

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université DJILALI BOUNAAMA Khemis-Miliana

Faculté des Sciences et de la Technologie

Département de la Technologie



**Projet de Fin d'Etude**  
**Pour l'obtention du diplôme de Master en Génie Civil**  
**Option : STRUCTURES**

## **THEME**

**Modélisation du comportement non-linéaire**  
**par la méthode des élément finis**  
**Application sur une poutre chargée ponctuellement**

Réalisé par :

Sahirou Adamou Maman Moustapha

Abdoulaye Yacouba Bachir

Dirigé par :

Dr. A.CHEHAT

# Remerciements

*Avant toute chose nous prononçons la parole Alhamdulillah, nous rendons grâce au Très Haut qui nous a permis de réaliser ce modeste travail, et pour tous les innombrables bienfaits qu'Il nous accorde à chaque instant de notre vie.*

*Notre profonde gratitude pour notre encadreur le Docteur CHEHAT Azzedine, pour sa grande patience, son grand sacrifice envers nous afin de nous enseigner au mieux son savoir-faire pour l'accomplissement de ce modeste travail.*

*Nous tenons à remercier, le président et les membres du jury pour avoir accepté de juger notre travail.*

*Nos sincères remerciements à tous les professeurs qui nous ont encadré au cours de ces longues années.*

# DEDICACES

*Je dédie ce modeste travail :*

*A mes très chers parents, qu'Allah vous bénisse sans cesse, pour tous les efforts dont vous ne vous lassez jamais.*

*A mes chères grandes sœurs Nafissa et Razina, et à mon grand frère Nasser, vous avez toujours été attentionnés et protecteurs à mon égard.*

*A tous mes autres proches, amis et connaissances qui m'ont soutenu, encouragé et redonné sourire dans les périodes difficiles.*

*Enfin pour terminer, à mon cher collègue Moustapha, on a toujours été voisins pendant quatre ans, nous arpentons le chemin de la fac ensemble, nous partageons même les repas ensemble, et travailler avec toi est toujours un plaisir, tu es un frère pour moi. Puisse Le Très Haut nous accorder la réussite, amin.*

*Abdoulaye Yacouba Bachir*

# DEDICACES

*Je dédie ce modeste travail à :*

*Ma très chère mère (Ouma Amani) qui a longtemps souhaité voir ce jour en veillant sur mon éducation et sur mes études.*

*Mon père (Sahirou Adamou): merci père de m'avoir donné tout le soutien dont j'avais besoin, et de m'avoir guidé et orienté.*

*Mon grand frère (Mahaman Sani Sahirou) qui m'a aidé durant toutes ces années d'études*

*A tous les membres de ma familles (mes frères, mes sœurs, mes cousines), mes oncles, mes tantes, mes nièces, mes neveux, mes grand parents, mes belles sœurs, mes beaux-frères) qui m'ont toujours encouragé.*

*Mes amis d'enfances.*

*A tous les enseignants de l'école primaire jusqu'à ce jour surtout (Dr CHEHAT Azzedine) qui m'a beaucoup aidé pour la réalisation du travail.*

*A toute la promotion 2020.*

*A mes très chers amis et tous mes collègues de GENIE CIVIL De khemis Miliana.*

*Sahirou Adamou Maman Moustapha*

## ملخص

هوك قانون فهم خلال من أولاً تمرير مع ، الخطي غير التأسيسي القانون دراسة هو الحالي موضوعنا حدده الذي الهدف فرضيات خلال من المحدودة العناصر طريقة وهي أخرى طريقة استخدام حيث من ، الكبيرة بالتشوهات مقارنة وحدوده .ماتلاب الكمبيوتر أداة باستخدام وتيموشينكو برنولي

## RESUME

L'objectif fixé par notre présent thème est l'étude sur la loi de comportement non linéaire, en passant d'abord par la compréhension de la loi de Hooke et sa limite par rapport aux grandes déformations, d'où l'utilisation d'une autre méthode qui est celle des élément finis à travers les hypothèses de Bernoulli et Timoshenko à l'aide l'aide de l'outil informatique Matlab.

## ABSTRACT

The objective fixed by our present topic is the study on the nonlinear constitutive law, while passing first by the comprehension of the law of Hooke and its limit compared to the large deformations, from where the use of another method which is the finite element method through the hypotheses of Bernoulli and Timoshenko using the computer tool Matlab.

# TABLE DES MATIERES

Remerciements.....	
Dédicaces.....	
Dédicaces.....	
Résumé.....	
Liste des figures.....	
Liste des tableaux.....	
Notations.....	

## **Introduction générale**

I.Introduction.....	1
II. Problématique.....	1
III. Objectifs visés.....	1
IV. Organisation du mémoire.....	1

## **Chapitre I**

### **Etude bibliographique sur le comportement élastique pour les faibles niveaux de déformations (la loi de Hooke généralisée).**

I.1. Introduction .....	3
I.2. Elasticité linéaire : cas d'une contrainte normale uni-axiale .....	3
1.2.1. Loi de comportement : la loi de Hooke.....	3
I.3. Relation déformation contrainte.....	8
I.4. Conclusion.....	11

## **Chapitre II**

### **Principe de la méthode des éléments finis**

II.1.	
Introduction.....	13
II.2. Historique de la méthode.....	14
II.3 Les avantages.....	14
II.4. Modélisation et discrétisation.....	15
II.5. Concept de la méthode des éléments finis .....	16
II.6. Étapes de la méthode des éléments finis .....	16
II.7. Classement d'éléments finis .....	17
II.8. Les propriétés d'un élément fini.....	18

II.9. Principe des travaux virtuels.....	19
II.10. Equation fondamentale de la MEF.....	21
II.10.1. Démarche de formulation des éléments finis.....	22
II.10.2. Discrétisation de la structure en élément finis.....	22
II.10.3. Calcul des matrices élémentaires.....	22
II.10.4. Assemblage des matrices élémentaires.....	22
II.10.5. Etapes pratiques du calcul par EF.....	22
II.10.6. Intégration numérique.....	23
II.11. Conclusion.....	29

### **Chapitre III**

#### **Intégration du comportement non linéaire de l'élément poutre**

III.1. Introduction.....	31
III.2. Exemples de types d'éléments finis.....	31
III.2.1 Elément fini barre.....	31
III.2.2 Elément fini poutre.....	34
III.3. Analyse non linéaire de la poutre suivant la méthode de Timoshenko.....	39
III.4. Conclusion.....	43

### **Chapitre IV**

#### **Validations numériques**

IV.1. Introduction.....	44
IV.2. Méthode de calcul Bernoulli contre la méthode de Timoshenko.....	44
IV.2.1. Poutre appuyée (charge ponctuelle) .....	44
IV.2.2. Poutre encastree (charge ponctuelle) .....	48
IV.3. Réponse non linéaire d'une poutre simplement appuyée chargée ponctuellement par la méthode de Timoshenko.....	51
IV.4. Conclusion.....	53

<b>Conclusion générale.....</b>	<b>55</b>
---------------------------------	-----------

# LISTE DES FIGURES

## Chapitre I

Fig. I.1. Eprouvette soumise à un essai de traction simple.....	4
Fig. I.2. Poutre soumise à une force de traction dans la direction ( $Ox$ ).....	4
Fig. I.3. Comportement d'un solide déformable sous contrainte.....	5
Fig. I.4. Etat de cisaillement.....	6
Fig. I.5. Composantes du tenseur des contraintes.....	7
Fig. I.6. Les contraintes normales sur les différentes faces d'un élément.....	9

## Chapitre II

Fig. II.1. Étape de l'analyse d'un problème aux limites.....	15
Fig. II.2. Maillage du domaine en triangles à trois nœuds.....	16
Fig. II.3. Maillage d'un bâtiment en quatre nœuds.....	17
Fig. II.4. Les différentes classes d'éléments finis.....	18
Fig. II.5. Exemple traité.....	23

## Chapitre III

Fig. III.1. Élément barre unidimensionnel.....	31
Fig. III.2. Etat de contrainte-déformation.....	32
Fig. III.3. Élément poutre et signe conventionnel (l'effort tranchant, moment fléchissant)....	35
Fig. III.4. Etat de moment-déformation.....	36
Fig. III.5. Poutre de Timoshenko.....	39

## Chapitre IV

Fig. IV.1. Charge concentrée (poutre simplement appuyée) .....	44
Fig. IV.2. Effet du coefficient de poisson et de poisson et de la hauteur de la poutre sur le déplacement.....	47
Fig. IV.3. Charge concentrée (poutre simplement appuyée) .....	48
Fig. IV.4. Effet du coefficient de poisson et de la hauteur de la poutre sur le déplacement...	50
Fig. IV.5. Problème traité.....	51
Fig. IV.6. La contrainte-déformation ultime du béton en compression.....	52
Fig. IV.7. Réponse non linéaire au point d'application de la force.....	52
Fig. IV.8. L'influence des conditions aux limites sur la réponse non linéaire au point d'application de la force sur la poutre.....	53

# LISTE DES TABLEAUX

Tableau IV.1. Déplacements et rotation trouvés par les deux méthodes (Bernoulli et Timoshenko) .....	45
Tableau IV .2. Résultats trouvés.....	46
Tableau IV.3. Résultats trouvés.....	49

# Notations

## **Majuscules romaines :**

A : Section transversale

L : Longueur de la poutre.

$E_{vj}$  : Module de déformation longitudinale différée du béton.

$E_{ij}$  : Module de déformation longitudinale instantanée du béton.

G : module d'élasticité transversale.

E : Module élastique

I : Moment d'inertie.

M : Moment fléchissant.

F : Force extérieure.

U : Déplacement

## **Minuscules romaines :**

b: Hauteur de la poutre

f : Flèche.

$f_{cj}$  : Résistance caractéristique du béton à la compression à « j » jours.

$f_{c28}$  : Résistance caractéristique du béton à la compression à « 28 » jours.

$f_e$  : Limite d'élasticité de l'acier.

$f_{tj}$  : Résistance conventionnelle de la traction du béton à « j » jours.

$f_{t28}$  : Résistance conventionnelle de la traction de béton à «28 » jours.

i : Rayon de giration.

## **Minuscules grecques :**

$\gamma$  : Coefficient de sécurité.

$\epsilon$ : Déformation relative.

$\eta$ : Coefficient de fissuration.

$\lambda$ : Élancement mécanique.

$\mu$ : Coefficient de frottement.

$\nu$ : Coefficient de POISSON.

$\rho$  : Rapport de deux dimensions

$\sigma$  : Contrainte normale.

$\tau$  : Contrainte tangentielle.

$\delta$ : Déplacement d'un niveau.

$\gamma$  est l'angle de déformation relative.

$\theta$  :Rotation.

# Introduction générale

## **I. Introduction**

Afin de dimensionner des ouvrages et des structures de plus en plus complexes, de larges études sont toujours en cours sur les matériaux utilisés dans les constructions en Génie Civil, afin de prédire leur comportement à court et à long terme. Ainsi en mécanique des milieux continus, une branche de la science des matériaux, les lois de comportement de la matière visent à modéliser le comportement des fluides ou solides par des lois empiriques lors de leur déformation. Parmi ces lois, intervient la loi de Hooke qui modélise le comportement des solides élastiques soumis à des contraintes.

## **II. Problématique**

La loi de Hooke est souvent utilisée pour résoudre des problèmes de faibles niveaux de déformations, mais elle reste limitée pour de grandes déformations, le recours à d'autres méthodes s'impose, comme la méthode des éléments finis.

## **III. Objectifs visés**

L'objectif de notre thème est de montrer les limites de la méthode linéaire (loi de Hooke) et l'intérêt de la méthode non linéaire, tout en comparant la théorie de Bernoulli et de Timoshenko, afin de se familiariser avec le programme Matlab de la méthode des éléments finis.

## **IV. Organisation du mémoire**

Ce mémoire est reparti entre quatre chapitres, organisés comme ci-dessous :

Le **premier chapitre** fait l'objet d'une étude consacrée sur l'aspect général de la loi de Hooke.

Le **deuxième chapitre** est consacré à l'étude bibliographique de méthode des éléments finis avec l'objectif de déterminer les matrices de rigidité élémentaire des différents éléments ainsi que leur technique d'assemblage.

Le **Troisième chapitre** est dédié à l'intégration du comportement non linéaire de l'élément poutre.

Enfin le **quatrième chapitre** est consacré à la validation numérique, la présentation des théories de Timochenko et Bernoulli, ainsi que la méthode non linéaire.

# Chapitre I :

## La loi de Hooke Généralisée

## I.1. Introduction

Soumis aux efforts, les matériaux se déforment. L'étude du comportement mécanique de ces matériaux a pour but de connaître leur réponse à une sollicitation donnée. Parmi ces matériaux, certains sont plus raides et d'autres plus cassants. Tout matériau à ses propres limites qu'il faut identifier, alors la question qui se pose est : peut-on écrire une loi de comportement qui représente tous les matériaux ? C'est l'objectif de la loi de Hooke, énoncée par le physicien anglais Robert Hooke, par la phrase en latin : **ut tensio sic vis**, en 1678, ce qui signifie « telle extension, telle force ». Hooke désirait obtenir une théorie des ressorts, en soumettant ces derniers à des forces croissantes successives.

## I.2. Elasticité linéaire : cas d'une contrainte normale uni-axiale

Lorsqu'un corps est soumis à des forces extérieures, il y a un changement de sa forme ou de ses dimensions. Ce changement s'appelle déformation. Tous les corps se déforment sous l'effet des forces qui s'exercent sur eux. Cette déformation est plus ou moins grande dépendamment de la grandeur des forces et des matériaux qui sont en cause. La déformation élastique est une déformation réversible et c'est un domaine important de la mécanique des milieux continus. L'élasticité linéaire concerne les petites déformations qui sont proportionnelles aux sollicitations. Dans cette théorie, l'allongement est proportionnel à la force dans le cas d'un étirement, l'angle est proportionnel au couple dans le cas d'une torsion. Lors des grandes déformations, l'élasticité devient non linéaire pour certains matériaux, pour d'autre la fracture ou le fluage interviennent. Dans la théorie de l'élasticité, le matériau est homogène et isotrope.

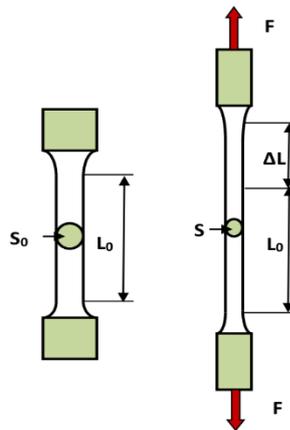
### I.2.1. Loi de comportement : la loi de Hooke

**Loi de Hooke** : Lorsqu'on charge un matériau, si la contrainte produite demeure inférieure à sa limite élastique, sa déformation est proportionnelle à la contrainte qu'il subit.

La loi de Hooke modélise le comportement des solides élastiques soumis à des contraintes. Elle stipule que la déformation élastique est une fonction linéaire des contraintes. Sous sa forme la plus simple, elle relie l'allongement (d'un ressort, par exemple) à la force appliquée. La première formulation a été établie expérimentalement par Hooke, qui avait suspendue une barre de section (**S**) à son propre poids. Prenons un cas pratique simple, qui est celui d'une poutre de section (**So**) tendue par une force (**F**) suivant un axe passant par son centre de gravité figure (I.1), produisant ainsi une contrainte ( **$\sigma$** ) uniforme sur sa section. Cette contrainte est une grandeur homogène à une pression et s'exprime en Pascal (Pa), c'est le

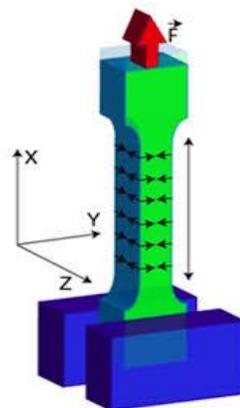
rapport de la force  $F$  sur l'aire  $S$  de la barre. Tel que :  $\sigma = \frac{F}{S}$  et on divise l'allongement ( $\Delta L$ ) par la longueur initiale ( $l_0$ ), ce qui va nous permettre de trouver une grandeur sans dimension que l'on appelle déformation ou allongement relatif  $\varepsilon = \frac{\Delta L}{l_0}$ . Quant à  $E$ , c'est le module de Young ou module d'élasticité ou module de traction est la constante qui relie la contrainte de traction et le début de la déformation d'un matériau élastique isotrope. La loi de Hooke s'exprime alors sous forme :

$$\sigma = E\varepsilon \quad (1.1)$$



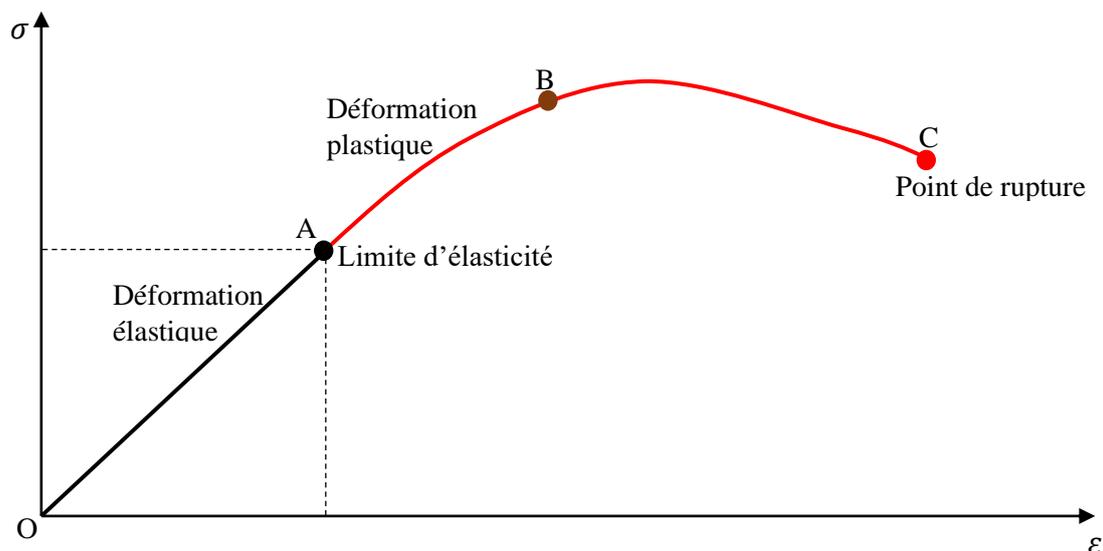
**Fig.I.1.** Eprouvette soumise à un essai de traction simple

En réalité, la barre se déforme dans les 3 directions (fig.I.2). Dans le sens  $Ox$  il y a un allongement, et dans les sens  $Oy$  et  $Oz$  il y a un raccourcissement.



