RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université de Djilali Bounaàma, Khemis-Miliana

Faculté des sciences et de la technologie

Département de Mathématiques et Informatique

MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

En vue de l'obtention du Diplôme **Master** en Mathématique

Spécialité *:Analyse Mathématique et Applications*

Thème :

Étude de stabilité d'un système de type timochenko

Présenté par :

- LAARI Mohammed

Devant le jury composé de :

- Examinateur 1 : Mr M.Houassni
- Examinateur 2 : Mr A.Kelleche
- Encadreur : Mme L.Djouamai

Année Universitaire : 2019/2020

بسم الله الرحمن الرحيم

DEDECACE

Je dédie ce modeste travail à : Celui qui m'a indiqué la bonne voie et qui a toujours été là pour moi ,dans ma vie et mes études . C'est avec plaisir que je présente mes meilleurs vux et sentiments a toute ma famille. Je dédie ce travail à tous mes chers amis sans exception. Sans oublier mes collègues de travail. Remercies pour leur soutient et pour avoir supporté mes caprices A toutes les enseignantes qui mont guidée tout au long de mon parcours universitaires. A tous mes amis de la promotion 2020.

.

REMERCIEMENT

Je tiens tout d'abord à exprimer mes sincères remerciements ainsi que ma vive gratitude envers tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce modeste travail. Mes sincères remerciements et reconnaissances vont à mon encadreur, Mme DJOUAMAI Leila pour son aide, ainsi que pour la confiance qu'il m'a prodiguée durant la réalisation de ce travail. Il a su motiver chaque étape de mon travail par des remarques pertinentes et a su me faire progresser dans mes recherches. Mes plus vifs remerciements s'adressent également aux membres de jury qui m'ont honoré en acceptant d'évaluer ce travail. Que tous les enseignants qui ont contribué à ma formation reçoivent ma gratitude et en particulier ceux du département des mathématique et informatique de Khemis-Miliana. Sans oublier d'exprimer mes remerciements à tous mes amis Chacun avec son nom et tous ceux qui m'ont aidé de prés ou de loin.

Table des matières

Résumé

Dans ce mémoire, on consacrée un système de type Timoshenko dans un espace monodimentiel.

Notre objectif est d'étudié la stabilité, le taux de décroissance de la solution et l'existence et l'unicité de la solution de ce système dans un domaine borné et un domaine non borné.

Les méthodes appliqués sont basées sur la méthode de multiplication, la méthode de l'énergie dans un espace de Fourier et le théorème de Hille-Yosida.

Notations

Ω	:= un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$.
$\mathbb{K}$	:= le corps des nombres réelles où complexes.
$\mathbb{R}$	:= l'ensemble des nombres réelles.
$b(.,.)$	:= la forme bilinéaire.
$< .,. >$	:= le produit scalaire.
$\\|.\\|$	:= la norme .
$\mathcal{F}$, $\hat{}$	:= la transformée de Fourier.
Re	:= le parte réel.
H	:= l'espace de Hilbert.
$L^p(\Omega)$	:= l'espace de Lebesgue, $1 \leqslant p \leqslant \infty$.
$C^k(\Omega)$	:= l'espace des fonctions k fois dérivable et la dérivé d'ordre k est continue.
$W^{m,p}(\Omega)$	:= l'espace de Sobolev, $1 \leqslant p \leqslant \infty$.
$W_0^{m,p}(\Omega)$	:= la fermeture de $C_c^\infty(\Omega)$ dans $W^{m,p}(\Omega)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$.
$H^m(\Omega)$	:= $W^{m,2}(\Omega)$).
φ_t	:= $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \varphi'$ la dérivée de φ par rapport à t .
ψ_t	:= $\frac{\partial v}{\partial t} = \psi'$ la dérivée de ψ par rapport à t .
φ_{tt}	:= $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$ la dérivée d'ordre 2 de φpar rapport à t.
ψ_{tt}	:= $\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$ la dérivée d'ordre 2 de ψ par rapport à t.
φ_x	:= $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ la dérivée de φ par rapport à x.
ψ_x	:= $\frac{\partial \psi}{\partial x}$ la dérivée de ψ par rapport à x.
φ_{xx}	:= $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$ la dérivée d'ordre 2 de φ par rapport à x.
ψ_{xx}	:= $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$ la dérivée d'ordre 2 de ψ par rapport à x.
φ_{xt}	:= $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t}$ la dérivée d'ordre 2 de φ par rapport à x par rapport à t .
ψ_{xt}	:= $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial t}$ la dérivée d'ordre 2 de ψ par rapport à x par rapport à t.

INTRODUCTION

Ce mémoire porte essentiellement sur l'étude de la stabilité, le taux de décroissance de la solution et l'existence et l'unicité d'un système de type Timoshenko .

Dans ce travail, on considère le système de Timoshenko donnée par :

$$\begin{cases} \varphi_{tt} - (\varphi_x + \psi)_x = 0, \\ \psi_{tt} - \psi_{xx} + (\varphi_x + \psi) + \alpha(t)\psi_t = 0, \end{cases} \tag{1}$$

avec les conditions initiales :

$$\begin{cases} \varphi(0,.) = \varphi_0, \qquad \varphi_t(0,.) = \varphi_1, \\ \psi(0,.) = \psi_0, \qquad \psi_t(0,.) = \psi_1, \end{cases} \tag{2}$$

Où φ est le déplacement transversal d'un point matériel de référence x dans une poutre, ψ l'angle de rotation du filament, α est une fonction bornée sur $[0, \infty[$, et $(x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+$ avec $\Omega \subseteq \mathbb{R}$.

Le système de Timoshenko est introduit par le mathématicien Ukrainien Stephen Timoshenko né le 22 décembre 1878 en Ukraine et mort le 29 Mai 1972 en Allemagne, qui est considéré comme un père de mécanique, il a développé la théorie de l'élasticité des plaques et des coques .

Timoshenko , a définit son système à traverse de deux équations hyperboliques couplées :

$$\begin{cases} \rho u_{tt} = \left(K\left(u_x - \varphi\right)\right)_x, \quad \text{dans}(0,L) \times (0, +\infty), \\ I_\rho \varphi_{tt} = \left(EI\varphi_x\right)_x + K\left(u_x - \varphi\right), \quad \text{dans}(0,L) \times (0, +\infty) \end{cases} \tag{3}$$

C'est un modèle simple décrivant les vibrations d'une poutre où t est le variable du temps, x est le variable de l'espace au long du poutre de longueur L, u est le déplacement transversale de la poutre et φ représente l'angle du filament du poutre.

Les coefficients ρ, I_ρ, E, I et K sont, respectivement, la masse linéaire , le moment polaire d'inertie, le coefficient d'élasticité , le moment d'inertie et le module d'étirement.

Ce système a été étudie par beaucoup d'auteurs, par exemple :

— Kim et Renardy [6] ont Considéré (3) avec deux contrôles au bord de la forme

$$K\left(\varphi(L,) - \frac{\partial u}{\partial x}(L,.)\right) = \alpha\frac{\partial u}{\partial t}(L,.), \qquad \forall t \geq 0$$
$$EI\frac{\partial \varphi}{\partial x}(L,.) = -\beta\frac{\partial \varphi}{\partial t}(L,.), \qquad \forall t \geq 0$$

— Ammar-khodja et al [7]. Ils ont considéré le système :

$$\begin{cases} \alpha u_{tt} = \left(\beta\left(u_x + \varphi\right)\right)_x, \quad \text{dans}(0,L)\times(0,\infty) \\ \gamma\varphi_{tt} = \left(\delta\varphi_x\right)_x - K\left(u_t + \varphi\right), \quad \text{dans}(0,L)\times(0,\infty) \\ u(0,.) = u(L,.) = 0, \varphi_x(0,.) = c\varphi_t(0,.), \varphi_x(L,.) = -d\varphi_t(L,.), \forall t \geq 0 \end{cases} \tag{4}$$

où α, β, γ et δ sont des fonctions positives de classe C^1 et ont prouvé que la stabilité uniforme de (4) est obtenue si et seulement si les vitesses des ondes sont égales ($\delta/\gamma = \beta/\alpha \,\text{dans}(0,L)$), sinon seulement la stabilité asymptotique a été prouvée.

— Toujours Ammar-khodja et al [8] Ont considéré un système linéaire de type Timoshenko avec un terme mémoire de la forme :

$$\begin{cases} \rho_1\varphi_{tt} - K\left(\varphi_x + \psi\right)_x = 0, \\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + \int_0^t g(t-s)\psi_{xx}(s)ds + K\left(\varphi_x + \psi\right) = 0. \end{cases} \tag{5}$$

dans $(0,L)\times(0,+\infty)$, avec des conditions aux limites homogènes, et ont démontré, en utilisant la techniques des multiplicateurs, que le système (4) est uniformément (exponentiellement ou polynomiale-ment) stable si et seulement si les vitesses des ondes sont égales ($K/\rho_1 = b/\rho_2$) et g décroit uniformément. Précisément, ils ont prouvé la décroissance exponentielle si g décroit de façon exponentielle et la décroissance polynomiale si g décroit dans un taux polynomial. Ils ont aussi besoin de conditions supplémentaires sur les g' et g'' pour obtenir leurs résultats.

Ce mémoire est divisée en trois chapitres :

Dans le premier chapitre nous rappelons quelques notation de base, des définitions, des propriétés de l'analyse fonctionnelle qui serait utilisés dans ce mémoire.

Dans le deuxième chapitre, on a étudié le système de Timoshenko (1) avec $\Omega = (0, 1)$, on a montrée l'existence et l'unicité de la solution en utilisant le théorème de Hille-Yosida, et on a aussi montrée la stabilité exponentielle de la solution par la méthode de multiplicateur.

Un problème de Cauchy associé système de Timoshenko était l'objet du troisième chapitre, on a étudie la stabilité et le taux de décroissance de la solution dans $\Omega = \mathbb{R}$, par la méthode d'énergie dans un espace de Fourier.

chapter 1

Chapitre 1

Préliminaire et rappels

1.1 Espace de Lebesgue dans $L^p(\Omega)$

Définition 1.1. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < \infty$, on définit :*

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable et } \int_\Omega |f(x)|^p dx < +\infty \right\}.$$

Définition 1.2. *On définit sur $L^p(\Omega)$ la norme :*

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left[\int_\Omega |f(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}}.$$

Définition 1.3. *On pose : $L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, f mesurable et il existe une constante C telle que :*

$$|f(x)| \leq C p.p \,\text{sur}\, \Omega\},$$

On note : $\|f\|_{L^\infty} = \inf\{C, |f(x)| \leq C \text{ p.p sur } \Omega\}$,
$\|\cdot\|_{L^\infty}$ est une norme.

1.2 Espace de Sobolev dans $\mathbb{R}$

1.2.1 Espace de Sobolev $W^{1,P}(I)$

Définition 1.4. *[1] Soit $I =]a, b[$ un intervalle borné ou non et soit $P \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq P \leq \infty$ Un espaces de Sobolev $W^{1,P}(I)$ est défini par :*

$$W^{1,P}(I) = \left\{ u \in L^P(I); \exists g \in L^P(I) \text{ tel que } \int_I u\varphi' = \int_I g\varphi \quad \forall \varphi \in C_c^1(I) \right\},$$

on pose :

$$H^1(I) = W^{1,2}(I),$$

Notations :

l'espace $W^{1,P}$ est muni de la norme :

$$\|u\|_{W^{1,P}} = \|u\|_{L^P} + \|u'\|_{L^P},$$

l'espace H^1 est muni du produit scalaire :

$$(u, v)_{H^1} = (u, v)_{L^2} + (u', v')_{L^2},$$

la norme associée :

$$\|u\|_{H^1} = \left(\|u\|_{L^2}^2 + \|u'\|_{L^2}\right)^{1/2},$$

est équivalente à la norme de $W^{1,2}$.

Exemple 1.1. *Soit* $\mathrm{I} =]-1,+1[$. *Vérifier à titre d'exercice que :*

1. *La fonction* $u(x) = \frac{1}{2}(|x| + x)$ *appartient à* $\mathrm{W}^{1,p}(\mathrm{I})$ *pour tout* $1 \leqslant p \leqslant \infty$ *et que* $u' = \mathrm{H}$ *où*

$$\mathrm{H}(x) = \begin{cases} +1 & \text{si} \quad 0 < x < 1, \\ 0 & \text{si} \quad -1 < x < 0, \end{cases}$$

plus généralement une fonction continue sur I et continûment dérivable par morceaux sur $\bar{\mathbf{I}}$ *appartient à* $\mathbf{W}^{1,p}(\mathbf{I})$ *pour tout* $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

2. *La fonction* H *n'appartient pas à* $\mathrm{W}^{1,p}$ *pour tout* $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

1.2.2 Espace de Sobolev $W^{m,P}(I)$

Définition 1.5. *[1] Étant donnés un entier* $m \geq 2$ *et un réel* $1 \leq p \leq \infty$, *on définit par récurrence l'espace*

$$W^{m,p}(I) = \left\{u \in W^{m-1,p}(I), \quad u' \in W^{m-1,p}(I)\right\}.$$

On pose

$$H^m(I) = W^{m,2}(I),$$

l'espace $W^{m,p}$ est muni de la norme :

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \|u\|_{L^p} + \sum_{\alpha=1}^{m} \|D^\alpha u\|_{L^p},$$

et l'espace H^m est muni du produit scalaire :

$$(u,v)_{H^m} = (u,v)_{L^2} + \sum_{\alpha=1}^{m} (D^\alpha u, D^\alpha v).$$

1.2.3 Espace de Sobolev $W_0^{m,P}(I)$

Définition 1.6. *[1]*

Étant donné $1 \leq p \leq \infty$ *et* $m \in \mathbb{N}$. *On désigne par* $W_0^{m,p}(I)$ *la fermeture* de $C_c^m(I)$ *dans* $W^{m,p}(I)$. *On note* $H_0^m(I) = W_0^{m,p}(I)$.

