La République Algérienne Démocratique Et Populaire
La ministère D'enseignement Supérieur Et De La Recherche Scientifique

Université Djilali Bounaama Khemis Miliana
Faculté De La Science Et De La Technologie
Département De Mathématiques Et Informatique

Mémoire De Master

Présenté dans le but d'obtenir

Diplôme de Master

Spécialité : Analyse Mathématique et Applications

Par

MAZEGHOU FATMA

Titre : Sur un problème fractionnaire aux limites non-locales dans un domaine non-borné.

Devant le jury composé de :

Examinateur :	Hachama Mohamed	Univ. Djilali Bounaama, K. Miliana
Examinateur :	Krelifa Ali	Univ. Djilali Bounaama, K. Miliana
Encadrant :	Benbachir Maamar	Univ. Saad Dahlab, Blida

ANNÉE UNIVERSITAIRE : 2019-2020

Dédicace :

C'est avec une très grande émotion et un immense plaisir que je dédie ce modeste travail .

A mes très chers parents qui m'ont soutenu durant toute la durée de mes études.

A mes sœurs et a tous ceux qui m'aiment et que j'aime.

Remerciements

Avant tout personne, je tiens à remercier **Dieu** le tout puissant, qui m'a donné la force et la patience d'accomplir ce mémoire.

En second lieu, je voudrais tout d'abord remercier mon encadrant **Mr Benbachir Maamar** pour sa précieuse aide, ses orientations et conseils ainsi que le temps qu'il m'a accordé pour mon encadrement.

Je remercie également tous les membres du jury pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail en acceptant de l'examiner et de l'enrichir par leurs propositions.

Enfin, je tiens à remercier toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce mémoire.

Résumé

Ce mémoire est divisé en trois chapitres fondamentaux. Le premier chapitre est consacré aux théorèmes et notions de base du calcul fractionnaire. Le deuxième chapitre est dédié à l'étude de l'existence des solutions positives pour les équations différentielles fractionnaires non-linéaires avec des conditions aux limites fractionnaires non-locales et intégro-différentielles dans un domaine non-borné par le bais du théorème de l'alternative non-linéaire de Leray-Schauder. Le dernier chapitre se focalise sur un modèle mathématique dédié au traitement du cancer par radiothérapie, ce dernier utilise la dérivée fractionnaire de Hadamard, il s'agit d'examiner l'existence et l'unicité de la solution.

Mots clés : Fonction Gamma d'Euler, Fonction Béta d'Euler, Intégral fractionnaire de Riemann, Dérivée fractionnaire de Riemann, Intégral fractionnaire de Hadamard, Dérivée fractionnaire de Hadamard, problème fractionnaire non linéaire.

Abstract

This work is divided into three fundamental chapters. The first chapter is devoted to theorems and basic concepts of fractional calculus. Then the second chapter studied the existence of positive solutions for nolinear fractional differential equations with nolocal fractional boundary conditions and integro-differential in unbounded domain by Leray-Schauder's nolinear alternative theorem. The last chapter deals with a mathematical model dedicated to cancer treatment by radiotherapy, by the use of Hadamard's fractional derivative, it involves examining the existence and uniqueness of the solution.

Keywords : Euler Gamma Function, Euler Beta Function, Riemann Fracional Integral, Riemann Fractional Derivative, Hadamard Fracional Integral, Fractional Devirative of Hadamard, Nonlinear Fractional problem.

Table des matières

Notations

$\Gamma(\cdot) :=$ fonction Gamma d'Euler.

$B(\cdot,\cdot) :=$ fonction Béta d'Euler.

$I_a^\alpha :=$ L'integral fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre α.

${}^{RL}D_a^\alpha :=$ La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre α.

${}^{H}I_a^\alpha :=$ L'integral fractionnaire au sens de Hadamard d'ordre α.

${}^{H}D_a^\alpha :=$ La dérivée fractionnaire au sens de Hadamard d'ordre α.

$D = \dfrac{d}{dt}$.

$L^1[0,1] := \{u : [0,1] \to \mathbb{R}$ est mesurable on $[0,1]$ et $\displaystyle\int_0^1 |u(t)| < \infty\}$.

$\mathcal{C}^k[a,b] := \{u : [0,1] \to \mathbb{R};\ u$ a des derivées continues d'ordre k $\}$.

$\mathcal{C}[a,b] := \mathcal{C}^0[a,b]$.

$\mathcal{C}(\overline{\Omega}) := \{u : \overline{\Omega} \subset X \to X;\ u$ est continue on $\overline{\Omega}\}$.

$X = \{u \in C(J,\mathbb{R}) : sup_{t\in J}\dfrac{\mid u(t) \mid}{1+t^{\alpha-1}}\}$ espace de fonctions.

$J = [0,+\infty)$.

Introduction

Le calcul fractionnaire est devenu très populaire, l'une des raisons de sa popularité est du au comportement non local des opérateurs d'ordre fractionnaire contrairement aux opérateurs d'ordre entier. Cette propriété est à l'origine de l'utilisation de la modélisation fractionnaire en prenant en compte les notions du calcul fractionnaire. Les exemples incluent diverses disciplines scientifiques et techniques. De plus les résultats de certaines expérimentations indiquent que les opérateurs intégraux et dérivées d'ordre fractionnaire possèdent certaines caractéristiques liées aux systèmes complexes ayant une mémoire longue dans le temps. Les problèmes de valeur aux limites des equations différentielles d'ordre fractionnaire ont fait l'objet de recherches approfondies au cours des dernières années et divers résultats sur le sujet ont été établis.

Dans ce mémoire nous étudions une classe de problèmes d'équations différentielles fractionnaires avec des conditions aux limites non locales sur un domaine non-borné. Précisément, nous considérons le problème suivant

$$\begin{gathered} D^{\alpha}u(t) + f(t, u(t)) = 0, \quad 1 < \alpha \leq 2, t \in J = [0, +\infty), \\ I^{2-\alpha}u(0) = 0, \\ D^{\alpha-1}u(+\infty) = \lambda I^{\alpha-1}u(\eta), \quad 0 < \lambda, \eta < \infty. \end{gathered}$$

Il est bien connu, que le cancer est l'un des maladies mortelles du siècle dernier. Des traitements ont été préconisés sous différentes formules, plus exactement, il y a quatre types de traitements conventionnels du cancer à savoir : la chirurgie, la chimiothérapie, la radiothérapie et l'immunothérapie.

Le troisième chapitre sera consacré au traitement par radiothérapie, qui est l'un des plus importants types de traitement contre le cancer. Le but est d'éliminer les cellules cancéreuses par le rayonnement.

La prolifération des cellules cancéreuses sont ciblées. Toutefois, la reproduction des cellules normales environnantes est affectée lorsque les cellules cancéreuses sont exposées au rayonnement.

La modélisation mathématique est très importante pour analyser les problèmes du monde réel afin de trouver des méthodes de qualités

Bilostotski, a fourni un modèle représentant l'interaction entre les cellules normales et cancéreuses. Le rayonnement d'entré dans le corps est d'une grande importance et se produit de quatre types différents, motivé en particulier par l'un de ces travaux, le troisième chapitre s'intéresse à l'existence de solutions pour la dérivée fractionnaire au sens de Hadamard, concrètement nous étudions le système suivant d'équations différentielles fractionnaires puis le traitement du cancer, le modèle est donné par

$$\begin{gathered}
\frac{\psi\rho(t)}{dt} = \alpha_1\rho\left(1-\frac{\rho}{S_1}\right) - \beta_1\rho\alpha - \varepsilon D(t)\rho \\
\frac{d\alpha(t)}{dt} = \alpha_2\alpha\left(1-\frac{\alpha}{S_2}\right) - \beta_2\rho\alpha - D(t)\alpha \\
\rho(0) = \rho_0, \alpha(0) = \alpha_0.
\end{gathered}$$

Chapitre 1

Theorèmes et notions de base

Contents

1.1 Préliminaires en calcul fractionnaire

1.1.1 La fonction Gamma

Une des fonctions de base du calcul fractionnaire [1], la fonction Gamma $\Gamma(z)$ qui généralise le factoriel, $n!$.

Definition 1.1.1 *La fonction Gamma* (Γ) *est définie comme suit :*

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt. \tag{1.1}$$

Theoreme 1.1.1 *La fonction* $\Gamma(\alpha)$ *est convergente pour* $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$.

Exemple 1.1.1 *En évaluant* $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ *par définition 1.1.1*

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-t} dt.$$

puis on utilise le changement de variable suivant $t = s^2$,

$$dt = 2sds,$$

où

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{s} e^{-s^2} 2sds \\ &= 2\int_0^{+\infty} e^{-s^2} ds. \end{aligned}$$

Calculer $\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2$, *on trouve*

$$\begin{aligned} \left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 &= \left[2\int_0^{+\infty} e^{-s^2} ds\right]^2 \\ &= \left[2\int_0^{+\infty} e^{-s^2} ds\right]\left[2\int_0^{+\infty} e^{-z^2} dz\right] \\ &= 4\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-\left(z^2+s^2\right)} dzds, \end{aligned}$$

pour

$$\begin{cases} z = r\cos\theta \\ s = r\sin\theta \end{cases}, r \in \left[0, +\infty\right[, \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

1. Léonarde Euler (1707-1783) c'était un Suisse mathématicien, physicien, astronome, logicien et ingénieur qui a des importants et influents découverts dans de nombreuses branches des mathématiques, comme le calcul infinitésimal et la théorie des graphes, tout en mettant a contribution innovatrice a plusieurs branches telles que la topologie et la théorie analytique des nombres

on va obtenir

$$\begin{aligned}
\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 &= 4\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{r=0}^{+\infty} e^{-r^2} r dr d\theta \\
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[-\frac{e^{-r^2}}{2}\right]_0^{+\infty} d\theta \\
&= 4\left[-\frac{e^{-r^2}}{2}\right]_0^{+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \\
&= \pi \\
&\Rightarrow \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.
\end{aligned}$$

Quelques propriétés de la fonction Gamma

Les propriétés basiques de la fonction Gamma :

1. La fonction $\Gamma(\alpha)$ vérifie la propriété suivante :

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha). \tag{1.2}$$

Puis on a

$$\Gamma(\alpha+1) = \int_0^\infty e^{-t}t^\alpha dt = -\left[e^{-t}t^\alpha\right]_0^\infty + \alpha\int_0^\infty e^{-t}t^{\alpha-1}dt = \alpha\Gamma(\alpha). \tag{1.3}$$

2. La suite des valeurs particulières pour la fonction Γ peut être utile pour finir le calcul :

$$\begin{aligned}
\Gamma(n+1) &= n!, \\
\frac{1}{\Gamma(0)} &= 0, \\
\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) &= -2\sqrt{\pi}, \\
\Gamma\left(\frac{-3}{2}\right) &= \frac{4}{3}\sqrt{\pi}, \\
\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) &= \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \\
\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) &= \frac{3\sqrt{\pi}}{4}.
\end{aligned}$$

1.1.2 La fonction Béta

Definition 1.1.2 *La fonction Béta d'Euler est définie par :*

$$B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt,$$

où

$$\mathrm{Re}(p) > 0 \textit{ et } \mathrm{Re}(q) > 0.$$

Quelques propriétés de la fonction Béta

Les propriétés basiques de la fonction Béta sont :

1. Pour tout $\mathrm{Re}(p) > 0$ and $\mathrm{Re}(q) > 0$, on a :

$$B(p, q) = B(q, p).$$

Puis on utilise le changement de variable suivant $t = 1 - s$

$$B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt = -\int_1^0 (1-s)^{p-1}s^{q-1}ds = \int_0^1 s^{q-1}(1-s)^{p-1}ds = B(q,p).$$

2. Pour tout $\mathrm{Re}(p) > 0$ and $\mathrm{Re}(q) > 0$, qui vérifié l'identité :

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Puis on utilise la définition 1.1.1 on obtient

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \int_0^\infty e^{-t}t^{p-1}dt \int_0^\infty e^{-s}s^{q-1}ds = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(t+s)}t^{p-1}s^{q-1}dtds = \int_0^\infty \int_0^\infty F(t,s)dtds.$$

Maintenant, nous appliquons le changement de variables $t = xy = \phi(x, y)$ et $s = x(1-y) = \psi(x, y)$ pour cette intégral double.

