

République Algérienne Démocratique et populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de  
la Recherche Scientifique  
Université Djilali Bounaama Khemis Miliana  
Faculté des Sciences et de la Technologie  
Département de Mathématiques et Informatiques



Mémoire de fin d'étude  
En vue de l'obtention d'un diplôme de **Master** en Mathématique  
Spécialité Analyse Mathématique et Applications

## Thème :

# *Quelques Applications sur la Méthode MFTDM pour les équations différentielles fractionnaires*

Présenté par :  
Boukoftane Ilheme

Devant le jury composé de :

M. Haous	Univ.Djilali Bounâama	Examineur 1.
A. Yache	Univ.Djilali Bounâama	Examineur 2.
F. Chita	Univ.Djilali Bounâama	Encadreur.
M. Hachama	Univ.Djilali Bounâama	Co-Encadreur.

Année Universitaire : 2019/2020

## DÉDICACES

Je Dédie ce modeste travail

Aux deux personnes les plus chères à mon cœur et à ceux qui ne peuvent pas compter leurs vertus. Mon père et ma mère qui Dieu les garde

A ma chère sœur et mes frères et à toute ma famille

A tous mes amis

A tous mes amis de 2<sup>ème</sup> année master math.

**B.Ilheme**

## REMERCIEMENTS

tout d'abord, je remercie Allah le tout puissant de m'avoir donnée la patience, la volonté et l'énergie pour achever ce travail.

Je tiens à remercier mes encadreurs de mémoire Mme Chita Fouzia et M. Hachama Mohamed.

Je veux remercier également les membres du jury d'avoir accepté l'évaluation de mon travail

Toutes mes reconnaissances doivent à tous mes enseignants du cycle primaire à l'université qui ont constitué un apport considérable pour que j'atteigne ce jour et ce lieu.

Je remercie aussi tous ceux qui ont participé de près ou de loin à l'achèvement de ce travail

# Résumé

Les équations différentielles fractionnaires sont des généralisations des équations différentielles classiques.

L'objectif de ce mémoire est d'appliquer la méthode numérique "Multistage Fractionnaire Telescoping Decomposition Method" pour résoudre quelques types d'équations différentielles d'ordre fractionnaire en utilisant un programme informatique dans logiciel maple.

**Mots-clés :** intégration de Riemann Liouville, dérivés de Caputo , équation différentielle fractionnaire.

# Abstract

Fractional differential equations are generalizations of classical differential equations. The purpose of this memory is to apply the numerical method "Multistage Fractionnaire Telescoping Decomposition Method" to solve some types of fractional order differential equations using a computer program in maple software.

**Key-words :** Riemann–Liouville Integrals, Caputo derivatives, fractional differential equation.

# TABLE DES MATIÈRES

<b>Dédicaces</b>	<b>1</b>
<b>Remerciements</b>	<b>2</b>
<b>Table des figures</b>	<b>6</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>7</b>
<b>Introduction</b>	<b>8</b>
<b>1 Préliminaires</b>	<b>10</b>
1.1 Fonction gamma . . . . .	10
1.2 Fonction Béta . . . . .	11
1.3 Intégration Fractionnaire . . . . .	11
1.3.1 L'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville . . . . .	11
1.4 Dérivation fractionnaire . . . . .	12
1.4.1 La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville . . . . .	12
1.4.2 La dérivée fractionnaire au sens de Caputo . . . . .	12
<b>2 La méthode de décomposition télescopique</b>	<b>13</b>
2.1 Introduction . . . . .	13
2.2 La méthode décompositionnelle d'Adomian . . . . .	13
2.2.1 Principes de la méthode d'Adomian . . . . .	14
2.3 La Méthode de décomposition télescopique fractionnaire . . . . .	15
2.3.1 Description de la méthode FTDM . . . . .	15
2.3.2 La convergence de la méthode FTDM . . . . .	15
2.3.3 Programmation de la méthode décomposition télescopique frac- tionnaire . . . . .	18
2.3.4 Quelque exemple . . . . .	18
2.4 Principe de la méthode MFTDM . . . . .	24
<b>3 Applications de la méthode MFTDM</b>	<b>26</b>
3.1 Programmation de la méthode MFTDM . . . . .	26
3.1.1 Équation différentielle ordinaire non-linéaire d'ordre fraction- naire . . . . .	27

3.2	Équation aux dérivées partielles linéaire d'ordre fractionnaire temporelle	32
3.3	Équation aux dérivées partielles non-linéaire d'ordre fractionnaire . . .	36
3.4	L'équation de $K(2,2)$ non-linéaire d'ordre fractionnaire . . . . .	40
	<b>Conclusion générale</b>	<b>45</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>46</b>
	<b>Annexe A</b>	<b>47</b>

TABLE DES FIGURES
-------------------

2.1	la solution exacte et des solutions approximative de l'équation (2.24) selon quelque valeur de $\alpha$ . . . . .	20
2.2	la solution exacte et des solutions approximative de l'équation (2.27) selon quelque valeur de $\alpha$ . . . . .	23
3.1	Comparaison entre la solution exacte et la solution approximative . .	32
3.2	(a) le graphe de la solution exacte de l'équation(3.4), (b)et (c) les graphes de la solution approximative de l'équation(3.4) par la méthode MFTDM pour $\alpha = 1$ et $\alpha = 0.5$ respectivement. . . . .	36
3.3	(a) le graphe de la solution exacte de l'équation(3.7), (b)et (c) les graphes de la solution approximative de l'équation(3.7) par la méthode MFTDM pour $\alpha = 1$ et $\alpha = 0.5$ respectivement. . . . .	39
3.4	(a) le graphe de la solution exacte de l'équation(3.12), (b)et (c) les graphes de la solution approximative de l'équation(3.12) par la méthode MFTDM pour $\alpha = 1$ et $\alpha = 0.5$ respectivement. . . . .	42
3.5	(a)et (b) les graphes de la solution approximative de l'équation (3.15)-(3.16) par la méthode MFTDM pour $\beta = 1$ et $\beta = 0.5$ respectivement.	44

## LISTE DES TABLEAUX

3.1	Le résultat de la solution exacte de l'équation (3.14)	41
3.2	Le résultat de la solution de l'équation (3.12)-(3.13) pour $\alpha = 1$	42
3.3	Le résultat de la solution de l'équation (3.12)-(3.13) pour $\alpha = \frac{1}{2}$	42
3.4	Le résultat de la solution de l'équation (3.15)-(3.16) pour $\beta = 1$	43
3.5	Le résultat de la solution de l'équation (3.15)-(3.16) pour $\beta = \frac{1}{2}$	43



Le calcul fractionnaire traite des intégrales et des dérivées d'ordre réel ou même complexe. Il est une généralisation du calcul classique. Ses origines remontent à la fin du 17<sup>ième</sup> siècle, Le concept de dérivé fractionnaire est apparu pour la première fois dans une célèbre correspondance entre G.A. de L'Hospital et G.W. Leibniz, en 1695.

Le calcul fractionnaire a été construit sur des fondations formelles par de nombreux mathématiciens, par exemple Liouville, Riemann, Euler, Lagrange, Heaviside, Fourier, Abel etc. Au cours des soixante dernières années, le calcul fractionnaire avait joué un rôle très important dans divers domaines tels que la physique, la chimie, la mécanique, électricité, biologie, économie, théorie du contrôle, traitement du signal et de l'image, biophysique, phénomènes de flux sanguin, aérodynamique, ajustement de données expérimentales, etc.

La méthode "Telescoping Decomposition method"(TDM) a été proposée par Al-Refai et al en 2008[4]. Cette méthode a été appliquée pour résoudre les équations différentielles non linéaire du premier ordre

$$\begin{cases} u_t = f(t, u, u_t) & , t \in [0, T] \\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad (1)$$

Bouhassoun et al [5] ont appliqué la méthode TDM aux équations différentielles fractionnaires(FTDM), Ils ont révélé que cette méthode donne de bonnes solutions approximatives quand les intervalles considérés sont petits.

Dans le cas contraire la méthode commence à diverger tôt.

Pour pallier a cet effet et améliorer ainsi cette méthode, Bouhassoun En 2013[5] a utilisé la stratégie de Multistage (MFTDM), avec laquelle de bon résultats ont été obtenus.

L'objectif principal de ce mémoire est d'appliquer la méthode MFTDM ((Multistage Fractionnaire Telescoping Decomposition Method )pour résoudre les equation d'ordre fractionnaire.

Ce mémoire se compose en trois chapitres :

Dans le premier chapitre, nous présentons quelques préliminaires concernant les outils de base du calcul fractionnaire.

Dans le deuxième chapitre, nous présentons le principe de la méthode ADM, FTDM, MFTDM ainsi que leur convergence.

Dans le troisième chapitre, nous faisons un programme informatique sur logiciel maple de la méthode MFTDM pour résoudre quelques équations différentielle d'ordre fractionnaire.

## 1.1 Fonction gamma

L'une des fonctions de base du calcul fractionnaire est la fonction Gamma d'Euler  $\Gamma(\alpha)$  qui prolonge naturellement la factorielle aux nombres réels positifs (et même aux nombres complexes à parties réelles positives).

**Définition 1.** [1][3] On appelle fonction gamma d'Euler la fonction définie par :

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx, \quad \Re(\alpha), \alpha \in \mathbb{C}. \quad (1.1)$$

Cette intégrale convergente pour tout les complexes  $\alpha \in \mathbb{C}$ .

**Propriétés 1.** Une propriété importante de la fonction Gamma  $\Gamma(\alpha)$  est la relation de récurrence suivante :

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha), \quad \Re(\alpha) > 0, \quad (1.2)$$

qu'on peut la démontrer par une intégration par parties :

$$\begin{aligned} \Gamma(\alpha + 1) &= \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\alpha} dt \\ &= [-e^{-t} t^{\alpha}]_0^{+\infty} + \alpha \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt \\ &= \alpha\Gamma(\alpha) \end{aligned}$$

La fonction Gamma d'Euler généralise la factorielle car  $\Gamma(n + 1) = n!$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , en

effet  $\Gamma(1) = 1$  et en utilisant la relation 1.2 nous obtenons :

$$\begin{aligned}\Gamma(2) &= 1\Gamma(1) = 1! \\ \Gamma(3) &= 2\Gamma(2) = 2.1! = 2! \\ \Gamma(4) &= 3\Gamma(3) = 3.2! = 3! \\ &\vdots \\ \Gamma(n+1) &= n\Gamma(n) = n(n-1)! = n!\end{aligned}$$

## 1.2 Fonction Béta

**Définition 2.** [1][3] C'est une fonction de type Euler, Elle est définie par l'intégrale à deux paramètres suivante :

$$\beta(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx, \quad \Re(p) > 0, \Re(q) > 0. \quad (1.3)$$

La fonction Béta est liée à la fonction Gamma par la relation suivante :

$$\beta(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \quad \Re(p) > 0, \Re(q) > 0. \quad (1.4)$$

## 1.3 Intégration Fractionnaire

Dans cette section, on va définir l'intégrale d'ordre fractionnaire au sens de Riemann-Liouville.

### 1.3.1 L'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

**Définition 3.** [1] Soit  $f$  une fonction continue sur  $[a, b]$  de  $\mathbb{R}^+$ , on appelle intégrale de Riemann-Liouville d'ordre  $\alpha$  de  $f$  l'intégrale suivante :

$$(I_{0+}^{\alpha}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1}f(t)dt \quad \Re(\alpha) > 0, t > 0. \quad (1.5)$$

et

$$(I_{-}^{\alpha}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^{\infty} (t-x)^{\alpha-1}f(t)dt \quad \Re(\alpha) > 0, t > 0. \quad (1.6)$$

Les expressions  $I_{0+}^{\alpha}f$  et  $I_{-}^{\alpha}f$  sont appelés les intégrales fractionnaires (à gauche et à droite) de Riemann-Liouville d'ordre  $\alpha$  sur le demi-axe  $\mathbb{R}^+$

**Remarque 1.** Dans tout ce qui suit on va utiliser uniquement l'intégrale (à gauche).

## 1.4 Dérivation fractionnaire

### 1.4.1 La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

**Définition 4.** [1] Soit  $\alpha \in ]m - 1, m[$  avec  $m \in \mathbb{N}^*$ , la dérivée fractionnaire d'ordre  $\alpha$  au sens de Riemann-Liouville de la fonction  $f$  est définie par

$${}^{RL}(D_{0+}^{\alpha}f)(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^m (I_{0+}^{m-\alpha}f)(t) \quad (1.7)$$

$$= \frac{1}{m - \alpha} \left(\frac{d}{dt}\right)^m \int_0^t (t - s)^{m-\alpha-1} f(s) ds. \quad (1.8)$$

avec  $m = [\Re(\alpha)] + 1; \Re(\alpha) \geq 0; t > 0$ .

### 1.4.2 La dérivée fractionnaire au sens de Caputo

**Définition 5.** [1] Soit  $f \in C^m([a, b])$  avec  $m - 1 < \alpha < m$  tel que  $m \in \mathbb{N}$ , on appelle dérivée fractionnaire (à gauche) de  $f$  d'ordre  $\alpha > 0$  au sens de Caputo la fonction définie par :

$$\begin{aligned} ({}^c D_{0+}^{\alpha}f)(x) &:= (I_{0+}^{m-\alpha}f^{(m)})(x) \\ &= \frac{1}{m - \alpha} \int_0^x (x - t)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(t) dt \end{aligned} \quad (1.9)$$

## CHAPITRE 2

# LA MÉTHODE DE DÉCOMPOSITION TÉLESCOPIQUE

### 2.1 Introduction

La méthode de décomposition télescopique (TDM) a été proposée par Ali-Refai en 2008[3] pour résoudre une équation différentielle ordinaire. Cette méthode est une forme modifiée de la méthode ADM où les polynômes d'Adomian ne sont pas à calculer.

La méthode (TDM) a été appliquée à des équations différentielles d'ordre 2, à des équations d'ordre fractionnaire (FTDM), et en 2013 bouhassoun[5] a utilisé la stratégie de Multistage (MFTDM).

la solution numérique selon la méthode (TDM) est considérée une série de fonctions qui converge vers la solution exacte quand elle existe.

Dans ce chapitre, nous allons introduire la méthode MFTDM (Multistage Fractionnaire Telescoping Decomposition Methode). En s'intéressant au problème avec condition initiales suivant :

$${}^c D^\alpha u = f(t, u) \quad t \in \Omega \quad (2.1)$$

$$u^{(k)}(0^+) = b_k, \quad k = 0, 1, \dots, m-1 \quad (2.2)$$

où  $m$  est l'entier défini par  $m-1 < \alpha \leq m$ ,  ${}^c D^\alpha$  est la dérivé fractionnaire de Caputo d'ordre  $\alpha$ ,  $f : \Omega \times [b_0 - l, b_0 + l] \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue tel que  $\Omega = [0, T]$  et  $b_k \in \mathbb{R}, T > 0, l > 0$ .

### 2.2 La méthode décompositionnelle d'Adomian

La méthode ADM a été proposée par George Adomian pour résoudre des problèmes fonctionnels : équations algébriques, différentielles, intégrales, intégro différentielles, aux dérivées partielles(EDP).....

### 2.2.1 Principes de la méthode d'Adomian

Considérons l'équation fonctionnelle (sous la forme canonique) :

$$Au = f \quad (2.3)$$

. où  $A$  est un opérateur différentiel contenant des terme linéaires et des termes non linéaires et  $f$  est une fonction connue. Le terme linéaire de l'opérateur  $A$  est décomposé en  $L + R$  ou  $L$  est inversible et  $R$  est le reste de (2.3). On note  $N$  le terme non linéaire de  $A$  et donc  $A = L + R + N$ , alors (2.3) s'écrit comme :

$$Lu + Ru + Nu = f,$$

$L$  étant inversible,  $L^{-1}$  est son inverse on a :

$$u = \Phi + L^{-1} - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu, \quad (2.4)$$

La méthode d'Adomian consiste à rechercher la solution sous forme d'une série :

$$u = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n, \quad (2.5)$$

et à décomposer le terme non linéaire  $Nu$  sous forme d'une série :

$$Nu = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n \quad (2.6)$$

Les termes  $A_n$  sont appelés polynômes d'Adomian et sont obtenus grâce à la relation suivante

$$A_n = \frac{1}{n!} \frac{d}{d\lambda^n} \left[ N \left( \sum_{i=0}^n \lambda^i u_i \right) \right]_{|\lambda=0} \quad (2.7)$$

En remplaçant par les relations (2.5) et (2.6) dans (2.4), on obtient :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \Phi + L^{-1}f - L^{-1}R \left( \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) - L^{-1} \left( \sum_{n=0}^{+\infty} A_n \right), \quad (2.8)$$

Ce qui entraîne par identification :

$$\begin{cases} u_0 = \Phi + L^{-1}f \\ u_1 = -L^{-1}Ru_0 - L^{-1}A_0 \\ \vdots \\ u_{n+1} = -L^{-1}Ru_n - L^{-1}A_n \end{cases} \quad (2.9)$$

il est presque toujours impossible de calculer la somme de la série  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ . En utilise l'approximation

$$\varphi_n = \sum_{i=0}^{n-1} u_i, \quad n \geq 1, \quad \text{avec} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = u \quad (2.10)$$

## 2.3 La Méthode de décomposition télescopique fractionnaire

Dans cette partie, on va présenter brièvement le principe de la méthode FTDM, puis nous ferons l'étude de leurs convergence.