L'espace $W_0^{1,p}$ muni de la norme induit par $W^{1,p}$ est un espace de Banach séparable, il est de plus réflexif pour $1 < p < \infty$.

L'espace H_0^1 muni du produit scalaire induit par H^1 est un espace de Hilbert séparable.

1.3 Quelques propriétés des espace de Hilbert :

Définition 1.7. *(forme bilinéaire). On dit qu'une forme bilinéaire $a : H \times H \to \mathbb{R}$, est : telle que :*

1. *Continue, s'il existe une constante C telle que :*

$$|a(x,y)| \leq C \parallel x \parallel_H \parallel y \parallel_H, \quad \forall x \in H, \quad y \in H,$$

2. *Coercive, s'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que :*

$$a(x,x) \leq \alpha \parallel x \parallel_H^2, \quad \forall x \in H.$$

1.3.1 Théorème de Lax-Milgram

Théorème. 1 :

[1] Soit $a(.,.)$ une forme bilinéaire, continue et coercive sur H, alors pour tout $\varphi \in H'$ il existe $u \in H$ unique tel que :

$$a(u,v) = \langle \varphi, v \rangle_{(H',H)} \quad \forall v \in H,$$

de plus, si a est symétrique, alors u est caractérisé par la propriété :

$$u \in H \text{ et } \frac{1}{2}a(u,u) - \langle \varphi, u \rangle = \min_{v \in H} \left\{ \frac{1}{2}a(v,v) - \langle \varphi, v \rangle \right\},$$

Définition 1.8. *(Operateur maximal monotone).[1]*
Soit H un espace de Hilbert et A un opérateur non borné sur H de domaine $D(A)$.
On dit que A est ***monotone*** *(ou accrétif) si :*

$$\forall f \in D(A), \quad < Af, f > \geq 0.$$

*On dit que A est **maximal monotone** si de plus* $\mathrm{Im}(\mathrm{Id} + \mathrm{A}) = \mathrm{H}$.

1.3.2 Théorème de Hille-Yosida

Théorème. 2 :

[1] Soit A un opérateur maximal monotone dans un espace de Hilbert H, alors pour tout $u_0 \in \mathbf{D}(\mathbf{A})$ il existe une fonction :

$$\boldsymbol{u} \in \mathbf{C}^1\left([\mathbf{0}, +\infty[; \mathbf{H}\right) \cap \mathbf{C}\left([\mathbf{0}, +\infty[; \mathbf{D}(\mathbf{A})\right) \quad ,$$

unique telle que :

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \mathbf{A}\boldsymbol{u} = \mathbf{0} \quad \text{sur} \quad [\mathbf{0}, +\infty[, \\ \boldsymbol{u}(\mathbf{0}) = \boldsymbol{u}_0 \quad \text{(donnée initiale)} \ , \end{cases}$$

de plus on a :

$$|u(t)| \leqslant |u_0| \quad \text{et} \quad \left|\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t)\right| = |\mathbf{A}u(t)| \leqslant |\mathbf{A}u_0| \quad \forall t \geqslant \mathbf{0}.$$

Remarque 1. *L'intérêt principal du théorème de Hille-Yosida réside dans le fait que pour résoudre le problème d'évolution on se ramène à vérifier que A est maximal monotone, c'est-à-dire, à étudier l'équation stationnaire* $u + \lambda A u = f$.

1.4 Quelques inégalités utiles

1.4.1 L'inégalité de Cauchy-Schwarz

Théorème. 3 :

[1] Soit $(E, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ un espace prehilbertien reel . Soit $\| \cdot \|$ la norme euclidienne associée $\dot{a}(\cdot \mid \cdot)^2$. Alors :

$$\forall (x, y) \in E^2, |\langle x \mid y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Théorème. 4 :

[1] En se plaçant sur $E = C(|\ a, b], \mathrm{R})$ (avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$) muni du produit scalaire $(f, g) \mapsto \langle f \mid g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t$, on obtient :

$$\forall (f,g) \in (\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}))^2, \left| \int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t \right| \leq \sqrt{\int_a^b f(t)^2 \mathrm{d}t} \cdot \sqrt{\int_a^b g(t)^2 \mathrm{d}t}.$$

1.4.2 L'inégalité de Young

Théorème. 5 :

[1] Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, nous avons :

$$ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{b^2}{4e^3},$$

où e est toute constante positive.

Démonstration. Prenant le résultat bien connu :

$$(2\varepsilon a - b)^2 \geq 0, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}^+,$$

pour tous $\varepsilon > 0$, on a :

$$4e^2a^2 + b^2 - 4eab \geq 0,$$

cela implique :

$$4\varepsilon ab \leq 4\varepsilon^2 a^2 + b^2,$$

par conséquent :

$$ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{b^2}{4\varepsilon}.$$

Cela achève la démonstration. □

1.4.3 Inégalité de Minkowski

Théorème. 6 :

[1] Soit $1 \leq p \leq \infty$, pour f, g mesurable

$$\|f + g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}.$$

1.4.4 L'inégalité de Hölder

Théorème. 7 :

[1] Soit $f \in L^p$ et $g \in L^q$ avec $1 \leq p \leq \infty$. Alors $f, g \in L^1$ et

$$\int_\Omega |fg|dx \leq \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}.$$

1.4.5 L'inégalité de Sobolev-Poincaré

Théorème. 8 :

[1] Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ que l'on suppose borné, alors il existe une constante $C_\Omega > 0$ telle que, pour toute fonction $u \in H_0^1(\Omega)$ on a :

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Démonstration. On a $\Omega = [a, b]$, On peut écrire, pour $x \in [a.b]$,

$$u(x) = \int_a^x u'(y)dy,$$

alors :

$$\begin{aligned} u^2(x) &= \left(\int_a^x u'(y)dy\right)^2, \\ &\leq \int_a^x (u'(y))^2\, dy \int_a^x dy, \end{aligned}$$

donc :

$$\Rightarrow \int_a^b u^2(x) \leq \int_a^b \left[\int_a^x (u'(y))^2\, dy \times (x-a)\right] dx \leq \|u'\|^2_{L^2(a.b)} \times \int_a^b (x-a)dx,$$

cela implique :

$$\|u\|^2_{L^2(a.b)} \leq \frac{(b-a)^2}{2} \|u'\|^2_{L^2(a.b)} \Longrightarrow \|u\|_{L^2(a.b)} \leq \frac{(b-a)}{\sqrt{2}} \|u'\|_{L^2(a.b)},$$

d'où

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

□

1.4.6 Fonction gamma

Définition 1.9. *La fonction gamma est une fonction de type Euler définie par :*

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{A-1} e^{-x} dx. \tag{1.1}$$

Lemme. 1 :

Pour tout $k \geq 0, c \geq 0$, il existe une constante $C > 0$, telle que pour tout $t \geq 0$ on a l'estimation suivante :

$$\int_{|z|\leq 1} |\xi|^{\delta} e^{-c|\xi|^2 t} d\xi \leq C(1+t)^{-(\delta+1)/2}. \quad \delta \in \mathbb{R}. \tag{1.2}$$

Démonstration. par changement de variable tels que $r = |\xi|$, on obtient :

$$\int_{|Z|\leq 1} |\xi|^{\delta} e^{-c|\xi|^2 t} d\xi = 2 \int_0^1 r^{\delta} e^{-cr^2 t} dr,$$

il suffit de prouver que pour $c > 0$ et $\delta > 0$, nous avons :

$$\int_0^1 r^{\delta} e^{-cr^2 t} dr \leq C(1+t)^{-(\delta+1)/2},$$

pour tout les $t > 0$, où C est une constante positive indépendante de t. Pour voir cela, observer d'abord que, pour $0 < t < 1$, l'estimation (1.2) est évidente. D'autre part, pour $t > 1$, nous avons :

$$(1+t) \leq 2t,$$

on utilise (1.10) et par changement de variable tel que $z = cr^2 t$, on obtient :

$$\begin{aligned} 2^{-(\delta+1)/2} c^{(\delta+1)/2} (1+t)^{(\delta+1)/2} \int_0^1 r^{\delta} e^{-cr^2 t} dr, &\leq c^{(\delta+1)/2} t^{(\delta+1)/2} \int_0^1 r^{\delta} e^{-cr^2 t} dr, \\ &= \int_0^1 \left(cr^2 t\right)^{\delta/2} (ct)^{1/2} e^{-cr^2 t} dr, \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{ct} z^{\delta/2} z^{-1/2} e^{-z} dz, \\ &\leq \frac{1}{2} \int_0^{\infty} z^{(\delta+1/2)-1} e^{-z} dz, \\ &= \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{\delta+1}{2}\right) < \infty. \end{aligned}$$

telle que Γ c'est la fonction Gamma.

Donc

$$\int_0^1 r^\delta e^{-cr^2t}dr \leq \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{\delta+1}{2}\right)2^{(\delta+1)/2}c^{-(\delta+1)/2}(1+t)^{-(\delta+1)/2},$$
$$\leq C(1+t)^{-(\delta+1)/2}.$$

Ce qui termine la démonstration. □

1.5 Quelques propriétés sur la transforme de Fourier :

1.5.1 Transformation de Fourier de la dérivé d'une fonction :

Définition 1.10. *[5] Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$, $N \in \mathbb{N}^*$, On appelle transformation de Fourier de la fonction f la fonction suivante :*

$$\xi \to \hat{f}(\xi) = \int_{R^N} f(x)e^{-2i\pi\xi x}dx; \quad \xi \in \mathbb{R}^N.$$

$\xi.x$ désigne le produit scalaire dans $\mathbb{R}^N.L$ 'application qui associe la nouvelle fonction $\hat{f}$ a f est appelée la transformation de Fourier et est notée aussi $\mathcal{F}(f)$

Remarque 2. *Il existe des variantes dans la definition de la transformée de Fourier. On rencontre aussi :*

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-2i\pi\langle x,\xi\rangle}dx \text{ ou } \hat{f}(\xi) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^d}\int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-i\langle x,\xi\rangle}dx.$$

Il est donc important, en lisant un ouvrage ou une table de transformées de Fourier, de s'assurer de la définition utilisée.

1.5.2 propriétés :

Proposition. 1 :

[5] **Conjugaison :** Soit f une fonction admettant une transformée de Fourier , Alors :$\bar{f} \mapsto f(\bar{x})$. admet également une transformée de Fourier et :

$$\hat{\bar{f}}(\xi) = \bar{\hat{f}}(-\xi)$$

.

Proposition. 2 :

[5] **Translation :** Soit f une fonction admettant une transformée de Fourier ,soit $\tau \in \mathbb{R}$ et posons $g :\mapsto f(x-\tau)$. Alors : g admet une transformée de Fourier et :

$$\mathcal{F}[g](\xi) = \hat{g}(\xi) = \mathcal{F}[f(x-\tau)](\xi) = e^{-i\xi\tau}\hat{f}(\xi)$$

.

Proposition. 3 :

[5] **Modulation :** Soit f une fonction admettant une transformée de Fourier ,concéderons pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $f_\alpha \mapsto ei\alpha x f(x)$. Alors : f_α admet une transformée de Fourier et :

$$\hat{f}_\alpha(\xi) = \hat{f}(\xi - \alpha)$$

.

Proposition. 4 :

[5] **Changement d'échelle :** Soit f une fonction admettant une transformée de Fourier , pour $\mu \in \mathbb{R}, \mu \neq 0$, posons $g(x) = f(\mu x)$ Alors : g admet une transformée de Fourier et :

$$\hat{g}(\xi) = \frac{1}{\mid \mu \mid}\hat{f}(\frac{\xi}{\mu})$$

.