Notons que $t+s = x$ et que $0 < t < \infty$ et $0 < s < \infty$ implique que $0 < x < \infty$ et $0 < y < 1$.

Le Jacobien de cette transformation est

$$Jac = \begin{vmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial x} & \frac{\partial\phi}{\partial y} \\ \frac{\partial\psi}{\partial x} & \frac{\partial\psi}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & x \\ 1-y & -x \end{vmatrix} = -xy - x + xy = -x.$$

Puis $x > 0$ nous conclurons que

$$dtds = |Jac|dxdy = xdxdy.$$

Donc on a

$$\begin{aligned} \Gamma(p)\Gamma(q) &= \int_0^1 \int_0^\infty F(\phi(x,y), \psi(x,y))|Jac|dxdy \\ &= \int_0^1 \int_0^\infty e^{-x}x^{p-1}y^{p-1}x^{q-1}(1-y)^{q-1}xdxdy \\ &= \int_0^\infty e^{-x}x^{p+q-1}dx \int_0^1 y^{p-1}(1-y)^{q-1}dy \\ &= \Gamma(p+q)B(p,q). \end{aligned}$$

1.1.3 L'opérateur intégral et différentiel de Riemann-Liouville

Definition 1.1.3 *Soit $u(t)$ une fonction continue, pour tout $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$, l'intégral fractionnaire d'ordre α au sens de Riemann*[a]*Liouville*[b] *est définie :*

$$I_a^{\alpha} u(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} u(s) ds, \quad -\infty \leq a < t < \infty. \tag{1.4}$$

a. B. Riemann (1826-1866) c'était un mathématicien Allemand qui a fait des contributions a l'analyse, la théorie des nombres et de la géométrie différentielle.

b. J. Liouville (1809-1882)c'était un mathématicien français, connu par son travail dans l'analyse, la géométrie différentielle et la théorie des nombres.

Exemple 1.1.2 *Nous considérons la fonction $u(t) = (t-a)^{\beta}$ et nous allons calculer son intégral d'ordre α ou $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$*

$$I_a^{\alpha} (t-a)^{\beta} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} (s-a)^{\beta} ds. \tag{1.5}$$

Nous supposons le changement de variable $s = a + (t-a)\tau$ on obtient :

$$ds = (t-a)d\tau,$$

$$s = a \Longrightarrow \tau = 0,$$

$$s = t \Longrightarrow \tau = 1.$$

Alors

$$\begin{aligned} I_a^{\alpha} (t-a)^{\beta} &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-a+(t-a)\tau)^{\alpha-1} (a+(t-a)\tau-a)^{\beta} (t-a) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (t-a)^{\alpha-1} (1-\tau)^{\alpha-1} (t-a)^{\beta} \tau^{\beta} (t-a) d\tau \\ &= \frac{(t-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1} \tau^{\beta} d\tau \\ &= \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+\beta+1)} (t-a)^{\alpha+\beta} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} (t-a)^{\alpha+\beta}. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Corollaire 1.1.1 *Soit u une fonction continue de deux variables (s, z), nous avons la prochaine égalité de Dirichlet*[2]

$$\int_a^t \int_a^s u(s,z) \, \mathrm{d}z \mathrm{d}s = \int_a^t \int_z^t u(s,z) \, \mathrm{d}s \mathrm{d}z.$$

2. J.P.G.L. Dirichlet (1805–1859) c'était un mathématicien Allemand qui a fait des profondes contributions a la théorie des nombres et la théorie des séries de Fourier et d'autre sujets d'analyse mathématique.

Si u ne dépend pas de s, mais sur z seulement (voir le domaine d'intégration dans la figure 1.1) :

$$\begin{aligned}\int_a^t \int_a^s u(z)\,\mathrm{d}z\mathrm{d}s &= \int_a^t \int_z^t u(z)\,\mathrm{d}s\mathrm{d}z = \int_a^t u(z) \int_z^t \mathrm{d}s\mathrm{d}z \\ &= \int_a^t u(z)(t-z)\,\mathrm{d}z.\end{aligned} \tag{1.7}$$

Lorsque la durée indéterminée de la limite de l'intégration vient d'abord, (1.7) *devient (Figure 1.1)*

$$\begin{aligned}\int_t^a \int_s^a u(z)\,\mathrm{d}z\mathrm{d}s &= \int_t^a \int_t^z u(z)\,\mathrm{d}s\mathrm{d}z = \int_t^a u(z) \int_t^z \mathrm{d}s\mathrm{d}z \\ &= \int_t^a u(z)(z-t)\,\mathrm{d}z.\end{aligned} \tag{1.8}$$

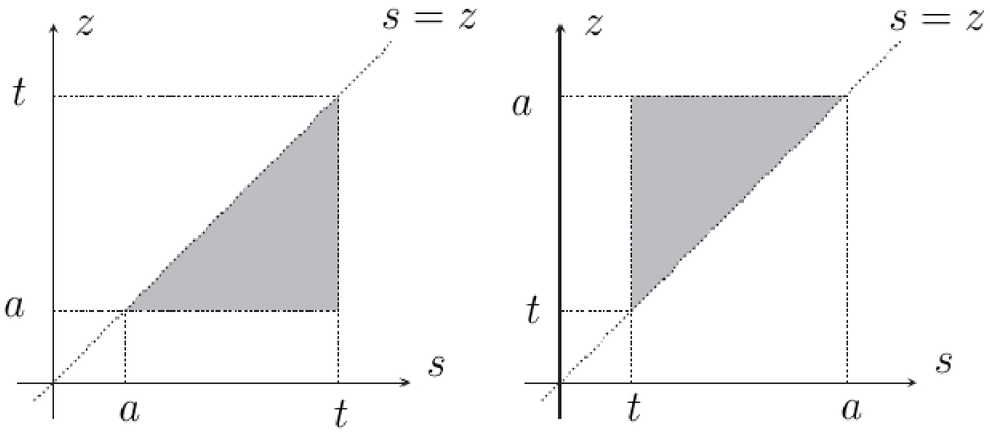

Figure 1.1 – Gauche : le domaine d'intégration de (1.7) ; droite : le domaine d'intégration de (1.8)

Definition 1.1.4 *Soit $m-1<\alpha<m$ avec $m \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, on appelle dérivée d'ordre α au sens de Riemann-Liouville la fonction définie par*

$$\left({}^{RL}D_a^{\alpha} f\right)(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^m \left[\left(I^{m-\alpha} f\right)(x)\right]. \tag{1.9}$$

Exemple 1.1.3 *On calcule la dérivée fractionnaire d'ordre α au sens de Riemann-Liouville de $f(x)=(x-a)^{\beta}$*

$${}^{RL}D_a^{\alpha}(x-a)^{\beta} = \left(\frac{d}{dx}\right)^m \left[I^{m-\alpha}(x-a)^{\beta}\right].$$

On a vu l'expression de l'intégrale d'ordre α de cette fonction ,donc pour l'ordre $m-\alpha$ on obtient

$$I_a^{m-\alpha}(x-a)^{\beta} = \frac{1(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+m-\alpha)}(x-a)^{\beta+m-\alpha},$$

alors

$$
\begin{aligned}
{}^{RL}D_a^{\alpha}(x-a)^{\beta} &= \left(\frac{d}{dx}\right)^m \left[\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+m-\alpha)}(x-a)^{\beta+m-\alpha}\right] \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+m-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^m (x-a)^{\beta+m-\alpha} \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+m-\alpha)}\frac{\Gamma(\beta+m-\alpha+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(x-a)^{\beta-\alpha} \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(x-a)^{\beta-\alpha}.
\end{aligned}
$$

Car

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{d}{dx}\right)^m (x-a)^{\beta+m-\alpha} &= (\beta+m-\alpha)(\beta+m-\alpha-1))\dots(\beta+m-\alpha-(m-1))(x-a)^{\beta-\alpha} \\
&= \frac{(\beta+m-\alpha)!}{(\beta+m-\alpha-m)!}(x-a)^{\beta-\alpha} \\
&= \frac{\Gamma(\beta+m-\alpha+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(x-a)^{\beta-\alpha}
\end{aligned} \tag{1.10}
$$

$$
\Longrightarrow {}^{RL}D_a^{\alpha}(x-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(x-a)^{\beta-\alpha}. \tag{1.11}
$$

Exemple 1.1.4 *Maintenant,on aura la dérivée d'ordre α d'une fonction constante, d'après l'exemple précédent, on prendre $\beta = 0$ on obtient*

$$
{}^{RL}D_a^{\alpha}(x-a)^{0} = {}^{RL}D_a^{\alpha}1 = \frac{\Gamma(0+1)}{\Gamma(0-\alpha+1)}(x-a)^{0-\alpha}
$$

$$
{}^{RL}D_a^{\alpha}1 = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}(x-a)^{-\alpha}. \tag{1.12}
$$

Ce qui veut dire que la dérivée d'une constante au sens de Riemann-Liouville n'est pas nulle.

1.1.4 L'opérateur intégral et différentiel de Hadamard

Definition 1.1.5 *Soit u une fonction continue sur [a,b] à valeurs dans $\mathbb{R}$ avec $0 < a \leq b \leq \infty$ et $\alpha > 0$. L'intégrale fractionnaire d'ordre α au sens de Hadamard de u est définie par*

$$
\mathrm{I}_a^{\alpha}u(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \left(\ln\frac{x}{t}\right)^{\alpha-1}\frac{u(t)}{t}dt; a < x < b, \tag{1.13}
$$

où Γ est la fonction Gamma d'Euler.