### 2.3.1 Description de la méthode FTDM

Considérons la solution approximative par la méthode FTDM de la forme

$$u(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t) \quad (2.11)$$

telle que  $u_n(t)$  doit être déterminée selon l'algorithme suivant :

$$u_0(t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{u^{(k)}(0^+)}{k!} t^k \quad (2.12)$$

$$u_1(t) = I^\alpha f(t, u_0(t)) \quad (2.13)$$

$$u_2(t) = I^\alpha [f(t, u_0(t) + u_1(t))] - I^\alpha [f(t, u_0(t))] \quad (2.14)$$

$$u_3(t) = I^\alpha f(t, \sum_{k=0}^2 u_k(t)) - I^\alpha f(t, \sum_{k=0}^1 u_k(t)) \quad (2.15)$$

$$\vdots \quad (2.16)$$

$$u_n(t) = I^\alpha f(t, \sum_{k=0}^{n-1} u_k(t)) - I^\alpha f(t, \sum_{k=0}^{n-2} u_k(t)) \quad (2.17)$$

par la sommation des équations précédentes ,on obtient :

$$\Phi_n(t) = \sum_{k=0}^n u_k(t) \quad (2.18)$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{u^{(k)}(0^+)}{k!} t^k + I^\alpha f(t, \sum_{k=0}^{n-1} u_k(t)) \quad (2.19)$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{u^{(k)}(0^+)}{k!} t^k + \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(s, \sum_{k=0}^{n-1} u_k(s)) ds. \quad (2.20)$$

Le choix de  $u_0(t)$  n'est pas unique, il dépend des conditions initiales  $u^i(0)$ ,  $i = 0, 1, \dots, n-1$  et le problème donné.

### 2.3.2 La convergence de la méthode FTDM

La convergence de la méthode FTDM est présentée par Bouhassoun [5]. La série de solution approximative est converge uniformément vers la solution exacte du problème (2.1)-(2.2) sur  $[0, T]$ .

**lemme 1.** [5] *Considérons la suite de fonction  $u_n, n \geq 0$  , définie dans l'équation (2.12) à (2.17).*

*Si la fonction  $f$  continue et  $k$ -lipschitzienne sur  $\omega = [0, T] \times [u_0 - l, u_0 + l]$ ,*

*alors la série infinie  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$  converge uniformément sur  $[0, T]$ .*



### 2.3. LA MÉTHODE DE DÉCOMPOSITION TÉLESCOPIQUE FRACTIONNAIRE

---

*Démonstration.* Comme la fonction  $f$  continue et elle vérifie la condition de la Lipschitz par rapport à la deuxième variable, alors il existe deux nombres réels positives  $M$  et  $L$  telle que  $\|f\| \leq M$  et  $|f(t, u) - f(t, v)| \leq L\|u - v\|$  pour tout  $t \in [0, T]$  Maintenant, nous démontrons par récurrence l'inégalité suivante :

$$\|u_n(t)\| \leq \frac{L^{n-1}Mt^{n\alpha}}{\Gamma(1+n\alpha)}$$

pour  $n = 1$  on a :

$$\begin{aligned} u_1(t) &= I^\alpha f(t, u_0(t)) \\ |u_1(t)| &= \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, u_0(s)) ds \right| \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \underbrace{\|f(s, u_0(s))\|}_{\leq M} ds \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} M ds \\ &\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds \\ \|u_1(t)\| &\leq \frac{Mt^\alpha}{\alpha+1}. \end{aligned}$$

donc l'inégalité est vraie pour  $n = 1$ .

On suppose que l'inégalité est vrai pour  $n$ , et on montrer que l'inégalité est vrai pour  $n + 1$  nous avons, pour tout  $t \in [0, T]$  :

$$u_{n+1}(t) = \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1} \left[ f(s, \sum_{k=0}^n u_k(s)) - f(s, \sum_{k=0}^{n-1} u_k(s)) \right]}{\Gamma(\alpha)} ds.$$

Comme la fonction  $f$  continue et elle vérifie la condition de la Lipschitz par rapport à la deuxième variable, alors

$$\begin{aligned} \left| f(s, \sum_{k=0}^n u_k(s)) - f(s, \sum_{k=0}^{n-1} u_k(s)) \right| &\leq \left| \sum_{k=0}^n u_k(s) - \sum_{k=0}^{n-1} u_k(s) \right| \\ &\leq L|u_n| \\ &\leq L\|u_n\| \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
 |u_{n+1}(t)| &\leq \int_0^t \left| \frac{(t-s)^{\alpha-1} \left[ f(s, \sum_{k=0}^n u_k(s)) - f(s, \sum_{k=0}^{n-1} u_k(s)) \right]}{\Gamma(\alpha)} \right| ds \\
 &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} L \|u_n\| ds \\
 &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} L \frac{L^{n-1} M s^{n\alpha}}{\Gamma(1+n\alpha)} ds \\
 &\leq \frac{L L^{n-1} M}{\Gamma(1+n\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \frac{s^{n\alpha}}{\Gamma(\alpha)} ds \\
 &\leq \frac{L^n M}{\Gamma(1+n\alpha)} I^\alpha(t^{n\alpha}) \\
 &\leq \frac{L^n M}{\Gamma(1+n\alpha)} \frac{\Gamma(1+n\alpha) t^{(n+1)\alpha}}{\Gamma(1+\alpha(n+1))} \\
 &\leq \frac{L^n M t^{(n+1)\alpha}}{\Gamma(1+\alpha(n+1))},
 \end{aligned}$$

Donc l'inégalité est vrai pour tout entier naturel  $n$ .

Reste à vérifier que la série  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{L^{n-1} M t^{n\alpha}}{\Gamma(1+n\alpha)}$  est convergente, ceci est vraie puisque :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{L^{n-1} M t^{n\alpha}}{\Gamma(1+n\alpha)} = L^{-1} M \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(L t^\alpha)^n}{\Gamma(1+n\alpha)} = L^{-1} M E_\alpha(L t^\alpha),$$

où  $E_\alpha(L t^\alpha)$  est la fonction d'ordre  $\alpha$  de Mittag–Leffler qui est convergente. donc la série infinie  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$  est convergente uniformément sur  $[0, T]$ .  $\square$

**Theorem 1.** [5] *considérons le problème au condition initiale définie dans (2.1)-(2.2) Si la fonction  $f$  continue et  $K$ -lipschtzienne sur  $\omega$  alors la série  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$  converge uniformément vers la solution exacte du problème (2.1)-(2.2).*

*Démonstration.* Rappelons que,

$$u(t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{u^k(0)}{k!} t^k + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, u(s)) ds, \quad (2.21)$$

et

$$\Phi_n(t) = \sum_{k=0}^n u_k(t), n \geq 1. \quad (2.22)$$

définissons une suite de fonctions par :

$$h_n(s) := f(s, \sum_{k=0}^n u_k(s)) = f(s, \Phi_n(s)), n \geq 1. \quad (2.23)$$

### 2.3. LA MÉTHODE DE DÉCOMPOSITION TÉLESCOPIQUE FRACTIONNAIRE

D'après le lemme (1), nous avons que  $(\Phi_n)$  est converge uniformément sur  $[0, T]$  vers la fonction  $(\Phi)$ , et comme  $f$  est une fonction uniformément continue sur  $\Omega$ , alors la suite  $h_n$  est converge uniformément vers  $f(s, \Phi)$ . alors

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t) &:= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{u^{(k)}(0^+)}{k!} t^k + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t \frac{(t-s)^{\alpha-1} h_n(s)}{\Gamma(\alpha)} ds \\ &:= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{u^{(k)}(0^+)}{k!} t^k + \int_{t_0}^t \frac{(t-s)^{\alpha-1} \lim_{n \rightarrow \infty} h_n(s)}{\Gamma(\alpha)} ds \\ &:= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{u^{(k)}(0^+)}{k!} t^k + \int_{t_0}^t \frac{(t-s)^{\alpha-1} f(s, \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_n(s))}{\Gamma(\alpha)} ds \\ &:= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{u^{(k)}(0^+)}{k!} t^k + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, \Phi(s)) ds \end{aligned}$$

et comme  $\Phi(t) := \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_n(t) := \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t)$ , pour tout  $t \in [0, T]$ , il en résulte  $\Phi := \sum_{k=0}^{\infty} u_k$  est une solution du problème (2.1)-(2.2).  $\square$

#### 2.3.3 Programmation de la méthode décomposition télescopique fractionnaire

nous proposons dans cette partie un programme informatique de la méthode décomposition télescopique fractionnaire pour résoudre les équations différentielle d'ordre fractionnaire, dès que l'utilisateur précise la fonction  $f$  et le valeur de  $\alpha$ , le nombre d'itération " $n$ " et la condition initial " $U[i]$ ", Aussi nous le proposons dans le langage de calcul formel Maple. Le programme est le suivant :

**Programme :**

```
> abc := proc(m)
g := t -> t^i U[i]/i!;
eval(sum(g(t), i = 0..m - 1))
endproc :
Warning, 'g' is implicitly declared local to procedure 'abc'
> u[0] := t -> abc(m) :
> u[1] := unapply(1/GAMMA(alpha) * int((t - s)^(alpha-1) * f(s, u[0](s)), s = 0..t), t);
> for k from 2 to n do
u[k] := unapply(1/GAMMA(alpha).int((t - s)^(alpha-1) * (f(s, sum(u[j](s), j = 0..k - 1)) - f(s, sum(u[j](s), j = 0..k - 2))), s = 0..t), t);
end;
> Phi[n] := simplify(unapply(sum(u[j](t), j = 0..n), t));
```

#### 2.3.4 Quelques exemples

**Exemple 1.** Nous considérons l'équation différentielle **linéaire** d'ordre fractionnaire suivant :

$${}^c D_{0+}^{\alpha} u - 2tu = -2t \quad 0 < \alpha \leq 1. \quad (2.24)$$

### 2.3. LA MÉTHODE DE DÉCOMPOSITION TÉLESCOPIQUE FRACTIONNAIRE

---

avec la condition initiale suivant :

$$u(0) = 2. \quad (2.25)$$

où  ${}^c D_{0+}^\alpha$  désigne la dérivée fractionnaire au sens de Caputo.

avec la solution exacte de l'équation (2.24) pour  $\alpha = 1$  est donnée par :

$$u(t) = e^{t^2} + 1. \quad (2.26)$$

D'après le programme présenté nous définissons la fonction  $f$  et la valeur de  $\alpha$ , le nombre d'itération  $n$  et la condition initial  $U[i]$  comme suit (voir l'annexe) :

$$\begin{aligned} \alpha &:= 1 : n := 4 : U[0] := 2 : \\ f &:= (t, u) \rightarrow 2tu - 2t : \end{aligned}$$

on obtient :

$$\begin{aligned} u_0(t) &= 2, \\ u_1(t) &= t^2, \\ u_2(t) &= \frac{1}{2}t^4, \\ u_3(t) &= \frac{1}{6}t^6, \\ u_4(t) &= \frac{1}{24}t^8, \end{aligned}$$

donc la solution approché de l'équation (2.24) s'exprime comme suit :

$$\Phi_4(t) = 2 + t^2 + \frac{1}{2}t^4 + \frac{1}{6}t^6 + \frac{1}{24}t^8.$$

D'autre part, le développement en série de Taylor au voisinage de  $t = 0$  pour la solution exacte (2.26) est donnée par :

$$u(t) = 1 + (1 + t^2 + \frac{1}{2!}t^4 + \frac{1}{3!}t^6 + \frac{1}{4!}t^8 \dots).$$

Ce la confirme donc notre résultat.

**pour**  $\alpha = 0.80$  on obtient :

$$\begin{aligned} u_0(t) &= 2, \\ u_1(t) &= 1.192968082t^{\frac{9}{5}}, \\ u_2(t) &= 0.8369898157t^{\frac{18}{5}}, \\ u_3(t) &= 0.4278469571t^{\frac{27}{5}}, \\ u_4(t) &= 0.1744064693t^{\frac{36}{5}}, \end{aligned}$$

La solution approximative de l'équation (2.24) pour  $\alpha = 0.80$  est donnée par :

### 2.3. LA MÉTHODE DE DÉCOMPOSITION TÉLESCOPIQUE FRACTIONNAIRE

---

$$\Phi_4(t) = 2 + 1.192968082t^{\frac{9}{5}} + 0.8369898157t^{\frac{18}{5}} + 0.4278469571t^{\frac{27}{5}} + 0.1744064693t^{\frac{36}{5}}.$$

*pour*  $\alpha = 0.90$  *on obtient :*

$$\begin{aligned} u_0(t) &= 2, \\ u_1(t) &= 1.094478036t^{\frac{19}{10}}, \\ u_2(t) &= 0.6503021501t^{\frac{19}{5}}, \\ u_3(t) &= 0.2693710092t^{\frac{57}{10}}, \\ u_4(t) &= 0.8630436974t^{\frac{38}{5}}, \end{aligned}$$

*La solution approximative de l'équation (2.24) pour*  $\alpha = 0.90$  *est donnée par :*

$$\Phi_4(t) = 2 + 1.094478036t^{\frac{19}{10}} + 0.6503021501t^{\frac{19}{5}} + 0.2693710092t^{\frac{57}{10}} + 0.8630436974t^{\frac{38}{5}}.$$

*le graphe suivant présente la solution exacte et des solutions approximatives pour des valeurs différentes de l'ordre*  $\alpha$ .

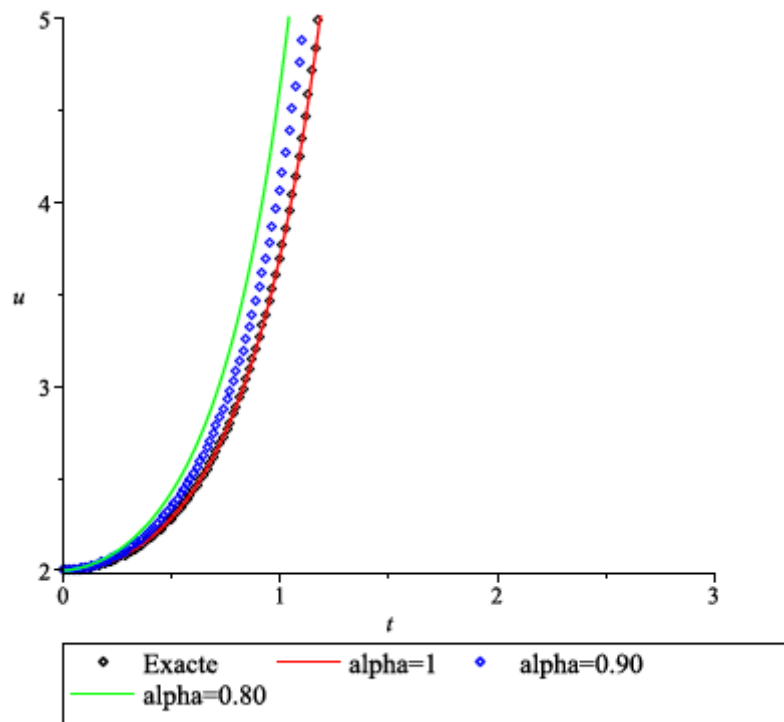


FIGURE 2.1 – la solution exacte et des solutions approximative de l'équation (2.24) selon quelque valeur de  $\alpha$

**Exemple 2.** *Nous considérons l'équation différentielle non-linéaire d'ordre fractionnaire suivant :*

$${}^c D_{0+}^\alpha - 2u + u^2 = -1 \quad 0 < \alpha \leq 1. \quad (2.27)$$

### 2.3. LA MÉTHODE DE DÉCOMPOSITION TÉLESCOPIQUE FRACTIONNAIRE

---

avec la condition initiale suivant :

$$u(0) = 2. \quad (2.28)$$

où  ${}^c D_{0+}^\alpha$  désigne la dérivée fractionnaire au sens de Caputo.