**Fig.I.2.** Poutre soumise à une force de traction dans la direction ( $Ox$ ).

De la loi de Hooke, deux aspects sont importants : **la linéarité** et **l'élasticité**. Ces deux aspects ne sont pas identiques, la linéarité exprime que l'allongement est proportionnel à la force, l'élasticité exprime que cet effet est réversible et permet de revenir à l'état initial tel un ressort soumis à de faibles forces. L'élasticité a une limite, qui est indépendante de la notion de linéarité, Hooke n'a considéré que la phase élastique est linéaire, donc proportionnelle et réversible. La linéarité provient du fait que l'on est en faible déformation (Fig. I.3).



**Fig. I.3.** Comportement d'un solide déformable sous contrainte.

Cette courbe comporte 03 phases :

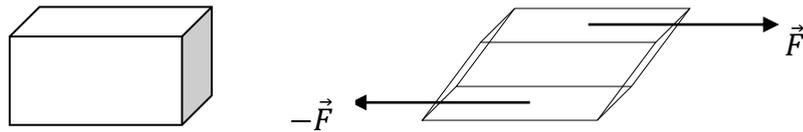
- **OA :** zone élastique (linéaire). Elle correspond aux déformations élastiques où les allongements sont proportionnels aux charges. Dans cette phase le matériau subit une transformation réversible, quand la charge est supprimée l'éprouvette retourne à l'état initial, c'est donc durant cette phase que le matériau a un comportement élastique linéaire. Le coefficient de proportionnalité entre la contrainte et déformation est appelé module Young ou module d'élasticité longitudinale noté ( $E$ ) et c'est la pente de la courbe.
- **AB et BC :** zone plastique (non linéaire). Elle correspond au domaine plastique dans lequel lorsqu'on supprime la charge l'éprouvette ne revient plus à l'état initial. Cependant elle conserve une déformation permanente dite plastique.
- **C :** zone de rupture. Elle correspond à la phase de restriction du matériau jusqu'à ce qu'il rompe.

La loi de Hooke est une loi de déformation en traction ou compression. Cependant, en cisaillement, on a une loi similaire (Fig. I.4) :

$$\tau = G\gamma \quad (1.2)$$

Où :

- $\tau$  est la contrainte de cisaillement
- $G$  est le module de cisaillement
- $\gamma$  est l'angle de déformation relative.



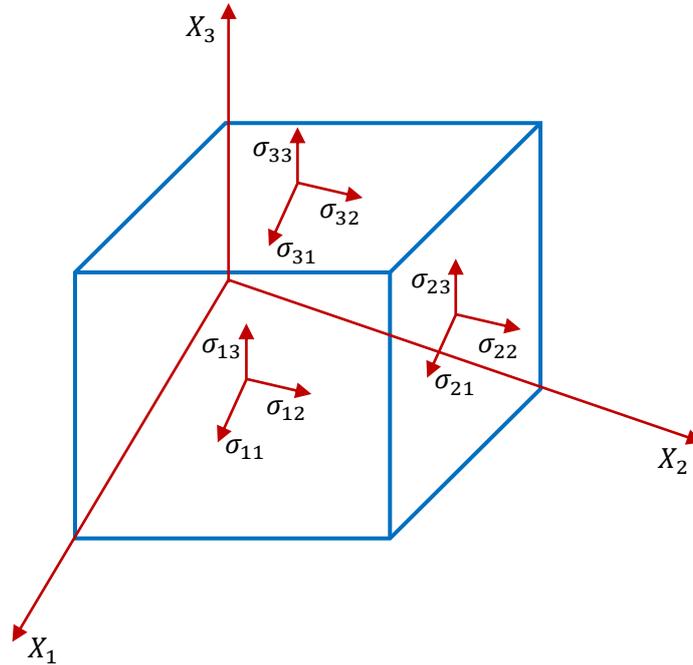
**Fig. I.4.** Etat de cisaillement pur.

La déformation de cisaillement est définie comme étant la variation de l'angle droit formé par deux axes. Elle est associée à deux directions orthogonales. Trois composantes de déformations de cisaillement  $\gamma_{xy}$ ,  $\gamma_{xz}$ ,  $\gamma_{yz}$ , sont définies en chaque point.

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \end{aligned} \quad (1.3)$$

Si l'on s'intéresse à un petit élément de matière subissant de petits éléments des petites déformations, alors sa loi de déformation est linéaire et réversible quelle que soit la sollicitation. On peut généraliser la loi de Hooke en l'exprimant sous forme matricielle en définissant la contrainte et la déformation localement par un tenseur (3x3), le **tenseur des contraintes**  $[\sigma_{ij}]$  et le **tenseur des déformations**  $[\epsilon_{ij}]$ .

Le tenseur des contraintes est un tenseur d'ordre 2 utilisé en mécanique des milieux continus pour caractériser l'état de contrainte, c'est-à-dire les efforts intérieurs mis en jeu entre les portions déformées d'un milieu. Le terme a été introduit par Cauchy vers 1822. Comme les efforts intérieurs sont définis pour chaque surface coupant le milieu (on parle d'ailleurs également d'efforts surfaciques), le tenseur est défini localement, en chaque point du solide. L'état de contrainte du solide est donc représenté par un champ tensoriel. On parle aussi de ce fait de champ de contrainte.



**Fig. I.5.** Composantes du tenseur des contraintes

Le comportement élastique du matériau est modélisé par un tenseur d'ordre 4  $[c_{ijkl}]$  contenant 81 coefficients indépendants est réduit à 21 en tenant compte de la symétrie des tenseurs des contraintes et de déformations, et de la stabilité énergétique du tenseur.

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \cdot \varepsilon_{ij} \tag{1.4}$$

Le tenseur  $C_{ijkl}$  peut être représenté sous la forme d'une matrice (6x6), où les directions représentent les directions de la déformation.

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1123} & C_{1113} & C_{1112} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2223} & C_{2213} & C_{2212} \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & C_{3323} & C_{3313} & C_{3312} \\ C_{2311} & C_{2322} & C_{2333} & C_{2323} & C_{2313} & C_{2312} \\ C_{1311} & C_{1322} & C_{1333} & C_{1323} & C_{1313} & C_{1312} \\ C_{1211} & C_{1222} & C_{1233} & C_{1223} & C_{1213} & C_{1212} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} \end{pmatrix} \tag{1.5}$$

Le tenseur des rigidités a trois composantes indépendantes. Dans ce cas on trouve que trois valeurs distinctes :  $C_{11}, C_{12}, C_{44}$  tel que :

$$C_{11} = C_{1111}, C_{12} = C_{1112}, C_{44} = C_{1212}$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

Si on utilise les **coefficients de Lamé** on trouve de nouveau :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

Les **coefficients de Lamé** sont les deux coefficients suivants :

- $\lambda$ , ou *premier coefficient de Lamé* ;
- $\mu$ , le module de cisaillement, aussi appelé *second coefficient de Lamé*. Ce

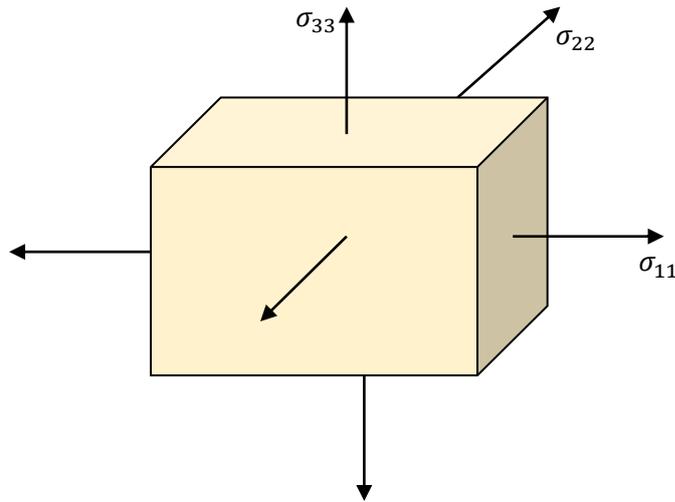
coefficient est aussi parfois noté G.

Ces deux coefficients sont homogènes à une contrainte et ont donc pour unité le pascal (Pa) ou newton par mètre carré (N/m<sup>2</sup>). Ils portent le nom de Gabriel Lamé.

$$\text{Avec : } \begin{cases} \lambda = \frac{E\nu}{(1+\lambda)(1-2\nu)} \\ \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} = G \end{cases} \quad \text{Donc : } \begin{cases} E = \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu} \\ \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} \end{cases}$$

### I.3. Relation déformation-contrainte

Considérons comme longueur initiale de AB l'équivalent d'une unité. Par supposition, la contrainte  $\sigma_x$  est premièrement appliquée, ce qui va entraîner une variation de la longueur AB en une valeur égale dans la figure (I.6) suivante :



**Fig. I.6.** Les contraintes normales sur les différentes faces d'un élément.

$$\frac{\sigma_x}{E} \text{ suivant } x, \frac{-\nu}{E} \sigma_x \text{ suivant } y, \frac{-\nu}{E} \sigma_x \text{ suivant } z$$

En second lieu, la contrainte  $\sigma_y$  est appliquée, ainsi que la variation de AD est égale à

$$\frac{\sigma_y}{E} \text{ suivant } y, \frac{-\nu}{E} \sigma_y \text{ suivant } x, \frac{-\nu}{E} \sigma_y \text{ suivant } z$$

En dernier la contrainte  $\sigma_z$  est appliquée et la longueur BB' varie d'une quantité égale à :

$$\frac{\sigma_z}{E} \text{ suivant } z, \frac{-\nu}{E} \sigma_z \text{ suivant } x, \frac{-\nu}{E} \sigma_z \text{ suivant } y$$

La déformation totale suivant l'axe X est :

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \quad (1.8)$$

De même, les déformations totales dans les directions Y et Z seront :

$$\begin{cases} \varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \end{cases} \quad (1.9)$$

La relation dans le domaine élastique entre les contraintes et les déformations pour un corps soumis à un état de contrainte de cisaillement pure bidimensionnel, a été trouvée expérimentalement sous la forme suivante :

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy} \quad (1.10)$$

De même pour le cas tridimensionnel, les deux autres composantes de déformation de cisaillement seront :

$$\begin{cases} \gamma_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz} \\ \gamma_{xz} = \frac{1}{G} \tau_{xz} \end{cases} \quad (1.11)$$

Avec : G représente le module d'élasticité de cisaillement appelé aussi le module de rigidité.

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (1.12)$$

Si nous voulons réécrire les équations précédentes sous une forme matricielle, elles seront comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} X \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} \quad (1.13)$$

En exprimant la relation contraintes- déformations (loi de Hooke inverse) suivantes :

$$\begin{cases} \sigma_x = 2G\varepsilon_x + \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \\ \sigma_y = 2G\varepsilon_y + \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \\ \sigma_z = 2G\varepsilon_z + \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \\ \tau_{xy} = 2G\gamma_{xy} \\ \tau_{xz} = 2G\gamma_{xz} \\ \tau_{yz} = 2G\gamma_{yz} \end{cases} \quad (1.14)$$

Avec :

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}, \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad (1.15)$$

Et encore :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) \end{bmatrix} X \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (1.16)$$

#### I.4. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons vu qu'il existe une loi universelle de comportement qui décrit le comportement élastique, la loi de Hooke étant une approximation, cependant elle peut devenir inexacte quand la déformation est trop grande. Un détail que nous étudierons dans les chapitres à venir.

# Chapitre II :

## La méthode des éléments finis

## II.1. Introduction

Pour analyser un phénomène naturel ou un phénomène d'ingénierie, on est souvent amené à développer un modèle mathématique qui peut décrire d'une manière aussi fiable que possible le problème en question. Le développement d'un modèle mathématique s'appuie généralement sur quelques postulats de base et plusieurs hypothèses simplificatrices pour aboutir à des équations qui sont souvent des équations différentielles auxquelles on ajoute des conditions limites. Exemple, la théorie d'élasticité s'appuie sur le postulat fondamental de l'existence du vecteur contrainte et les équations générales d'élasticité linéaire isotrope sont obtenues avec les hypothèses de petites déformations, d'homogénéité et d'isotropie des matériaux ainsi que la linéarité des relations qui lient les contraintes et les déformations.

Avec les progrès enregistrés dans le domaine de l'informatique et les performances des ordinateurs de plus en plus grandes, il est devenu possible de résoudre des systèmes d'équations différentielles très complexes. Plusieurs techniques de résolution numérique ont été ainsi développées et appliquées avec succès pour des solutions satisfaisantes à des problèmes d'ingénierie très variés. La méthode des éléments finis est l'une des techniques numériques les plus puissantes. L'un des avantages majeurs de cette méthode est le fait qu'elle offre la possibilité de développer un programme permettant de résoudre, avec peu de modifications, plusieurs types de problèmes. En particulier, toute forme complexe d'un domaine géométrique ou un problème est bien posé avec toutes les conditions aux limites, peut être facilement traité par la méthode des éléments finis ( Seghir, 2005-2014 ).

La méthode des éléments finis (M.E.F.) est un des outils les plus efficaces et les plus généraux pour l'analyse des structures dans de nombreux secteurs de l'industrie : aérospatial, automobile nucléaire, génie civil, construction navale, etc.

Dans le domaine du calcul des structures, la M.E.F est une technique à caractère pluridisciplinaire qui met en œuvre des connaissances qui relèvent des nombreuses disciplines de base telles que la mécanique des structures, l'analyse numérique et l'informatique appliquée. Les bases théoriques de la M.E.F. Reposent d'une part sur les méthodes énergétiques de la mécanique des structures et d'autre part sur les méthodes d'approximation spatiale des fonctions (Ritz, Galerkin).

La M.E.F est basée sur une décomposition du domaine dans lequel on désire effectuer la simulation en sous- domaines de forme géométrique simple appelés <<élément fini>> pour lesquels on procède à des approximations nodales des champs de déplacements ou des

contraintes qui prennent en général la forme de fonction polynomiales. L'ensemble de ces éléments constitue ce que l'on appelle le maillage du domaine. Ces éléments sont liés par un nombre fini de conditions de continuité, exprimées en certains points communs à plusieurs éléments appelés : <<nœuds>>.

## II.2. Historique de la méthode

Les bases théoriques de la méthode des éléments finis (M.E.F) repose d'une part sur la formulation énergétique de la mécanique des structures et d'autre part sur les méthodes d'approximations. La méthode des éléments finis est mise au point en 1953 chez Boeing (Seattle, USA, calcul des structures d'ailes d'avion), c'est là que furent développés le premier élément fini, sa matrice de rigidité, l'assemblage et la résolution par la méthode des déplacements (publié par Turner, Clough, Martin et Topp en 1956) [TUR 56].

Quant aux bases théoriques générales, alliant l'analyse des structures en barres et poutres avec celle des solides, elles sont étudiées de 1954 à 1960 (Argyris, Kelsey) [ARG 60]. Certaines idées apparurent auparavant, en particulier chez les mathématiciens pour résoudre divers problèmes aux limites, par exemple celui de la torsion de Saint Venant en divisant la section en triangles, mais elles restèrent sans suite.

L'expression élément finie a été inventée par Clough en 1960. Dans les années 60, la (M.E.F) s'attaque à tous les domaines de calcul de structures. Dans les programmes on la trouve, principalement dans les domaines de la mécanique des solides et des structures. Ils ont été conçus pour être exécutés sur de gros ordinateurs tels que : ABAQUS, SAP, CATIA.

La crédibilité des résultats obtenus va permettre l'utilisation de la (M.E.F) par des entreprises et des bureaux d'études de taille réduite.

C'est évidemment l'apparition d'ordinateurs puissants qui a permis le développement de la simulation numérique. Le rythme d'évolution de l'informatique est actuellement gigantesque et les possibilités d'application augmentent sans cesse.

## II.3. Les avantages

Les avantages qu'offre l'application de la méthode des éléments finis sont nombreux :

- La puissance de la méthode des éléments finis réside essentiellement dans sa souplesse, on peut l'exercer à une variété de problèmes mécaniques ou physiques.
- On peut représenter un grand nombre de formes de structures à l'aide d'un modèle analytique général commun, ce qui offre moins d'hypothèses simplificatrices.
- Une prise en compte des interactions entre les composants.
- La possibilité de définir des maillages très irréguliers.

