

*République Algérienne Démocratique et Populaire*  
*وزارة التعليم العالي و البحث العلمي*  
*Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique*  
*جامعة الجيلالي بونعامة خميس مليانة*  
Université Djilali Bounaâma de Khemis Miliana  
Faculté des Sciences et de la Technologie  
Département des Sciences de la Matière



*Mémoire de fin d'étude*  
*En vue de l'obtention d'un diplôme de **Master** en Physique*  
*Spécialité: Physique Théorique*

**Thème :**

Etude du rayon des systèmes protons des noyaux  
de masse impaire dépendant de l'appariement  
nucléaire

**Devant le jury composé de :**

- |                   |     |       |             |
|-------------------|-----|-------|-------------|
| - M. H. Boukabcha | MCA | UDBKM | Examineur 1 |
| - M. T. Bitam     | MAA | UDBKM | Examineur 2 |
| - M. M. Douici    | MCB | UDBKM | Encadreur   |

**Présenté par :**

Taibi Zeyneb  
Arbouz Fadhila

*Année universitaire : 2019 / 2020*

## DEDICACE

• Oh mon DIEU, je te remercie pour ta grâce et ta faveur envers nous. Avec l'aide de DIEU j'ai pu terminer ce modeste travail que je dédie de tout mon cœur à:

- A tout ma famille TAIBI.
- A mes parents.
- A mon cher Frère ABD ENNEUR, mes sœurs et ses

enfants AMANI et ANES.

- A mon Mari et sa Famille.
- A ma chère binette FADHILA.
- A mes Belles amies surtout AHLAM, et KHALIDA.
- A tous mes éminemment professeurs qui ont contribué à mon éducation et à mes conseils, en particulier :M. DABABI, BOUZMELALE, F. BOUDJEMAA et tous les enseignants de Physique Théorique.

TAIBI ZEYNEB

## **DEDICACE**

- Avec l'aide de **DIEU** j'ai pu terminer ce modeste travail que je dédie de tout mon cœur à :
- A ma famille.
- Mes parents.
- Mon cher frère et mes sœurs.
- A tous mes oncles, tantes, cousins et cousines.
- A toute ma famille de proche ou de loin.
- A ma chère binette : **ZEYNEB**.
- A mes belles amies.
- A mon enseignant **DUOICI MOHAMED**.

## REMERCIEMENTS

- Initialement et avant tout nous remercions **ALLAH** qui nous a donné du courage et de la patience pour arriver à terminer ce travail.
- Nos remerciements s'adressent à Monsieur **H. BOUKABCHA** et Monsieur **T. BITAM**, d'avoir accepté d'examiner ce travail.
- Nous exprimons nos profonds remerciements à notre promoteur **M. DOUICI MOHAMED** pour l'aide compétente qu'il nous a apportée, pour sa patience, sa confiance, son encouragement, et son œil critique qui nous a été très précieux pour structurer ce travail et pour améliorer la qualité des différentes sections de notre mémoire, nous le remercions vivement.
- Nos remerciements à nos très chers parents pour l'amour.
- Nous n'oublions jamais à adresser nos remerciements à tous nos enseignants qui ont contribué à notre formation et nos très chers amis de leur aide.
- Enfin un grand remerciement à tous les travailleurs de la faculté des sciences et de la technologie.

## ملخص

قمنا في هذا العمل بحساب نصف القطر النووي للبروتون للأنوية زوجية فردية. بدأنا بدراسة الهاملتون النووي باستعمال طريقة ويك لايجاد الدالة الموجية للنكليونات. بعد هذا قمنا بإيجاد العلاقة التي يتم بها حساب نصف قطر البروتون. على المستوي الرقمي قمنا بحساب نصف قطر البروتون للأنوية ذات العدد الكتلي ما بين 16 و 49 باستعمال كمون وود سكسون.

**كلمات مفتاحية:** النماذج النووية، تطابق نووي، نصف قطر البروتون، كمون وود سكسون

## Résumé

Dans ce travail nous avons calculé le rayon quadratique du système protons pour des noyaux pairs impairs par la méthode Bardeen, Cooper et Schiffer (BCS). Dans une première étape, nous avons fait rappel aux modèles nucléaires à savoir le modèle de la goutte liquide et le modèle en couche. L'hamiltonien du système nucléaire a été étudié et linéarisé par la méthode de Wick pour trouver les équations du gap. Nous avons établi l'état fondamental des noyaux pair-impairs. Nous avons en suite, trouvé l'expression du rayon quadratique du système protons dans le cas de l'appariement entre particules identiques. Dans une seconde étape, le rayon quadratique du système protons a été traité numériquement dans la base des énergies et états propres d'un champ moyen déformé de Woods-Saxon pour des noyaux pair-impairs tels que  $16 \leq Z \leq 56$  et  $N-Z=1$  et 3.

**Mots clés :** Modèles nucléaire, Appariement nucléaire, Rayon de proton, Energies de Woods- Saxon.

## Abstract

In this work we calculated the quadratic radius of the proton system for odd even nuclei by the Bardeen, Cooper and Schiffer (BCS) method. In a first step, we recalled the nuclear models, namely the liquid drop model and the shell model. The Hamiltonian of a nuclear system has been studied and linearized by Wick's method to find the gap equations. We have established the ground state of odd even nuclei. We then found the expression for the quadratic radius of the proton system in the case of pairing between identical particles. In a second step, the quadratic radius of the proton system was processed numerically in the basis of the energies and eigenstates of a deformed Woods-Saxon mean field for odd even nuclei such as  $N-Z = 1$  and 3.

**Keywords:** Nuclear models, Pairing nuclear, Radius of a proton, Woods-Saxon energies.

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>7</b>
<b>1 Généralités sur le noyau atomique</b>	<b>8</b>
1.1 Introduction . . . . .	8
1.2 Stabilité des noyaux . . . . .	8
1.2.1 Energie de liaison . . . . .	10
1.2.2 Radioactivité . . . . .	11
1.2.3 Rayon nucléaire . . . . .	13
1.2.4 Densité nucléaire . . . . .	14
1.3 Modèles nucléaires . . . . .	15
1.3.1 Introduction . . . . .	15
1.3.2 Modèle de la goutte liquide . . . . .	15
1.3.3 Modèle en couche . . . . .	17
1.4 Formalisme de l'isospin . . . . .	28
1.4.1 Système à deux nucléons . . . . .	32
<b>2 Appariement nucléaire</b>	<b>37</b>
2.1 Introduction . . . . .	37
2.2 Importance des corrélations d'appariement nucléaire . . . . .	38
2.3 Hamiltonien nucléaire en seconde quantification . . . . .	39
2.4 Théorie BCS . . . . .	41
2.4.1 Transformation de Bogoluibov-Valatin . . . . .	41

<i>Table des matières</i>	2
2.4.2 Equations de gap . . . . .	43
2.5 Fonction d'onde . . . . .	47
2.6 Etat excité . . . . .	48
2.7 Valeur moyenne de l'opérateur nombre de particules . . . . .	49
2.8 Rayons quadratiques du système proton . . . . .	50
<b>3 Résultats numériques et discussion</b>	<b>52</b>
3.1 Amplitudes de probabilités de particules . . . . .	52
3.2 Rayon de proton . . . . .	53
<b>Bibliographie</b>	<b>62</b>

# Table des figures

1-1	Carte des noyaux classé en fonction de leur nombre de neutron (en abscisse), leur nombre de proton (en ordonnée) et leur instabilité (code couleur) [10]	10
1-2	Energie de liaison par nucléon pour le noyau le plus stable de chaque masse.	12
1-3	Contribution des différents termes de la formule de masse (valeur numérique de l'énergie de liaison par nucléon $\frac{B}{A}$ concorde par la formule de l'énergie de masse semi empirique) [3]. . . . .	17
1-4	Séquence des couches principales de l'oscillateur harmonique. . . . .	23
1-5	Le niveau d'énergie des nucléons dans le modèle en couche [15]. . . . .	25
1-6	Schéma du couplage du moment angulaire $j=1+s$ d'une particule. Les projections de $j$ , $l$ , $s$ sur l'axe de symétrie sont respectivement $\Omega$ , $\Lambda$ , $\Sigma$ . . . . .	27
1-7	Déformation du noyau Forme des noyaux. ( $a_x$ ) $Q > 0$ forme allangée, ( $a_z$ ) $Q < 0$ forme aplatie. . . . .	28
3-1	Evolution des probabilités d'occupation ( $v_\nu^2$ ) et d'inoccupation ( $u_\nu^2$ ) en fonction des niveaux $\nu$ . . . . .	54
3-2	Evolution du rayon de proton en fonction du nombre de particules du système protons pour les noyaux $(N - Z) = 1$ . . . . .	59
3-3	Evolution du rayon de proton en fonction du nombre de particules du système protons pour les noyaux $(N - Z) = 3$ . . . . .	59
3-4	Variation de la constante d'appariement proton-proton en fonction de la charge du noyau pour $(N - Z) = 1$ . . . . .	60

---

3-5	Variation de la constante d'appariement proton-proton en fonction de la charge du noyau pour $(N - Z) = 3$ . . . . .	60
-----	--	----

# Liste des tableaux

3.1	Valeur des probabilités d'occupation (colonne 1) et et d'inoccupation (colonne 2), d'un système de 16 niveau pour des noyaux impair . . . . .	53
3.2	Rayon quadratique du système protons (fm) (colonne 6), la constante d'appariement des protons (Mev) (colonne 5) et la demi largeur du gap des protons (Mev) (colonne 4, (Ref. [35]) . . . . .	55

# Introduction

L'étude des propriétés des noyaux atomiques est l'un des domaines le plus actifs en physique nucléaire ces dernières années. Parmi les propriétés fondamentales du noyau est le rayon protonique qui peut fournir des informations sur la taille et la forme du noyau. Il était difficile de connaître certaines propriétés ou de déterminer la structure du noyau sans trouver d'une telle théorie ou modèle nucléaire. Plusieurs modèles nucléaires ont été utilisés pour décrire et expliquer le noyau atomique. Parmi ces modèles est le modèle de la goutte liquide [1] et le modèle en couches à particules indépendantes [2]. Le modèle de la goutte liquide est utile pour décrire la propriété de la masse atomique du noyau. Le modèle en couche à particule indépendante est un modèle utilisé pour décrire les nucléons dans le noyau et dans ce modèle chaque nucléon occupe un niveau d'énergie où l'énergie est bien discrète [3]. Bien que les protons et les neutrons soient connus pour être les constituants nucléaires, ces nucléons en mouvant indépendamment les uns des autres et ressentant l'effet d'un champ moyen créé par le reste des nucléons. Ce champ moyen peut être déterminé soit d'une manière self-consistante, comme dans la méthode de la théorie BCS (Bardeen-Cooper-Schrieffer) [4] ou bien à l'aide d'un potentiel phénoménologique du type de Nilsson [5] ou de Woods-Saxon [6]. Partant de cette approximation, l'hamiltonien nucléaire peut s'écrire sous forme d'une somme de deux termes : le premier contient l'énergie cinétique des nucléons augmentée d'une énergie potentielle décrivant l'interaction moyenne qu'un nucléon éprouve de la part des autres nucléons du noyau, et le deuxième terme correspond aux interactions résiduelles entre les nucléons. Parmi ces dernières, les plus importantes sont les corrélations d'appariement. Ces corrélations jouent un rôle important dans la description de la stabilité et la déformation des noyaux, etc.

Dans le formalisme du spin isotopique, l'effet d'appariement existe pour  $T = 0$  (cas isoscalaire) et  $T = 1$  (cas isovectoriel). Le cas  $T = 0$  contient uniquement l'appariement neutron-proton car les niveaux de fermi des systèmes neutron-proton sont éloignés et le cas  $T = 1$  contient en plus l'appariement entre particules identiques, (neutron-neutron et proton-proton) dont les niveaux de fermi des systèmes neutron-proton sont proches. Toutefois, dans les études concernant les noyaux stables de masses intermédiaires et lourds, seul l'appariement entre particules identiques est considéré. Ce type d'appariement est généralement traité par la méthode BCS.

Le but du présent travail est d'étudier le rayon quadratique du système protons dans le cas de l'appariement entre particules identiques pour des noyaux de masse impaire riche en protons. Le premier chapitre sera consacré à quelques notions fondamentaux du noyau atomique à savoir, la stabilité du noyau, les modèles nucléaires dont le modèle de la goutte liquide et le modèle en couche à particules indépendantes ainsi que le formalisme d'isospin d'un système de deux nucléons. Le deuxième chapitre sera consacré, aux corrélations d'appariement nucléaires entre particules identiques et au l'établissement de l'expression du rayon quadratique du système protons. Finalement, le dernier chapitre sera pour les résultats numériques, nous utiliserons un modèle schématique et un modèle réaliste. Le modèle schématique de Richardson sera pour la validité de nos équations et le modèle réaliste, qui représente les énergies et états propres d'un champ moyen de Woods-Saxon, sera pour calculer le rayon quadratique du système protons pour des noyaux de masse impaire.

# Chapitre 1

## Généralités sur le noyau atomique

### 1.1 Introduction

L'étude des noyaux exotiques ou loin de la vallée de stabilité étaient et demeurent un problème majeur en physique nucléaire. Le développement de techniques expérimentales de plus en plus performantes permet désormais de produire et d'étudier la structure de ces noyaux. Ceux-ci présentent de nouveaux comportements par rapport aux noyaux stables, dont les propriétés sont bien reproduites par les modèles nucléaires théoriques. Le premier modèle est le modèle de la goutte liquide, proposé par Weizsäcker en 1935, où le noyau est assimilé à un fluide quantique comme une goutte d'eau. Le deuxième modèle est le modèle en couche, où les nucléons sont considérés comme des particules indépendantes. Nous étudions dans ce chapitre la stabilité du noyau et le problème qui se pose alors en physique est la définition du potentiel moyen. Les potentiels cités ici sont le potentiel d'oscillateur harmonique, le potentiel de Woods-Saxon, le potentiel de Nilsson et le potentiel du couplage spin-orbite. Enfin, nous étudions les deux modèles nucléaires.

### 1.2 Stabilité des noyaux

La matière est constituée d'atomes qui sont considérées comme des sphères dont le rayon est de l'ordre de  $10^{-10} m$ . Un atome contiennent des électrons (é) et un noyau dont

la dimension est de l'ordre de  $10^{-15} m$ . Le noyau lui-même constitué nucléons (protons et neutrons). Le noyau atomique associé à un élément  $X$  est représenté par le symbole  ${}^A_Z X_N$ , où  $A$  représente le nombre de masse ou nombre de nucléons (protons + neutrons),  $Z$  représente le numéro atomique également nombre de protons ou d'électrons et  $N$  représente le nombre de neutrons. Le noyau est généralement décrit comme un ensemble des protons chargés positivement et des neutrons électriquement neutre, les nombres de protons et de neutrons sont communément appelés nucléons. Pour former un noyau les nucléons doivent rester confinés à l'intérieur d'une sphère de quelques fermi (l'échelle de la physique nucléaire est :  $1f = 10^{-15}m$ ) [9].

On appelle fréquemment noyau pair-pair ( $p - p$ ) des nucléons dont  $Z$  et  $N$  sont pairs, et noyau impair-impair ( $i - i$ ) des nucléons dont  $Z$  et  $N$  sont impairs, enfin on appelle noyau impair-pair ( $i - p$ ) au vice versa ( $p - i$ ) ou bien noyau impairs ceux dont  $A$  impair, c'est-à-dire dont  $Z$  et  $N$  seulement impair.

Les nucléons sont caractérisés par leur stabilité comme montré dans la figure 1-1 [10].

Un noyau stable est un noyau qui ne change pas de nature. Les noyaux stables sont représenté par les lignes noirs, ils situent autour d'une ligne moyen appelée ligne de stabilité ou bien vallée de stabilité pour les noyaux légère  $Z \leq 20$  et le nombre de proton égal le nombre de neutron  $Z = N$ . Les noyaux stables pour  $Z \geq 20$  obtenue pour le facteur de stabilité  $N = 1.7 \times Z$ .