avec la solution exacte de l'équation (2.27) pour  $\alpha = 1$  est donnée par :

$$u(t) = \frac{1}{1+t} + 1 \quad |t| < 1. \quad (2.29)$$

D'après le programme présenté nous définissons la fonction  $f$  et le valeur de alpha, le nombre d'itération  $n$  et la condition initial  $U[i]$  comme suit :

$$\begin{aligned} \text{alpha} &:= 1 : n := 5 : U[0] := 2 : \\ f &:= (t, u) \rightarrow 2u - u^2 - 1 : \end{aligned}$$

on obtient :

$$\begin{aligned} u_0(t) &= 2, \\ u_1(t) &= -t, \\ u_2(t) &= -\frac{1}{3}t^3 + t^2, \\ u_3(t) &= -\frac{1}{36}t^7 + \frac{1}{9}t^6 - \frac{1}{3}t^5 + \frac{2}{3}t^4 - \frac{2}{3}t^3, \\ u_4(t) &= -\frac{1}{59535}t^{15} + \frac{1}{3969}t^{14} - \frac{1}{567}t^{13} + \frac{1}{126}t^{12} - \frac{5}{189}t^{11} + \frac{22}{315}t^{10} - \frac{86}{567}t^9 + \frac{71}{252}t^8 \\ &\quad - \frac{4}{9}t^7 + \frac{5}{9}t^6 - \frac{8}{15}t^5 + \frac{1}{3}t^4, \\ u_5(t) &= -\frac{2}{15}t^5 - \frac{128}{315}t^7 + \frac{13}{45}t^6 + \frac{23563}{56700}t^{10} - \frac{293}{630}t^9 + \frac{7}{15}t^8 + \frac{17239}{68040}t^{12} - \frac{9589}{28350}t^{11} - \frac{63268}{893025}t^{15} \\ &\quad + \frac{9151}{79380}t^{14} - \frac{4337}{24570}t^{13} + \frac{2588}{229635}t^{18} - \frac{1080013}{48580560}t^{17} + \frac{43363}{1058400}t^{16} - \frac{207509}{225042300}t^{21} \\ &\quad + \frac{16511}{7144200}t^{20} - \frac{162179}{30541455}t^{19} + \frac{16927}{540101520}t^{24} - \frac{2447}{22504230}t^{23} + \frac{557}{1666980}t^{22} - \frac{2}{6751269}t^{27} \\ &\quad + \frac{1}{595350}t^{26} - \frac{5309}{675126900}t^{25} + \frac{1}{3544416225}t^{30} - \frac{1}{236294415}t^{29} + \frac{13}{315059220}t^{28} \\ &\quad - \frac{1}{109876902975}t^{31}, \end{aligned}$$

donc la solution approché de l'équation (2.27) s'exprime comme suit :

$$\begin{aligned} \Phi_5(t) &= 2 - t - \frac{1}{109876902975}t^{31} + \frac{1}{3544416225}t^{30} - \frac{1}{236294415}t^{29} + \frac{13}{315059220}t^{28} - \frac{2}{6751269}t^{27} \\ &\quad + \frac{1}{595350}t^{26} - \frac{5309}{675126900}t^{25} + \frac{16927}{540101520}t^{24} - \frac{2447}{22504230}t^{23} + \frac{557}{1666980}t^{22} - \frac{207509}{225042300}t^{21} \\ &\quad + \frac{16511}{7144200}t^{20} - \frac{162179}{30541455}t^{19} + \frac{2588}{229635}t^{18} - \frac{1080013}{48580560}t^{17} + \frac{43363}{1058400}t^{16} - \frac{63268}{893025}t^{15} \\ &\quad + \frac{1019}{8820}t^{14} - \frac{13141}{73710}t^{13} + \frac{17779}{68040}t^{12} - \frac{1477}{4050}t^{11} + \frac{27523}{56700}t^{10} - \frac{3497}{5670}t^9 + \frac{943}{1260}t^8 - \frac{13}{15}t^7 \\ &\quad + \frac{43}{45}t^6 - t^5 + t^4 - t^3 + t^2. \end{aligned}$$

### 2.3. LA MÉTHODE DE DÉCOMPOSITION TÉLESCOPIQUE FRACTIONNAIRE

---

D'autre part, le développement en série de Taylor au voisinage de  $t = 0$  pour la solution exacte (2.29) est donnée par :

$$u(t) = 1 + (1 - t + t^2 - t^3 + t^4 - t^5 \dots).$$

Ce la confirme donc notre résultat.

**pour**  $\alpha = 0.5$  on obtient :

$$u_0(t) = 2,$$

$$u_1(t) = -1.128379167\sqrt{t},$$

$$u_2(t) = -0.9577979844t^{3/2} + 2t,$$

$$u_3(t) = 2.122065907t^3 - 0.4732110040t^{7/2} + 4.273239544t^2 - 3.708015577t^{5/2} - 3.009011112t^{3/2},$$

$$u_4(t) = 0.7456688055t^7 + 7.909486005t^6 + 21.99224655t^5 + 26.39904373t^4 + 16.11589515t^3 \\ + 3.999999999t^2 - 22.96651759t^{7/2} - 9.229894843t^{5/2} - 0.8041667839t^{3/2} - 1t^{15/2} \\ - 3.082963171t^{13/2} - 14.85585388t^{11/2} - 26.24304401t^{9/2},$$

$$u_5(t) = 15.22472665t^3 - 35.62399158t^{7/2} - 4.814417776t^{5/2} + 827.2954431t^7 + 493.2996602t^6 \\ + 224.2766619t^5 + 73.16200522t^4 - 974.2957398t^{15/2} - 659.2858806t^{13/2} - 345.2585530t^{11/2} \\ - 134.1177240t^{9/2} + 378.3644867t^{11} + 118.2705530t^{12} + 1.554841199t^{14} + 0.3070845879t^{15} \\ - 565.6316273t^{21/2} - 1106.000980t^{17/2} - 937.4081813t^{19/2} - 6.388107500t^{27/2} \\ - 225.6403464t^{23/2} - 53.53560168t^{25/2} - 0.2738627364t^{29/2} - 0.1629388489t^{31/2} \\ + 762.8016014t^{10} + 1074.376308t^8 + 1058.655585t^9 + 20.45432523t^{13}$$

La solution approximative de l'équation (2.27) pour  $\alpha = 0.5$  est donnée par :

$$\Phi_5(t) = 2 + 2t + 33.46268771t^3 - 59.06372017t^{7/2} - 17.75232820t^{5/2} + 8.273239543t^2 \\ - 3.966809096t^{3/2} + 828.0411119t^7 + 501.2091462t^6 + 246.2689084t^5 + 99.56104895t^4 \\ - 974.3761565t^{15/2} - 662.3688438t^{13/2} - 360.1144069t^{11/2} - 160.3607680t^{9/2} \\ + 378.3644867t^{11} + 118.2705530t^{12} + 1.554841199t^{14} + 0.03070845879t^{15} \\ - 565.6316273t^{21/2} - 1106.000980t^{17/2} - 937.4081813t^{19/2} - 6.388107500t^{27/2} \\ - 225.6403464t^{23/2} - 53.53560168t^{25/2} - 0.2738627364t^{29/2} - 0.001629388489t^{31/2} \\ + 762.8016014t^{10} + 1074.376308t^8 + 1058.655585t^9 + 20.45432523t^{13} - 1.128379167\sqrt{t}.$$

**pour**  $\alpha = 0.25$  on obtient :

### 2.3. LA MÉTHODE DE DÉCOMPOSITION TÉLESCOPIQUE FRACTIONNAIRE

---

$$u_0(t) = 2,$$

$$u_1(t) = -1.103262651t^{1/4},$$

$$u_2(t) = 2.256758333\sqrt{t} - 1.173701647t^{3/4},$$

$$u_3(t) = -1.138593028t^{7/4} + 4.515102993t^{3/2} - 6.780882221t^{5/4} + 6.733968980t - 4.352261006t^{3/4},$$

$$u_4(t) = 7.323503614t^{7/2} + 56.44268649t^3 + 112.2721640t^{5/2} + 94.30520749t^2 - 0.9091472384t^{15/4} + 40.96554937t^{3/2} - 89.69474703t^{11/4} + 7.999999992t - 69.05153919t^{7/4} - 25.94601132t^{13/4} - 112.3303542t^{9/4} - 20.36297347t^{5/4},$$

$$u_5(t) = -134.6984149t^{7/4} - 14.12176192t^{5/4} + 49.75597261t^{3/2} + 328.7636414t^2 + 11842.53406t^{7/2} + 4745.285401t^3 + 1461.821041t^{5/2} - 16990.85158t^{15/4} - 2728.585088t^{11/4} - 7735.185659t^{13/4} - 723.8710339t^{9/4} + 22773.76657t^4 - 6037.854180t^{25/4} - 31002.38433t^{21/4} - 60.65632063t^{29/4} - 17830.03209t^{23/4} - 1017.685659t^{27/4} - 35314.20868t^{19/4} - 28442.37588t^{17/4} + 34696.94583t^5 + 32976.32879t^{9/2} + 7.947897851t^{15/2} + 2745.635029t^{13/2} + 292.8355675t^7 + 11179.31965t^6 + 24931.08950t^{11/2} - 0.4894952986t^{31/4},$$

La solution approximative de l'équation (2.27) pour  $\alpha = 0.25$  est donnée par :

$$\begin{aligned} \Phi_5(t) = & 2 + 14.73396897t - 204.8885471t^{7/4} - 41.26561761t^{5/4} + 2.256758333\sqrt{t} \\ & - 5.525962653t^{3/4} - 1.103262651t^{1/4} + 95.23662497t^{3/2} + 423.0688489t^2 \\ & + 11849.85756t^{7/2} + 4801.728087t^3 + 1574.093205t^{5/2} - 16991.76073t^{15/4} \\ & - 2818.279835t^{11/4} - 7761.131670t^{13/4} - 836.2013881t^{9/4} + 22773.76657t^4 \\ & - 6037.854180t^{25/4} - 31002.38433t^{21/4} - 60.65632063t^{29/4} - 17830.03209t^{23/4} \\ & - 1017.685659t^{27/4} - 35314.20868t^{19/4} - 28442.37588t^{17/4} + 34696.94583t^5 \\ & + 32976.32879t^{9/2} + 7.947897851t^{15/2} + 2745.635029t^{13/2} + 292.8355675t^7 \\ & + 11179.31965t^6 + 24931.08950t^{11/2} - 0.4894952986t^{31/4}. \end{aligned}$$

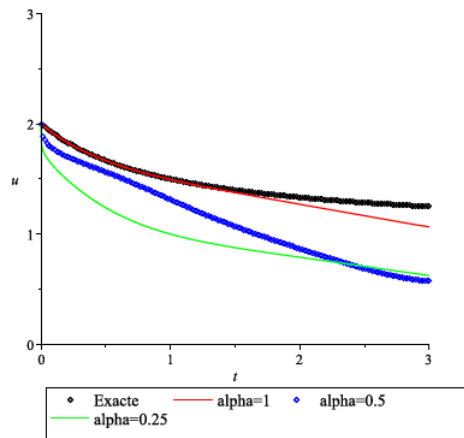


FIGURE 2.2 – la solution exacte et des solutions approximative de l'équation (2.27) selon quelque valeur de  $\alpha$



## 2.4 Principe de la méthode MFTDM

Le principe de la méthode MFTDM est basé sur la décomposition de l'intervalle  $[0, T]$  en une suite des sous intervalles  $[t_0, t_1], [t_1, t_2], \dots, [t_{N-1}, t_N]$  dans lesquels  $t_0 = 0$ ,  $t_N = T$  et  $\cup_{i=0}^{N-1} \Omega_i = [0, T]$  où  $\Delta t = t_{i+1} - t_i$  peuvent être choisis de même longueur. Comme nous voulons appliquer la méthode FTDM dans chaque sous intervalle, nous aurons besoin d'une valeur initiale pour chacun de ces sous-intervalles.

La seule valeur initiale connue est celle du point  $t_0 = 0$  du premier sous intervalle  $[t_0, t_1]$ . mais pour les autres valeurs, elles seront calculer à partir des solutions approximatives précédentes. Alors la méthode MFTDM donnera des solutions de chaque sous intervalle  $\Omega_i$  qui sont continues au point  $t_i$ , c'est-à-dire au point d'extrémité des sous intervalles  $\Omega_i$ . dans le premier sous intervalle  $\Omega_0 = [t_0, t_1]$ , la valeur initiale  $u_{0,0}(t)$  est donnée par :

$$u_{0,0}(t) := \sum_{k=0}^{m-1} u^{(k)}(0^+) \frac{t^k}{k!}.$$

pour calculer les itérations de la solution approximative  $u_{0,k}$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ . nous utilisons l'algorithme suivant :

$$u_{0,0}(t) := \sum_{k=0}^{m-1} u^{(k)}(0^+) \frac{t^k}{k!} \quad (2.30)$$

$$u_{0,1}(t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, u_{0,0}(s)) ds \quad (2.31)$$

$$\vdots \quad (2.32)$$

$$u_{0,k}(t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} [f(s, \sum_{j=0}^{k-1} u_{0,j}(s)) - f(s, \sum_{j=0}^{k-2} u_{0,j}(s))] ds, k \geq 2 \quad (2.33)$$

En additionnant (2.30) -( 2.33) on obtient la solution dans le sous intervalle  $\Omega_0 = [t_0, t_1]$  :

$$\Phi_{0,N_0} := \sum_{j=0}^{N_0} u_{0,j}(t), \quad N_0 \in \mathbb{N} - \{0\},$$

Notons que le choix de  $u_{0,0}(t)$  n'est pas unique, c'est dépend des conditions initiales sur le problème donné.

Et pour chaque sous intervalle défini par  $\Omega_i = [t_i, t_{i+1}]$ , ( $i = 1, \dots, N - 1$ ), la valeur initiale  $u_{i,0}$  est donnée par :

$$u_{i,0} := \Phi_{i-1,N_0}(t_i).$$

Concernant les autres itérations de la solution, nous avons l'algorithme suivant :

$$u_{i,0} := \Phi_{i-1,N_0}(t_i) \quad (2.34)$$

$$u_{i,1}(t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_k}^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, u_{i,0}(s)) ds \quad (2.35)$$

$$\vdots \quad (2.36)$$

$$u_{i,k}(t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_k}^t (t-s)^{\alpha-1} [f(s, \sum_{j=0}^{k-1} u_{i,j}(s)) - f(s, \sum_{j=0}^{k-2} u_{i,j}(s))] ds \quad k \geq 2 \quad (2.37)$$

Nous rappelons ici que l'indice  $i$  représente le nombre de sous intervalle et l'indice  $k$  représente le nombre d'itération .

La solution dans le sous intervalle  $\Omega_i = [t_i, t_{i+1}]$  est donnée par :

$$\Phi_{i,N_0} := \sum_{j=0}^{N_0} u_{i,j}(t), \quad N_0 \in \mathbb{N} - \{0\}, i = 1, 2, \dots, \mathbb{N} - 1.$$

A présent, la solution du problème (2.1)-(2.2) sur  $[0, T]$  est donnée par :

$$\Phi_{N_0}(t) = \begin{cases} \Phi_{0,N_0} := \sum_{j=0}^{N_0} u_{0,j}(t) & ; \quad 0 \leq t \leq t_1 \\ \Phi_{1,N_0} := \sum_{j=0}^{N_0} u_{1,j}(t) & ; \quad t_1 \leq t \leq t_2 \\ \vdots \\ \Phi_{i,N_0} := \sum_{j=0}^{N_0} u_{i,j}(t) & ; \quad t_i \leq t \leq t_{i+1} \end{cases}$$

## CHAPITRE 3

# APPLICATIONS DE LA MÉTHODE MFTDM

### 3.1 Programmation de la méthode MFTDM

nous proposons dans cette partie un programme informatique de la méthode MFTDM pour résoudre les équations différentielle d'ordre fractionnaire, dès que l'utilisateur précise la fonction  $f$  et le valeur de  $\alpha$ , le nombre d'itération  $n$  et la condition initial  $U[i]$ , on prenant l'intervalle  $[0, T]$  et  $N$  le nombre de sous intervalle et en choisit la même longueur  $\Delta t$ , Aussi nous le proposons dans le langage de calcul formel Maple. Le programme est le suivant :

**Programme :**

```
> abc := proc(m)
g := t → ti  $\frac{U[i]}{i!}$ ;
eval(sum(g(t), i = 0..m - 1))
endproc :
Warning, 'g' is implicitly declared local to procedure 'abc'
> u[0, 0] := t → abc(m) :
> u[0, 1] := unapply(1/GAMMA( $\alpha$ )*int((t-s)( $\alpha$ -1)*f(s, u[0, 0](s)), s = 0..t), t);
> for k from 2 to n do
u[0, k] := unapply(1/GAMMA( $\alpha$ ).int((t-s)( $\alpha$ -1)* (f(s, sum(u[0, j](s), j = 0..k-1)) - f(s, sum(u[0, j](s), j = 0..k-2))), s = 0..t), t);
end;
>  $\Phi$ [0, k] := simplify(unapply(sum(u[0, j](t), j = 0..n), t));
> for i from 1 to N - 1 do
t[i] := i $\Delta$ t :
u[i, 0] := unapply( $\Phi$ [i - 1, n](t[i], t);
u[i, 1] := unapply(1/GAMMA( $\alpha$ ) * int((t-s)( $\alpha$ -1) * f(s, u[i, 0](s)), s = t[i]..t), t);
> for k from 2 to n do
u[i, k] := unapply(1/GAMMA( $\alpha$ ).int((t-s)( $\alpha$ -1)* (f(s, sum(u[i, j](s), j = 0..k-1)) - f(s, sum(u[i, j](s), j = 0..k-2))), s = t[i]..t), t);
print u[i, k] end;
>  $\Phi$ [i, k] := simplify(unapply(sum(u[i, j](t), j = 0..n), t));
```

### 3.1.1 Équation différentielle ordinaire non-linéaire d'ordre fractionnaire

**Exemple 3.** Nous considérons l'équation différentielle **non-linéaire** d'ordre fractionnaire suivante :

$${}^c D_{0+}^\alpha = 1 - u^2 \quad 0 < \alpha \leq 1. \quad (3.1)$$

avec la condition initiale suivante :

$$u(0) = 0. \quad (3.2)$$

où  ${}^c D_{0+}^\alpha$  désigne la dérivée fractionnaire au sens de Caputo.

avec la solution exacte de l'équation (3.1) pour  $\alpha = 1$  est donnée par :

$$u(t) = \frac{e^{2t} - 1}{e^{2t} + 1}. \quad (3.3)$$

D'après le programme présenté nous définissons la fonction  $f$  et le valeur de  $\alpha$ , le nombre d'itération  $n$  et  $N$  le nombre de sous intervalle, et la condition initiale  $U[i]$ , on prenant l'intervalle  $[0, T]$  et  $\Delta t$  comme suit (voir l'annexe) :

$$\begin{aligned} \alpha &:= 1 : n := 3 : U[0] := 0 : \\ N &:= 10 : \Delta t := 0.5 : T := 5 : \\ f &:= 1 - u^2 : \end{aligned}$$

on obtient la solution dans chaque sous intervalle  $\Omega_i$ .