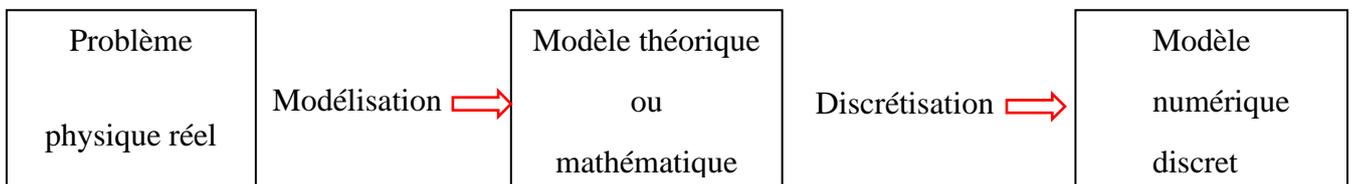
- La géométrie du domaine peut être quelconque, les forces et les conditions aux limites peuvent être aussi de natures quelconques.
- Le maillage peut combiner autant de types d'éléments que l'on souhaite. Et toute cette généralité est contenue dans un programme unique qu'on peut faire tourner sur un ordinateur (sélection du problème, de la géométrie, du type d'élément, des chargements et des conditions aux limites).
- Une meilleure vue du comportement d'ensemble de la structure.
- Ainsi que la détection de ces éventuelles faiblesses.
- Une conception plus économique. Etc.

La méthode des éléments finis réside dans le fait que le modèle qu'elle utilise est très proche de la structure réelle.

#### II.4. Modélisation et discrétisation

La méthode des éléments finis est un procédé d'approche particulier qui consiste à transformer les équations différentielles du problème physique en un système linéaire fini d'équations algébriques, par l'application du principe des travaux virtuels. La méthode des éléments finis est donc une procédure générale de discrétisation pour la résolution des problèmes, il faut effectuer deux opérations essentielles : la modélisation et la discrétisation, ces opérations se font en deux temps.

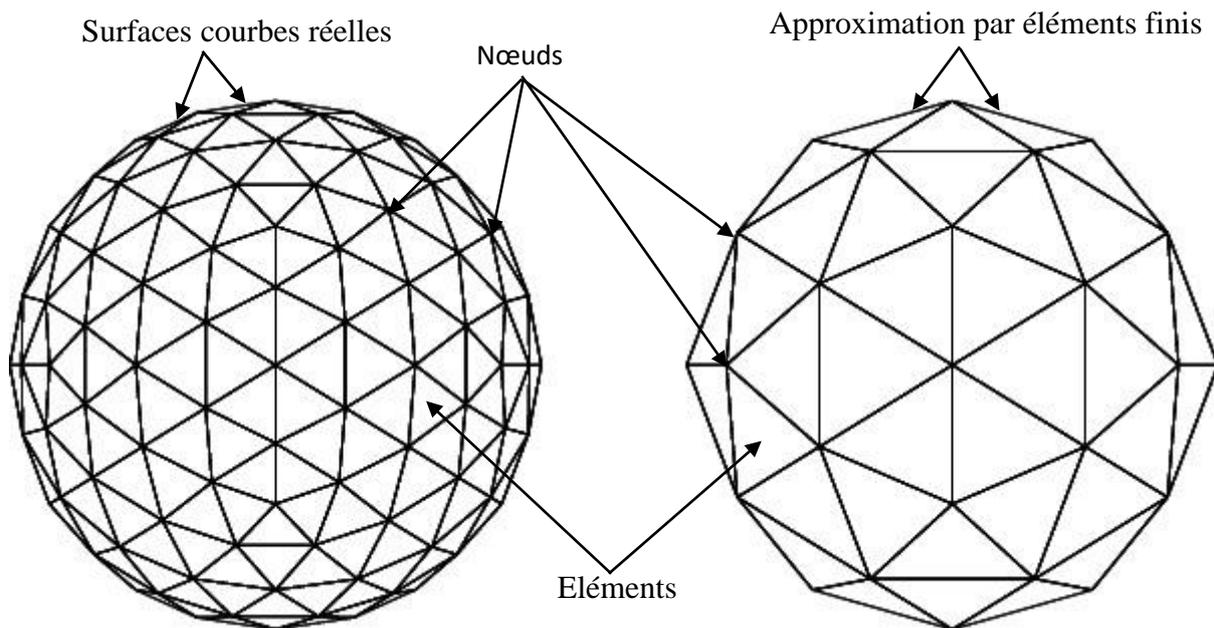
La modélisation des données est l'analyse et la conception de l'information contenue dans le système afin de représenter la structure de ces informations et de structurer le stockage et les traitements informatiques. La discrétisation ensuite porte sur les deux aspects principaux du problème pratique. La représentation de la géométrie, des charges, des conditions aux limites ; et le choix des éléments finis et du maillage.



**Figure II.1** : Étape de l'analyse d'un problème aux limites

## II.5. Concept de la méthode des éléments finis

Le concept de base de la méthode des éléments finis est la subdivision du modèle mathématique à des composants disjoints de géométrie simple appelés (éléments finis), le comportement de chaque élément est exprimé en termes d'un nombre fini de degrés de liberté, le comportement (réponse) du modèle mathématique est considéré, approximativement, celui du modèle discret obtenu par connexion ou assemblage des éléments.

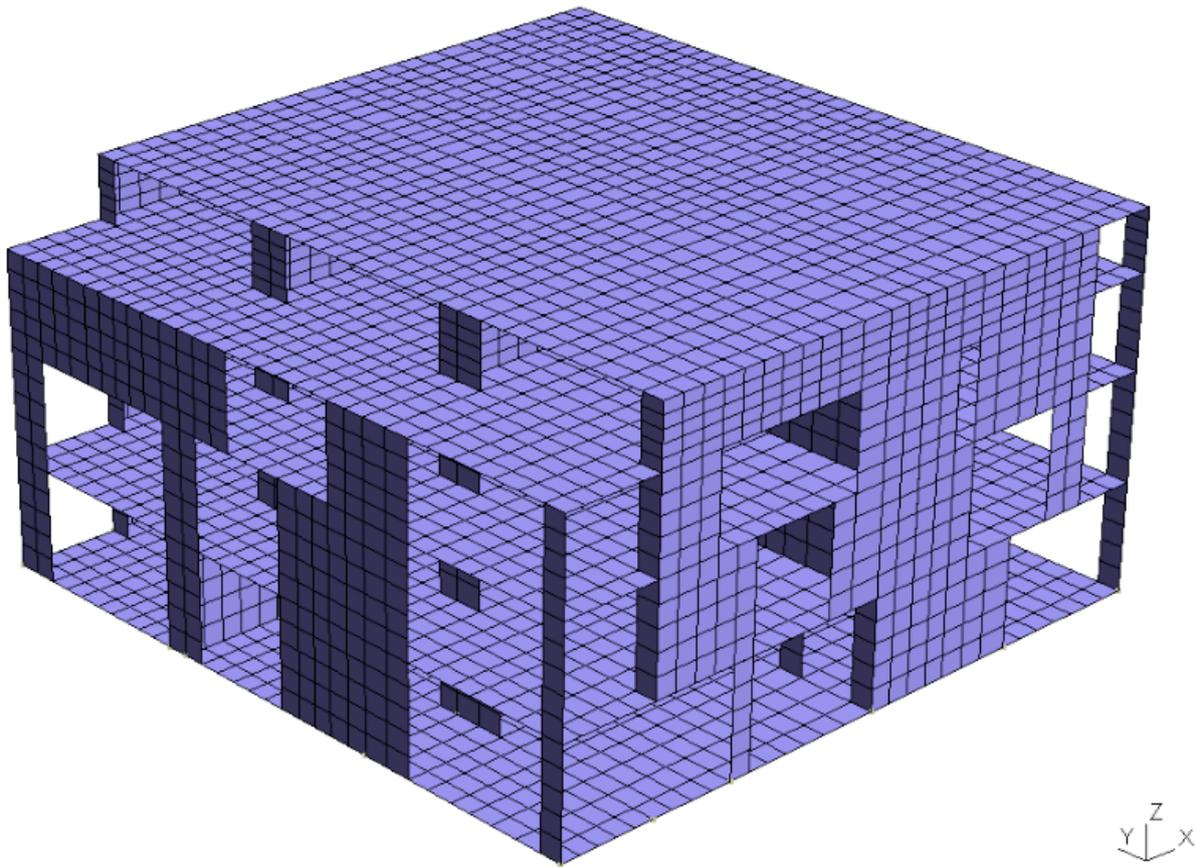


**Figure II.2.** Maillage du domaine en triangles à trois nœuds

## II.6. Étapes de la méthode des éléments finis

Dans diverses applications précitées, les éléments finis perdent leur signification physique d'éléments structuraux : la méthode des éléments finis est considérée comme un outil de mathématiques appliquées, destiné à résoudre les équations différentielles. Néanmoins, les étapes de l'étude d'un problème aux limites sont toujours les mêmes, on peut les résumer en sept étapes :

1. Découpage du domaine en un maillage d'éléments finis (Fig. II.3).
2. Interpolation en respectant les critères de convergence.
3. Calcul des caractéristiques de chaque élément.
4. Assemblage.
5. Introduction des conditions aux limites essentielles et résolution.
6. Évaluation, dans chaque élément, des grandeurs utiles (contraintes, déplacements...).
7. Jugement de manière critique les résultats obtenus.

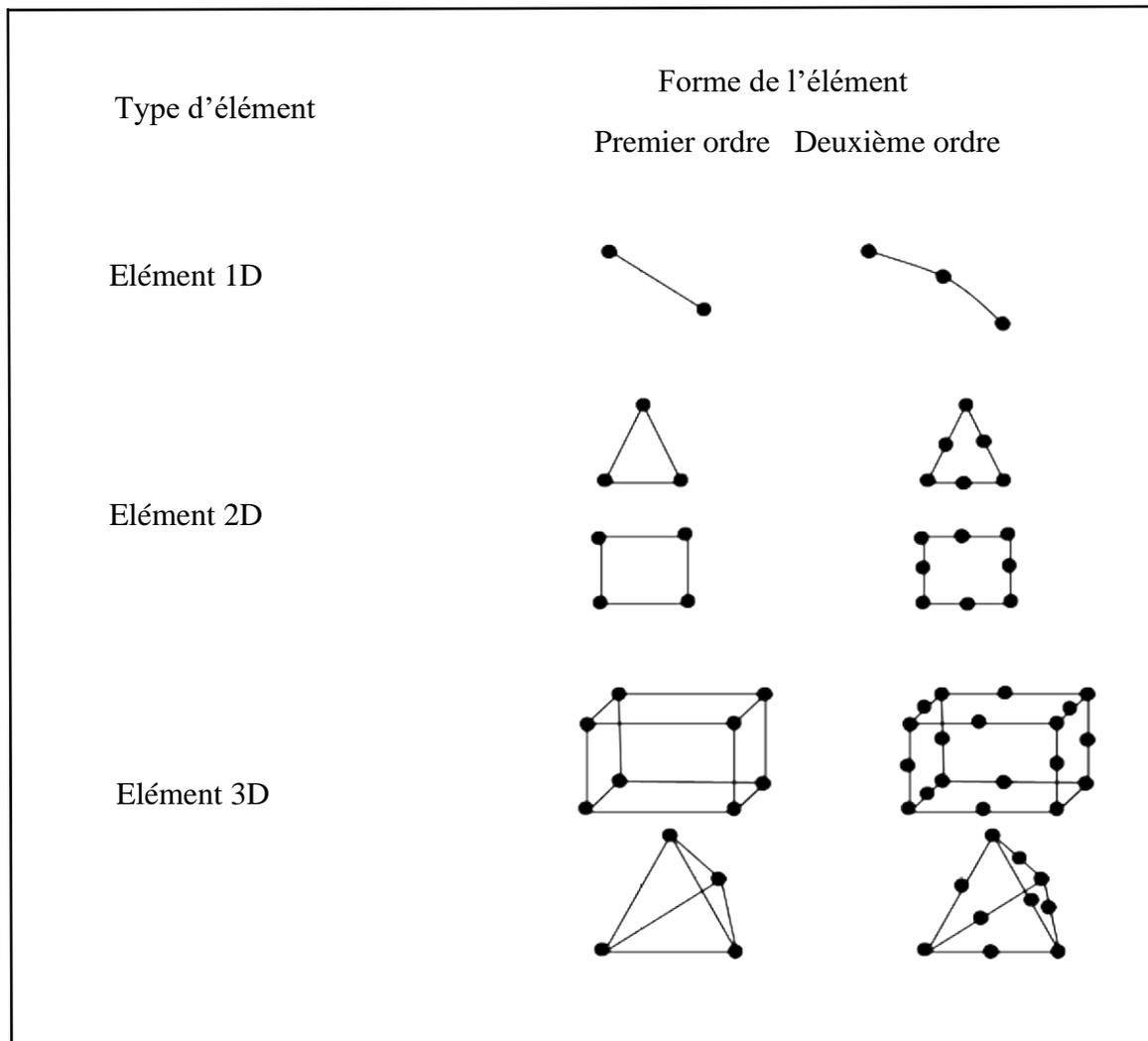


**Figure II.3.** Maillage d'un bâtiment en quatre nœuds

## II.7. Classement d'éléments finis

Suivant leur géométrie, plusieurs classes d'éléments finis peuvent être distinguées (Fig. II.4):

- Les éléments unidimensionnels (1D) : sont utilisés de façon individuelle ou associée à des plaques pour modéliser les raidisseurs. Exemple : barre, poutre rectiligne ou courbe.
- Les éléments bidimensionnels (2D) : élasticité plane (déformation ou contrainte plane). Exemple : plaque en flexion, coques courbes, de forme triangulaire ou quadrangulaire.
- Les éléments tridimensionnels (3D) : élément de volume, ou coques épaisses. Les éléments axisymétriques : qui constituent une classe bien particulière.



**Fig.II.4.** Les différentes classes d'éléments finis

Dans chaque groupe des différents niveaux de précision peuvent être atteints. Ceci dépend du nombre de degrés de liberté associée avec le type d'élément. Les points nodaux se trouvent généralement sur les frontières des éléments bien que des nœuds internes peuvent aussi être inclus dans certains éléments pour augmenter leur efficacité. Généralement, avec l'augmentation de l'ordre de l'élément, celui-ci devient plus précis.

### II.8. Les propriétés d'un élément fini

Le découpage en éléments finis permet d'isoler un élément fini pour l'étudier tout en établissant les caractéristiques, par exemple signaler un élément fini comprend les points suivants :

- **La géométrie** : l'élément peut-être 1D, 2D ou 3D comme nous l'avons vu précédemment.
- **Les frontières** qui sont :
  - a) Les points (extrémités du segment).
  - b) Des segments de droite ou de courbe.

c) Des faces planent ou courbe.

- **Le matériau** : le matériau de l'élément est défini par une loi de comportement (loi de Hooke isotrope), ce dernier a les mêmes propriétés mécaniques dans toutes les directions (métaux) et est caractérisé par deux constantes élastiques :  $E$  et  $\nu$ .
- **Les nœuds** : ils définissent la géométrie et assurent la connexion des éléments les uns aux autres, ils occupent des positions stratégiques comme les extrémités, les sommets, les milieux des arêtes et des faces.
- **Les forces nodales** : à travers les nœuds transitent des forces associées aux degrés de liberté, les unes sont les réactions internes, les autres les forces  $F$  dues aux charges appliquées à l'élément (poids propre, charge uniforme, température...).
- **Degrés de liberté** : pour tout élément fini, on doit faire le choix d'une ou plusieurs fonctions (en général le champ des déplacements), elles sont exprimées en fonction des valeurs particulières qu'elles prennent aux nœuds valeurs qui deviennent les inconnues nodales par leurs degrés de liberté nodaux communs des différents éléments adjacents, permet de reconstituer, la solution complète (ASSEMBLAGE), tout en veillant à respecter certaines règles, dites critères de convergence.
- **Caractéristiques d'un élément fini** : le signalement précédent permet de construire les deux caractéristiques d'un élément fini qui sont sa matrice de rigidité  $K$  ET son vecteur force  $F$ . Elles interviennent dans l'équation d'équilibre de l'élément fini, en relation forces déplacement :  $F = K U$  Les forces agissant sur toute la structure ou sur chacun des éléments considérés comme un corps libre doivent être en équilibre, telle est la condition d'équilibre.

## II.9. Principe des travaux virtuels

La méthode des éléments finis par l'approche déplacement est basée sur le principe des déplacements virtuels qui est un cas particulier du principe des travaux virtuels, qui stipule qu'un corps déformable est en équilibre si le travail des forces extérieures est égal au travail de déformation interne pour tous champ de déplacements virtuels cinématiquement admissible. Ce qui exprime

$$\delta W_{int} = \delta W_{ext} \quad (2.1)$$

Ainsi, pour les déplacements  $\delta U$  cinématiquement admissibles, on aura les déformations et les déplacements virtuels  $\delta \varepsilon^e$  et  $\delta U_h^e$ . L'égalité du travail interne et du travail des forces externes nous donnent :

$$\begin{aligned}
& \sum_e \int_{v^e} \delta \varepsilon^{(e)T} \sigma^{(e)} dv^{(e)} \\
&= \sum_e \int_{v^e} (\delta U_h^{(e)T} b^{(e)} - \delta U_h^{(e)T} \rho^{(e)} \dot{U}_h^{(e)T} \\
&\quad - \delta U_h^{(e)T} \eta^{(e)} \dot{U}_h^{(e)}) dv^{(e)} + \sum_e \int_{s_t^{(e)}} \delta U_h^{(e)S^T} t^{(e)} ds_t^{(e)} + \delta U^T F_c
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Où  $e = 1, 2, 3, \dots, n_e$ , et,  $n_e$  est le nombre d'éléments les efforts internes sont représentés par  $\sigma^{(e)}$  et  $b^{(e)}$  représente les forces volumiques. Le vecteur  $\rho^{(e)} U_h^{(e)}$  contient les forces d'inertie proportionnelles à l'accélération relatives et le vecteur  $\eta^{(e)} \dot{U}_h^{(e)}$  les forces de dissipation  $\rho^{(e)}$  est la masse volumique du matériau indépendante du temps et  $\eta^{(e)}$  et un coefficient d'amortissement visqueux volumique. les intégrales sont calculées sur le volume  $v^{(e)}$  des éléments et sur la surface totale  $s_t^{(e)}$ .