Quelques propriétés

Proposition 1.1.1 *Soient f et g deux fonctions continues sur [a,b] à valeurs dans $\mathbb{R}$.*
$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \forall \alpha > 0$ *on a :*

$$I_a^\alpha \left(\lambda_1 f(x) + \lambda_2 g(x)\right) = \lambda_1 I_a^\alpha f(x) + \lambda_2 I_a^\alpha g(x).$$

Proposition 1.1.2 *Soit $f : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, $f \in \mathrm{L}^p([a, b])$.*
$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$, *on a :*

$$\begin{aligned} I_a^\alpha I_a^\beta f(x) &= I_a^{\alpha+\beta} f(x) \\ &= I_a^\beta I_a^\alpha f(x). \end{aligned} \tag{1.14}$$

Preuve

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$ on a :

$$I_a^\alpha I_a^\beta f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \int_a^t \left(\ln \frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} \left(\ln \frac{t}{s}\right)^{\beta-1} \quad f(s) \frac{ds}{s} \frac{dt}{t}. \tag{1.15}$$

On remarque que :

$a \leq t \leq x$

et $a \leq s \leq t$.

Donc, on prend $s \leq t \leq x$.

Puis, on pose le changement de variable :

$$Y = \frac{\ln\left(\frac{t}{s}\right)}{\ln\left(\frac{x}{s}\right)}. \tag{1.16}$$

On obtient alors :

$$I_a^\alpha I_a^\beta f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \left[\int_s^t \left(\ln \frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} \left(\ln \frac{t}{s}\right)^{\beta-1} f(s) \frac{dt}{t}\right] \frac{ds}{s}. \tag{1.17}$$

On remplace (1.16) dans (1.17), on obtient :

$$\begin{aligned} &\textstyle\int_s^t \left(\ln \frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} \left(\ln_s^t\right)^{\beta-1} f(s) \frac{dt}{t} = \int_0^1 \left[\ln x - y \ln \frac{x}{s} - \ln s\right]^{\alpha-1} \left[y \ln \frac{x}{s} + \ln s - \log s\right]^{\beta-1} \\ &\qquad \textstyle\ln\left(\frac{x}{s}\right) dy \\ &= \textstyle\int_0^1 \left((1-y)^{\alpha-1} y^{\beta-1}\right) \left(\ln \frac{x}{s}\right)^{\alpha+\beta-1} dy \\ &= \mathrm{B}(\alpha, \beta) \left(\ln \frac{x}{s}\right)^{\alpha+\beta-1} \\ &= \textstyle\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \left(\ln \frac{x}{s}\right)^{\alpha+\beta-1} \end{aligned}$$

égalité (1.15) devient :

$$\begin{aligned} I_a^\alpha I_a^\beta f(x) &= \frac{\mathrm{B}(\alpha,\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \left(\ln\left(\frac{x}{s}\right)\right)^{\alpha+\beta-1} \frac{f(s)}{s} ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^x \left(\ln\left(\frac{x}{s}\right)\right)^{\alpha+\beta-1} \frac{f(s)}{s} ds \\ &= I_a^{\alpha+\beta} f(x). \end{aligned}$$

De la même manière, on trouve :

$$I_a^\beta I_a^\alpha f(x) = I_a^{\alpha+\beta} f(x).$$

D'où la résultat.

■

Exemple 1.1.5 *:*

Soient $\alpha > 0$, $\beta > 0$ *et* $f(t) = \left(\ln\left(\frac{t}{a}\right)\right)^{\beta-1}$

$$I_a^\alpha f(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \left(\ln\left(\frac{t}{a}\right)\right)^{\alpha+\beta-1}. \tag{1.18}$$

En effet,

$$I_a^\alpha \left(\ln\left(\frac{t}{a}\right)\right)^{\beta-1} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \left(\ln\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} \left(\ln\frac{s}{a}\right)^{\beta-1} \frac{ds}{s}. \tag{1.19}$$

Effectuant le changement de variable

$$u = \frac{(\ln\frac{s}{a})}{(\ln\frac{t}{a})}. \tag{1.20}$$

Alors (1.19) devient

$$I_a^\alpha \left(\ln\left(\frac{t}{a}\right)\right)^{\beta-1} = \frac{(\ln\frac{t}{a})^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} u^{\beta-1}. \tag{1.21}$$

En utilisant la définition (1.5) et la propriété (1.4) on aboutit à :

$$\begin{aligned} I_a^\alpha f(t) &= \frac{\mathrm{B}(\beta,\alpha)}{\Gamma(\alpha)} \left(\ln\frac{l}{a}\right) \\ &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\alpha+\beta-1}. \end{aligned}$$

Definition 1.1.6 *Soit f une fonction continue sur $[a, +\infty)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ avec $\alpha > 0$ et $a \leq b \leq \infty$, $\delta = x\dfrac{d}{dx}$.*
La dérivation fractionnaire au sens de Hadamard de la fonction f est définie par :

$$\begin{aligned} \mathrm{D}_a^{\alpha} f(x) &= \delta^n I_a^{n-\alpha} f(x) \\ &= \left(x\frac{d}{dx}\right)^n I_a^{n-\alpha} f(x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(x\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x \left(\ln\frac{x}{t}\right)^{n-\alpha-1} f(t)\frac{dt}{t}. \end{aligned} \tag{1.22}$$

Où $n-1 < \alpha < n$, $n = [\alpha] + 1$.

Une des propriétés importantes qui lie la dérivée fractionnaire au sens de Hadamard avec l'intégrale fractionnaire de Hadamard est la suivante :

Proposition 1.1.3 *Pour $\alpha > 0$ et $f \in C[a, b]$, on a*

$$\mathrm{D}^{\alpha} I^{\alpha} f(t) = f(t). \tag{1.23}$$

La propriété (1.23) signifie que l'opérateur de dérivation fractionnaire au sens de Hadamard est un inverse gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire au sens de Hadamard du même ordre.

1.2 Notions de topologie et d'analyse fonctionnelle

1.3 Critère de compacité

Dans cette section, nous rappelons quelques éléments de base liés a la théorie de compacité. Pour cela, soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux espaces de Banach et $\Omega \subset E$ une partie non vide.

Definition 1.3.1 *Un espace de Banach est un espace vectoriel normé et complet.*

Definition 1.3.2 *On dit qu'un espace vectoriel normé est complet si toute suite de Cauchy est convergente dans cet espace .*

Definition 1.3.3 *Soit une suite* $(U_n)_n \in \mathbb{N}$ *dans un espace normé* $(E, \| \,.\, \|)$ *est dite de Cauchy si :*
$\forall \epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ $\forall p, q \geq N$, $\| U_p - U_q \| \leq \epsilon$.

Definition 1.3.4 *Soient* E *et* F *deux espaces de Banach. On dit que l'opérateur continu* T *est complètement continu s'il transforme tout borné de* E *en une partie relativement compacte de* F.

Definition 1.3.5 *On dit que l'opérateur linéaire* T *est compact de* E *dans* F*, si* T *est continu et que toute partie bornée de* E *est transformée en une partie relativement compact de* F.

Definition 1.3.6 ***Equicontinuité***
Soit (f_n) *une famille de fonctions définies sur l'intervalle* I *a valeurs dans* $\mathbb{R}$.
On dit que la suite (f_n) *est équicontinue si :*

$$\forall x \in \mathrm{I}, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tels que } \forall n \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathrm{I} : |x - y| \leq \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon$$

Definition 1.3.7 *Soit* X *un ensemble quelconque et soit* A *une application de* X *dans lui même.*
On appelle point fixe de A *tout point* $x \in X$*, tel que :* $Ax = x$.

Definition 1.3.8 *Soit* $(E, \|.\|\ )$ *un espace vectoriel normé, une application* $A : E \longrightarrow E$ *est dite contractante s'il existe un nombre* $K \in [0.1[$ *tel que pour tout* $x, y \in E$*, on a :*
$\|A(x) - A(y)\| \leq K\|x - y\|$.

Definition 1.3.9 *Soit* $D \subset I \times E$ *ou* E *est un espace normé. On dit qu'une application* f *est lipschitzienne par apport à la deuxième variable sur* D *si :*
il existe une constante $K > 0$ *telle que :* $\forall (t, x) \in D, \forall (t, y) \in D$

$$\| \ f(t, x) - f(t, y) \ \|_{\mathrm{E}} < \mathrm{K} \ \| \ x - y \ \|_{\mathrm{E}} \ .$$

Si $k < 1$*, alors* f *est contractante.*

1.3.1 Opérateurs compacts

Definition 1.3.10 *Une application $f : \Omega \to F$ est dite compacte si et seulement si*

1. *f est continue*
2. *$f\left(\overline{\Omega}\right)$ est un compact.*

D'autre part, on vérifie sans peine que tout opérateur linéaire borné, envoie un ensemble relativement compact dans un ensemble relativement compact. Donc la propriété de compacité est généralement plus forte que la continuité ; par exemple, l'opérateur identité défini sur un espace de dimention infinie, n'est pas compact, puisqu'il envoie la boule unité dans elle même, or celle-ci n'est pas compacte.

Definition 1.3.11 *Une application $f : \Omega \to F$ est dite complètement continue si et seulement si*

1. *f est continue*
2. *pour tout $B \subset \Omega$ borné $\Rightarrow \overline{f(B)}$ est compact .*

Remarque 1.3.1 *Si f est linéaire, alors f complètement continue $\Leftrightarrow$ f compacte.*

1.3.2 Critère de compacité dans $C([a,b];\mathbb{R})$

Definition 1.3.12 *On dit qu'une fonction d'un sous-ensemble $M \subset C([a,b];\mathbb{R})$ est uniformément bornée, s'il existe une constante $c > 0$ telle que $|x(t)| \leq c$ pour tout x de M et quel soit $t \in [a,b]$.*

Definition 1.3.13 *On dit qu'une fonction d'un sous-ensemble $M \subset C([a,b];\mathbb{R})$ est équicontinue, si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ dépendant uniquement de ε, tel que pour tous $t_1, t_2 \in [a,b]$ satisfaisant à l'inégalité $|t_1 - t_2| < \delta$ et pour toute fonction x de M l'on ait $|x(t_1) - x(t_2)| < \varepsilon$.*

Le Théorème suivant est généralement utilisé pour prouver la compacité d'un opérateur T.

Theoreme 1.3.1 *(Théorème d'Ascoli-Arzelà). Soit $M \subset C([a,b];\mathbb{R})$, M est relativement compact (i.e $\overline{M}$ est compact) si et seulement si :*

1. *M est uniformément borné.*
2. *M est équicontinu.*

Remarque 1.3.2 *Le théorème d'Arzela-Ascoli ne peut être appliqué à l'espace de Banach* $C([a,+\infty[\,;\mathbb{R})$*, ceci étant dû au fait que l'intervalle* $[0,+\infty[$ *n'est pas compact. Le critère de compacité de Corduneanu nous sera utile pour contourner ce problème.*

Soit l'espace de Banach suivant

$$C_l([0,+\infty[\,,\mathbb{R}) = \left\{ y \in C([0,+\infty[\,,\mathbb{R}) : \lim_{t\to+\infty} y(t) \text{ existe} \right\}$$

Theoreme 1.3.2 *Soit* $M \subset C_l([0,+\infty[\,,\mathbb{R})$*. Alors* M *est relativement compact dans* $C_l([0,+\infty[\,,\mathbb{R})$ *si les conditions suivantes sont satisfaites :*

(a). M *est uniformément bornée dans* $C_l([0,+\infty[\,,\mathbb{R})$

(b). Les fonctions appartenant à M *sont presque équicontinues sur* $[0,+\infty[$ *; i.e., équicontinues sur chaque intervalle compact de* $[0,+\infty[$.