1.5.3 Transformation de Fourier et dérivation :

Proposition. 5 :

[5] **Dérivée de la transformée de Fourier :** soient $f, xf \in L^1(\mathbb{R})$. Alors : $\hat{f}$ et dérivable et on a :

$$\hat{f}'(\xi) = -i\mathcal{F}[xf(x)](\xi).$$

Remarque 3. *Si $f, x^n f \in L^1(\mathbb{R}), n \in \mathbb{N}$, alors :*

$$\hat{f}^{(n)}(\xi) = (-i)^n\mathcal{F}[x^n f(x)](\xi).$$

Proposition. 6 :

transformée de Fourier de la Dérivée : soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ continue avec dérivée continue($f \in \mathcal{C}^1$) et $f' \in L^1(\mathbb{R})$(admet une transformée de Fourier) Alors on a :

$$\mathcal{F}[f'(x)](\xi) = (i\xi)\hat{f}(\xi).$$

Remarque 4. *Si* $f, f', ...f^(n-1) \in L^1(\mathbb{R}), n \in (\mathbb{N})$ *continues et* $f^(n) \in L^1(\mathbb{R})$ *continue* ($f \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R}), n \in \mathbb{N},$ *) , alors on a :*

$$\mathcal{F}[f^(n)(x)](\xi) = (i\xi)^n\hat{f}(\xi).$$

1.5.4 Théorème de Plancherel

Pour tout $f \in L^1\left(\mathbb{R}^d\right)$, on a

$$\|\hat{f}\|_2^2 = (2\pi)^d\|f\|_2^2.$$

chapter 2

Chapitre 2

COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE D'UN SYSTÈME DE TYPE TIMOSHENKO DANS UN DOMAINE BORNÉ :

2.1 Introduction :

Considérons le système de Timoshenko suivant :

$$\begin{cases} \varphi_{tt} - (\varphi_x + \psi)_x = 0, \quad \text{dans}[0,1] \times \mathbb{R}_+, \\ \psi_{tt} - \psi_{xx} + (\varphi_x + \psi) + \alpha(t)\psi_t = 0, \quad \text{dans } [0,1] \times \mathbb{R}_+, \\ \varphi(0,t) = \varphi(1,t) = \psi(0,t) = \psi(1,t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \\ \varphi(x,0) = \varphi_0(x), \quad \varphi_t(x,0) = \varphi_1(x), \psi(x,0) = \psi_0(x), \psi_t(x,0) = \psi_1(x), x \in [0,1], \end{cases} \tag{2.1}$$

Où φ est le déplacement transversal d'un point matériel de référence x dans une poutre de longueur 1, et ψ l'angle de rotation du filament. α est une fonction bornée sur $[0, \infty[$.

2.2 Existence et unicité :

Dans cette section, en utilisant le théorème de Hille-yosida, nous démontrons l'existence et l'unicité de la solution du système (2.1).

On peut se reformuler le système (2.1) comme un système du premier ordre. pour cela, on pose $u = \varphi_t$ et $v = \psi_t$, le système (2.1) devient :

$$\begin{cases} \varphi_t - u = 0, \\ u_t - (\varphi_x + \psi)_x = 0, \\ \psi_t - v = 0 \\ v_t - \psi_{xx} + (\varphi_x + \psi) + \alpha(t)v = 0, \\ \varphi(0,t) = \varphi(1,t) = \psi(0,t) = \psi(1,t) = 0, \end{cases} \tag{2.2}$$

ainsi le système (2.2) peut être écrit sous la forme :

$$\begin{cases} U_t + AU = 0, \\ U(0) = U_0, \end{cases} \tag{2.3}$$

où $U = (\varphi, u, \psi, v)^T, U_0 = (\varphi_0, u_0, \psi_0, v_0)^T$ et l'opérateur A est défini par :

$$AU = \begin{pmatrix} -u, \\ -(\varphi_x + \psi)_x, \\ -v, \\ -\psi_{xx} + (\varphi_x + \psi) + \alpha(t)v, \end{pmatrix}$$

Soit l'espace de Hilbert suivant :

$$\mathcal{H} = H_0^1(0,1) \times L^2(0,1) \times H_0^1(0,1) \times L^2(0,1),$$

L'espace $\mathcal{H}$ muni du produit scalaire :

$$< U, U' >_{\mathcal{H}} = \int_0^1 [uu' + vv' + (\varphi_x + \psi)(\varphi'_x + \psi') + \psi_x \psi'_x] \mathrm{d}x,$$

tels que $U = (\varphi, u, \psi, v)^T, U' = (\varphi', u', \psi', v')^T \in \mathcal{H}$.
La norme de $\mathcal{H}$ correspondante est donnée par :

$$\| U \|_V^2 = \int_0^1 [u^2 + v^2 + (\varphi_x + \psi)^2 + \psi_x^2] \mathrm{d}x.$$

Le domaine de l'opérateur A est donné par :

$$D(A) = [H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1) \times H_0^1(0,1)]^2.$$

Ainsi nous obtenons le résultat d'existence et d'unicité suivant :

Théorème. 9 :

Soit $(\varphi_0, u_0, \psi_0, v_0)^T \in D(A)$, le système (2.1) admet une solution forte unique, (φ, ψ) satisfaisant :

$\varphi \in C[(0,+\infty), H^2([0,1]) \cap H_0^1([0,1])] \cap C^1[(0,+\infty), H_0^1([0,1])] \cap C^2[(0,+\infty), L^2([0,1])]$,

$\psi \in C[(0,+\infty), H^2([0,1]) \cap H_0^1([0,1])] \cap C^1[(0,+\infty), H_0^1([0,1])] \cap C^2[(0,+\infty), L^2([0,1])]$.

Démonstration. Pour obtenir le résultat ci-dessus, nous allons prouver que A est un opérateur monotone maximal.

Monotone de A :

Pour tout A appartient $D(A)$, on a :

$$
\begin{aligned}
< AU, U >_{\mathcal{H}} = & \int_0^1 -u\left(\varphi_x+\psi\right)_x dx + \int_0^1 v\left[-\psi_{xx}+(\varphi_x+\psi)+\alpha(t)v\right]dx, \\
& + \int_0^1 (-u_x - v)\left(\varphi_x+\psi\right)dx - \int_0^1 \psi_x v_x dx, \\
& = \int_0^1 -u\left(\varphi_x+\psi\right)_x dx - \int_0^1 \psi_{xx} v dx + \int_0^1 \left(\varphi_x+\psi\right) v dx + \int_0^1 \alpha(t) v^2 dx, \\
& - \int_0^1 (u_x + v)\left(\varphi_x+\psi\right)dx - \int_0^1 v_x \psi_x dx,
\end{aligned}
$$

en utilisant une intégration par parties et les conditions au bord, nous obtenons :

$$
\begin{aligned}
< AU, U >_{\mathcal{H}} = & \int_0^1 u_x\left(\varphi_x+\psi\right)dx + \int_0^1 \psi_x v_x dx + \int_0^1 \left(\varphi_x+\psi\right) v dx + \int_0^1 \alpha(t) v^2 dx, \\
& - \int_0^1 (u_x + v)\left(\varphi_x+\psi\right)dx - \int_0^1 v_x \psi_x dx.
\end{aligned}
$$

Donc A est monotone.

Maintenant, on démontre que $A+I$ est surjective :(ie $R(A+I)=\mathcal{H}$).
Soit $G=(g_1,g_2,g_3,g_4)^T \in \mathcal{H}$. Il faut trouver $U=(\varphi,u,\psi,v)^T \in D(A)$ tel que :

$$
(A+I)U = G, \tag{2.4}
$$

l'équation (2.4) est équivalente à :

$$
\begin{cases}
\varphi - u = g_1, & (1)\\
u - \left(\varphi_x+\psi\right)_x = g_2, & (2)\\
\psi - v = g_3, & (3)\\
v - \psi_{xx} + (\varphi_x+\psi) + \alpha(t)v = g_4. & (4)
\end{cases} \tag{2.5}
$$

En substituant $\varphi - g_1 = u$ et $\psi - g_3 = v$ dans la deuxième et la quatrième, équations du système (2.5), nous obtenons :

$$
\begin{cases}
\varphi - \left(\varphi_x+\psi\right)_x = g_2 + g_1 = h_1 \in L^2(0,1), & (1)\\
(1+\alpha(t))\psi - \psi_{xx} + (\varphi_x+\psi) = (1+\alpha(t))g_3 + g_4 = h_2 \in L^2(0,1), & (2)
\end{cases} \tag{2.6}
$$

multipliant respectivement les équations du système (2.6) par des fonctions $\tilde{\varphi}, \tilde{\psi} \in H_0^1(0,1)$ et intégrant par parties sur $[0,1]$, nous obtenons :

$$\begin{cases} \int_0^1 \varphi\tilde{\varphi}dx + \int_0^1 \tilde{\varphi}_x(\varphi_x+\psi)\,dx = \int_0^1 h_1\tilde{\varphi}dx, & (1) \\ \int_0^1 \psi\tilde{\psi}dx + \int_0^1 \psi_x\tilde{\psi}_x dx + \int_0^1 (\varphi_x+\psi)\,\tilde{\psi}dx + \int_0^1 \alpha(t)\psi\tilde{\psi}dx = \int_0^1 h_2\tilde{\psi}dx, & (2) \end{cases} \tag{2.7}$$

additionnons (1) et (2) de (2.7), on obtient :

$$\int_0^1 \left(h_1\tilde{\varphi} + h_2\tilde{\psi}\right)dx = \int_0^1 \varphi\tilde{\varphi}dx + \int_0^1 (\varphi_x+\psi)\left(\tilde{\varphi}_x+\tilde{\psi}\right)dx + \int_0^1 \psi_x\tilde{\psi}_x dx + \int_0^1 (1+\alpha(t))\psi\tilde{\psi}dx,$$

Pour $X=(\varphi,\psi), \tilde{X}=(\tilde{\varphi},\tilde{\psi}) \in [H_0^1(0.1)]\times[H_0^1(0.1)]$, on définit sur $[H_0^1(0.1)]\times[H_0^1(0.1)]$ une forme bilinéaire $a(X,\tilde{X})$ et une forme linéaire $L(\tilde{X})$ par :

$$a(X,\tilde{X}) = \int_0^1 \varphi\tilde{\varphi}dx + \int_0^1 (\varphi_x+\psi)\left(\tilde{\varphi}_x+\tilde{\psi}\right)dx + \int_0^1 \psi_x\tilde{\psi}_x dx + \int_0^1 (1+\alpha(t))\psi\tilde{\psi}dx,$$
$$L(\tilde{X}) = \int_0^1 \left(h_1\tilde{\varphi} + h_2\tilde{\psi}\right)dx.$$

Pour qu'on prouve que (1) et (2) de (2.7) admet une solution, on applique le théorème de Lax Milgram, sur l'espace $H_0^1(0,1)$ pour la forme bilinéaire $a(U,U)$ et la forme linéaire $L(U)$, il suffit montrer que a est **continue** et **coercive**, et que L est **continue**.

1. **Continuité de $a(.,.)$:**

   On a :

$$|a(X,\tilde{X})| = \left|\int_0^1 \left[\varphi\tilde{\varphi} + (\varphi_x+\psi)\left(\tilde{\varphi}_x+\tilde{\psi}\right) + \psi\tilde{\psi} + \psi_x\tilde{\psi}_x + \alpha(t)\psi\tilde{\psi}\right]dx\right|,$$

   en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\begin{aligned} |a(X,\tilde{X})| &\leq \|\varphi\|_{L^2}\|\tilde{\varphi}\|_{L^2} + \|\varphi_x\|_{L^2}\|\tilde{\varphi}_x\|_{L^2} + \|\varphi_x\|_{L^2}\|\tilde{\psi}\|_{L^2} + \|\psi\|_{L^2}\|\tilde{\varphi}_x\|_{L^2} + \|\psi\|_{L^2}\|\tilde{\psi}\|_{L^2}, \\ &+ \|\psi\|_{L^2}\|\tilde{\psi}\|_{L^2} + \|\psi_x\|_{L^2}\left\|\tilde{\psi}_x\right\|_{L^2} + |\sup\alpha(t)|\|\psi\|_{L^2}\|\tilde{\psi}\|_{L^2}, \\ &\leq C\left(\|\varphi\|_{H_0^1} + \|\psi\|_{H_0^1}\right)\left(\|\tilde{\varphi}\|_{H_0^1} + \tilde{\psi}\|_{H_0^1}\right), \\ &\leq C\|X\|_{[H_0^1]^2}\|\tilde{X}\|_{[H_0^1]^2}. \end{aligned}$$

   Donc $a(.,.)$ **est continue.**

2. Coercivité de $a(.,.)$

$$\begin{aligned} a(X,X) &= \int_0^1 \varphi^2 dx + \int_0^1 (\varphi_x + \psi)^2 \, dx + \int_0^1 \psi^2 dx + \int_0^1 \alpha(t)\psi^2 dx, \\ &\geq C \left(\|\varphi\|^2_{H_0^1} + \|\psi\|^2_{H_0^1} \right), \\ &\geq C\|X\|^2_{H_0^1}. \end{aligned}$$

Donc $a(.,.)$ **est coercive.**

3. Continuité de L **:**

$$\begin{aligned} |L(\tilde{X})| &= \left| \int_0^1 h_1 \tilde{\varphi} dx + \int_0^1 h_2 \tilde{\psi} dx \right|, \\ &\leq \|h_1\|_{L^2} \|\tilde{\varphi}\|_{L^2} + \|h_2\|_{L^2} \|\tilde{\psi}\|_{L^2}, \\ &\leq \max\left(\|h_1\|_{L^2} + \|h_2\|_{L^2}\right) \|\tilde{X}\|_{H_0^1} \\ &\leq C\|\tilde{X}\|_{H_0^1}. \end{aligned}$$