Donc :

$$\begin{aligned}
& \delta U^T \left[ \sum_e \int_{V^{(e)}} \bar{B}^{(e)T} E^{(e)} \bar{B}^{(e)} dV^{(e)} \right] U \\
&= \delta U^T \left[ \sum_e \int_{V^{(e)}} \bar{H}^{(e)T} b^{(e)} dV^{(e)} - \sum_e \int_{V^{(e)}} \rho^e \bar{H}^{(e)T} \bar{H}^{(e)} dV^{(e)} \dot{U} \right. \\
&\quad \left. - \sum_e \int_{V^{(e)}} \eta^e \bar{H}^{(e)T} \bar{H}^{(e)} dV^{(e)} U + \sum_e \int_{V^{(e)}} \eta^e \bar{H}_S^{(e)T} t^{(e)} dS_2 + F_c^{(e)} \right]
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Dans laquelle les éléments des matrices  $\bar{H}_S^{(e)}$  sont des fonctions d'interpolation de la surface qui prennent les valeurs des fonctions d'interpolation de  $\bar{H}^{(e)}$  pour les coordonnées des nœuds définissant les surfaces chargées  $s^{(e)}$  de l'élément. En réarrangeant les termes, nous obtenons d'équilibre les équations d'équilibre dynamique liant les déplacements, vitesses et accélérations aux forces appliquées ce qui va nous permettre d'écrire l'équation du mouvement.

$$M \ddot{U}(t) + C \dot{U}(t) + K U(t) = F(t) \tag{2.4}$$

Dans laquelle M est la matrice de la masse totale :

$$M = \sum_e \int_{v^e} \rho^{(e)} \bar{H}^{(e)T} \bar{H}^{(e)} dV^{(e)} = \sum_e M^{(e)} \tag{2.5}$$

La matrice d'amortissement est donnée par :

$$C = \sum_e \int_{V^e} \eta^{(e)} \bar{H}^{(e)T} \bar{H}^{(e)} dV^{(e)} = \sum_e C^{(e)} \quad (2.6)$$

La matrice de rigidité à comme expression :

$$K = \sum_e \int_{V^e} \bar{B}^{(e)T} \bar{E}^{(e)} \bar{B}^{(e)} dV^{(e)} = \sum_e K^{(e)} \quad (2.7)$$

Les forces extérieures sont de nature surfacique et volumique :

$$F = F_b + F_t \quad (2.8)$$

$$F_b = \sum_e \int_{V^e} \bar{H}^{(e)T} b^{(e)} dV^{(e)} = \sum_e F^{(e)} \quad (2.9)$$

$$F_t = \sum_e \int_{S^e} \bar{H}_S^{(e)T} t^{(e)} dS^{(e)} = \sum_e F_t^{(e)} \quad (2.10)$$

Pour un problème statique, les forces d'inertie et d'amortissement sont nulles et les vecteurs de déplacements et des forces externes ne dépendent pas du temps. Le système d'équations se réduit à l'expression suivante :

$$KU = F$$

Qui exprime un équilibre statique de l'assemblage de tous les éléments.

## II.10. Equation fondamentale de la MEF

La MEF est basé sur la méthode matricielle des déplacements en mécanique des solides et des structures. L'équation fondamentale est :

$$[K]\{U\} = \{F\} \quad (2.11)$$

Avec :

**[K]** : Matrice de rigidité caractérisant le système ( $n \times n$ ).

**{U}** : Vecteur des DDL- Degré De Libertés ( $n$ ), inconnus ; par exemple, les déplacements et les rotations des nœuds en mécanique des solides et des structures.

**{F}** : Vecteur des sollicitations appliquées ( $n$ ), connues.

### II.10.1. Démarche de formulation éléments finis

L'analyse des structures peut s'effectuer en considérant d'abord le comportement de chaque élément indépendamment puis en assemblant ces parties de telle façon que l'équilibre des forces et la compatibilité des déplacements soient satisfaits en chaque nœud.

### II.10.2. Discrétisation de la structure en élément finis

C'est l'ensemble des opérations à effectuer pour établir le modèle mathématique de calculs représentant au mieux la structure réelle. Pratiquement cette idéalisation consiste du point de vue topologique, à ramener la structure à une géométrie simple ; c'est ainsi qu'on réduit les éléments unidimensionnels à leur axe et on définit les conditions d'appuis et les charges. Au point de vue rhéologique, elle consiste à choisir la loi constitutive du matériau et à déterminer les constantes qui définissent cette loi.

### II.10.3. Calcul des matrices élémentaires.

Cette étape constitue la partie la plus importante du problème. Les déplacements  $U^e$  aux nœuds sont déterminés de telle façon que les contraintes engendrées dans l'élément équilibrent le chargement extérieur  $F^{(e)}$ , ce qui va nous permettre d'écrire l'équation fondamentale de la MEF

$$K^e U^e = F^e$$

$K^e$  est la matrice de rigidité de l'élément exprimée dans le repère local. Elle est déduite de l'énergie de déformation de l'élément et exprimée par :

$$K^e = \int_0^v B^T DB dv$$

### II.10.4. Assemblage des matrices élémentaires

La phase de l'assemblage consiste à construire les matrices K, M et F de la structure complète à partir des matrices élémentaires  $K^e, M^e, U^e$  et  $F^e$ , exprimées dans le repère global, des différents éléments en sommant les énergies de déformation de chaque élément.

### II.10.5. Etapes pratiques du calcul par EF

#### Pré-processeur

- ◆ Choisir le type d'éléments
- ◆ Entrer les propriétés géométriques
- ◆ Entrer les paramètres physiques
- ◆ Créer le modèle géométrique
- ◆ Créer le maillage : définir les nœuds et les éléments
- ◆ Appliquer les sollicitations
- ◆ Imposer les conditions aux limites

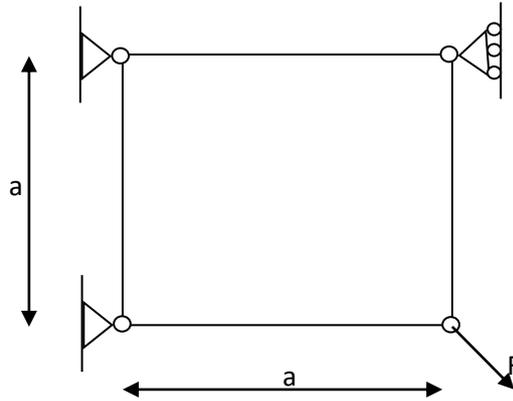


### Post-processeur

- ◆ Présenter les résultats de façon intelligible et synthétique : sous forme numérique et sous forme graphique
- ◆ Effectuer des fonctions complémentaires : combinaisons, interprétations, interpolations, animation,

Dans ce qui suit et afin d'illustrer les différentes démarches manuellement par la méthode des éléments finis nous traitons l'exemple suivant (Fig. II.5) .

Les fonctions  $N_i(\xi, \eta)$  qui définissent la transformation géométrique sont les fonctions d'interpolation pour le champ de déplacements (élément isoparamétrique) :



**Fig. II.5.** Exemple traité

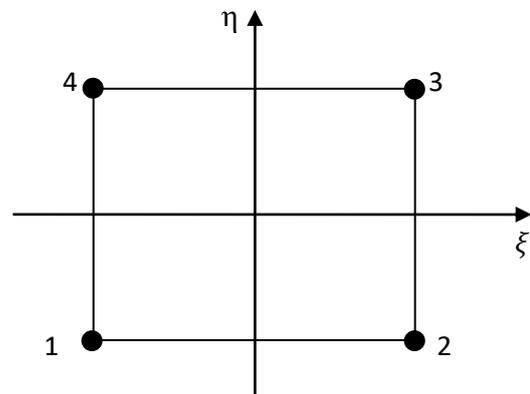
L'élément de référence est un carré à quatre nœuds, les fonctions d'interpolation sont :

$$N_1(\eta, \xi) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta)$$

$$N_2(\eta, \xi) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta)$$

$$N_3(\eta, \xi) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta)$$

$$N_4(\eta, \xi) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta)$$



### II.10.6. Intégration numérique

L'intégration numérique c'est la somme pondérée des valeurs prise par la fonction en un certain nombre de points particuliers.

$$I = \int_{\Omega} f(\xi, \eta) dv$$

L'intégrale de volume sur  $v^e$  est remplacée par l'intégrale double en utilisant un système de coordonnées locale, et la matrice jacobéenne de transformation qui dépend des positions des nœuds et des dérivées des fonctions de formes.

$$I = \int_{-1}^{-1} \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) \det[J] d\xi d\eta$$

Où J est la matrice jacobéenne telle que :

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial X}{\partial \xi} & \frac{\partial Y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial X}{\partial \eta} & \frac{\partial Y}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

L'utilisation de quadrature de Gausse nous permet d'approximer l'intégrale I comme suit :

$$I \approx \left( \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \right) \det[J] d\xi d\eta$$

On peut écrire la dérivée de la fonction N sous la forme suivante :

$$\frac{\partial N}{\partial X} = \frac{\partial N}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial X} = \frac{\partial N}{\partial \xi} \left( \frac{\partial N}{\partial \xi} \right)^{-1}$$

Les dérivées de la fonction d'interpolation au point  $\mathbf{p}(\xi, \eta) = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$  qu'on peut écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\frac{\partial N(0,0)}{\partial \xi} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1(0,0)}{\partial \xi} & \frac{\partial N_1(0,0)}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_2(0,0)}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2(0,0)}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_3(0,0)}{\partial \xi} & \frac{\partial N_3(0,0)}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_4(0,0)}{\partial \xi} & \frac{\partial N_4(0,0)}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} (-1)(1-\eta)(0,0)(1-\xi)(-1)(0,0) \\ (1)(1-\eta)(0,0)(1+\xi)(-1)(0,0) \\ (1)(1+\eta)(0,0)(1+\xi)(1)(0,0) \\ (-1)(1+\eta)(0,0)(1-\xi)(1)(0,0) \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial N(0,0)}{\partial \xi} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Pour déterminer la matrice jacobine  $\partial X / \partial \xi$  il faut déterminer X et Y :

$$X = N_1 X_1 + N_2 X_2 + N_3 X_3 + N_4 X_4$$

$$Y = N_1 Y_1 + N_2 Y_2 + N_3 Y_3 + N_4 Y_4$$

Ce qui va nous permettre d'écrire :

$$\frac{\partial X}{\partial \xi} = \frac{\partial N_1}{\partial \xi} X_1 + \frac{\partial N_2}{\partial \xi} X_2 + \frac{\partial N_3}{\partial \xi} X_3 + \frac{\partial N_4}{\partial \xi} X_4 = X_1 \frac{\partial N_1}{\partial \xi}$$

Les dérivées de la matrice jacobine par rapport à  $\xi$  et  $\eta$  sont :

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial X}{\partial \xi} & \frac{\partial X}{\partial \eta} \\ \frac{\partial Y}{\partial \xi} & \frac{\partial Y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & X_1 \frac{\partial N_1}{\partial \eta} \\ Y_1 \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & Y_1 \frac{\partial N_1}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

$$J = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 & Y_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_1}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_3}{\partial \xi} & \frac{\partial N_3}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_4}{\partial \xi} & \frac{\partial N_4}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

Si on prend en considération la valeur de l'intégrale au point (0, 0) et les coordonnées nodales le jacobin devient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial \xi} &= X \frac{\partial X}{\partial \xi} = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 & Y_4 \end{bmatrix} \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -X_1 + X_2 + X_3 - X_4 & -X_1 - X_2 + X_3 + X_4 \\ -Y_1 + Y_2 + Y_3 - Y_4 & -Y_1 - Y_2 + Y_3 + Y_4 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -0 + 0 + 1 - 1 & -0 - 0 + 1 + 1 \\ -1 + 0 + 0 - 1 & -1 - 1 - 0 + 1 + 0 \end{bmatrix} \\ \frac{\partial X}{\partial \xi} &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 \\ -0.5 & -0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Le déterminant jacobin est :

$$\det[J] = \det \left[ \frac{\partial X}{\partial \xi} \right] = \det \begin{bmatrix} 0 & 0.5 \\ -0.5 & -0 \end{bmatrix} = 0.25$$

Son inverse est :

$$\left( \frac{\partial X}{\partial \xi} \right)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -0 \end{bmatrix}$$

Finalement :

$$\begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial X} &= \frac{\partial N}{\partial \xi} \left( \frac{\partial X}{\partial \xi} \right)^{-1} \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0.5 \\ -0.5 & -0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial N}{\partial X} = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.5 \\ -0.5 & -0.5 \\ 0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

La matrice B peut se mettre sous la forme suivante :

$$B_I = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_I(0,0)}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_I(0,0)}{\partial y} \\ \frac{\partial N_I(0,0)}{\partial y} & \frac{\partial N_I(0,0)}{\partial x} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 & -0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & -0.5 & 0 & -0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & -0.5 & -0.5 & 0.5 & -0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

La matrice d'élasticité d'élément est :

$$C = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$\lambda = \frac{vE}{(1+v)(1-2v)} = 84N/mm^2$$

$$\mu = \frac{vE}{2(1+v)} = 84N/mm^2$$

$$C = \begin{bmatrix} 252 & 84 & 0 \\ 84 & 252 & 0 \\ 0 & 0 & 84 \end{bmatrix} N/mm^2$$

La matrice de rigidité de l'élément est :

$$k = \int_V B^T C B dV = \int_0^1 \int_0^1 B^T C B dx dy = \int_1^{-1} \int_1^{-1} B^T C B \det[J] d\xi d\eta$$

$$= [B(0,0)]^T C B(0,0) \det[J(0,0)] \cdot 2 \cdot 2$$

$$= \begin{bmatrix} -0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 0 & -0.5 \\ 0 & -0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 0 & -0.5 \\ 0 & -0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 252 & 84 & 0 \\ 84 & 252 & 0 \\ 0 & 0 & 84 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -0.5 & 0 & -0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & -0.5 & 0 & -0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & -0.5 & -0.5 & 0.5 & -0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$k = \begin{bmatrix} 84 & -42 & 42 & 0 & -84 & 42 & -42 & 0 \\ -42 & 84 & 0 & -42 & 42 & -84 & 0 & 42 \\ 42 & 0 & 84 & 42 & -42 & 0 & -84 & -42 \\ 0 & -42 & 42 & 84 & 0 & 42 & -42 & -84 \\ -84 & 42 & -42 & 0 & 84 & -42 & 42 & 0 \\ 42 & -84 & 0 & 42 & -42 & 84 & 0 & -42 \\ -42 & 0 & -84 & -42 & 42 & 0 & 84 & 42 \\ 0 & 42 & -42 & -84 & 0 & -42 & 42 & 84 \end{bmatrix} \frac{1}{4}$$

$$k = \begin{bmatrix} 84 & -42 & 42 & 0 & -84 & 42 & -42 & 0 \\ -42 & 84 & 0 & -42 & 42 & -84 & 0 & 42 \\ 42 & 0 & 84 & 42 & -42 & 0 & -84 & -42 \\ 0 & -42 & 42 & 84 & 0 & 42 & -42 & -84 \\ -84 & 42 & -42 & 0 & 84 & -42 & 42 & 0 \\ 42 & -84 & 0 & 42 & -42 & 84 & 0 & -42 \\ -42 & 0 & -84 & -42 & 42 & 0 & 84 & 42 \\ 0 & 42 & -42 & -84 & 0 & -42 & 42 & 84 \end{bmatrix}$$

Si on applique la relation fondamentale de la MEF dans le cas statique :  $KU=F$  ce qui va nous permettre d'écrire :

$$\begin{bmatrix} 84 & -42 & 42 & 0 & -84 & 42 & -42 & 0 \\ -42 & 84 & 0 & -42 & 42 & -84 & 0 & 42 \\ 42 & 0 & 84 & 42 & -42 & 0 & -84 & -42 \\ 0 & -42 & 42 & 84 & 0 & 42 & -42 & -84 \\ -84 & 42 & -42 & 0 & 84 & -42 & 42 & 0 \\ 42 & -84 & 0 & 42 & -42 & 84 & 0 & -42 \\ -42 & 0 & -84 & -42 & 42 & 0 & 84 & 42 \\ 0 & 42 & -42 & -84 & 0 & -42 & 42 & 84 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ u_x3 \\ u_y3 \\ 0 \\ u_y4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_x1 \\ R_x1 \\ R_x2 \\ R_x2 \\ F \cos \frac{\pi}{4} \\ -F \cos \frac{\pi}{4} \\ R_x1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ce qui réduit l'équation à :

$$\begin{bmatrix} 84 & -42 & 0 \\ -42 & 84 & -42 \\ 0 & -42 & 84 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x3 \\ u_y3 \\ u_y4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10\sqrt{2/2} \\ -10\sqrt{2/2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Mais on a  $U = K^{-1}F$  alors on trouve finalement :

$$\begin{bmatrix} u_x3 \\ u_y3 \\ u_y4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0178570.0119050.005952 \\ 0.0119050.0238100.011905 \\ 0.0059520.0119050.017857 \end{bmatrix} \text{ mm}$$

