \|Mw\|_{\mathbb{L}^2} (\|Mw\|_{\mathbb{L}^2} - 2\|u_0 - Mv\|_{\mathbb{L}^2}) + E_0(u) \\ &\geq \frac{\lambda}{2} C_2 \|w\|_{\mathbb{L}^1} (C_2 \|w\|_{\mathbb{L}^1} - 2(\|u_0\|_{\mathbb{L}^2} + \|M\| \cdot C_1 E_0(v))) + E_0(u). \end{aligned}$$

Si $C_2 \|w\|_{\mathbb{L}^1} - 2(\|u_0\|_{\mathbb{L}^2} + \|M\| \cdot C_1 E_0(v)) \geq 1$, alors $E(u) \geq \frac{\lambda}{2} C_2 \|w\|_{\mathbb{L}^1}$, donc on aura

$$\|u\|_{BV} \leq (C_1 + 1 + \frac{2}{\lambda C_2}) E(u).$$

Si $C_2 \|w\|_{\mathbb{L}^1} - 2(\|u_0\|_{\mathbb{L}^2} + \|M\| \cdot C_1 E_0(v)) < 1$, alors $\|w\|_{\mathbb{L}^1} < \frac{1}{C_2} (1 + 2(\|u_0\|_{\mathbb{L}^2} + \|M\| \cdot C_1 E_0(v)))$, donc

$$\|u\|_{VB} - \frac{1 + 2\|u_0\|_{\mathbb{L}^2}}{C_2} \leq (\frac{2\|M\| \cdot C_1}{C_2} + C_1 + 1) E(u).$$

On déduit que

$$\lim_{\|u\|_{BV} \rightarrow +\infty} E(u) = +\infty.$$

3.1.2 Semi continue inférieure

E est semi-continue inférieurement pour la topologie $BV - w^*$.

3.1.3 Strictement convexe

Pour $\lambda = \frac{1}{2}$, on a E est strictement convexe car :

- $E_0(u)$ est convexe :

$$\begin{aligned} E_0\left(\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v\right) &= \int_{\Omega} \left|D\left(\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v\right)\right| \\ &= \int_{\Omega} \left|\frac{1}{2}Du + \frac{1}{2}Dv\right| \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |Du| + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |Dv| \\ &\leq \frac{1}{2}E_0(u) + \frac{1}{2}E_0(v). \end{aligned}$$

- Si M est injective, $\forall u \neq v$, on a $Mu \neq Mv$, $\|\cdot\|_{\mathbb{L}^2}^2$ est strictement convexe :

$$\begin{aligned} \left\|\frac{1}{2}Mu + \frac{1}{2}Mv\right\|_{\mathbb{L}^2}^2 &= \frac{1}{4}\|Mu\|_{\mathbb{L}^2}^2 + \frac{1}{4}\|Mv\|_{\mathbb{L}^2}^2 + \frac{1}{2}\langle Mu, Mv \rangle \\ &\leq \frac{1}{4}\|Mu\|_{\mathbb{L}^2}^2 + \frac{1}{4}\|Mv\|_{\mathbb{L}^2}^2 + \frac{1}{2}\|Mu\|_{\mathbb{L}^2}\|Mv\|_{\mathbb{L}^2} \\ &< \frac{1}{2}\|Mu\|_{\mathbb{L}^2}^2 + \frac{1}{2}\|Mv\|_{\mathbb{L}^2}^2. \end{aligned}$$

donc $\forall u \neq v$, $E\left(\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v\right) < \frac{1}{2}E(u) + \frac{1}{2}E(v)$.

Théorème 11. *Le problème*

$$\inf_{u \in BV} \frac{\lambda}{2} \|u_0 - Mu\|_{\mathbb{L}^2}^2 + \int_{\Omega} |Du|.$$

une unique solution de u dans $BV(\Omega)$.

Démonstration. Nous utilisons une méthode directe du calcul des variations.