Donc L **est continue.**

$a(.,.)$ est bilinéaire, continue et coercive sur $H_0^1(0,1)$, et $L(.)$ est linéaire et continue sur $H_0^1(0,1)$. D'après le théorème de **Lax-Milgram** on conclut qu'il existe une solution unique $X = (\varphi,\psi)^T \in \left[H_0^1(0,1)\right]^2$, telle que :

$$a\left((\varphi,\psi)^T, (\tilde{\varphi},\tilde{\psi})^T\right) = L\left((\tilde{\varphi},\tilde{\psi})^T\right), \quad \forall \tilde{\varphi} \in H_0^1, \forall \tilde{\psi} \in H_0^1,$$

ce qui signifie que :

$$u = \varphi - g_1 \in H_0^1,$$

et de $\psi - v = g_3$, on aura :

$$v = \psi - g_3 \in H_0^1,$$

il reste à montrer que $\varphi \in H^2(0,1)$. En prenant $\tilde{\psi} = 0$, on a :

$$\int_0^1 h_1 \tilde{\varphi} dx = \int_0^1 (\varphi_x + \psi)\, \tilde{\varphi}_x dx + \int_0^1 \varphi \tilde{\varphi} dx,$$

en utilisant l'intégration par parties, on trouve :

$$\int_0^1 h_1 \tilde{\varphi} dx = -\int_0^1 (\varphi_x + \psi)_x \, \tilde{\varphi} dx + \int_0^1 \varphi \tilde{\varphi} dx,$$

alors :

$$\int_0^1 (\varphi - \varphi_{xx} - \psi_x - h_1)\,\tilde{\varphi}dx = 0, \quad \forall \tilde{\varphi} \in H_0^1(0.1),$$

il en résulte que :

$$\varphi_{xx} = -\varphi - \psi_x + h_1, \quad p.p$$

en utilisant (1) de (2.6) on déduit alors :

$$\varphi_{xx} = -u - \psi_x + h_2 \in L^2(0.1),$$

alors

$$\varphi \in H^2(0.1),$$

il résulte que $\varphi \in H^2(0.1) \cap H_0^1(0.1)$, de même, si $\tilde{\varphi} = 0$, on a :

$$\int_0^1 h_2\tilde{\psi}dx = \int_0^1 (\varphi_x + \psi)\,\tilde{\psi}dx + \int_0^1 \psi_x\tilde{\psi}_xdx + \int_0^1 \psi\tilde{\psi}dx + \int_0^1 \alpha(t)\psi\tilde{\psi}dx,$$

On intègre par parties, on obtient :

$$\int_0^1 h_2\tilde{\psi}dx = \int_0^1 (\varphi_x + \psi)\,\tilde{\psi}dx - \int_0^1 \psi_{xx}\tilde{\psi}dx + \int_0^1 \psi\tilde{\psi}dx + \int_0^1 \alpha(t)\psi\tilde{\psi}dx,$$

alors :

$$\int_0^1 ((\varphi_x + \psi) - \psi_{xx} + (1+\alpha(t))\psi - h_2)\,\tilde{\psi}dx = 0, \quad \forall \tilde{\psi} \in H_0^1(0,1),$$

ce qui implique que :

$$\varphi_x + \psi + (1+\alpha(t))\psi - \psi_{xx} = h_2,$$

en utilisent (3) de (2.6) on déduit alors :

$$\psi_{xx} = (1+\alpha(t))v + \varphi_x - g_2 \in L^2(0,1),$$

alors

$$\psi \in H^2(0,1),$$

il résulte que $\psi \in H^2(0.1) \cap H_0^1(0.1)$.

Le théorème de Hille-Yosida assure l'existence et l'unicité d'une solution de (2.1), ceci termine la démonstration. $\square$

2.3 Stabilité exponentielle

Dans cette section on va étudier la stabilité exponentielle du système de type Timoshenko (2.1).

2.3.1 Calcul de l'énergie :

Lemme. 2 :

Soit (φ, ψ) la solution de système (2.1), on définit l'énergie $\mathscr{E}(t)$ associé au système (2.1), pour tout $t \geq 0$ on a :

$$E(t) = \frac{1}{2}\Big[\int_0^1 \varphi_t^2 + \psi_t^2 + (\varphi_x + \psi)^2 + \psi_x^2\Big], \tag{2.8}$$

avec :

$$E'(t) = -\int_0^1 \alpha(t)\psi_t^2 \leq 0. \tag{2.9}$$

Démonstration. En multipliant les deux équations de (2.1) par φ_t et ψ_t respectivement,et on intègre sur (0.1),on obtient :

$$\int_0^1 \varphi_{tt}\varphi_t dx - \int_0^1 (\varphi_x + \psi)_x \varphi_t dx = 0, \tag{2.10}$$

et

$$\int_0^1 \psi_{tt}\psi_t dx - \int_0^1 \psi_{xx}\psi_t dx + \int_0^1 (\varphi_x + \psi)\psi_t dx + \int_0^1 \alpha(t)\psi_t^2 dx = 0, \tag{2.11}$$

et par une intégration par partier sur les deux équttion (2.10)et(2.11), on obtient :

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^1 \varphi_t^2 dx - [(\varphi_x + \psi)\varphi_t]_0^1 + \int_0^1 (\varphi_x + \psi)\varphi_{xt} dx = 0, \tag{2.12}$$

et

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^1 \psi_t^2 dx - [\psi_t\psi_x]_0^1 + \int_0^1 \psi_x\psi_{xt} dx + \int_0^1 (\varphi_x + \psi)\psi_t dx + \int_0^1 \alpha(t)\psi_t^2 dx = 0, \tag{2.13}$$

grâce aux conditions aux limites , on trouve :

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^1 \varphi_t^2 dx + \int_0^1 (\varphi_x + \psi)\varphi_{xt} dx = 0, \tag{2.14}$$

et

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^1 \psi_t^2 dx + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^1 \psi_x^2 dx + \int_0^1 (\varphi_x + \psi)\,\psi_t dx + \int_0^1 \alpha(t)\psi_t^2 dx = 0, \tag{2.15}$$

l'addition des deux équations (2.14) et (2.15) donne :

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left[\int_0 \varphi_t^2 + \psi_t^2 + (\varphi_x + \psi)^2\,\psi_x^2 dx\right] = -\int_0^1 \alpha(t)\psi_t^2,$$

d'ou :

$$E'(t) = -\int_0^1 \alpha(t)\psi_t^2 \leq 0,$$

et

$$E(t) = \frac{1}{2}\Big[\int_0^1 \varphi_t^2 + \psi_t^2 + (\varphi_x + \psi)^2 + \psi_x^2\Big].$$

D'où le résultat. □

2.3.2 Résultats principaux

Proposition. 7 :

Soit (φ, ψ) une solution du problème (2.1). Alors le problème (2.1) est exponentiellement stable. et on a l'estimation suivante :

$$E(t) \leq Ce^{-dt}. \tag{2.16}$$

Avec C et d sont deux constantes positives.

Démonstration. La preuve de la proposition (7), sera donnée à travers plusieurs lemmes.

Lemme. 3 :

Soit (φ, ψ) la solution du système (2.1), on définit la fonction $F_1(t)$ par :

$$F_1(t) := -\int_0^1 (\psi\psi_t + \varphi\varphi_t)\,dx, \tag{2.17}$$

alors on a :

$$\frac{d}{dt}F_1(t) \leq -\int_0^1 (\psi_t^2 + \varphi_t^2)\,dx + \int_0^1 (\psi + \varphi_x)^2\,dx + c\int_0^1 \psi_x^2 dx + c\int_0^1 \psi_t^2 dx. \tag{2.18}$$

Démonstration. On a :

$$\frac{d}{dt}F_1(t) = -\int_0^1 \psi_t^2 + \psi\psi_{tt} + \varphi_t^2 + \varphi\varphi_{tt}dx,$$

on utilise les deux equations de (2.1) on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}F_1(t) &= -\int_0^1 \left[\psi_t^2 + \psi\left(\psi_{xx} - (\varphi_x + \psi) - \alpha(t)\psi_t\right) + \varphi_t^2 + \varphi\left(\varphi_x + \psi\right)_x\right]dx,\\ &= -\int_0^1 \left(\psi_t^2 + \varphi_t^2\right)dx - \int_0^1 \psi\psi_{xx}dx + \int_0^1 \psi\left(\varphi_x + \psi\right)dx + \int_0^1 \alpha(t)\psi\psi_t dx - \int_0^1 \varphi\left(\varphi_x + \psi\right)_x dx,\end{aligned}$$

on intègre par parties et on utilise les conditions au bord on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}F_1(t) = &-\int_0^1 \left(\psi_t^2 + \varphi_t^2\right)dx + \int_0^1 \psi_x^2 dx + \int_0^1 \psi\left(\varphi_x + \psi\right)dx + \int_0^1 \alpha(t)\psi\psi_t dx,\\ &+\int_0^1 \varphi_x\left(\varphi_x + \psi\right)dx,\\ &= -\int_0^1 \left(\psi_t^2 + \varphi_t^2\right)dx + \int_0^1 \psi_x^2 dx + \int_0^1 \left(\varphi_x + \psi\right)^2 dx + \int_0^1 \alpha(t)\psi\psi_t dx,\end{aligned}$$

on applique l'inégalité de Young, on trouve :

$$\int_0^1 \alpha(t)\psi\psi_t dx \leq \frac{1}{2}\int_0^1 |\alpha(t)|^2\psi^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^1 \psi_t^2 dx,$$

d'où

$$\frac{d}{dt}F_1(t) \leq -\int_0^1 \left(\psi_t^2 + \varphi_t^2\right)dx + \int_0^1 \psi_x^2 dx + \int_0^1 \left(\varphi_x + \psi\right)^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^1 |\alpha(t)|^2\psi^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^1 \psi_t^2 dx,$$

on applique l'inégalité de Poincaré, on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}F_1(t) &\leq -\int_0^1 \left(\psi_t^2 + \varphi_t^2\right)dx + \int_0^1 \psi_x^2 dx + \int_0^1 \left(\varphi_x + \psi\right)^2 dx + \int_0^1 \frac{1}{2}|\alpha(t)|^2\psi_x^2 dx + \int_0^1 \frac{1}{2}\psi_t^2 dx,\\ &\leq -\int_0^1 \left(\psi_t^2 + \varphi_t^2\right)dx + \int_0^1 \left(\varphi_x + \psi\right)^2 dx + c\int_0^1 \psi_x^2 dx + c\int_0^1 \psi_t^2 dx.\end{aligned}$$

avec $c > 0$. □

Lemme. 4 :

Soit (φ, ψ) la solution du système (2.1), on définit la fonction $F_2(t)$ par :

$$F_2(t) := \int_0^1 \psi_t \left(\psi + \varphi_x\right) dx + \int_0^1 \psi_x \varphi_t dx, \tag{2.19}$$

alors on a :

$$\frac{d}{dt} F_2(t) \leq \left[\psi_x + \varphi_x\right]_{x=0}^{x=1} - (1-\varepsilon) \int_0^1 \left(\varphi_x . \psi\right)^2 dx + c\left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right) \int_0^1 \psi_t^2 dx. \tag{2.20}$$

pour tout $c > 0$ et $\xi < 1$.