Dans le premier intervalle  $\Omega_0 = [0, 0.5]$  on trouve :

$$\begin{aligned} u_{0,0}(t) &= 0, \\ u_{0,1}(t) &= t, \\ u_{0,2}(t) &= -\frac{1}{3}t^3, \\ u_{0,3}(t) &= -\frac{1}{63}t^7 + \frac{2}{15}t^5, \end{aligned}$$

Alors, la solution dans le sous intervalle  $[0, 0.5]$  est :

$$\Phi_{0,3}(t) = t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{2}{15}t^5 - \frac{1}{63}t^7.$$

• **pour**  $\Omega_1 = [0.5, 1]$  on trouve :

$$\begin{aligned} u_{1,0}(t) &= 0.4623759921, \\ u_{1,1}(t) &= 0.7862084419t - 0.3931042210, \\ u_{1,2}(t) &= 0.2089929798t - 0.6512582235 - 0.2060412380t^3 - 0.5446205122t^2, \\ u_{1,3}(t) &= -0.3640180606 + 0.4781389381t + 0.5033599718t^2 - 0.1239501873t^3 + 0.2752747360t^4 \\ &\quad + 0.8142779019t^5 - 0.3740476152t^6 - 0.6064713108t^7, \end{aligned}$$

Alors, la solution dans le sous intervalle  $\Omega_1 = [0.5, 1]$  est :

$$\Phi_{1,3}(t) = 0.5057681 + .9999828111t - 0.412605404t^2 - 0.3299914253t^3 + 0.2752747360t^4 \\ + 0.8142779019t^5 - 0.3740476152t^6 - 0.6064713108t^7.$$

• **pour**  $\Omega_2 = [1, 1.5]$  on trouve :

$$u_{2,0}(t) = 0.7655211742, \\ u_{2,1}(t) = 0.4139773319t - .4139773319, \\ u_{2,2}(t) = 0.4624395950t - 0.2597826694 - 0.5712574378t^3 - 0.1455311819t^2, \\ u_{2,3}(t) = 0.1151629602t - 0.6921313424 - 0.4661929432t^7 - 0.2771192336t^6 + 0.1579052254t^5 \\ + 0.6639395823t^4 - .1900070582t^3 + 0.6511013672t^2,$$

Alors, la solution dans le sous intervalle  $\Omega_2 = [1, 1.5]$  est :

$$\Phi_{2,3}(t) = 0.225480387 + 0.9915798871t - 0.8042104518t^2 - 0.2471328020t^3 + 0.6639395823t^4 \\ + 0.1579052254t^5 - 0.2771192336t^6 - 0.4661929432t^7.$$

Et la solution dans les autres sous intervalles est :

• dans  $\Omega_3 = [1.5, 2]$  on a :

$$\Phi_{3,3}(t) = 0.1399193826 + 0.8828101856t - 0.1944032020t^2 - 0.8208927690t^3 + 0.3324745229t^4 \\ - 0.3070700477t^5 - 0.3548001187t^6 - 0.1305849812t^7.$$

• dans  $\Omega_4 = [2, 2.5]$  on a :

$$\Phi_{4,3}(t) = 0.3724274983 + 0.6157355737t - 0.1754262017t^2 - 0.5313550629t^3 + 0.7706762446t^4 \\ - 0.3945189485t^5 - 0.2146366050t^6 - 2.212618575 * 10^{-7}t^7.$$

• dans  $\Omega_5 = [2.5, 3]$  on a :

$$\Phi_{5,3}(t) = 0.6155646901 + 0.3441356463t - 0.9866710215t^2 + 0.5649944631t^3 + 0.1254946819t^4 \\ - 0.6993169904t^5 - 9.569071062 * 10^{-7}t^6 - 3.055562231 * 10^{-9}t^7.$$

• dans  $\Omega_6 = [3, 3.5]$  on a :

$$\Phi_{6,3}(t) = 0.7915950926 + 0.1672493928t - 0.4448406131t^2 + 0.3390505901t^3 + 0.1751273440t^4 \\ - 0.9130453923t^5 - 3.795765693 * 10^{-8}t^6 - 3.919084248 * 10^{-11}t^7.$$

• dans  $\Omega_7 = [3.5, 4]$  on a :

$$\Phi_{7,3}(t) = 0.8957230972 + 0.7492576374t - 0.1805342742t^2 + 0.1379773588t^3 + 0.2280506564t^4 \\ - 0.1076539979t^5 - 1.441611600 * 10^{-9}t^6 - 4.900796839 * 10^{-13}t^7.$$

- dans  $\Omega_8 = [4, 4.5]$  on a :

$$\Phi_{8,3}(t) = 0.9505904289 + 0.3195438647t - 0.6953059982t^2 + 0.4974701234t^3 + 0.2870971539t^4 \\ - 1.222855720 * 10^{-7}t^5 - 5.388323238 * 10^{-11}t^6 - 6.076324899 * 10^{-15}t^7.$$

- dans  $\Omega_9 = [4.5, 5]$  on a :

$$\Phi_{9,3}(t) = 0.9774943377 + 0.1319617441t - 0.2603827094t^2 + 0.1711832408t^3 + 3.546913325 * 10^{-7}t^4 \\ - 1.369891187 * 10^{-8}t^5 - 2.002275436 * 10^{-12}t^6 - 7.512326609 * 10^{-17}t^7.$$

Donc la solution de l'équation(3.1) dans tous les sous intervalles  $\Omega_i$  est donnée par :

$$\Phi_9(t) = \begin{cases} \Phi_{0,3}(t) = t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{2}{15}t^5 - \frac{1}{63}t^7 & ; 0 \leq t \leq 0.5 \\ \Phi_{1,3}(t) = 0.5057681 + 0.9999828111t - 0.412605404t^2 - 0.3299914253t^3 \\ + 0.2752747360t^4 + 0.8142779019t^5 - 0.3740476152t^6 - 0.6064713108t^7 & ; 0.5 \leq t \leq 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \Phi_{9,3}(t) = 0.9774943377 + 0.1319617441t - 0.2603827094t^2 + 0.1711832408t^3 \\ + 3.546913325 * 10^{-7}t^4 - 1.369891187 * 10^{-8}t^5 - 2.002275436 * 10^{-12}t^6 \\ - 7.512326609 * 10^{-17}t^7 & ; 4.5 \leq t \leq 5 \end{cases}$$

► **Pour**  $\alpha = 0.5$  on obtient :

Dans le premier intervalle  $\Omega_0 = [0, 0.5]$  on trouve :

$$u_{0,0}(t) = 0, \\ u_{0,1}(t) = 1.128379167\sqrt{t}, \\ u_{0,2}(t) = -0.9577979850t^{3/2}, \\ u_{0,3}(t) = -0.4732110046t^{7/2} + 1.300806688t^{5/2} + 3.613717865 * 10^{-10}t^{3/2},$$

Alors, la solution dans le sous intervalle  $[0, 0.5]$  est :

$$\Phi_{0,3}(t) = 1.128379167\sqrt{t} - 0.9577979846t^{3/2} - 0.4732110046t^{7/2} + 1.300806688t^{5/2}.$$

- **pour**  $\Omega_1 = [0.5, 1]$  on trouve :

$$u_{1,0}(t) = 0.6473778045, \\ u_{1,1}(t) = 0.3277388451\sqrt{4t - 2}, \\ u_{1,2}(t) = -0.7521260941t + 0.3760630472 - 0.1616030800t\sqrt{4t - 2} + 0.8080153998\sqrt{4t - 2}, \\ u_{1,3}(t) = \frac{1}{\sqrt{4t - 2}}(3.358271330 * 10^{-24}(5.670148846 * 10^{22}\sqrt{2t - 1}t^3 + 4.009400699 * 10^{22}t^3\sqrt{4t - 2} \\ - 2.816098935 * 10^{23}\sqrt{2t - 1}t^2 - 1.991282653 * 10^{23}t^2\sqrt{4t - 2} + 2.390837772.10^{23}\sqrt{2t - 1}t \\ + 3.209079456 * 10^{22}t^4 + 1.690577602 * 10^{23}t\sqrt{4t - 2} - 5.622710131 * 10^{22}\sqrt{2t - 1} \\ - 1.329423428 * 10^{22}t^3 - 3.975856462 * 10^{22}\sqrt{4t - 2} - 4.644659673 * 10^{23}t^2 \\ + 4.583912461 * 10^{23}t - 1.134230266 * 10^{23})),$$

la solution dans le sous intervalle  $\Omega_1 = [0.5, 1]$  est :

$$\begin{aligned} \Phi_{1,3}(t) = & 1.023440852 + 0.4085403851\sqrt{4t-2} - 0.7521260941t - 0.1616030800t\sqrt{4t-2} \\ & - \frac{1}{\sqrt{4t-2}}(3.358271330 * 10^{-24}(5.670148846 * 10^{22}\sqrt{2t-1}t^3 + 4.009400699 * 10^{22}t^3\sqrt{4t-2} \\ & - 2.816098935 * 10^{23}\sqrt{2t-1}t^2 - 1.991282653 * 10^{23}t^2\sqrt{4t-2} + 2.390837772 * 10^{23}\sqrt{2t-1}t \\ & + 3.209079456 * 10^{22}t^4 + 1.690577602 * 10^{23}t\sqrt{4t-2} - 5.622710131 * 10^{22}\sqrt{2t-1} \\ & - 1.329423428 * 10^{22}t^3 - 3.975856462 * 10^{22}\sqrt{4t-2} - 4.644659673 * 10^{23}t^2 \\ & + 4.583912461 * 10^{23}t - 1.134230266 * 10^{23})). \end{aligned}$$

Et la solution dans les autres sous intervalles est :

• Dans  $\Omega_2 = [1, 1.5]$  est :

$$\begin{aligned} \Phi_{2,3}(t) = & 0.8638635555 + 0.2466416375\sqrt{t-1} + 0.1360381415t - 0.3420640394t\sqrt{t-1} \\ & + 0.4111889621t^3 + 0.5537079740t^2 - 0.1058506476t^3\sqrt{t-1} - 0.4246718583\sqrt{t-1}t^2. \end{aligned}$$

• Dans  $\Omega_3 = [1.5, 2]$  est :

$$\begin{aligned} \Phi_{3,3}(t) = & +1.227242114 + 0.06163196826\sqrt{4t-6} - 0.1847257620t - 0.004525341378t\sqrt{4t-6} \\ & - \frac{1}{\sqrt{4t-6}}(2.686617064 * 10^{-27}(4.874645029 * 10^{23}\sqrt{2t-3}t^3 + 3.446894556 * 10^{23}t^3\sqrt{4t-6} \\ & - 1.229164347 * 10^{25}\sqrt{2t-3}t^2 - 8.691504449 * 10^{24}t^2\sqrt{4t-6} + 3.358454499 * 10^{25}\sqrt{2t-3}t \\ & + 3.145530561 * 10^{22}t^4 + 2.374785951 * 10^{25}t\sqrt{4t-6} - 2.436581238 * 10^{25}\sqrt{2t-3} \\ & + 1.420913972 * 10^{25}t^3 - 1.722923116 * 10^{25}\sqrt{4t-6} - 2.609457382 * 10^{26} \\ & t^2 + 6.865008747 * 10^{26}t - 4.907384901 * 10^{26})). \end{aligned}$$

• Dans  $\Omega_4 = [2, 2.5]$  est :

$$\begin{aligned} \Phi_{4,3}(t) = & 0.8352501492 + 0.3016820358\sqrt{t-2} + 0.6668229262t - 0.1653637490t\sqrt{t-2} \\ & + 0.5708742805t^3 + 0.1456738008t^2 - 0.7885550894t^3\sqrt{t-2} - 0.1074637322\sqrt{t-2}t^2. \end{aligned}$$

• Dans  $\Omega_5 = [2.5, 3]$  est :

$$\begin{aligned} \Phi_{5,3}(t) = & 1.212902124 + 0.03032504951\sqrt{4t-10} - 0.09502527916t - 0.001136452074t\sqrt{4t-10} \\ & - \frac{1}{\sqrt{2t-5}}(6.71654265 * 10^{-28}(1.259460229 * 10^{23}\sqrt{4t-10}t^3 - 6.1508956 * 10^{24}\sqrt{4t-10}t^2 \\ & + 1.781145737 * 10^{23}\sqrt{2t-5}t^3 + 1.983779814 * 10^{21}\sqrt{4t-10}t^3\sqrt{2t-5} + 2.8392990 * 10^{25}t \\ & \cdot \sqrt{4t-10} - 8.698680014 * 10^{24}\sqrt{2t-5}t^2 + 3.918530481 * 10^{24}\sqrt{4t-10}\sqrt{2t-5}t^2 \\ & - 3.450728452 * 10^{25}\sqrt{4t-10} + 4.015375186 * 10^{25}\sqrt{2t-5}t - 1.234335244 * 10^{26}\sqrt{4t-10} \\ & \cdot \sqrt{2t-5}t - 4.880066977 * 10^{25}\sqrt{2t-5} + 2.840619986 * 10^{26}\sqrt{4t-10}\sqrt{2t-5})). \end{aligned}$$

• Dans  $\Omega_6 = [3, 3.5]$  est :

$$\begin{aligned} \Phi_{6,3}(t) = & 0.8533856201 + 0.2536677620\sqrt{t-3} + 0.4113917371t - 0.8861852718t\sqrt{t-3} \\ & + 0.8240174942t^3 + 0.4185654613t^2 - 6.086511687 * 10^{-7}t^3\sqrt{t-3} - 0.2866192785\sqrt{t-3}t^2. \end{aligned}$$

- Dans  $\Omega_7 = [3.5, 4]$  est :

$$\begin{aligned} \Phi_{7,3}(t) = & 1.160668139 + 0.1519835928\sqrt{4t-14} - 0.4950949102t - 0.3010148175t\sqrt{(4t-14)} \\ & - \frac{1}{\sqrt{2t-7}}(2.098919581 * 10^{-27}(5.561865631 * 10^{21}\sqrt{4t-14}t^3 - 5.0513140 * 10^{23}\sqrt{4t-14}t^2 \\ & + 7.865665807 * 10^{21}\sqrt{2t-7}t^3 + 4.453658805 * 10^{19}\sqrt{4t-14}t^3\sqrt{2t-7} + 3.3315212 * 10^{24}t \\ & \cdot \sqrt{4t-14} - 7.143636889 * 10^{23}\sqrt{2t-7}t^2 + 3.460517396 * 10^{23}\sqrt{4t-14}\sqrt{2t-7}t^2 \\ & - 5.710929747 * 10^{24}\sqrt{4t-14} + 4.711482591 * 10^{24}\sqrt{2t-7}t - 1.994435596 * 10^{25}\sqrt{4t-14} \\ & \sqrt{2t-7}t - 8.076474302 * 10^{24}\sqrt{2t-7} + 6.556420241 * 10^{25}\sqrt{4t-14}\sqrt{2t-7})). \end{aligned}$$

- Dans  $\Omega_8 = [4, 4.5]$  est :

$$\begin{aligned} \Phi_{8,3}(t) = & 0.8866552149 + 0.1859417765\sqrt{t-4} + 0.2550404480t - 0.4837899131t\sqrt{t-4} \\ & + 0.1193087582t^3 + 0.1211930307t^2 - 4.675748821 * 10^{-8}t^3\sqrt{t-4} - 0.7767835350\sqrt{t-4}t^2. \end{aligned}$$

