République Algérienne Démocratique et populaire

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Université Djilali Bounaama – Khemis Miliana

Faculté des Sciences et de la Technologie

Département des sciences de la matière

Mémoire de fin d'étude pour l'obtention du diplôme

De Master en physique

Spécialité : physique théorique

Les états cohérents et comprimés de l'oscillateur harmonique

Etudiantes

Kadri Halima

Bouhacida khayra

Composition du jury

Examinateurs 1 M. M. Yezli

Examinateurs 2 : Melle. H. Ould Arab

Encadreur : Mme. A. Mazouz

Année Universitaire : 2020 – 2021

Dédicace

Je dédie ce travail à mon cher père, "Abdelkader "qui a passé sa vie à nous élever « Rabi yarhmou »

Et à la source de tendresse, ma mère "Souad", Pour tous ces efforts considérables qui m'ont amené ici

À mes frères et sœurs « Hanan », « El Hajj », « Hamida » et « Abdel Karim » Pour leurs soutient tout au long de ma période d'étude, sans oublier les enfants de la famille, "Yonss El yasaa", "Hodeifa", "Walaa"

Ainsi que mes amis "Khaira" "Sarah" "Nafisa" Et tous ceux qui me connaissaient.

A toute ma famille pour son soutien tout au long de mon parcours universitaire.

Halima

Dédicace

Je dédie ce travail à mon très cher père "Abdelkader" pour sa confiance et le sacrifice qu'il fait pour moi afin que je puisse accéder à la connaissance "Rabi Yhafdo "

A ma très chère mère "djamaa" pour sa patience, ces encouragements et les immenses sacrifices qu'elle a fait pour que j'arrive là où je suis maintenant

A mon cher mari « Hamid » pour la confiance, les encouragements et l'intérêt qu'il m'a fournis.

Sachez que sans vous je n'aurai pas pu aller aussi loin.

A mes chers « Amina, Aicha, Abdelkader »

A ma chère sœur et sa petite fille « Fatima et Nihal »

A mes frères « Sofiane, Mustafa, Fayçal, Karima »

A ma belle-sœur « Saada »

A ma tante « Khaira »

A mes Amies « Asma, Abir, Halima, Lamia, Nasrine, Iman » pour leurs appuis et leurs encouragements,

A toute ma famille pour son soutien tout au long de mon parcours universitaire.

Khaira

Remerciement

Nous remercions tout d'abord dieu de nous aider et nous avoir bénis avec la bénédiction du savoir et la connaissance

Puis Nous remercions notre promotrice Madame "Mazouz " pour les efforts considérables qu'elle a consentie afin de nous aider à finir ce travail .

Nous exprimons nos sincères remerciements à : Monsieur " Yezli" et Madame "Oueld Arab" qui ont acceptés d'expertiser ce modeste travail.

Nous remercions aussi nos enseignants du Master Physique Théorique de la faculté des sciences et Technologies

Merci beaucoup

ملخص:

تلعب الحالات المتماسكة والمضغوطة التي هي تركيبات خطية لجميع الحالات الثابتة دورًا كبيرًا في ميكانيكا الكم، ويمكن اعتبارها روابط مع الميكانيكا الكلاسيكية.

كما درسنا الحالات المتماسكة في إطارات أكثر عمومية لنظرية التشوه وبالتالي،سيتم إنشاء الحالات المتماسكة للهزاز التوافقي الكمومي باستخدام الطريقة المستندة إلى المشغل مع إيلاء اهتمام خاص للمسارات والتشتت من أجل تأكيد شبه الكلاسيكية لهذه الحالات.

Résumé :

Les états cohérents et comprimés qui sont des superpositions linéaires de tous les états stationnaires, jouent un grand rôle dans la mécanique quantique, et peuvent être considérés comme le lien avec la mécanique classique. Nous étudierons les états cohérents dans un cadre Plus général ainsi que les états comprimés de l'oscillateur harmonique quantique qui seront construits en utilisant la méthode basée sur les opérateurs en portant une attention particulière aux trajectoires et aux dispersions afin de confirmer la quasi- classiciste de ces états.

Abstract :

Cohérent and compressed states, which are linear superpositions of all stationary states, play alarge role in quantum mechanics, and can be considered as links wit classical mechanics. We studied the coherent states in a more general framework. So, coherent and squeezed states ofthe quantum harmonic oscillator will be constructed using the method Operator-based with particular attention to trajectories and dispersions in order to confirm the quasi-classicist oft hese states.

Tableau de matières

Introduction

Introduction

La mécanique quantique est la branche de la physique théorique qui étudie et décrit les phénomènes fondamentaux dans la système physique, née au début du XXème siècle suite à de nombreux questionnements. Face à un certain nombre de phénomènes physiques qui n'ont pas été expliqué par la théorie classique, elle n'a pas été créé par une seule personne mais par beaucoup de physiciens tel Albert Einstein qui a eu un grand rôle dans sa création, mais sa naissance s'étale sur plusieurs décennies. Une fois les bases de la mécanique quantique mises en place, plusieurs physiciens repenchèrent sur la question du lien entre cette nouvelle théorie et celle de la mécanique classique. C'est dans ce contexte qu'apparurent les états cohérents introduits par Schrödinger en 1926[1],il les décrivit comme des états quantiques de l'oscillateur harmonique ayant la propriété de se comporter de façon semblable aux états classiques du modèle équivalent, en effet les états cohérents ont la propriété de minimiser l'incertitude de Heisenberg.

C'est dans les années 60 qu'ils sont redevenus populaires auprès d'autres physiciens tels que Glauber et Klauder. Le premier construisit les états cohérents comme des états propres de l'opérateur d'annihilation de l'oscillateur harmonique [2 ,3], alors que le deuxième les analysa sous un coté plus algébrique [4,5]. Les états propres de l'opérateur d'annihilation de l'oscillateur harmonique ont pour propriété principale d'être des états d'extension minimale, c'est- à dire que le produit des écarts quadratiques moyens de la position et de l'impulsion est minimum pour ces états cohérents. Les états comprimés proviennent principalement des états cohérents et sont des états quantique sintriqués [6,8], ils sont les ingrédients fondamentaux de l'étude de la théorie de l'information quantique. En effet, les états cohérents de l'oscillateur harmonique se sont révélés particulièrement bien adaptés à la description quantique d'un champ électromagnétique classique, et sont utilisés dans l'étude de l'émission laser.Il est donc utile de chercher à construire les états cohérents et comprimés d'un système afin d'obtenir des représentations plus réalistes

Ce présent travail s'articule autour de trois chapitres, le premier chapitre se concentre sur l'oscillateur harmonique quantique, sa construction via son parent classique en introduisant la notation d'opérateur pour les variables coordonnée et moment. Il permettra d'introduire les notations donton aura besoin par la suite comme les valeurs moyennes et les dispersions

Le second chapitre abordera les bases des états cohérents et comprimés pour les systèmes quantiques, bases nécessaires à leur utilisation par la suite.

Enfin le dernier chapitre sera consacré à la construction des états cohérents et comprimés pour l'oscillateur harmonique à une dimension et l'étude de leurs propriétés fondamentalesen étudiant leur localisation au niveau de la position, leurs dispersions et leurs trajectoires dans l'espace des phases.

Chapitre I

L’oscillateur harmonique

I L’oscillateur harmonique

I.1**Introduction :**

L’oscillateur harmonique est un concept permettant de modéliser le comportement de nombreux systèmes physiques. Le concept d’oscillateur harmonique joue un rôle majeur dans de nombreuses applications de la physique, nous nous sommes concentrés dans ce chapitre sur l’étude de l’oscillateur harmonique, du passage de sa version classique à sa version quantique à travers les opérateurs de création et d’annihilation et en mettant en avant le calcul des valeurs moyennes et des dispersions [7]

I.2 Définition de l’oscillateur harmonique classique et quantique :

Classiquement, l'oscillateur harmonique linéaire est un point matériel de masse **m,** soumis à une force de rappel proportionnelle à la distance qui le sépare de l'origine avec $F = kx$ où k est une constante positive.

L'équation de mouvement s'obtient :

$$\frac{d^2x}{d^2t}+\omega^2 x = 0 \qquad (1.1)$$

avec $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, ω : la pulsation

La solution de cette équation :

$$x = x_M \cos(\omega t - \varphi) \qquad (1\ .2)$$

φetx_M sont déterminées par les conditions initiales du mouvement, la particule est donc animée d'un mouvement oscillatoire sinusoïdale autour du point 0 et de l'amplitude x_M et pulsation ω.

L’énergie à chaque point :

$$F = -grad(v) \qquad (1\ .3)$$

E t $v(x) = \left(\frac{1}{2}\right) m\omega^2 x^2$ (1 .4)

L 'énergie totale est :

$$E = T + V = \frac{{P_x}^2}{2m\omega} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \qquad (1\ .5)$$

En reportant dans (1.2), la solution (1.5), on trouve $\Rightarrow E = \frac{1}{2} m\omega^2 {x_M}^2$ (1 .6)

Eest donc indépendante du temps (c’est une propriété générale des systèmes conservatifs) et elle peut prendre n’importe quelles valeurs positives ou nulles, puisque x_M peut-être à priori quelconque.

I.3 Le lagrangien :

Lagrange a montré que toutes les équations différentielles du mouvement du second ordre par rapport au temps que l'on connaissait en mécanique pouvaient se mettre sous la forme :

$\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{q}}\right) - \frac{dL}{dq} = 0$ (1.7)

Avec

$L = T - V$ (1.8)

Alors : $L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - v(q)$ (1.9)

q : est une coordonnée généralisée

Le moment conjugué s'appelle quantité de mouvement associée à l'impulsion généralisée

$$p = \frac{dL}{d\dot{q}} = m\dot{q}$$

Alors : $p = m\dot{q} \Rightarrow \dot{q} = \frac{p}{m}$ (1.10)

L'Hamiltonien s'écrire comme suit :

$H = \sum \dot{q}\, p - l(q, \dot{q}, t)$

$H = \dot{q}p - l(q, \dot{q}, t)$

$$= \frac{P}{m}P - \left(\frac{1}{2}m\dot{q}^2 - V(q)\right)$$

$$= \frac{P^2}{m} - \frac{1}{2}m\dot{q}^2 + V(q)$$

$$= \frac{2P^2}{2m} - \frac{1}{2}m\frac{P^{\ 2}}{m^2} + V(q)$$

$$= \frac{2P^2}{2m} - \frac{1}{2}\frac{P^{\ 2}}{m} + V(q)$$

Alors : $H = \frac{P^2}{2m} + V(q)$

I.4 Etats propre de l'oscillateur harmonique :

Dans cette section nous allons résoudre le problème de l'oscillateur harmonique c'est à dire construire les états propres del'Hamiltonien sans avoir recours à l'équation de Schrödinger indépendante de temps. Nous utiliserons une méthode purement algébrique, basée uniquement sur les relations de commutation de certains opérateurs.