Après avoir simplifié la relation (2.9) on peut l'écrire comme suit :

$$R_x1 = -84u_x3 + 42u_y3 + 0u_y4 = -10\sqrt{2/2}N$$

$$R_x1 = 42u_x3 - 84u_y3 + 42u_y4 = -10\sqrt{2/2}N$$

$$R_x2 = -42u_x3 + 0u_y3 - 42u_y4 = 0$$

$$R_x2 = 0u_x3 + 42u_y3 - 84u_y4 = 0$$

$$R_x4 = 42u_x3 - 0u_y3 + 42u_y4 = 0$$

La projection ses relations sur les axes Ox et Oy nous permet d'écrire :

$$\sum F_x = R_x1 + R_x2 + R_x4 + \frac{10\sqrt{2}}{2} + -\frac{10\sqrt{2}}{2} + 0 + 0 + \frac{10\sqrt{2}}{2} = 0.$$

$$\sum F_y = R_y1 + R_y2 - \frac{F\sqrt{2}}{2} = \frac{10\sqrt{2}}{2} + 0 - \frac{10\sqrt{2}}{2} = 0.$$

Si on utilise le système de coordonnées locale on obtient :

$$\varepsilon(\xi, \eta) = \varepsilon(0,0) \approx \sum_{I=1}^{NNODE} B_I(0,0)u_I$$

$$= \begin{bmatrix} -0.5 & 0 & -0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & -0.5 & 0 & -0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & -0.5 & -0.5 & 0.5 & -0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ u_{x3} \\ u_{y3} \\ 0 \\ u_{y4} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -0.5 & 0 & -0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & -0.5 & 0 & -0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & -0.5 & -0.5 & 0.5 & -0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.04209 \\ -0.08418 \\ 0 \\ 0.04209 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.021045 \\ 0.021045 \\ -0.08418 \end{bmatrix}$$

Si on prend en considération l'équation (2.9) ça va nous permettre d'écrire

$$\sigma(\xi, \eta) = C_\varepsilon(\xi, \eta) = \begin{bmatrix} 252 & 84 & 0 \\ 84 & 252 & 0 \\ 0 & 0 & 84 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.021045 \\ 0.021045 \\ -0.08418 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 7.071068 \\ 7.071068 \\ -7.071068 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10\sqrt{2/2} \\ 10\sqrt{2/2} \\ -10\sqrt{2/2} \end{bmatrix} \text{ N/mm}^2$$

$$f^{\text{int}} = \begin{bmatrix} f_{x1}^{\text{int}} \\ f_{y1}^{\text{int}} \\ f_{x2}^{\text{int}} \\ f_{y2}^{\text{int}} \\ f_{x3}^{\text{int}} \\ f_{y3}^{\text{int}} \\ f_{x4}^{\text{int}} \\ f_{y4}^{\text{int}} \end{bmatrix}$$

$$= \int_1^{-1} \int_1^{-1} B^T \sigma \det[J] d\xi d\eta = B^T \sigma \frac{1}{4} \int_1^{-1} \int_1^{-1} d\xi d\eta$$

$$B^T \sigma \frac{1}{4} = B^T \sigma = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 0 & -0.5 \\ 0 & -0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 0 & -0.5 \\ 0 & -0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10\sqrt{2/2} \\ 10\sqrt{2/2} \\ -10\sqrt{2/2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10\sqrt{2/2} \\ 10\sqrt{2/2} \\ 0 \\ 0 \\ 10\sqrt{2/2} \\ -10\sqrt{2/2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} N.$$

## II.11. Conclusion

Le calcul d'une structure par la méthode des éléments finis exige, pour être efficace, d'accorder le plus grand soin à la phase de modélisation. La précision des résultats dépend de la qualité du modèle, mais également du maillage réalisé. Pour déterminer la réponse des ouvrages très complexes, l'application de cette méthode nécessite la disponibilité de l'outil informatique notamment pour les calculs non linéaires.

## Chapitre III :

Intégration du comportement  
non linéaire de l'élément  
poutre

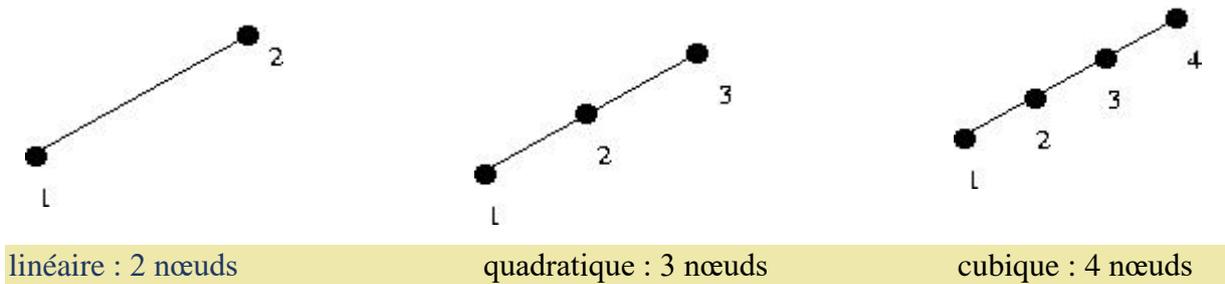
### III.1. Introduction

Parmi les méthodes les plus utilisées pour analyser le comportement des systèmes physiques, la résolution par la méthode des éléments finis en est une. Elle consiste à utiliser une approximation simple des variables inconnues pour transformer les équations différentielles en équations algébriques. La réponse est obtenue par des méthodes de résolutions dynamiques non linéaires.

### III.2. Types d'éléments finis

#### III.2.1. Élément fini barre

Une barre est un élément structural rectiligne qui travaille seulement en traction-compression et qui peut subir des déplacements le long de son axe. Elle est constituée d'un nombre de nœuds en adéquation avec l'ordre d'approximation des fonctions d'interpolation qui lui sont associées :



Les éléments barres sont utilisés pour modéliser des structures articulées, ils sont donc rotulés à leurs deux extrémités.

Dans ce chapitre, nous allons effectuer une présentation simple unidimensionnelle en nous intéressant à un problème de résistance des matériaux où n'intervient que la traction-compression. La formulation des caractéristiques des éléments finis d'un élément fini barre est basée sur les hypothèses suivantes :

- ✓ La barre est droite
- ✓ Le matériau obéi à la loi de Hooke (domaine élastique)
- ✓ Les forces sont axiales (appliquées aux extrémités de la barre)
- ✓ La barre se déforme axialement seulement

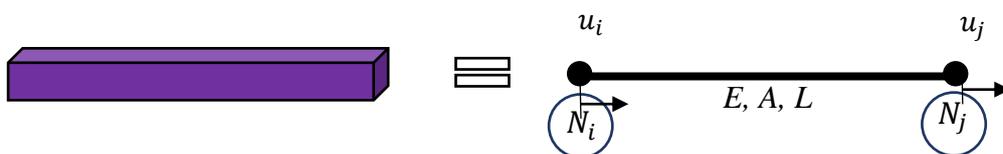
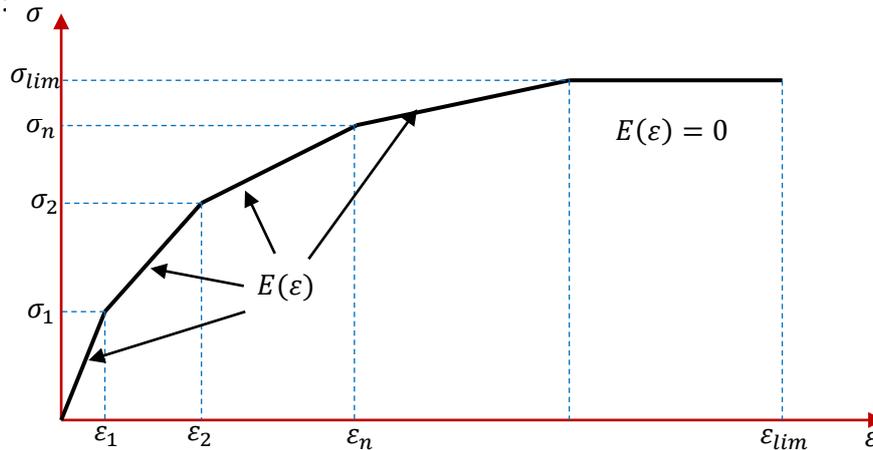


Fig.III.1. Élément barre unidimensionnel

Avec :

- $l$  : Longueur
- $A$  : Section transversale
- $E$  : Module élastique
- $\varepsilon = \varepsilon(x) = \frac{du(x)}{dx}$  : Déformation
- $\sigma = \sigma(x) = E(\varepsilon(x))\varepsilon(x)$  : Contrainte

La contrainte ici  $\sigma(x)$  est fonction de l'état de la déformation actuelle, comme le montre la figure (III.2) :



**Fig.III.2.** Etat de contrainte-déformation.

Pour  $x_i \leq x \leq x_j$ , le déplacement axial peut s'écrire de la manière suivante :

$$u(x) = N_i(x)u_i + N_j(x)u_j \quad (3.1)$$

$N_i(x)$  et  $N_j(x)$  sont des fonctions d'interpolations avec  $u(x = x_i) = u_i$  et  $u(x = x_j) = u_j$ , il sort que :

$$\begin{cases} u(x = x_i) = N_i(x_i)u_i + N_j(x_i)u_j = u_i \\ u(x = x_j) = N_i(x_j)u_i + N_j(x_j)u_j = u_j \end{cases} \quad (3.2)$$

$N_i(x)$  et  $N_j(x)$  sont des fonctions polynomiales, on peut écrire :

$$\begin{cases} N_i(x) = a_0 + a_1x \\ N_j(x) = b_0 + b_1x \end{cases} \quad (3.3)$$

Où  $a_0, a_1, b_0, b_1$  sont des coefficients d'interpolation à déterminer :

$$\begin{cases} N_i(x_i) = a_0 + a_1x_i = 1 \rightarrow a_0 = 1 - a_1x_i \\ N_j(x_i) = b_0 + b_1x_i = 0 \rightarrow b_0 = -b_1x_i \end{cases}$$

$$\begin{cases} N_i(x_j) = a_0 + a_1x_j = 0 \rightarrow a_0 = -a_1x_j \\ N_j(x_j) = b_0 + b_1x_j = 1 \rightarrow b_0 = 1 - b_1x_j \end{cases}$$

$$1 - a_1 x_i = -a_1 x_j \rightarrow a_1 = -\frac{1}{x_j - x_i} = -\frac{1}{l}$$

$$a_0 = 1 - a_1 x_i = a_0 = 1 + \frac{x_i}{x_j - x_i} \rightarrow a_0 = \frac{x_j}{l}$$

$$-b_1 x_i = 1 - b_1 x_j \rightarrow b_1 = \frac{1}{l}$$

$$b_0 = 1 - b_1 x_j \rightarrow b_0 = 1 - \frac{x_j}{x_j - x_i} \rightarrow b_0 = -\frac{x_i}{l}$$

Finalement on trouve :

$$\begin{cases} N_i(x) = \frac{x_j}{l} - \frac{1}{l}x \\ N_j(x) = -\frac{x_i}{l} + \frac{1}{l}x \end{cases} \quad (3.4)$$

Pour  $x_i = 0$  et  $x_j = l$ , l'équation se réécrit comme suit :

$$\begin{cases} N_i(x) = 1 - \frac{x}{l} \\ N_j(x) = \frac{x}{l} \end{cases} \quad (3.5)$$

La fonction de déplacement  $u(x)$  (Eq. 3.2) devient : ( $0 \leq x \leq l$ )

$$u(x) = \left(1 - \frac{x}{l}\right) u_i + \frac{x}{l} u_j \quad (3.6)$$

Sous forme matricielle :

$$u(x) = [N_i(x) \quad N_j(x)] \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = \left[ \left(1 - \frac{x}{l}\right) \quad \left(\frac{x}{l}\right) \right] \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} \quad (3.7)$$

Pour un chargement axial, la déformation  $\varepsilon = \varepsilon(x) = \frac{du(x)}{dx}$  sera donnée par :

$$\varepsilon = \varepsilon(x) = \frac{d}{dx} \left\{ \left(1 - \frac{x}{l}\right) u_i + \frac{x}{l} u_j \right\} = \frac{u_j - u_i}{l} \quad (3.8)$$

Pour une section droite constante  $A$ , la contrainte axiale est donnée par :

$\sigma = \sigma(x) = E(\varepsilon(x))\varepsilon(x)$ , d'où :

$$\sigma = \sigma(x) = E(\varepsilon(x))\varepsilon = E(\varepsilon(x)) \frac{u_j - u_i}{l} \quad (3.9)$$

Et par conséquent la force axiale aura comme expression :

$$P = A\sigma(x) = \frac{E(\varepsilon(x))A}{l} (u_j - u_i) \quad (3.10)$$

Les forces nodales  $\begin{Bmatrix} f_i \\ f_j \end{Bmatrix}$  auront comme expression :

$$\begin{cases} f_i = -\frac{E(\varepsilon(x))A}{l}(u_j - u_i) \\ f_j = \frac{E(\varepsilon(x))A}{l}(u_j - u_i) \end{cases} \quad (3.11)$$

Sous forme matricielle :

$$\frac{E(\varepsilon(x))A}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_i \\ f_j \end{Bmatrix} \quad (3.12)$$

Il sort finalement l'expression de la matrice de rigidité élémentaire de l'élément finis barre :

$$[k_e] = \frac{E(\varepsilon(x))A}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

D'une manière générale la matrice de rigidité pour l'élément finis barre est donnée par l'expression générale suivante :

$$[k_e] = \int_V [B]^T [D][B]dV \quad (3.14)$$

Pour le cas d'élément fini barre  $[D] = E(\varepsilon(x))$ , avec  $E(\varepsilon(x))$  est le module d'élasticité qui dépend de l'état de déformation (variant avec le niveau de la déformation), B est une matrice de déformation-déplacement.

Dans le cas de l'élément fini barre, B est donnée par :

$$[B] = \frac{\partial N(x)}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i(x)}{\partial x} & \frac{\partial N_j(x)}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \left(1 - \frac{x}{L}\right)}{\partial x} & \frac{\partial \left(\frac{x}{L}\right)}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

La matrice de rigidité élémentaire de l'élément barre est donnée par (Eq. 3.14 et Eq. 3.15)

$$[k_e] = \int_l \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{L}{L} \\ 1 \\ \frac{L}{L} \end{bmatrix} E(\varepsilon(x)) \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ L & L \end{bmatrix} A(x) dx$$

Si la section de la barre  $A(x)$  est constante, alors :

$$[k_e] = \int_L \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{L}{L} \\ 1 \\ \frac{L}{L} \end{bmatrix} E(\varepsilon(x)) \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ L & L \end{bmatrix} A(x) dx = \frac{E(\varepsilon(x))A}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

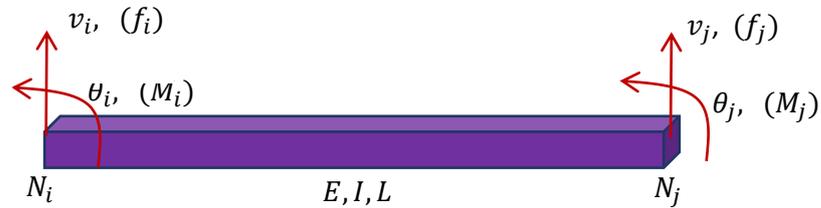
### III.2.2. Élément fini poutre

La poutre est un élément structural de forme ou d'enveloppe convexe parallélépipédique, conçu pour résister à la flexion. Disposée généralement horizontalement, elle sert alors à supporter les charges au-dessus du vide, les poids de la construction et du mobilier, et à les transmettre sur le côté aux piliers, colonnes ou aux murs sur lesquels elle s'appuie. Ainsi elle est soumise à un système de sollicitation qui la fait fléchir. Ses dimensions transversales sont

généralement petites par rapport à sa longueur. Dans ce paragraphe, nous allons nous limiter au cas des structures formées par des poutres droites dont les lignes moyennes sont contenues dans un même plan et chargées par des forces normales ou transversales appartenant à ce plan, ou par des moments perpendiculaires à ce plan. Dans ces conditions, les lignes moyennes restent dans le plan après la déformation. Nous utiliserons le plan  $(O, x, y)$  comme plan moyen. Les nœuds associés à l'élément de poutre sont les 2 points de la ligne moyenne situés aux extrémités du tronçon de poutre considéré. Premièrement, nous allons travailler dans la base locale de l'élément. Ensuite, nous donnerons les règles pour passer dans la base globale.

- **Matrice de rigidité élémentaire**

Soit l'élément finis poutre représenté sur la figure (III.3) avec l'orientation du sens positif des déplacements et rotations verticales (ainsi que l'effort tranchant et moment fléchissant).