Démonstration. On a

$$\frac{d}{dt} F_2(t) = \int_0^1 \psi_{tt} \left(\varphi_x + \psi\right) + \psi_t \left(\varphi_{xt} + \psi_t\right) dx + \int_0^1 \varphi_{tt} \psi_x + \psi_{xt} \varphi_t dx,$$

on utilise les deux equations de (2.1) on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} F_2(t) &= \int_0^1 \left(\varphi_x + \psi\right) \left[\psi_{xx} - \left(\varphi_x + \psi\right) - \alpha(t) \psi_t\right] dx + \int_0^1 \left(\varphi_{xt} + \psi_t\right) \psi_t dx, \\
&\quad + \int_0^1 \left(\varphi_x + \psi\right)_x \psi_x + \psi_{xt} \varphi_t dx, \\
&= \int_0^1 \psi_{xx} \left(\varphi_x + \psi\right) dx - \int_0^1 \left(\varphi_x + \psi\right)^2 dx - \int_0^1 \alpha(t) \psi_t \left(\varphi_x + \psi\right) dx + \int_0^1 \left(\varphi_{xt} + \psi_t\right) \psi_t dx, \\
&\quad + \int_0^1 \left(\varphi_x + \psi\right)_x \psi_x dx + \int_0^1 \psi_{xt} \varphi_t dx,
\end{aligned}$$

on intègre par parties on obtient :

$$\frac{d}{dt} F_2(t) = \left[\psi_x \left(\varphi_x + \psi\right)\right]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 \left(\varphi_x + \psi\right)^2 dx - \int_0^1 \alpha(t) \psi_t \left(\varphi_x + \psi\right) dx + \int_0^1 \psi_t^2 dx,$$

on utilise les conditions au bord on obtient :

$$\frac{d}{dt} F_2(t) = \left[\psi_x \varphi_x\right]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 \left(\varphi_x + \psi\right)^2 dx - \int_0^1 \alpha(t) \psi_t \left(\varphi_x + \psi\right) dx + \int_0^1 \psi_t^2 dx,$$

on applique l'inégalité de Young, on trouve :

$$\int_0^1 \alpha(t) \psi_t \left(\varphi_x + \psi\right) dx \leq \frac{1}{4\varepsilon} \int_0^1 |\alpha(t)|^2 \psi_t^2 dx + \varepsilon \int_0^1 \left(\varphi_x + \psi\right)^2 dx$$

d'où

$$\frac{d}{dt}F_2(t) \leq [\psi_x\varphi_x]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 (\varphi_x+\psi)^2\,dx + \int_0^1 \psi_t^2 dx + \frac{1}{4\varepsilon}\int_0^1 |\alpha(t)|^2\psi_t^2 dx + \varepsilon\int_0^1 (\varphi_x+\psi)^2\,dx,$$
$$\leq [\psi_x\varphi_x]_{x=0}^{x=1} - (1-\varepsilon)\int_0^1 (\varphi_x+\psi)^2\,dx + c\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)\int_0^1 \psi_t^2 dx,$$

□

Lemme. 5 :

Soit (φ,ψ) la solution du système (2.1), et Soit $z\in C^1([0,1])$ une fonction vérifie $z(0) = -z(1) = 2$. on définit la fonction $F_3(t)$ par :

$$F_3(t) := \frac{1}{4\varepsilon}\int_0^1 z(x)\psi_t\psi_x dx + \varepsilon\int_0^1 z(x)\varphi_t\varphi_x dx, \tag{2.21}$$

alors on a :

$$\frac{d}{dt}F_3(t) \leq -\frac{1}{4\varepsilon}\left(\left(\psi_x^2(1,t)\right)+\left(\psi_x^2(0,t)\right)\right) - \varepsilon\left(\left(\varphi_x^2(1,t)\right)+\left(\varphi_x^2(0,t)\right)\right) + \varepsilon c\int_0^1 \varphi_t^2 dx$$
$$+\left(\frac{1}{4}+\varepsilon c\right)\int_0^1 (\varphi_x+\psi)^2\,dx + \frac{c}{\varepsilon^2}\int_0^1 \psi_x^2 dx + c\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)\int_0^1 \psi_t^2 dx. \tag{2.22}$$

pour tout $c>0$ et $\xi<1$.

Démonstration. On a

$$\frac{d}{dt}F_3(t) = \frac{1}{4\varepsilon}\int_0^1 z(x)\psi_{tt}\psi_x dx + \frac{1}{4\varepsilon}\int_0^1 z(x)\psi_t\psi_{xt}dx + \varepsilon\int_0^1 z(x)\varphi_{tt}\varphi_x dx + \varepsilon\int_0^1 z(x)\varphi_t\varphi_{tx}dx,$$

On utilise les deux equations de (2.1) on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}F_3(t) =& \frac{1}{4\varepsilon}\int_0^1 z(x)\left[\psi_{xx}-(\psi+\varphi_x)-\alpha(t)\psi_t\right]\psi_x dx + \frac{1}{4\varepsilon}\int_0^1 z(x)\psi_t\psi_{xt}dx + \varepsilon\int_0^1 z(x)\varphi_t\varphi_{tx}dx\\
&+\varepsilon\int_0^1 z(x)\left(\psi+\varphi_x\right)_x\varphi_x dx,\\
=&\frac{1}{4\varepsilon}\int_0^1 z(x)\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\psi_x^2 dx - \frac{1}{4\varepsilon}\int_0^1 z(x)\psi_x\left(\psi+\varphi_x\right)dx - \frac{1}{4\varepsilon}\int_0^1 z(x)\alpha(t)\psi_t\psi_x dx\\
&+\frac{1}{4\varepsilon}\int_0^1 z(x)\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\psi_t^2 dx + \varepsilon\int_0^1 z(x)\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\varphi_t^2 dx + \varepsilon\int_0^1 z(x)\left(\psi+\varphi_x\right)_x\left(\psi+\varphi_x\right)dx\\
&-\varepsilon\int_0^1 z(x)\left(\psi+\varphi_x\right)_x\psi dx,\end{aligned}$$

On intègre par parties on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}F_3(t) =&\frac{1}{4\varepsilon}\left[\frac{1}{2}z(x)\psi_x^2\right]_0^1-\frac{1}{8\varepsilon}\int_0^1 z'(x)\psi_x^2dx-\frac{1}{4\varepsilon}\int_0^1 z(x)\psi_x\left(\psi+\varphi_x\right)dx\\ &-\frac{1}{4\varepsilon}\int_0^1 z(x)\alpha(t)\psi_t\psi_xdx+\frac{1}{4\varepsilon}\left[\frac{1}{2}z(x)\psi_t^2\right]_0^1-\frac{1}{8\varepsilon}\int_0^1 z'(x)\psi_t^2dx+\varepsilon\left[\frac{1}{2}z(x)\varphi_t^2\right]_0^1\\ &-\frac{\varepsilon}{2}\int_0^1 z'(x)\varphi_t^2dx+\varepsilon\left[\frac{1}{2}z(x)\left(\varphi_x+\psi\right)^2\right]_0^1-\frac{\varepsilon}{2}\int_0^1 z'(x)\left(\varphi_x+\psi\right)^2dx\\ &-\varepsilon\left[z(x)\psi\left(\varphi_x+\psi\right)\right]_0^1+\varepsilon\int_0^1\left(z(x)\psi\right)_x\left(\psi+\varphi_x\right)dx,\end{aligned}$$

On utilise les conditions au bord on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}F_3(t) =&-\frac{1}{4\varepsilon}\left[\psi_x^2(1,t)+\psi_x^2(0,t)\right]-\frac{1}{8\varepsilon}\int_0^1 z'(x)\psi_x^2dx-\frac{1}{4\varepsilon}\int_0^1 z(x)\psi_x\left(\psi+\varphi_x\right)dx\\ &-\frac{1}{4\varepsilon}\int_0^1 z(x)\alpha(t)\psi_t\psi_xdx-\frac{1}{8\varepsilon}\int_0^1 z'(x)\psi_t^2dx-\frac{\varepsilon}{2}\int_0^1 z'(x)\varphi_t^2dx-\varepsilon\left[\varphi_x^2(1,t)+\varphi_x^2(0,t)\right]\\ &-\frac{\varepsilon}{2}\int_0^1 z'(x)\left(\psi+\varphi_x\right)^2dx+\varepsilon\int_0^1 z'(x)\psi\left(\psi+\varphi_x\right)dx+\varepsilon\int_0^1 z(x)\psi_x\left(\psi+\varphi_x\right)dx\end{aligned}$$

On applique l'inégalité de Young, et de Poincaré, et en utilisent le fait que :
$\varphi_x^2\leq 2\left(\psi+\varphi_x\right)^2+2\psi^2$, on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}F_3(t)\leq&-\frac{1}{4\varepsilon}\left[\psi_x^2(1,t)+\psi_x^2(0,t)\right]+\frac{c}{\varepsilon}\int_0^1\psi_x^2dx+\frac{c}{\varepsilon^2}\int_0^1\psi_x^2dx+\frac{1}{4}\int_0^1\left(\psi+\varphi_x\right)^2dx\\ &+\frac{c}{\varepsilon^2}\int_0^1\psi_x^2dx+c\int_0^1\psi_t^2dx+\frac{c}{\varepsilon}\int_0^1\psi_t^2dx+c\varepsilon\int_0^1\varphi_t^2dx-\varepsilon\left[\varphi_x^2(1,t)+\varphi^2(0,t)\right]\\ &+c\varepsilon\int_0^1\left(\psi+\varphi_x\right)^2dx+\frac{1}{4}\int_0^1\psi_x^2dx+c\varepsilon\int_0^1\left(\psi+\varphi_x\right)^2dx+\frac{1}{4}\int_0^1\psi_x^2dx\\ &+c\varepsilon\int_0^1\left(\psi+\varphi_x\right)^2dx\end{aligned}$$

D'ou

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}F_3(t)\leq&-\frac{1}{4\varepsilon}\left(\left(\psi_x(1,t)\right)^2+\left(\psi_x(0,t)\right)^2\right)-\varepsilon\left(\left(\varphi_x(1,t)\right)^2+\left(\varphi_x(0,t)\right)^2\right)+\varepsilon c\int_0^1\varphi_t^2dx\\ &+\left(\frac{1}{4}+\varepsilon c\right)\int_0^1\left(\varphi_x+\psi\right)^2dx+\frac{c}{\varepsilon^2}\int_0^1\psi_x^2dx+c\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)\int_0^1\psi_t^2dx\end{aligned}$$

$\square$

Lemme. 6 :

Soit (φ, ψ) la solution du système (2.1), Pour ε fixé et assez petit et pour $c > 0$, on définit la fonction $F(t)$ par :

$$F(t) := 2c\varepsilon F_1(t) + F_2(t) + F_3(t), \tag{2.23}$$

Alors on a :

$$\frac{d}{dt}F(t) = 2c\varepsilon \frac{d}{dt}F_1(t) + \frac{d}{dt}F_2(t) + \frac{d}{dt}F_3(t), \tag{2.24}$$

Et on a l'estimation suivant :

$$\frac{d}{dt}F(t) \leq -\frac{1}{2}\int_0^1 (\psi + \varphi_x)^2 \, dx - \gamma \int_0^1 \varphi_t^2 dx + c\int_0^1 \psi_t^2 dx + c\int_0^1 \psi_x^2 dx, \tag{2.25}$$

avec $\gamma = c\varepsilon$,

Démonstration. On utilise les résultats des trois lemmes (3), (4) et (5) on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}F(t) \leq\, & 2c\varepsilon \left[-\int_0^1 \left(\psi_t^2 + \varphi_t^2\right) dx + \int_0^1 (\psi + \varphi_x)^2 \, dx + c\int_0^1 \psi_x^2 dx + c\int_0^1 \psi_t^2 dx \right] \\
& + [\psi_x + \varphi_x]_{x=0}^{x=1} - (1-\varepsilon)\int_0^1 (\psi + \varphi_x)^2 \, dx + c\int_0^1 \psi_t^2 dx + \frac{c}{\varepsilon}\int_0^1 \psi_t^2 dx \\
& - \frac{1}{4\varepsilon}\left((\psi_x(1,t))^2 + (\psi_x(0,t))^2\right) - \varepsilon\left((\varphi_x(1,t))^2 + (\varphi_x(0,t))^2\right) + \varepsilon c\int_0^1 \varphi_t^2 dx \\
& + \left(\frac{1}{4} + \varepsilon c\right)\int_0^1 (\varphi_x + \psi)^2 \, dx + \frac{c}{\varepsilon^2}\int_0^1 \psi_x^2 dx + \frac{c}{\varepsilon}\int_0^1 \psi_t^2 dx
\end{aligned}$$

On applique l'inégalité de Young,on obtient :

$$\psi_x \varphi_x \leq \varepsilon \varphi_x^2 + \frac{1}{4\varepsilon}\psi_x^2$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}F(t) \leq & -2c\varepsilon \int_0^1 \left(\psi_t^2 + \varphi_t^2\right) dx + 2c\varepsilon \int_0^1 (\psi + \varphi_x)^2 \, dx + 2c^2\varepsilon \int_0^1 \psi_x^2 dx + 2c^2\varepsilon \int_0^1 \psi_t^2 dx \\
& + \left[\left(\varepsilon\varphi_x^2(1,t) + \frac{1}{4\varepsilon}\psi_x^2(1,t)\right) - \left(\varepsilon\varphi_x^2(0,t) + \frac{1}{4\varepsilon}\psi_x^2(0,t)\right)\right] - (1-\varepsilon)\int_0^1 (\psi + \varphi_x)^2 \, dx \\
& + c\int_0^1 \psi_t^2 dx + \frac{c}{\varepsilon}\int_0^1 \psi_t^2 dx - \frac{1}{4\varepsilon}\left((\psi_x(1,t))^2 + (\psi_x(0,t))^2\right) - \varepsilon\left((\varphi_x(1,t))^2 + (\varphi_x(0,t))^2\right) \\
& + \varepsilon c\int_0^1 \varphi_t^2 dx + \left(\frac{1}{4} + \varepsilon c\right)\int_0^1 (\varphi_x + \psi)^2 \, dx + \frac{c}{\varepsilon^2}\int_0^1 \psi_x^2 dx + \frac{c}{\varepsilon}\int_0^1 \psi_t^2 dx, \\
\leq & \left[2c\varepsilon - (1-\varepsilon) + \left(\frac{1}{4} + \varepsilon c\right)\right]\int_0^1 (\varphi_x + \psi)^2 \, dx + \left[-2c\varepsilon + 2c^2\varepsilon + \frac{2c}{\varepsilon} + c\right]\int_0^1 \psi_t^2 dx \\
& + c\varepsilon \int_0^1 \varphi_t^2 dx + \frac{c}{\varepsilon}\int_0^1 \psi_t dx + \left[2c^2\varepsilon + \frac{c}{\varepsilon^2}\right]\int_0^1 \psi_x^2 dx,
\end{aligned}$$