- Dans  $\Omega_9 = [4.5, 5]$  est :

$$\begin{aligned} \Phi_{9,3}(t) = & 1.109924770 + 0.7714140524\sqrt{4t-18} - 0.2587968634t - 0.8124483720t\sqrt{4t-18} \\ & - \frac{1}{\sqrt{2t-9}}(1.343308532 * 10^{-29}(1.226080439 * 10^{23}\sqrt{4t-18}t^3 - 2.0610977 * 10^{25}\sqrt{4t-18}t^2 \\ & + 1.733939586 * 10^{23}\sqrt{2t-9}t^3 + 5.069355703 * 10^{20}\sqrt{4t-18}t^3\sqrt{2t-9} + 1.7805036 * 10^{26}t \\ & \cdot \sqrt{4t-18} - 2.914832418 * 10^{25}\sqrt{2t-9}t^2 + 1.488875134 * 10^{25}\sqrt{4t-18}\sqrt{2t-9}t^2 \\ & - 3.950269859 * 10^{26}\sqrt{4t-18} + 2.518012358 * 10^{26}\sqrt{2t-9}t - 1.573822776 * 10^{27}\sqrt{4t-18} \\ & \cdot \sqrt{2t-9}t - 5.586525210 * 10^{26}\sqrt{2t-9} + 6.780659062 * 10^{27}\sqrt{4t-18}\sqrt{2t-9})). \end{aligned}$$

la solution de l'équation(3.1) dans tous les sous intervalles  $\Omega_i$  pour  $\alpha = 0.5$  est donnée par :

$$\Phi_9(t) = \left\{ \begin{array}{l} \Phi_{0,3}(t) = 1.128379167\sqrt{t} - 0.9577979846t^{3/2} - 0.4732110046t^{7/2} \quad ; \quad 0 \leq t \leq 0.5 \\ \quad + 1.300806688t^{5/2} \\ \vdots \\ \vdots \\ \Phi_{4,3}(t) = 0.8352501492 + 0.3016820358\sqrt{t-2} + 0.6668229262t \quad ; \quad 2 \leq t \leq 2.5 \\ \quad - 0.1653637490t\sqrt{t-2} + 0.5708742805t^3 + 0.1456738008t^2 \\ \quad - 0.7885550894t^3\sqrt{t-2} - 0.1074637322\sqrt{t-2}t^2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \Phi_{9,3}(t) = 1.109924770 + 0.7714140524\sqrt{4t-18} - 0.2587968634t \quad ; \quad 4.5 \leq t \leq 5 \\ \quad - 0.8124483720t\sqrt{4t-18} - \frac{1}{\sqrt{2t-9}}(1.343308532 * 10^{-29}(1.226080439 * 10^{23}\sqrt{4t-18}t^3 \\ \quad - 2.061097769 * 10^{25}\sqrt{4t-18}t^2 + 1.733939586 * 10^{23}\sqrt{2t-9}t^3 + 5.069355703 * 10^{20} \\ \quad \sqrt{4t-18}t^3\sqrt{2t-9} + 1.780503614 * 10^{26}t\sqrt{4t-18} - 2.91483241 * 10^{25}\sqrt{2t-9}t^2 \\ \quad + 1.488875134 * 10^{25}\sqrt{4t-18}\sqrt{2t-9}t^2 - 3.950269859 * 10^{26}\sqrt{4t-18} + 2.5180123 * 10^{26} \\ \quad \sqrt{2t-9}t - 1.573822776 * 10^{27}\sqrt{4t-18}\sqrt{2t-9}t - 5.586525210 * 10^{26}\sqrt{2t-9} \\ \quad + 6.780659062 * 10^{27}\sqrt{4t-18}\sqrt{2t-9})) \end{array} \right.$$



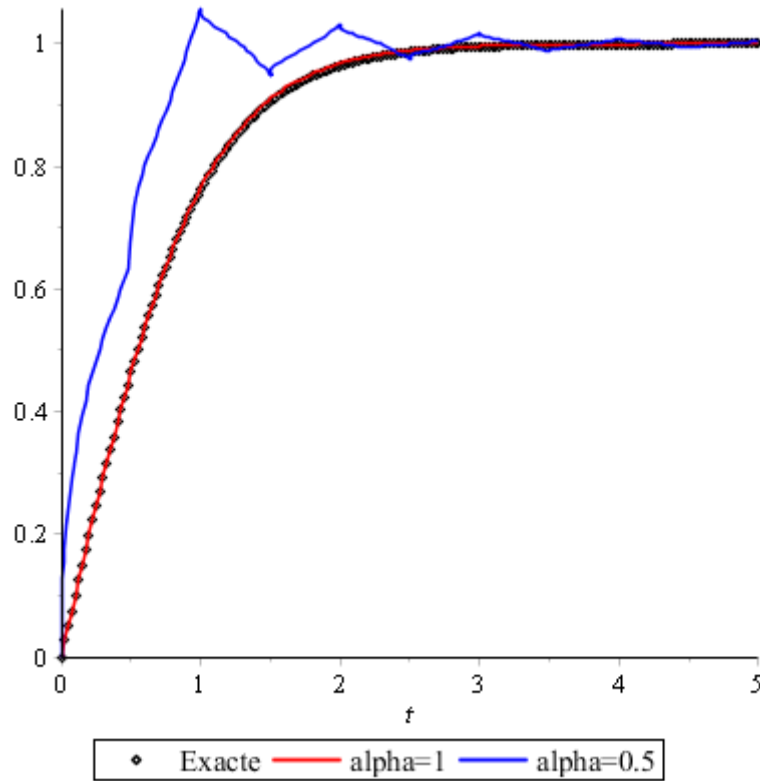


FIGURE 3.1 – Comparaison entre la solution exacte et la solution approximative

## 3.2 Équation aux dérivée partielles linéaire d'ordre fractionnaire temporelle

**Exemple 4.** Nous considérons l'équation aux dérivée partielles **linéaire** d'ordre fractionnaire suivante :

$${}^c D_{0+}^\alpha = 2xu_x - u \quad 0 < \alpha \leq 1. \quad (3.4)$$

avec la condition initiale suivante :

$$u(x, 0) = x. \quad (3.5)$$

où  ${}^c D_{0+}^\alpha$  désigne la dérivée fractionnaire au sens de Caputo. la solution exacte de l'équation (3.1) pour  $\alpha = 1$  est donnée par :

$$u(x, t) = xe^t. \quad (3.6)$$

D'après le programme présenté nous définissons la fonction  $f$  et le valeur de  $\alpha$ , le nombre d'itération  $n$  et  $N$  le numéro de sous intervalle et la condition initial  $U[i]$ , on prenant l'intervalle  $[0, T]$  et  $\Delta t$  comme suit :

$$\begin{aligned} \text{alpha} &:= 1 : n := 4 : U[0] := x : \\ N &:= 5 : \Delta t := 0.6 : T := 3 : \\ f &:= 2xu_x - u : \end{aligned}$$

### 3.2. ÉQUATION AUX DÉRIVÉE PARTIELLES LINÉAIRE D'ORDRE FRACTIONNAIRE TEMPORELLE

---

on obtient la solution dans chaque sous intervalle  $\Omega_i$ .

Dans le premier intervalle  $\Omega_0 = [0, 0.6]$  on trouve :

$$\begin{aligned} u_{0,0}(x, t) &= x, \\ u_{0,1}(x, t) &= xt, \\ u_{0,2}(x, t) &= \frac{1}{2}xt^2, \\ u_{0,3}(x, t) &= \frac{1}{6}xt^3, \\ u_{0,4}(x, t) &= \frac{1}{24}xt^4, \end{aligned}$$

Alors, la solution dans le sous intervalle  $\Omega_1 = [0.6, 1.2]$  est :

$$\Phi_{0,4}(x, t) = x + xt + \frac{1}{2}xt^2 + \frac{1}{6}xt^3 + \frac{1}{24}xt^4.$$

• **pour**  $\Omega_1 = [0.6, 1.2]$  on trouve :

$$\begin{aligned} u_{1,0}(x, t) &= 1.8214x, \\ u_{1,1}(x, t) &= 1.8214x(t - 0.6), \\ u_{1,2}(x, t) &= 0.9107x(t^2 - 0.36) - 1.09284x(t - 0.6), \\ u_{1,3}(x, t) &= 0.3035666667x(t^3 - 0.216) - 0.54642x(t^2 - 0.36) + 0.327852x(t - 0.6), \\ u_{1,4}(x, t) &= 0.7589166668x(t^4 - 0.1296) - 0.18214x(t^3 - 0.216) + 0.163926x(t^2 - 0.36) \\ &\quad - 0.6557039999x(t - 0.6), \end{aligned}$$

Alors, la solution dans le sous intervalle  $[0.6, 1.2]$  est :

$$\begin{aligned} \Phi_{1,4}(x, t) &= 1.8214x + 0.9908416x(t - 0.6) + 0.528206x(t^2 - 0.36) + 0.1214266667x(t^3 - 0.216) \\ &\quad + 0.7589166668x(t^4 - 0.1296). \end{aligned}$$

Et la solution dans les autres sous intervalles est :

• Dans  $\Omega_2 = [1.2, 1.8]$  est :

$$\begin{aligned} \Phi_{2,4}(x, t) &= 3.317497960x + 0.769659526x(t - 1.2) + 0.862549470x(t^2 - 1.44) \\ &\quad - 0.1105832653x(t^3 - 1.728) + 0.1382290817x(t^4 - 2.0736). \end{aligned}$$

• Dans  $\Omega_3 = [1.8, 2.4]$  est :

$$\begin{aligned} \Phi_{3,4}(x, t) &= 6.042490785x - 0.918458596x(t - 1.8) + 2.477421219x(t^2 - 3.24) \\ &\quad - 0.805665438x(t^3 - 5.832) + 0.2517704492x(t^4 - 10.4976). \end{aligned}$$

• Dans  $\Omega_4 = [2.4, 3]$  est :

3.2. ÉQUATION AUX DÉRIVÉE PARTIELLES LINÉAIRE D'ORDRE FRACTIONNAIRE TEMPORELLE

---

$$\begin{aligned}\Phi_{4,4}(x, t) = & 11.00579270x - 9.06877314x(t - 2.4) + 8.14428659x(t^2 - 5.76) \\ & - 2.568018297x(t^3 - 13.824) + 0.4585746958x(t^4 - 33.1776).\end{aligned}$$

Donc la solution de l'équation(3.4) dans tous les sous intervalles  $\Omega_i$  pour  $\alpha = 1$  est donnée par :

$$\Phi_4(x, t) = \begin{cases} \Phi_{0,4}(x, t) = x + xt + \frac{1}{2}xt^2 + \frac{1}{6}xt^3 + \frac{1}{24}xt^4 & ; 0 \leq t \leq 0.6 \\ \Phi_{1,4}(x, t) = 1.8214x + 0.990841600x(t - 0.6) & ; 0.6 \leq t \leq 1.2 \\ + 0.528206x(t^2 - 0.36) + 0.1214266667x(t^3 - 0.216) \\ + 0.7589166668x(t^4 - 0.1296) \\ \vdots \\ \vdots \\ \Phi_{4,4}(x, t) = 11.00579270x - 9.06877314x(t - 2.4) & ; 2.4 \leq t \leq 3 \\ + 8.14428659x(t^2 - 5.76) - 2.568018297x(t^3 - 13.824) \\ + 0.4585746958x(t^4 - 33.1776) \end{cases}$$

► **Pour**  $\alpha = 0.5$  on obtient :

Dans le premier intervalle  $\Omega_0 = [0, 0.6]$  on trouve :

$$\begin{aligned}u_{0,0}(x, t) &= x, \\ u_{0,1}(x, t) &= 1.128379167\sqrt{tx}, \\ u_{0,2}(x, t) &= xt, \\ u_{0,3}(x, t) &= 0.7522527778t^{3/2}x, \\ u_{0,4}(x, t) &= 0.4999999998t^2x,\end{aligned}$$

la solution dans le sous intervalle  $\Omega_0[0, 0.6]$  est :

$$\Phi_{0,4}(x, t) = x + 1.128379167\sqrt{tx} + xt + 0.7522527778t^{3/2}x + 0.4999999998t^2x.$$

Et la solution dans les autres sous intervalles est :

• Dans  $\Omega_1 = [0.6, 1.2]$  est :

$$\begin{aligned}\Phi_{1,4}(x, t) = & 1.201461697x + 0.4067113047\sqrt{25t - 15}x + 3.003654242xt + 0.4519014495\sqrt{25t - 15}xt \\ & \frac{1}{\sqrt{5t - 3}} + (0.006007308480x(55.90169944\sqrt{25t - 15}t^2 - 67.08203932\sqrt{25t - 15}t \\ & + 125.t^2\sqrt{5t - 3} + 20.12461180\sqrt{25t - 15} - 150t\sqrt{5t - 3} + 45\sqrt{5t - 3})).\end{aligned}$$

• Dans  $\Omega_2 = [1.2, 1.8]$  est :

$$\begin{aligned}\Phi_{2,4}(x, t) = & -1.804387755x + 0.407206714\sqrt{25t - 30}x + 9.021938806x + 1.357355706\sqrt{25t - 30}xt \\ & + \frac{1}{5t - 6}(8.8622692 * 10^{-12}x(1.13817736 * 10^{11}\sqrt{25t - 30}t^2 - 2.7316256 * 10^{11}\sqrt{25t - 30}t \\ & + 2.54504194 * 10^{11}t^2\sqrt{5t - 6} + 1.63897539 * 10^{11}\sqrt{25t - 30} - 6.10810067 * 10^{11}t\sqrt{5t - 6} \\ & + 3.664860400 * 10^{11}\sqrt{5t - 6}))\end{aligned}$$

### 3.2. ÉQUATION AUX DÉRIVÉE PARTIELLES LINÉAIRE D'ORDRE FRACTIONNAIRE TEMPORELLE

---

- Dans  $\Omega_3 = [1.8, 2.4]$  est :

$$\begin{aligned} \Phi_{3,4}(x, t) = & -21.67902780x - 1.223108167\sqrt{25t - 45}x + 27.09878477xt + 4.077027225\sqrt{25t - 45}xt \\ & + \frac{1}{5t - 9}(0.5419756953x(55.90169944\sqrt{25t - 45}t^2 - 201.2461180\sqrt{25t - 45}t \\ & + 125t^2\sqrt{5t - 9} + 181.1215062\sqrt{25t - 45} - 450t\sqrt{5t - 9} + 405\sqrt{5t - 9})) \end{aligned}$$

- Dans  $\Omega_4 = [2.4, 3]$  est :

$$\begin{aligned} \Phi_{4,4}(x, t) = & -113.9535318x - 25.71655828\sqrt{25t - 60}x + 81.39537983xt - 0.2449196025x \\ & \cdot (25t - 60)^{3/2} + 18.36897019xt\sqrt{25t - 60} + \frac{1}{\sqrt{5t - 12}\sqrt{25t - 60}}(1.17539496510^{-11}x \\ & (2.903368779 * 10^{13}t^3 + 8.656173273 * 10^{11}\sqrt{5t - 12}\sqrt{25t - 60}t^2 - 2.090425521 * 10^{14}t^2 \\ & - 4.154963172 * 10^{12}\sqrt{5t - 12}\sqrt{25t - 60}t + 5.017021250 * 10^{14}t + 4.985955807 * 10^{12} \\ & \sqrt{5t - 12}\sqrt{25t - 60} - 12800t^2\sqrt{5t - 12} - 4.013617000 * 10^{14} + 63360t\sqrt{5t - 12} \\ & - 78336\sqrt{5t - 12})) \end{aligned}$$

Donc la solution de l'équation(3.4) dans tous les sous intervalles  $\Omega_i$  pour  $\alpha = 0.5$  est donnée par :

$$\Phi_4(x, t) = \begin{cases} \Phi_{0,4}(x, t) = x + 1.128379167\sqrt{t}x + xt + 0.7522527778t^{3/2}x & ; 0 \leq t \leq 0.6 \\ +0.4999999998t^2x \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \Phi_{4,4}(x, t) = -113.9535318x - 25.71655828\sqrt{25t - 60}x & ; 2.4 \leq t \leq 3 \\ +81.39537983xt - 0.2449196025x \cdot (25t - 60)^{3/2} + 18.36897019xt\sqrt{25t - 60} \\ + \frac{1}{\sqrt{5t - 12}\sqrt{25t - 60}}(1.175394965 * 10^{-11}x(2.903368779 * 10^{13}t^3 + 8.656173273 * 10^{11} \\ \sqrt{5t - 12}\sqrt{25t - 60}t^2 - 2.090425521 * 10^{14}t^2 - 4.154963172 * 10^{12}\sqrt{5t - 12} \\ \sqrt{25t - 60}t + 5.017021250 * 10^{14}t + 4.985955807 * 10^{12}\sqrt{5t - 12}\sqrt{25t - 60} \\ - 12800t^2\sqrt{5t - 12} - 4.013617000 * 10^{14} + 63360t\sqrt{5t - 12} - 78336\sqrt{5t - 12})) \end{cases}$$

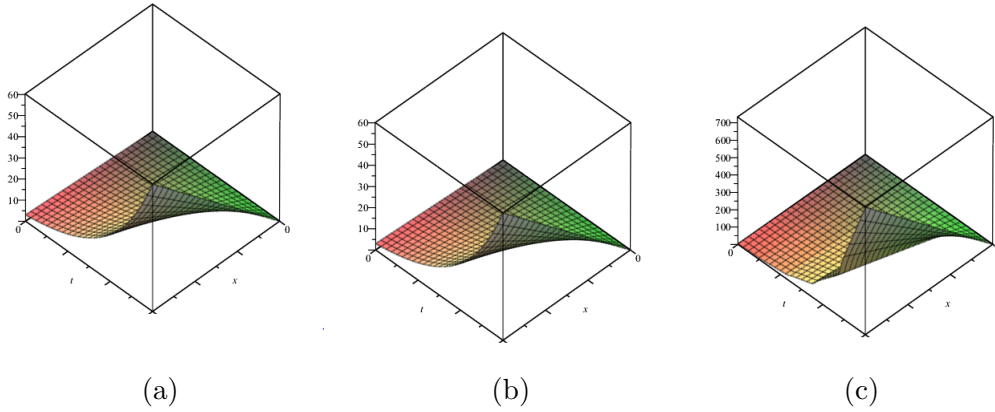


FIGURE 3.2 – (a) le graphe de la solution exacte de l'équation(3.4), (b)et (c) les graphes de la solution approximative de l'équation(3.4) par la méthode MFTDM pour  $\alpha = 1$  et  $\alpha = 0.5$  respectivement.