Le noyau instable (radioactif) possède un déséquilibre structurel (changera la nature), les noyaux instables sont indiqués par différents couleurs selon le type de radioactivité principal émis.

Sur le carte des nucléons se trouvent des lignes pointillées, ces lignes représente les noyaux les plus stables dans la nature est appelés les nombres magiques dont le nombre de proton où de neutron dans le noyau est particulièrement stables. Les sept nombres magiques sont :

$$Z \text{ où } N = 2, 8, 20, 28, 50, 80, 126$$

Il existe un cas particulier des noyaux plus stables par rapport ou noyau magique qui

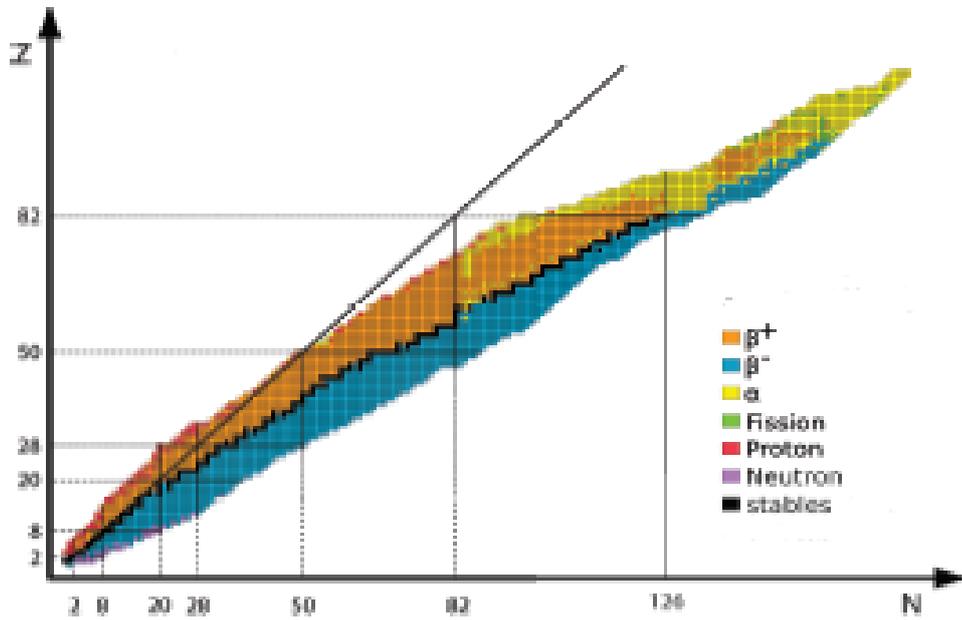


FIG. 1-1: Carte des noyaux classés en fonction de leur nombre de neutron (en abscisse), leur nombre de proton (en ordonnée) et leur instabilité (code couleur) [10]

est les noyaux doublement magiques, ceux contenant à la fois un proton magique et un neutron magique.

$$Z = 2, 8, 20, 28, 50, 80$$

$$N = 2, 8, 20, 28, 50, 80, 126$$

### 1.2.1 Énergie de liaison

L'énergie de liaison des noyaux est définie comme étant l'énergie qu'il faut fournir au repos pour dissocier les nucléons.

$$B(A, Z) = [Zm_p + Nm_n - M_X(A, Z)] C^2 \quad (1.1)$$

où  $m_p$  est la masse de proton,  $m_n$  est la masse de neutron,  $M_X$  est la masse de noyau particulier,  $C$  est la vitesse de la lumière dans le vide.

L'expérience montre que la masse d'un noyau est inférieure à la somme des masses de ses constituants pris isolément, soit :

$$M_X \leq Zm_p + Nm_n \quad (1.2)$$

Il y a donc un défaut de masse  $\Delta M_X(A, Z)$  défini par :

$$\Delta M_X(A, Z) = (Zm_p + Nm_n) - M_X(A, Z) \quad (1.3)$$

Donc on peut écrire :

$$B(A, Z) = \Delta M_X(A, Z) C^2 \quad (1.4)$$

L'énergie de liaison par nucléon est donnée par la relation suivant  $B_L(A, Z) = \frac{B(A, Z)}{A}$ .

La figure 1-2 représente l'énergie de liaison dans le noyau .

Cette énergie de liaison est liée à la stabilité du noyau, il s'explique facilement les noyaux instables ou moins stables ayant un nombre de nucléon  $A$ , ont une énergie de liaison par nucléon plus petite par rapport à la masse.

En effet, la forme générale de la courbe s'explique par les propriétés énoncée précédemment. On constate que plus le nombre de nucléon augmente plus la stabilité augmente. Pour les discontinuités aux faibles masses, il est remarquable qu'à faible masse, les noyaux ayant leurs  $A$  multiple de 4 soient plus stables (tous ces noyaux ont des nombres de proton où de neutron égaux et pairs) [10].

### 1.2.2 Radioactivité

Dans la nature la plupart des noyaux sont stables mais il y a certaine noyaux sont instables qui permettent se désintégrer pour obtenir une stabilité, et il existe quatre type de désintégration sont :

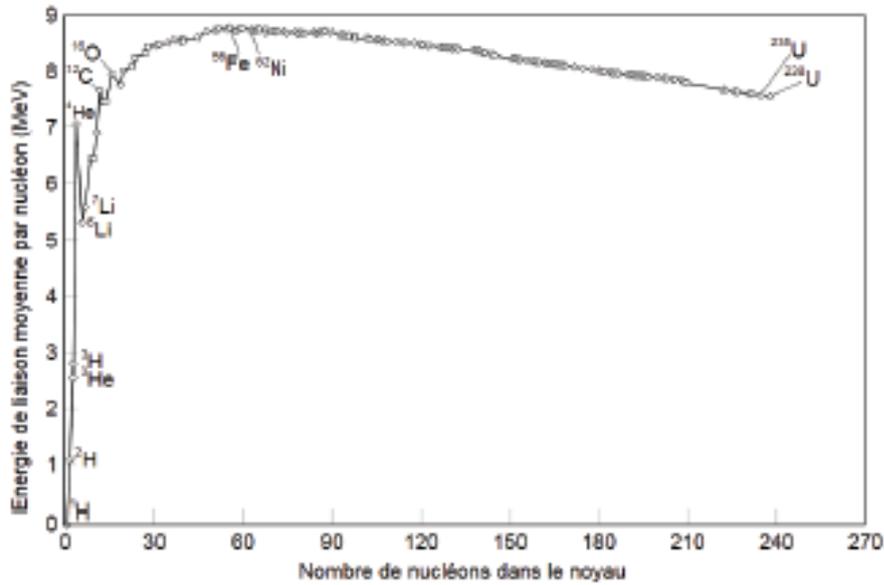
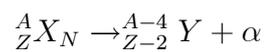


FIG. 1-2: Energie de liaison par nucléon pour le noyau le plus stable de chaque masse.

### Emission (désintégration) Alpha ( $\alpha$ )

Cette désintégration est réservée aux nucléons lourds et possède une grande énergie

L'équation générale de l'activité  $\alpha$  est :



Au cours de cette désintégration, il y a libération de l'énergie (l'énergie de désintégration  $\alpha$ ).

### Désintégration beta moins ( $\beta^-$ )

La désintégration  $\beta^-$  est une transition d'un neutron à un proton accompagné par la création d'un électron et d'un antineutrino. La réaction s'écrit comme :



**Désintégration  $\beta^+$** 

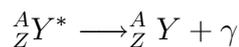
La désintégration  $\beta^+$  est une transition d'un proton à un neutron accompagné par la création d'un positron et d'un neutrino. L'équation de désintégration s'écrit comme suit :

**Transformation capture électronique (CE)**

Ce processus, un proton capture un électron et se transforme en un neutron et un neutrino, soit :

**Transition électromagnétique (Emission gamma)**

Les noyaux fils produits par les désintégrations alpha ou bêta et qui se trouvent dans des états excités, ils rejoignent à leur état fondamental par des transitions gamma ( $\gamma$ ). Un noyau dans un état excité peut émettre un photon gamma pour revenir à un niveau d'énergie inférieur. Le photon n'a pas de masse et n'a pas de charge. Soit la réaction :

**1.2.3 Rayon nucléaire**

Grâce à sa célèbre expérience qui a consisté à bombarder une feuille d'or avec des particules alpha, Rutherford a pu mettre en évidence l'existence d'un noyau au centre du noyau et donner une première estimation de son rayon [11]. Ce rayon est proportionnel au nombre des nucléons et au volume (chaque nucléon occupant un volume), le rayon en voisin  $10^{-14}m$  [13].

$$R = r_0 A^{\frac{1}{3}} \tag{1.5}$$

où :

$A$  est le nombre des nucléons ( $A = Z + N$ ).

$R$  est le rayon du noyau.

$r_0$  est le rayon du nucléon ( $1.2f - 1.5f$ ) [13].

### 1.2.4 Densité nucléaire

La densité nucléaire des protons ou des neutrons est sensiblement constante à l'intérieur du noyau, de l'ordre  $10^{-14}$  et 0 à l'extérieur (la surface).

La densité nucléaire est donnée par la relation :

$$\begin{aligned} d_{masse} &= \frac{M}{V} \\ &= \frac{m_{nucléon}}{\frac{4}{3}\pi r_0^3} \end{aligned} \quad (1.6)$$

et

$$\begin{aligned} d_{nucléon} &= \frac{A}{V} \\ &= \frac{A}{\frac{4}{3}\pi R^3} \end{aligned} \quad (1.7)$$

et

$$\begin{aligned} d_{charge} &= \frac{Q}{V} \\ &= \frac{Ze}{\frac{4}{3}\pi R^3} \end{aligned} \quad (1.8)$$

Dans le cas des noyaux sphériques ou faiblement déformés, la densité de la charge nucléaire est donnée par la relation suivante :

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{1 + \exp\left(\frac{r-R_c}{a_0}\right)} \quad (1.9)$$

où  $\rho_0$  représente la densité nucléaire,  $a_0$  est l'épaisseur de la surface,  $(r - R_c)$  est la distance d'un nucléon à la surface effectif,  $R_c$  est le rayon de nucléon [12].

## 1.3 Modèles nucléaires

### 1.3.1 Introduction

Le modèle nucléaire est un modèle qui assemble le modèle de la goutte liquide (modèle macroscopique) avec le modèle en couche (modèle microscopique), la description des noyaux à l'aide du modèle en couche n'est pas suffisante. Il est nécessaire de compléter cette description en incluant les propriétés macroscopiques de noyau.

Le modèle macroscopique-microscopique induit par Mayer Swiatecki et amélioré par Strutinsky, a permis l'évolution de l'énergie de déformation du noyau. L'idée de base de ce modèle est combiner l'aspect macroscopique (qui a permis décrire correctement certains phénomènes tels que les masses, la fission nucléaire, ...etc.) et l'aspect microscopique qui permet décrire correctement d'autres phénomènes comme l'existence des nombres magiques, l'existence de gap en énergie dans les noyaux.

La partie macroscopique est généralement décrite par le modèle de la goutte liquide et la partie microscopique est prise en compte sous forme de correction de couche et d'appariement.

### 1.3.2 Modèle de la goutte liquide

Le premier modèle décrit le noyau, est un modèle basé sur la courte portée des forces fortes (interaction nucléaire forte) qui considère le noyau comme un ensemble des nucléons traités de manière collectif (un nucléon donné interagit fortement avec ces voisins) [13]. Ce modèle établi par Von Weizsäcker (1935).

Le modèle de la goutte liquide permet décrire certaines propriétés des noyaux (l'énergie de liaison, le rayon, la densité nucléaire, la stabilité vis-à-vis de la radioactivité  $\beta$ , et la fission nucléaire spontanée). Ce modèle collective a particule indépendant basé sur les hypothèses suivante :

- le modèle nucléaire incompressible.
- le noyau est sphérique.

- la densité volumique de charge est constante dans le noyau.
- la force de cohésion entre les nucléons ne dépend pas de leur charge.

En 1936 Beth et Bâcher ont simplifié une approche semi-empirique de l'énergie de liaison.

La formule de Beth Weizsäcker s'écrit comme suit :

$$E(A, Z) = E_v - E_s - E_c - E_{as} + E_p \quad (1.10)$$

$$E(A, Z) = a_v A - a_s A^{\frac{2}{3}} - a_c \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}} - a_{as} \frac{(N-Z)^2}{A} \pm a_p A^{-\frac{1}{2}} \quad (1.11)$$

$E_v = a_v A$  est le terme de volume, donc proportionnel au nombre de nucléon  $A$ . C'est le terme principal qui résulte des forces des interactions nucléaires (force attractive entre les nucléons) ces nucléons ressentent une force attractive de l'ordre de  $a_v = 15.41 \pm 0.03 \text{ Mev}$ .

$E_s = a_s A^{\frac{2}{3}}$  est le terme de surface, ce terme est proportionnel à la dimension de la surface du noyau  $A^{\frac{2}{3}}$ .

Les nucléons à la surface de la goutte ne sont liés qu'aux nucléons internes, ils moins de voisins que ceux situés au cœur du noyau (intérieur du volume), pour lequel la correction apportée de  $a_s = 16.87 \pm 0.08 \text{ Mev}$ .

$E_c = a_c \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}}$  est le terme de l'énergie coulombienne, ce terme décrit la baisse de stabilité engendrée par la répulsion coulombienne entre les protons,  $a_c = 0.7 \pm 0.02 \text{ Mev}$ .

$E_{as} = a_{as} \frac{(N-Z)^2}{A}$  est le terme d'asymétrie est donc proportionnel à  $(N-Z)^2$  et également inversement proportionnel à  $A$ . Il été rappelé que les noyaux sont en stabilité lorsque les nombres de proton et de neutron sont égaux, il vaut donc 0 pour les noyaux  $N = Z$ . Ce terme doit diminuer avec l'augmentation de la masse. Pour lequel la correction de ce coefficient  $a_{as} = 22.44 \pm 0.07 \text{ Mev}$ .

$E_p = a_p A^{-\frac{1}{2}}$  est le terme d'appariement, ce terme est proportionnel inversement de la dimension de  $A$ . Les nucléons de même nature ont tendance à se grouper par paires des nucléons (noyau ayant des nombres paires de proton  $Z$  ou de neutrons  $N$ ) est plus stable qu'un noyau impair-pair ou impair-impair  $a_p = 11.9 \pm 0.9 \text{ Mev}$  [10].

Au total l'énergie de liaison  $E_L(A, Z)$  est [10] :

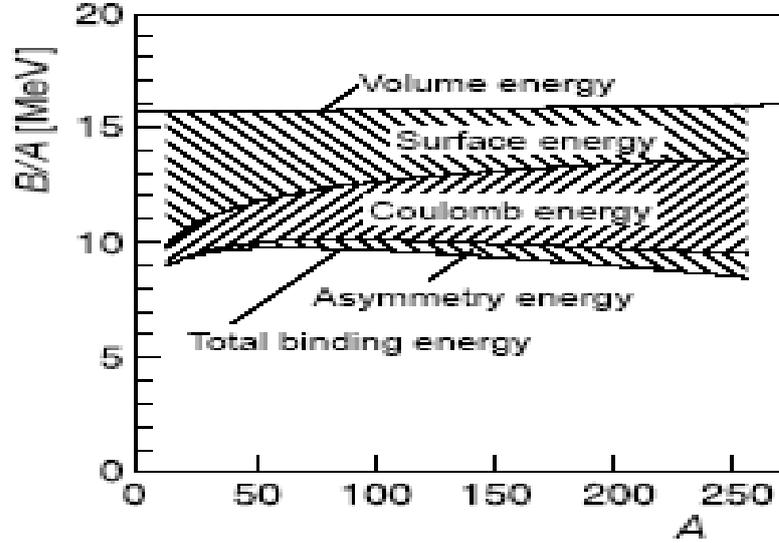


FIG. 1-3: Contribution des différents termes de la formule de masse (valeur numérique de l'énergie de liaison par nucléon  $\frac{B}{A}$  concorde par la formule de l'énergie de masse semi empirique) [3].

$$E(A, Z) = a_v A - a_s A^{\frac{2}{3}} - a_c \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}} - a_{as} \frac{(N-Z)^2}{A} + \begin{cases} 12A^{-\frac{1}{2}} \text{ pour les noyaux pair-pair} \\ 0 \text{ pour les noyaux pair-impair} \\ -12A^{-\frac{1}{2}} \text{ pour les noyaux impair-impair} \end{cases}$$

### 1.3.3 Modèle en couche

C'est un modèle microscopique à particule indépendante, qui représente le noyau comme une assemblée des nucléons indépendants les uns des autres (les nucléons bougent indépendamment) en mouvement dans le champ moyen créé par l'ensemble. Ces modèles permettent entre autres de décrire la structure en couches des noyaux (la structure des nucléons), les nombres magiques, qui correspondent aux fermetures de couches, sont la manifestation la plus évidente de cette structure en couches.