I.4.1 Opérateur échelle

L'Hamiltonien de l'oscillateur harmonique est décrit par :

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m w^2 x^2$$

En mécanique quantique on trouve qu'il est utile d'introduire la variable complexe suivante :

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2}}\left(\hat{x} + i\frac{\hat{p}}{m\omega}\right) \quad (1.11)$$

$$a^+ = \sqrt{\frac{m\omega}{2}}\left(\hat{x} - i\frac{\hat{p}}{m\omega}\right)$$

$\hat{x}$et$\hat{p}$ Sont des opérateurs non hermitiques

Dont les crochets de poisson mutuels et avec **H** sont :

$$\{a, a^+\} = -i \quad (1.12)$$

$$\{a, H\} = -i\omega a \quad (1.13)$$

Calcul du commutateur $[a, a^+]$:

$$[a, a^+] = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}X + i\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)P\right\}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}X - i\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)P\right\} - \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}X - i\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)P\right\}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}X + i\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)P\right\}$$

$= \frac{1}{2}(X+iP) - \frac{1}{2}(X-iP) - \frac{1}{2}(X-iP)(X+iP) = \frac{1}{2}\{(X+iP)(X-iP) - (X-iP)(X+iP)\}$

$= \frac{1}{2}\{(X^2 - iXP + iXP + P^2 - X^2 - iXP + iPX - P^2)\} = \{-iXP - iXP + iPX + iPX\}$

$= \frac{1}{2}\{2iPX - 2iXP\} = \frac{1}{2}2i\{PX - XP\} = i[P,X] = -i^2 = 1$

$$[a, a^+] = 1 \quad (1.14)$$

En fonction de ces opérateurs, l'Hamiltonien s'exprime comme suit :

$$H = \frac{\hbar\omega}{2}(aa^+ + a^+a) = \hbar\omega\left(a^+a + \frac{1}{2}\right) \quad (1.15)$$

Et : N=a^+a

N est appelé opérateur du nombre

En fonction duquel le Hamiltonien est simplement

$H = \hbar\omega\left(N + \frac{1}{2}\right)$ (1.16)

Enfin, les commutateurs de **N** avec les opérateurs$\boldsymbol{a}\ et\ \ \boldsymbol{a}^{+}$sont :

$[N, a] = [a^{+}a, a] = [a^{+}, a]a = -a$ (1.17)

$[N, a^{+}] = [a^{+}a, a^{+}] = a^{+}[a, a^{+}] = a^{+}$ (1.18)

$$[N, a] = -a[N, a^{+}] = a^{+}$$

I.4.2Etats propres :

Théorème

Les valeur propre de l'opérateur N sont les entiers naturels (n=1,2,3…) et les opérateur a et a^{+}relient les vecteurs propres associés entre eux de la manière suivante :

$a|n >= \sqrt{n}\,|n-1 >$ $\quad a|0 >= 0 \quad a^{+}|n >= \sqrt{n+1}|n+1 >$ (1.19)

$Na\,|n > = aN|n > -a|n > = (n-1)a|n >$ (1.20)

Ce qui démontre que $|n >$est un état propre de N avec la valeur propre n-1

De la même manière on montre que :

$Na^{+}|n > = a^{+}N|n > +a^{+}|n > = (n+1)a^{+}|n >$ 1.21)

Les opérateurs a et a^{+}sont appelés opérateurséchelles car ils permettent d'augmenter ou de diminuer les différents états $|n >$,

N est appelé opérateur du nombre et les valeurs propres sont des entiers naturels.

Puisque $H = \hbar\omega\left(N + \frac{1}{2}\right)$les états propres du Hamiltonien sont ceux de **N** ,et les énergies propres s'écrivent.

$E_n = \left(n + {}^{1}\!/_{2}\right)\hbar\omega$ (1.22)

L'énergie de l'état fondamentale est $E_0 = \left({}^{1}\!/_{2}\right)\hbar\omega$

Notons que classiquement l'énergie minimale de l'oscillateur est nulle (énergie cinétique et potentielle nulles) correspond à une particule au repos située à $x = 0$.

I.4.3opérateur position et impulsion

A partir de la relation (1.11)on peut obtenir les opérateurs$\hat{x}$ et $\hat{P}$ en fonction des opérateurs échelles :

$\hat{x} = \sqrt{\frac{ħ}{2m\omega}}(a + a^{+})\hat{P} = \frac{1}{i}\sqrt{\frac{m\omega ħ}{2}}(a - a^{+})$ (1.23)

On remarque que ces relations combinées aux relations (1.19), nous permettent d'obtenir les éléments de matrice suivants pour $\hat{x}$ et $\hat{p}$

$$\langle n+1|\hat{x}|n\rangle = \langle n|\hat{x}|n+1\rangle^{*} = \sqrt{\frac{(n+1)ħ}{2m\omega}} = l\sqrt{\frac{n+1}{2}} \quad (1.24)$$

$$\langle n+1|\hat{p}|n\rangle = \langle n|\hat{p}|n+1\rangle^{*} = -\frac{1}{i}\sqrt{\frac{(n+1)m\omega ħ}{2}} = im\omega l\sqrt{\frac{n+1}{2}}$$

avec: $l = \sqrt{\frac{ħ}{m\omega}}$est la longueur caractéristique

I.4.4 Fonction d'onde

Les opérateurs échelle prennent la forme

$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2ħ}}\left(x + \frac{ħ}{m\omega}\frac{d}{dx}\right) a^{+} = \sqrt{\frac{m\omega}{2ħ}}\left(x - \frac{ħ}{m\omega}\frac{d}{dx}\right)$ (1.25)

à l'aide de la variable sans unités défini $u = \frac{x}{l}$ on peut récrire ces opérateurs ainsi :

$a = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(u + \frac{d}{du}\right) a^{+} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(u - \frac{d}{du}\right)$ (1.26)

Et donc la relation $a|0>= 0$ définissant l'état fondamentale devient

$u\Psi_0 + \frac{d\Psi_0}{du} = 0$ (1.27)

Avec $\Psi_0(u)$est la fonction d'onde associée, en dérivant par apport a u^2on trouve :

$\frac{d\Psi_0}{d(u^2)} = \frac{d\Psi_0}{du}\frac{du}{d(u^2)} = \frac{1}{2u}\frac{d\Psi_0}{du} = -\frac{1}{2}\Psi_0$ (1.28)

Où on a (1.28) substituée la dernière égalité

La solution à cette équation est : $\Psi_0(u) = Ce^{-u^2/2}$, soit une gaussienne de Lagrangien $\boldsymbol{l}$ en fonction de$\boldsymbol{x}$en déterminéela constant par la condition de normalisée avec fonction d'onde de l'état fondamental est

$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \left|\Psi_0\left(x/l\right)\right|^2 = 1$ (1.29)

Une fois normalisée, la fonction d'onde de l'état fondamental est :

$\Psi_0(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi l}} e^{-\frac{u^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi l}} e^{-\frac{x^2}{2l^2}}$ (1.30)

Les fonction d’onde plus élevées sont obtenues en appliquant a^+àrépétition ,ce qui donne

$$\Psi_n(u) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \left(u - \frac{d}{du}\right)^n \Psi_0(u)$$

I.5 L’opérateur d'annihilation et création

Le système quantique défini par l’Hamiltonien H est un spectre borné et discret tel que H≥0.

Sur une base d'état propre$|\varphi_n>$associée à H est supposée non dégénérée et vérifiant les relations de fermeture et d’orthogonalité suivant :

Telle que : $\langle \varphi_n | \varphi_m \rangle = \delta_{n,m}$ (1.31)

$\sum_{n=0}^{\infty} |\varphi_n >< \varphi_n| = 1$ (1.32)

Avec l’équation au valeur propre :

$H|\varphi_n> E_n|\varphi_n>$ (1.33)

E_n : représente l'énergie de système de valeur positive E_n≥0

En supposant que l'énergie de l'état minimale est nulleE_n=0

Pour un système de l'état fondamental $\varphi_n(x)$et de potentiel V(x) dans lequel est plongé le système sont reliés par la relation :

$V(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{\varphi_0''(x)}{\varphi_0(x)}\right)$ (1.34)

On peut résoudre cette équation à partir de l'équation de Schrödinger indépendant du temps à l'état fondamentale.

$H_{\varphi_0(x)} = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + V(x)\varphi_0(x)$ (1.35)

La forme factorisée de l Hamiltonien H est :

$H = A^+ A$ (1.36)

La forme d’opérateur A^+et A sont :

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{d}{dx} + \omega(x)$$

$A^+ = -\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{d}{dx} + \omega(x)$ (1.37)

$\omega(x)$Est le super potentiel de l'équation de **Riccati** suivant :

$V(x) = \frac{1}{2}\left(\omega^2(x) - \omega'(x)\right)$ (1.38)

Pour définir les opérateurs d'échelles pour le système quantique, on écrit l'Hamiltonien H en considérant la transformation unitaire est : U(UU⁺=U⁺U=I)[1] .

En utilisant l'opérateur unitaire U introduit ci-dessus, les opérateurs de création et d'annihilation de l'Hamiltonien H s'écrivent comme :

$a = \mathrm{U}^+ A a^+ = A^+ \mathrm{U}$ (1.39)

I.5.1 Opérateur d'annihilation a

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} + i\frac{\hat{p}}{2\hbar m\omega}$$

$$= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\hat{X} + \mathrm{i}\sqrt{\frac{1}{2\hbar m\omega}}\sqrt{\hbar m\omega}\hat{P}$$

$$= \sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2\hbar m\omega}}\hat{X} + i\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2\hbar m\omega}}\hat{P}$$

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{P} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{P}$$

Donc : $a = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{X} + i\hat{P}\right)$ (1.40)

I.5.2 Opérateur de création a^+ :

$$a^+ = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} - i\frac{\hat{p}}{2\hbar m\omega}$$

$$a^+ = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\hat{X} - i\frac{1}{\sqrt{2m\omega}}\sqrt{\hbar m\omega}\hat{P}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{X} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\hat{P}$$

Donc : $a^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{X} - i\hat{P}\right)$ (1.41)

1.6 L'action de l'opérateur a et a^+ sur l'état propre |n>

1.6.1 L'action de a sur l'état |n>

On pose : $a|\mathrm{n}> = \alpha|\mathrm{n}-1>$ (1.42)

Le conjugué de$a$ est a^+: $< n|a^+ = \alpha^* < n-1|$ (1.43)

En combinent ces deux équations on aura :

$\langle n|a^+a|n\rangle = \alpha^*\alpha\langle n-1|n-1\rangle = |\alpha^2|$ $\quad N = a^+a$

Donc :$\langle n|N|n\rangle = |\alpha^2|$ (1.44)

Et $< n$ -1|| n -1>=1

Avec : $N|n>= n|n>$

$$\langle n|N|n\rangle = \langle n|n|n\rangle = |\alpha|^2 \mapsto \quad \alpha = \sqrt{n}$$

Donc : $a|n>= \alpha|\, n-1>$

$a|n>= \sqrt{n}|\, n-1>$ (1.45)

1.6.2 L'action de a^+ sur l'état $|n>$

On pose : $a^+|n>= \beta|n+1>$ (1.46)

Le conjugué de $a^+|n>$ est :

$< n|a = \beta^* < n+1|$ (1.47)

En combinent ces deux équations on aura :$\langle n|aa^+|n\rangle = \beta^*\beta\langle n+1|n+1\rangle = |\beta|^2$

$$[a,a^+] = aa^+ - a^+a = 1$$

$$a^+a = N+1$$

Donc : $\langle n|aa^+|n\rangle = |\beta|^2$ $\langle n|(N+1)|n\rangle = |\beta|^2$ (1.48)

$(n+1)\langle n|n\rangle = |\beta|^2$ $\quad \beta = \sqrt{n+1}$ (1.49)

Donc : $a^+\big|n>= \sqrt{n+1}\big|n+1>$ (1.50)

1.6.3 Calcul de a^+a :

$$a^+a = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}X - i\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)P\right\}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}X + i\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)P\right\}$$

Avec $[X, P] = i$

$$a^{+}\,a = \frac{1}{2}\{X^2 + P^2 - 1\} \quad , a^{+}\,a = H - \frac{1}{2}$$

Donc $H = N + \frac{1}{2}$ (1.51)

d'un autre couté : $\widehat{H}$=h ω H=h ω (N+(1/2)) (1.52)