Pour tous $u_0 \in \mathbb{L}^2(\Omega)$ et $\lambda > 0$, on procéde comme suit :

$$E(0) = \frac{\lambda}{2} \|u_0\|_{\mathbb{L}^2}^2 < \infty,$$

et

$$\inf_{u \in BV(\Omega)} E(u) < \infty.$$

Donc, nous pouvons trouver une suite minimisante $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in BV(\Omega)$, telle que

$$E(u_n) = E_0(u_n) + \frac{\lambda}{2} \|u_0 - Mu_n\|_{\mathbb{L}^2}^2 < C, \quad \forall n.$$

Montrons que $\|u_n\|_{\mathbb{L}^1}$ est bornée. Pour cela on va montrer que la suite des moyennes $u_{n,\Omega}$ est bornée, où

$$u_{n,\Omega} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u_n.$$

D'une part (??) on a $\forall n, 1 \leq p \leq 2$,

$$\begin{aligned} \|u_n - u_{n,\Omega}\|_{\mathbb{L}^p} &\leq CE_0(u_n) \\ &< C, \end{aligned}$$

on sait que :

$$\begin{aligned} C &> \|u_0 - Mu_n\|_{\mathbb{L}^2}^2 \\ &= \|u_0 - M(u_n - u_{n,\Omega}) - Mu_{n,\Omega}\|_{\mathbb{L}^2}^2 \\ &\geq (\|u_0 - M(u_n - u_{n,\Omega})\|_{\mathbb{L}^2} - \|Mu_{n,\Omega}\|_{\mathbb{L}^2})^2 \\ &\geq \|Mu_{n,\Omega}\|_{\mathbb{L}^2} (\|Mu_{n,\Omega}\|_{\mathbb{L}^2} - 2\|u_0 - M(u_n - u_{n,\Omega})\|_{\mathbb{L}^2}) \\ &\geq \|Mu_{n,\Omega}\|_{\mathbb{L}^2} (\|Mu_{n,\Omega}\|_{\mathbb{L}^2} - 2(\|u_0\|_{\mathbb{L}^2} + \|M\| \cdot \|u_n - u_{n,\Omega}\|_{\mathbb{L}^2})) \\ &\geq \|Mu_{n,\Omega}\|_{\mathbb{L}^2} (\|Mu_{n,\Omega}\|_{\mathbb{L}^2} - C). \end{aligned}$$

Mais,

$$\|Mu_{n,\Omega}\|_{\mathbb{L}^2} = u_{n,\Omega} \|M.1\|_{\mathbb{L}^2} < C,$$

d'où $(u_{n,\Omega})_{n \in \mathbb{N}}$ est uniformément bornée dans \mathbb{R} . Or pour $1 \leq p \leq 2$, on a

$$\begin{aligned} \|u_n\|_{\mathbb{L}^p} &= \|u_n - u_{n,\Omega} + u_{n,\Omega}\|_{\mathbb{L}^p} \\ &\leq \|u_n - u_{n,\Omega}\|_{\mathbb{L}^p} + \|u_{n,\Omega}\|_{\mathbb{L}^p} \\ &< C. \end{aligned}$$

Donc $\|u_n\|_{\mathbb{L}^1}$ est bornée dans $BV(\Omega)$. D'après le théorème de compacité, il existe une sous-suite, notée encore $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_\infty)_{n \in \mathbb{N}} \in BV(\Omega)$ telle que

$$u_n \xrightarrow{\mathbb{L}^1} u_\infty \text{ et } u_n \xrightarrow{\mathbb{L}^2} u_\infty.$$

Comme M est continue, $Mu_n \rightharpoonup Mu_\infty$ dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$ et

$$\|u_0 - Mu_\infty\|_{\mathbb{L}^2}^2 \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|u_0 - Mu_n\|_{\mathbb{L}^2}^2.$$

En utilisant la propriété de semi-continuité faible de E_0 on obtient

$$E(u_\infty) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} E(u_n),$$

c'est à dire que u_∞ est un minimum de E sur $BV(\Omega)$.