### Modèle en couche sphérique

Le plus simple des modèles microscopique est le modèle en couche sphérique basé sur le fait que la couche est complètement remplis, le noyau se forme sphère de rayon  $R = r_0 A^{\frac{1}{3}}$ .

**Equation de Schrödinger** Le remplissage d'un noyau par des nucléons doivent alors un ensemble de deux problèmes, l'objet de ce problème dans ce cas est de déterminer la configuration d'un noyau dans l'état fondamentale puis trouver la solution de l'équation de Schrödinger [3]. L'équation de Schrödinger s'écrit comme suit :

$$H\psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r}) \quad (1.12)$$

où  $H$  est l'opérateur hamiltonien composé deux termes cinétique, et potentiel.

$$\hat{H} = \hat{T} + \hat{V} \quad (1.13)$$

avec  $E$  est l'énergie du système et  $\psi$  est la fonction d'onde.

On peut écrire :

$$\begin{aligned} \hat{T} &= \frac{\hat{p}^2}{2m} \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}^2 \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \end{aligned} \quad (1.14)$$

En remplace (1.14) dans (1.13) on obtient :

$$H = \left[ \frac{\hat{P}^2}{2m} + V(r) \right] = \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(r) \right] \quad (1.15)$$

où  $V(r)$  est le potentiel de l'oscillateur harmonique.

On peut écrire :

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(r) \right] \Psi(\vec{r}) = E\Psi(\vec{r}) \quad (1.16)$$

Ce qui donne :

$$\left[ \Delta \Psi(\vec{r}) + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V(r)) \Psi(\vec{r}) \right] = 0 \quad (1.17)$$

Le potentiel à symétrie sphérique de l'oscillateur harmonique égale :

$$V(r) = \frac{1}{2} m \omega^2 r^2 \quad (1.18)$$

et

$$V(\vec{r}) = V(r) \text{ et } V(r) = V(r, \theta, \varphi)$$

Le laplacien en coordonnées sphériques est donné par la relation suivante :

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \quad (1.19)$$

Les variables  $r$  et  $(\theta, \varphi)$  sont indépendantes .

La fonction d'onde des particules dans le potentiel nucléaire peut être divisé en deux parties et s'écrit comme suit [14] :

$$\Psi(\vec{r}) = R(r) S(\theta, \varphi) \quad (1.20)$$

$$\Psi_{klm} = R_{klm}(r) S_l^m(\theta, \varphi) \quad (1.21)$$

où  $R_{klm}$  est une fonction d'onde radiale qui ne dépend que de rayon, et  $S_l^m$  est une fonction d'onde harmonique sphérique et qui sont des fonctions propres de l'opérateur  $\hat{l}^2$  avec valeur propre  $l(l+1)$  [14].

$$\hat{l}^2 S_l^m(\theta, \varphi) = \hbar^2 l(l+1) S_l^m(\theta, \varphi) \quad (1.22)$$

En remplace (1.21) et (1.19) dans (1.17), il vient :

$$\left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V(r)) \right] R_{klm}(r) S_l^m(\theta, \varphi) = 0 \quad (1.23)$$

La résolution de cette dernière équation est obtenue après l'opération des étapes suivante :

- 1- on remplace  $R(r) = \frac{U_{kl}(r)}{r}$
- 2-on multiplie par  $r^2$  puis par  $\frac{1}{r}$
- 3- on dérivée par rapport aux trois variables  $(r, \theta, \varphi)$
- 4- on sépare l'équation en terme radial et en terme angulaire

Finalement, on peut écrire :

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E_{kl} - V(r)) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] U_{kl}(r) = 0$$

où  $\frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2} + V(r)$  est un potentiel effectif.

Afin de trouver les énergies des états pour reproduire les nombres magiques, il faut déterminer la forme du potentiel moyen on première approximation.

**Potentiel de l'oscillateur harmonique** Le potentiel de l'oscillateur harmonique (OH) pour les états liés prend la forme :

$$V(r) = -V_0 \left( 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right) \quad (1.24)$$

$$= -V_0 + \frac{1}{2} m \omega_0^2 r^2 \quad (1.25)$$

avec

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2V_0}{mR^2}} \quad (1.26)$$

où  $V_0$  est la profondeur du puits,  $m$  est la masse nucléaire, et  $r$  est la distance entre le nucléon et l'énergie du référentiel.

L'équation de Schrödinger peut être résolue analytiquement dans ce cas, l'énergie dépend de la somme de  $N$  des oscillants dans les trois directions s'écrit comme suit :

$$E_N = \left( N + \frac{3}{2} \right) \hbar \omega_0 \quad (1.27)$$

$$= \left( N_x + N_y + N_z + \frac{3}{2} \right) \hbar \omega_0 \quad (1.28)$$

où  $N$  est lié à  $n$  et  $l$  par :

$$N = 2n - 2 + l \quad (1.29)$$

où  $E_N$  est l'énergie d'une particule individuelle dans le champ moyen, et  $N$  est un nombre quantique principale prend les valeurs entières à partir de 0,  $n$  est un nombre quantique radial et  $l$  est un nombre quantique du moment angulaire orbital prend les valeurs repérés par des notations de la spectroscopie  $l (= 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots)$  qui correspondent respectivement les sous-couches  $s, p, d, f, g, h, i, j, \dots$

On peut alors écrire pour quelques valeurs de  $N$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} N = 0 \rightarrow (n, l) = (1, 0) \rightarrow 1s \\ N = 1 \rightarrow (n, l) = (1, 1) \rightarrow 1p \\ N = 2 \rightarrow (n, l) = \left\{ \begin{array}{l} (1, 2) \rightarrow 1d \\ (2, 0) \rightarrow 2s \end{array} \right. \\ N = 3 \rightarrow (n, l) = \left\{ \begin{array}{l} (1, 3) \rightarrow 1f \\ (2, 1) \rightarrow 2p \end{array} \right. \\ N = 4 \rightarrow (n, l) = \left\{ \begin{array}{l} (1, 4) \rightarrow 1g \\ (2, 2) \rightarrow 2d \\ (3, 0) \rightarrow 3s \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (1.30)$$

On peut représenter (1.30) en structure en couche sur la figure 1-4 comme suit :

La parité ( $\pi$ ) est une propriété des fonctions d'ondes décrivant le système du noyau en mécanique quantique par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Psi(-r) = \Psi(r) \\ \Psi(-r) = -\Psi(r) \end{array} \right. \Leftrightarrow \Psi(-r) = \pi\Psi(r) \quad (1.31)$$

Il représente la parité positive et négative respectivement :

$$\pi = (-1)^l$$

Le tableau 1.1 suivant résume les caractéristiques des premières couches qui représentent les états des différents noyaux :

$N$ (couche)	$E_N$	$n$	$l$	Les niveau	$d_l$	$\sum d_l$	parité	
0	$\frac{3}{2}\hbar\omega_0$	1	0	1s	2 nucléon	2	+	
1	$\frac{5}{2}\hbar\omega_0$	1	1	1p	6 nucléon	8	-	
2	$\frac{7}{2}\hbar\omega_0$	1	2	1d	10	} 12 nucléon	20	+
		2	0	2s	2			
3	$\frac{9}{2}\hbar\omega_0$	1	3	1f	14	} 20 nucléon	40	-
		2	1	2p	6			
4	$\frac{11}{2}\hbar\omega_0$	1	4	1g	18	} 30 nucléon	70	+
		2	2	2d	10			
		3	0	3s	2			

Tableau 1.1 : États des différents nucléons du noyau dans une première couche

**Couplage spin-orbite** On peut introduire formellement le couplage du spin et le moment angulaire (couplage spin-orbite) pour comprendre l'origine des nombres magique, le couplage a été franchie 1949 par Mayer et Jonson. Nous décrivons donc par le terme [14] :

$$V_{S-O} = f(r) \vec{l} \cdot \vec{s} \quad (1.32)$$

où  $s$  et  $l$  représentent respectivement les vecteurs spin et le moment angulaire orbitale respectivement,  $f(r)$  est un fonction d'onde du potentiel.

La combinaison du moment angulaire orbital et du spin du nucléon conduit à un moment angulaire total  $j$  [17].

On a :

$$\vec{j} = \vec{l} + \vec{s} \quad (1.33)$$

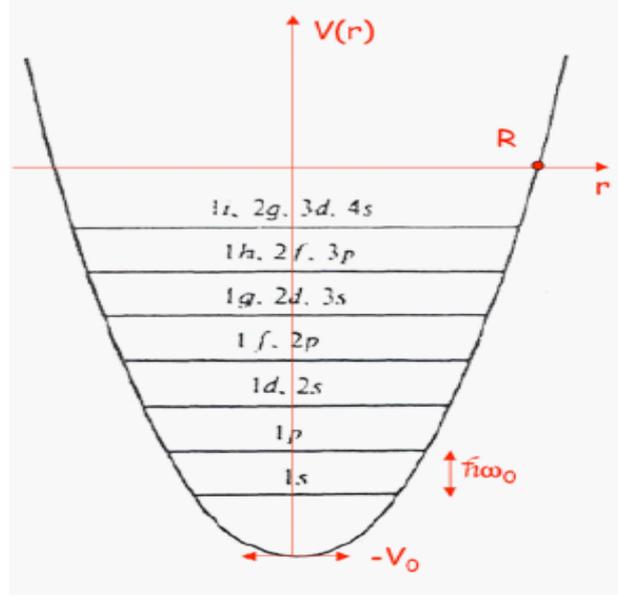


FIG. 1-4: Séquence des couches principales de l'oscillateur harmonique.

Au caré, nous avons :

$$j^2 = l^2 + s^2 + 2 \vec{l} \cdot \vec{s} \quad (1.34)$$

Le terme  $\vec{l} \cdot \vec{s}$  égal :

$$\vec{l} \cdot \vec{s} = \frac{1}{2} (j^2 - l^2 - s^2) \quad (1.35)$$

Donc on peut écrire  $\vec{l} \cdot \vec{s}$  par ses valeurs propres comme suit :

$$\vec{l} \cdot \vec{s} = \begin{cases} \frac{l}{2} & \text{si } j = l + \frac{1}{2} & \text{cas parallèle} \\ -\frac{l+1}{2} & \text{si } j = l - \frac{1}{2} & \text{cas anti parallèle} \end{cases} \quad (1.36)$$

Le champ moyen prend la forme suivante :

$$V_{w-s} = V_{O-H} - D l^2 - f(r) \vec{l} \cdot \vec{s} \quad (1.37)$$

où  $D l^2$  est l'effet de bord qui permet de lever la dégénérescence en  $l$ .

Le potentiel spin-orbite prend la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 V_{S-O} &= f(r) \left[ \frac{1}{2} (j^2 - l^2 - s^2) \right] & (1.38) \\
 V_{S-O} &= \frac{1}{2} f(r) [j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)] \\
 V_{S-O} &= \frac{1}{2} f(r) \left[ j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4} \right]
 \end{aligned}$$

Alors que le spin intrinsèque d'un nucléon est égal à  $\frac{1}{2}$ .

Les énergies des nucléons dans le modèle en couche s'écrivent :

- cas parallèle :

$$E_{nl}(\text{parallèle}) = \frac{1}{2} f(r) l \quad (1.39)$$

- cas antiparallèle :

$$E_{nl}(\text{antiparallèle}) = -\frac{1}{2} f(r) (l+1) \quad (1.40)$$

La séparation entre les deux énergies est :

$$\Delta U = E_{nl}(\text{parallèle}) - E_{nl}(\text{antiparallèle}) \quad (1.41)$$

$$= \frac{1}{2} f(r) (2l+1) = \frac{2l+1}{2} f(r) \quad (1.42)$$

### Modèle en couche déformé

Pour rendre compte des propriétés nucléaires des noyaux déformés, on a plusieurs potentiels qui traitent ces derniers, on cite les plus utilisées qui sont le potentiel de Nilsson et le potentiel de Woods-Saxon.

**Potentiel de Nilsson** Il permet de reproduire les effets des couches et stabilisant les formes déformés. L'expression de son potentiel égale :

$$V_{Nilsson} = \frac{1}{2\mu} [\omega_{\perp} (x^2 + y^2) + \omega_z Z^2] + D l^2 + c l \cdot \vec{s} \quad (1.43)$$

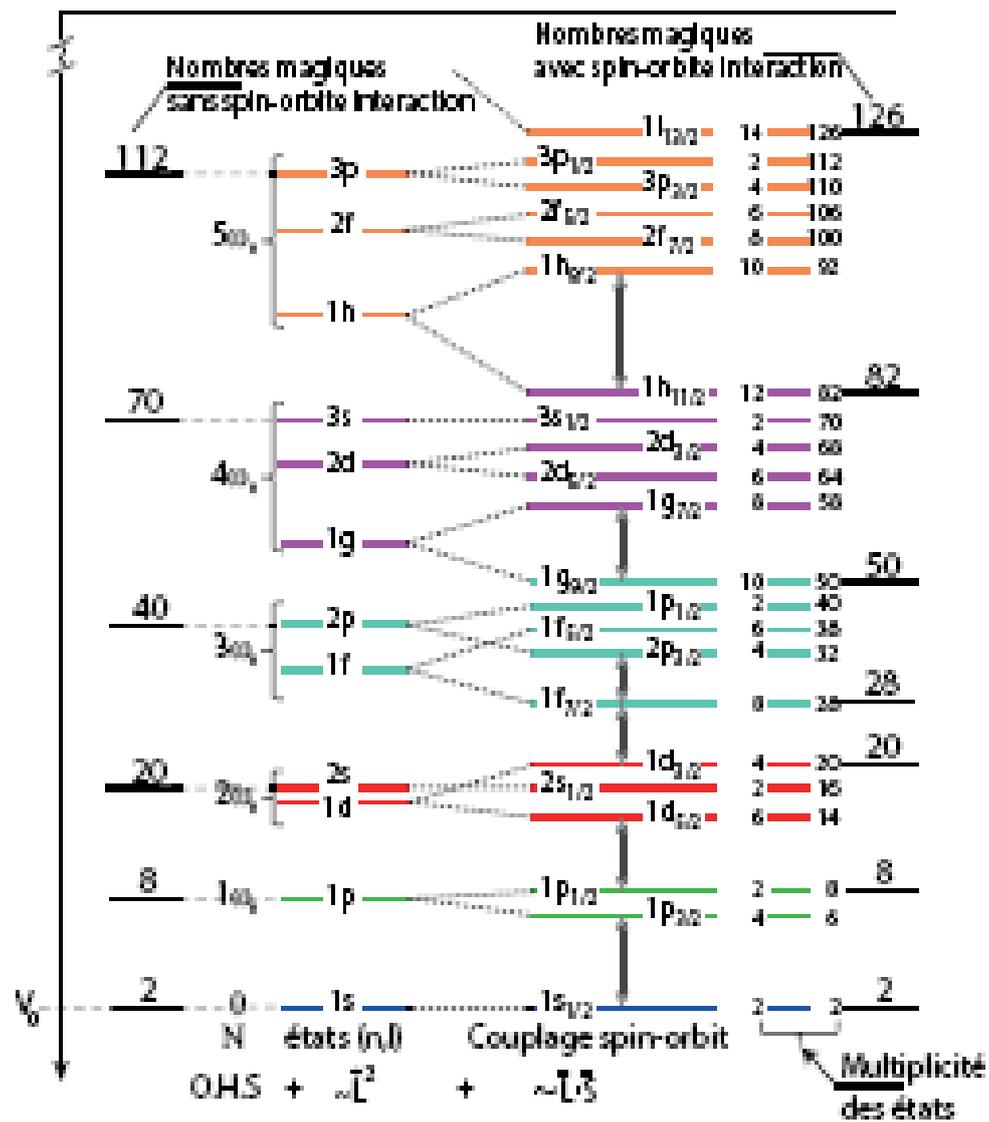


FIG. 1-5: Le niveau d'énergie des nucléons dans le modèle en couche [15].

où  $Dl^2$  est l'effet de bord qui permet de lever la dégénérescence en  $l$ , et  $\mu = \frac{mA}{(A-1)}$  est la masse réduite de nucléon,  $m$  est la masse de nucléon libre,  $\omega_z$  et  $\omega_\perp$  sont des fréquences de rotation dépendant du paramètre de déformation  $\varepsilon$ , avec  $\omega_x = \omega_y = \omega_\perp$ .