(c). Les fonctions de M *sont equiconvergentes ; i.e., Pour tout* $\varepsilon > 0$*, il existe une constante* $T(\varepsilon) > 0$ *telle que*

$$|x(t) - l| < \varepsilon$$

pour tout $t \geq T(\varepsilon)$ *et* $x \in M$.

A partir du théorème ci-dessus nous avons déduit le résultat suivant

Soit l'espace de Banach suivant

$$E = \left\{ u \in C\left([0,+\infty[\,,\mathbb{R}\right) : \sup_{t\in J} \frac{|u(t)|}{1+t^{\alpha-1}} < +\infty \right\},\ 2 < \alpha \leq 3$$

Lemme 1.3.1 *[4] Soit* $M \subset E$ *un ensemble borné. Alors* M *est relativement compact dans* E *si les conditions suivantes sont vérifiées :*

1. *Pour tout* $u \in M$*,* $t \to \frac{u(t)}{1+t^{\alpha-1}}$ *est équicontinu sur tout intervalle compact* $[0,+\infty[$.
2. *Pour tout* $\varepsilon > 0$*, il existe une constante* $T = T(\varepsilon) > 0$ *telle que*

$$\left| \frac{u(t_1)}{1+t_1^{\alpha-1}} - \frac{u(t_2)}{1+t_2^{\alpha-1}} \right| < \varepsilon$$

pour tout $t_1, t_2 \geq T$ *et* $u(t) \in M$.

1.4 Quelques théorèmes de points fixes

Theoreme 1.4.1 ***Contraction de Banach***

Soit E un espace de Banach et $A : E \longrightarrow E$ est un opérateur contractant. Alors, il existe un unique point fixe $x \in E$ tel que $Ax{=}x$.

Theoreme 1.4.2 *voir [4]* ***Leray-Schauder (Alternative non linéaire)*** *Soit C un sous ensemble convexe d'un espace de Banach, et soit U un sous ensemble ouvert de C et $0 \in U$. Alors, toute fonction N tel que $N : \overline{U} \longrightarrow C$ complètement continue a au moins une des deux propriétés suivantes :*

(1)- N a un point fixe dans $\overline{U}$.

(2)- Il existe $x \in \partial u$ et $\lambda \in (0.1)$ tel que : $x = \lambda N x$.

Chapitre 2

Problème Non Linéaire D'équations Différentielles Fractionnaires Sur Un Domaine Non Borné.

Contents

Problème Non Linéaire D'équations Différentielles Fractionnaires Sur Un Domaine Non Borné

Les problèmes différentiels à conditions non-locales dans des domaines non-bornés ont été abordés par plusieurs auteurs.
Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'étude d'un problème différentiel d'ordre fractionnaire avec des conditions initiales non-locales dans un domaine non-borné. Ce chapitre est structuré comme suit :
Dans la première section, nous étudions l'existence et l'unicité de solution. Nous montrons a l'aide de lemme 2.2.3 et de théorème de l'alternative non-linaire de Leray-schauder 1.4.2, que sous certaines hypothèses nous obtiendrons l'existence et l'unicité d'une solution pour notre problème.
Dans la deuxième section, et par l'application de même théorème nous montrons que notre solution est positive. Finalement on donne un exemple illustratif.

2.1 Problématique

Cette section est consacrée a l'étude de l'existence et l'unicité de la solution d'un problème sur les équations différentielles fractionnaires avec des conditions aux limites non locales sur des domaines illimités. Précisément, nous considérons le problème suivant :

$$\begin{gathered} D^{\alpha}u(t) + f(t,u(t)) = 0, \quad 1 < \alpha \leq 2, t \in J = [0,+\infty), \\ I^{2-\alpha}u(0) = 0, \\ D^{\alpha-1}u(+\infty) = \lambda I^{\alpha-1}u(\eta), \quad 0 < \lambda, \eta < \infty. \end{gathered} \tag{2.1}$$

Où : D^{α} est la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre α.
I^{α} est l'intégral fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre α.
$f \in (J \times \mathbb{R}; \mathbb{R}^{+})$ une fonction continue.

Pour la suite, on suppose que les hypothèses suivantes sont vérifiées :
H_1 : $\Gamma(2\alpha - 1) > \lambda\eta^{2\alpha-2}$.
H_2 : il existe des fonctions positives a(t) et b(t) définies sur $[0 + \infty)$ et $\exists\rho > 0$ constant, tel que :

$$\begin{gathered} |f(t,u(t))| \leq a(t) + b(t)|u(t)|^{\rho} \\ \int_0^{+\infty} a(t)dt = a^{*} < +\infty \\ \int_0^{+\infty} b(t)\left(1 + t^{\alpha-1}\right)^{\rho} dt = b^{*} < +\infty. \end{gathered} \tag{2.2}$$

2.2 Lemmes

Lemme 2.2.1 *Soient* $\sigma(t) \in C([0,+\infty))$ *et* $\int_0^{+\infty} \sigma(s)ds < +\infty$ *pour* $\Gamma(2\alpha-1) \neq \lambda\eta^{2\alpha-2}$.
Le problème fractionnaire au limite associé au problème (2.1), est donné comme :

$$\begin{aligned} D^{\alpha}u(t) + \sigma(t) = 0, \quad 1 < \alpha \leq 2, \\ I^{2-\alpha}u(0) = 0, \\ D^{\alpha-1}u(+\infty) = \lambda I^{\alpha-1}u(\eta), \end{aligned} \tag{2.3}$$

admet une seule solution donnée par :

$$u(t) = \int_0^{+\infty} G(t,s)\sigma(s)ds, \tag{2.4}$$

où :

$$G(t,s) = \frac{1}{\Delta}\begin{cases} -\left(\Gamma(2\alpha-1) - \lambda\eta^{2\alpha-2}\right)(t-s)^{\alpha-1} & \\ +\left(\Gamma(2\alpha-1) - \lambda(\eta-s)^{2\alpha-2}\right)t^{\alpha-1}, & s \leq t, s \leq \eta, \\ \left(\Gamma(2\alpha-1) - \lambda(\eta-s)^{2\alpha-2}\right)t^{\alpha-1}, & 0 \leq t \leq s \leq \eta, \\ -\left(\Gamma(2\alpha-1) - \lambda\eta^{2\alpha-2}\right)(t-s)^{\alpha-1} & \\ +\Gamma(2\alpha-1)t^{\alpha-1}, & 0 \leq \eta \leq s \leq t, \\ \Gamma(2\alpha-1)t^{\alpha-1}, & s \geq t, s \geq \eta, \end{cases} \tag{2.5}$$

tel que :

$$\Delta = \Gamma(\alpha)\left(\Gamma(2\alpha-1) - \lambda\eta^{2\alpha-2}\right). \tag{2.6}$$

Lemme 2.2.2 *Soit* $\alpha > 0$ *et* $u \in C(0,+\infty) \cap L(0,+\infty)$ *alors :*
$I^{\alpha}D^{\alpha}u(t) = u(t) + c_1t^{\alpha-1} + c_2t^{\alpha-2} + ... + c_nt^{\alpha-n}$
Pour $c_i \in \mathbb{R}$ *; i=1.n,* $n = [\alpha] + 1$.

Preuve

On a d'après (2.3) et par le lemme 2.2.2 on a :

$$\begin{aligned} D^{\alpha}u(t) = -\sigma(t) \\ I^{\alpha}D^{\alpha}u(t) = -I^{\alpha}\sigma(t) \\ u(t) - c_1t^{\alpha-1} + c_0t^{\alpha-2} = -I^{\alpha}\sigma(t). \end{aligned}$$

Alors

$$u(t) = -I^{\alpha}\sigma(t) + c_1 t^{\alpha-1} + c_0 t^{\alpha-2}. \tag{2.7}$$

Où $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$

• De (2.7) on a :

$$\begin{aligned} I^{\alpha-1}u(t) &= I^{\alpha-1}\left[-I^{\alpha}\sigma(t) + c_1 t^{\alpha-1} + c_0 t^{\alpha-2}\right] \\ &= -I^{2\alpha-1}\sigma(t) + c_1 I^{\alpha-1}t^{\alpha-1} + c_0 I^{\alpha-1}t^{\alpha-2} \\ I^{\alpha-1}u(t) &= -I^{2\alpha-1}\sigma(t) + c_1\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(2\alpha-1)}t^{2\alpha-2} + c_0\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(2\alpha-2)}t^{2\alpha-3}. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Et

$$\begin{aligned} I^{2-\alpha} &= I^{2-\alpha}\left[-I^{\alpha}\sigma(t) + c_1 t^{\alpha-1} + c_0 t^{\alpha-2}\right] \\ &= -I^{2}\sigma(t) + c_1 I^{2-\alpha}t^{\alpha-1} + c_0 I^{2-\alpha}t^{\alpha-2} \\ &= -I^{2}\sigma(t) + c_1\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(2)}t + c_0\Gamma(\alpha-) \\ I^{2-\alpha}u(t) &= -I^{2}\sigma(t) + c_1\Gamma(\alpha-1)t + c_0\Gamma(\alpha-1). \end{aligned} \tag{2.9}$$

Et on a aussi :

$$\begin{aligned} D^{\alpha-1}u(t) &= D^{\alpha-1}[-I^{\alpha}\sigma(t) + c_0 t^{\alpha-2} + c_1 t^{\alpha-1}] \\ &= -I^{1}\sigma(t) + c_0\frac{\Gamma(\alpha-1)}{\Gamma(0)}t + c_1\Gamma(\alpha) \\ D^{\alpha-1}u(t) &= -I^{1}\sigma(t) + c_1\Gamma(\alpha) = c_1\Gamma(\alpha) - \int_0^t \sigma(s)ds. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Et

$$\begin{aligned} D^{\alpha-2}u(t) &= D^{\alpha-2}\left[-I^{\alpha}\sigma(t) + c_1 t^{\alpha-1} + c_0 t^{\alpha-2}\right]. \\ &= D^{\alpha-2}\left[-I^{\alpha}\sigma(t)\right] + c_1 D^{\alpha-2}t^{\alpha-1} + c_0 D^{\alpha-2}t^{\alpha-2}. \\ D^{\alpha-2}u(t) &= -I^{2}\sigma(t) - c_1\Gamma(\alpha-1)t + c_0\Gamma(\alpha-1). \end{aligned} \tag{2.11}$$

En utilisant les conditions aux limites données, dans (2.7)

• D'après (2.9) on a :

$$\begin{aligned} I^{2-\alpha}u(0) &= -I^{2}\sigma(0) + c_0\Gamma(\alpha-1) \\ &= 0 \\ I^{2}\sigma(0) &= c_0\Gamma(\alpha-1). \end{aligned}$$

Ce qui implique qui

$$c_0 = \frac{-I^{2}\sigma(0)}{\Gamma(\alpha-1)},$$

tel que $1 \leq \alpha \leq 2$

Donc c_0=0.