### 3.3 Équation aux dérivée partielles non-linéaire d'ordre fractionnaire

**Exemple 5.** Nous considérons l'équation aux dérivée partielles **non-linéaire** d'ordre fractionnaire suivant :

$${}^c D_{0+}^\alpha = -\frac{1}{2}t(u_x)^2 \quad 0 < \alpha \leq 1. \quad (3.7)$$

avec la condition initiale suivant :

$$u(x, 0) = x^2. \quad (3.8)$$

où  ${}^c D_{0+}^\alpha$  désigne la dérivée fractionnaire au sens de Caputo.

avec la solution exacte de l'équation (3.1) pour  $\alpha = 1$  est donnée par :

$$u(x, t) = \frac{x^2}{1+t^2} \quad \text{avec } |t^2| < 1. \quad (3.9)$$

Soient :

$$\text{alpha} := 1 : n := 4 : U[0] := x :$$

$$N := 5 : \Delta t := 1 : T := 5 :$$

$$f := -\frac{1}{2}t(u_x)^2 :$$

on obtient la solution dans chaque sous intervalle  $\Omega_i$ .

Dans le premier intervalle  $\Omega_0 = [0, 1]$  on trouve :

$$u_{0,0}(x, t) = x^2,$$

$$u_{0,1}(x, t) = -x^2 t^2,$$

$$u_{0,2}(x, t) = -\frac{1}{3}x^2 t^6 + x^2 t^4,$$

$$u_{0,3}(x, t) = -\frac{1}{63}x^2 t^{14} + \frac{1}{9}x^2 t^{12} - \frac{1}{3}x^2 t^{10} + \frac{2}{3}x^2 t^8 - \frac{2}{3}x^2 t^6,$$

### 3.3. ÉQUATION AUX DÉRIVÉE PARTIELLES NON-LINÉAIRE D'ORDRE FRACTIONNAIRE

---

la solution dans le sous intervalle  $\Omega_0 = [0, 1]$  est :

$$\Phi_{0,3}(x, t) = x^2 - x^2t^2 - x^2t^6 + x^2t^4 - \frac{1}{63}x^2t^{14} + \frac{1}{9}x^2t^{12} - \frac{1}{3}x^2t^{10} + \frac{2}{3}x^2t^8.$$

Et la solution dans les autres sous intervalles est :

• Dans  $\Omega_1 = [1, 2]$  est :

$$\begin{aligned} \Phi_{1,3}(x, t) = & 0.5530420129x^2 - 0.1836734698x^2(t^2 - 1) - 0.9947958362x^2t^6 + 0.2632181071x^2t^4 \\ & - 0.3094217837x^2t^2 - 0.1806529974x^2t^{14} + 0.4215236603x^2t^{12} - 0.4215236600x^2t^{10} \\ & + 0.2502445460x^2t^8. \end{aligned}$$

• Dans  $\Omega_2 = [2, 3]$  est :

$$\begin{aligned} \Phi_{2,3}(x, t) = & 0.1905547008x^2 - 0.1678785952x^2(t^2 - 4) - 0.1022163508x^2t^6 + 0.9192236479x^2t^4 \\ & - 0.3963479546x^2t^2 - 1.260784196 * 10^{-9}x^2t^{14} + 1.034167021 * 10^{-7}x^2t^{12} \\ & - 0.3635497308x^2t^{10} + 0.7505838112x^2t^8. \end{aligned}$$

• Dans  $\Omega_3 = [3, 4]$  est :

$$\begin{aligned} \Phi_{3,3}(x, t) = & 0.1518612315x^2 - 0.5780765195x^2(t^2 - 9) - 0.1744175087x^2t^6 + 0.2816999700x^2t^4 \\ & - 0.2372749600x^2t^2 - 1.772559280 * 10^{-11}x^2t^{14} + 2.748659697 * 10^{-9}x^2t^{12} \\ & - 1.826688083 * 10^{-7}x^2t^{10} + 0.7026582092x^2t^8. \end{aligned}$$

• Dans  $\Omega_4 = [4, 5]$  est :

$$\begin{aligned} \Phi_{4,3}(x, t) = & 0.1199743789x^2 - 0.2381672512x^2(t^2 - 16) - 0.3618448070x^2t^6 + 0.9396860964x^2t^4 \\ & - 0.1309593196x^2t^2 - 5.107256006 * 10^{-13}x^2t^{14} + 1.304575109 * 10^{-10}x^2t^{12} \\ & - 1.428149799 * 10^{-8}x^2t^{10} + 8.993305352 * 10^{-7}x^2t^8. \end{aligned}$$

la solution approximative de l'équation(3.7) dans tous les sous intervalles  $\Omega_i$  pour  $\alpha = 1$  est donnée par :

$$\Phi_3(x, t) = \begin{cases} \Phi_{0,3}(x, t) = x^2 - x^2t^2 - x^2t^6 + x^2t^4 - \frac{1}{63}x^2t^{14} + \frac{1}{9}x^2t^{12} - \frac{1}{3}x^2t^{10} + \frac{2}{3}x^2t^8 & ; 0 \leq t \leq 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \Phi_{4,3}(x, t) = 0.1199743789x^2 - 0.2381672512x^2(t^2 - 16) - 0.3618448070x^2t^6; & 4 \leq t \leq 5 \\ +0.9396860964x^2t^4 - 0.1309593196x^2t^2 - 5.107256006 * 10^{-13}x^2t^{14} \\ +1.304575109 * 10^{-10}x^2t^{12} - 1.42814979910^{-8}x^2t^{10} + 8.99330535 * 10^{-7}x^2t^8 \end{cases}$$

► **Pour**  $\alpha = 0.5$  on obtient :

Dans le premier intervalle  $\Omega_0 = [0, 1]$  on trouve :

### 3.3. ÉQUATION AUX DÉRIVÉE PARTIELLES NON-LINÉAIRE D'ORDRE FRACTIONNAIRE

---

$$u_{0,0}(x, t) = x^2,$$

$$u_{0,1}(x, t) = -1.504505556t^{3/2}x^2,$$

$$u_{0,2}(x, t) = 3.333333333t^3x^2 - 2.075735738t^{9/2}x^2,$$

$$u_{0,3}(x, t) = 9.098310797t^9x^2 + 11.34068755t^6x^2 - 2.627914599t^{21/2}x^2 - 12.46641830t^{15/2}x^2 - 6.113546383t^{9/2}x^2,$$

la solution dans le sous intervalle  $\Omega_0[0, 1]$  est :

$$\Phi_{0,3}(x, t) = x^2 - 1.504505556t^{3/2}x^2 + 3.333333333t^3x^2 - 8.189282121t^{9/2}x^2 + 9.098310797t^9x^2 + 11.34068755t^6x^2 - 2.627914599t^{21/2}x^2 - 12.4664183t^{15/2}x^2.$$

Et la solution dans les autres sous intervalles est :

• Dans  $\Omega_1 = [1, 2]$  est :

$$\begin{aligned} \Phi_{1,3}(x, t) = & -0.187356811\sqrt{t-1}x^2 - 0.131124349x^2t^3 - 2.02329028 * 10^{-9}x^2t^2 + 0.786734396x^2t \\ & + 3.982296552 * 10^{-12}x^2t^7 - 1.112532602 * 10^{-8}x^2t^6 - 1.744051807 * 10^{-12}x^2t^5 \\ & + 1.318491490 * 10^{-8}x^2t^4 - 2.225478021 * 10^{-12}x^2t^9 + 1.290315686 * 10^{-21}x^2t^8 \\ & - 1.931134974 * 10^{-10}x^2t^7\sqrt{t-1} - 1.014905441 * 10^{-14}x^2\sqrt{t-1}t^10 \\ & - 9.656757799 * 10^{-11}x^2t^6\sqrt{t-1} + 1.833965847 * 10^{-14}x^2\sqrt{t-1}t^8 + 2.094210699 * 10^{-10} \\ & .x^2t^5\sqrt{t-1} - 5.074527196 * 10^{-15}x^2\sqrt{t-1}t^9 - 0.3747008917\sqrt{t-1}x^2t \\ & + 2.352349738 * 10^{-7}x^2\sqrt{t-1}t^2 - 5.086697443 * 10^{-7}x^2\sqrt{t-1}t^4 \\ & - 2.544160282 * 10^{-7}x^2\sqrt{t-1}t^3 - 0.1578365195x^2. \end{aligned}$$

• Dans  $\Omega_2 = [2, 3]$  est :

$$\begin{aligned} \Phi_{2,3}(x, t) = & -0.422078503\sqrt{t-2}x^2 - 0.157770555x^2t^3 + 0.378598389x^2t - 3.46436679 * 10^{-12}x^2t^9 \\ & + 2.479671477 * 10^{-11}x^2t^7 - 1.523725595 * 10^{-8}x^2t^6 - 4.343914236 * 10^{-11}x^2t^5 \\ & + 7.222311098 * 10^{-8}x^2t^4 - 4.433097751 * 10^{-8}x^2t^2 - 2.819903122 * 10^{-10}x^2t^7\sqrt{t-2} \\ & - 1.68299707 * 10^{-14}x^2\sqrt{t-2}t^9 - 6.52390685 * 10^{-7}x^2\sqrt{t-2}t^4 + 0.12078413x^2\sqrt{t-2}t^2 \\ & - 2.82277642 * 10^{-10}x^2t^6\sqrt{t-2} - 0.421947654\sqrt{t-2}x^2t - 6.54287242 * 10^{-7}x^2\sqrt{t-2}t^3 \\ & + 1.216491321 * 10^{-13}x^2\sqrt{t-2}t^8 - 1.682997072 * 10^{-14}x^2\sqrt{t-2}t^{10} \\ & + 1.223397613 * 10^{-9}x^2t^5\sqrt{t-2} - 0.1676884880x^2. \end{aligned}$$

• Dans  $\Omega_3 = [3, 4]$  est :

$$\begin{aligned} \Phi_{3,3}(x, t) = & -0.1010888355x^2\sqrt{t-3}t^4 + 0.4224486645x^2\sqrt{t-3}t^2 - 0.5144350639\sqrt{t-3}x^2t \\ & + 5.417023545 * 10^{-9}x^2t^5\sqrt{t-3} - 5.546325482 * 10^{-10}x^2t^7\sqrt{t-3} + 6.769359621 * 10^{-13} \\ & x^2\sqrt{t-3}t^8 - 8.355463315 * 10^{-10}x^2t^6\sqrt{t-3} - 0.1535233163x^2\sqrt{t-3}t^3 \\ & - 6.2435367 * 10^{-14}x^2\sqrt{t-3}t^9 - 4.1623578 * 10^{-14}x^2\sqrt{t-3}t^{10} - 0.77268528x^2\sqrt{t-3} \\ & - 0.217809750x^2t^3 - 3.92728788 * 10^{-7}x^2t^2 + 0.117551183x^2t - 7.651083007 * 10^{-12}x^2t^9 \\ & - 2.771329597 * 10^{-20}x^2t^8 + 1.232184416 * 10^{-10}x^2t^7 - 2.667892979 * 10^{-8}x^2t^6 \\ & - 4.856745503 * 10^{-10}x^2t^5 + 2.843927218 * 10^{-7}x^2t^4 - 0.1859963759x^2. \end{aligned}$$

### 3.3. ÉQUATION AUX DÉRIVÉE PARTIELLES NON-LINÉAIRE D'ORDRE FRACTIONNAIRE

• Dans  $\Omega_4 = [4, 5]$  est :

$$\begin{aligned} \Phi_{4,3}(x, t) = & -0.136789224\sqrt{t-4}x^2 - 0.360276376x^2t^3 + 0.345228259x^2t - 2.82015153 * 10^{-11}x^2t^9 \\ & + 8.074259740 * 10^{-10}x^2t^7 - 6.647856548 * 10^{-8}x^2t^6 - 5.657828667 * 10^{-9}x^2t^5 \\ & + 0.1257903211x^2t^4 - 0.3087235728x^2t^2 + 2.925913435 * 10^{-8}x^2\sqrt{t-4}t^5 \\ & - 3.4147234 * 10^{-9}x^2\sqrt{t-4}t^6 - 0.2029262x^2\sqrt{t-4}t^4 - 1.84852187 * 10^{-13}x^2\sqrt{t-4}t^{10} \\ & - 0.6806026878\sqrt{t-4}x^2t - 1.682114593 * 10^{-9}x^2\sqrt{t-4}t^7 - 0.4240196372x^2\sqrt{t-4}t^3 \\ & - 3.69704374 * 10^{-13}x^2\sqrt{t-4}t^9 + 0.15238234x^2\sqrt{t-4}t^2 + 5.34453885 * 10^{-12}x^2\sqrt{t-4}t^8 \\ & - 0.2176902760x^2. \end{aligned}$$

Donc la solution approchée de l'équation(3.7) dans tous les sous intervalles  $\Omega_i$  pour  $\alpha = 0.5$  est donnée par :

$$\Phi_3(x, t) = \begin{cases} \left. \begin{aligned} & \Phi_{0,3}(x, t) = x^2 - 1.504505556t^{3/2}x^2 + 3.333333333t^3x^2 & ; 0 \leq t \leq 1 \\ & -8.189282121t^{9/2}x^2 + 9.098310797t^9x^2 + 11.34068755t^6x^2 - 2.627914599t^{21/2}x^2 \\ & -12.4664183t^{15/2}x^2 \\ & \vdots \\ & \vdots \\ & \vdots \end{aligned} \right\} \\ \left. \begin{aligned} & \Phi_{4,3}(x, t) = -0.1367892242\sqrt{t-4}x^2 - 0.3602763765x^2t^3 & ; 4 \leq t \leq 5 \\ & +0.3452282597x^2t - 2.820151537 * 10^{-11}x^2t^9 + 8.074259740 * 10^{-10}x^2t^7 \\ & -6.647856548 * 10^{-8}x^2t^6 - 5.657828667 * 10^{-9}x^2t^5 + 0.1257903211x^2t^4 \\ & -0.3087235728x^2t^2 + 2.925913435 * 10^{-8}x^2\sqrt{t-4}t^5 - 3.414723431 * 10^{-9} \\ & .x^2\sqrt{t-4}t^6 - 0.2029262009x^2\sqrt{t-4}t^4 - 1.84852187 * 10^{-13}x^2\sqrt{t-4}t^{10} \\ & -0.6806026878\sqrt{t-4}x^2t - 1.682114593 * 10^{-9}x^2\sqrt{t-4}t^7 - 0.4240196372x^2 \\ & .\sqrt{t-4}t^3 - 3.697043740 * 10^{-13}x^2\sqrt{t-4}t^9 + 0.1523823405x^2\sqrt{t-4}t^2 \\ & +5.344538856 * 10^{-12}x^2\sqrt{t-4}t^8 - 0.2176902760x^2. \end{aligned} \right\} \end{cases}$$

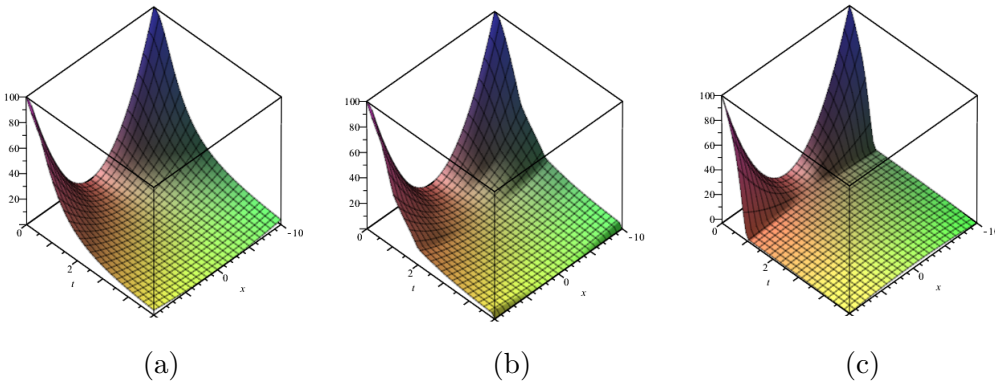


FIGURE 3.3 – (a) le graphe de la solution exacte de l'équation(3.7), (b)et (c) les graphes de la solution approximative de l'équation(3.7) par la méthode MFTDM pour  $\alpha = 1$  et  $\alpha = 0.5$  respectivement.