On choisit ε assez petit tel que :

$$2c\varepsilon + \varepsilon + \varepsilon c < \frac{1}{4}$$

alors :

$$\frac{d}{dt}F(t) \leq -\frac{1}{2}\int_0^1 (\psi + \varphi_x)^2 \, dx - \gamma \int_0^1 \varphi_t^2 dx + c_1 \int_0^1 \psi_t^2 dx + c_2 \int_0^1 \psi_x^2 dx,$$

où $\gamma = c\varepsilon$, $-2c\varepsilon + 2c^2\varepsilon + \frac{2c}{\varepsilon} + c$ et $c_2 = 2c^2\varepsilon + \frac{c}{\varepsilon^2}$ □

Lemme. 7 :

Soit (φ, ψ) la solution du système (2.1), on définit la fonction $\theta(t)$ la solution de :

$$-\theta_{xx} = \psi_x, \quad \theta(0) = \theta(1) = 0. \tag{2.26}$$

Alors on a l'estimation suivant :

$$\int_0^1 \theta_x^2 dx \leq \int_0^1 \psi^2 dx \text{ et } \int_0^1 \theta_t^2 dx \leq \int_0^1 \psi_t^2 dx. \tag{2.27}$$

Démonstration. On a

$$-\theta_{xx} = \psi_x,$$

On multiple l'équation (2.26) par θ et on intègre sur [0,1] on obtient :

$$-\int_0^1 \theta_{xx}\theta dx = \int_0^1 \psi_x \theta dx,$$

On intègre par parties on obtient :

$$\int_0^1 \theta_x^2 dx - [\theta_x \theta]_0^1 = -\int_0^1 \psi\theta_x dx + [\theta\psi]_0^1,$$

On utilise les conditions au bord on obtient :

$$\int_0^1 \theta_x^2 dx = -\int_0^1 \psi\theta_x dx$$

et en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on trouve

$$\int_0^1 \theta_x^2 dx \leq \sqrt{\int_0^1 \theta_x^2 dx}\sqrt{\int_0^1 \psi^2 dx}$$

Après une simplification, on trouve

$$\sqrt{\int_0^1 \theta_x^2 dx} \leq \sqrt{\int_0^1 \psi^2 dx}$$

D'où

$$\int_0^1 \theta_x^2 dx \leq \int_0^1 \psi^2 dx$$

En dérivant par rapport à t, on obtient :

$$\int_0^1 \theta_{xt}^2 dx \leq \int_0^1 \psi_t^2 dx$$

L'inégalité de Poincaré implique :

$$\int_0^1 \theta_t^2 dx \leq \int_0^1 \theta_{xt}^2 dx \leq \int_0^1 \psi_t^2 dx$$

□

Lemme. 8 :

Soit (φ, ψ) la solution du système (2.1), on définit la fonction $K(t)$ tell que :

$$K(t) = \int_0^1 (\psi\psi_t + \theta\varphi_t)\, dx, \tag{2.28}$$

alors on :

$$K'(t) \leq -\frac{1}{2}\int_0^1 \psi_x^2 dx + c\left(1+\frac{1}{\delta}\right)\int_0^1 \psi_t^2 dx + c\delta\int_0^1 \varphi_t^2 dx, \tag{2.29}$$

pour tout $0 < \delta < 1$.

Démonstration.

$$\begin{aligned} K'(t) &= \int_0^1 \left(\psi_t^2 + \psi\psi_{tt} + \theta_t\varphi_t + \theta\varphi_{tt}\right) dx, \\ &= \int_0^1 \psi_t^2 dx + \int_0^1 \psi\left[\psi_{xx} - (\varphi_x + \psi) - \alpha(t)\psi_t\right] dx + \int_0^1 \theta_t\varphi_t dx + \int_0^1 \theta\left(\varphi_x + \psi\right)_x dx, \end{aligned}$$

une l'intégration par parties, donne :

$$\begin{aligned} K'(t) = &\int_0^1 \psi_t^2 dx + \left[\psi\psi_x\right]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 \psi_x^2 dx - \int_0^1 \psi\left(\varphi_x + \psi\right) dx - \int_0^1 \alpha(t)\psi\psi_t dx + \int_0^1 \theta_t\varphi_t dx \\ &+ \left[\theta\left(\varphi_x + \psi\right)\right]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 \theta_x\left(\varphi_x + \psi\right) dx, \end{aligned}$$

on peut écrire aussi :

$$K'(t) = \int_0^1 \psi_t^2 dx - \int_0^1 \psi_x^2 dx - \int_0^1 \psi \left(\varphi_x + \psi\right) dx - \int_0^1 \alpha(t)\psi\psi_t dx + \int_0^1 \theta_t \varphi_t dx$$
$$- \int_0^1 \theta_x \left(\varphi_x + \psi\right) dx,$$

Grâce à l'inégalité de Young, on obtient :

$$K'(t) = \int_0^1 \psi_t^2 dx - \int_0^1 \psi_x^2 dx + \frac{1}{4\delta} \int_0^1 \psi^2 dx + \delta \int_0^1 \left(\varphi_x + \psi\right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^1 \psi^2 dx + \frac{c}{2} \int_0^1 \psi_t^2 dx$$
$$+ \delta \int_0^1 \theta_t^2 dx + \frac{1}{4\delta} \int_0^1 \varphi_t^2 dx + \frac{1}{4\delta} \int_0^1 \theta_x^2 dx + \delta \int_0^1 \left(\varphi_x + \psi\right)^2 dx,$$

or d'après le Lemme (7) on arrive à :

$$K'(t) = \int_0^1 \psi_t^2 dx - \int_0^1 \psi_x^2 dx + \frac{1}{4\delta} \int_0^1 \psi^2 dx + \delta \int_0^1 \left(\varphi_x + \psi\right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^1 \psi^2 dx + \frac{c}{2} \int_0^1 \psi_t^2 dx$$
$$+ \delta \int_0^1 \psi_t^2 dx + \frac{1}{4\delta} \int_0^1 \varphi_t^2 dx + \frac{1}{4\delta} \int_0^1 \psi^2 dx + \delta \int_0^1 \left(\varphi_x + \psi\right)^2 dx,$$

et d'après l'inégalité de Poincaré, on a :

$$K'(t) \leq -\frac{1}{2} \int_0^1 \psi_x^2 dx + c\left(1 + \frac{1}{\delta}\right) \int_0^1 \psi_t^2 dx + c\delta \int_0^1 \varphi_t^2 dx.$$

□

Lemme. 9 :

Soit (φ, ψ) la solution du système (2.1), on définit la fonction de Lyapunov $\mathcal{L}(t)$ par :

$$\mathcal{L}(t) := N_1 E(t) + N_2 K(t) + F(t),$$

avec $N_1, N_2 > 0$, et les fonctions E et $\mathcal{L}(t)$ sont équivalents, alors :

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) \leq -\mathcal{K}_1 \int_0^1 \psi_x^2 dx - \mathcal{K}_2 \int_0^1 \varphi_t^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\psi + \varphi_x\right)^2 dx - \mathcal{K}_3 \int_0^1 \psi_t^2 dx. \tag{2.30}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}'(t) \leq & -N_1 \int_0^1 \alpha(t)\psi_t^2 dx + N_2 \left[-\frac{1}{2}\int_0^1 \psi_x^2 dx + c\left(1+\frac{1}{\delta}\right)\int_0^1 \psi_t^2 dx + c\delta \int_0^1 \varphi_t^2 dx \right] \\
& -\frac{1}{2}\int_0^1 (\psi+\varphi_x)^2\, dx - \tau \int_0^1 \varphi_t^2 dx + c\int_0^1 \psi_t^2 dx + c\int_0^1 \psi_x^2 dx, \\
& \leq \left(-N_1 c + c\frac{N_2}{\delta} + c\right)\int_0^1 \psi_t^2 dx + \left(-\frac{N_2}{2} + c\right)\int_0^1 \psi_x^2 dx + (c\delta N_2 - \tau)\int_0^1 \varphi_t^2 dx \\
& -\frac{1}{2}\int_0^1 (\psi+\varphi_x)^2\, dx,
\end{aligned}$$

maintenant, on fixe N_2 tel que

$$\mathcal{K}_1 := \left(\frac{N_2}{2} - c\right) > 0,$$

et on choisit δ assez petit pour que

$$\mathcal{K}_2 := (\tau - c\delta N_2) > 0,$$

Finalement, on choisit N_1 assez grand tel que

$$\mathcal{K}_3 := N_1 c - c\frac{N_2}{\delta} - c > 0,$$

d'où

$$\mathcal{L}'(t) \leq -\mathcal{K}_1 \int_0^1 \psi_x^2 dx - \mathcal{K}_2 \int_0^1 \varphi_t^2 dx - \frac{1}{2}\int_0^1 (\psi+\varphi_x)^2\, dx - \mathcal{K}_3 \int_0^1 \psi_t^2 dx$$

□

on a : pour $d_1 > 0$

$$\mathcal{L}'(t) \leq -d_1 E(t),$$

et comme et $\mathcal{L}(t) \sim E(t)$, on a pour $d > 0$:

$$\mathcal{L}'(t) \leq -d\mathcal{L}(t),$$

une intégration simple mené à :

$$\mathcal{L}(t) \leq \mathcal{L}(0)e^{-dt} \quad \forall t \geq 0,$$

l'équivalence de $\mathcal{L}$ et E implique. pour un certain $R > 0$

$$E(t) \leq Ce^{-dt} \quad \forall t \geq 0.$$

Ceci termine la démonstration de la proposition (7). $\square$

3

chapter

Chapitre 3

COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE D'UN SYSTÈME DE TYPE TIMOSHENKO DANS UN DOMAINE NON BORNÉ :

3.1 Introduction :

On considére le système de Timoshenko suivant :

$$\begin{cases} \varphi_{tt} - (\varphi_x + \psi)_x = 0 & \text{Dans } \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \\ \psi_{tt} - \psi_{xx} + (\varphi_x + \psi) + \alpha\psi_t = 0 & \text{Dans } \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \\ \varphi(0,.) = \varphi_0, & \varphi_t(0,.) = \varphi_1, \\ \psi(0,.) = \psi_0, & \psi_t(0,.) = \psi_1, \end{cases} \tag{3.1}$$

Avec t désigne la dérivée par rapport à la variable t et l'indice x désigne la dérivée par rapport à la variable spatiale x, φ est le déplacement transversal du poutre, et ψ est l'angle de rotation du filament du poutre.

De plus, α est une constante positive caractérise les propriétés physiques de la poutre et du filament.

On écrit le système (3.1) sous forme d'un système des equations différentielles du premier ordre. Par le changement des variables suivants :

$$\boldsymbol{v} = \varphi_{\boldsymbol{x}} + \psi, \quad \boldsymbol{u} = \varphi_t, \quad \boldsymbol{z} = \psi_{\boldsymbol{x}}, \quad \boldsymbol{y} = \psi_t.$$

Le système (3.1) devient :

$$\begin{cases} v_t - u_x - y = 0, \\ u_t - v_x = 0, \\ z_t - y_x = 0, \\ y_t - z_x + v + \alpha y = 0, \end{cases} \tag{3.2}$$

Avec les conditions initiales suivantes :

$$(v, u, z, y)(x, 0) = (v_0, u_0, z_0, y_0), \tag{3.3}$$

Le système (3.2), (3.3) s'écrit aussi sou la forme :

$$\begin{cases} AU_t + BU_x + CU = 0, \\ U(x,0) = U_0 \qquad U_t(x,0) = U_1, \end{cases} \tag{3.4}$$

Avec U est la solution du système (3.2), A, B et C sont des matrices.

tell que :

$$U = \begin{pmatrix} v \\ u \\ z \\ y \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

et $U_0 = (v_0, u_0, z_0, y_0)^T$,

Une transformation de Fourier appliquée au système (3.2),(3.3) donne :

$$\begin{cases} \hat{v}_t - i\xi\hat{u} - \hat{y} = 0, \\ \hat{u}_t - i\xi\hat{v} = 0, \\ \hat{z}_t - i\xi\hat{y} = 0, \\ \hat{y}_t - i\xi\hat{z} + \hat{v} + \alpha\hat{y} = 0, \end{cases} \tag{3.5}$$

3.2 Calcul de l'énergie :

Lemme. 10 :

Soit $(\hat{v}, \hat{u}, \hat{z}, \hat{y})$ la solution de système (3.5), on définit l'énergie $\hat{\mathscr{E}}(\xi, t)$ associé au système (3.5), pour tout $t \geq 0$ on a :

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\mathscr{E}}(\xi,t)}{\mathrm{d}t} = -\alpha|\hat{y}|^2, \tag{3.6}$$

Avec :

$$\hat{\mathscr{E}}(\xi,t) = \frac{1}{2}(|\hat{v}|^2 + |\hat{u}|^2 + |\hat{z}|^2 + |\hat{y}|^2) = \frac{1}{2}|\hat{U}(\xi,t)|^2 \tag{3.7}$$