Maintenant on va calculer c_1 :

• D'après (2.8) et (2.10) on a :

$$D^{\alpha-1}u(+\infty) = \lambda I^{\alpha-1}u(\eta)$$

$$c_1\Gamma(\alpha) - I^1\sigma(+\infty) = \lambda\left[-I^{2\alpha-1}\sigma(\eta) + c_1\frac{\Gamma(\alpha)}{2\alpha-1}\eta^{2\alpha-2}\right]$$

$$c_1\Gamma(\alpha) - \int_0^{+\infty}\sigma(s)ds = -\lambda I^{2\alpha-1}\sigma(\eta) + c_1\lambda\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(2\alpha-1)}\eta^{2\alpha-2}.$$

Alors :

$$c_1(\Gamma(\alpha) - \lambda\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(2\alpha-1)}\eta^{2\alpha-2}) = \int_0^{+\infty}\sigma(s)ds - \lambda I^{2\alpha-1}\sigma(\eta) \quad .$$

Donc

$$c_1 = \frac{\int_0^{+\infty}\sigma(s)ds - \lambda I^{2\alpha-1}\sigma(\eta)}{\Gamma(\alpha) - A} \quad .$$

Tel que

$$\begin{aligned} A &= \lambda\int_0^{\eta}\frac{s^{\alpha-1}(\eta-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)}ds \\ &= \lambda\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(2\alpha-1)}\eta^{2\alpha-2} \end{aligned} .$$

$$c_1 = \frac{1}{\Gamma(\alpha)-A}\int_0^{+\infty}\sigma(s)ds - \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)-A}I^{2\alpha-1}\sigma(\eta).$$

$$I^{2\alpha-1}\sigma(\eta) = \int_0^{\eta}\frac{(\eta-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)}\left[\int_0^{s}\frac{(s-x)^{\alpha-1}}{\alpha}\sigma(x)dx\right].$$

On remplace les valeurs de c_0 et c_1 dans (2.7).

$$u(t) = -\int_0^{t}\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\sigma(s)ds - \frac{\lambda t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)-A}I^{2\alpha-1}\sigma(\eta) + \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)-A}\int_0^{+\infty}\sigma(s)ds \quad .$$

On remplace A par sa valeur

$$\begin{aligned} u(t) = &-\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\sigma(s)ds - \frac{\Gamma(2\alpha-1)\lambda t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)\left(\Gamma(2\alpha-1)-\lambda\eta^{2\alpha-2}\right)} \\ &\times \int_0^\eta \frac{(\eta-s)^{2\alpha-2}}{\Gamma(2\alpha-1)}\sigma(s)ds + \frac{\Gamma(2\alpha-1)t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)\left(\Gamma(2\alpha-1)-\lambda\eta^{2\alpha-2}\right)} \\ &\times \int_0^\infty \sigma(s)ds \\ = &\int_0^\infty G(t,s)\sigma(s)ds. \end{aligned} \tag{2.12}$$

telle que G est donnée dans (2.5).

■

Remarque 2.2.1 *On prend en compte l'hypothèse (H_1), la fonction de Green G(t,s) satisfait les propriétés suivantes :*

(1) $G(t,S) \geq 0$,

(2)

$$\frac{G(t,s)}{1+t^{\alpha-1}} \leq \frac{\Gamma(2\alpha-1)}{\Gamma(\alpha)\left[\Gamma(2\alpha-1)-\lambda\eta^{2\alpha-2}\right]} = L. \tag{2.13}$$

On introduit l'espace :

$$X = \left\{ u \in C(J,\mathbb{R}) : \sup_{t\in J} \frac{|u(t)|}{1+t^{\alpha-1}} < +\infty \right\}, \tag{2.14}$$

munit de la norme :

$$\|u\|_X = \sup_{t\in J} \frac{|u(t)|}{1+t^{\alpha-1}}. \tag{2.15}$$

Notons que X est un espace de Banach.

On définit l'opérateur $T : X \longrightarrow X$ *tel que :*

$$Tu(t) = \int_0^\infty G(t,s)f(s,u(s))ds. \tag{2.16}$$

Alors le problème (2.1) admet une solution si l'opérateur T a un point fixe.

Preuve

1.On preuve que $G(t,s) \geq 0$

On sait que

$$G(t,s) = \frac{1}{\Delta} \begin{cases} -\left(\Gamma(2\alpha-1) - \lambda\eta^{2\alpha-2}\right)(t-s)^{\alpha-1} & \\ +\left(\Gamma(2\alpha-1) - \lambda(\eta-s)^{2\alpha-2}\right) t^{\alpha-1}, & s \leq t, s \leq \eta, \\ \left(\Gamma(2\alpha-1) - \lambda(\eta-s)^{2\alpha-2}\right) t^{\alpha-1}, & 0 \leq t \leq s \leq \eta, \\ -\left(\Gamma(2\alpha-1) - \lambda\eta^{2\alpha-2}\right)(t-s)^{\alpha-1} & \\ \quad +\Gamma(2\alpha-1)t^{\alpha-1}, & 0 \leq \eta \leq s \leq t, \\ \Gamma(2\alpha-1)t^{\alpha-1}, & s \geq t, s \geq \eta, \end{cases}$$

Tel que

$$\Delta = \Gamma(\alpha)\left(\Gamma(2\alpha-1) - \lambda\eta^{2\alpha-2}\right).$$

♦On a d'apres (H_1) :

$\Gamma(2\alpha-1) > \lambda\eta^{2\alpha-2}$

$\Gamma(2\alpha-1) - \lambda\eta^{2\alpha-2} > 0$

$\Gamma(\alpha)[\Gamma(2\alpha-1) - \lambda\eta^{2\alpha-2}] > 0$

Donc $\Delta = \Gamma(\alpha)[\Gamma(2\alpha-1) - \lambda\eta^{2\alpha-2}] > 0$ Alors il reste que de montrer :

1^{er} cas : Pour $s \leq t$, $s \leq \eta$,

$\Gamma(2\alpha-1) - \lambda\eta^{2\alpha-2} > 0$

$\Gamma(2\alpha-1) - \lambda(\eta-s)^{2\alpha-2} > 0$

Et $\Gamma(2\alpha-1) - \lambda(\eta-s)^{2\alpha-2} > \Gamma(2\alpha-1) - \lambda\eta^{2\alpha-2}$

$(t)^{\alpha-1} > (t-s)^{\alpha-1}$

$[\Gamma(2\alpha-1) - \lambda(\eta-s)^{2\alpha-2}]t^{\alpha-1} > [\Gamma(2\alpha-1) - \lambda\eta^{2\alpha-2}](t-s)^{\alpha-1}$

$-[\Gamma(2\alpha-1) - \lambda\eta^{2\alpha-2}](t-s)^{\alpha-1} + [\Gamma(2\alpha-1) - \lambda(\eta-s)^{2\alpha-2}](t)^{\alpha-1} > 0$

2^{eme} cas : Pour $0 \leq t \leq s \leq \eta$,

On a $\Gamma(2\alpha-1) - \lambda\eta^{2\alpha-2} > 0$

et $(\eta-s) > 0 \Rightarrow \eta - s < \eta \Rightarrow (\eta-s)^{2\alpha-2} < \eta^{2\alpha-2}$

$\Gamma(2\alpha-1) - \lambda(\eta-s)^{2\alpha-2} > \Gamma(2\alpha-1) - \lambda\eta^{2\alpha-2} > 0$

$\Rightarrow \Gamma(2\alpha-1) - \lambda(\eta-s)^{2\alpha-2} > 0$

$\Rightarrow [\Gamma(2\alpha-1) - \lambda(\eta-s)^{2\alpha-2}]t^{\alpha-1} > 0$

3^{eme} cas : Pour $0 \leq \eta \leq s \leq t$,

$\Gamma(2\alpha-1)-\lambda\eta^{2\alpha-2}<\Gamma(2\alpha-1)$

$(t-s)^{\alpha-1}<t^{\alpha-1}$

$\Rightarrow \Gamma(2\alpha-1)-\lambda\eta^{2\alpha-2}(t-s)^{\alpha-1}<\Gamma(2\alpha-1)t^{\alpha-1}$

$-\Gamma(2\alpha-1)-\lambda\eta^{2\alpha-2}(t-s)^{\alpha-1}+\Gamma(2\alpha-1)t^{\alpha-1}>0$

4eme cas : Pour $s\geq t$, $s\geq\eta$,

On a $\Gamma(2\alpha-1)>0$ et $t^{\alpha-1}>0$ donc $\Gamma(2\alpha-1)t^{\alpha-1}>0$

Donc $G(t,s)\geq 0$.

2.On preuve que

$$\frac{G(t,s)}{1+t^{\alpha-1}}\leq\frac{\Gamma(2\alpha-1)}{\Gamma(\alpha)\left[\Gamma(2\alpha-1)-\lambda\eta^{2\alpha-2}\right]}\triangleq L.$$

1er cas : Pour $s\leq t$, $s\leq\eta$,

On a

$[\Gamma(2\alpha-1)-\lambda(\eta-s)^{2\alpha-2}]\leq\Gamma(2\alpha-1)$ et $\dfrac{t^{\alpha-1}}{1+t^{\alpha-1}}\leq 1$

$\Rightarrow \dfrac{[\Gamma(2\alpha-1)-\lambda(\eta-s)^{2\alpha-2}]t^{\alpha-1}}{1+t^{\alpha-1}}\leq\Gamma(2\alpha-1)$

D'autre part on a

$\Gamma(2\alpha-1)-\lambda\eta^{2\alpha-2}>0$ et $\dfrac{(t-s)^{\alpha-1}}{1+t^{\alpha-1}}>0$

Donc

$\dfrac{[\Gamma(2\alpha-1)-\lambda\eta^{2\alpha-2}](t-s)^{\alpha-1}}{1+t^{\alpha-1}}\geq 0$

Ce qui implique que

$\dfrac{[\Gamma(2\alpha-1)-\lambda(\eta-s)^{2\alpha-2}]t^{\alpha-1}}{1+t^{\alpha-1}}-\dfrac{[\Gamma(2\alpha-1)-\lambda\eta^{2\alpha-2}](t-s)^{\alpha-1}}{1+t^{\alpha-1}}\leq\Gamma(2\alpha-1)$

2eme cas : Pour $0 \leq t \leq s \leq \eta$**,**

d'après le résultat précédant le 2eme cas est bien vérifié.