L'hamiltonien de Nilsson s'écrit comme suit :

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V_{Nilsson}$$

Les états propres de  $H$  de Nilsson sont des fonctions d'ondes dépendants des nombres quantique  $\Omega^\pi [Nn_z\Lambda]$ .

où  $N$  est la couche de l'oscillateur harmonique,  $n_z$  est le nombre quantique principale sur l'axe de symétrie,  $\Lambda$  est la projection de moment orbital  $l$  sur l'axe de symétrie,  $\Omega = \lambda + \Sigma$ , avec  $\Sigma$  est la projection du spin intrinsèque sur l'axe de symétrie.

Nilsson avait paramétrisé les fréquences en tenant compte conservation du volume nucléaire est en introduisant un paramètre de déformation, on obtient les relations :

$$\begin{aligned}\omega_\perp &= \omega_0(\delta) \left(1 + \frac{2}{3}\delta\right)^{\frac{1}{2}} \\ \omega_z &= \omega_0(\delta) \left(1 - \frac{4}{3}\delta\right)^{\frac{1}{2}} \\ \delta &= 2 \left(\frac{a_x - a_z}{a_x + a_z}\right)\end{aligned}$$

La conservation du volume nucléaire  $\omega_0(\delta)$  :

$$\omega_0(\delta) = \omega_0^0 \left(1 + \frac{2}{3}\delta^2\right)$$

où  $\omega_0^0$  est la pulsation de l'oscillateur harmonique sphérique.

Si  $\frac{\omega_z}{\omega_\perp} = 1$  le potentiel de l'oscillateur harmonique.

Si  $\frac{\omega_z}{\omega_\perp} = \frac{1}{2}$  le noyau est allongé (prolate) super déformé.

Si  $\frac{\omega_z}{\omega_\perp} = \frac{2}{1}$  le noyau est aplaté (oblate).

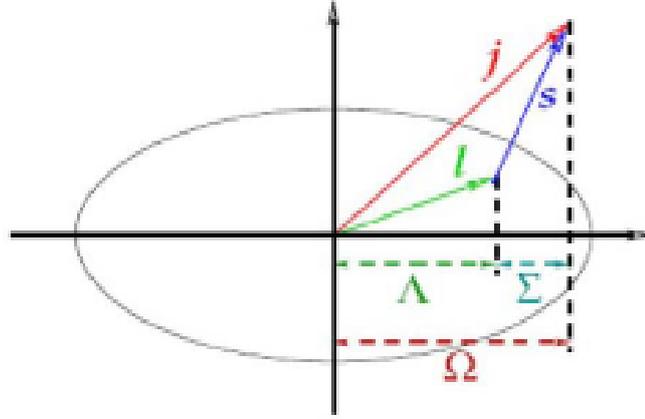


FIG. 1-6: Schéma du couplage du moment angulaire  $j=l+s$  d'une particule. Les projections de  $j$ ,  $l$ ,  $s$  sur l'axe de symétrie sont respectivement  $\Omega$ ,  $\Lambda$ ,  $\Sigma$ .

**Potentiel de Wood-Saxon** La distribution de densité dans les noyaux peut être décrite par une distribution de Fermi. Le Potentiel de Wood-Saxon est adapté à cette densité de distribution. La forme du potentiel de Wood-Saxon est [14] :

$$V_{w-s} = -\frac{V_0}{1 + \exp\left(\frac{r-R_c}{a_0}\right)} \quad (1.44)$$

où  $V_0$  est la profondeur du puits nucléaire,  $R_c$  est le rayon nucléaire,  $a_0$  est l'épaisseur de la surface nucléaire qui introduit la notion de peau nucléaire.

$$\text{Les valeurs des paramètres sont : } \begin{cases} V_0 = -50 \text{ Mev} \\ R_0 = 1.2A^{\frac{1}{3}} \\ a_0 = 0.5Fm \\ r_0 = 1.2Fm \end{cases}$$

Pour étudier les noyaux déformés l'expression (1.44) est généralisée en remplaçant l'expression de la distance  $(r - R_0)$  par  $R_\nu l(r)$  et  $a_0$  est aussi on remplace par  $a_\nu$ , on obtient :

$$W_{w-s} = -\frac{V_0}{1 + \exp\left(\frac{R_\nu l(r)}{a_\nu}\right)} \quad (1.45)$$

où  $R_\nu$  est le rayon de surface,  $a_\nu$  est le constant pendant la déformation,  $l(r)$  est le quasi-

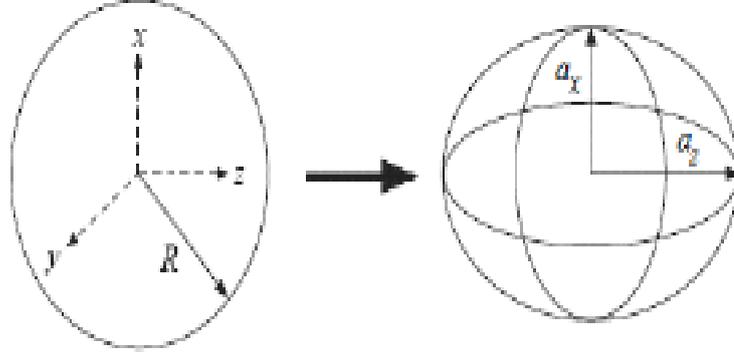


FIG. 1-7: Déformation du noyau. Forme des noyaux.  $(a_x) Q > 0$  forme allongée,  $(a_z) Q < 0$  forme aplatie.

rayon qui exprime la distance entre un point de la surface et le point de coordonnées  $r$  à partir du centre du noyau.

On définit son expression comme suit :

$$l(r) = \frac{\pi(r)}{|\nabla\pi(r)|} \quad (1.46)$$

$\pi(r)$  est l'équation de la surface nucléaire.

## 1.4 Formalisme de l'isospin

Dans la physique statistique, le proton et le neutron sont des fermions. Un système de deux fermions identiques obéit au principe d'exclusion de Pauli : "deux fermions identiques ne peuvent pas être dans le même état quantique et la fonction d'onde d'un système de deux fermions identiques est antisymétrique" [16]. Le départ, le point est l'observation que les masses du proton et le neutron sont très similaires  $m_p C^2 = 938.272013 \text{ Mev}$  et la masse de neutron  $m_n C^2 = 939.5657379 \text{ Mev}$  et le rapport entre les deux égal  $\frac{m_n}{m_p} = 1.00138$ , ont tous deux une rotation de spin  $\frac{1}{2}$ . De plus, les nucléons sont liés par forces nucléaires (interaction nucléaire) de courte portée et l'expérience montre que si l'on ne néglige pas la contribution de interaction électromagnétique, les forces entre deux neutrons à spin

antiparallèle se révèle être (approximativement) indépendant du fait qu'il s'agit de proton ou neutron. Cela indique l'existence d'une symétrie interaction forte et isospin est le formalisme approprié pour explorer les conséquences de cette symétrie dont les noyaux. Nous soulignons que l'égalité des masse et de spin de nucléons ne sont pas suffisants pour que la symétrie soit isospin valide et que l'indépendance de la charge de la force nucléaire [17].

Le formalisme de l'isospin est commencé par l'introduction de Werner Heisenberg en 1932 du concept isospin pour expliquer l'interaction entre proton-proton, neutron-neutron et proton-neutron.

En raison de la quasi-égalité des masses et des interactions entre les nucléons l'hamiltonien du noyau est approximativement invariant en ce que concerne les transformations entre les états des neutrons et des protons [17].

Pour un nucléon ceux-ci peuvent être définis en introduisant l'espace abstrait les deux vecteurs sont :

$$|p\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } |n\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.47)$$

Les transformations infinitésimales entre un neutron et un proton peuvent donc être écrire en termes des trois opérateurs :

$$\hat{t}_x = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \hat{t}_y = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \hat{t}_z = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.48)$$

où :

$$\hat{t}_x = \frac{1}{2}\hat{\sigma}_x, \hat{t}_y = \frac{1}{2}\hat{\sigma}_y, \hat{t}_z = \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z \quad (1.49)$$

avec :

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.50)$$

où  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  sont les matrices de Pauli.

Les trois composantes de matrices de Pauli vérifient la condition suivante :

$$\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = I \quad (1.51)$$

où :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ matrice unitaire} \quad (1.52)$$

Qui satisfont exactement aux mêmes relations de commutation que celle de (1.48) valables pour les opérateurs de moment angulaire. L'action des opérateurs  $t_i$  sur un état de nucléon est facilement trouvé à partir de sa représentation matricielle :

$$t_z |n\rangle = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} |n\rangle \quad (1.53)$$

$$t_z |p\rangle = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} |p\rangle \quad (1.54)$$

Et d'autre part :

$$t_z |n\rangle = -\frac{(Z - N)}{2} |n\rangle = +\frac{1}{2} |n\rangle, \text{ pour le neutron} \quad (1.55)$$

$$t_z |p\rangle = -\frac{(Z - N)}{2} |p\rangle = -\frac{1}{2} |p\rangle, \text{ pour le proton} \quad (1.56)$$

où  $\hat{t}_x, \hat{t}_y, \hat{t}_z$  respectivement représentent la projection de l'état de nucléon sur l'axe  $x, y$ , et l'espace  $z$ . Ces opérateurs obéissent aux relations de commutation comme suit :

$$[\hat{t}_x, \hat{t}_y] = \hat{t}_x \hat{t}_y - \hat{t}_y \hat{t}_x = i\hat{t}_z$$

$$[\hat{t}_y, \hat{t}_z] = i\hat{t}_x, [\hat{t}_z, \hat{t}_x] = i\hat{t}_y$$

Ecrivons les relations de commutation qui doivent vérifier la forme générale, la relation

de commutation s'écrit comme :

$$[\hat{t}_i, \hat{t}_j] = i\varepsilon_{ijk}\hat{t}_k \quad (1.57)$$

où  $\varepsilon_{ijk}$  est le symbole de "Levi-Civita" telle que :

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si } (ijk) \text{ est une permutation paire de } (xyz) \\ -1 & \text{si } (ijk) \text{ est une permutation impaire de } (xyz) \\ 0 & \text{si au moins deux des indices } i, j \text{ et } k \text{ sont égaux} \end{cases}$$

Le nucléon a un isospin  $\frac{1}{2}$ , autrement dit chacun des opérateurs  $t_x, t_y,$  et  $t_z$  a pour valeur  $\pm\frac{1}{2}$ .

avec la permutation l'opérateur  $\hat{t}^2$  égal :

$$\hat{t}^2 = \hat{t}_x^2 + \hat{t}_y^2 + \hat{t}_z^2 \quad (1.58)$$

Cette opérateur est donnée par la valeur propre  $t(t+1)$  est égal :

$$\text{pour le proton } t = \frac{1}{2} \Rightarrow t^2 |p\rangle = t(t+1) |p\rangle = \frac{3}{4} |p\rangle \quad (1.59)$$

$$\text{pour le neutron } t = \frac{1}{2} \Rightarrow t^2 |n\rangle = t(t+1) |n\rangle = \frac{3}{4} |n\rangle \quad (1.60)$$

L'opérateur  $\hat{t}^2$  est commute avec  $\hat{t}_i$  :

$$[\hat{t}^2, \hat{t}_i] = 0, \text{ avec } i = x, y, z \quad (1.61)$$

On a :

$$t_{\pm} = t_x \pm it_y \quad (1.62)$$

De plus, les combinaisons dans la relation (1.62) peut être introduit, qui satisfont aux

relations de commutation :

$$[t_+, t_-] = 2t_z \quad (1.63)$$

$$[t_z, t_{\pm}] = \pm t_{\pm} \quad (1.64)$$

$$[t^2, t_{\pm}] = [t^2, t_z] = 0 \quad (1.65)$$

Les relations d'anticommutation ( anti-commutateur) sont :

$$\{t_-, t_+\} = 1 \quad (1.66)$$

$$\{t_z, t_{\pm}\} = 0 \quad (1.67)$$

Qui joue le rôle de lever et d'abaisser les opérateurs :

$$t_- |n\rangle = |p\rangle, \quad t_+ |n\rangle = 0 \quad (1.68)$$

$$t_- |p\rangle = 0, \quad t_+ |p\rangle = |n\rangle$$

L'opérateur de charge électrique dans le formalisme isospin noté  $Q$ , est relié à la projection  $t_z$  donné par la relation suivante :

$$Q = \frac{1}{2} (1 - 2t_z) \quad (1.69)$$

Cet opérateur de charge est déduit de la relation suivante [17] :

$$\frac{1}{2} (1 - 2t_z) |p\rangle = |p\rangle \quad (1.70)$$

$$\frac{1}{2} (1 - 2t_z) |n\rangle = 0 \quad (1.71)$$

### 1.4.1 Système à deux nucléons

Les états de l'isospin d'un système de deux nucléons se construisent exactement comme les états de deux spins  $\frac{1}{2}$  (on peut transposer les règles de couplage de moment cinétique).

L'isospin total du système noté  $T$  est varié comme suit :

$$|t_n - t_p| \leq T \leq |t_n + t_p| \Leftrightarrow 0 \leq T \leq 1$$

Considérons un seul nucléon, qui peut être soit un proton ou soit un neutron. Nous introduisons un nombre quantique  $T_z$  que nous appelons projection de l'isospin.

Par définition il prend la valeur  $T_z = \frac{1}{2}$  pour un proton et  $T_z = -\frac{1}{2}$  pour un neutron.

Le nombre quantique  $T_z$  (troisième composante de l'isospin d'un noyau dans l'espace de charge  $T_z$ ) donnée par [12] :

$$T_z = -\frac{1}{2}(N - Z)$$

et

$$-T \leq T_z \leq T$$

La charge électrique d'un système de deux nucléons d'isospin total  $T$  est par extension :

$$Q = T_z + \frac{A}{2}$$

La composante d'isospin d'un état à deux nucléons dans la base couplée et notée  $|T, T_{z1}\rangle$ , pour chaque valeur de  $T$  il y a un sous espace de dimension de  $(2T + 1)$ .