Supposons que u et v sont deux minimises distincts de E dans $BV(\Omega)$. Si M est injective, E est strictement convexe, alors

$$\begin{aligned} E\left(\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v\right) &< \frac{1}{2}E(u) + \frac{1}{2}E(v) \\ &= \inf_{u \in BV} E(u), \end{aligned}$$

ce qui est absurde. Donc, on a unicité de la solution si M est injective. \square

Conclusion Le problème $(P_2) : \inf\{E(u), u \in BV\}$ admet une unique solution caractérisée par l'équation d'Euler Lagrange avec condition de Neumann au bord :

$$\begin{cases} u - u_0 + \frac{1}{2\lambda} \operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right) = 0 & \text{sur } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.3)$$

Discrétisation

On résout l'équation (??) numériquement par la méthode de descente de gradient. Cette dernière donne, voir[?] :

$$\begin{cases} u - u_0 + \frac{1}{2\lambda} \operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right) = \frac{\partial u}{\partial t} & \text{sur } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.4)$$

Le résultat de équation (??) montrent dans le figure suivante qui représentent la restauration d'image.



Image original

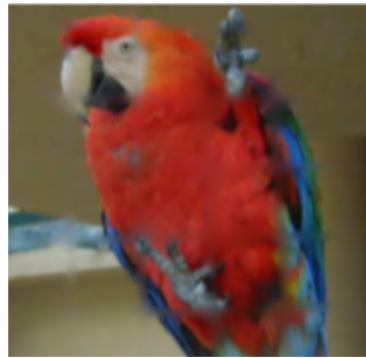


Image dans espace Sobolev



Image dans espace des fonctions à variation bornée

FIGURE 3.2 – Différence entre image dans espace Sobolev et espace des fonctions à variation bornée (inpainting).

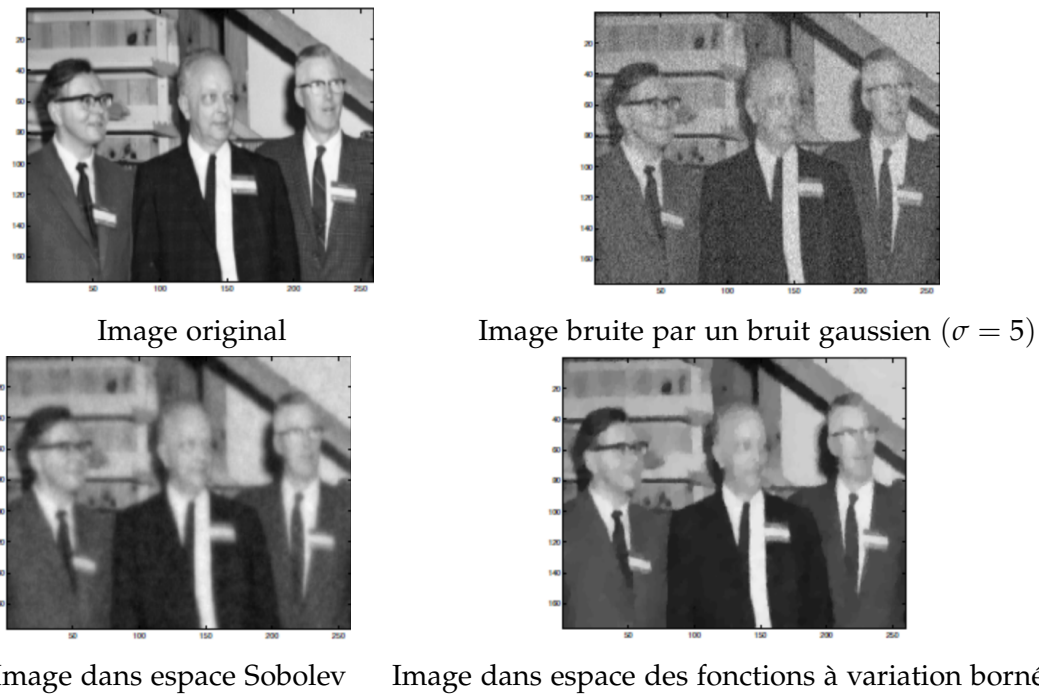


FIGURE 3.3 – Différence entre image dans espace Sobolev et espace des fonctions à variation bornée (Débruitage), voir [?].