I.7 Calcul de la valeur moyenne et dispersion de x et p :

I.7.1 Calcul de valeur moyenne de <x> :

$$\langle x\rangle_{|n>} = \langle n|x|n\rangle = \left\langle n\left|\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a^{+} + a)\right|n\right\rangle$$

$$= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\langle n|(a^{+} + a)|n\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\sqrt{n+1}\delta_{n,n+1} + \sqrt{n}\delta_{n,n-1}\right) = 0$$

Donc :$\langle x\rangle_{|n>} = 0$ (1.53)

Avec$\delta_{n,n+1}$=0 et $\delta_{n,n-1}$=0

1.7.2 Calcul de valeur moyenne de <x²> :

$$x^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}\left(a^{+2} + a^{+}a + aa^{+} + a^2\right)$$

$$\langle x^2\rangle_{|n>} = \left\langle n\left|\frac{\hbar}{2m\omega}\left(a^{+2} + a^{+}a + aa^{+} + a^2\right)\right|n\right\rangle$$

$\langle x^2\rangle_{|n>} = \frac{\hbar}{2m\omega}(2n+1)$ (1.54)

I.7.3 La disparition Δx :

$$\Delta x = \sqrt{\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2} \quad , \quad \langle x\rangle = 0 \qquad \to \langle x\rangle^2 = 0$$

$$\Delta x = \sqrt{\langle x^2\rangle}$$

$\Delta x^2 = \frac{\hbar}{m\omega}\left(n + \frac{1}{2}\right)$ (1.55)

I.7.4 Calcul de la valeur moyenne de <p> :

$$\langle p\rangle_{|n>} = \langle n|p|n\rangle = \left\langle n\middle| i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}\,(a^{+}-a)\middle| n\right\rangle$$

$$= i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}\langle n|(a^{+}-a)|n\rangle = \sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}\left(\sqrt{n+1}\delta_{n,n+1}-\sqrt{n}\delta_{n,n-1}\right) = 0$$

Avec$\delta_{n,n+1}$ =0 et $\delta_{n,n-1}$=0

Donc :$\langle p\rangle_{|n>} = 0$ (1.56)

I.7.5 Calcul de la valeur moyenne de <p²> :

$$P^2 = -\frac{\hbar m\omega}{2}\left(a^{+2}-a^{+}a-aa^{+}+a^2\right)$$

$$\langle p^2\rangle_{|n>} = \left\langle n\middle| -\frac{\hbar m\omega}{2}\left(a^{+2}-a^{+}a-aa^{+}+a^2\right)\middle| n\right\rangle$$

$\langle p^2\rangle_{|n>}$ $=\hbar m\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)$ (1.57)

I.7.6 Calcul de la dispersion Δp :

$$\Delta p = \sqrt{\langle p^2\rangle - \langle p\rangle^2} \quad , \quad \langle p\rangle = 0 \qquad \rightarrow \langle p\rangle^2 = 0$$

$$\Delta p = \sqrt{\langle p^2\rangle}$$

$\Delta p^2 = \hbar m\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)$ (1.58)

$\Delta M^2 = \Delta x^2 \times \Delta p^2 = \frac{\hbar}{m\omega}\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar m\omega\left(n+\frac{1}{2}\right) = \hbar^2\left(\mathrm{n}+\frac{1}{2}\right)^2$

Alors $\Delta M^2 = \hbar^2\left(\mathrm{n}+\frac{1}{2}\right)^2$ (1.59)

Chapitre II

Les états cohérents et comprimés

II.1 Introduction :

Ce chapitre abordera les bases des états cohérents et comprimés pour les systèmes quantiques, bases nécessaires à leur utilisation lors du chapitre suivant.

II.2 Les états cohérents

II.2.1 Définition de Schrödinger :

Les états cohérents, tels qu'ils ont états trouvés par Schrödinger, sont désignés par |z> dans la présentation de Dirac, Ou : $z = |z|e^{i\emptyset}$est un paramètre complexe.

Ce sont des états pour lesquels les valeurs moyennes sont des solutions sinusoïdales classiques d'un oscillateur harmonique unidimensionnel de masse m et de fréquence ω

$$\langle \boldsymbol{z}|\boldsymbol{X}(\boldsymbol{t})|\boldsymbol{z}\rangle = \boldsymbol{2}l_c|z|\cos(\omega t - \varphi) \qquad (2.1)$$

Les différents symboles existant dans cette définition sont les suivants :

*la longueur caractéristique :$l_c = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}$

*Les états quantiques de l'espace de Hilbert pour un objet qui serait classiquement considéré comme une particule ponctuelle de masse$m$ se déplaçant sur la droite réelle, et soumise à un potentiel harmonique de constante$k = m\omega^2$

Les règle de commutation des opérateurs position et quantité de mouvement est canonique, c'est à dire :

$$[X; P] = i\hbar I_d$$

*L'évolution temporelle de l'opérateur de position est définie par la forme suivante :

$$X(t) = e^{\frac{i}{\hbar}Ht}e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}$$

II.3 Représentation des états quantiques :

Dans la mécanique quantique il y a différentes représentions des états quantiques : *position*ou*impulsion*ou *énergie *ou *moment* et *espace de phase ou *analytique *et de représentation de Fock Bargmann.

II.3.1 Représentation de position :

Dans la représentation de position l'opérateur Xest un opérateur de multiplication agissant dans L'espace de Hilbert Hdesfonctionsd'onde $\Psi(x, t)$comme suit :

$$X\Psi(x, t) = x\Psi(x, t) \qquad (2 .2)$$

$$P\Psi(x, t) = -i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(x, t) \qquad (2 .3)$$

L'équation de Schrödinger sera alors :

$$H\Psi(x, t) = i\hbar\frac{d}{dt}\Psi(x, t)$$

Ou de manière équivalente :

$$\Psi(x,t) = e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}\Psi(x,t_0) \qquad (2.4)$$

Les solutions de l'équation de Schrödinger sont :

$$\Psi(x,t) = e^{-\frac{i}{\hbar}E_n(t-t_0)}\Psi(x,t) \qquad (2.5)$$

Où les valeurs propres d'énergie sont réparties d'une manière égale sur la droite positive :

$$E_n = \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right) \qquad (2.6)$$

$$n = 0,1,2,3 \ldots$$

Pour chaque valeur propre correspond un état propre normalisé Ψ_n

$$H\Psi(x,t) = E_n\Psi(x,t) \qquad (2.7)$$

$$\Psi_n = \sqrt[4]{\frac{1}{2\pi {l_c}^2}}\frac{1}{\sqrt{2^n n!}}e^{-\frac{x^2}{4{l_c}^2}}H_n\frac{x}{\sqrt{2{l_c}^2}} \qquad (2.8)$$

La formule de normalisation :

$$\|\Psi_n\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty}|\Psi_n(x)|^2dx = 1 \qquad (2.9)$$

Et H_n désigne le polynôme d'Hermite de degré n, avec n nœuds.

Avec :

$$\delta_{m,n} = \langle\Psi_m|\Psi_n\rangle \overset{def}{\cong} \int_{-\infty}^{+\infty}\overline{\Psi_m(x)}\Psi_n(x)dx = 1 \qquad (2.10)$$

$$\forall\Psi \in \hbar\!\!\!H\ ,\Psi = \sum_{n\in N} c_n\Psi_n\ ,c_n = \langle\Psi_n|\Psi\rangle$$

Notons que la longueur Caractéristique est l'écarte type de la position dans l'état fondamentale $(n = 0)$est :

$$l_c = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} = \sqrt{\langle\Psi_0|x^2|\Psi_0\rangle}$$

II.3.2 Représentation de l'impulsion :

Dans la Représentation des impulsions c'est au tour de l'opérateur **P** d'être considéré comme opérateur de multiplication sur$\bar{H} = L^2(\mathbb{R})$

$$P\widehat{\Psi}(p,t) = p\widehat{\Psi}(p,t) \qquad (2.11)$$

$$X\widehat{\Psi}(p,t) = -i\hbar\frac{d}{dx}\widehat{\Psi}(p,t) \qquad (2.12)$$

La fonction $\widehat{\Psi}(p,t)$ est la transformée de Fourier de $\Psi(p,t)$a temps fixe

$$\widehat{\Psi}(p,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-i}{\hbar}p_x}\Psi(x,t)dx \qquad (2\ .13)$$

$$\Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-i}{\hbar}p_x}\widehat{\Psi}(p,t)dp \qquad (2\ .14)$$

$$\widehat{\Psi}_n(p) = \sqrt[4]{\frac{1}{2\pi p_c^2}}\frac{1}{\sqrt{2^n n!}}e^{-\frac{p^2}{4l_c^2}}H_n\left(\frac{p}{\sqrt{2}p_c^2}\right), \qquad (2\ .15)$$

Où l'impulsion caractéristique$p_c = \sqrt{\boldsymbol{\hbar}\frac{\boldsymbol{m\omega}}{\boldsymbol{2}}}$est l'écarttype de l'opérateur de l'impulsion dans l'état fondamentale [7].

II.3.3 Représentation analytique oude Fock-Bargmann :

La représentation de Fock-Bargmann est représentée comme une méthode mathématique pour résoudre Les équations aux valeurs propres dans la théorie des nombres analytique sentiers. À partir de la représentation position, nous appliquerons la transformation intégrale

$f(z)$Ou$\Psi \in H$ dans la Relation suivant :

$$f(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(x,z)\Psi(x)dx \qquad (2\ .16)$$

Z est considéré comme élément du plan complexe ℂ l'un des composants ayant la dimension physique de la racine carrée d'une action, et le noyau de l'intégrale est défini comme la fonction génératrice du polynôme Hermite :

$$K(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\overline{\Psi(x)}\frac{\left(\frac{z}{\sqrt{\hbar}}\right)^n}{\sqrt{n!}} \qquad (2\ .17)$$

$$= \sqrt[4]{\frac{1}{2\pi l_c^2}}exp\left[\frac{1}{\hbar}\left(\frac{z^2}{2} - \left(\sqrt{\frac{m\omega}{2}}x\right)\right)\right]$$

Vu la transformation (2 .16), la transformée de l'état propre $\Psi_n(x)$ est simplement proportionnelle à la nième puissance de z :

$f_n(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(x,z)\Psi_n(x)dx$ (2 .18)

$= \frac{1}{\sqrt{n!}}\left(\frac{z}{\sqrt{\hbar}}\right)^n$

La transformation inverse de (2 .16) est :

$\Psi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{K(x,z)} f(z)\mu_s(dz).$ (2 .19)

$\mu_s(dz)$ est la mesure gaussienne dans le plan.

$$\mu_s(dz) = \frac{1}{\pi\hbar} exp\left(\frac{-|z|^2}{\hbar}\right) dxdy = \frac{i}{2\pi\hbar} exp\left(\frac{-|z|^2}{\hbar}\right) dz \Lambda \overline{dz}$$

Avec :$z = x + iy$

La transformation (2 .16) trace l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$ sur l'espace des fonctions entières analytique de carré sommable :

$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha_n z^n$Converge absolument pour tout $z \in \mathbb{C}$,

C'est -à-dire que son rayon de convergence est infini [7].