L'appariement des nucléons est :

$$\begin{cases} T = 0 \text{ appariement isoscalaire pour l'état singlet } |0, T_{z1}\rangle \text{ avec } T_{z1} = 0 \\ T = 1 \text{ appariement isovectoriel pour les états triplets } |1, T_{z1}\rangle \text{ avec } T_{z1} = 1, 0, -1 \end{cases}$$
 à partir des expressions (1.63),(1.64),(1.65),(1.66),(1.67) on peut écrire :

$$T_+ T_- = T^2 - T_z^2 + T_z$$

La démonstration de la norme du vecteur  $T_- |T, m\rangle$  est donnée par :

$$\begin{aligned}
|T_- |T, m\rangle|^2 &= \langle T, m | T_+ T_- |T, m\rangle \\
&= \langle T, m | T^2 - T_z^2 + T_z |T, m\rangle \\
&= \langle T, m | T(T+1) - m(m-1) |T, m\rangle
\end{aligned}$$

Donc :

$$T_- |T, m\rangle = \sqrt{T(T+1) - m(m-1)} |T, m-1\rangle$$

Calculons  $|0, 0\rangle, |1, 1\rangle, |1, 0\rangle, |1, -1\rangle$ .

$$\begin{aligned}
|1, 1\rangle &= \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \\
|1, 0\rangle &= A \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle + B \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \\
|1, -1\rangle &= \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \\
|0, 0\rangle &= C \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle + D \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle
\end{aligned}$$

Pour résoudre les coefficients  $A$  et  $B$  on applique l'opérateur de domination  $T_-$ .

$$\begin{aligned}
T_- |1, 1\rangle &= \sqrt{T(T+1) - m(m-1)} |1, 0\rangle \\
&= (T_{-1} + T_{-2}) \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \\
&= \sqrt{t_p(t_p+1) - t_{z1}(t_{z1}-1)} \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \\
&\quad + \sqrt{t_n(t_n+1) - t_{z2}(t_{z2}-1)} \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle
\end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned}\sqrt{2}|1,0\rangle &= 1\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle + 1\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle \\ |1,0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle + \left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle\right) \\ \Rightarrow |1,0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|pn\rangle + |np\rangle), \quad A = B = \frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

Pour résoudre les coefficients  $C$  et  $D$  on applique les relations d'orthogonalisation et de normalisation :

$$\begin{cases} \langle 0,0|1,1\rangle = 0 \equiv \text{Orthogonal} \\ \langle 0,0|0,0\rangle = 1 \equiv \text{Normalisé} \end{cases}$$

On a :

$$|1,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle + \left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle\right)$$

et :

$$\begin{aligned}|0,0\rangle &= C\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle + D\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle \\ \langle 0,0|1,0\rangle &= \left[C\left\langle\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right|\left\langle\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right|\right] + D\left\langle\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right|\left\langle\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right|\right] \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle + \left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle\right] \\ &= \frac{C}{\sqrt{2}} + \frac{D}{\sqrt{2}} = 0 \Leftrightarrow C = -D \\ \langle 0,0|0,0\rangle &= \left[C\left\langle\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right|\left\langle\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right|\right] + D\left\langle\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right|\left\langle\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right|\right] \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle + \left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle\right] \\ &= 1 \Leftrightarrow C^2 + D^2 = 1 \Rightarrow C^2 + D^2 = 1\end{aligned}$$

Ce qui nous permet d'écrire :

$$C = -D = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Donc on obtient :

$$\begin{aligned} |0,0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|pn\rangle - |np\rangle) \end{aligned}$$

On peut résumer les résultats trouvés dans le tableau 1.2 :

$T$	Appariement nucléaire	$T_z$	Etats	Système
0	Appariement isoscalaire	0	$\frac{1}{\sqrt{2}} \left( \left  \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \left  \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} \left  \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \left  \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \right)$	$(p - n)$ Antisymétrique d'isospin
1	Appariement isovectoriel	1	$\left  \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \left  \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle$	$(p - p)$
		0	$\frac{1}{\sqrt{2}} \left( \left  \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \left  \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle + \left  \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \left  \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \right)$	$(p - n)$ Symétrique d'isospin
		-1	$\left  \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \left  \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle$	$(n - n)$

Tableau1.2 : Etat d'isospin d'un système à deux nucléons

# Chapitre 2

## Appariement nucléaire

### 2.1 Introduction

L'interaction d'appariement (corrélations d'appariement nucléaire) joue un rôle central dans la description de la structure nucléaire. Cette dernière est responsable d'un certain nombre de phénomènes comme la stabilité des noyaux pair-pairs par rapport aux noyaux impairs. En effet, dans le cas des noyaux ayant un nombre des protons et des neutrons différent donc les niveaux de Fermi des systèmes neutrons et protons sont nettement séparés, donc l'appariement neutron-proton (n-p) est faible (négligeable), par contre, dans le cas où  $N$  est voisin de  $Z$  les neutrons et les protons occupent les mêmes couches, et donc leurs niveaux de Fermi sont voisins, l'appariement n-p ici est fort.

Dans ce travail, pour traiter les corrélations d'appariements nucléaire entre particules identiques, on utilise l'approximation BCS qui introduit la notion de quasi-particule  $(\alpha^+, \alpha)$ . D'autre part, on trouve la fonction d'onde  $(|\psi\rangle)$  ou l'état BCS  $(|BCS\rangle)$  d'un système pair-impair des particules dans le cas d'appariement entre particules identiques (proton-proton). Nous allons ensuite utiliser le théorème de Wick pour déduire l'expression de l'équation de gap entre les niveaux d'énergies noyau puis on établit les expressions des rayons quadratiques des systèmes protons et neutrons, et enfin d'après les expressions des rayons de proton et de neutron on peut déduire l'expression du rayon de masse nucléaire.

## 2.2 Importance des corrélations d'appariement nucléaire

L'appariement se trouve à cœur de la physique nucléaire, et en générale dans les problèmes quantique à plusieurs corps. Ils sont responsables d'un certain nombre de phénomène comme suit :

- l'état fondamental des noyaux pair-pairs a un moment angulaire total nul.
- l'énergie du premier état excité non collectif dans les noyaux pair-pairs que dans les noyaux impairs. Ce phénomène est lié à l'énergie supplémentaire qu'il faut fournir pour briser les corrélations entre nucléons appariés dans les noyaux pair-pairs.
- la notion d'énergie d'appariement nucléaire est apparue dès les premières calculs de l'énergie de liaison.
- les énergies de liaison par nucléon des noyaux pair-pairs sont plus grandes que celles des noyaux pair-impairs voisins. Cette énergie en calcul par la formule semi empirique.

$$E(A, Z) = a_v A - a_s A^{\frac{2}{3}} - a_c \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}} - a_{as} \frac{(N - Z)^2}{A} \pm a_p A^{\frac{-1}{2}}$$

En comparant les noyaux impair-impair avec leur voisin pair-pairs on obtient la relation suivante :

$$E(N \text{ impair}) - E(\text{pair-pair}) = \Delta n \quad (2.1)$$

$$E(Z \text{ impair}) - E(\text{pair-pair}) = \Delta p$$

$$E(\text{impair- impair}) - E(\text{pair-pair}) = \Delta n - \Delta p - E_{np}$$

où  $\Delta n \simeq \Delta p = \frac{12}{\sqrt{A}} \text{MeV}$  et  $E_{np} \simeq \frac{20}{A} \text{MeV}$  sont déterminées de manière empirique.

## 2.3 Hamiltonien nucléaire en seconde quantification

En seconde quantification et dans le formalisme d'isospin (spin isotopique), un système de masse  $A$  constitué de  $Z$  proton et  $N$  neutron ( $n$  nucléon) sont en mouvement dans un champ moyen et soumissent à la force d'appariement nucléaire. Cette hamiltonien est constitué de deux termes principaux  $H_0$  et  $V$ , où  $H_0$  est l'hamiltonien à particules indépendantes dont les valeurs propres sont les énergies individuelles et  $V$  est le terme d'interaction résiduelle entre nucléons on a :

$$H_0 = \sum_v \varepsilon_\nu a_\nu^\dagger a_\nu \quad (2.2)$$

où  $a_\nu^\dagger$  et  $a_\nu$  représentent respectivement les opérateurs de création et d'annihilation d'une particule dans l'état  $|\nu\rangle$ , d'énergie  $\varepsilon_\nu$ .

Et

$$V = \frac{1}{4} \sum_{klmn} \langle kl | V | mn \rangle a_k^\dagger a_l^\dagger a_n a_m \quad (2.3)$$

avec  $\langle kl | V | mn \rangle$  sont des éléments de matrice antisymétrisés de l'interaction résiduelle  $V$  que l'on suppose invariant par rotation et par renversement du sens du temps, ce qui entraîne :

$$\begin{aligned} \langle kl | V | mn \rangle &= s_k s_l s_m s_n \langle -m - n | V | -k - l \rangle \\ &= \langle \tilde{m} \tilde{n} | V | \tilde{k} \tilde{l} \rangle \end{aligned} \quad (2.4)$$

où l'on a noté par :

$$|\tilde{k}\rangle = s_k | -k \rangle$$

où  $s_k$  est un facteur de phase et  $| -k \rangle$  désigne l'état renversé par rapport au sens de temps de  $|k\rangle$ .

Pour rendre l'effet d'appariement nucléaire, Belyaev a introduit la notion d'interaction résiduelle entre deux états renversés l'un de l'autre par rapport au sens du temps. On peut

définir cette force d'appariement par ses éléments de matrice qui s'écrit comme suit [23] :

$$\langle kl | V | mn \rangle = -4G\delta_{k\bar{l}}\delta_{m\bar{n}} \quad (2.5)$$

où  $G$  est une constante positive appelée constante d'appariement.

Pour étudier l'effet d'une telle interaction, on considère chaque nucléon de l'hamiltonien en seconde quantification comme suit :

$$\begin{aligned} H &= \sum_v \varepsilon_v a_v^+ a_v + \frac{1}{4} \sum_{k,l,m,n} \langle kl | V | mn \rangle a_k^+ a_l^+ a_n a_m \\ &= \sum_v \varepsilon_v a_v^+ a_v + \frac{1}{4} \sum_{k,l,m,n} (-4G\delta_{k\bar{l}}\delta_{m\bar{n}}) a_k^+ a_l^+ a_n a_m \\ &= \sum_{v)0} \varepsilon_v (a_v^+ a_v + a_{\bar{v}}^+ a_{\bar{v}}) - G \sum_{k,m)0} a_k^+ a_{\bar{k}}^+ a_{\bar{m}} a_m \\ &= \sum_{v)0} \varepsilon_v (a_v^+ a_v + a_{\bar{v}}^+ a_{\bar{v}}) - G \sum_{v,\mu)0} a_v^+ a_{\bar{v}}^+ a_{\bar{\mu}} a_{\mu} \end{aligned} \quad (2.6)$$

$a_{\nu}^+$  et  $a_{\nu}$  obéissent aux règles d'anticommutation des fermions comme suit :

$$\{a_{\nu}^+, a_{\mu}^+\} = 0 \quad (2.7)$$

$$= a_{\nu}^+ a_{\mu}^+ + a_{\mu}^+ a_{\nu}^+ \quad (2.8)$$

C'est-à-dire :

$$a_{\nu}^+ a_{\mu}^+ = -a_{\mu}^+ a_{\nu}^+$$

Et les opérateurs conjugués s'écrivent :

$$\{a_{\nu}, a_{\mu}\} = 0$$

$$= a_{\nu} a_{\mu} + a_{\mu} a_{\nu}$$

Ainsi que :

$$\begin{aligned}\{a_\nu^+, a_\mu\} &= \delta_{\mu\nu} \\ &= a_\nu^+ a_\mu + a_\mu a_\nu^+\end{aligned}$$

## 2.4 Théorie BCS

Dans la théorie *BCS* les fonctions *BCS* sont fonctions propres de  $H$ , mais le nombre de particules n'est conservé qu'en moyenne :

$$\langle BCS | N | BCS \rangle = n_0 \quad (2.9)$$

où  $n_0$  est le nombre réel de particules du système. On tient compte de cette contrainte en introduisant un paramètre de Lagrange  $\lambda$  et en minimisant la valeur moyenne de l'hamiltonien auxiliaire.

$$H' = H - \lambda N \quad (2.10)$$

### 2.4.1 Transformation de Bogoluibov-Valatin

Bogoluibov-Valatin ont défini les opérateurs  $\alpha_\nu$  et  $\alpha_\nu^+$  qui sont combinaison linéaire des opérateurs de création et d'annihilation de vrais particules, la transformation est suggérée par Bogoluibov et Valatin est écrit comme suit :

$$\begin{cases} \alpha_\nu^+ = u_\nu a_\nu^+ - v_\nu a_{\bar{\nu}} \\ \alpha_\nu = u_\nu a_\nu - v_\nu a_{\bar{\nu}}^+ \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha_{\bar{\nu}}^+ = u_\nu a_{\bar{\nu}}^+ + v_\nu a_\nu \\ \alpha_{\bar{\nu}} = u_\nu a_{\bar{\nu}} + v_\nu a_\nu^+ \end{cases} \quad (2.11)$$

où  $\alpha_\nu^+$  et  $\alpha_\nu$  sont des opérateurs de création et d'annihilation de quasi-particules respectivement, le signe  $(-)$  est équivalent  $\alpha_{\bar{\nu}}^+ = -\alpha_\nu^+$  [22].

$u_\nu$  et  $v_\nu$  sont des nombres positives et satisfont aux conditions de normalisations et

reliés par les conditions suivantes :

$$u_\nu = u_{\bar{\nu}} \quad \text{et} \quad v_\nu = v_{\bar{\nu}}$$

$$\{\alpha_\nu^+, \alpha_\mu\} = \{(u_\nu a_\nu^+ - v_\nu a_{\bar{\nu}}), (u_\mu a_\mu - v_\mu a_{\bar{\mu}}^+)\} \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} &= u_\nu u_\mu \{a_\nu^+, a_\mu\} + u_\nu v_\mu \{a_\nu^+, a_{\bar{\mu}}^+\} + v_\mu u_\nu \{a_{\bar{\nu}}, a_\mu\} + v_\mu v_\nu \{a_{\bar{\nu}}, a_\mu\} \\ &= (u_\nu u_\mu + v_\mu v_\nu) \delta_{\nu\mu} = \delta_{\nu\mu} \end{aligned} \quad (2.13)$$

on peut écrire :

$$u_\nu^2 + v_\nu^2 = 1 \quad \text{ou} \quad u_\mu^2 + v_\mu^2 = 1 \quad (2.14)$$

On peut donc définir une nouvelle représentation appelé représentation quasi-particule dont la vide sera noté  $|BCS\rangle$  où  $|0\rangle$  sera définie par les deux équations :

$$\alpha_\nu |BCS\rangle = 0, \quad \langle BCS| \alpha_\nu^+ = 0, \quad \forall \nu \quad (2.15)$$

La transformation de vraie particule en fonction des opérateurs de quasi-particule est :

$$u_\nu \alpha_\nu = u_\nu (u_\nu a_\nu - v_\nu a_{\bar{\nu}}^+) \quad (2.16)$$

$$v_\nu \alpha_{\bar{\nu}}^+ = v_\nu (u_\nu a_{\bar{\nu}}^+ + v_\nu a_\nu) \quad (2.17)$$

On somme les deux équations (2.16) et (2.17) membre à membre on obtient :

$$u_\nu \alpha_\nu + v_\nu \alpha_{\bar{\nu}}^+ = a_\nu \quad (2.18)$$

Les quatre opérateurs de création et d'annihilation de vraies particules s'écrivent

$$\begin{cases} a_\nu^+ = u_\nu \alpha_\nu^+ + v_\nu \alpha_{\bar{\nu}} \\ a_{\bar{\nu}} = u_\nu \alpha_{\bar{\nu}} + v_\nu \alpha_\nu^+ \end{cases} \quad \begin{cases} a_{\bar{\nu}}^+ = u_\nu \alpha_{\bar{\nu}}^+ - v_\nu \alpha_\nu \\ a_\nu = u_\nu \alpha_\nu - v_\nu \alpha_{\bar{\nu}}^+ \end{cases} \quad (2.19)$$

où

$$a_\nu |0\rangle = 0, \quad \langle 0| a_\nu^+ = 0, \quad \forall \nu \quad (2.20)$$

### 2.4.2 Equations de gap

On diagonalise approximativement l'hamiltonien (2.6), en le linéarisant par l'utilisation du théorème de Wick. Les paramètres  $u_\nu$  et  $v_\nu$  sont choisis de manière à minimiser la valeur moyenne de l'hamiltonien  $H'$  calculée sur  $|BCS\rangle$ . On exprime alors  $H'$  en représentation quasi particules.

$$H' = H - \lambda N \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{v \geq 0} \varepsilon_v (a_v^+ a_v + a_{\bar{v}}^+ a_{\bar{v}}) - G \sum_{v, \mu) 0} a_v^+ a_{\bar{v}}^+ a_{\bar{\mu}} a_\mu - \lambda \sum_{v \geq 0} (a_v^+ a_v + a_{\bar{v}}^+ a_{\bar{v}}) \\ &= \sum_{v \geq 0} (\varepsilon_v - \lambda) (a_v^+ a_v + a_{\bar{v}}^+ a_{\bar{v}}) - G \sum_{v \geq 0} a_v^+ a_{\bar{v}}^+ a_{\bar{\mu}} a_\mu \end{aligned} \quad (2.22)$$