3eme **cas : Pour** $0 \leq \eta \leq s \leq t$**,**

On a

$$\frac{t^{\alpha-1}}{1+t^{\alpha-1}} \leq 1 \Rightarrow \frac{\Gamma(2\alpha-1)t^{\alpha-1}}{1+t^{\alpha-1}} \leq \Gamma(2\alpha-1)$$

Et on sait que

$$\frac{[\Gamma(2\alpha-1)-\lambda\eta^{2\alpha-2}](t-s)^{\alpha-1}}{1+t^{\alpha-1}} \geq 0$$

Ce qui implique que

$$\frac{\Gamma(2\alpha-1)t^{\alpha-1}}{1+t^{\alpha-1}} - \frac{[\Gamma(2\alpha-1)-\lambda\eta^{2\alpha-2}](t-s)^{\alpha-1}}{1+t^{\alpha-1}} \leq \Gamma(2\alpha-1)$$

4eme **cas : Pour** $s \geq t$**,** $s \geq \eta$**,**

D'après le résultat précédant le 4eme cas est vérifié.

■

Lemme 2.2.3 *Si* (H_1) *et* (H_2) *sont vérifiées, alors l'opérateur* $T : X \longrightarrow X$ *est complètement continu.*

Preuve

On divise la preuve sur deux étapes :

(i) l'opérateur $T : X \longrightarrow X$ est uniformément borné.

Soit Ω un sous ensemble borné de X. Alors, il existe une cte L_1 tel que :

$\| u \|_X \leq L_1$ par (H_2) on a :

$$\begin{aligned}\|Tu\|_X &= \sup_{t\in J}\int_0^\infty \frac{G(t,s)}{1+t^{\alpha-1}}|f(s,u(s))|ds\\ &\leq L\int_0^\infty \left[a(s)+b(s)\left(1+s^{\alpha-1}\right)^\rho \frac{|u(s)|^\rho}{\left(1+s^{\alpha-1}\right)^P}\right]ds \\ &\leq L\left(a^*+b^*L_1^\rho\right)\\ &<\infty.\end{aligned} \tag{2.17}$$

Ce qui preuve que l'opérateur T est uniformément borné sur Ω.

(ii) $T : X \longrightarrow X$ continu :

On prend $u_n, u \in X$, tel que $\| u_n \| < +\infty$, $\|u\|_X < +\infty$ et $u_n \longrightarrow u$ quand $n \longrightarrow +\infty$.

Alors par (H_2), on a :

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{G(t,s)}{1+t^{\alpha-1}}f\left(s,u_n(s)\right)ds &\leq L\int_0^\infty \left[a(s)+b(s)\left|u_n(s)\right|^\rho\right]ds\\ &\leq La^*+Lb^*\left\|u_n\right\|_X^\rho<\infty,\end{aligned} \tag{2.18}$$

où L est définie par (2.13).

Par le théorème de convergence dominante de Lebesgue et la continuité de f on obtient :

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{G(t,s)}{1+t^{\alpha-1}}f\left(s,u_n(s)\right)ds = \int_0^\infty \frac{G(t,s)}{1+t^{\alpha-1}}f(s,u(s))ds, \tag{2.19}$$

tel que $n \longrightarrow +\infty$, on a :

$$\left\|Tu_n - Tu\right\|_X = \sup_{t\in J}\int_0^T \frac{G(t,s)}{1+t^{\alpha-1}}\times\left|f\left(s,u_n(s)\right)-f(s,u(s))\right|ds \longrightarrow 0. \tag{2.20}$$

Donc l'opérateur T est continu.

(iii) $T : X \longrightarrow X$ est équicontinu. On considère deux cas :

a) soit $I \subset J$ un intervalle compact quelconque ; et $t_1, t_2 \in I$ tel que $t_1 < t_2$.

Soit Ω un sous ensemble quelconque borné de X ;alors pour tout $u \in \Omega$, On a :

$$\begin{aligned}&\left|\tfrac{Tu(t_2)}{1+t_2^{\alpha-1}}-\tfrac{Tu(t_1)}{1+t_1^{\alpha-1}}\right|\\ &\quad=\left|\int_0^\infty\left(\tfrac{G(t_2,s)}{1+t_2^{\alpha-1}}-\tfrac{G(t_1,s)}{1+t_1^{\alpha-1}}\right)f(s,u(s))ds\right|\\ &\quad\leq\int_0^\infty\left|\tfrac{G(t_2,s)}{1+t_2^{\alpha-1}}-\tfrac{G(t_1,s)}{1+t_1^{\alpha-1}}\right|\left(a(s)+b(s)\left(1+s^{\alpha-1}\right)^\rho\|u\|_X^\rho\right)ds.\end{aligned} \tag{2.21}$$

Puisque $G(t,S)$ est continue sur $J \times J$, on a $\dfrac{G(t,s)}{1+t^{\alpha-1}}$ est uniformément continue sur un ensemble compact $I \times I$.

De plus, pour $S \geq t$ la fonction considèrée ne dépend que de t, en conséquence elle est uniformément continue sur $I \times (J \times J)$ Alors on a pour tout $S \in J$ et $t_1, t_2 \in I$, la propriété suivante vérifie que :

$\forall \epsilon > 0$, $\exists\ \delta(\epsilon)$, tel que $\mid t_1 - t_2 \mid < \delta \Rightarrow \left| G(t_2, s) / \left(1 + t_2^{\alpha-1}\right) - G(t_1, s) / \left(1 + t_1^{\alpha-1}\right) \right| < \varepsilon$

Et d'aprés (2.21) on a :

$$\int_0^{\infty} \left(a(s) + b(s)\left(1 + s^{\alpha-1}\right)^{\rho} L_1\right) ds < \infty. \tag{2.22}$$

On peut conclure que $T\Omega$ est équicontinue on I.

b) Quand $t \longrightarrow +\infty$ on a :

$$\lim_{t\to\infty} \frac{G(t,s)}{1+t^{\alpha-1}} = \frac{1}{\Delta} \begin{cases} \lambda\eta^{2\alpha-2} - \lambda(\eta - s)^{2\alpha-2}, & s \leq \eta \\ \lambda\eta^{2\alpha-2}, & 0 \leq \eta \leq s. \end{cases} \tag{2.23}$$

Donc, pour $\epsilon > 0$. Il existe un cte $T' = T'(\epsilon) > 0$ tel que :

$$\left| \frac{G(t_1, s)}{1 + t_1^{\alpha-1}} - \frac{G(t_2, s)}{1 + t_2^{\alpha-1}} \right| < \varepsilon \tag{2.24}$$

$\forall t_1, t_2 \geq T'$ et $S \in J$ puis T est équiconvergente en $+\infty$.

Ainsi, la conclusion du lemme 1.3.1 s'applique que T est relativement compact sur J. Donc, $T : X \longrightarrow X$ est complètement continu. Ceci termine la preuve.

■

2.3 Résultats principaux

Theoreme 2.3.1 *supposons que (H_1) et (H_2) sont vérifiées avec $\rho = 1$. Il existe $r > 0$ tel que*

$$r(1 - Lb^*) > La^*. \tag{2.25}$$

Avec L donné par (2.13), alors le problème (2.1) admet une solution u(t) satisfaisant.

$$0 \leq \frac{u(t)}{1 + t^{\alpha-1}} \leq r, \quad \textit{for } t \in J. \tag{2.26}$$

Preuve

Soit $U = \{u \in X, \|X\|_X < r\}$ pour $u \in \partial U$. S'il existe $v \in (0, 1)$ tel que $u = vTu$, alors nous avons

$$\begin{aligned}\|u\|_X &= \sup_{t\in J}\left|\frac{v(Tu)(t)}{1+t^{\alpha-1}}\right| \\ &\le \sup_{t\in J}\int_0^\infty \frac{G(t,s)}{1+t^{\alpha-1}}|f(s,u(s))|ds \\ &\le L\int_0^\infty |a(s)+b(s)u(s)|ds \\ &\le La^* + Lb^*\|u\|_X.\end{aligned} \tag{2.27}$$

Cela implique que

$$r\,(1-Lb^*) \le La^*, \tag{2.28}$$

ce qui contredit (2.25) par le lemme 2.2.3 et le théorème 1.4.2 nous conclurons que le problème (2.1) a une solution u(t) satisfaisant

$$0 \le \frac{u(t)}{1+t^{\alpha-1}} \le r, \quad t \in J. \tag{2.29}$$

Ce qui termine la preuve.

■ Dans le suite, nous formulons l'existence de résultats pour les cas $0 < \rho < 1$ et $\rho > 1$. Nous ne montrons pas la preuve de ces resultats car elle est similaire à celle de théorème 2.3.1. pour cela, nous notons (H_2) avec $0 < \rho < 1$ et $\rho > 1$, respectivement, par (H_3) et (H_4).

Theoreme 2.3.2 *On suppose que les hypothèses (H_1) et (H_3) sont satisfaites. Alors le problème (2.1) admet une solution u(t) qui satisfait.*

$$0 \le \frac{u(t)}{1+t^{\alpha-1}} \le r, \quad t \in J \tag{2.30}$$

où $r > max\{2La^*, (2Lb^*)^{\frac{1}{1-\rho}}\}$ avec L donnée par (2.13).

Theoreme 2.3.3 *On suppose que les hypothèses (H_1) et (H_4) sont satisfaites et qu'il existe $2La^* \le r \le (2Lb^*)^{\frac{1}{1-\rho}}$ avec L donnée par (2.13).Alors le problème (2.1) admet une solution u(t) telle que*

$$0 \le \frac{u(t)}{1+t^{\alpha-1}} \le r, \quad t \in J. \tag{2.31}$$

Exemple 2.3.1 *Avec $\alpha = 3/2$, $\lambda = 1/2$ et $\eta = 1$, nous considérons le problème au limite suivant :*

$$
\begin{aligned}
D^{3/2}u(t) + \tfrac{|u(t)|+\sin u(t)}{8\left(1+t^{1/2}\right)(1+t)^2} + \tfrac{4}{(t+4)^2} = 0, \quad t \in [0,+\infty) \\
I^{1/2}u(0) = 0 \\
D^{1/2}u(+\infty) = \tfrac{1}{2}I^{1/2}u(1).
\end{aligned}
\tag{2.32}
$$

Clairement la condition (H_1) *est vérifiée comme* $\Gamma(2\alpha-1) = \Gamma(2) = 1$, $\lambda\eta^{2\alpha-2} = 1/2$.

Tel que $a(t) = 4/(t+4)^2$, $b(t) = 1/(4(1+t^{1/2})(1+t)^2)$, *on trouve que*

$$
\begin{aligned}
f(t,u(t)) &= \frac{|u(t)|+\sin u(t)}{8\left(1+t^{1/2}\right)(1+t)^2} + \frac{4}{(t+4)^2} \\
&\leq a(t) + b(t)|u(t)| \\
&\int_0^{+\infty} a(t)dt = 1 < +\infty \\
\int_0^{+\infty} \left(1+t^{\alpha-1}\right) b(t)dt &= \frac{1}{4} < +\infty.
\end{aligned}
\tag{2.33}
$$

Ceci montre que (H_2) *est vraie. finalement, en fixant* $r > 1/(\sqrt{\pi}-1)$, *il est facile de vérifier que la condition (2.25) est satisfaite, ainsi toutes les conditions de théorème 2.3.1. De plus, par le théorème 2.3.1 le problème (2.25) admet une solution u(t) telle que :*

$$
0 \leq \frac{u(t)}{1+t^{\alpha-1}} \leq r. \tag{2.34}
$$

Chapitre 3

Un modèle fractionnaire pour le traitement du cancer par radiothérapie

Contents

Un modèle fractionnaire pour le traitement du cancer par radiothérapie

Dans ce chapitre, nous allons étudier l'existence et l'unicité de la solution positive pour un problème fractionnaire pour le traitement du cancer par la radiothérapie , ce chapitre est divisé sur trois section

Dans la première section, nous présentons notre problème fractionnaire avec quelques lemmes et propositions qu'ils nous auront besoin dans la suite.