**Fig. III.3.** Élément poutre et signe conventionnel de l'effort tranchant et moment fléchissant

La déformée est reliée au moment fléchissant par

$$M(x) = -[EI_z(\varepsilon)] \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (3.17)$$

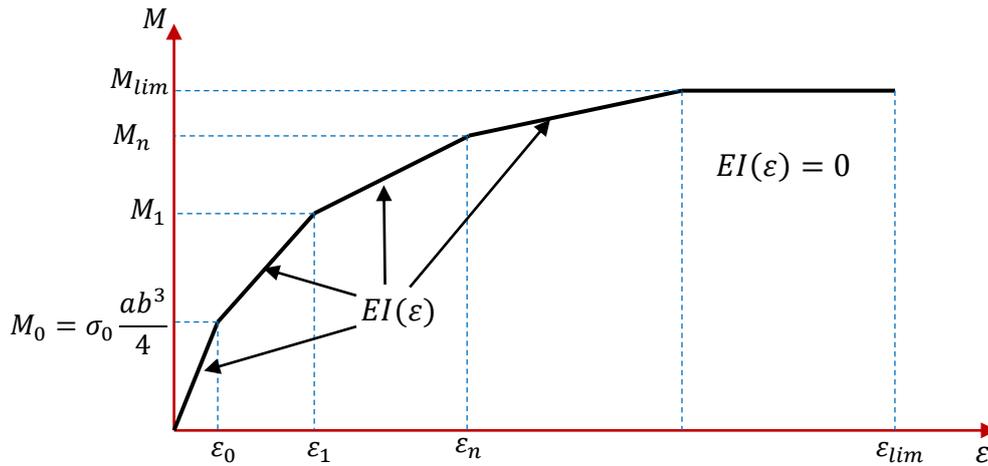
La contrainte est donnée par la relation suivante

$$\sigma = \frac{M(\varepsilon(x))}{[EI_z(\varepsilon)]} y = -y[E(\varepsilon)] \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (3.18)$$

La déformation déduite de l'équation (3.18) est donnée par l'expression

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{[E(\varepsilon)]} = -y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (3.19)$$

Le moment fléchissant dépend de l'état actuel de la déformation  $M = M(\varepsilon(x))$ , comme le montre la figure (III.4).



**Fig. III.4.** Etat de moment-déformation.

Avec :  $\sigma_0$  : la contrainte limite élastique, a et b : la largeur et la hauteur de la poutre respectivement et  $\varepsilon$  et la déformation.

Pour la détermination de la matrice de rigidité élémentaire de poutre en suit les étapes suivantes :

**Etape 01 : Identifier le problème**

Cette étape consiste à choisir un système de coordonnées et une numérotation des nœuds appropriés pour l'élément. Les vecteurs des déplacements nodaux et des charges nodales pour la poutre  $i$ - $j$  prennent la forme

$$\{U^e\} = \begin{Bmatrix} \{U_i^e\} \\ \{U_j^e\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix}, \quad \{f^e\} = \begin{Bmatrix} \{f_i^e\} \\ \{f_j^e\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_i \\ M_i \\ f_j \\ M_j \end{Bmatrix} \quad (3.20)$$

**Etape 02 : Choisir des fonctions de déplacement convenables et relier les déplacements généraux de l'élément à ses déplacements nodaux**

Cette étape consiste à choisir fonction de déplacement qui définit de façon unique l'état de déplacement de tous les points de l'élément.

$$v(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3 \quad (3.21)$$

Où  $a_1, a_2, a_3$  et  $a_4$  sont des coefficients à déterminer.

Sachant que  $\theta = \frac{\partial v}{\partial x}$ , il sort

$$\theta(x) = a_2 + 2a_3x + 3a_4x^2 \quad (3.22)$$

Au nœud (i),  $x=0$  et donc d'après l'équation (3.21) et (3.22)

- $v(x = 0) = a_1 = v_i$

- $\theta(x = 0) = a_2 = \theta_i$

Au nœud (j),  $x=L$  et donc d'après l'équation (3.21) et (3.22) :

- $v(x = L) = a_1 + a_2L + a_3L^2 + a_4L^3 = v_j$

- $\theta(x = L) = a_2 + 2a_3L + 3a_4L^2 = \theta_j$

Cela donne sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

D'après l'équation (2.36), les coefficients  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  et  $a_4$  sont déterminés par :

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{L^2} & \frac{-2}{L} & \frac{3}{L^2} & \frac{-1}{L} \\ \frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} & \frac{-2}{L^3} & \frac{1}{L^2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

D'après la relation (3.24), le relation (3.21) se réécrit de la façon suivante :

$$\begin{aligned} v(x) = & \underbrace{\left(1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3}\right)}_{N_1(x)} v_i + \underbrace{\left(x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}\right)}_{N_2(x)} \theta_i + \underbrace{\left(\frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3}\right)}_{N_3(x)} v_j \\ & + \underbrace{\left(\frac{x^3}{L^2} - \frac{x^2}{L}\right)}_{N_4(x)} \theta_j \end{aligned} \quad (3.25)$$

### **Etape 03 : Relations entre déplacements et déformations**

Les déformations aux différents points de l'élément peuvent être obtenues à partir de la fonction de déplacement par une différentiation dont la forme exacte dépend du type de problème traité. Dans notre cas de problème il s'agit des problèmes de flexion, les déformations sont associées à la courbure de de l'élément et correspondent aux dérivées secondes.

D'après l'équation (3.25), l'équation (3.19) devient :

$$\{\varepsilon(x, y)\} = -y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -y \begin{pmatrix} -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} \\ -\frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2} \\ \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \\ \frac{6x}{L^2} - \frac{2}{L} \end{pmatrix} \quad (3.26)$$

La matrice  $[B]$  est déduite du vecteur de déformation :

$$\begin{aligned}
[B] &= -y \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} \\
&= -y \left[ \left( -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} \right) \quad \left( -\frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2} \right) \quad \left( \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \right) \quad \left( \frac{6x}{L^2} - \frac{2}{L} \right) \right]
\end{aligned} \tag{3.27}$$

La déformation est donnée par l'expression suivante (pour chaque élément) :

$$\{\varepsilon\} = [B] \begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} \tag{3.28}$$

#### **Etape 04 : Relier les charges nodales aux déplacements nodaux**

La matrice de rigidité pour l'élément finis poutre est donnée par

$$\begin{aligned}
[k_e] &= \int_V [B]^T E [B] dV \\
&= \int_V y \begin{bmatrix} -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} \\ \frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2} \\ \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \\ \frac{6x}{L^2} - \frac{2}{L} \end{bmatrix} E y \begin{bmatrix} -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} & -\frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2} & \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} & \frac{6x}{L^2} - \frac{2}{L} \end{bmatrix} dV
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Le développement de l'équation (3.29) nous donne :

$$\begin{aligned}
[k_e] &= \int_V y^2 \begin{bmatrix} -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} \\ \frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2} \\ \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \\ \frac{6x}{L^2} - \frac{2}{L} \end{bmatrix} E y \begin{bmatrix} -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} & -\frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2} & \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} & \frac{6x}{L^2} - \frac{2}{L} \end{bmatrix} dV \\
&= \underbrace{\int_A y^2 dA}_{I_z} \int_L \begin{bmatrix} -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} \\ \frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2} \\ \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \\ \frac{6x}{L^2} - \frac{2}{L} \end{bmatrix} E \begin{bmatrix} -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} & -\frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2} & \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} & \frac{6x}{L^2} - \frac{2}{L} \end{bmatrix} dx
\end{aligned}$$

Finalement la matrice de rigidité de l'élément barre est donnée par l'expression (3.30).

$$[k_e] = \frac{[EI_z(\varepsilon)]}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

Le vecteur des forces élémentaires (effort tranchant et moment fléchissant) à la forme suivante :

- $[k_e]\{v\} = \{f\}$

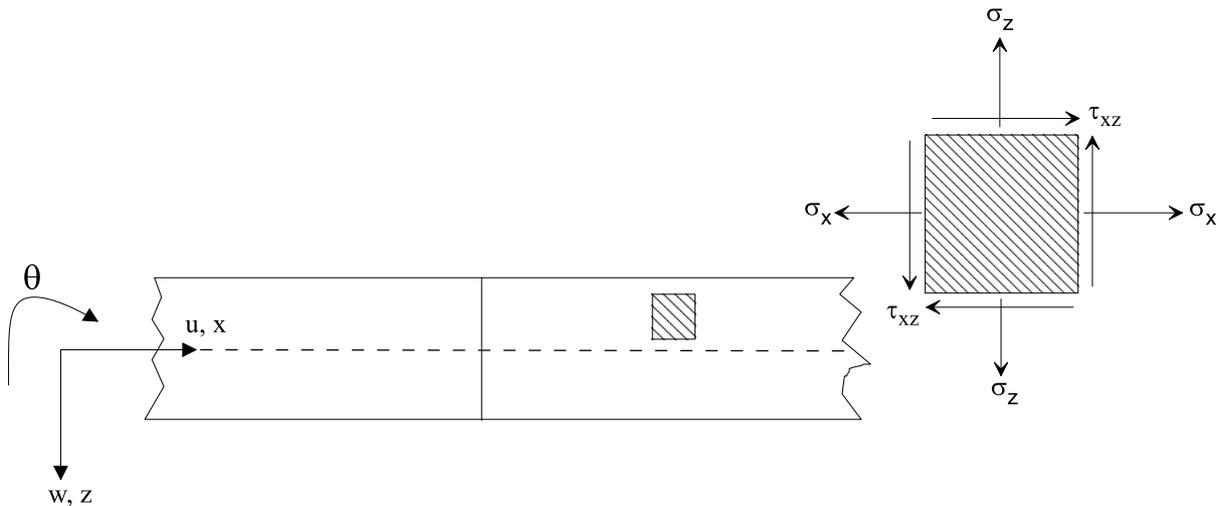
Donc pour chaque élément on a :

$$\frac{[EI_z(\varepsilon)]}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_i \\ M_i \\ f_j \\ M_j \end{Bmatrix} \quad (3.31)$$

La matrice de rigidité élémentaire est construite, il reste de faire l'assemblage de ces matrices en une matrice de rigidité globale.

### III.3. Analyse non linéaire de la poutre suivant la méthode de Timoshenko

Le système indiqué suivant la figure (III.5) schématise le mécanisme de la poutre de Timoshenko.



**Fig. III.5.** Poutre de Timoshenko.

Le déplacement horizontal  $u(x, z)$  est exprimé suivant la relation (3.32).

$$u(x, z) = -z\theta(x) \quad (3.32)$$

A noter que la rotation  $\theta(x)$  est égale à la dérivée du déplacement  $\left(\frac{dw}{dx}\right)$  moins une rotation  $\beta$  due à l'effort de cisaillement transversal.

Il sort que :

$$\theta(x) = dw/dx + \beta \quad (3.33)$$

La relation entre les contraintes-déformations pour un état de déformation plane est donnée par :

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_z \\ \tau_{xz} \end{pmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xz} \end{pmatrix} \quad (3.34)$$

Où :  $E$  est le module de Young et  $\nu$  est le coefficient de Poisson.

Pour l'état de contrainte  $\sigma_z = 0$ , la déformation transversale est reliée à la déformation axiale par la relation (3.35) :

$$\varepsilon_z = -\nu\varepsilon_x \quad (3.35)$$

Ainsi dans ce cas, la contrainte axiale est de cisaillement sera :

$$\sigma_x = E\varepsilon_x, \quad \tau_{xz} = G\gamma_{xz} \quad (3.36)$$

Ici  $G = E/2(1 + \nu)$  est le module de cisaillement.

La déformation axiale  $\varepsilon_x$  est donnée par :

$$\varepsilon_x = du/dx \quad (3.37)$$

Une approximation de la déformation transversale  $\varepsilon_z$  est donnée par :

$$\varepsilon_z = -z d\theta/dx \quad (3.38)$$

Finalement la déformation de cisaillement est représentée par la relation (3.39) :

$$\gamma_{xz} = du/dz + dw/dx \quad (3.39)$$

Donc :

$$\gamma_{xz} = -\theta + dw/dx = \beta \quad (3.40)$$

Considérons une poutre de Timoshenko d'épaisseur 'b' et de largeur 'a' ayant une longueur 'L' sujette à un chargement uniforme d'intensité 'q', alors l'expression du travail virtuel est donnée par :

$$\int_0^L \int_{-b/2}^{b/2} \int_{a(-b/2)}^{a(b/2)} \left\{ -z d(\delta\theta)/dx \sigma_x + \delta\beta \tau_{xz} \right\} dydzdx - \int_0^L \delta w q dx \quad (3.41)$$

Sachant que :

$$M = \int_{-b/2}^{b/2} \int_{a(-b/2)}^{a(b/2)} z \sigma_x dydz \quad (3.42)$$

Et

$$Q = \int_{-b/2}^{b/2} \int_{a(-b/2)}^{a(b/2)} \tau_{xz} dydz \quad (3.43)$$

D'après l'équation (3.36), les équations (3.42) et (3.43) deviennent :

$$M = \left( \int_{-b/2}^{b/2} \int_{a(-b/2)}^{a(b/2)} z^2 E dydz \right) \left( -d\theta/dx \right) = EI \left( -d\theta/dx \right) \quad (3.44)$$

Et

$$Q = \left( \int_{-b/2}^{b/2} \int_{a(-b/2)}^{a(b/2)} G dydz \right) (\beta) = GA\beta \quad (3.45)$$

Dans l'équation (3.44),  $EI$  est la rigidité flexionnelle et  $GA$  est la rigidité de cisaillement. La section  $A$  est remplacée par  $A/\alpha$  avec  $\alpha$  un paramètre qui dépend de la section de la poutre,  $\alpha$  prend la valeur de 1.5 pour une section rectangulaire.

La discrétisation par élément finis du déplacement axial nous donne :

$$w^{(e)} = N_1^{(e)} w_1^{(e)} + N_2^{(e)} w_2^{(e)} \quad (3.46)$$

Avec

$$\left. \begin{aligned} N_1^{(e)} &= (x_2^{(e)} - x^{(e)})/l^{(e)} \\ N_2^{(e)} &= (x^{(e)} - x_1^{(e)})/l^{(e)} \end{aligned} \right\} \quad (3.47)$$

Où  $N_1^{(e)}$ ,  $N_2^{(e)}$  sont les fonctions d'interpolations linéaires élémentaires,  $x_1^{(e)}$ ,  $x_2^{(e)}$  les coordonnées de l'élément ( $e$ ).

De même pour la rotation élémentaire, nous aurons

$$\theta^{(e)} = N_1^{(e)} \theta_1^{(e)} + N_2^{(e)} \theta_2^{(e)} \quad (3.48)$$

Où  $\theta_1^{(e)}$  et  $\theta_2^{(e)}$  sont les rotations normales du nœud 1 et 2 respectivement.

La courbature  $(d\theta/dx)$  s'exprime par :

$$-(d\theta/dx)^{(e)} = -(dN_1/dx)^{(e)} \theta_1^{(e)} - (dN_2/dx)^{(e)} \theta_2^{(e)} \quad (3.49)$$

ou :

$$\varepsilon_f^{(e)} = \begin{bmatrix} 0 & 1/l^{(e)} & 0 & 1/l^{(e)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1^{(e)} \\ \theta_1^{(e)} \\ w_2^{(e)} \\ \theta_2^{(e)} \end{Bmatrix} = B_f^{(e)} \varphi^{(e)} \quad (3.50)$$

Avec  $B_f^{(e)}$  est la matrice courbure-déplacement.

La relation déformation-déplacement est donnée par

$$\left(\frac{dw}{dx} - \theta\right)^{(e)} = \left(\frac{dN_1}{dx}\right)^{(e)} w_1^{(e)} - N_1^{(e)} \theta_1^{(e)} + \left(\frac{dN_2}{dx}\right)^{(e)} w_2^{(e)} - N_2^{(e)} \theta_2^{(e)} \quad (3.51)$$

Ou

$$\varepsilon_S^{(e)} = \begin{bmatrix} -1/l^{(e)} & -(x_2^{(e)} - x_1^{(e)})/l^{(e)} & 1/l^{(e)} & -(x_1^{(e)} - x_2^{(e)})/l^{(e)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1^{(e)} \\ \theta_1^{(e)} \\ w_2^{(e)} \\ \theta_2^{(e)} \end{Bmatrix} \quad (3.52)$$

$$= B_S^{(e)} \varphi^{(e)}$$

Avec  $B_S^{(e)}$  est la matrice déformation-déplacement.

L'équation matricielle est donnée par :

$$[K_f + K_S] \varphi - F = 0 \quad (3.53)$$

Avec les matrices de rigidité élémentaires et le vecteur de force élémentaire donnés par

$$\left. \begin{aligned} k_f^{(e)} &= \int_{x_1^{(e)}}^{x_2^{(e)}} [B_f^{(e)}]^T EI^{(e)} B_f^{(e)} dx \\ k_S^{(e)} &= \int_{x_1^{(e)}}^{x_2^{(e)}} [B_S^{(e)}]^T GA^{(e)} B_S^{(e)} dx \\ k_f^{(e)} &= \int_{x_1^{(e)}}^{x_2^{(e)}} [N_1^{(e)} \quad 0 \quad N_2^{(e)} \quad 0]^T q dx \end{aligned} \right\} \quad (3.54)$$

Après intégration, il sort :

$$\left. \begin{aligned} k_f^{(e)} &= \left(\frac{EI}{l}\right)^{(e)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ k_S^{(e)} &= \left(\frac{GA}{l}\right)^{(e)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{l}{2} & -1 & \frac{l}{2} \\ \frac{l}{2} & \frac{l^2}{3} & \frac{-l}{2} & \frac{l^2}{6} \\ -1 & \frac{-l}{2} & 1 & \frac{-l}{2} \\ \frac{-l}{2} & \frac{l^2}{6} & \frac{-l}{2} & \frac{l^2}{3} \end{bmatrix} \\ f^{(e)} &= \begin{bmatrix} \frac{(ql)^e}{2} & 0 & \frac{(ql)^e}{2} & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (3.55)$$

Ainsi nous avons déterminés les différentes matrices de rigidités et le vecteur de force agissant sur notre structure poutre.