En utilisant le théorème de Wick, les termes de l'hamiltonien  $H'$  se calculent comme suit :

$$a_v^+ a_v = a_v^{+\square} a_v + : a_v^+ a_v : \quad (2.23)$$

Et

$$a_{\bar{v}}^+ a_{\bar{v}} = a_{\bar{v}}^{+\square} a_{\bar{v}} + : a_{\bar{v}}^+ a_{\bar{v}} : \quad (2.24)$$

Ainsi que :

$$\begin{aligned} a_v^+ a_{\bar{v}}^+ a_{\bar{\mu}} a_\mu &= a_v^{+\square} a_{\bar{v}}^+ a_{\bar{\mu}} a_\mu - a_v^{+\square} a_{\bar{\mu}} a_{\bar{v}}^+ a_\mu + a_v^{+\square} a_\mu a_{\bar{v}}^+ a_{\bar{\mu}} + a_v^{+\square} a_{\bar{v}}^+ : a_{\bar{\mu}} a_\mu : - a_v^{+\square} a_{\bar{\mu}} : a_{\bar{v}}^+ a_\mu : \\ &+ a_v^{+\square} a_\mu : a_{\bar{v}}^+ a_{\bar{\mu}} : + : a_v^+ a_{\bar{v}}^+ : a_{\bar{\mu}} a_\mu - : a_v^+ a_{\bar{\mu}} : a_{\bar{v}}^+ a_\mu + : a_v^+ a_\mu : a_{\bar{v}}^+ a_{\bar{\mu}} + : a_v^+ a_{\bar{v}}^+ a_{\bar{\mu}} a_\mu : \end{aligned} \quad (2.25)$$

On peut mettre les résultats de calcul de l'hamiltonien  $H'$  sous la forme :

$$H' = E_0 + H_{11} + H_2 + H_{resid} \quad (2.26)$$

où :

- $E_0$  est une constante qui contient les termes entièrement contractés.
- $H_{11}$  regroupe les produits normaux de deux opérateurs  $\alpha^+$  et  $\alpha$ .
- $H_2$  regroupe les termes en  $\alpha^+\alpha^+$  et  $\alpha\alpha$ .
- $H_{résidu}$  regroupe le produit normal :  $a_v^+ a_{\bar{v}}^+ a_{\bar{\mu}} a_{\mu} \dots$

L'expression de s'écrit alors  $E_0$  :

$$\begin{aligned}
E_0 &= \sum_{v \rangle 0} (\varepsilon_v - \lambda) (v_v^2 + v_{\bar{v}}^2) - G \sum_{v, \mu} (u_v v_v u_{\mu} v_{\mu} + v_v^2 \delta_{v\mu} v_{\bar{v}}^2 \delta_{v\mu}) \\
&= 2 \sum_{v \rangle 0} (\varepsilon_v - \lambda) v_v^2 - G \sum_{v, \mu} u_v v_v u_{\mu} v_{\mu} - G \sum v_v^4 \\
&= 2 \sum_{v \rangle 0} \left( \varepsilon_v - \lambda - \frac{G}{2} v_v^2 \right) v_v^2 - G \sum_v u_v^2 v_v^2 \\
&= 2 \sum_{v \rangle 0} \left( \varepsilon_v - \lambda - \frac{G}{2} v_v^2 \right) v_v^2 - \frac{\Delta^2}{G}
\end{aligned} \tag{2.27}$$

Tel que :

$$\Delta = G \sum_{v \rangle 0} u_v v_v \tag{2.28}$$

où  $\Delta$  est une quantité qui caractérise la demi largeur du gap dans le spectre de quasi-particules.

L'expression de  $H_{11}$  est donnée par :

$$H_{11} = \sum_{v \rangle 0} \left\{ (\varepsilon_v - \lambda - G v_v^2) (u_v^2 - v_v^2) + 2G u_v v_v \sum_{\mu \rangle 0} u_{\mu} v_{\mu} \right\} (\alpha_v^+ \alpha_v + \alpha_{\bar{v}}^+ \alpha_{\bar{v}}) \tag{2.29}$$

L'expression de  $H_2$  est donnée par :

$$H_2 = \sum_{v \rangle 0} [2 (\varepsilon_v - \lambda - G v_v^2) u_v v_v - \Delta (u_v^2 - v_v^2)] (\alpha_v^+ \alpha_{\bar{v}}^+ + \alpha_v \alpha_{\bar{v}}) \tag{2.30}$$

L'expression de  $H_{résidu}$  est donnée par :

$$H_{résidu} = -G \sum_{\nu, \mu > 0} : a_{\nu}^{+} a_{\bar{\nu}}^{+} a_{\bar{\mu}} a_{\mu} : \quad (2.31)$$

$$= H_{22} + H_3 + H_4 \quad (2.32)$$

où  $a_{\nu}^{+} a_{\bar{\nu}}^{+} a_{\bar{\mu}} a_{\mu}$  représente le produit normal.

La valeur moyenne de l'hamiltonien s'écrit sous la forme : L'hamiltonien  $H'$  devient alors :

$$H' = E_0 + H_{11} \quad (2.33)$$

$$= E_0 + \sum_{\nu > 0} E_{\nu} (\alpha_{\nu}^{+} \alpha_{\nu} + \alpha_{\bar{\nu}}^{+} \alpha_{\bar{\nu}}) \quad (2.34)$$

où :

$$E_{\nu} = \sqrt{(\varepsilon_{\nu} - \lambda - Gv_{\nu}^2)^2 + \Delta^2} \quad (2.35)$$

Est l'énergie d'un quasi particule.

Ainsi, la condition de normalisation du nombre de particule s'écrit :

$$\begin{aligned} n &= \langle BCS | N | BCS \rangle \\ &= \langle BCS | \sum_{\nu > 0} (a_{\nu}^{+} a_{\nu} + a_{\bar{\nu}}^{+} a_{\bar{\nu}}) | BCS \rangle \\ &= 2 \sum_{\nu > 0} v_{\nu}^2 \\ &= \sum_{\nu > 0} \left\{ 1 - \frac{\varepsilon_{\nu} - \lambda - Gv_{\nu}^2}{\sqrt{(\varepsilon_{\nu} - \lambda - Gv_{\nu}^2)^2 + \Delta^2}} \right\} \end{aligned} \quad (2.36)$$

Si l'on néglige le terme  $v_{\nu}^4$  dans l'expression de  $E_0$ ,  $(v_{\nu}^2 \langle 0 |)$ , on peut supposer que  $v_{\nu}^4$  est

suffisamment petit, il vient :

$$E_0 = 2 \sum_{\nu>0} (\varepsilon_\nu - \lambda) v_\nu^2 - G \left( \sum_{\nu>0} u_\nu v_\nu \right)^2 \quad (2.37)$$

Les probabilités d'occupation et d'inoccupation s'écrivent alors :

$$\left. \begin{array}{l} u_\nu^2 \\ v_\nu^2 \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ 1 \pm \frac{\varepsilon_\nu - \lambda}{\sqrt{(\varepsilon_\nu - \lambda)^2 + \Delta^2}} \right\} \quad (2.38)$$

De même, la condition de conservation de nombre de particules s'écrit :

$$\begin{aligned} n &= 2 \sum_{\nu>0} v_\nu^2 \\ &= \sum_{\nu>0} \left\{ 1 - \frac{\varepsilon_\nu - \lambda}{\sqrt{(\varepsilon_\nu - \lambda)^2 + \Delta^2}} \right\} \end{aligned} \quad (2.39)$$

Les équations de gap sont alors définies par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta = G \sum_{\nu>0} u_\nu v_\nu \\ n = 2 \sum_{\nu>0} v_\nu^2 \end{array} \right. \quad (2.40)$$

Quant à l'énergie du système, elle est définie par :

$$\begin{aligned} E_{BCS} &= \langle BCS | H | BCS \rangle \\ &= \langle BCS | (H' + \lambda N) | BCS \rangle \\ &= E_0 + 2\lambda \sum_{\nu>0} v_\nu^2 \\ &= 2 \sum_{\nu>0} \varepsilon_\nu v_\nu^2 - \frac{\Delta^2}{G} \end{aligned} \quad (2.41)$$

## 2.5 Fonction d'onde

La théorie BCS est introduite par Bardeen-Cooper-Schrieffer, pour décrire la supraconductivité dans les matériaux. En physique nucléaire, cette théorie est utilisée pour étudier les phénomènes d'appariement, dans lequel le recouvrement de la fonction d'onde des deux nucléons appariés est pris en considération. En effet, dans l'approximation des quasi particules indépendantes l'état fondamental  $|\Psi\rangle \equiv |BCS\rangle$  du système de particules est le vide de quasi particules. Il peut être obtenu à partir du vrai vide de particules  $|0\rangle$  par élimination dans ce dernier de toutes les quasi particules. On peut donc écrire : [20] .

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= |BCS\rangle \\ &= \prod \alpha_v \alpha_{\bar{v}} |0\rangle \end{aligned} \quad (2.42)$$

D'après la transformation de Bogoluibov-Valatin l'expression de la fonction d'onde s'écrit comme :

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \prod_{v>0} (u_v a_v - v_v a_{\bar{v}}^+) (u_v a_{\bar{v}} + a_v^+) |0\rangle \\ &= \prod_{v>0} (u_v^2 a_v a_{\bar{v}} + u_v v_v a_v a_v^+ - v_v u_v a_{\bar{v}}^+ a_{\bar{v}} - v_v^2 a_{\bar{v}}^+ a_v^+) |0\rangle \\ &= \prod_{v>0} (u_v v_v a_v a_v^+ - v_v^2 a_{\bar{v}}^+ a_v^+) |0\rangle \\ &= \prod_{v>0} (u_v v_v (\delta_{v\bar{v}} - a_v^+ a_v) - v_v^2 a_{\bar{v}}^+ a_v^+) |0\rangle \\ &= \prod_{v>0} v_v (u_v + v_v a_v^+ a_{\bar{v}}^+) |0\rangle \end{aligned} \quad (2.43)$$

En considérant que l'état  $|\psi\rangle$  doit être orthonormalisé, soit la relation :

$$|\psi\rangle = \frac{|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|\psi\rangle}} \quad (2.44)$$

D'abord en calculant l'expression suivante :

$$\begin{aligned}
\sqrt{\langle \psi | \psi \rangle} &= \prod_{v>0} v_v^2 \langle 0 | (u_v + v_v a_{\bar{v}} a_v) (u_v + v_v a_v^+ a_{\bar{v}}^+) | 0 \rangle & (2.45) \\
&= \prod_{v>0} v_v^2 \langle 0 | (u_v^2 + u_v v_v a_v^+ a_{\bar{v}}^+ + v_v u_v a_{\bar{v}} a_v + v_v^2 a_{\bar{v}} a_v a_v^+ a_{\bar{v}}^+) | 0 \rangle \\
&= \prod_{v>0} v_v^2 \langle 0 | (u_v^2 + v_v^2 a_{\bar{v}} a_v a_v^+ a_{\bar{v}}^+) | 0 \rangle \\
&= \prod_{v>0} v_v^2 (u_v^2 + v_v^2) \\
&= \prod_{v>0} v_v^2
\end{aligned}$$

Finalement :

$$|\psi\rangle = \prod_{v>0} (u_v + v_v a_v^+ a_{\bar{v}}^+) |0\rangle \quad (2.46)$$

On voit bien dans cette dernière expression de l'état fondamental que les particules sont regroupées par paires.

## 2.6 Etat excité

Un noyau atomique peut être excité dans un état vibrationnel qui est indépendant de l'appariement des nucléons, comme il peut être excité dans un état rotationnel dans le cas non sphérique.

Considérons l'état excité à une quasi particule, il est donné par :

$$|\nu\rangle = |\nu_v\rangle = \alpha_v^+ |\psi\rangle \quad (2.47)$$

$$= (u_v a_v^+ - v_v a_{\bar{v}}) \prod_{j>0} (u_j + v_j a_j^+ a_j^+) |0\rangle \quad (2.48)$$

$$= (u_v a_v^+ (u_v + v_v a_v^+ a_{\bar{v}}^+) - v_v a_{\bar{v}} (u_v + v_v a_v^+ a_{\bar{v}}^+)) \prod_{\substack{j>0 \\ j \neq v}} (u_j + v_j a_j^+ a_j^+) |0\rangle \quad (2.49)$$

$$= a_v^+ \prod_{\substack{j>0 \\ j \neq v}} (u_j + v_j a_j^+ a_j^+) |0\rangle \quad (2.50)$$

On remarque qu'il décrit l'état d'un système à un nombre impair de particule, dans lequel une particule célibataire (inappariée) occupe l'état  $|\nu\rangle$  du modèle à particules indépendantes. Le reste des particules constituent un cœur à un nombre pair de particules, ces dernières étant rangées sous formes de paires sur les états du modèle à particules indépendantes.

## 2.7 Valeur moyenne de l'opérateur nombre de particules

Trouvons le système ayant un nombre impair de particules c.-à-d. trouverons la fonction d'onde ayant un nombre **pair-impair** de particule et la valeur moyenne de l'opérateur nombre de particules. En effet, la description de ce système se fait par la méthode variationnelle du blocage de Wahl Born [2, 30]. Il utilise l'état excité à une quasi-particule comme une fonction d'onde où un nucléon du système est bloqué sur un niveau  $\nu$  choisi comme étant le niveau le plus élevé de niveau de Fermi des niveaux d'énergie du modèle à particules indépendantes. Donc la fonction d'onde de particules pair-impairs est l'état excité à une quasi-particule. La valeur moyenne de l'opérateur nombre de particules se calcule comme suit :

$$\begin{aligned}
\langle \nu | N | \nu \rangle &= \langle \psi | a_\nu N a_\nu^\dagger | \psi \rangle & (2.51) \\
&= \langle \psi | a_\nu \sum_{\nu \rangle 0} (a_\nu^\dagger a_\nu + a_{\bar{\nu}}^\dagger a_{\bar{\nu}}) a_\nu^\dagger | \psi \rangle \\
&= 2 \sum_{\nu \rangle 0} v_\nu^2 \langle \psi | (\delta_{\nu\nu} - a_\nu^\dagger a_\nu) | \psi \rangle + \sum_{\nu \rangle 0} \langle \psi | (u_\nu^2 - v_\nu^2) (\delta_{\nu\nu} - a_\nu^\dagger a_\nu) (\delta_{\nu\nu} - a_\nu^\dagger a_\nu) | \psi \rangle \\
&= 1 + 2 \sum_{\substack{k \rangle 0 \\ k \neq \nu}} v_k^2
\end{aligned}$$

## 2.8 Rayons quadratiques du système proton

Dans l'approche microscopique et dans l'hamiltonien en seconde quantification et du spin isotopique, l'opérateur de rayon quadratique du système proton s'écrit comme suit [31, 32] :

$$\hat{r}_p^2 = \sum_{i,j} \langle \hat{r}_p^2 \rangle_{i,j} a_i^\dagger a_j \quad (2.52)$$

avec :

$$\langle \hat{r}_p^2 \rangle_{i,j} = \langle i | r_p^2 | j \rangle \quad (2.53)$$

La quantité  $\langle i | r_p^2 | j \rangle$  représente les éléments de matrices de  $r_p^2$  sur la base des particules indépendante.

$$\langle r_p^2 \rangle_{i,j} = \sum_{i,j} \langle i | r_p^2 | j \rangle \langle \nu | a_i^\dagger a_j | \nu \rangle \quad (2.54)$$

La valeur moyenne de l'opérateur rayon quadratique correspondant à un nombre pair-impair de particules est donnée ci-dessous, en utilisant la transformation de Bogoliubov-Valatin et l'expression (2.54) :

$$r_p^2 = \sum_{i,j} \langle r_p^2 \rangle_{i,j} a_i^+ a_j \quad (2.55)$$

$$\begin{aligned} \langle \psi | r_p^2 | \psi \rangle &= \sum_{i,j} \langle r_p^2 \rangle_{i,j} \langle \psi | a_i^+ a_j | \psi \rangle \\ &= \sum_{i,j} \langle i | r_p^2 | j \rangle \langle \psi | (u_i a_i^+ + v_i a_{\bar{i}}) (u_j a_j + v_j a_{\bar{j}}^+) | \psi \rangle \\ &= \sum_{i,j} \langle i | r_p^2 | j \rangle \langle \psi | v_i v_j (\delta_{\bar{i}\bar{j}} - a_j^+ a_i) | \psi \rangle \\ &= \sum_i \langle i | r_p^2 | j \rangle v_i^2 \\ &= \langle r_p^2 \rangle_{\nu,\nu} + 2 \sum_{\substack{i>0 \\ i \neq \nu}} \langle r_p^2 \rangle_{i,i} v_p^2 \end{aligned} \quad (2.56)$$

# Chapitre 3

## Résultats numériques et discussion

Après d'étudier les équations de gap dont la demi largeur du gap, la constante d'appariement et les probabilités d'occupations et d'inoccupations de particules ainsi que l'établissement l'expression du rayon quadratique du système protons des noyaux pair-impairs par la théorie BCS, il été utile pour conduire à la validité de nos équations numériquement. Nous avons pour cela utilisé le modèle schématique à plusieurs niveaux de Richardson [7,8] et le modèle réaliste de Woods-Saxon [6].