Et: $\|f\|_F^2 \overset{def}{\cong} \int |f(z)|^2 \mu_s(dz) < \infty$

L'espace$\mathcal{L}$ est un espace de Fock Brgmann qui est fourni avec un produit scalaire

$\langle f_1|f_2\rangle = \int \overline{f_1(z)} f_2(z)\mu_s(dz) = h\sum_{-\infty}^{+\infty} n!\, \bar{\alpha}_{n1}\alpha_{2n}$ (2 .21)

De (2 .18) une base orthonormée de $\mathcal{L}$ est immédiatement

$f(z) = \frac{1}{\sqrt{n!}}\left(\frac{z}{\sqrt{\hbar}}\right)^n$ (2 .22)

II.3.4 Les opérateurs dans la représentation Fock-Bargmann

En remarque que l'opérateur d'annihilation a est représenté comme une dérivation à son adjoint comme opérateur de multiplication

$af(z) = \sqrt{\hbar}\frac{d}{dz}f(z)$,$a^+f(z) = \frac{z}{\sqrt{\hbar}}f(z).$

Ainsi, l'opérateur nombre N deviendra $N = z\frac{d}{dz}$

Et le Hamiltonien :$H = \hbar\omega(z\frac{d}{dz} + \frac{1}{2})$

La position et l'impulsion auront alors la forme quasi symétrique :

$$X = l_c\sqrt{\hbar}\frac{d}{dz} + \frac{z}{\sqrt{\hbar}}$$

$$P = -ip_c\sqrt{\hbar}\frac{d}{dz} + \frac{z}{\sqrt{\hbar}}$$

II.4 Les états cohérents de Schrödinger :

Dans cette partie nous sommes dans la possibilité de décrire les états cohérents dans (2.1) à l'états fondamental :$|\Psi_0(x)|^2 = \sqrt[4]{\frac{1}{2\pi l_c^2}}e^{-\frac{x^2}{4l_c^2}}$

II.4.1 Noyau de Bergmann comme état cohérent :

D'abord en simplifiant notre notation et on posant$\hbar = m = \omega = 1$ ce qui impliquera :

$$l_c = \frac{1}{\sqrt{2}} = p_c$$

Considérons la relation (2 .17) de noyau $K(x, z)$

$K(x,z) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}}exp\left[\left(\frac{z^2}{2}\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}x - z\right)^2\right] = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{\sqrt{n!}}\Psi_n(x).$

Ou nous avons noté que $\Psi_n = \overline{\Psi_n}$.Nous posons $z = \frac{1}{\sqrt{2}}(p + iq)$et adoptons la notation :

$$K(x,z) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}}e^{\overbrace{\frac{|x|^2}{2}e^{ixp}}^{phase}} \quad e^{-i\frac{qp}{2}}e^{-\frac{(x-q)^2}{2}} \equiv \langle\delta_x|z\rangle \equiv \langle\delta_x|q,p\rangle$$

Et ce sont des états cohérents de Schrödinger dans la représentation position

Dans une représentation de Fock, ils seront notés :

$$|\mathrm{z}> = |\mathrm{q,p}> = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{\sqrt{n!}}|\mathrm{n}> \quad |n> \in \mathbb{N}$$

Alors nous avons obtenu une famille d'états continus en tout point du plan complexe avec des éléments de l'espace de Hilbert H de base orthonormée **|n**> et **n ∈N.**

II.4.2 Les états cohérents de Schrödinger dans les autres représentations :

En fonction de la représentation impulsion avec **k** une variable, les états cohérents$|z>$

Sont des gaussiennes centrées dans k

$$< \delta\_\{k\}| \underbrace{z\rangle}_{s} = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}} e^{(\frac{|x|^2}{2})} e^{-ixk} e^{-i(\frac{qp}{2})} e^{-\frac{1}{2}(k-p)^2}$$

Donc les états cohérents de Schrödinger ne sont pas normalisables.

II.4.3 Glauber -Klauder –Sudarshan ou Etats cohérents standard :

Compte tenu de la dernière remarque sur la normalisation des états cohérents, nous nous tournons vers les états cohérents normalisés ou standard, ceux introduits par Glauber [8] Klauder [9] et Sudarshan[1], ils sont obtenus à partir des états cohérents de Schrödinger

Avec :

$e^{-\frac{|x|^2}{2}}$ Est le facteur de gaussien

Ils seront notés :

$|\mathbf{z} >= e^{-\frac{|z|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} |\mathrm{n} >.$

Le chevauchement entre deux états suit une loi gaussienne modulée par un facteur de phase

$$\langle\zeta|z\rangle = e^{i(\zeta\Lambda z)} e^{-\frac{|z-\zeta|^2}{2}}$$

II.5 Construction des états cohérents

Il existe trois approches qui permettent la construction des états cohérents que nous allons exposer dans ce qui va suivre. Simplifions tout d'abord notre notation :

$$\hbar = m = \omega = 1$$

II.5.1 Définition 01 :

Dans cette définition, nous nous concentrons sur la minimisation de la relation d'incertitude de Heisenberg $\Delta X \Delta P = \frac{1}{2}$où les opérateurs de position X et de l'impulsion P sont donnés par :

$$X = \frac{1}{\sqrt{2}}(a + a^+)$$

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}}(a - a^+)$$

La relation de commutation dépendante de$a$et a^+est :

$$[a, a^+] = 1$$

Les états cohérents selon cette définition sont définis comme ceux permettant d'avoir l'égalité $\Delta X \Delta P = \frac{1}{2}$ $t$out engarantissant l'invariance de cette relation au cours du temps.

II.5.2 Définition 02 :

La seconde définition de ces états consiste à les définir comme des états propres de l'opérateur d'annihilation :

$$a|\mathbf{z}>=z|\mathbf{z}>$$

Nous écrivons en premier ces états |z> comme une superposition des états propres de l'Hamiltonien de l'oscillateur harmonique alors :

$$|\mathrm{z}>=\sum_{n=0}^{+\infty} c_n\,|\mathrm{n}>$$

On obtient :

$$a|\mathrm{z}>=\sum_{\mathrm{n}=1}^{+\infty} \mathrm{c}_{\mathrm{n}+1}\sqrt{\mathrm{n}+1}\,|\mathrm{n}>$$

Comme les vecteurs $|\mathrm{n}>$sont linéairement indépendants, les deux expressions doivent être identiques terme à terme, ce qui implique :

$$C_{n+1}=\frac{z}{\sqrt{n+1}}C_n$$

A partir de cette relation de récurrence, il est aisé d'exprimer C_n en fonction de z et C_0 :

$$C_n=\frac{z}{\sqrt{n}}C_{n-1}$$

$$=\frac{z}{\sqrt{n}}\frac{z}{\sqrt{n-1}}C_{n-2}$$

$$=\frac{z^n}{\sqrt{n!}}C_0$$

Par conséquent

$$|z>=C_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\sqrt{n!}}|n>$$

Donc nous choisissons C_0de façon à ce que

$$\langle z|z\rangle=1=|C_0|^2\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\overline{z^m}}{\sqrt{m!\,n!}}z^n\langle m|n\rangle=|C_0|^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(|z|^2)^n}{n!}=|C_0|^2e^{|z|^2}$$

Alors

$$|C_0|^2\, e^{\frac{|z|^2}{2}} = 1$$

Les fonctions d'onde étant toujours définies à un coefficient $e^{i\theta}$près qui ne change rien àla physique du problème, nous pouvons donc choisir $e^{i\theta} = 1$

Les états cohérents satisfont donc :

$$|z >= e^{-\frac{1}{2}|z|^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} |n >$$

Ce sont les états introduits séparément par GIauber [8] , KIauder[9], Sudarshan [1], connus sous le nom d'états cohérents standards.

$\langle z_1|z_2\rangle = e^{-\frac{1}{2}(|z_1|^2+|z_2|^2)} \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(\bar{z}_1)^n (z_2)^m}{\sqrt{n!m!}} \langle n|m\rangle$

$\langle z_1|z_2\rangle = e^{-\frac{(|z_1|^2+|z_2|^2)}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\bar{z}_1 z_2)^n}{n!}$ On pose n=m

$= e^{-\frac{(|z_1|^2+|z_2|^2)}{2}} + \bar{z}_1 z_2$

Si les états $|z_1 >$ et $|z_2 >$ étaient orthogonaux, alors $\langle z_1|z_2\rangle$ serait nul quand $z_1$est différent de z_2

$|\langle z_1|z_2\rangle|^2 = e^{-|z_1 - z_2|^2}$.

II.5.3Définition 03 :

Dans La dernière définition l'existence d'un opérateur unitaire « dit opérateur de déplacement » noté D(z) et dont l'action sur l'état de référence « état du vide» génère les états cohérents.

Nous avons :

$$|z > = e^{-\frac{1|z|^2}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(za^+)^n}{n!} |0 >$$

$=e^{-\frac{1|z|^2}{2}} e^{za^+} |0 >$

Grace à ces relations, et la formule de Baker Campbell –Hausdorff

$e^{A+B}=e^A e^B e^C$

Et : $C=\frac{1}{2}[A,B] + \frac{1}{12}(A,[A,B] - B[B,A] + \cdots)$

Donc :

$$|z >= D(z)|0 >$$

Ou **D(z)=$e^{za^{+}-za}$**est dit opérateur de déplacement.

II.5.4 Propriétés des états cohérents

Les états cohérents ont une multitude de propriétés remarquables qui ont un intérêtaussi bie-physique que mathématique à savoir :

1- La continuité.

2- La résolution de l'identité.
3- La stabilité temporelle.
4- L'action à l'identité.
Les deux premières propriétés sont standard tandis que les deux dernières dépendent de la nature du système physique étudié.

II.6 Etats comprimés :

Les états comprimés de l'oscillateur harmonique :

Les trois précédentes définitions, donnent également d'une manière équivalente, les états comprimés pour l'oscillateur harmonique.

II.6.1Méthode de l'opérateur de déplacement :

On applique à la suite de l'opérateur compression **S(z)** , un deuxième opérateur déplacement D(α)

$$\mathrm{D}(\alpha)S(z)|0> = |(\alpha, z)>$$

$$S(z) = e^{(zK_{+}-z^{*}K_{-})}$$

OuK_{+}, K_{-}et K_0est une algèbres SU(1,1)

$$K_{+} = \frac{1}{2}a^{+}a^{+}$$

$$K_{-} = \frac{1}{2}aa$$

$$K_0 = \frac{1}{2}(a^{+}a + \frac{1}{2})$$

$$[K_0, K_{\pm}] = \pm K_{\pm}$$

$$[K_{+}, K_{-}] = -2K_0$$

Changer l'ordre des operateur $\mathbf{D}(\boldsymbol{\alpha})$et**S(z)** équivaut à un changement de paramètres :

$$\mathrm{D}(\alpha)S(z) = S(z)\mathrm{D}(\gamma)$$

$$\gamma = \alpha \cosh r - \alpha^* e^{i\theta} \sinh r$$

Ou : z=r$e^{i\theta}$

II.6.2 Méthode des opérateurs échelles :

Pour l'oscillateur harmonique, cette méthode découle de l'opérateur de déplacement. En combinant la transformation de Bogoliubov[10]

$$S^{-1}aS = (\cosh r)a + e^{i\theta}(\sinh r)a^+$$

Avec :

$$\mathrm{D}(\alpha)S(z) = S(z)\mathrm{D}(\gamma)$$

On aura :

$$\left[(\cosh r)a - e^{i\theta}(\sinh r)a^+\right]|(\alpha, z) >= \gamma|(\alpha, z)|$$

On remarque que pour les états comprimés, on a besoin des deux opérateurs échelles $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{a}^+$contrairement aux états cohérents ou on a besoin que de l'opérateur d'annihilation

II.6.3 Méthode d'incertitude minimale :

Le passage des états cohérents aux états comprimés est intuitivement simple.