### **III.4. Conclusion**

Dans ce chapitre une intégration des lois de comportement élastique non-linéaire est construite pour l'élément finis barre et poutre.

La détermination de la matrice de rigidité élémentaire des éléments finis barre et poutre dépend de l'état de l'historique du module de Young et l'inertie  $I_z$  (ici pour l'élément finis poutre), donc elle varie suivant l'état actuel de la déformation et n'est pas constante comme pour le cas du comportement linéaire élastique.

# Chapitre IV :

## Validations numériques

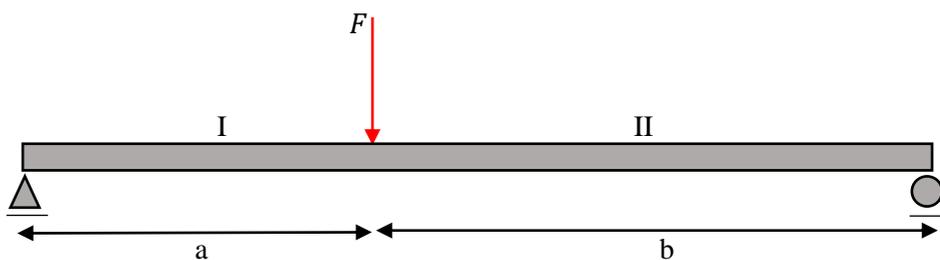
## IV.1. Introduction

La théorie des poutres est une application de la théorie de l'élasticité isotrope, c'est un outil qui permet de déterminer des solutions analytiques en considérant des hypothèses additionnelles : l'hypothèse de Bernoulli et l'hypothèse de Timoshenko. L'hypothèse de Bernoulli permet de négliger le cisaillement dans le cas de la flexion dont le risque de rupture est dû à l'extension des fibres situés à l'extérieur de la flexion et la flèche est due au moment fléchissant, tandis que la théorie de Timoshenko prend bien en compte l'effet du cisaillement. Nous les verrons en détails dans ce chapitre à travers divers exemples avec l'application de la méthode des éléments finis.

## IV.2. Méthode de calcul Bernoulli contre la méthode de Timoshenko

### IV.2.1. Poutre appuyée (charge ponctuelle)

Considérons une poutre doublement appuyée (appuis simple et appuis double) qui a les caractéristiques suivantes :



**Fig. IV.1.** Charge concentrée (poutre simplement appuyée)

Le tableau (IV.1) récapitule les différentes valeurs des déplacements et rotations au point d'application de la force extérieure  $F$  par l'utilisation de la méthode de Bernoulli et Timoshenko.

Le tableau (IV.2) récapitule les différentes valeurs des déplacements et rotations au point d'application de la force extérieure  $F$  par l'utilisation de la méthode de Bernoulli et Timoshenko pour une hauteur de la poutre  $b=0.01L$ ,  $b=0.1L$  et  $b=0.25L$  ( $L$  est la longueur de la poutre) et pour des valeurs du coefficient de poisson  $\nu = 0$ ,  $\nu = 0.25$  et  $\nu = 0.5$ .

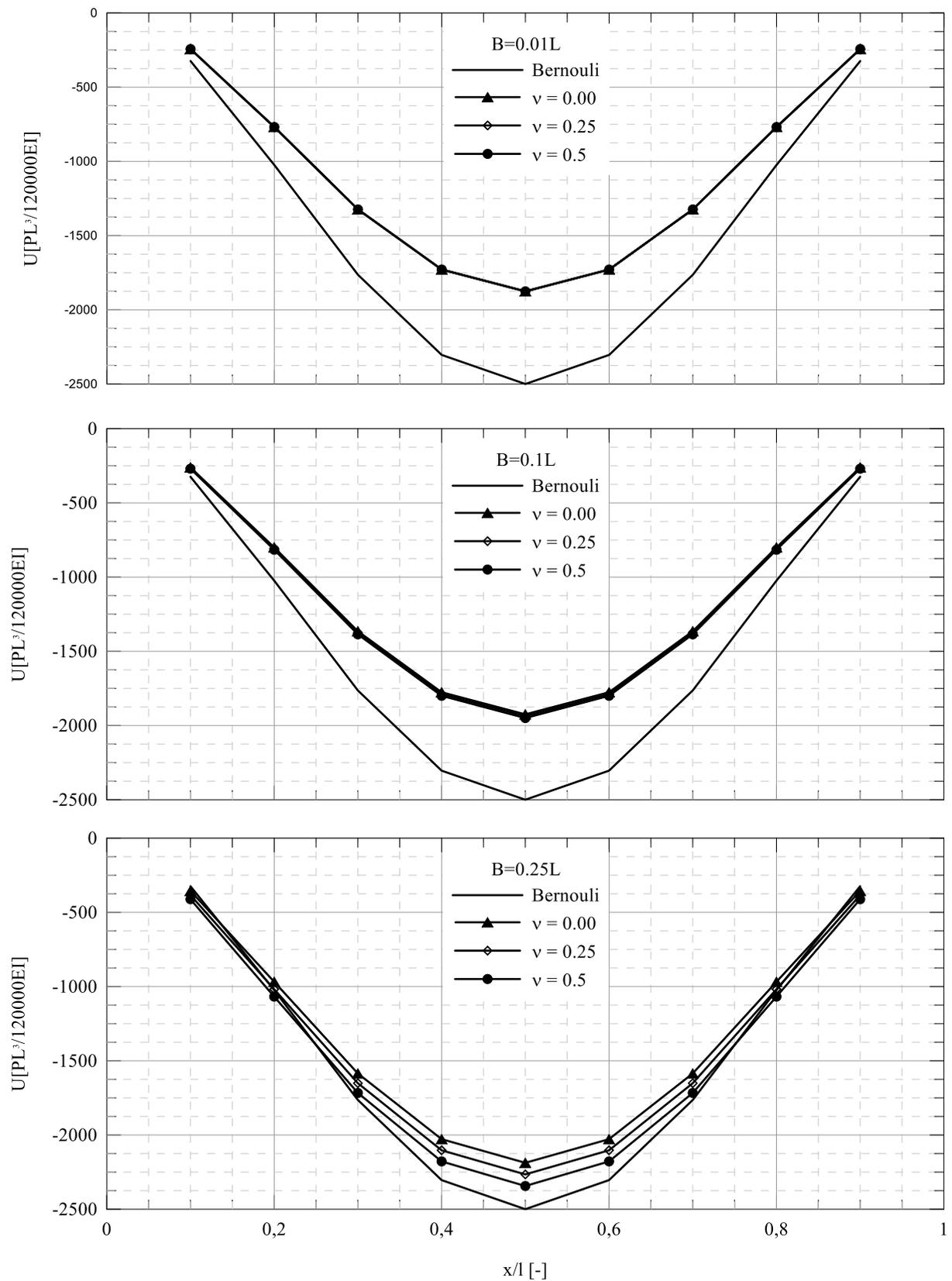
La figure (IV.1) schématise l'effet du coefficient de poisson et de la hauteur de la poutre sur le déplacement.

**Tableau IV.1.** Déplacements et rotation trouvés par les deux méthodes (Bernoulli et Timoshenko) :

a	Bernoulli		Timoshenko	
	U	$\theta$	U	$\theta$
0.1L	$\frac{81L^3P}{2500Eab^3}$	$\frac{36L^2P}{125Eab^3}$	$\frac{9LP(200b^2(1+\nu) + 27L^2)}{10000Eab^3}$	$\frac{27L^2P}{125Eab^3}$
0.2L	$\frac{64L^3P}{625Eab^3}$	$\frac{48L^2P}{125Eab^3}$	$\frac{8LP(25b^2(1+\nu) + 6L^2)}{625Eab^3}$	$\frac{36L^2P}{125Eab^3}$
0.3L	$\frac{441L^3P}{2500Eab^3}$	$\frac{42L^2P}{125Eab^3}$	$\frac{21LP(200b^2(1+\nu) + 63L^2)}{10000Eab^3}$	$\frac{63L^2P}{250Eab^3}$
0.4L	$\frac{144L^3P}{625Eab^3}$	$\frac{24L^2P}{125Eab^3}$	$\frac{12LP(25b^2(1+\nu) + 9L^2)}{625Eab^3}$	$\frac{18L^2P}{125Eab^3}$
0.5L	$\frac{L^3P}{4Eab^3}$	0	$\frac{LP(8b^2(1+\nu) + 3L^2)}{16Eab^3}$	0
0.6L	$\frac{144L^3P}{625Eab^3}$	$\frac{24L^2P}{125Eab^3}$	$\frac{12LP(25b^2(1+\nu) + 9L^2)}{625Eab^3}$	$\frac{18L^2P}{125Eab^3}$
0.7L	$\frac{441L^3P}{2500Eab^3}$	$\frac{42L^2P}{125Eab^3}$	$\frac{21LP(200b^2(1+\nu) + 63L^2)}{10000Eab^3}$	$\frac{63L^2P}{250Eab^3}$
0.8L	$\frac{64L^3P}{625Eab^3}$	$\frac{48L^2P}{125Eab^3}$	$\frac{8LP(25b^2(1+\nu) + 6L^2)}{625Eab^3}$	$\frac{36L^2P}{125Eab^3}$
0.9L	$\frac{81L^3P}{2500Eab^3}$	$\frac{36L^2P}{125Eab^3}$	$\frac{9LP(200b^2(1+\nu) + 27L^2)}{10000Eab^3}$	$\frac{27L^2P}{125Eab^3}$

**Tableau IV.2.** Résultats trouvés

		<b>U_Tim</b>								
		b=0.01L			b=0.1L			b=0.25L		
x/l	<b>U_Ber</b>	$v = 0$	$v = 0.25$	$v = 0.5$	$v = 0$	$v = 0.25$	$v = 0.5$	$v = 0$	$v = 0.25$	$v = 0.5$
0.1	-324	-243	-243	-243	-261	-265	-270	-355	-383	-412
0.2	-1024	-768	-768	-768	-800	-808	-816	-968	-1018	-1068
0.3	-1764	-1323	-1323	-1324	-1365	-1375	-1386	-1585	-1651	-1717
0.4	-2304	-1729	-1729	-1729	-1776	-1788	-1800	-2028	-2103	-2178
0.5	-2500	-1875	-1876	-1876	-1925	-1937	-1950	-2187	-2266	-2344
0.6	-2304	-1728	-1729	-1729	-1776	-1788	-1800	-2028	-2103	-2178
0.7	-1764	-1323	-1323	-1324	-1365	-1375	-1386	-1585	-1651	-1717
0.8	-1024	-768	-768	-768	-800	-808	-816	-968	-1018	-1068
0.9	-324	-243	-243	-243	-261	-265	-270	-355	-384	-412

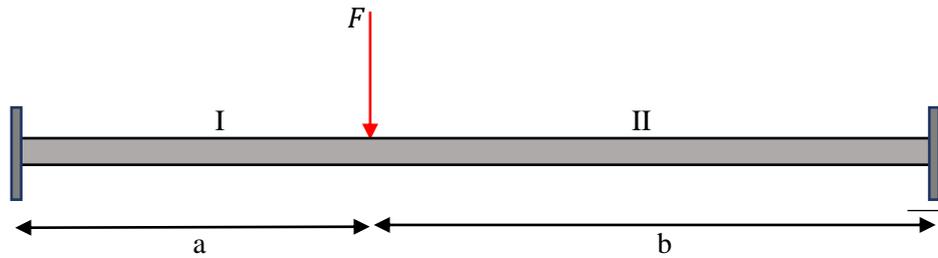


**Fig. IV.2.** Effet du coefficient de poisson et de la hauteur de la poutre sur le déplacement

Avec la méthode de Timoshenko, on observe que la hauteur de la poutre est proportionnelle à l'influence de la réponse, plus elle est importante et mieux on observe les différentes courbes en fonction de la variation du coefficient de Poisson.

#### IV.2.2. Poutre encastrée (charge ponctuelle)

Considérons une poutre doublement encastrée (double encastrement) qui a les caractéristiques suivantes :



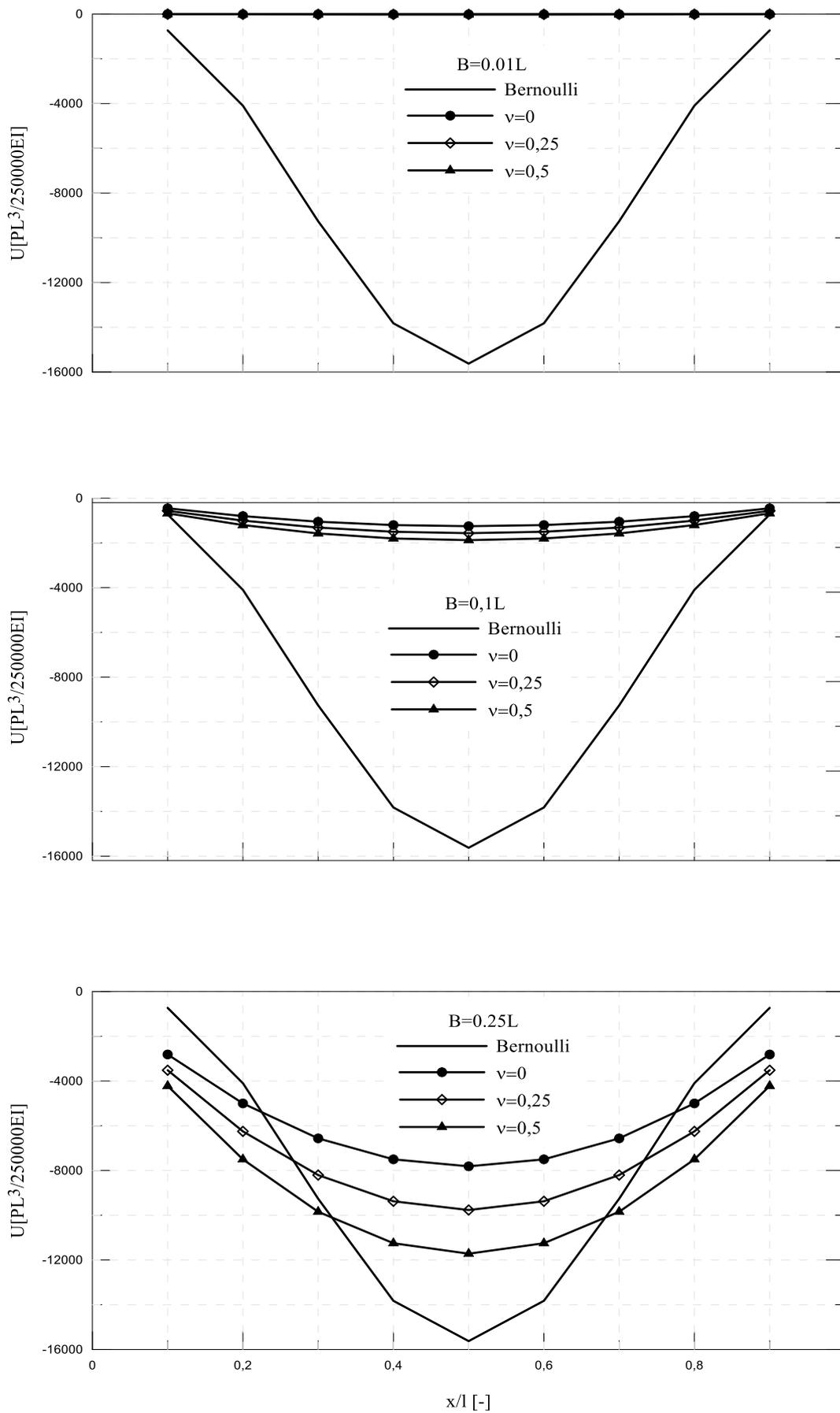
**Fig. IV.3.** Charge concentrée (poutre simplement appuyée)

Le tableau (IV.3) récapitule les différentes valeurs des déplacements et rotations au point d'application de la force extérieure  $F$  par l'utilisation de la méthode de Bernoulli et Timoshenko pour une hauteur de la poutre  $b=0.01L$ ,  $b=0.1L$  et  $b=0.25L$  ( $L$  est la longueur de la poutre) et pour des valeurs du coefficient de poisson  $\nu = 0$ ,  $\nu = 0.25$  et  $\nu = 0.5$ .

La figure (IV.4) schématise l'effet du coefficient de poisson et de la hauteur de la poutre sur le déplacement.