Démonstration. En multipliant les quatre équations de (3.5) par $\bar{\hat{v}}, \bar{\hat{u}}, \bar{\hat{z}}$ et $\bar{\hat{y}}$ respectivement,on obtient :

$$\begin{cases} \mathrm{Re}(\bar{\hat{v}}\hat{v}_t) - \mathrm{Re}(i\xi\bar{\hat{v}}\hat{u}) - \mathrm{Re}(\bar{\hat{v}}\hat{y}) = 0, & (1) \\ \mathrm{Re}(\bar{\hat{u}}\hat{u}_t) - \mathrm{Re}(i\xi\bar{\hat{u}}\hat{v}) = 0, & (2) \\ \mathrm{Re}(\bar{\hat{z}}\hat{z}_t) - \mathrm{Re}(i\xi\bar{\hat{z}}\hat{y}) = 0, & (3) \\ \mathrm{Re}(\bar{\hat{y}}\hat{y}_t) - \mathrm{Re}(i\xi\bar{\hat{y}}\hat{z}) + \mathrm{Re}(\bar{\hat{y}}\hat{v}) + \mathrm{Re}(\alpha\bar{\hat{y}}\hat{y}) = 0, & (4) \end{cases} \tag{3.8}$$

En combinant (1), (2), (3) et (4) on trouve la relation suivante :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(|\hat{v}|^2+|\hat{u}|^2+|\hat{z}|^2+|\hat{y}|^2\right)+\alpha|\hat{y}|^2=0,$$

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\mathscr{E}}(\xi,t)}{\mathrm{d}t}=-\alpha|\hat{y}|^2,$$

D'où $\quad \hat{\mathscr{E}}(\xi,t)=\frac{1}{2}(|\hat{v}|^2+|\hat{u}|^2+|\hat{z}|^2+|\hat{y}|^2\ ),$

D'où le résultat. □

3.3 Résultats principaux

Proposition. 8 :

Soit $\hat{U}(\xi,t)$ la solution du système (3.5), Pour tout $t\geq 0$ et $\xi\in\mathbb{R}$, on a l'estimation suivante :

$$|\hat{U}(\xi,t)|^2\leq Ce^{-c\rho(\xi)t}|\hat{U}(\xi,0)|^2, \tag{3.9}$$

Avec $\rho(\xi)=\frac{\xi^2}{(1+\xi^2)^2}$, et C , c sont deux constants positive.

Démonstration. La preuve de la proposition (8), sera donnée à travers plusieurs lemmes.

Lemme. 11 :

Soit $\hat{U}=(\hat{v},\hat{u},\hat{z},\hat{y})$ la solution du système (3.5), on définit la fonction $\hat{\mathscr{F}}(\xi,t)$ par :

$$\mathscr{F}(\xi,t)=\mathrm{Re}(i\xi\hat{v}\bar{\hat{u}}+i\xi\hat{y}\bar{\hat{z}}), \tag{3.10}$$

alors, on a :

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}\mathscr{F}(\xi,t)}{\mathrm{d}t}+\xi^2\left(|\hat{u}|^2+|\hat{z}|^2\right)-\xi^2\left(|\hat{v}|^2+|\hat{y}|^2\right)\\&\quad=\mathrm{Re}(i\xi\hat{y}\bar{\hat{u}})-\mathrm{Re}(i\xi\hat{v}\bar{\hat{z}})-\mathrm{Re}(\alpha i\xi\hat{y}\bar{\hat{z}}),\end{aligned} \tag{3.11}$$

et pour tout $\epsilon_1>0$ on a l'estimation suivant :

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}\mathscr{F}(\xi,t)}{\mathrm{d}t}+(1-\epsilon_1)\xi^2|\hat{u}|^2+(1-\epsilon_1)\xi^2|\hat{z}|^2\\&\quad\leq C(\epsilon_1)(1+\xi^2)(|\hat{v}|^2+|\hat{y}|^2),\end{aligned} \tag{3.12}$$

Démonstration. En multipliant la première équation de (3.5) par $i\xi\bar{\hat{u}}$ on obtient :

$$\mathrm{Re}(i\xi\bar{\hat{u}}\hat{v}_t)+\xi^2|\hat{u}|^2-\mathrm{Re}(i\xi\bar{\hat{u}}\hat{y})=0, \tag{3.13}$$

et en multipliant la deuxième équation par $-i\xi\bar{\hat{v}}$ on obtient :

$$\mathrm{Re}(-i\xi\overline{\hat{v}}\hat{u}_t) - \xi^2|\hat{v}|^2 = 0, \tag{3.14}$$

l'addition des deux équations (3.13) et (3.14) donne :

$$\frac{d}{dt}\mathrm{Re}(i\xi(\hat{v}\overline{\hat{u}}) + \xi^2|\hat{u}|^2 - \xi^2|\hat{v}|^2 - \mathrm{Re}(i\xi\hat{y}\overline{\hat{u}}) = 0. \tag{3.15}$$

de même, en multipliant la troisième équation de (3.5) par $-i\xi\bar{\hat{y}}$ on obtient :

$$\mathrm{Re}(-i\xi\hat{z}_t\bar{\hat{y}}) - \xi^2|\hat{y}|^2 = 0, \tag{3.16}$$

et la quatrième équation de (3.6) par $i\xi\bar{\hat{z}}$ on obtient :

$$\mathrm{Re}(i\xi\hat{y}_t\bar{\hat{z}}) + \xi^2|\hat{z}|^2 + \mathrm{Re}(i\xi\hat{v}\bar{\hat{z}}) + \mathrm{Re}(\alpha i\xi\hat{y}\bar{\hat{z}}) = 0, \tag{3.17}$$

l'addition des deux dernières égalités(3.16)-(3.17) on obtient :

$$\frac{d}{dt}\mathrm{Re}(i\xi\overline{\hat{y}}\hat{z}) + \xi^2|\hat{z}|^2 - \xi^2|\hat{y}|^2 + \mathrm{Re}(i\xi\hat{v}\bar{\hat{z}}) + \mathrm{Re}(\alpha i\xi\hat{y}\bar{\hat{z}}) = 0, \tag{3.18}$$

en combinant les égalités (3.15) et (3.18) on obtient :

$$\frac{d}{dt}\mathrm{Re}(i\xi(\hat{v}\overline{\hat{u}} + \overline{\hat{y}}\hat{z})) + \xi^2(|\hat{u}|^2 + |\hat{z}|^2) - \xi^2(|\hat{v}|^2 + |\hat{y}|^2) - \mathrm{Re}(i\xi\hat{y}\overline{\hat{u}}) + \mathrm{Re}(i\xi\hat{v}\bar{\hat{z}}) + \mathrm{Re}(\alpha i\xi\hat{y}\bar{\hat{z}}) = 0,$$

i.e

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}\mathscr{F}(\xi,t)}{\mathrm{d}t} + \xi^2\left(|\hat{u}|^2 + |\hat{z}|^2\right) - \xi^2\left(|\hat{v}|^2 + |\hat{y}|^2\right)\\ &\quad = \mathrm{Re}(i\xi\hat{y}\overline{\hat{u}}) - \mathrm{Re}(i\xi\hat{v}\bar{\hat{z}}) - \mathrm{Re}(\alpha i\xi\hat{y}\bar{\hat{z}}).\end{aligned} \tag{3.19}$$

Avec

$$\mathscr{F}(\xi,t) = \mathrm{Re}(i\xi\hat{v}\overline{\hat{u}} + i\xi\overline{\hat{y}}\hat{z}). \tag{3.20}$$

On applique l'inégalité de Young ,au deuxième membre de l'équation (3.19), on obtient :

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}\mathscr{F}(\xi,t)}{\mathrm{d}t} + \xi^2\left(|\hat{u}|^2 + b|\hat{z}|^2\right) - \xi^2\left(|\hat{v}|^2 + |\hat{y}|^2\right)\\ &\quad \leq \epsilon_1\xi^2\left(|\hat{u}|^2 + |\hat{z}|^2\right) + C(\epsilon_1)(|\hat{v}|^2 + |\hat{y}|^2) \qquad \text{pour tout } \epsilon_1 > 0.\end{aligned}$$

ceci implique que :

$$\frac{\mathrm{d}\mathscr{F}(\xi,t)}{\mathrm{d}t} + (1-\epsilon_1)\xi^2|\hat{u}|^2 + (1-\epsilon_1)\xi^2|\hat{z}|^2 \leq C(\epsilon_1)(1+\xi^2)(|\hat{v}|^2 + |\hat{y}|^2).$$

Ce qui termine la démonstration du lemme(11). □

Lemme. 12 :

Soit $\hat{U} = (\hat{v}, \hat{u}, \hat{z}, \hat{y})$ la solution du système (3.5), on définit la fonction $\mathscr{K}(\xi,t)$ par :

$$\mathscr{K}(\xi,t) = \mathrm{Re}(\bar{\hat{v}}\hat{y} - \bar{\hat{u}}\hat{z}), \tag{3.21}$$

alors, on a :

$$\frac{d}{dt}\mathscr{K}(\xi,t) + |\hat{v}|^2 - |\hat{y}|^2 = -\mathrm{Re}(\alpha\hat{y}\bar{\hat{v}}), \tag{3.22}$$

et pour tout $\epsilon_2 > 0$ on a l'estimation suivant :

$$\frac{\mathrm{d}\mathscr{K}(\xi,t)}{\mathrm{d}t} + (1-\epsilon_2) \mid \hat{v} \mid^2 \leq C(\epsilon_2) \mid \hat{y} \mid^2 . \tag{3.23}$$

Démonstration. En multipliant la première équation de (3.5) par $\bar{\hat{y}}$,et la quatrième équation par $\bar{\hat{v}}$, on obtient :

$$\mathrm{Re}(\bar{\hat{y}}\hat{v}_t) - \mathrm{Re}(i\xi\bar{\hat{y}}\hat{u}) - \mid \hat{y} \mid^2 = 0, \tag{3.24}$$

et

$$\mathrm{Re}(\bar{\hat{v}}\hat{y}_t) - \mathrm{Re}(i\xi\hat{z}\bar{\hat{v}}) + \mid \hat{v} \mid^2 + \mathrm{Re}(\alpha\hat{y}\bar{\hat{v}}) = 0, \tag{3.25}$$

l'addition des deux équations (3.24) et (3.25), donne :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{Re}(\bar{\hat{v}}\hat{y}) - \mid \hat{y} \mid^2 + \mid \hat{v} \mid^2 - \mathrm{Re}(i\xi\bar{\hat{y}}\hat{u}) - \mathrm{Re}(i\xi\hat{z}\bar{\hat{v}}) + \mathrm{Re}(\alpha\hat{y}\bar{\hat{v}}) = 0. \tag{3.26}$$

De même, en multipliant la deuxième équation de (3.5) par $-\bar{\hat{z}}$, on obtient :

$$\mathrm{Re}(-\bar{\hat{z}}\hat{u}_t) + \mathrm{Re}(i\xi\bar{\hat{z}}\hat{v}) = 0, \tag{3.27}$$

et la troisième équation de (3.5) par $\bar{\hat{u}}$ on obtient :

$$\mathrm{Re}(-\bar{\hat{u}}\hat{z}_t) + \mathrm{Re}(i\xi\bar{\hat{u}}\hat{y}) = 0, \tag{3.28}$$

l'addition des deux dernières égalités(3.27)-(3.28), donne :

$$\frac{d}{dt}\operatorname{Re}(-\bar{\hat{u}}\hat{z})+\operatorname{Re}(i\xi\bar{\hat{z}}\hat{v})+\operatorname{Re}(i\xi\bar{\hat{u}}\hat{y})=0, \tag{3.29}$$

En combinant les égalités (3.26) et (3.29), on obtient :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\operatorname{Re}(\bar{\hat{v}}\hat{y}-\bar{\hat{u}}\hat{z})-\mid\hat{y}\mid^2+\mid\hat{v}\mid^2+\operatorname{Re}(\alpha\hat{y}\bar{\hat{v}})=0, \tag{3.30}$$

ceci implique que :

$$\frac{d}{dt}\mathscr{K}(\xi,t)+|\hat{v}|^2-|\hat{y}|^2=-\operatorname{Re}(\alpha\hat{y}\bar{\hat{v}}), \tag{3.31}$$

avec

$$\mathscr{K}(\xi,t)=\operatorname{Re}(\bar{\hat{v}}\hat{y}-\bar{\hat{u}}\hat{z}). \tag{3.32}$$

L'inégalité de Young implique que pour tout $\epsilon_2>0$ on a :

$$\frac{\mathrm{d}\mathscr{K}(\xi,t)}{\mathrm{d}t}+(1-\epsilon_2)\mid\hat{v}\mid^2\leq C(\epsilon_2)\mid\hat{y}\mid^2, \tag{3.33}$$

ce qui termine la démonstration du lemme (12). □

On définit la fonction Lyapunov $\mathscr{L}(\xi,t)$ par :

$$\mathscr{L}(\xi,t)=N\hat{\mathscr{E}}(\xi,t)+\frac{\xi^2}{1+\xi^2}\mathscr{F}(\xi,t)+\gamma\mathscr{K}(\xi,t) \tag{3.34}$$

telle que γ et N sont des constantes positives avec N suffisamment grand.