Ces états minimisent la relation d'incertitude, sans la restriction supplémentaire que l'état fondamental soit un membre de l'ensemble signifie qu'il s'agit d'un ensemble d'états, qui sont des gaussiennes de toutes les largeurs :

$$\Psi_{ss}(x) = [\pi s^2]^{-1/4} e^{\left[-\frac{(x-x_0)^2}{2S^2} + ip_0 x\right]}$$

Ces états comprimés sont équivalents à ceux obtenus à partir des autres formulations, cela peut être vérifié en combinant l'équation suivante :

$$x = \frac{(a + a^+)}{\sqrt{2}}$$

$$p = \frac{(a - a^+)}{i\sqrt{2}}$$

Avec :

$$z = re^{i\theta}$$

$$r = \ln s$$

Chapitre III

Les états cohérents et comprimés de l'oscillateur harmonique

III.1 Introduction :

Dans cette partie nous allons montrer que les états cohérents et comprimés de l'oscillateur harmonique minimisent la relation d'incertitude d'Heisenberg. Pour cela nous allons exploiter la méthode de factorisation de Hamiltonien décrivant le système quantique qu'on va étudier. En effet il est bien connu que pour tout système soluble l'Hamiltonien s'écrit comme le produit de deux opérateurs échelles.

III.2 Les états cohérents et comprimés à1 dimension :

Les états cohérents pour L'oscillateur harmonique sont des états propres de l'opérateur d'annihilation a **,** ces états ont une grande importante dans la physique, car ce sont des états qui se rapprochent le plus des états classiques.

$$a|z\rangle = z|z\rangle$$

z : S'appelle le paramètre de cohérence.

On appelle les états comprimés pour le potentiel oscillateur harmonique une généralisation des états précédentes, car en plus de dépendre du paramètre z ils dépendent aussid'un paramètre de compression γ, pour réduire la dispersion sur une observable au prix d'augmenter celle de l'autre tout en maintenant minimale la relation d'incertitude de Heisenberg. On peut montrer également que les états comprimés sont les états propres de l'opérateur $a + \gamma a^{+}$

On a alors : $(a + \gamma a^{+})|\Psi(z,\gamma)\rangle = z|\Psi(z,\gamma)\rangle$ (3.1)

a et a^{+} sont les opérateurs échelles pour L'oscillateur harmonique a et a^{+} sont comme suit :

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle \ , \ a^{+}|n\rangle = \sqrt{(n+1)}|n+1\rangle \quad (3.2)$$

Avec la solution de l'équation (3.1) est :

$$|\Psi(z,\gamma,x,t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{Z(z,\gamma,n)}{\sqrt{(n!)}}|n\rangle \quad (3.3)$$

N : Facteur de normalisation

$$N = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{|Z(z,\gamma,n)|^{2}}{n!} \quad (3.4)$$

Pour L'oscillateur harmonique, on trouve l'expression de $Z_{OH}(z,\gamma,n)$

$$Z_{OH}(z,\gamma,n) = \left(\frac{\gamma}{2}\right)^{\frac{n}{2}}H\left(n,\frac{z}{2\gamma}\right) \quad (3.5)$$

$H\left(n,\frac{z}{2\gamma}\right)$: Sont les polynômes d'Hermite.

Z et γ sont des complexes, on obtient : $Z_{OH}(z,\gamma,n) = z^{n}$

Dans un état comprimé pur :

$Z_{OH}(0, \gamma, 2n) = \left(\frac{(2n)!}{n!}\right)\left(-\left(\frac{\gamma}{2}\right)\right)^{n}$ (3.6)

$$Z_{OH}(0, \gamma, 2n+1) = 0$$

Il décrit des états quantiques de l'oscillateur harmonique qui a la propriété de se comporter de façon semblable aux états classiques du modèle équivalent, ces états cohérents ont la particularité de minimiser la relation d'incertitude de Heisenberg $\Delta X \Delta P \geq \frac{\hbar}{2}$. Les états cohérents sont initialement introduits pour le système quantique de l'oscillateur harmonique, les physiciens travaillent sur leur formulation selon trois méthodes :

- A l'aide de l'opérateur de déplacement $D(z) = \exp(za^{+} - za)$ qui s'applique à un état fondamentale|0>

-Minimiser la relation d'incertitude de Heisenberg $\Delta X^2 \Delta P^2 \geq \frac{\hbar^2}{4}$

-Comme les états propres de l'opérateur d'annihilation a, $a|z>= z|z>$

III.3 Le modèle

Soit l'oscillateur harmonique représenté par l'Hamiltonien suivant :

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m w^2$$

Les états propres de ce Hamiltonien sont les états :

$|n> = \frac{(a^{+})^{n}}{\sqrt{n!}} |0>$ (3.7)

Ils ont comme valeurs propres associées les énergies :

$E_n = \hbar w\left(n + \frac{1}{2}\right)$ (3.8)

En introduisant la notation $\Psi_n(x) = \langle x|x\rangle$, les états propres s'écrivent dans la représentation

Sou la forme suivant $|x>$

$\Psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}}\left(\frac{mw}{\hbar\pi}\right)^{\frac{1}{4}} H\left(\sqrt{\frac{mw}{\hbar}}x\right) e^{-\frac{mwx^2}{\hbar 2}}$ (3.9)

Soient les opérateurs de création et d'annihilation qui s'écrivent suivant les relations

$$a = \sqrt{\frac{mw}{2\hbar}}\left(x - \frac{i}{mw}p\right), a^+ = \sqrt{\frac{mw}{2\hbar}}\left(x + \frac{i}{mw}p\right) \qquad (3.10)$$

III.4 Etats cohérents indépendants du temps

Pour l'état cohérent à t=0 nous calculons la valeur moyenne ainsi que la dispersion, en sachant que

$a\,|z\rangle = z\,|z\rangle$ et $\langle z|a^+ = z^*$ (3. 11)

III.4.1Les valeurs moyennes et dispersions

Calcul la valeur moyenne de $\langle x\rangle_{|z>}$:

$$\langle x\rangle_{|z>} = \langle z|x|z\rangle = \left\langle z\left|\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(a^+ + \frac{\hbar m\omega}{2}\right)\right|z\right\rangle$$

$$= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(z^* + z)$$

$$\langle x\rangle_{|z>} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,2\mathrm{Re}(z) \qquad (3.12)$$

Calcul la valeur moyenne de $\langle x^2\rangle_{|z>}$:

$$\langle \boldsymbol{x^2}\rangle_{|\mathbf{z}>} = \left\langle z\left|\left(\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\right)^2 (a^+ + a)^2\right|z\right\rangle$$

$$\langle \boldsymbol{x^2}\rangle_{|\mathbf{z}>} = \frac{\hbar}{2m\omega}\left\langle z\left|\left(a^{+2} + a^+a + a^+a + a^2\right)^2\right|z\right\rangle$$

Avec : $[a, a^+] = 1 \Leftrightarrow aa^+ - a^+a = 1 \mapsto aa^+ = 1 + a^+a = 1 + N$

$$\langle x^2\rangle_{|\mathbf{z}>} = \left(\frac{\hbar}{2mw}\right)\left\{z^{*2} + 2z^*z + 1 + z^2\right\} = \left(\frac{\hbar}{2mw}\right)\left\{z^{*2} + 2|z|^2 + 1 + z^2\right\}$$
$$= \left(\frac{\hbar}{2mw}\right)(z^* + z)^2 + 1 = \left(\frac{\hbar}{2mw}\right)\left(\left(2Re(z)\right)^2 + 1\right)$$

$$\langle x^2\rangle_{|\mathbf{z}>} = \left(\frac{\hbar}{2mw}\right)\left(4Re^2(z) + 1\right) \qquad (3.13)$$

Les dispersions $(\Delta x)^2$:

$$(\Delta x)^2 = \langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2$$

$$(\Delta x)^2 = \left(\frac{\hbar}{2\mathrm{mw}}\right)(4Re^2(z)+1) - \left(\frac{\hbar}{2\mathrm{mw}}\right)4Re^2(z)$$

$$= \left(\frac{\hbar}{2\mathrm{mw}}\right)\left(4Re^2(z)+1-4Re^2(z)\right)$$

$$(\Delta x)^2 = \left(\frac{\hbar}{2\mathrm{mw}}\right) \quad (3.14)$$

Calcul de la valeur moyenne de $< p >_{|z>}$:

$< p >_{|z>}$=<z|p|z>

$=i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}$<z|$(a^{+}a)$|z>$=i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}$\{<z|$a^{+}$|z>−<z|$a$ |z>\}

$=i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}\{z^{*} - z\} = \sqrt{2\hbar m\omega}\,\mathrm{Im}(z)$

$< p >_{|z>} = \sqrt{(2\hbar m\omega)}\,\mathrm{Im}(z)$ (3.15)

Calcul la valeur moyenne de $< p^2 >_{|z>}$:

$< p^2 >_{|z>}$=<z|p²|z>=<z| $i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}\,(a^{+}-a) x\, i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}\,(a^{+}-a)$|z>

$=-\frac{\hbar m\omega}{2}$\{<z|$a^{+2}$-$a^{+}a$ -aa^{+}+a^{2}|z>\}

$=\frac{\hbar m\omega}{2}\{2z^{*}z+1-z^{*2}-z^2\}$

$=\frac{\hbar m\omega}{2}\{2|z|^2+1-z^{*2}-z^2\}=\frac{\hbar m\omega}{2}\{2|z|^2+1-(z^{*2}+z^2)\}$

$=\frac{\hbar m\omega}{2}\{2|z|^2+1-\mathrm{Re}\,(z^2)\}$

Donc : $< p^2 >_{|z>} = \frac{\hbar m\omega}{2}\{2|z|^2+1-\mathrm{Re}\,(z^2)\}$ (3. 16)

Ou bien

$< p^2 >_{|z>} = \frac{\hbar m\omega}{2}\{4\mathrm{Im}^2(z)+1\}$

$< p^2 >_{|z>} = (\frac{\hbar m\omega}{2}\{2|z|^2+1-\mathrm{Re}\,(z^2)\}$

La dispersion $(\Delta p)^2$:

$(\Delta p)^2 = <p^2> - <p>^2 = \frac{\hbar m\omega}{2}$ [4Im²(z)+1]-[√(2ħmw)Im(z)]²

$= \frac{\hbar m\omega}{2}$ [4Im²(z)+1]-2ħmwIm²(z)

$(\Delta p)^2 = \frac{\hbar m\omega}{2}$

Donc : $(\Delta p)^2 = <p^2> - <p>^2 = \frac{\hbar m\omega}{2}$

$(\Delta x)^2 = <x^2> - <x>^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}$

On a bien $\Delta(z) = (\Delta x)^2 (\Delta p)^2 = \frac{\hbar^2}{4}$

III.4.2 Le résultat :

Le produit de dispersion de la position $(\Delta x)^2$ et de l'impulsion $(\Delta p)^2$ est égal à $\frac{\hbar^2}{4}$. Ce qui minimise bien la relation de Heisenberg $\Delta(z) = (\Delta x)^2 (\Delta p)^2 = ((\hbar^2)/4)$.