### 3.4 L'équation de $K(2,2)$ non-linéaire d'ordre fractionnaire

En considérer l'équation  $K(2, 2)$  non-linéaire fractionnaire temporelle et spatiale qui donnée par :

$${}^c D_{0+}^\alpha u + (2u + 6u_{xx}) {}^c D_{0+}^\beta u + 2uu_{xxx} = 0, 0 < \alpha, \beta \leq 1, \quad (3.10)$$

avec la condition initiale

$$u(x, 0) = g(x). \quad (3.11)$$

**Solution d'équation  $K(2, 2)$  d'ordre fractionnaire temporelle :**

Si on fixe  $\beta = 1$  on considère la forme de l'équation  $K(2, 2)$  fractionnaire **temporelle** suivante :

$${}^c D_{0+}^\alpha u + (2u + 6u_{xx})u_x + 2uu_{xxx} = 0, \quad 0 < \alpha \leq 1. \quad (3.12)$$

avec la condition initiale :

$$u(x, 0) = \frac{4}{3} \cos^2\left(\frac{x}{4}\right), \quad (3.13)$$

La solution exacte de l'équation (3.12)-(3.13) pour  $\alpha = 1$  est :

$$u(x, t) = \frac{4}{3} \cos^2\left(\frac{x-t}{4}\right). \quad (3.14)$$

Nous appliquons la méthode MFTDM pour résoudre l'équation de (3.12)-(3.13)  $K(2, 2)$ .

$$\begin{aligned} \text{alpha} &:= 1 : n := 2 : U[0] := \frac{4}{3} \cos^2\left(\frac{x}{4}\right) : \\ N &:= 3 : \Delta t := 1 : T := 3 : \\ f &:= -(2u + 6u_{xx})u_x - 2uu_{xxx} : \end{aligned}$$

on obtient la solution dans chaque sous intervalle  $\Omega_i$ .

Dans le premier intervalle  $\Omega_0 = [0, 1]$  on trouve :

$$\begin{aligned} u_{0,0}(x, t) &= \frac{4}{3} \cos^2\left(\frac{x}{4}\right), \\ u_{0,1}(x, t) &= \frac{2}{3} \cos\left(\frac{x}{4}\right) \sin\left(\frac{x}{4}\right) t, \\ u_{0,2}(x, t) &= -\frac{1}{12} t^2 \left(2 \cos^2\left(\frac{x}{4}\right) - 1\right), \end{aligned}$$

la solution dans le sous intervalle  $\Omega_0 = [0, 1]$  est :

$$\Phi_{0,2}(x, t) = -\frac{1}{6} \cos^2\left(\frac{x}{4}\right) t^2 + \frac{2}{3} \cos\left(\frac{x}{4}\right) \sin\left(\frac{x}{4}\right) t + \frac{4}{3} \cos^2\left(\frac{x}{4}\right) + \frac{1}{12} t^2.$$

### 3.4. L'ÉQUATION DE $K(2,2)$ NON-LINÉAIRE D'ORDRE FRACTIONNAIRE

La solution dans le sous intervalle  $\Omega_1 = [1, 2]$  est :

$$\begin{aligned} \Phi_{1,2}(x, t) = & -\frac{1}{12} \cos\left(\frac{x}{4}\right) \sin\left(\frac{x}{4}\right) t^2 + \frac{3}{4} \cos\left(\frac{x}{4}\right) \sin\left(\frac{x}{4}\right) t - \frac{7}{48} \cos^2\left(\frac{x}{4}\right) t^2 - \frac{1}{24} \cos^2\left(\frac{x}{4}\right) t \\ & + \frac{7}{96} t^2 + \frac{65}{48} \cos^2\left(\frac{x}{4}\right) + \frac{1}{48} t - \frac{1}{96}. \end{aligned}$$

Et la solution dans le sous intervalle  $\Omega_1 = [2, 3]$  est :

$$\begin{aligned} \Phi_{2,2}(x, t) = & -\frac{7}{48} \cos\left(\frac{x}{4}\right) \sin\left(\frac{x}{4}\right) t^2 + \frac{89}{96} \cos\left(\frac{x}{4}\right) \sin\left(\frac{x}{4}\right) t + \frac{5}{48} \cos\left(\frac{x}{4}\right) \sin\left(\frac{x}{4}\right) \\ & - \frac{11}{128} \cos^2\left(\frac{x}{4}\right) t^2 - \frac{23}{96} \cos^2\left(\frac{x}{4}\right) t + \frac{11}{256} t^2 + \frac{145}{96} \cos^2\left(\frac{x}{4}\right) + \frac{23}{192} t - \frac{17}{192}. \end{aligned}$$

la solution approchée de l'équation(3.12) dans tous les sous intervalles  $\Omega_i$  pour  $\alpha = 1$  est donnée par :

$$\Phi_2(x, t) = \begin{cases} \Phi_{0,2}(x, t) = -\frac{1}{6} \cos^2\left(\frac{x}{4}\right) t^2 + \frac{2}{3} \cos\left(\frac{x}{4}\right) \sin\left(\frac{x}{4}\right) t + \frac{4}{3} \cos^2\left(\frac{x}{4}\right) + \frac{1}{12} t^2 & ; 0 \leq t \leq 1 \\ \Phi_{1,2}(x, t) = -\frac{1}{12} \cos\left(\frac{x}{4}\right) \sin\left(\frac{x}{4}\right) t^2 + \frac{3}{4} \cos\left(\frac{x}{4}\right) \sin\left(\frac{x}{4}\right) t & ; 1 \leq t \leq 2 \\ -\frac{7}{48} \cos^2\left(\frac{x}{4}\right) t^2 - \frac{1}{24} \cos^2\left(\frac{x}{4}\right) t + \frac{7}{96} t^2 + \frac{65}{48} \cos^2\left(\frac{x}{4}\right) + \frac{1}{48} t - \frac{1}{96} \\ \Phi_{2,2}(x, t) = -\frac{7}{48} \cos\left(\frac{x}{4}\right) \sin\left(\frac{x}{4}\right) t^2 + \frac{89}{96} \cos\left(\frac{x}{4}\right) \sin\left(\frac{x}{4}\right) t & ; 2 \leq t \leq 3 \\ + \frac{5}{48} \cos\left(\frac{x}{4}\right) \sin\left(\frac{x}{4}\right) - \frac{11}{128} \cos^2\left(\frac{x}{4}\right) t^2 - \frac{23}{96} \cos^2\left(\frac{x}{4}\right) t + \frac{11}{256} t^2 \\ + \frac{145}{96} \cos^2\left(\frac{x}{4}\right) + \frac{23}{192} t - \frac{17}{192} \end{cases}$$

Maintenant, nous donnons des tableaux des résultats de la solution exacte et les solution approximative pour  $\alpha = 1$  et  $\alpha = \frac{1}{2}$  :

t/x	0.5	1	1.5	2	2.5	3
0.5	1.3333333	1.3126082	1.2517217	1.1544592	1.0268682	0.8768815
1	1.3126082	1.3333333	1.3126082	1.2517217	1.1544592	1.0268682
1.5	1.2517217	1.3126082	1.3333333	1.3126082	1.2517217	1.1544592
2	1.1544592	1.2517217	1.3126082	1.3333333	1.3126082	1.2517217
2.5	1.0268682	1.1544592	1.2517217	1.3126082	1.3333333	1.3126082
3	0.87688157	1.0268682	1.1544592	1.2517217	1.3126082	1.3333333

TABLE 3.1 – Le résultat de la solution exacte de l'équation (3.14)

t/x	0.5	1	1.5	2	2.5	3
0.5	1.333656	1.314333	1.249431	1.144049	1.009092	0.8442995
1	1.313342	1.338398	1.314191	1.248000	1.143053	1.001773
1.5	1.252822	1.320698	1.338691	1.315807	1.247395	1.138412
2	1.155857	1.262333	1.321408	1.343253	1.315630	1.245719
2.5	1.028476	1.166932	1.263416	1.328633	1.343515	1.317024
3	0.8786002	1.040428	1.168321	1.272854	1.329317	1.347893

TABLE 3.2 – Le résultat de la solution de l'équation (3.12)-(3.13) pour  $\alpha = 1$

t/x	0.5	1	1.5	2	2.5	3
0.5	1.297665	1.244178	1.075951	0.9639819	0.7248033	0.6039619
1	1.306098	1.285782	1.172340	1.080018	0.8619601	0.7413705
1.5	1.274774	1.288893	1.237290	1.170354	0.9869745	0.8741344
2	1.205641	1.253317	1.266761	1.229373	1.092073	0.9939991
2.5	1.102998	1.181266	1.258921	1.253406	1.170723	1.093512
3	0.973225	1.077219	1.214257	1.240958	1.218033	1.166485

TABLE 3.3 – Le résultat de la solution de l'équation (3.12)-(3.13) pour  $\alpha = \frac{1}{2}$

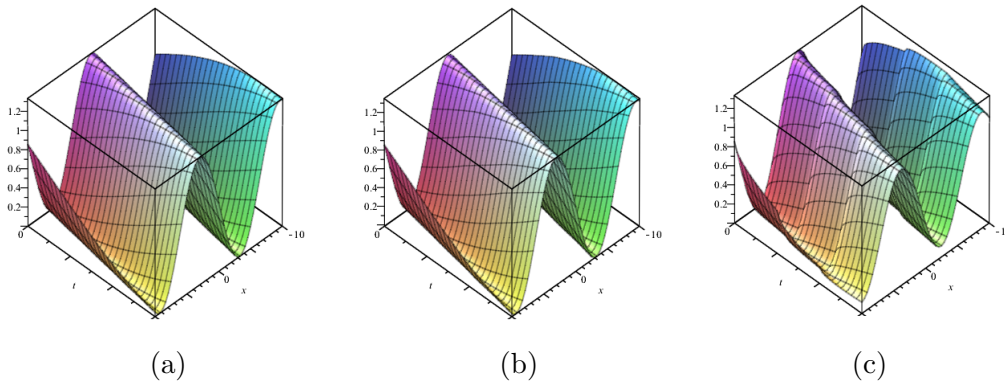


FIGURE 3.4 – (a) le graphe de la solution exacte de l'équation(3.12, (b)et (c) les graphes de la solution approximative de l'équation(3.12) par la méthode MFTDM pour  $\alpha = 1$  et  $\alpha = 0.5$  respectivement.

### Solution d'équation $K(2, 2)$ d'ordre fractionnaire spatiale

Soit l'équation  $K(2, 2)$  fractionnaire spatiale qui donnée par :

$$u_t + (2u + 6u_{xx})^c D_{0+}^\beta u + 2uu_{xxx} = 0, \quad 0 < \beta \leq 1. \quad (3.15)$$

La condition initial

$$u(x, 0) = x^2. \quad (3.16)$$

Nous appliquons la méthode MFTDM pour résoudre l'équation de  $K(2, 2)$  avec dérivée fractionnaire spatiale selon les valeurs de  $\beta$ .

### 3.4. L'ÉQUATION DE $K(2,2)$ NON-LINÉAIRE D'ORDRE FRACTIONNAIRE

Si  $\beta = 1$ .

$$\begin{aligned} \text{alpha} &:= 1 : n := 2 : U[0] := x^2 : \\ N &:= 3 : \Delta t := 1 : T := 3 : \\ f &:= -(2u + 6u_{xx})u_x - 2uu_{xxx} : \end{aligned}$$

Dans le premier intervalle  $\Omega_0 = [0, 1]$  on trouve :

$$\begin{aligned} u_{0,0}(x, t) &= x^2, \\ u_{0,1}(x, t) &= -4(x^2 + 6)xt, \\ u_{0,2}(x, t) &= -32t^3x^5 - 896t^3x^3 + 20t^2x^4 - 1920t^3x + 312t^2x^2 + 144t^2, \end{aligned}$$

Alors, la solution dans le sous intervalle  $\Omega_0 = [0, 1]$  est :

$$\Phi_{0,2}(x, t) = x^2 + (-24x - 4x^3)t + (288 + 624x^2 + 40x^4)\frac{t}{2} + (-32x^5 - 896x^3 - 1920x)t^3.$$

On fait de même pour les autres intervalles.

Et de la même manière, pour  $\beta = \frac{1}{2}$  nous obtenons les résultats suivants :

t/x	0.5	1	1.5	2	2.5	3
0.5	-84.3125	-862	$-1.553 * 10^{16}$	$-1.242 * 10^{17}$	$-4.359 * 10^{76}$	$-3.487 * 10^{77}$
1	-250	-2399	$-1.551 * 10^{17}$	$-1.241 * 10^{18}$	$-1.080 * 10^{80}$	$-8.647 * 10^{80}$
1.5	-554.0625	-5247	$-1.135 * 10^{18}$	$-9.086 * 10^{18}$	$-1.079 * 10^{83}$	$-8.636 * 10^{83}$
2	-1112	-10396	$-6.728 * 10^{18}$	$-5.382 * 10^{19}$	$-5.387 * 10^{85}$	$-4.309 * 10^{86}$
2.5	-2076.8125	-19166	$-3.381 * 10^{19}$	$-2.704 * 10^{20}$	$-1.535 * 10^{88}$	$-1.228 * 10^{89}$
3	-3654	-33327	$-1.485 * 10^{20}$	$-1.188 * 10^{21}$	$-2.746 * 10^{90}$	$-2.197 * 10^{91}$

TABLE 3.4 – Le résultat de la solution de l'équation (3.15)-(3.16) pour  $\beta = 1$

t/x	0.5	1	1.5	2	2.5	3
0.5	-224.1893	-1036.078	$9.925 * 10^{19}$	$3.170 * 10^{20}$	$3.572 * 10^{94}$	$1.310 * 10^{95}$
1	-1954.475	-8900.421	$2.571 * 10^{22}$	$6.948 * 10^{22}$	$1.245 * 10^{101}$	$7.761 * 10^{101}$
1.5	-9787.829	-42745.131	$-9.211 * 10^{23}$	$-7.368 * 10^{24}$	$1.355 * 10^{112}$	$4.991 * 10^{112}$
2	-36405.338	$-1.551 * 10^5$	$-3.049 * 10^{26}$	$-1.399 * 10^{27}$	$6.592 * 10^{119}$	$2.347 * 10^{120}$
2.5	$-1.107 * 10^5$	$-4.656 * 10^5$	$-1.753 * 10^{28}$	$-7.514 * 10^{28}$	$6.298 * 10^{125}$	$1.973 * 10^{126}$
3	$-2.915 * 10^5$	$-1.214 * 10^6$	$-5.241 * 10^{29}$	$-2.190 * 10^{30}$	$-3.282 * 10^{130}$	$-2.625 * 10^{131}$

TABLE 3.5 – Le résultat de la solution de l'équation (3.15)-(3.16) pour  $\beta = \frac{1}{2}$

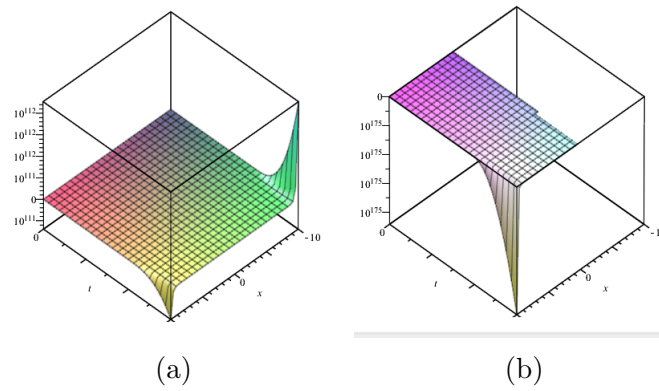


FIGURE 3.5 – (a) et (b) les graphes de la solution approximative de l'équation (3.15)-(3.16) par la méthode MFTDM pour  $\beta = 1$  et  $\beta = 0.5$  respectivement.

## CONCLUSION GÉNÉRALE

Dans ce mémoire le but est l'étude d'équation différentielle non-linaire d'ordre fractionnaire.

Dans le premier chapitre, nous avons présenté les notions de base de calcule fractionnaire.

Dans le deuxième chapitre, nous avons présenté les méthode ADM, TDM, FTDM et MFTDM.

Dans le troisième chapitre, nous avons présenté le programme de la méthode MFTDM pour résoudre les équations différentielle non-linaire d'ordre fractionnaire (les équations différentielles aux dérivées partielles d'ordre fractionnaire, l'équation de  $K(2, 2)$  non-linéaire fractionnaire temporelle et spatiale).

- [1] A. A. Kilbas ; H. M. Srivastava and J. J. Trujillo, “ Theory and applications of fractional differential equations,” Elsevier, 2006.
- [2] A. A. Kilbas and S. A. Marzan, “Cauchy problem for differential equation with Caputo derivative,” *Fract. Calc. Appl. Anal.*, vol. 7, no. 3, pp. 297-321, 2004.
- [3] K. Diethelm, “The Analysis of Fractional Differential Equations,” Springer, 2010.
- [4] M. Al-Refai, “Telescoping Decomposition Method for Solving First Order Nonlinear Differential Equations,” in *Proceedings of the International Multi-Conference of Engineers and Computer Scientists 2008, Vol. II (IMECS 2008)*, 2008, Hong Kong.
- [5] A. Bouhassoun, Multistage Telescoping Decomposition Method for Solving Fractional Differential Equations, *IAENG International Journal of Applied Mathematics*, 9 February 2013).
- [6] F. Chita, “Résolution numérique des équations différentielles d'ordre fractionnaire” ,magister, university of Oran-Senia, september 2011.
- [7] D. Ziane, K. Belghabab and M. Hamdi Cherifc, "Compactons solutions for the fractional nonlinear dispersive K(2,2) equations by the homotopy perturbation method", *Malaya J. Mat.* 4(1)(2016) 178–185.