Tableau IV.3. Résultats trouvés

x/l	U_Bern	U_Tim								
		b=0.01L			b=0.1L			b=0.25L		
		$\nu=0$	$\nu=0.25$	$\nu=0.5$	$\nu=0$	$\nu=0.25$	$\nu=0.5$	$\nu=0$	$\nu=0.25$	$\nu=0.5$
0.1	-729	-4	-6	-7	-450	-562,5	-675	-2812	-3516	-4219
0.2	-4096	-8	-10	-12	-800	-1000	-1200	-5000	-6250	-7500
0.3	-9261	-10	-13	-16	-1050	-1312	-1575	-6562	-8203	-9844
0.4	-13824	-12	-15	-18	-1200	-1500	-1800	-7500	-9375	-11250
0.5	-156252	-12	-16	-19	-1250	-1562	-1875	-7812	-9766	-11719
0.6	-13824	-12	-15	-18	-1200	-1500	-1800	-7500	-9375	-11250
0.7	-9261	-10	-13	-16	-1050	-1312	-1575	-6562	-8203	-9844
0.8	-4096	-8	-10	-12	-800	-1000	-1200	-5000	-6250	-7500
0.9	-729	-4	-6	-7	-450	-562	-675	-2812	-3516	-4219



**Fig. IV.4.** Effet du coefficient de poisson et de la hauteur de la poutre sur le déplacement

Une fois de plus, on observe toujours qu'avec la méthode de Timoshenko prédit une réponse inférieure à celle de Bernoulli dans ce cas d'étude.

### IV.3. Réponse non linéaire d'une poutre simplement appuyée chargée ponctuellement par la méthode de Timoshenko

Considérons une poutre doublement appuyée (appuis simple et appuis double) qui a les caractéristiques suivantes chargée par une force d'intensité variant avec le temps (Fig. IV.5).

Le diagramme des contraintes-déformations suit le schéma suivant la figure (IV.6).

La figure (IV.7) montre les résultats d'application de la méthode de Timoshenko suivant une variation non linéaire des contraintes-déformations.

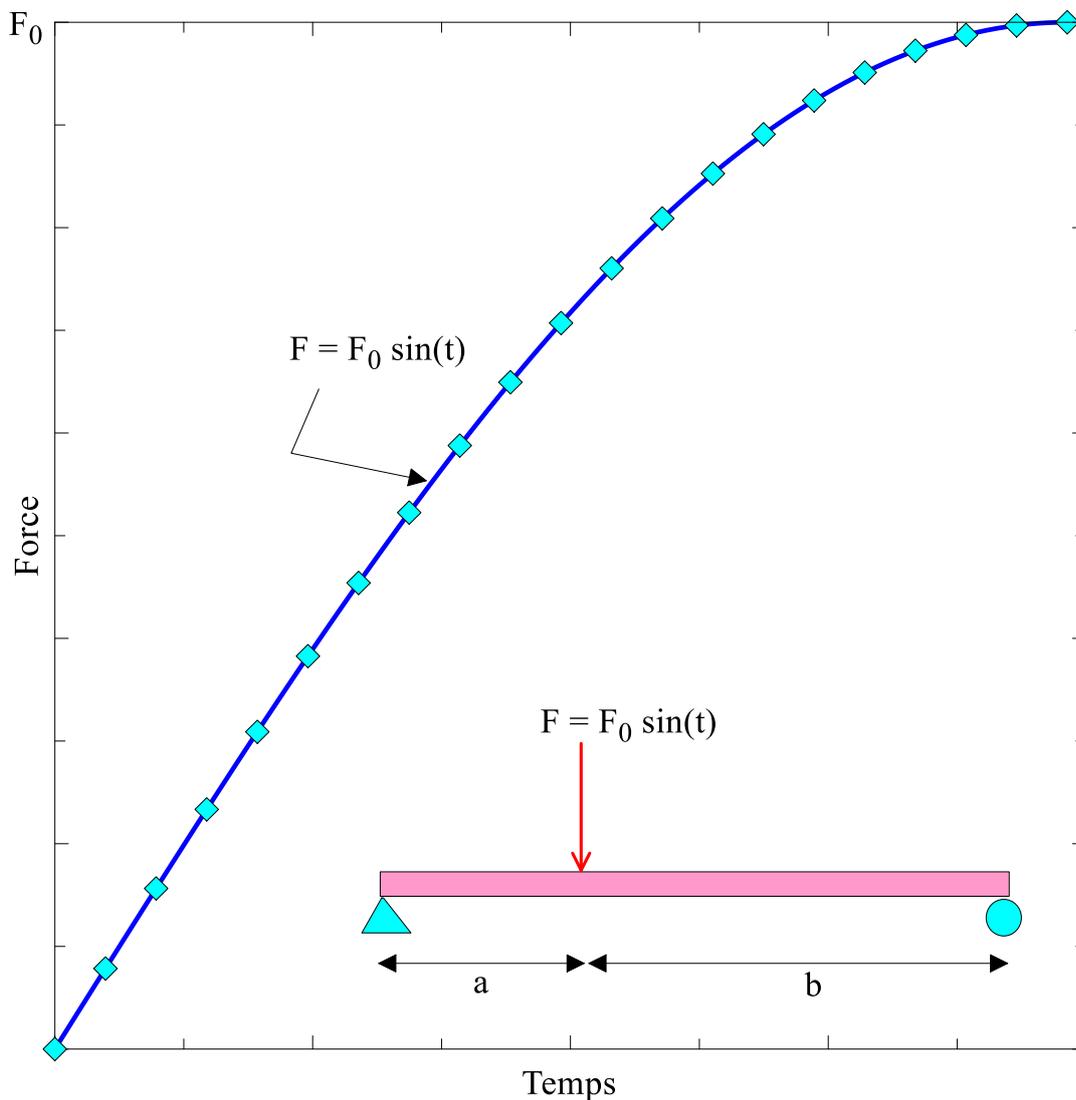
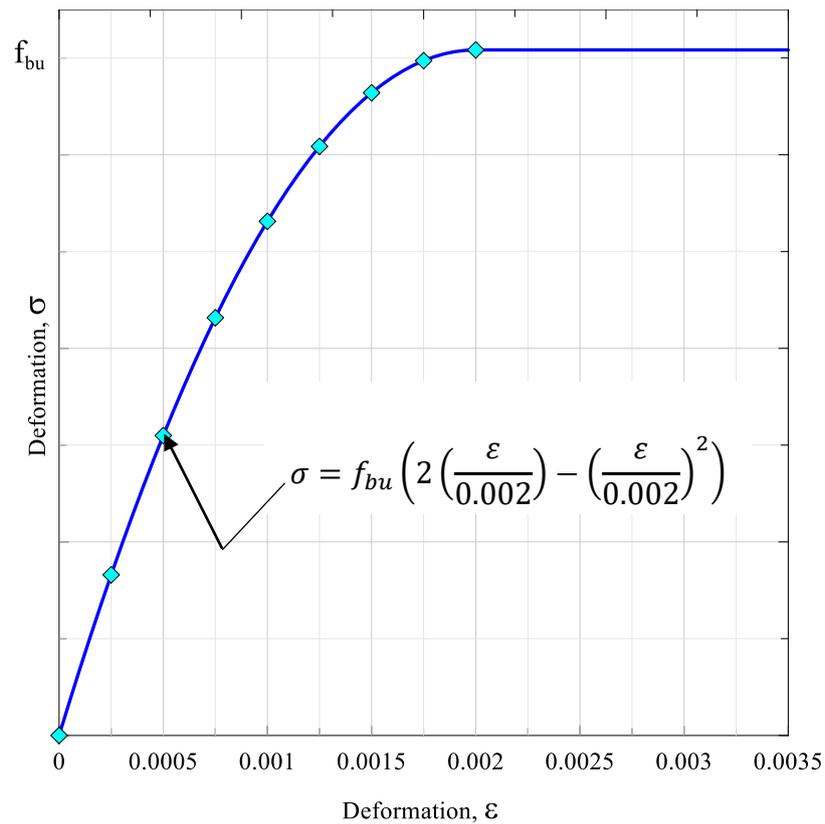
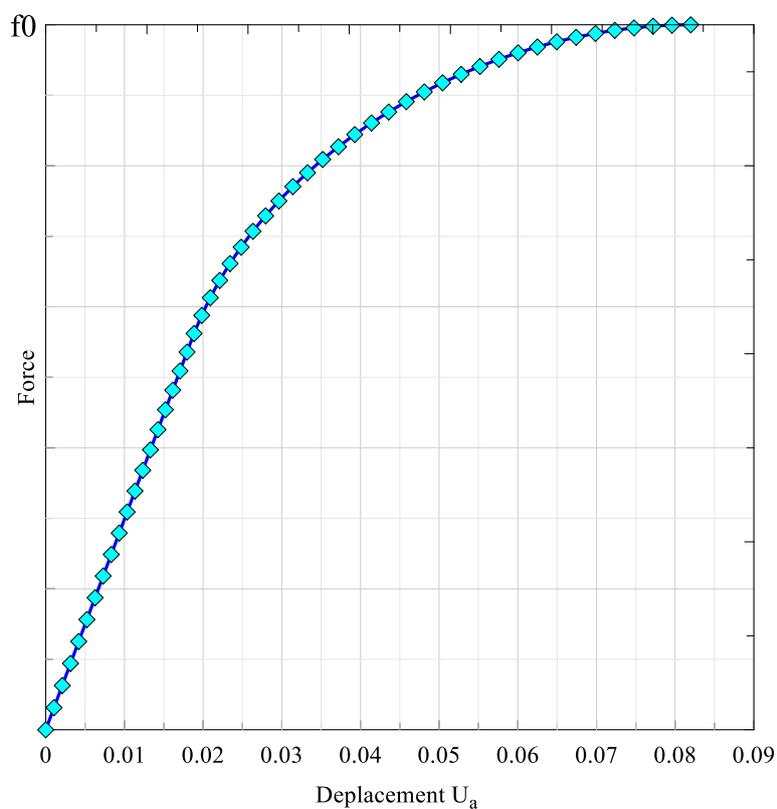


Fig. IV.5. Problème traité



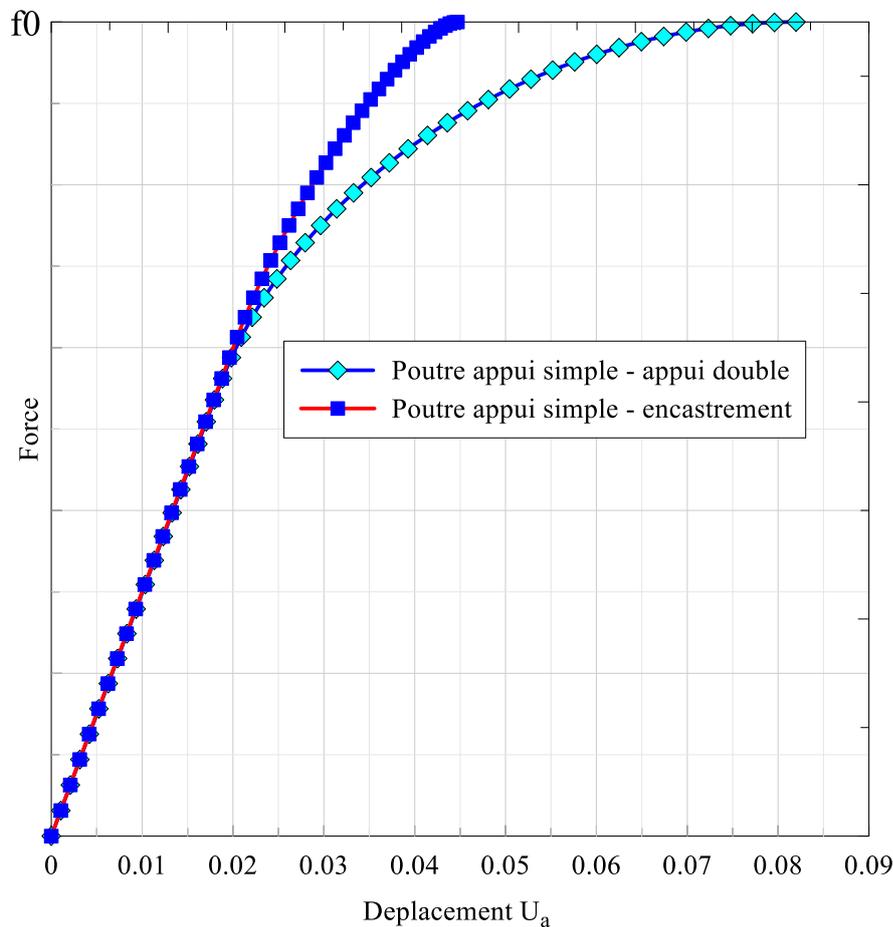
**Fig. IV.6.** La contrainte-déformation ultime du béton en compression



**Fig. IV.7.** Réponse non linéaire au point d'application de la force.

Il est clair que dans la figure (IV.6) le déplacement non linéaire est plus grand que celui dû par l'application de la méthode élastique linéaire.

La figure (IV.7) schématise la comparaison entre la réponse non linéaire dans le cas du même exemple avec cette fois-ci la poutre est encastree d'une limite et simplement appuyée dans l'autre limite.



**Fig. IV.8.** L'influence des conditions aux limites sur la réponse non linéaire au point d'application de la force sur la poutre.

Il est clair de la figure (IV.8) que la réponse non linéaire pour le cas d'une poutre simplement appuyée-encastree est moins importante pour le cas d'une poutre biarticulée, qui est tout à fait logique du point de vue comportement soit linéaire ou non-linéaire.

#### IV.4. Conclusion

La théorie des poutres permet de calculer séparément l'effet à grande longueur de variation et les effets localisés, avec la négligence de l'effet de cisaillement pour la méthode de Bernoulli, la méthode de Timoshenko se révèle être plus précise et donc plus pratique.

La réponse non-linéaire de la structure est engendrée, d'une part, par l'évolution notable de la géométrie au cours du chargement et, d'autre part, par la déformation significative du solide.

L'état courant de la structure ne correspond plus à son état initial, une réponse que nous démontre la méthode de Timoshenko qui varie légèrement en fonction du type d'appui.

# Conclusion générale

La résolution analytique d'équations différentielles pose parfois des difficultés difficiles à surmonter, et une solution exacte décrivant bien le problème étudié n'est pas toujours facile à trouver. Le recours aux modèles physiques et à la simulation expérimentale pour la recherche d'une solution analogue à la solution recherchée peut s'avérer couteux en temps et en moyens. La loi généralisée de Hooke décrit bien le comportement des géomatériaux pour des petites grandeurs de déformations, mais limitée pour des grandes déformations.

D'où l'intérêt de cette étude qui est de proposer un calcul sur des éléments poutres homogènes et isotropes. En faisant une étude comparative entre la théorie de Bernoulli et celle de Timoshenko en utilisant la méthode des éléments finis sur des poutres en flexion caractérisées par leurs coefficients de poisson.

A travers les résultats trouvés dans le quatrième chapitre, l'hypothèse de Timoshenko est plus satisfaisante car elle tient compte de l'effet du cisaillement

Le calcul non linéaire est devenu indispensable pour les structures modernes, compte tenu de l'optimisation de leur conception qui conduit à des structures souples et élancées. Il permet de modéliser de façon réaliste le comportement effectif des structures, d'une part, et de dégager d'éventuelles marges de dimensionnement et de sécurité, d'autre part.

Les logiciels de calculs actuels comme la méthode des éléments finis avec Matlab, permettent de traiter des problèmes d'une grande complexité.

Nous venons de confirmer, à travers le dernier chapitre, l'influence directe de l'allure des lois de comportement, sur le comportement d'une poutre soumise à la flexion.

Notons qu'une étude expérimentale sur un élément de poutre dynamique est d'une grande importance pour une analyse de comportement.

# REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

1. Hervé Oudin, méthode des éléments finis (28/09/2008).
2. Bouchama Boufares, Maaleg Hamza, l'effet de la formulation en grande déformation sur la réponse des géomatériaux. Aide-mémoire (2014-2015).
3. Daniel Choi, méthode des éléments-finis par l'exemple (version janvier 2016).
4. Baba Hamed Fatimah Zohra, le calcul scientifique appliqué au Génie Civil sous matlab. Faculté d'architecture et de génie civil, département génie civil.
5. <https://appx.cegep-chicoutimi.qc.ca/svilleneuve/materiaux/chap6.pdf>
6. L. CHAMPANEY, Approximation Nodale Elémentaire : les différents types d'éléments.
7. Jean-Michel Génevaux, Modélisation en mécanique des solides (28 Jul 2011).
8. <http://thesis.univ-biskra.dz/2294/4/Chapitre%2002.pdf>
9. Lakhdar BESSAIS, Analyse des structures par la M.E.F basée sur l'approche en déformation. Aide-mémoire (18-12-2012).
10. [http://eurocode-2.fr/pdf/01\\_1\\_Materiaux\\_Le\\_Beton.pdf](http://eurocode-2.fr/pdf/01_1_Materiaux_Le_Beton.pdf)
11. Abdelatif Hafsi, ETUDE DU COMPORTEMENT NON LINEAIRE DU BETON ARME (non linéarité physique).
12. Olivier Helson, Anne-Lise Beaucour, Javad Eslami, Albert Noumowé, Caractérisation du comportement mécanique des bétons de sol (24 jun 2015).
13. BENDJABALLAH Lynda, CALCUL NUMERIQUE DU MODULE D'YOUNG D'UN MATERIAU HOMOGENE ET ISOTROPE BASE SUR LA THEORIE DES POUTRES. Aide-mémoire (02-06-2010).
14. Florence Elias, ELASTICITE, Notes de Cours FLUIDES COMPLEXES ET MILIEUX DIVISES (2017-2018)
15. Yves Debard, Elasticité, Institut Universitaire de Technologie du Mans Département Génie Mécanique et Productique (24 mars 2006 – 31 mai 2011).
16. [https://fr.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9orie\\_de\\_Bernoulli](https://fr.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9orie_de_Bernoulli)
17. [https://fr.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9orie\\_des\\_poutres](https://fr.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9orie_des_poutres)