III.5 L'état comprimé indépendants de temps :

III.5.1 L'état comprimé :

Pour le potentiel de l'oscillateur harmonique , la généralisation des états précédents est connue, ils sont appelés états comprimés qui dépendent du paramètre Z , ils dépendent également d'un paramètre de compression qui aura pour effet de réduire la dispersion sur une observable , mais aux prix d'augmenter celle sur l'autre, tout en maintenant , la relation d'incertitude de Heisenberg est : $\Delta X \Delta P \geq \frac{\hbar}{2}$

Les états comprimés ont été introduits, en s'inspirant de la définition des états cohérant avec :

$Z_{OH}(0, \gamma, 2n) = (\frac{2n}{n!} - \frac{\gamma}{2})^n$

On va définir un opérateur :

$A = a + \gamma a^+, \quad A^+ = a^+ + \gamma a$ (3.17)

Écrire l'opérateur (A, A^+) en fonction de $\hat{X}$et

On a : $a = \frac{\hat{X} + i\hat{P}}{2}$: $\quad a^+ = \frac{\hat{X} - i\hat{P}}{2}$

Alors :

$A = (\frac{1}{2} + \frac{\gamma}{2})\hat{X} + (\frac{i}{2} - \frac{i\gamma}{2})\hat{P}$ (3.18)

$A^{+}=(\frac{1}{2}+\frac{\gamma}{2})\,\widehat{X}+(-\frac{i}{2}+\frac{i\gamma}{2})\,\widehat{P}$ (3.19)

III.5.2 Écrire X et P en fonction de A et A⁺

(3.18) + (3 .19) $\Rightarrow A+A^{+}=(\frac{1+}{2}\frac{\gamma}{2})\,\widehat{X}+(\frac{i}{2}-\frac{i\gamma}{2})\,\widehat{P}+(\frac{1}{2}+\frac{\gamma}{2})\,\widehat{X}+(-\frac{i}{2}+\frac{i\gamma}{2})\,\widehat{P}$

$$\widehat{X}=\frac{A+A^{+}}{1+\gamma}$$

(3.27)-(3.28) $\Rightarrow A-A^{+}=(\frac{1}{2}+\frac{\gamma}{2})\,\widehat{X}+(\frac{i}{2}-\frac{i\gamma}{2})\,\widehat{P}+(\frac{1}{2}+\frac{\gamma}{2})\,\widehat{X}+(-\frac{i}{2}+\frac{i\gamma}{2})\,\widehat{P}$

$=((\frac{i}{2}-\frac{i\gamma}{2})\,\widehat{P}+(\frac{i}{2}-\frac{i\gamma}{2})\,P$

$=(\frac{i}{2}-\frac{i\gamma}{2})\widehat{P}\Rightarrow\widehat{P}=-i\,\frac{A-A^{+}}{1-\gamma}$

Alors : $\widehat{X}=\frac{A+A^{+}}{1+\gamma}\,\widehat{P}=-i\,\frac{A-A^{+}}{1-\gamma}$ (3.20)

III.5.3 Les valeurs moyennes et dispersions

Calcul de la valeur moyenne de $<\widehat{X}>$:

$A|\Psi(z,\gamma)>=z|\Psi(z,\gamma)>$

$<\Psi(z,\gamma)|A^{+}=<\Psi(z,\gamma)|z^{*}$

$<\widehat{X}>=<\Psi(z,\gamma)|\widehat{X}|\Psi(z,\gamma)>=<\Psi(z,\gamma)|((A+A^{+})/(1+\gamma))|\Psi(z,\gamma)>$

$=\frac{1}{1+\gamma}\{z+z^{*}\}=\frac{2}{1+\gamma}Re(z)$

Alors : $<\widehat{X}>=\frac{2}{1+\gamma}\,Re(z)$ (3.21)

$<\widehat{X}>^{2}=\frac{4}{(1+\gamma)^{2}}Re^{2}(z)$

Calcul de la valeur moyenne de $<\widehat{X}^{2}>$:

$<\widehat{X}^{2}>=<\Psi(z,\gamma)|\widehat{X}^{2}|\Psi(z,\gamma)>$

$<\widehat{X}^{2}>=\frac{1}{(1+\gamma)^{2}}<\Psi(z,\gamma)|\{A^{2}+AA^{+}+A^{+}A+A^{+\,2}\}|\Psi(z,\gamma)>$

$[A,A^{+}]=1-\gamma^{2}$

Puisque : $[a,a^{+}]=1$

Donc : $[A, A^{+}] = 1-\gamma^2$ (3.22)

$AA^{+}=(1-\gamma^2)+A^{+}A$

$<\widehat{X}^2>=\frac{1}{(1+\gamma)^2}\{<\Psi(z,\gamma)|A^2|\Psi(z,\gamma)>+<\Psi(z,\gamma)|(1-\gamma^2)+A^{+}A|\Psi(z,\gamma)>$

$+<\Psi(z,\gamma)|A^{+}A|\Psi(z,\gamma)>+<\Psi(z,\gamma)|A^{+2}|\Psi(z,\gamma)>\}$

$=\frac{2}{(1+\gamma)^2}\{|z|^2+\mathrm{Re}(z^2)\}+\frac{(1-\gamma^2)}{(1+\gamma)}$

Alors : $<\widehat{X}^2>=\frac{2}{(1+\gamma)^2}\{|z|^2+\mathrm{Re}(z^2)\}+\frac{(1-\gamma^2)}{(1+\gamma)})$ (3.23)

Calcul de la dispersion de $\Delta\widehat{X}$:

$\Delta\widehat{X}^2=<\widehat{X}^2>-<\widehat{X}>^2=\frac{2}{(1+\gamma)^2}\{|z|^2+\mathrm{Re}(z^2)\}+\frac{(1-\gamma^2)}{(1+\gamma)})-\frac{4}{(1+\gamma)^2}\mathrm{Re}^2(z)$

$=(1/((1+\gamma)^2))\{2z\,z^*+2\mathrm{Re}(z^2)+(1-\gamma^2)-4\mathrm{Re}^2(z)\}$

$|z|^2=\alpha^2+\beta^2$

$z^2=(\alpha+i\beta)^2=\alpha^2+2i\alpha\beta-\beta^2$

$\Delta\widehat{X}^2=\frac{1}{(1+\gamma)^2}\{2(\alpha^2+\beta^2)+2(\alpha^2-\beta^2)+1-\gamma^2-4\mathrm{Re}^2(z)\}=\frac{(1-\gamma)}{(1+\gamma)}$

Alors : $\Delta\widehat{X}^2=\frac{(1-\gamma)}{(1+\gamma)}$ (3.24)

Calcul de la valeur moyenne de $<\widehat{P}>$:

$$A|\Psi(z,\gamma)>=z|\Psi(z,\gamma)>$$

$<\Psi(z,\gamma)|A^{+}=<\Psi(z,\gamma)|z^*$

$<\widehat{P}>=<\Psi(z,\gamma)|\widehat{P}|\Psi(z,\gamma)>=<\Psi(z,\gamma)-i|\frac{(A-A^{+})}{(1-\gamma)}|\Psi(z,\gamma)>$

$=\frac{1}{(1-\gamma)}\{i(z^*-z)\}=(1/(1+\gamma))2\mathrm{Im}(z)$

Alors : $<\widehat{P}>=(\frac{2}{(1-\gamma)})\mathrm{Im}(z)$ (3 .25)

Donc : $<\widehat{P}>^2=(\frac{4}{(1-\gamma)^2})\mathrm{Im}^2(z)$

Calcule de valeur moyenne de $<\widehat{P}^2>$:

$<\widehat{P}^2>=<\Psi(z,\gamma)|\widehat{P}^2|\Psi(z,\gamma)>$

ou $\hat{P}^2=\hat{P}\hat{P}=-\frac{1}{(1-\gamma)^2}\{A^2-AA^+-A^+A+A^{+2}\}$

$<\hat{X}^2>=\frac{1}{(1+\gamma)^2}<\Psi(z,\gamma)|\{A^2+AA^++A^+A+A^{+2}\ \Psi(z,\gamma)>$

$[A,A^+]=1-\gamma^2$ puisque : $[a,a^+]=1$

donc : $[A,A^+]=1-\gamma^2$ (3.26)

$AA^+=(1-\gamma^2)+A^+A$

Alors : $<\hat{P}^2>=\frac{2}{(1-\gamma)^2}\{|z|^2+R(z^2)\}+\frac{(1-\gamma^2)}{(1-\gamma)^2})$ (3.27)

Calcul de la dispersion

$\Delta\hat{P}=\sqrt{<\hat{P}^2>-<\hat{P}>^2}\rightarrow\Delta\hat{P}^2=<\hat{P}^2>-<\hat{P}>^2=\frac{2}{(1-\gamma)^2}\{|z|^2-Re(z^2)\}+\frac{(1-\gamma^2)}{(1-\gamma)^2}-\frac{4}{(1-\gamma)^2}Im^2(z)$

$\Delta\hat{P}^2=\frac{1}{(1-\gamma)^2}\{2|z|^2-2Re(z^2)+(1-\gamma^2)-4Im^2(z)\}$

Alors : $(\Delta\hat{P})^2=\frac{1}{(1-\gamma)^2}\{2(\alpha^2+\beta^2)-2(\alpha^2-\beta^2)+(1-\gamma^2)-4\beta^2\}$

$(\Delta\hat{P})^2=\frac{(1+\gamma)}{(1-\gamma)}$ (3. 28)

Ceci implique que les états comprimés conservent la propriété de quasiclassicité, ils minimisent toujours la relation d'incertitude de Heisenberg. Si on parle ici d'états comprimés, c'est parce que les dispersions prises séparément ne sont plus constantes enγ . La compressionγ aura pour effet de diminuer la dispersion associée à l'un des opérateurs, au prix de devoir augmenter celle de l'autre opérateur. C'est ce qu'on observe sur la Figure (1.1). Par ailleurs, plus la compression est grande, plus les dispersions en $\hat{X}$et en $\hat{P}$ sont différentes l'une de l'autre. On note également que la dispersion ne dépend pas de la valeur de z.

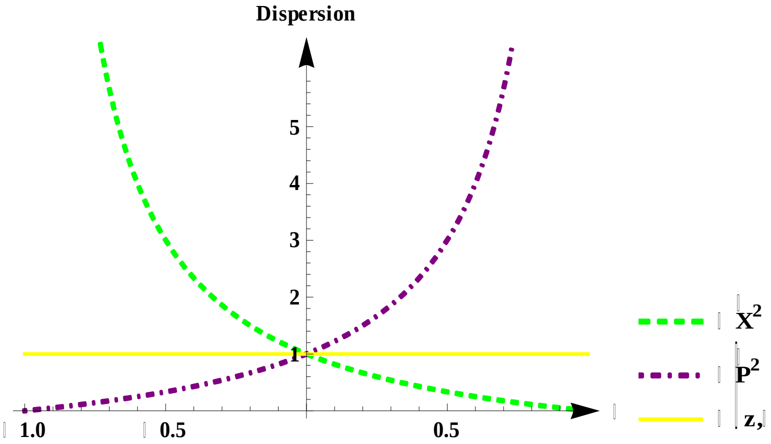


Figure (1.1) Dispersion en $\hat{X}$ et en $\widehat{P}$ et produit des dispersions en fonction du paramètre de compression γ

III.6 Etats cohérents dépendants du temps :

III.6.1 Les valeurs moyennes et dispersions

On a :

$a|z\rangle = z\, e^{-i\omega t}$, $\langle z(t)|a^{+} = \langle z(t)|z^{*} e^{i\omega t}$ (3.29)

Puisque $x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a^{+} + a)$

$$\hat{X} = (a^{+} + a) \qquad (3.30)$$

$\langle\hat{X}\rangle = \langle z(t)|\hat{X}|\, z(t)\rangle = z^{*}$ (cosω t+i sin ωt) +z(cos ωt−i sinω t)=cos ωt(z^{*} +z)

+i sin ωt(z^{*} −z)

$$\langle\hat{X}\rangle = \cos\omega\, t 2\mathrm{Re}(z) + \sin\omega\, t 2\mathrm{Im}(z) \qquad (3.31)$$