*Annexe A*

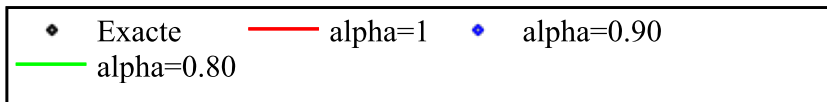
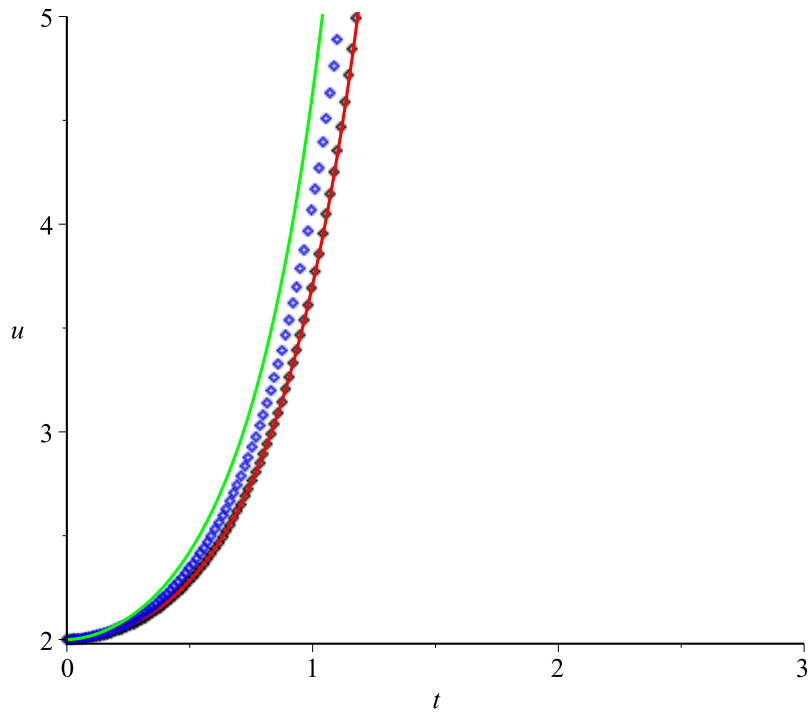


```

>
#Programmation de la méthode FTDM
> restart :
> alpha := 1 : n := 4 : U[0] := 2 :
> f := (t, u) → 2 · t · u - 2 · t;
                                f := (t, u) → 2 t u - 2 t (1)
> abc := proc(m)
    g := t → t**i * U[i]/i!;
    eval(sum(g(t), i=0 ..m - 1))
end proc:
Warning, `g` is implicitly declared local to procedure `abc`
> u[0] := t → abc(1) :
> u[0](t);
                                2 (2)
> u[1] := unapply(1/GAMMA(alpha) · int((t - s)^(alpha - 1) · f(s, u[0](s)), s=0 ..t), t)
    assuming t > 0;
                                u1 := t → t2 (3)
> for k from 2 to n do
    u[ k] := unapply(1/GAMMA(alpha) · int((t - s)^(alpha - 1) · (f(s, sum(u[ j](s), j=0 ..k
    - 1)) - f(s, sum(u[ j](s), j=0 ..k - 2))), s=0 ..t), t) assuming t > 0;
end
                                u2 := t →  $\frac{1}{2} t^4$ 
                                u3 := t →  $\frac{1}{6} t^6$ 
                                u4 := t →  $\frac{1}{24} t^8$  (4)
> Φ[ n] := simplify(unapply(sum(u[ j](t), j=0 ..n), t));
                                Φ4 := t →  $2 + t^2 + \frac{1}{2} t^4 + \frac{1}{6} t^6 + \frac{1}{24} t^8$  (5)
> φ := t → et·2 + 1;#( la solution exacte)
                                φ := t → e2t + 1 (6)
> Φ[1] := t → 2 + 1.094478036 t19/10 + 0.6503021501 t19/5 + 0.2693710092 t57/10
    + 0.08630436974 t38/5 #( la solution pour α=0.90)
Φ1 := t → 2 + 1.094478036 t19/10 + 0.6503021501 t19/5 + 0.2693710092 t57/10
    + 0.08630436974 t38/5 (7)
> Φ[2] := t → 2 + 1.192968082 t9/5 + 0.8369898157 t18/5 + 0.4278469571 t27/5
    + 0.1744064693 t36/5 #( la solution pour α=0.80)
Φ2 := t → 2 + 1.192968082 t9/5 + 0.8369898157 t18/5 + 0.4278469571 t27/5
    + 0.1744064693 t36/5 (8)
> plot( [ φ(t), Φ[n](t), Φ[1](t), Φ[2](t) ], t=0 ..3, u=2 ..5,
    color = [ "Black", "Red", "blue", "green" ], style = [ point, line, point, line ], legend = [ "Exacte",

```

"alpha=1", "alpha=0.90", "alpha=0.80"]];



```

>
#Programmation de la méthode MFTDM
> restart :
> alpha := 1 : n := 3 : U[0] := 0 : N := 10 : Δt := 0.5 : T := 5 :
> f := (t, u) → 1 - u · 2;
                                     f := (t, u) → 1 - u2 (1)
> abc := proc(m)
    g := t → t**i * U[i]/i!;
    eval(sum(g(t), i=0..m-1))
end proc;
Warning, `g` is implicitly declared local to procedure `abc`
> u[0, 0] := t → abc(1) :
> u[0, 0](t);
                                     0 (2)
> u[0, 1] := unapply(1/GAMMA(alpha) * int((t-s)^(alpha-1) * f(s, u[0, 0](s)), s=0..t),
    t) assuming t > 0;
                                     u0,1 := t → t (3)
> for k from 2 to n do
    u[0, k] := unapply(1/GAMMA(alpha) * int((t-s)^(alpha-1) * (f(s, sum(u[0, j](s), j=0..k-1))
        - f(s, sum(u[0, j](s), j=0..k-2))), s=0..t), t) assuming t > 0;
end
                                     u0,2 := t → -1/3 t3
                                     u0,3 := t → -1/63 t7 + 2/15 t5 (4)
> Φ[0, n] := simplify(unapply(sum(u[0, j](t), j=0..n), t))
                                     Φ0,3 := t → t - 1/3 t3 - 1/63 t7 + 2/15 t5 (5)
> for i from 1 to N-1 do
    t[i] := i · Δt;
    u[i, 0] := unapply(Φ[i-1, n](t[i]), t);
    u[i, 1] := unapply(1/GAMMA(alpha) * int((t-s)^(alpha-1) * f(s, u[i, 0](s)), s=t[i]..t),
        t);
    for k from 2 to n do
        u[i, k] := unapply(1/GAMMA(alpha) * int((t-s)^(alpha-1) * (f(s, sum(u[i, j](s), j=0..k-1))
            - f(s, sum(u[i, j](s), j=0..k-2))), s=t[i]..t), t);
    print(u[i, k])
    end;
    Φ[i, n] := simplify(unapply(sum(u[i, j](t), j=0..n), t));
    end;
                                     t1 := 0.5
                                     u1,0 := t → 0.4623759921
                                     u1,1 := t → 0.7862084419 t - 0.3931042210
                                     t → 0.2089929798 t - 0.06512582235 - 0.2060412380 t3 - 0.05446205122 t2

```

$$\begin{aligned}
& t \rightarrow 0.004781389381 t - 0.003640180606 - 0.006064713108 t^7 - 0.003740476152 t^6 \\
& \quad + 0.08142779019 t^5 + 0.02752747360 t^4 - 0.1239501873 t^3 + 0.05033599718 t^2 \\
\Phi_{1,3} := & t \rightarrow 0.0005057681 + 0.9999828111 t - 0.3299914253 t^3 - 0.00412605404 t^2 \\
& \quad - 0.006064713108 t^7 - 0.003740476152 t^6 + 0.08142779019 t^5 + 0.02752747360 t^4 \\
& \quad t_2 := 1.0 \\
& \quad u_{2,0} := t \rightarrow 0.7655211742 \\
& \quad u_{2,1} := t \rightarrow 0.4139773319 t - 0.4139773319 \\
& \quad t \rightarrow 0.4624395950 t - 0.2597826694 - 0.05712574378 t^3 - 0.1455311819 t^2 \\
t \rightarrow & 0.1151629602 t - 0.06921313424 - 0.0004661929432 t^7 - 0.002771192336 t^6 \\
& \quad + 0.01579052254 t^5 + 0.06639395823 t^4 - 0.1900070582 t^3 + 0.06511013672 t^2 \\
\Phi_{2,3} := & t \rightarrow 0.0225480387 + 0.9915798871 t - 0.2471328020 t^3 - 0.08042104518 t^2 \\
& \quad - 0.0004661929432 t^7 - 0.002771192336 t^6 + 0.01579052254 t^5 + 0.06639395823 t^4 \\
& \quad t_3 := 1.5 \\
& \quad u_{3,0} := t \rightarrow 0.9113950493 \\
& \quad u_{3,1} := t \rightarrow 0.1693590641 t - 0.2540385962 \\
& \quad t \rightarrow 0.3985234295 t - 0.3150264743 - 0.009560830864 t^3 - 0.1113292737 t^2 \\
t \rightarrow & 0.3149276920 t - 0.2024105962 - 0.00001305849812 t^7 - 0.0003548001187 t^6 \\
& \quad - 0.0003070700477 t^5 + 0.03324745229 t^4 - 0.07252844604 t^3 - 0.08307392832 t^2 \\
\Phi_{3,3} := & t \rightarrow 0.1399193826 + 0.8828101856 t - 0.08208927690 t^3 - 0.1944032020 t^2 \\
& \quad - 0.00001305849812 t^7 - 0.0003548001187 t^6 - 0.0003070700477 t^5 + 0.03324745229 t^4 \\
& \quad t_4 := 2.0 \\
& \quad u_{4,0} := t \rightarrow 0.9689670307 \\
& \quad u_{4,1} := t \rightarrow 0.06110289340 t - 0.1222057868 \\
& \quad t \rightarrow 0.2218925024 t - 0.2268705872 - 0.001244521194 t^3 - 0.05173956202 t^2 \\
t \rightarrow & 0.3327401779 t - 0.2474631584 - 2.212618575 \cdot 10^{-7} t^7 - 0.00002146366050 t^6 \\
& \quad - 0.0003945189485 t^5 + 0.007706762446 t^4 - 0.004069029435 t^3 - 0.1236866397 t^2 \\
\Phi_{4,3} := & t \rightarrow 0.3724274983 + 0.6157355737 t - 0.005313550629 t^3 - 0.1754262017 t^2 \\
& \quad - 2.212618575 \cdot 10^{-7} t^7 - 0.00002146366050 t^6 - 0.0003945189485 t^5 + 0.007706762446 t^4 \\
& \quad t_5 := 2.5 \\
& \quad u_{5,0} := t \rightarrow 0.9894714099 \\
& \quad u_{5,1} := t \rightarrow 0.02094632900 t - 0.05236582250 \\
& \quad t \rightarrow 0.1008867891 t - 0.1272510611 - 0.0001462495662 t^3 - 0.01962892194 t^2 \\
t \rightarrow & 0.2223025282 t - 0.1942898362 - 3.055562231 \cdot 10^{-9} t^7 - 9.569071062 \cdot 10^{-7} t^6 \\
& \quad - 0.00006993169904 t^5 + 0.001254946819 t^4 + 0.005796194197 t^3 - 0.07903818021 t^2
\end{aligned}$$

$$\Phi_{5,3} := t \rightarrow 0.6155646901 + 0.3441356463 t + 0.005649944631 t^3 - 0.09866710215 t^2$$

$$- 3.055562231 10^{-9} t^7 - 9.569071062 10^{-7} t^6 - 0.00006993169904 t^5 + 0.001254946819 t^4$$

$$t_6 := 3.0$$

$$u_{6,0} := t \rightarrow 0.9964692362$$

$$u_{6,1} := t \rightarrow 0.007049061300 t - 0.02114718390$$

$$t \rightarrow 0.04169783300 t - 0.06277035120 - 0.00001656308840 t^3 - 0.006875104934 t^2$$

$$t \rightarrow 0.1185024985 t - 0.1209566085 - 3.919084248 10^{-11} t^7 - 3.795765693 10^{-8} t^6$$

$$- 0.000009130453923 t^5 + 0.0001751273440 t^4 + 0.003407068989 t^3 - 0.03760895638 t^2$$

$$\Phi_{6,3} := t \rightarrow 0.7915950926 + 0.1672493928 t + 0.003390505901 t^3 - 0.04448406131 t^2$$

$$- 3.919084248 10^{-11} t^7 - 3.795765693 10^{-8} t^6 - 0.000009130453923 t^5$$

$$+ 0.0001751273440 t^4$$

$$t_7 := 3.5$$

$$u_{7,0} := t \rightarrow 0.9988206900$$

$$u_{7,1} := t \rightarrow 0.002357229200 t - 0.008250302200$$

$$t \rightarrow 0.01641307761 t - 0.02876259191 - 0.000001852176500 t^3 - 0.002335001443 t^2$$

$$t \rightarrow 0.05615545693 t - 0.06608469865 - 4.900796839 10^{-13} t^7 - 1.441611600 10^{-9} t^6$$

$$- 0.000001076539979 t^5 + 0.00002280506564 t^4 + 0.001381625765 t^3$$

$$- 0.01571842598 t^2$$

$$\Phi_{7,3} := t \rightarrow 0.8957230972 + 0.07492576374 t + 0.001379773588 t^3 - 0.01805342742 t^2$$

$$- 4.900796839 10^{-13} t^7 - 1.441611600 10^{-9} t^6 - 0.000001076539979 t^5$$

$$+ 0.00002280506564 t^4$$

$$t_8 := 4.0$$

$$u_{8,0} := t \rightarrow 0.9996066304$$

$$u_{8,1} := t \rightarrow 0.0007865845000 t - 0.003146338000$$

$$t \rightarrow 0.006280301170 t - 0.01256720189 - 2.062383919 10^{-7} t^3 - 0.0007838002209 t^2$$

$$t \rightarrow 0.02488750080 t - 0.03330266165 - 6.076324899 10^{-15} t^7 - 5.388323238 10^{-11} t^6$$

$$- 1.222855720 10^{-7} t^5 + 0.000002870971539 t^4 + 0.0004976763618 t^3$$

$$- 0.006169259761 t^2$$

$$\Phi_{8,3} := t \rightarrow 0.9505904289 + 0.03195438647 t + 0.0004974701234 t^3 - 0.006953059982 t^2$$

$$- 6.076324899 10^{-15} t^7 - 5.388323238 10^{-11} t^6 - 1.222855720 10^{-7} t^5$$

$$+ 0.000002870971539 t^4$$

$$t_9 := 4.5$$

$$u_{9,0} := t \rightarrow 0.9998688473$$

$$u_{9,1} := t \rightarrow 0.0002622882000 t - 0.001180296900$$

$$\begin{aligned}
& t \rightarrow 0.002358891100 t - 0.005308549798 - 2.293169995 \cdot 10^{-8} t^3 - 0.0002619442222 t^2 \\
& t \rightarrow 0.01057499511 t - 0.01588566293 - 7.512326609 \cdot 10^{-17} t^7 - 2.002275436 \cdot 10^{-12} t^6 \\
& \quad - 1.369891187 \cdot 10^{-8} t^5 + 3.546913325 \cdot 10^{-7} t^4 + 0.0001712061725 t^3 - 0.002341882872 t^2 \\
\Phi_{9,3} := & t \rightarrow 0.9774943377 + 0.01319617441 t + 0.0001711832408 t^3 - 0.002603827094 t^2 \\
& - 7.512326609 \cdot 10^{-17} t^7 - 2.002275436 \cdot 10^{-12} t^6 - 1.369891187 \cdot 10^{-8} t^5 \\
& + 3.546913325 \cdot 10^{-7} t^4
\end{aligned} \tag{6}$$

>

>  $\Phi[n] := \text{piecewise}(0 \leq t \leq t[1], \Phi[0, n](t), t[1] \leq t \leq t[2], \Phi[1, n](t), t[2] \leq t \leq t[3], \Phi[2, n](t), t[3] \leq t \leq t[4], \Phi[3, n](t), t[4] \leq t \leq t[5], \Phi[4, n](t), t[5] \leq t \leq t[6], \Phi[5, n](t), t[6] \leq t \leq t[7], \Phi[6, n](t), t[7] \leq t \leq t[8], \Phi[7, n](t), t[8] \leq t \leq t[9], \Phi[8, n](t), t[9] \leq t \leq T, \Phi[9, n](t)) :$

>

>  $\varphi := t \rightarrow \frac{\exp(2 \cdot t) - 1}{\exp(2 \cdot t) + 1} ;$

$$\varphi := t \rightarrow \frac{e^{2t} - 1}{e^{2t} + 1} \tag{7}$$

>  $\varphi(t);$

$$\frac{e^{2t} - 1}{e^{2t} + 1} \tag{8}$$

>  $\text{plot}([\Phi[n], \varphi(t)], t=0..5, \text{color} = ["Red", "blue"], \text{style} = [\text{point}, \text{line}]);$