### 3.1 Amplitudes de probabilités de particules

Nous avons pour cela élaboré un programme numérique qui calcule les probabilités d'occupation ( $v_\nu^2$ ), et d'inoccupation ( $u_\nu^2$ ) de particules définies dans l'expression (2.38) en utilisant le modèle de Richardson. Ce dernier consiste en un spectre discret de niveaux d'énergie équidistants doublement dégénérés tels que  $\varepsilon_\nu = \nu$ . On considère dans ce modèle que les particules réparties sur  $\Omega$  niveaux doublement dégénérés et équidistants, la distance entre deux niveaux consécutifs étant de  $1MeV$ . Nous avons reporté sur le tableau 3-1 les probabilités d'occupation de l'état  $|\nu\rangle$  par une paire de particules ( $v_\nu^2$ ), et d'inoccupation ( $u_\nu^2$ ), dans le cas d'un système possédant  $N = 16$  particules, avec  $G = 0.475$ , et  $\Omega = 16$  en fonction des niveaux individuels. On constate dans ce tableau que la somme des deux probabilités à travers tous les niveaux de 1 à 16 est égale à 1, ce qui nous a conduit à la

validité de nos équations de l'expression (2.14).

TAB. 3.1: Valeur des probabilités d'occupation (colonne 1) et et d'inoccupation (colonne 2), d'un système de 16 niveau pour des noyaux impair

Niveaux	Probabilité d'occupation ( $v_k^2$ )	Probabilité d'occupation ( $\mu_k^2$ )	( $v_k^2 + \mu_k^2$ )
1	0.9956139	0.0043861	1
2	0.9941859	0.0058141	1
3	0.9919350	0.0080650	1
4	0.9880936	0.0119065	1
5	0.9807619	0.0192381	1
6	0.9642383	0.0357617	1
7	0.9160252	0.0839748	1
8	0.7236068	0.2763932	1
9	0.2763932	0.7236068	1
10	0.0839748	0.9160252	1
11	0.0357617	0.9642383	1
12	0.0192381	0.9807619	1
13	0.0119065	0.9880936	1
14	0.0080650	0.9919350	1
15	0.0058141	0.9941859	1
16	0.0043861	0.9956139	1

Nous avons tracé sur la figure 3-1 les valeurs des amplitudes de probabilités de particules  $u_\nu^2$  et  $v_\nu^2$ .

## 3.2 Rayon de proton

Nous intéressons ici dans le calcul numérique du rayon de proton ( $r_p$ ) dans le cas de l'appariement entre particules identiques qui n'existe que dans les noyaux tels que  $N \simeq Z$ , donc nous allons prendre en considérations seulement les noyaux tels que  $1 \leq (N - Z) \leq 3$ . Le nombre limité des valeurs expérimentales des masses disponibles pour le calcul des  $\Delta_{pp}^{\text{exp}}$  va nous obliger utiliser seulement les noyaux dont la charge est comprise entre 16 et 56. La constante d'appariement  $G_{pp}$  est primordial pour la détermination de la demi-largeur du gap où  $G_{pp}$  est déterminée à partir des valeurs "expérimentales" des paramètres du gap  $\Delta_{pp}$ , et ces dernières sont déterminées à partir des différences de masse

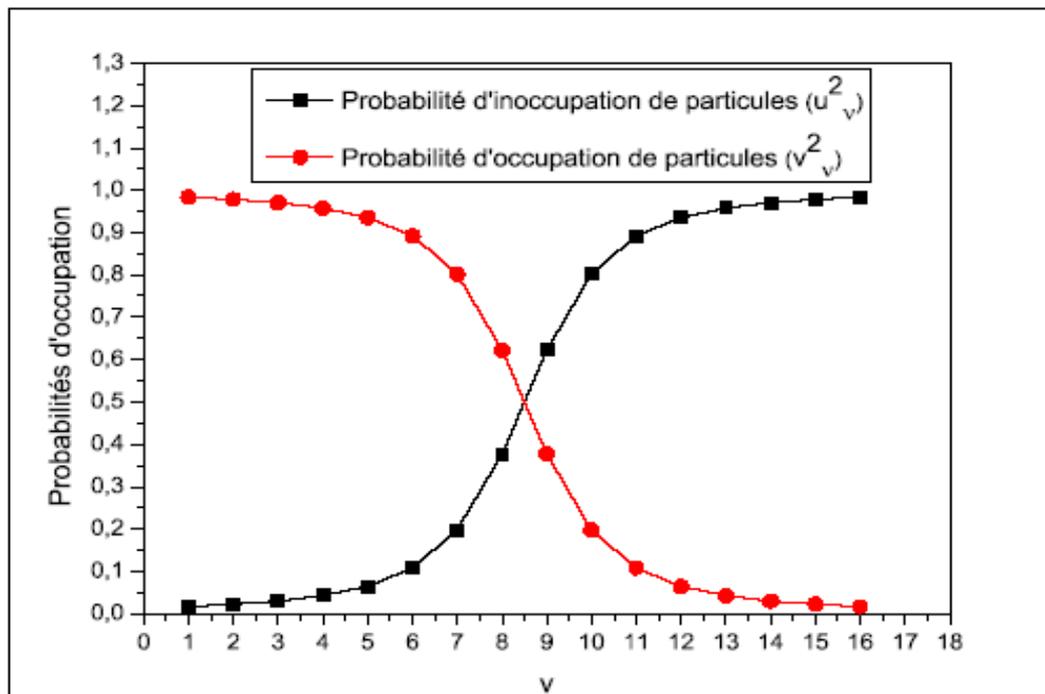


FIG. 3-1: Evolution des probabilités d'occupation  $(v_{\nu}^2)$  et d'inoccupation  $(u_{\nu}^2)$  en fonction des niveaux  $\nu$ .

pair-impair définies par [33] :

$$\Delta_{pp}^{\text{exp}} = -\frac{1}{8} [M(Z+2, N) - 4M(Z+1, N) + 6M(Z, N) - 4M(Z-1, N) + M(Z-2, N)]$$

où  $M$  est la masse expérimentale déduite de la table de Wapstra et al. [33].

Le calcul numérique de  $r_p$  est basé sur l'expression (2.56) et l'expression  $r_p = \sqrt{\frac{\langle r_p^2 \rangle}{Z}}$  avec  $Z$  est le nombre de particules du système protons. Pour cela nous utilisons les énergies et états propres d'un champ moyen déformé de Woods-Saxon où la paramétrisation de ce potentiel est prise de la Ref. [34] avec un nombre de couches maximal  $N_{\text{max}} = 12$ , ce qui correspond à une dégénérescence totale de niveaux  $\Omega = 455$ . Nous avons reporté sur le tableau (3-2) les résultats des calculs du rayon quadratique du système protons ainsi que la constante d'appariement proton-proton dans le cas de l'appariement entre particules identiques. Les résultats que nous avons obtenu dans le tableau (3-2) ont été tracés sur les figures (3-2 à 3-5) pour les cas  $(N - Z) = 1$  et 3.

TAB. 3.2: Rayon quadratique du système protons (fm) (colonne 6), la constante d'appariement des protons (Mev) (colonne 5) et la demi largeur du gap des protons (Mev) (colonne 4, (Ref. [35]))

<b>Noyau</b>	$Z$	$N$	$Daltpa_p$	$G_p$	$r_p$
$^{33}\text{S}$	16	17	1.316	0.1794	3.194
$^{35}\text{S}$	16	19	1.025	0.1751	3.166
$^{35}\text{Cl}$	17	18	1.928	0.1793	3.330
$^{37}\text{Cl}$	17	20	1.535	0.1730	3.336
$^{37}\text{Ar}$	18	19	1.064	0.1665	3.262
$^{39}\text{Ar}$	18	21	1.019	0.1663	3.261
$^{39}\text{K}$	19	20	1.874	0.1703	3.407
suite page suivante					

Tab. 3.2 –( suite )

Noyau	$Z$	$N$	$Dal\text{t}t\text{a}_p$	$G_p$	$r_p$
$^{41}\text{K}$	19	22	1.875	0.1684	3.454
$^{41}\text{Ca}$	20	21	1.345	0.1620	3.380
$^{43}\text{Ca}$	23	26	1.397	0.1636	3.382
$^{43}\text{Sc}$	21	22	2.474	0.1691	3.556
$^{45}\text{Sc}$	21	24	2.170	0.1646	3.581
$^{45}\text{Ti}$	22	23	0.930	0.1487	3.461
$^{47}\text{Ti}$	22	25	1.349	0.1536	3.533
$^{47}\text{V}$	23	24	2.131	0.1589	3.620
$^{49}\text{V}$	23	26	1.832	0.1571	3.587
$^{49}\text{Cr}$	24	25	1.089	0.1461	3.602
$^{51}\text{Cr}$	24	27	1.061	0.1462	3.578
$^{51}\text{Mn}$	25	26	1.789	0.1525	3.690
$^{53}\text{Mn}$	25	28	1.540	0.1508	3.655
$^{53}\text{Fe}$	26	27	0.949	0.1390	3.650
$^{55}\text{Fe}$	26	29	1.232	0.1424	3.660
$^{55}\text{Co}$	27	28	1.807	0.1451	3.740
$^{57}\text{Co}$	27	30	1.650	0.1457	3.741
$^{57}\text{Ni}$	28	29	1.300	0.1375	3.745
$^{59}\text{Ni}$	28	31	1.336	0.1387	3.753
$^{59}\text{Cu}$	29	30	1.603	0.1400	3.804
$^{61}\text{Cu}$	29	32	1.468	0.1399	3.802
$^{61}\text{Zn}$	30	31	0.595	0.1186	3.798
$^{63}\text{Zn}$	30	33	0.920	0.1269	3.815
$^{63}\text{Ga}$	31	32	1.649	0.1315	3.894
$^{65}\text{Ga}$	31	34	1.543	0.1310	3.892
suite page suivante					

Tab. 3.2 –( suite )

Noyau	$Z$	$N$	$Dal\text{t}t\text{a}_p$	$G_p$	$r_p$
$^{65}\text{Ge}$	32	33	0.567	0.1114	3.883
$^{67}\text{Ge}$	32	35	0.966	0.1195	3.899
$^{67}\text{As}$	33	34	1.769	0.1271	3.984
$^{69}\text{As}$	33	36	1.714	0.1274	3.984
$^{69}\text{Se}$	34	35	0.583	0.1085	3.962
$^{71}\text{Se}$	34	37	1.069	0.1174	3.979
$^{71}\text{Br}$	35	36	1.918	0.1250	4.067
$^{73}\text{Br}$	35	38	1.743	0.1239	4.056
$^{73}\text{Kr}$	36	37	0.942	0.1121	4.0441
$^{75}\text{Kr}$	36	39	1.061	0.1167	4.289
$^{75}\text{Rb}$	37	38	1.061	0.1154	4.303
$^{77}\text{Rb}$	37	40	1.520	0.1205	4.322
$^{77}\text{Sr}$	38	39	0.875	0.1110	4.350
$^{79}\text{Sr}$	38	41	1.186	0.1162	4.325
$^{79}\text{Y}$	39	40	1.472	0.1180	4.356
$^{81}\text{Y}$	39	42	1.517	0.1180	4.409
$^{81}\text{Zr}$	40	41	1.225	0.1143	4.412
$^{83}\text{Zr}$	40	43	1.133	0.1083	4.153
$^{83}\text{Mb}$	41	42	1.581	0.1119	4.206
$^{85}\text{Mb}$	41	44	1.227	0.1087	4.185
$^{85}\text{Mo}$	42	43	0.981	0.1035	4.205
$^{87}\text{Mo}$	42	45	1.156	0.1061	4.217
$^{87}\text{Tc}$	43	44	1.397	0.1071	4.258
$^{89}\text{Tc}$	43	46	1.774	0.1117	4.284
$^{89}\text{Ru}$	44	45	1.086	0.1010	4.276
suite page suivante					

Tab. 3.2 –( suite )

Noyau	$Z$	$N$	$Dal\text{t}t\text{a}_p$	$G_p$	$r_p$
$^{91}\text{Ru}$	44	47	0.988	0.0993	4.829
$^{91}\text{Rh}$	45	46	1.488	0.1068	4.331
$^{93}\text{Rh}$	45	48	1.488	0.1068	4.331
$^{93}\text{Pd}$	46	47	1.091	0.1010	4.345
$^{95}\text{Pd}$	46	49	1.091	0.1010	4.345
$^{95}\text{Ag}$	47	48	1.316	0.1052	4.386
$^{97}\text{Ag}$	47	50	1.316	0.1052	4.386
$^{97}\text{Cd}$	48	49	1.052	0.1035	4.401
$^{99}\text{Cd}$	48	51	1.052	0.1035	4.401
$^{99}\text{In}$	49	50	1.652	0.1083	4.466
$^{101}\text{In}$	49	52	1.652	0.1083	4.466

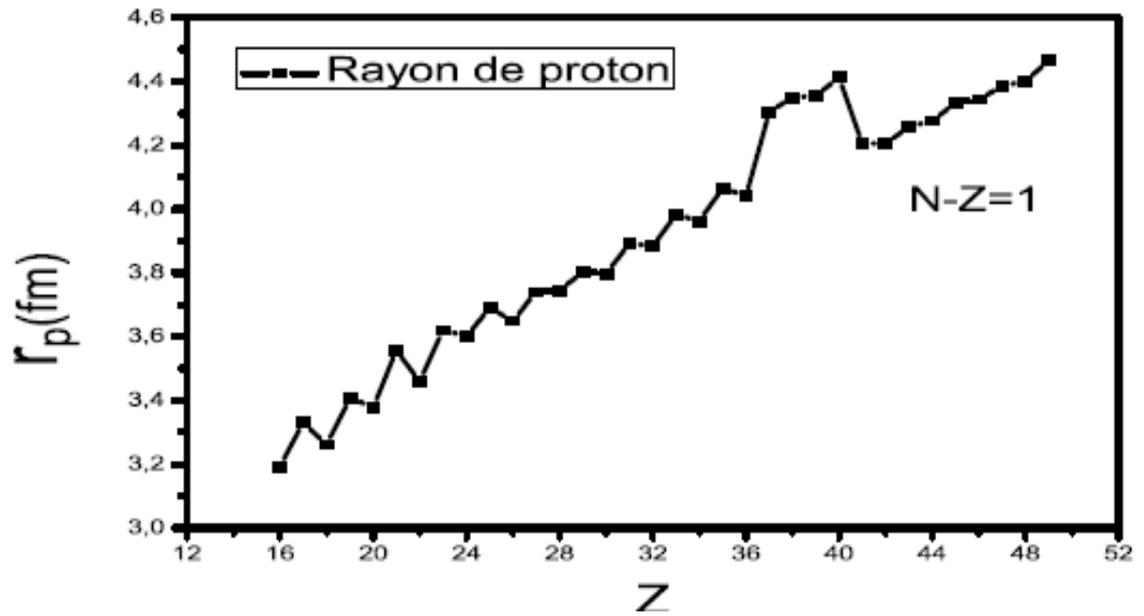


FIG. 3-2: Evolution du rayon de proton en fonction du nombre de particules du système protons pour les noyaux  $(N - Z) = 1$ .