Alors : $\langle\hat{X}\rangle = 2\mathrm{Re}(z)\cos\omega t + 2\mathrm{Im}(z)\sin\omega t$

Donc : $\langle\hat{X}\rangle^2 = \{2\mathrm{Re}(z)\cos\omega\, t + 2\mathrm{Im}(z)\sin\omega\, t\}^2$

Calcul de la valeur moyenne de $\langle x^2\rangle$:

$\langle\hat{X}^2\rangle = \langle z(t)|\hat{X}^2|z(t)\rangle$

$= \langle z(t)|\, (a^{+} + a)^2\, |z(t)\rangle$

$\langle\hat{X}^2\rangle = z^{*2} e^{2i\omega t} + 2|z|^2 + 1 + z^2\, e^{-2i\omega t}$

$= z^{*2}(\cos 2\omega t + i\sin 2\omega t) + z^2(\cos 2\omega t - i\sin 2\omega t) + 2|z|^2 + 1$

Alors : $\langle\hat{X}^2\rangle = 2\,\mathrm{Re}(z^2)\cos 2\omega t + 2\,\mathrm{Im}(z^2)\sin 2\omega t + 2|z|^2 + 1$ (3. 32)

Calcul de la dispersion de $\Delta\hat{X}^2$:

$$\Delta\hat{X}^2 = \sqrt{\langle\hat{X}^2\rangle - \langle\hat{X}\rangle^2} \qquad (3.33)$$

$\Delta\hat{X}^2 = \{2\mathrm{Re}(z^2)\cos 2\omega t + 2\mathrm{Im}(z^2)\sin 2\omega t + 2|z|^2 + 1 - \{2\mathrm{Re}(z)\cos\omega t + 2\mathrm{Im}(z)\sin wt\}$

$\Delta\hat{X}^2 = -2(\alpha^2 + \beta^2) + 2|z|^2 + 1 = 2|z|^2 - 2|z|^2 + 1 = 1$

Puisque $|z|^2=(\alpha+i\ \beta)(\alpha-i\ \beta)=\alpha^2+\beta^2$Donc $|z|^2=\alpha^2+\beta^2$

Donc : $\Delta\hat{X}^2=1$ (3.34)

Calcul de la dispersion de$<\hat{P}>$:

$<\hat{P}>=<z(t)|\ \hat{P}\ |z(t)> =i<z(t)|\ (a^+-a)|z(t)>$

$<\hat{P}>=i\{z^{*2}e^{i\omega t}<z(t)||z(t)>-ze^{i\omega t}<z(t)||z(t)>\} =i\{z^{*2}e^{i\omega t}\ -ze^{-i\omega t}\}$

Alors : $<\hat{P}>=2Im(z)\cos\omega t-2Re(z)\sin\omega t$ (3.35)

$<\hat{P}>^2=\{2Im(z)\cos\omega\ t-2Re(z)\sin\omega t\}^2$

Calcul de la dispersion de$<\hat{P}^2>$:

$<\hat{P}^2>= -<z(t)|\hat{P}^2|z(t)> = \{<z(t)|a^{+2} - a^+a - aa^++a\ ^2|z(t)>\}$

$<\hat{P}^2>= -\{z^{*2}\exp\{2i\omega t\}+z^2\exp\{-2i\omega t\}-2|z|^2-1\}$

$<\hat{P}^2>= -z^{*2}\ (\cos2\omega t+i\sin2\omega t)+z^2\ (\cos2\omega t-i\ \sin2\omega t)-2|z|^2-1)$

$= -2Re(z^2)\cos2\omega t-2Im(z^2)\sin2\omega t+2|z|^2+1$

Alors : $<\hat{P}^2>= -2Re\ (z^2)\cos 2\omega t\text{-}2Im(z^2)\sin 2\omega t+2|z|^2+1$ (3.36)

Calcul de la dispersion de $\Delta\hat{P}$:

$\Delta\hat{P}^2=<\hat{P}^2>-<\hat{P}>^2$

$=\text{-}2Re\ (z^2)\cos 2\omega t\text{-}2Im\ (z^2)\sin2\omega t+2|z|^2+1-\{2Im(z)\cos\omega\ t-2Re(z)\sin\omega t\}^2$

$Z^2= \alpha^2-\beta^2+2i\alpha\beta\Leftrightarrow$

$Re(z^2)=\alpha^2-\beta^2$

$Im\ (z^2)=2\alpha\beta$

$\Delta\hat{P}^2=-2(\alpha^2+\beta^2)\ +2|z|^2+1=2|z|^2\text{-}2|z|^2+1=1$

Donc :

$\Delta\hat{P}^2=\Delta\hat{X}^2=1$ (3.37)

On obtient également $\Delta P^2=\Delta\hat{X}^2= 1$. Ainsi, on voit que chacune des dispersions, et donc leur produit, sera constante non pas seulement en z, mais également dans le temps. On remarque, en particulier, que le minimum est atteint à t = 0, ce qui implique que la relation d'incertitude de Heisenberg est minimisée au temps initial. Elle sera à nouveau minimisée pour tous les temps $t = \frac{n\pi}{2}\ \ ,n \in Z$. Notons toutefois que l'état de compression ne s'applique pas forcément à la même observable, selon le temps observé. En effet, initialement, la dispersion en $\hat{X}$ est inférieure à celle en $\hat{P}$ ce qui implique une meilleure localisation en $\hat{X}$. à t= $\frac{\pi}{2}$, c'est toutefois l'inverse et maintenant, on aura une meilleure localisation en impulsion, et donc un étalement de la densité de probabilité que l'on observe sur la Figure (1.2)

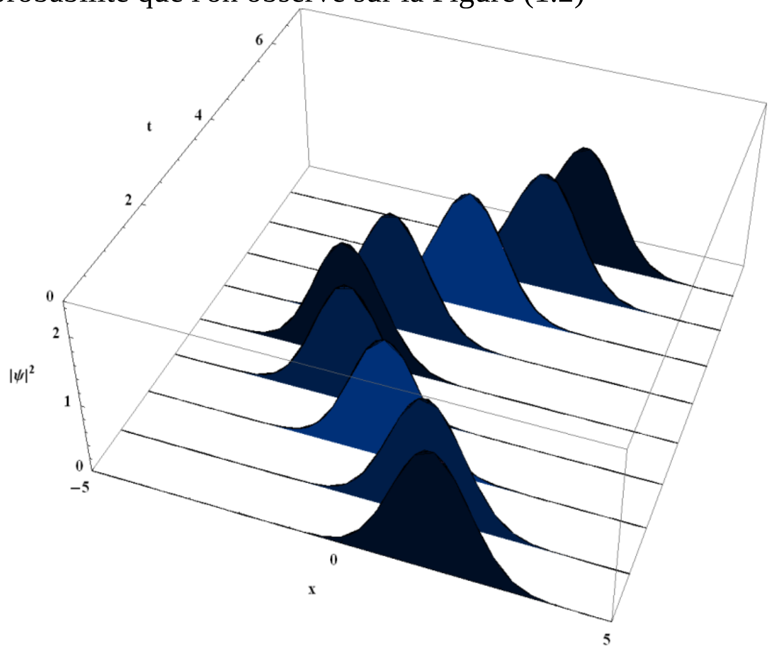


Figure (1 .2) Densité de probabilité $\Psi|(1.2,0,x,t)|^2$pour $t = 0,\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2},\ldots.,2\pi$

III.7 Etats comprimés dépendants du temps :

III.7.1 Valeur moyenne et dispersion

Calcul de valeur moyenne de$\langle\hat{x}\rangle_{|\Phi_n>}$

$$\langle x\rangle_{|\Phi_n>} = \langle\Phi_n|x|\Phi_m\rangle = \left\langle\Phi_n\middle|\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a^+ + a)\middle|\Phi_m\right\rangle$$

$$= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\sqrt{(m+1)}\delta_{n;m+1} + \sqrt{m}\delta_{n;m-1}\langle x\rangle_{|\Phi_n>}$$

$$= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\sqrt{(m+1)}\delta_{n;m+1} + \sqrt{m}\delta_{n;m-1} \qquad (3.38)$$

Calcul la valeur moyenne de$\langle p\rangle_{|\Phi_n>}$:

$$\langle p\rangle_{|\Phi_n>} = \langle\Phi_n|p|\Phi_m\rangle = \left\langle\Phi_n\middle|i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}(a^+ - a)\middle|\Phi_m\right\rangle$$

$$= i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}\sqrt{(\mathrm{m}+1)}\delta_{\mathrm{n,m+1}} - \sqrt{\mathrm{m}}\delta_{\mathrm{n,m-1}}$$

$i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}\sqrt{(\mathrm{m}+1)}\delta_{\mathrm{n,m+1}}\sqrt{\mathrm{m}}\delta_{\mathrm{n,m-1}}$(3.39)

Calcul de la valeur moyenne de<x²> $\langle x^2\rangle_{|\Phi_n>}$

$$\langle x^2\rangle_{|\Phi_n>} = \left\langle \Phi_n \middle| \left(\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\right)^2 (a^+ + a)^2 \middle| \Phi_m \right\rangle$$

$$= \frac{\hbar}{2m\omega}\sqrt{m+1}\sqrt{m+2}\delta_{\mathrm{n,m+2}}\mathrm{m}\delta_{\mathrm{n,m}} + (\mathrm{m}+1)\delta_{\mathrm{n,m}}\sqrt{m-1}\sqrt{m}\delta_{\mathrm{n,m-2}}$$

$$\langle x^2\rangle_{|\Phi_n>} \frac{\hbar}{2m\omega}\sqrt{m+1}\sqrt{m+2}\delta_{\mathrm{n,m+2}}\mathrm{m}\delta_{\mathrm{n,m}} + (\mathrm{m}+1)\delta_{\mathrm{n,m}}\sqrt{m-1}\sqrt{m}\delta_{\mathrm{n,m-2}} \qquad (3.40)$$

Calcul la valeur moyenne de $\langle p^2\rangle_{|\Phi_n>}$:

$$\langle p^2\rangle_{|\Phi_n>} = \left\langle \Phi_n \middle| \left(i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}\right)^2 (a^+ - a)^2 \middle| \Phi_m \right\rangle$$

$$= \frac{\hbar}{2m\omega}\sqrt{m+1}\sqrt{m+2}\delta_{\mathrm{n,m+2}}\mathrm{m}\delta_{\mathrm{n,m}} + (\mathrm{m}+1)\delta_{\mathrm{n,m}}\sqrt{m-1}\sqrt{m}\delta_{\mathrm{n,m-2}}$$

$$\langle p^2\rangle_{|\Phi_n>} = -\frac{\hbar m\omega}{2}\sqrt{m+1}\sqrt{m+2}\delta_{n,m+2}m\delta_{n,m} + (m+1)\delta_{n,m}\sqrt{m-1}\sqrt{m}\delta_{n,m-2} \qquad (3.41)$$