Dans la deuxième section, nous étudions l'existence de la solution pour notre modèle fractionnaire en utilisant le critère de compacité et le théorème d'Arzela-Ascoli 1.3.1, puis par le théorème 3.2.1 nous montrons la positivité de la solution.

Finalement, la dernière section est consacrée à l'étude de l'unicité de la solution à laide de théorème de contraction de Banach 1.4.1.

3.1 Le modèle fractionnaire

Le modèle fractionnaire pour le traitement du cancer par radiothérapie à l'aide de la dérivée fractionnaire au sens de Hadamard est donné comme :

$$\begin{aligned}
&\frac{d\rho(t)}{dt} = \alpha_1\rho\left(1-\frac{\rho}{S_1}\right) - \beta_1\rho\alpha - \varepsilon D(t)\rho \\
&\frac{d\alpha(t)}{dt} = \alpha_2\alpha\left(1-\frac{\alpha}{S_2}\right) - \beta_2\rho\alpha - D(t)\alpha \\
&\rho(0)=\rho_0, \alpha(0)=\alpha_0.
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Tel que :

• $\rho(t)$ représente la concentration des cellules saines.

• $\alpha(t)$ représente la concentration des cellules cancéreuses.

• D(t) est la stratégie de la radiothérapie, il est supposé que :

D(t)$\equiv\gamma > 0$,quand $t \in [nw; nw + L)$ phase de traitement.

D(t)$\equiv$0 ; quand $t \in [nw + L; (n + 1)w)$ pas de phase de traitement.

$\forall$ n=0,1,2,... ou w est le temps de traitement de la radiothérapie.

♣ Le systéme (3.1) avec la dérivée au sens de Hadamard est donné comme :

$$\begin{aligned}
&{}^{H}D^{r}\rho(t)=\alpha_1\rho\left(1-\tfrac{\rho}{S_1}\right)-\beta_1\rho\alpha-\varepsilon D(t)\rho\\
&{}^{H}D^{r}\alpha(t)=\alpha_2\alpha\left(1-\tfrac{\alpha}{S_2}\right)-\beta_2\rho\alpha-D(t)\alpha\\
&\rho(0)=\rho_0,\alpha(0)=\alpha_0.
\end{aligned}\tag{3.2}$$

Proposition 3.1.1 *Soit $\Re(\alpha)>0, n=[\Re(\alpha)]+1$ et $0<a<b<\infty$. l'égalité $(D_a^{\alpha}f)(x)=0$ est vérifiée si et seulement si*

$$f(x)=\sum_{j=1}^{n}C_j\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-j}.$$

Où $C_j\in\mathbb{R}(j=1,...,n)$ sont des constantes arbitraires.
En particulier, si $0<\Re(\alpha)\le 1$, la relation $(D_a^{\alpha}f)(x)=0$ est satisfaite si et seulement si, $f(x)=C(ln\dfrac{x}{a})^{\alpha-1}$ pour tout $C\in\mathbb{R}$.

Pour montrer la proposition on a besoin du lemme suivant :

Lemme 3.1.1 *Soit $g:(a,b)\to\mathbb{R}$ une fonction et $n\in\mathbb{N}^*$*
Alors $D^n g(x)=0$ si et seulement si

$$g(x)=\sum_{k=0}^{n-1}d_k\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{k}$$

où les d_k sont des constantes réelles pour tout K=0,...,n.

Preuve

Supposons que les hypothèses de la proposition sont satisfaites.
On a,

$$\left(D_a^{\alpha}f\right)(x)=0,$$

signifier que

$$d^n\left(I_a^{n-\alpha}f\right)(x)=0.$$

Alors d'après le lemme précédent, on a

$$\left(I_a^{n-\alpha}f\right)(x)=\sum_{k=0}^{n-1}c_k\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{k},$$

où $c_k \in \mathbb{R}$ pour tout k=1,2,...,n.

On applique l'intégrale fractionnaire de Hadamard d'ordre α aux deux membres de l'équation précédente, on obtient

$$\begin{aligned}\left(I_a^n f\right)(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} c_k \left(I_a^\alpha \left(\ln\frac{t}{a}\right)^k\right)(x)\\ &= \sum_{k=0}^{n-1} c_k \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(\alpha+k+1)}\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha+k+1-1},\\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k!}{\Gamma(\alpha+k+1)} c_k \left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha+k}\end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}f(x) &= d^n \left(I_a^n f\right)(x)\\ &= d^n\left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k!}{\Gamma(\alpha+k+1)} c_k \left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha+k}\right)\\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k!}{\Gamma(\alpha+k+1)} c_k \delta^n \left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha+k} .\\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k!}{\Gamma(\alpha+k+1)} c_k \frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{\Gamma(\alpha+k+1-n)}\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha+k-n}\\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k!}{\Gamma(\alpha+k+1-n)} c_k \left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha+k-n}\end{aligned}$$

Si on pose j=n-k, on obtient

$$\begin{aligned}f(x) &= \sum_{j=1}^{n} \frac{(n-j)!}{\Gamma(\alpha+k-j)} c_{n-j} \left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-j}\\ &= \sum_{j=1}^{n} C_j \left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-j}\end{aligned},$$

Où

$$C_j = \frac{(n-j)!}{\Gamma(\alpha+k-j)} c_{n-j}.$$

Réciproquement, si

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} C_j \left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-j},$$

On applique la dérivée fractionnaire au sens de Hadamard aux deux membres de l'équation précédente, on obtient

$$
\begin{aligned}
(D_a^\alpha f)(x) &= \left(D_a^\alpha \sum_{j=1}^{n} C_j \left(\ln \frac{x}{a} \right)^{\alpha-j} \right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} C_j \left(D_a^\alpha \left(\ln \frac{x}{a} \right)^{\alpha-j} \right). \\
&= 0
\end{aligned}
$$

■

Proposition 3.1.2 *Pour $\alpha > 0$; $f \in C[a,b]$, on a :*

$$D^\alpha I^\alpha f(t) = f(t).$$

Preuve

$D_a^\alpha I^\alpha f = d^n I^{n-\alpha} I^\alpha = d^n I^n f = f.$

■

Lemme 3.1.2 *Soient $u \in C([a,b], \mathbb{R})$ et $\alpha > 0$, on a :*
Alors :

$$^{H}I^{r} \left({}^{H}D^{r} u \right)(t) = u(t) - \sum_{j=1}^{n} c_j \left(\ln \frac{t}{a} \right)^{r-j}$$

où $c_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, 2, ..., n$ et $n-1 < \alpha < n$, $n = [\alpha] + 1$.

Preuve

On a d'après la proposition 3.1.2, on sait que

$$D_a^\alpha I_a^\alpha f = f.$$

Ce qui donne

$$D_a^\alpha I_a^\alpha \left(D_a^\alpha f \right) = D_a^\alpha f.$$

C'est-à-dire

$$D_a^\alpha \left(I_a^\alpha D_a^\alpha f - f \right) = 0.$$

Par suite d'après la proposition 3.1.1, on a

$$I_a^\alpha D_a^\alpha f(x) = f(x) + \sum_{j=1}^{n} c_j \left(\ln \frac{x}{a} \right)^{\alpha-j}. \tag{3.3}$$

Où $C_j \in \mathbb{C}$.

Maintenant on va déterminer C_j pour tout j=1,...,n.

En appliquant l'opérateur $I_a^{n-\alpha}$ aux deux membres de l'égalité (3.3), on obtient :

$$\begin{aligned} I_a^n D_a^a f(x) &= I_a^{n-\alpha} f(x) + \sum_{j=1}^{n} c_j I_a^{n-\alpha} \left(\ln \frac{x}{a}\right)^{\alpha-j} \\ &= I_a^{n-\alpha} f(x) + \sum_{j=1}^{n} c_j \frac{\Gamma(\alpha-j+1)}{(n-j)!} \left(\ln \frac{x}{a}\right)^{n-j} \\ &= I_a^{n-\alpha} f(x) + \sum_{j=0}^{n-1} c_{n-j} \frac{\Gamma(\alpha+j-n+1)}{j!} \left(\ln \frac{x}{a}\right)^{j}. \end{aligned}$$

Comme pour tout $0 \leq j \leq n-1$, on a

$$\lim_{x \to a+} D_a^j I_a^n D_a^\alpha f(x) = \lim_{x \to a+} I_a^{n-j} D_a^a f(x) = 0.$$

Et

$$\lim_{x \to a+} D_a^j \left(\ln \frac{x}{a}\right)^k = \begin{cases} j!\text{si}k = j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

On obtient

$$C_{n-j} \frac{\Gamma(\alpha+j-n+1)}{j!} j! = -\lim_{x \to a} D_a^j I_a^{n-\alpha} f(x).$$

Ce qui donne

$$k_{n-j} = -\frac{\lim_{x \to a} D_a^j \cdot I_a^{n-\alpha} f(x)}{\Gamma(\alpha+j-n+1)}.$$

On remplace dans (3.3), on obtient

$$I_a^\alpha D_a^\alpha f(x) = f(x) - \sum_{j=1}^{n} \frac{\lim_{x \to a} \delta_a^{n-1} I_a^{n-\alpha} f(x)}{\Gamma(\alpha-n+1)} \left(\ln \frac{x}{a}\right)^{\alpha-j}.$$

■

3.2 L'existence de solution

Dans cette section, nous allons étudier l'existence de la solution pour le modèle fractionnaire de traitement du cancer par radiothérapie.