Image original



Image convolution



Image déconvolution pour $\lambda = 0.01$

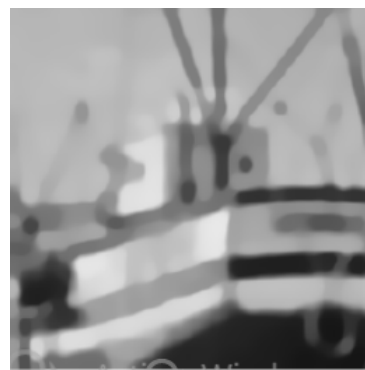


Image déconvolution pour $\lambda = 0.05$

FIGURE 3.4 – Déconvolution par minimisation de ROF pour différentes valeurs de λ , voir [?].

Conclusion

Le traitement d'image est une branche des mathématiques appliqués. Ses applications étaient en restauration et compression d'images.

Dans ce rapport, on s'est intéressés à les espaces fonctionnels en traitement d'image, nous commençons par l'espace Sobolev, nous avons la régularisation de Tychonov qui n'est pas efficace pour les images et ne permet pas de récupérer les bords de l'image

Part contre le deuxième, nous nous intéressons alors aux l'espace BV des fonction à variation bornées. nous avons la régularisation de Rudin-Osher-Fatemi permet de présenter les bords de l'image restaurer.

Annexe

Inégalité d'inclusion

Théorème 12. Soient un ouvert de \mathbb{R}^n , $1 \leq p \leq q \leq \infty$ deux réels et p l'exposant conjugué de q , c'est à dire $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Si $|\Omega| < \infty$ et $f \in L^q(\Omega)$, alors $f \in L^p(\Omega)$ et

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} \leq |\Omega|^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \|f\|_{L^q(\Omega)}.$$

En particulier

$$L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega), \forall 1 \leq p \leq q < \infty$$

Remarque 3. On a

$$L^1(\Omega) \subset L^\infty(\Omega).$$

Propriétés 3. Soit $\Omega = \mathbb{R}^d$ un ouvert régulier. On a les injections continues : pour $k \geq 1$ un entier.

- Si $d > 2k$, alors :
 $H^k(\Omega) \subset L^{p^*}(\Omega)$ avec $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{2} - \frac{k}{d}$.
- Si $d = 2k$, alors :
 $H^k(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, pour tout $q \in [2, \infty[$.
- Si $d < 2k$, alors :
 $H^k(\Omega) \subset \mathcal{C}(\overline{\Omega})$.

Propriétés 4. Théorème de Rellich. Soit $\Omega = \mathbb{R}^d$ un ouvert régulier borné. On a les injections compactes :

- Si $d > 2k$, alors :
 $H^k(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ pour tout $q \in [1, p^*[$, $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{2} - \frac{k}{d}$.
- Si $d = 2k$, alors :
 $H^k(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, pour tout $q \in [1, \infty[$.
- Si $d < 2k$, alors :
 $H^k(\Omega) \subset \mathcal{C}(\overline{\Omega})$.

Si Ω est borné, on a ainsi $H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ (quelque soit la dimension d) avec injection compacte. On rappelle que cela signifie que l'image de tout borné de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est relativement compact

Remarque 4. Pour tout Ω ouvert de \mathbb{R}^n , on a

$$D(\Omega) \subset H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega).$$

Et on a $D(\Omega) \subset D(\overline{\Omega})$ ou $D(\overline{\Omega})$ désigne l'ensemble des restrictions de $\overline{\Omega}$ des fonctions de $D(\mathbb{R}^n)$.

Propriétés 5. Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n tel que $\partial\Omega$ est Lipschitzienne.

- Si $1 \leq p < n$, alors :
 $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q \forall q \in [1, \frac{np}{n-p}]$ avec injection compacte pour $q \in [1, \frac{np}{n-p}[$.
- Si $p = n$, alors :
 $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q \forall q \in [1, \infty[$ et l'injection est compacte.
- Si $p > n$, alors :
 $W^{1,p}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$ avec injection compacte.