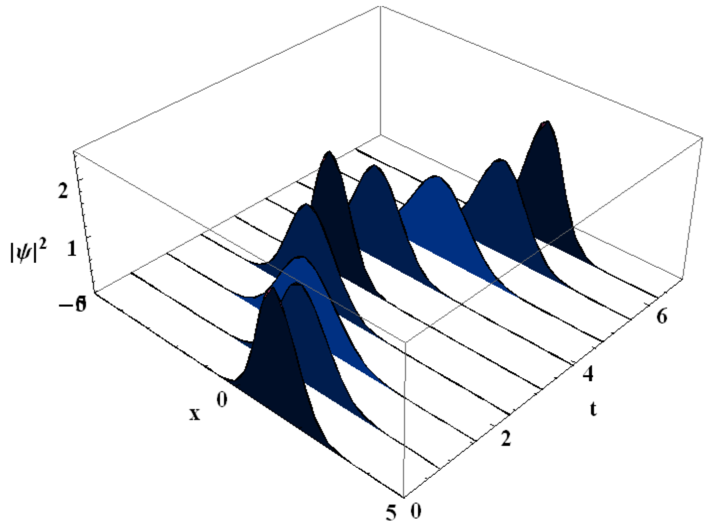


Figure (1.3) Densité de probabilité $\Psi|(1.2,0.X,t)|^2$ pour tout $t=0,\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\dots 2\pi$

III.8 Trajectoires :

III.8.1 Cas classique :

Prenons un oscillateur harmonique de masse **m** et de fréquence angulaire $\boldsymbol{\omega}$ décrit par l'Hmiltonien

$$H=\frac{P^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2x(t)$$

On introduit les quantités X et Pproportionnelles à la position x et à l'impulsion$p$ telles que :

$$X(t)=\sqrt{m\omega}x(t) \quad , \; P(t)=\frac{1}{\sqrt{m\omega}}p(t) \qquad (3.42)$$

Nous écrirons l'équation suivant :

$$\frac{d}{dt}x(t)=\frac{d}{dt}\left(\sqrt{m\omega}x(t)\right)\to\frac{\omega}{\sqrt{m\omega x(t)}}=\omega p(t)$$

$$\frac{d}{dt}p(t)=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{m\omega}}p(t)\right)=-\omega\sqrt{m\omega}p(t)=-\omega x(t)$$

Pour connaitre l'état classique de la particule, il est nécessaire d'étudier sa position et son impulsion. On peut donc réunir ces deux quantités dans une nouvelle quantité complexe $Z(t)$ définie ainsi :

$$Z(t)=\frac{X(t)-iP(t)}{2} \qquad (3.43)$$

Avec compensation des deux équations X et Pnous obtenons

$$\frac{d}{dt}Z(t) = \frac{d}{dt}\left\{\frac{X(t) - iP(t)}{2}\right\} = {}^{1}/_{2}\frac{d}{dt}\left\{\frac{\overline{X(t) - \imath P(t)}}{2}\right\}$$

$$={}^{1}/_{2}\left\{\frac{d}{dt}X(t) + i\frac{d}{dt}P(t)\right\} = {}^{1}/_{2}\{\omega P(t) - i\omega X(t)\}$$

$$= {}^{1}/_{2}\{i^2\omega P(t) - i\omega X(t)\} = {}^{1}/_{2}\{i\omega X(t) - i^2\omega P(t)\}$$

$$\frac{d}{dt}Z(t) = i\omega\left\{\frac{X(t) + iP(t)}{2}\right\}$$

Cela nous permet de combiner les deux équations différentielles en une seule de la forme

$$\frac{d}{dt}Z(t) = i\omega Z(t) \tag{3.44}$$

La solution de cette équation est de la forme$Z(t) = ze^{-i\omega}$, nous voyons ici un mouvement sinusoïdale et si on trace $Z(t)$ dans l'espace de phase $\{\langle X\rangle, \langle p\rangle\}$, on peut observer des trajectoires circulaires. Le rayon et le point initiale de cette trajectoire dépendent des conditions initiales et de la vitesse angulaire.

Il est possible de trouver l'évolution temporale des quantités $XetP$ individuellement et la solution est :

$$X(t) = Z_0e^{-i\omega} + \overline{Z_0}e^{iwt} \tag{3.45}$$

$$P(t) = -i\left(Z_0e^{-i\omega} - \overline{Z_0}e^{iwt}\right) \tag{3.46}$$

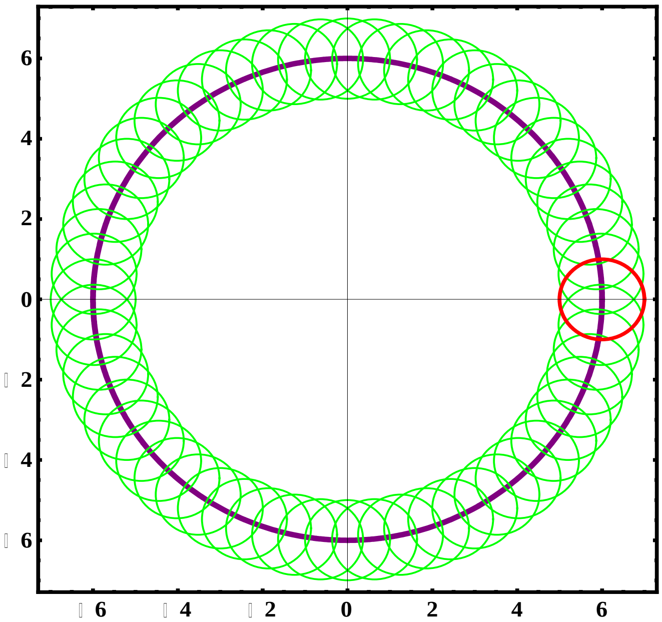
III.8.2 Cas quantique :

On peut calculer les valeurs moyennes de $\hat{X}$et $\hat{P}$ dans le cas quantique en fonction du temps. On trouvera alors les relations suivantes :

$$\langle\hat{X}(t)\rangle = z_0\, e^{-iwt} + \overline{Z_0}\, e^{iwt}\ ,\langle\hat{P}(t)\rangle = -i(z_0\, e^{-iwt} - \overline{Z_0}\, e^{iwt}) \tag{3.47}$$

Donc ces relations sont identiques à celles des formules (3.45) et (3.46), les états cohérents agissent exactement de la même façon que les états classiques d'un oscillateur Harmonique. Il faut faire attention ici, car on a calculé l'évolution temporelle des valeurs moyennes seulement et non pas des valeurs exactes puisque quantiquement elles ne sont pas connues. Il ne faut donc pas oublier de tenir compte de la dispersion. Autour de chaque point de la trajectoire dans l'espace de phase, il y aura un « cercle d'erreur » délimitant l'espace dans lequel la particule pourrait réellement se trouver. Pour les états cohérents, nous aurons bien des cercles, car les dispersions en $\hat{X}$ et en $\hat{P}$ sont égales dans ce cas-ci. La figure (1.4) décrit une trajectoire dans l'espace de phase$\langle X\rangle et\langle P\rangle$. On remarque tel qu'attendu, qu'elle forme de cercle. On remarque également que puisque la dispersion est constante dans le temps, le cercle d'erreur est constant en tout point de la trajectoire. Notons que le fait de changer la valeur de **z** aura pour effet de changer le rayon de la trajectoire.

Les trajectoires des états comprimés sont également circulaires, il demeure toutefois une différence importante avec celles des états cohérents, cette différence se situe au niveau de la dispersion, donc au lieu d'avoir un « cercle d'erreur » on aura une « ellipse d'erreurs » qui ne sera pas constante en fonction du temps puisqu'elle dépend de la dispersion qui elle non plus n'est pas constante avec le temps.



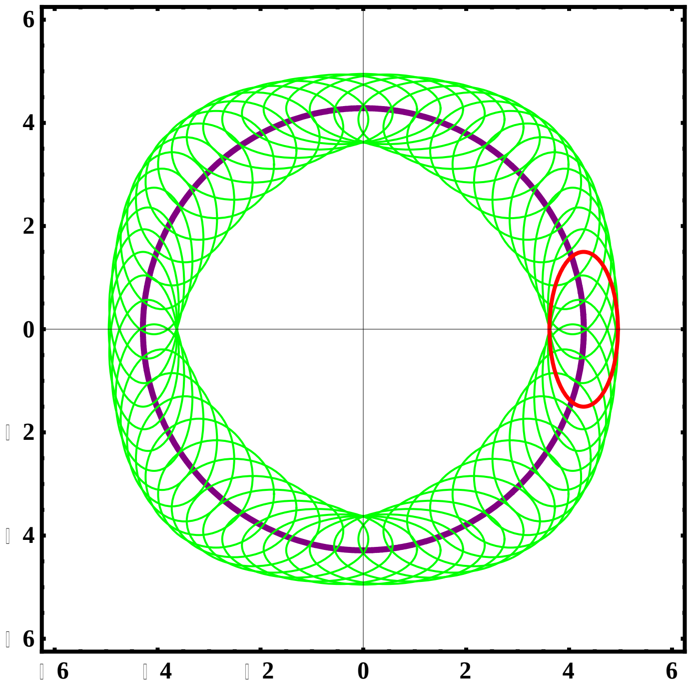


Figure (1.4) trajectoire décrit par un état cohérent avec $\omega = 1\ z = 3$ et en bas trajectoire décrit par un état cohérent avec $\omega = 1\ z = 3$ et $\gamma = 0.4$. La courbe pleine représente la trajectoire et les cercles (ellipses) sont les « cercles d'erreur »
« Ellipses d'erreur » causés par la dispersion qui intervient dans le cas quantique.

III.9 Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons étudié les états cohérents et comprimés d'un système quantique avec un spectre d'énergie discret par l'oscillateur harmonique à 1D. Ces états sont les états propre d'une combinaison linéaire d'opérateurs échelles et sont caractérisés par deux paramètres continus α et γ.
Nous avons étudié le comportement de ces états en ce qui concerne la localisation et l'incertitude minimale ainsi que le calcul de la dispersion et des valeurs moyennes.
Bibliographie

Conclusion

Conclusion :

Dans ce travail, nous avons étudié l'oscillateur harmonique quantique en utilisant la méthode de factorisation, nous nous sommes attelés à vérifier qu'effectivement les états cohérents et comprimés sont des états qui se comportent de façon semblable aux états classiques en minimisant la relation d'incertitude de Heisenberg, et cela en étudiant les valeurs moyennes ainsi que les dispersions des états cohérents et comprimés dépendants et indépendants du temps, Nous avons étudié le comportement de ces états en ce qui concerne la localisation et l'incertitude minimale. Le calcul de la dispersion et des valeurs moyennes a été effectué analytiquement.

Bibliographie

[1]. Schrödinger E. Der stetigeUbergangvon der Mikro- zurMakromechanik. Naturwissenschaften,14 (1926) 664.

[2]. Kennard E H. Zur QuantenmechanikeinfacherBewegungstypen. Zeitschrift f• urPhysik, 44 (1927) 326.

[3]. Glauber R J. The Quantum Theory of Optical Coherence. PhysialReview, 130 (1963) 2529.

[4]. Glauber R J. Coherent and incoherent states of the radiation _eld. Physial Review, 131 (1963) 2766.

[5]. Klauder J R. The action option and a Feynman quantization of spinor _elds interms of ordinary c-numbers. Annals of Physics, 11 (1960) 123.

[6]. M.Kim,W.Son,V.Buzek and P.Knight, " Entanglement by a beam splitter: Nonclassicality as a prerequisite for entanglement",physicalReview A,65(3),(2002),p,032323

[7]. A.Mazouz,A.Mahieddine, "introductionaux états cohérentss et intelligents pour des systémes physique exactement solubles" ,17 Meldrum Street bassin71504 ,Mauritius 2020

[8]. A.Hertz,V.Hussin and H.Eleuch, "Beamsplitter and entanglementcreatedwith thesqueezedcoherent states of the Morse potential"

[9]. Rozet . J.P, L’oscillateur harmonique en mécanique quantique ,LP317 2006

[10]. N.Bogoliubov, "N.Bogoliubov,J. Phys.(Moscow) 11, 292 (1947)".J.Phys.(Moscow),11,(1947),p.292