Lemme. 13 :

Pour $N>0$, assez grand, il existe deux réels positifs β_1 et β_2 vérifiant :

$$\beta_1(1+\xi^2)\hat{\mathscr{E}}(\xi,t)\leq\mathscr{L}(\xi,t)\leq\beta_2(1+\xi^2)\hat{\mathscr{E}}(\xi,t). \tag{3.35}$$

Autrement dit , les fonctions $\hat{\mathscr{E}}$ et $\mathscr{L}$ sont équivalentes.

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned}\mid\mathscr{L}(\xi,t)-N\hat{\mathscr{E}}(\xi,t)\mid&=\mid\mathscr{F}(\xi,t)+\gamma\mathscr{K}(\xi,t)\mid,\\&=\mid\operatorname{Re}(i\xi\hat{v}\bar{\hat{u}})+\operatorname{Re}(i\xi\hat{y}\bar{\hat{z}})+\gamma\operatorname{Re}(i\xi\bar{\hat{v}}\hat{y})-\gamma\operatorname{Re}(i\xi\bar{\hat{u}}\hat{z})\mid.\end{aligned}$$

A l'aide de l'inégalité de Young, on a :

$$\mid \mathscr{L}(\xi,t) - N\hat{\mathscr{E}}(\xi,t) \mid \leq C(\gamma)(1+\xi^2)(\mid \hat{v} \mid^2 + \mid \hat{u} \mid^2 + \mid \hat{y} \mid^2 + \mid \hat{z} \mid^2).$$

ceci implique que :

$$(N - C(\gamma))(1+\xi^2)\hat{\mathscr{E}}(\xi,t) \leq \mathscr{L}(\xi,t) \leq (N + C(\gamma))(1+\xi^2)\hat{\mathscr{E}}(\xi,t).$$

on prend N très grand , pour $\beta_1 = N - C(\gamma)$ et $\beta_2 = N + C(\gamma)$, on a l'inégalité (3.35) ce qui termine la démonstration du lemme (13) . □

Maintenant, nous somme prêts à prouver la proposition (8) .

Regroupant les dérivées des fonctions $\hat{\mathscr{E}}, \mathscr{F}$, et $\mathscr{K}$ on utilisant les équations (3.6),(3.12) et (3.23) on trouve :

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}\mathscr{L}(\xi,t)}{\mathrm{d}t} + N(\alpha|\hat{y}|^2) + (1-\epsilon_1)\frac{\xi^2}{1+\xi^2}|\hat{u}|^2 + (1-\epsilon_1)\frac{\xi^2}{1+\xi^2}|\hat{z}|^2 - C(\epsilon_1)(|\hat{v}|^2 + |\hat{y}|^2)\\ &+\gamma\Big((1-\epsilon_2)\mid \hat{v} \mid^2 - C(\epsilon_2)\mid \hat{y} \mid^2\Big) \leq 0,\end{aligned}$$

i.e

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}\mathscr{L}(\xi,t)}{\mathrm{d}t} + \Big(\gamma(1-\epsilon_2) - C(\epsilon_1)\Big) \mid \hat{v} \mid^2 + (1-\epsilon_1)\frac{\xi^2}{1+\xi^2}|\hat{u}|^2\\ &+(1-\epsilon_1)\frac{\xi^2}{1+\xi^2}|\hat{z}|^2 + \Big(N\alpha - C(\epsilon_1,\epsilon_2,\gamma)\Big)|\hat{y}|^2 \leq 0.\end{aligned} \tag{3.36}$$

;

- On choisit ϵ_1 et ϵ_2 assez petits telle que :

$$\epsilon_1 < 1 \text{ et } \epsilon_2 < 1 \ ,$$

- On choisit γ pour que :

$$\gamma > \frac{C(\epsilon_1)}{1-\epsilon_2} \ ,$$

- Finalement on choisit N assez grand pour que :

$$N > \frac{C(\epsilon_1) + \gamma C(\epsilon_2)}{\alpha} \ .$$

Par conséquent, pour un certain $\beta_0 > 0$, on a :

$$\frac{\mathrm{d}\mathscr{L}(\xi,t)}{\mathrm{d}t} + \beta_0\{\mid \hat{v} \mid^2 + \mid \hat{y} \mid^2 + \frac{\xi^2}{1+\xi^2} \mid \hat{u} \mid^2 + \frac{\xi^2}{1+\xi^2} \mid \hat{z} \mid^2\} \leq 0, \tag{3.37}$$

L'équation (3.37) s'écrit aussi :

$$\frac{\mathrm{d}\mathscr{L}(\xi,t)}{\mathrm{d}t}+\beta_0\mathscr{W}(\xi,t)\leq 0, \qquad \forall t\geq 0, \tag{3.38}$$

avec

$$\mathscr{W}(\xi,t)=\mid \hat{v}\mid^2+\mid \hat{y}\mid^2+\frac{\xi^2}{1+\xi^2}\mid \hat{u}\mid^2+\frac{\xi^2}{1+\xi^2}\mid \hat{z}\mid^2 . \tag{3.39}$$

D'autre part, a partir de l'équation (3.7) et l'équation (3.39),on en déduit que :

$$\mathscr{W}(\xi,t)\geq \alpha_0\frac{\xi^2}{1+\xi^2}\hat{\mathscr{E}}(\xi,t). \qquad \forall t\geq 0, \tag{3.40}$$

Les estimations (3.7),(3.35)et(3.40),donne :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\mathscr{L}(\xi,t)}{\mathrm{d}t}&\leq -\beta_0\mathscr{W}(\xi,t),\\ &\leq -\beta_0\alpha_0\frac{\xi^2}{1+\xi^2}\hat{\mathscr{E}}(\xi,t),\end{aligned}$$

ceci implique que :

$$\frac{\mathrm{d}\mathscr{L}(\xi,t)}{\mathrm{d}t}\leq \frac{\beta_0\alpha_0}{\beta_2}\frac{(\xi^2}{1+\xi^2)^2}\mathscr{L}(\xi,t), \tag{3.41}$$

Une intégration simple de l'équation (3.41) par rapport a t, mène a :

$$\mathscr{L}(\xi,t)\leq Ce^{-c\rho(\xi)t}\mathscr{L}(\xi,0), \tag{3.42}$$

Alors l'inégalité (3.35) et l'estimation (3.42) implique que :

$$\mid \hat{U}(\xi,t)\mid^2= Ce^{-c\rho(\xi)t}\mid \hat{U}(\xi,0)\mid^2, \tag{3.43}$$

avec $\rho(\xi)=\dfrac{\xi^2}{(1+\xi^2)^2}$.

Ce qui termine la démonstration du proposition(8) . $\square$

3.4 Taux de décroissance de la solution

Théorème. 10 :

Soit s un entier positif, et on suppose que :

$$U_0 = (v_0, u_0, z_0, y_0) \in H^s(\mathbb{R}) \cap L^{'}(\mathbb{R}),$$

Alors la solution $U = (v, u, z, y)$ du système (3.8)vérifier l'estimation suivante :

$$\| \partial_x^k U(t) \|_{L^2} \leq C(1+t)^{-(2k+1)/2} \| U_0 \|_{L1}^2 + C(1+t)^{-l} \| \partial_x^{k-l} U_0 \|_{L2}^2 . \tag{3.44}$$

ou k et l sont des entier positives satisfaisant $k + l \leq s$ et c une constante positive.

Démonstration. La preuve du théorème est basée sur la proposition (8).

Utilisant le théorème de Plancherel, et l'estimation (3.9), ona :

$$\begin{aligned} \| \partial_x^k U(t) \|_2^2 &= \int_{\mathbb{R}} | \xi |^{2k} | \hat{U}(\xi, t) |^2 \, d\xi, \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} | \xi |^{2k} \, e^{-c\rho(\xi)t} \, | \hat{U}(\xi, 0) |^2 \, d\xi, \end{aligned} \tag{3.45}$$

on remarque que $\rho(\xi)$ dépend du comportement de ξ donc on a :

$$\begin{cases} \rho(\xi) \geq c_1 \xi^2 & si \quad | \xi | \leq 1, \\ \rho(\xi) \geq c_1 \xi^{-2} & si \quad | \xi | \geq 1, \end{cases} \tag{3.46}$$

telle que c_1 et c_2 sont des constantes positives.

Donc, on écrit (3.45) comme suit :

$$\begin{aligned} \| \partial_x^k U(t) \|_2^2 &= C \int_{|\xi| \leq 1} | \xi |^{2k} \, e^{-c\rho(\xi)t} \, | \hat{U}(\xi, 0) |^2 \, d\xi + \int_{|\xi| \geq 1} | \xi |^{2k} \, e^{-c\rho(\xi)t} \, | \hat{U}(\xi, 0) |^2 \, d\xi, \\ &= I_1 + I_2. \end{aligned} \tag{3.47}$$

- Pour $| \xi | \leq 1$:

$$I = C \int_{|\xi| \leq 1} | \xi |^{2k} \, e^{-c\rho(\xi)t} \, | \hat{U}(\xi, 0) |^2 \, d\xi \leq C \| \hat{U}_0 \|_\infty^2 \int_{|\xi| \leq 1} | \xi |^{2k} \, e^{-c\xi^2 t} d\xi, \tag{3.48}$$

utilisant l'inégalité $\int_o^1 \mid \xi \mid^\sigma e^{-c\xi^2 t} d\xi \leq C(1+t)^{-(\sigma+1)/2}$, on en déduit que :

$$I \leq C \parallel U_0 \parallel_1^2 C(1+t)^{-(2k+1)/2}, \tag{3.49}$$

- pour $\mid \xi \mid \geq 1$:

$$\begin{aligned} I_2 &= C \int_{|\xi|\geq 1} \mid \xi \mid^{2k} e^{\rho(\xi)t} d\xi, \\ &= C \int_{|\xi|\geq 1} \mid \xi \mid^{2k} e^{-c\xi^{-2}t} d\xi, \\ &\leq CSup\Big(\mid \xi \mid^{-2l} e^{-c\xi^{-2}t} \Big) \int_{|\xi|\geq 1} \mid \xi \mid^{2(k+l)} d\xi. \end{aligned} \tag{3.50}$$

D'autre part, utilisant l'inégalité :

$$\sup_{|\xi|\geq 1} \Big\{ \mid \xi \mid^{-2l} e^{-c\xi^{-2}t} \Big\} \leq (1+t)^{-l}. \tag{3.51}$$

On en déduit que :

$$I_2 \leq C(1+t)^{-l} \parallel \partial_x^{k-l} U_0 \parallel_2^2 . \tag{3.52}$$

En combinat (3.49) et (3.52) dans (3.47) on obtient :

$$\parallel \partial_x^k U(t) \parallel_{L^2} \leq C(1+t)^{-(2k+1)/2} \parallel U_0 \parallel_{L1}^2 + C(1+t)^{-l} \parallel \partial_x^{k-l} U_0 \parallel_{L2}^2 .$$

Ce qui termine la démonstration du théorème(10) . □

CONCLUSION

Dans ce travail, on a considéré le système de Timoshenko suivant :

$$\begin{cases} \varphi_{tt} - (\varphi_x + \psi)_x = 0, \\ \psi_{tt} - \psi_{xx} + (\varphi_x + \psi) + \alpha(t)\psi_t = 0, \end{cases}$$

On a utilise le théorème de lax-Miligram et Hille-yosida pour montrer l'existence et l'unicité de la solution, et par la méthode de multiplicateur, on a montré la stabilité exponentielle de l'énergie de ce système dans $\Omega = (0,1)$; En suite, on a étudié le taux de décroissance de la solution de ce système dans $\Omega = \mathbb{R}$ .par la méthode de l'énergie dans un espace de Fourier.

Bibliographie

[1] Haïm Brézis, Analyse Fonctionnelle, théorie et applications. Dunod, 1999.

[2] F. Ammar-Khodja et A. Benabdallah, J. E. Munoz Rivera, R. Racke, Energy decay for Timoshenko systems of memory type, Journal of Differential Equations, 2003 ; 194(1) : 82-115.

[3] Said-Houari and Aslan Kasimov Decay property of Timoshenko system in thermoelasticity ,Meth. Appl. Sci. 2012, 35 314333

[4] Waël YOUSSEF, Contrôle et stabilisation de systèmes élastiques couplés, Thèse de doctorat,l'Université Paul Verlaine de Metz,juillet 2009.

[5] El Amrani : Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels, ellipses édition marketing S.A , 2008.

[6] J. U. Kim et Y. Renardy, Boundary control of the Timoshenko beam, SIAM Journal on Control and Optimization, 1987 ; 25(6) : 1417-1429.

[7] F. Ammar-Khodja, et S. Kerbal, A. E. Soufyane, Stabilization of the nonuniform Timoshenko beam, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2007 ; 327(1) :525-538.

[8] F. Ammar-Khodja et A. Benabdallah, J. E. Munoz Rivera, R. Racke, Energy decay for Timoshenko systems of memory type, Journal of Differential Equations, 2003 ; 194(1) : 82-115.