Remarque 5. • Si $p = 2$; l'espace $W^{1,2}(\Omega)$ est noté par $H^{1,2}(\Omega)$ ou bien $H^1(\Omega)$.

- Même chose pour $W_0^{1,p}(\Omega)$; on le note par $H_0^{1,2}(\Omega)$ ou bien $H_0^1(\Omega)$.
- On a, $W^{0,p} = L^p$, et $H^0 = L^2$

Remarque 6. • $H_0^1(\mathbb{R}) = H^1(\mathbb{R})$.

- Si $\Omega \neq \mathbb{R}$, $H_0^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$ avec inclusion stricte.
- $H_0^1(\Omega)$ est un fermé de $H^1(\Omega)$.

Remarque 7. On a les inclusions compacte suivante

$$H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega).$$

Remarque 8. Si Ω est bornée et $q > 2$, alors $W^{2,q}(\Omega) \subset W^{1,1}(\Omega)$.

Exemple 5. Pour $u \in W^{1,1}(\Omega)$, la dérivée au sens des distributions Du existe et appartient à $L^1(\Omega)$. Et, pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$, telle que $\|\varphi\|_\infty \leq 1$, on a

$$\int_{\Omega} u \operatorname{div} \varphi dx = \int_{\Omega} Du \cdot \varphi dx \leq \int_{\Omega} |Du| dx < \infty.$$

Donc,

$$W^{1,1}(\Omega) \subset BV(\Omega).$$

En particulier, comme Ω est borné,

$$W^{1,p}(\Omega) \subset BV(\Omega), \forall 1 \leq p \leq \infty.$$

Remarque 9. Si $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, on a

$$BV(\Omega) \subset L^2(\Omega).$$

Bibliographie

- [1] Jean Francois Aujol. *Traitement d images par approches variationnelles et equations aux derivees partielles*. l'ENIT a Tunis, May, 23 2007.
- [2] Gabriel Peyre. *Un exploration numerique du traitement des signaux, des images et des surfaces*. Gabriel Peyre, January, 23,2011.
- [3] Rachid Deriche et Olivier Faugeras. *Les EDP en traitement des images et vision par ordinateur*. INRIA, 1995.
- [4] L.Rudin et S.Osher et E.Fatemi. *Nonlinear total variation based noise removal*. Physica D, 1992.
- [5] A.Chambolle et P.L.Lions. *Numerische Mathematik*. Image recovery via total variation minimization and related problems, Springer Verlag, 1997.
- [6] E.Zeidler. *Nonlinear Functional Analysis and Applications (Variation Methods and Optimisation)*. volume III, Springer-Verlage New York Inc, 1985.
- [7] Fabien PIERRE. *Rapport de projet Etude theaorique de quelques fonctionnelles et EDP utiliseaes en traitement d'images*.
- [8] Jean Francois Le Gall. *Integration, Probabilites et Processus Aleatoires*. Departement Mathematiques et Applications Ecole normale superieure de Paris, Septembre, 2006.
- [9] B.Dacorogna. *Introduction au Calcul des Variations*. Analyse de l integrale de Dirichlet, 2010.
- [10] Gregoire Allaire. *Analyse numerique et optimisation Une introduction a la modelisation mathematique et a la simulation numarique*. Palaiseau Cedex, l'ecole polytechnique, 2006.

- [11] Gilles Aubert Pierre Kornprobst. *Mathematical Problems in Image Processing Partial Differential Equations and the Calculus of Variation*. Springer-Verlage, 2002.
- [12] L.Piffet. *Decomposition image par modele variationnelle Debruitege et extraction de texture*. These de doctorat, Universite d Orleans, 2010.
- [13] GHANNAM CLARA. *Calcul variationnel en restauration et decomposition d'image*. Ghannam Clara, 2009.
- [14] C.Gannam. *Calcul Variationnel En restauration Et Decomposition image*. These de doctorat, La Rochelle, 2009.
- [15] Michael Goldman. *Minimisation singulière pour la restauration d'images*. Mémoire de License effectué sous la direction d'Antonin Chambolle.