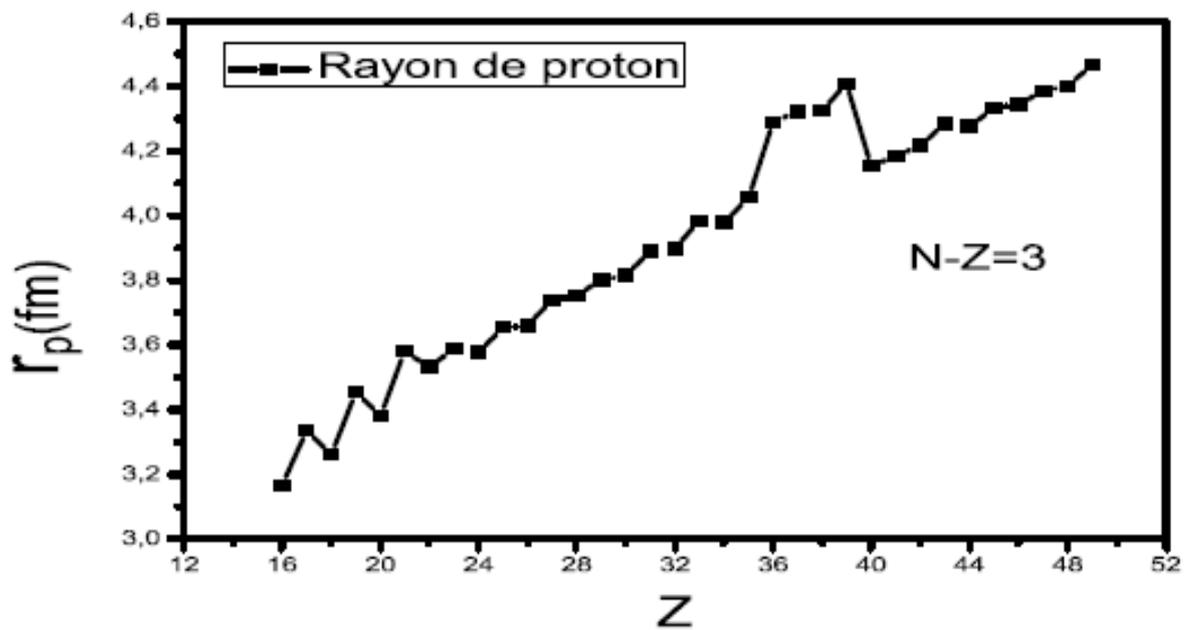


FIG. 3-3: Evolution du rayon de proton en fonction du nombre de particules du système protons pour les noyaux  $(N - Z) = 3$ .

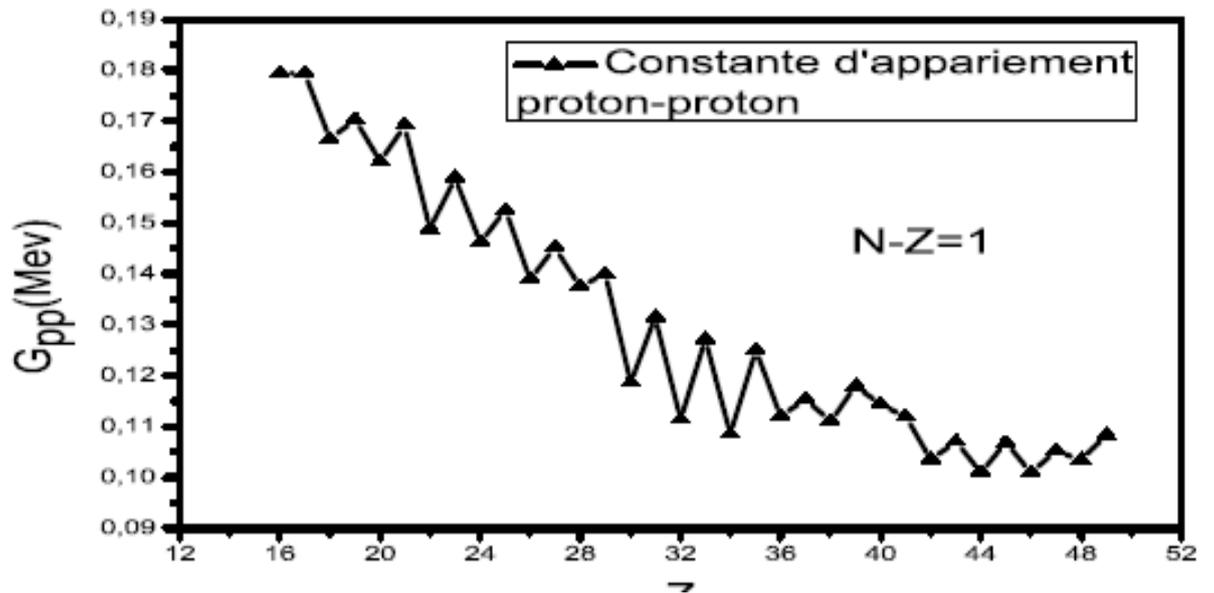


FIG. 3-4: Variation de la constante d'appariement proton-proton en fonction de la charge du noyau pour  $(N - Z) = 1$ .

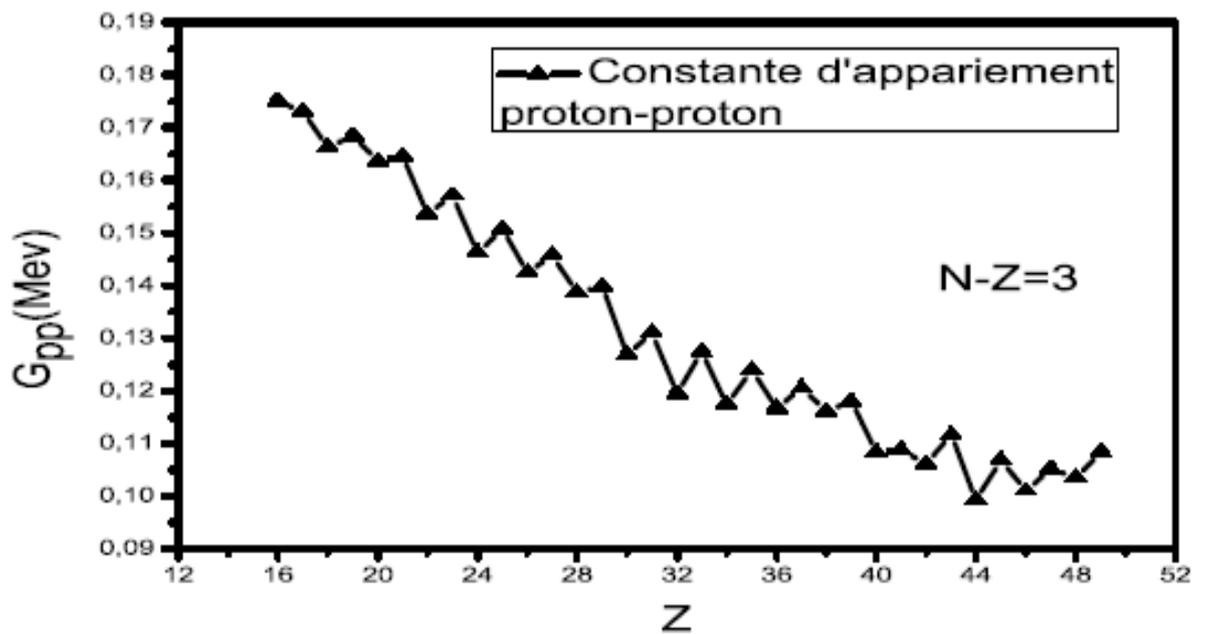


FIG. 3-5: Variation de la constante d'appariement proton-proton en fonction de la charge du noyau pour  $(N - Z) = 3$ .

# Conclusion

Au cours de ce mémoire, nous avons calculé le rayon quadratique du système protons dans le cas de l'appariement nucléaire entre particules identiques, pour des noyaux de masse impaire, (pair-impair) riches en protons. Dans un premier temps, nous avons étudié la stabilité des noyaux atomiques dont l'énergie de liaison, la radioactivité  $\alpha$  et  $\beta$  ( $\beta^+$ ,  $\beta^-$ ) et la densité nucléaire. Par la suite, nous avons étudié les modèles nucléaires, le modèle de la goutte liquide et le modèle en couche à particules indépendantes pour comprendre la description du comportement des systèmes à plusieurs particules (protons et neutrons) et étudier les propriétés des nucléons dans le noyau, nous présenterons au début de ce travail le modèle de la goutte liquide qui est un modèle macroscopique, permet de prévoir les masses atomiques avec une assez bonne précision. Le modèle en couche à particules indépendantes est un modèle microscopique a pour objectif de décrire la structure des noyaux connus ainsi que de prédire celle de noyaux non encore étudiés, chaque nucléon défini dans un état donné. Donc, il a été introduit pour expliquer les régularités des propriétés nucléaires associées aux nombres magiques.

Dans un second temps, nous avons défini les processus nucléaires du formalisme d'isospin pour traiter l'appariement nucléaire, entre particules identiques, neutron-neutron et proton-proton. Pour cela, nous avons donné la forme la plus générale de l'hamiltonien en second quantification qui décrit l'énergie cinétique ainsi que l'énergie potentielle entre les particules neutrons et protons. Ce hamiltonien a été linéarisé approximativement par le théorème de Wick. L'utilisation de la transformation généralisée de Bogoliubov-Valatin dans ce dernier, nous a permis de trouver les équations de gap dont la demi largeur du gap, la constante d'appariement ainsi que l'opérateur nombre de particules et les ampli-

tudes de probabilités d'occupation et d'inoccupation de particules. Nous avons écrit la fonction d'onde ou état fondamentale d'un système ayant un nombre pair de particules. Ceci nous a permis décrire l'état excité à une quasiparticule qui représente la fonction d'onde de particules pair-impairs, où un nucléon du système est bloqué sur un niveau  $\nu$  choisi comme étant le niveau le plus élevé de niveau de Fermi des niveaux d'énergie du modèle à particules indépendantes. Par la suite nous avons établie l'expression du rayon quadratique du système protons pour un nombre pair-impairs de particules dans le cas de l'appariement entre particules identiques.

Dans une dernière étape, nous avons écrit un programme numérique qui nous a permis d'utiliser le modèle schématique de Richardson pour la validité de nos équations, et le modèle réaliste de Woods-Saxon pour calculer le rayon de protons des noyaux considérés. Dans le cadre du modèle Schématique de Richardson, nous avons évalué les probabilités d'occupation et d'inoccupation de particules des niveaux, 16 niveaux. Nous avons constaté que ces grandeurs physiques donnent des résultats acceptables physiquement  $\lambda = 8.5$ ,  $\Omega = 15$ ,  $\Delta = 0.475$ . Le fait d'avoir obtenu des résultats numériques acceptable physiquement nous a permis de conclure à la validité de nos équations. Par ailleurs, les rayons quadratiques des systèmes protons nucléaire ont été évalués pour les différents noyaux considérés dans le cas de l'appariement entre particules identiques et dans le cadre du modèle réaliste en utilisant les énergies à particules indépendantes d'un champ moyen de Woods-Saxon. Nous avons ensuite évalué l'effet d'appariement nucléaire en traçant les courbes des rayons quadratiques des systèmes protons pour des noyaux pair-impairs tels que  $N - Z = 1$  et  $3$ , et  $Z$  compris entre  $16$  et  $49$ . On constate à travers les résultats qu'on a obtenus et les graphes tracés que la taille du noyau est agrandie avec l'augmentation des nucléons dans le noyau.

# Bibliographie

- [1] C. F. von Weizsacker. *Z. Phys*, 96 :431, 1935.
- [2] P. Ring and P. Schuck, *The Nuclear Many-Body problem*, Springer, New York (1980).
- [3] B.Povh, K.Rith, C.Scholz and F.Zetsche, *Partiels and nuclie*, Springer. p 21, 254, 255, 256 (2006).
- [4] G. A. Lalazissis, D. Vretenar and P. Ring, *Phys. Rev. C*60, 051302 (1999) 051302.
- [5] S.G. Nilsson, *Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selesk.* 29 (1955) 16.
- [6] R.D Woods and D.S. Saxon, *Phys. Rev.* 95, 577(1954).
- [7] R. W. Richardson and N. Sherman, *Nucl. Phys.* 52, 221 (1964).
- [8] R. W. Richardson, *J. Math. Phys.* 18, 1802 (1977).
- [9] D.J acquet and M. Morjean, *la stabilité des éléments super lourd sondé par des mesures de temps de fission.* 63, 155 (2009).
- [10] C. Mancuso *Thèse de doctorat, Université de Lyon* (2016).
- [11] D. Boilly, *Introduction à la physique nucléaire, cours* p 06 .2016.
- [12] H. Driande, M.B and M.B, *Introduction à la physique nucléaire*, Masson.p5, 6, 244(1972).
- [13] J. L. Basdevant, J.Riche and M. Spiro, *Fundamentals in Nuclear physics*, springer.p 12.74 (2004).
- [14] B.R.Martin, *Nuclear and particle physics*, Wiley. p 226, 227 (2006).
- [15] Yvan. Gratchev *Thèse de doctorat, Université Grenoble Alpes* (2017).

- 
- [16] D. Buskulic (base sur un cours de D. Decamp), 14 avril 2013 Notes de cours de PHYS 801 Introduction a la Physique Nucléaire.
- [17] A. Franc, J. Jolie and V. Isacker, Symmetries in atomic nuclei, springer. p 8, 9, 10,29,30 (2009).
- [18] N. H. Allal, M. Fellah, M. R. Oudih and N. Benhamouda. Eur. Phys. J. A27, s01,301 (2006).
- [19] N. H. Allal, M. Fellah, N. Benhamouda and M.R. Oudih, Phys. Rev. C77, 054310(2008).
- [20] M. Douici, N.H. Allal, M. Fellah and S. Kerrouchi , Int. J. Mod. Phys. E19,1383(2010).
- [21] M. Douici, N.H. Allal, M. Fellah, N. Benhamouda and M.R. Oudih, Int. J. Mod.Phys. E21, 1250046 (2012).
- [22] S. G. Nilsson and I. Ragnarsson, Shapes and Shells in Nuclear Structure, Cambridge University Press (1995).
- [23] S. T. Belyaev, K. Dan and V. Selsk, Mat. Fys. Medd. 11, 31 (1959).
- [24] O. Civitarese, M. Reboiro and P. Vogel, Phys. Rev. C56 (1997) 1840.
- [25] M. Douici, N.H. Allal, M. Fellah, N. Benhamouda and M.R. Oudih, AIP Conf. Proc.1491, 133 (2012).
- [26] M. Douici, N.H. Allal, M. Fellah, M.R. Oudih, Int. J. Mod.Phys.20 (2016).
- [27] O. Civitarese and M. Reboiro, Phys. Rev. C56 (1997) 1179.
- [28] A. Das and T. Ferbel, I n t r o d u c t i o n to Nuclear and Particle Physics 2004,2005.
- [29] N. H. Allal, M. Fellah, M, M.R.Oudih and Y.Benbouzid .Chinese physics C Vol 42, Nov .4 (2018) 044103
- [30] A. Berbiche, Thèse de Magister, USTHB (2011).
- [31] N.H. Allal, M. Fellah, M. Douici and M.R. Oudih, Int. J. Mod. Phys. E 25, 1650108 (2016).

- 
- [32] M. Fellah, N.H. Allal, M. Douici and M.R. Oudih, AIP Conf. Proc. 1809, 020015 (2017).
- [33] F. Simkovic, Ch. C. Moustakidis, L. Paceaescu, and A. Faessler, Phys. Rev. **C68**, 054319 (2003).
- [34] N. H. Allal and M. Fellah, Phys. Rev. **C50**, 1404 (1994).
- [35] F. Hammache Thèse de Magister, USTHB (2010).