Maintenant en appliquant l'opérateur ${}^H I^r$ pour le système (3.2), on obtient le système suivant :

$$\begin{aligned} \rho(t) - c_1 \left(\ln \tfrac{t}{a}\right)^{r-1} &=^H I^r \left(\alpha_1 \rho \left(1 - \tfrac{\rho}{S_1}\right) - \beta_1 \rho\alpha - \varepsilon D(t)\rho\right) \\ \alpha(t) - d_1 \left(\ln \tfrac{t}{a}\right)^{r-1} &=^H I^r \left(\alpha_2 \alpha \left(1 - \tfrac{\alpha}{S_2}\right) - \beta_2 \rho\alpha - D(t)\alpha\right). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Pour simplifier, nous définissons le noyau.

$$\begin{array}{l} Q(t,\rho(t)) = \alpha_1\rho\left(1-\frac{\rho}{S_1}\right) - \beta_1\rho\alpha - \varepsilon D(t)\rho \\ Q(t,\alpha(t)) = \alpha_2\alpha\left(1-\frac{\alpha}{S_2}\right) - \beta_2\rho\alpha - D(t)\alpha \end{array}.$$

Maintenant on définit un opérateur E, tel que $E : H \longrightarrow H$, puis, nous avons :

$$\begin{aligned} E\rho(t) &= c_1\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{r-1} + \frac{1}{\Gamma(r)}\int_a^t \left(\ln\frac{t}{s}\right)^{r-1}\frac{Q(s,\rho(s))}{s}ds \\ E\alpha(t) &= d_1\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{r-1} + \frac{1}{\Gamma(r)}\int_a^t \left(\ln\frac{t}{s}\right)^{r-1}\frac{Q(s,\alpha(s))}{s}ds. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Nous montrons ensuite que cet opérateur est compact.

Lemme 3.2.1 *L'opérateur $E : H \longrightarrow H$ est complètement continu.*

Preuve

Soit $S \subset H$ un ensemble borné $\exists l_1, l_2 > 0$ tel que $\| \rho \| < l_1$ et $\| \alpha \| < l_2$.

Soit $M_1 = max_{a \leq t \leq T_{a<\rho<l_1}} |Q(t,\rho(t))|$ and $M_2 = max_{a \leq t \leq T_{a<\alpha<l_2}} |Q(t,\alpha(t))|$

$$\begin{aligned} |E\rho(t)| &\leq c_1\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{r-1} | + |\frac{1}{\Gamma(r)}\int_a^t \left(\ln\frac{t}{s}\right)^{r-1}\frac{Q(s,\rho(s))}{s}ds| \\ &\leq |c_1|\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{r-1} + \frac{1}{\Gamma(r)}\int_a^t \left(\ln\frac{t}{s}\right)^{r-1} |Q(s,\rho(s))|\frac{ds}{s}. \\ &\leq |c_1|\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{r-1} + \left(\frac{1}{\Gamma(r)}\int_a^t \left(\ln\frac{t}{s}\right)^{r-1}\frac{ds}{s}\right)M_1 \end{aligned}$$

Alors :

$$\|E\rho\| \leq |c_1|\left(\ln\frac{T}{a}\right)^{r-1} + \left(\frac{1}{\Gamma(r+1)}\left(\ln\frac{T}{a}\right)^{r}\right)M_1.$$

De même façon :

$$\|E\alpha\| \leq |d_1|\left(\ln\frac{T}{a}\right)^{r-1} + \left(\frac{1}{\Gamma(r+1)}\left(\ln\frac{T}{a}\right)^{r}\right)M_2.$$

Donc : E(S) est bornée, après on considère $t_1, t_2 \in [a,T]$, tel que : $t_1 < t_2$ et $\rho, \alpha \in S$, et on a :

$$
\begin{aligned}
|E\rho(t_2) - E\rho(t_1)| \leq & c_1 \left(\left(\ln \frac{t_2}{a} \right)^{r-1} - \left(\ln \frac{t_1}{a} \right)^{r-1} \right) | \\
& + \frac{1}{\Gamma(r)} \int_a^{t_1} \left(\left(\ln \frac{t_2}{s} \right)^{r-1} - \left(\ln \frac{t_1}{s} \right)^{r-1} \right) |Q(s, \rho(s))| \frac{ds}{s} \\
& + \frac{1}{\Gamma(r)} \int_{t_1}^{t_2} \left(\ln \frac{t_2}{s} \right)^{r-1} |Q(s, \rho(s))| \frac{ds}{s} \\
& \to 0, \text{ as } t_1 \to t_2.
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

Et

$$
\begin{aligned}
|E\alpha(t_2) - E\alpha(t_1)| \leq & c_1 \left(\left(\ln \frac{t_2}{a} \right)^{r-1} - \left(\ln \frac{t_1}{a} \right)^{r-1} \right) | \\
& + \frac{1}{\Gamma(r)} \int_a^{t_1} \left(\left(\ln \frac{t_2}{s} \right)^{r-1} - \left(\ln \frac{t_1}{s} \right)^{r-1} \right) |Q(s, \alpha(s))| \frac{ds}{s} \\
& + \frac{1}{\Gamma(r)} \int_{t_1}^{t_2} \left(\ln \frac{t_2}{s} \right)^{r-1} |Q(s, \alpha(s))| \frac{ds}{s} \\
& \to 0, \text{ as } t_1 \to t_2.
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

Notons que le coté droit de ci-dessous D'inégalités (3.6) et (3.7) sont indépendantes de $\rho, \alpha \in S$ respectivement.

E(S) est équicontinue ; donc $\overline{E(S)}$ est compact d'après le théorème de Arzela-Ascoli.

■

Theoreme 3.2.1 *Soit D* :$[\rho_1, \rho_2] \times [0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty)$, *Alors D(t,.) est croissant pour chaque* $t \in [\rho_1, \rho_2]$

Il existe $u_1, u_2 \geq 0$ *tel que :* $B(n)u_1 \leq Q(t, u_1)$ *et* $B(n)u_2 \leq Q(t, u_2)$ *tel que :* $0 \leq u_1(t) \leq u_2(t)$, $\rho_1 \leq t \leq \rho_2$.

Ainsi, l'équation admet une solution positive.

Preuve

Nous avons seulement besoin de considérer le point fixe de l'opérateur E, on considère $E : H \longrightarrow H$ complètement continu. Soit $\rho_1 < \rho2$ et $\alpha_1 < \alpha_2$.

Alors :

$$\begin{aligned}
E\rho_1(t) &= c_1 \left(\ln \frac{t}{a}\right)^{r-1} + \frac{1}{\Gamma(r)} \int_a^t \left(\ln \frac{t}{s}\right)^{r-1} \frac{Q\left(s, \rho_1(s)\right)}{s} ds \\
&\leq c_1 \left(\ln \frac{t}{a}\right)^{r-1} + \frac{1}{\Gamma(r)} \int_a^t \left(\ln \frac{t}{s}\right)^{r-1} \frac{Q\left(s, \rho_2(s)\right)}{s} ds \\
&\leq E\rho_1(x,t).
\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}
E\alpha_1(t) &= d_1 \left(\ln \frac{t}{a}\right)^{r-1} + \frac{1}{\Gamma(r)} \int_a^t \left(\ln \frac{t}{s}\right)^{r-1} \frac{Q\left(s, \alpha_1(s)\right)}{s} ds \\
&\leq d_1 \left(\ln \frac{t}{a}\right)^{r-1} + \frac{1}{\Gamma(r)} \int_a^t \left(\ln \frac{t}{s}\right)^{r-1} \frac{Q\left(s, \alpha_2(s)\right)}{s} ds \\
&\leq E\alpha_1(x,t).
\end{aligned}$$

Donc E est croissant, alors $E\langle u_1, u_2\rangle \longrightarrow \langle u_1, u_2\rangle$ est compact et continu d'après le Lemme 3.2.1, donc H est un cone normal de E.

■

3.3 L'unicité des solutions

Basé sur le point fixe de la théorie, dans la section précédente, nous avons montré que le couplage de traitement du cancer de modèle fractionnaire implique l'existence de la solution pour la dérivée fractionnaire au sens de Hadamard.
Le but de cette section est de montrer l'unicité des solutions du modèle (3.2) ; pour cela, nous supposons qu'il existe deux couples spéciaux de solution ρ_1, ρ_2 et α_1, α_2 lorsque les conditions suivantes sont vérifiés :

$(A_1); \exists N_\alpha > 0$

$$\left|Q\left(t, \rho_1(t)\right) - Q\left(t, \rho_2(t)\right)\right| \leq N_\rho \left|\rho_1 - \rho_2\right|, \forall t \in [a,T], \forall \rho_1, \rho_2 \in \mathbb{R}.$$

$(A_2); \exists N_\alpha > 0$

$$\left|Q\left(t, \alpha_1(t)\right) - Q\left(t, \alpha_2(t)\right)\right| \leq N_\alpha \left|\alpha_1 - \alpha_2\right|, \forall t \in [a,T], \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}.$$

Theoreme 3.3.1 *Étant donné que les conditions (A_1) et (A_2), en addition, si*

$$\frac{N_\rho}{\Gamma(r+1)}\left(\ln\frac{T}{a}\right)^r < 1 \quad et \quad \frac{N_\alpha}{\Gamma(r+1)}\left(\ln\frac{T}{a}\right)^r < 1.$$

Alors, le système (3.2) admet une unique solution positive.

Preuve

Dans la solution précédente, nous avons prouvé que l'opérateur E est borné, ensuite nous montrons que l'opérateur est contractant, alors :

$$\begin{aligned}|E\rho_1(t) - E\rho_2(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(r)}\int_a^t \left(\ln\frac{t}{s}\right)^{r-1} |Q(s,\rho_1(s)) - Q(s,\rho_2(s))| \frac{ds}{s} \\ &\leq \frac{N_\rho}{\Gamma(r)} |\rho_1 - \rho_2| \int_a^t \left(\ln\frac{t}{s}\right)^{r-1}\frac{ds}{s}\end{aligned}.$$

Implique :

$$\begin{aligned}\|E\rho_1 - E\rho_2\| &\leq \frac{N_\rho}{\Gamma(r+1)}\left(\ln\frac{T}{a}\right)^r \|\rho_1 - \rho_2\| \\ &\leq \|\rho_1 - \rho_2\|\end{aligned}.$$

De même façon :

$$\begin{aligned}\|E\alpha_1 - E\alpha_2\| &\leq \frac{N_\alpha}{\Gamma(r+1)}\left(\ln\frac{T}{a}\right)^r \|\alpha_1 - \alpha_2\| \\ &\leq \|\alpha_1 - \alpha_2\|.\end{aligned}.$$

■

Ce qui implique que l'opérateur E est contractant, puis par théorème de contraction de Banach 1.4.1, nous pouvons dire que le traitement du cancer du modèle fractionnaire a une unique solution positive.

Bibliographie

[1] M. Awadalla, Y.Y. Yameni and K. Abuassba, *A New Fractional Model For The Cancer Treatement By Radiotherapy Using The Hadamard Fractional Derivative,* Online Mathematics Journal 01 (01) : 1–12, ISSN : 2672-7501

[2] J. Hadamard, *Essai sur l'étude des fonctions données par leur developpement de Taylor, Math. Pures Appl, PIER 8, pp 101-186, (1892).* Math. Pures Appl, PIER 8,pp 101-186, (1892).

[3] A.A. Kilbas, H.M. Srivatava and J.J. Trujillo, *Theory and applications of fractional differential equations,* Elsevier, Amsterdam, 2006.

[4] L. Zhang, A. Bachir, G. Wang, R.P. Agarwal, M.Al-Yami and W. Shammakh, *Nonlocal Integrodifferential Boundary Value Problem for Nonlinear Fractional Differential Equations on an Unbounded Domain.* Dumitru Baleanu, 10 juin 2013.